

# Практикум по курсу

## «Элементы финансовой математики»<sup>\*</sup>

### Постановка задачи

Необходимо численно решить уравнение Беллмана-Айзека для задачи гарантированного суперхеджирования опциона американского типа с заданной функцией выплат для  $n$  (рисковых) активов при наличии торговых ограничений. Предполагается, что на рынке нет транзакционных издержек.

Задача рассматривается в дискретном времени на конечном горизонте  $N$ . Пусть  $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^n) \in (0, \infty)^n$  — вектор (дисконтированных) цен рискованных активов в момент  $t \in [0, N]$ . Будем называть предысторией цен (к текущему моменту времени  $t = 1, \dots, N$ ) последовательность  $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1})$ . Считается, что безрисковый актив имеет постоянную цену, равную единице, и не подвержен торговым ограничениям. Стратегией хеджера называется последовательность векторов  $h_1, \dots, h_N$ , описывающая структуру портфеля рискованных активов, такая что  $h_t \in D_t(\bar{x}_{t-1}) \subseteq \mathbb{R}^n$  при априори заданных торговых ограничениях, задаваемых многозначными отображениями  $D_t(\cdot)$ .

Неопределенная динамика цен может быть описана в аддитивной форме:  $x_t = x_{t-1} + y_t$ ; предполагается, что приращение цен  $y_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})$ , где компактнозначные отображения  $K_t(\cdot)$  имеют смысл заданных априори допустимых сценариев изменения цен. От чисто детерминистского описания модели можно перейти к описанию динамики цен посредством смешанных стратегий рынка из класса  $\mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1})$  вероятностных мер с носителями, содержащимися в  $K_t(\bar{x}_{t-1})$ , который содержит все меры, сосредоточенные в одной точке из  $K_t(\bar{x}_{t-1})$  (меры Дирака). Обозначим  $\mathcal{P}_t^n(\bar{x}_{t-1})$  — множество вероятностных мер из  $\mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1})$ , сосредоточенных не более чем в  $n + 1$  точке.

Пусть  $g_t(\bar{x}_t)$ ,  $t = 0, \dots, N$ , — функции выплат по американскому опциону. Соответствующая целевая функция  $v_t^*(\bar{x}_t)$ ,  $t = 0, \dots, N$ , — резервы на (гарантированное) покрытие текущих и будущих обусловленных обязательств по проданному опциону. Считаем, что условия задачи таковы, что функции  $v_t^*$  полунепрерывны сверху. Тогда имеет место игровое равновесие и уравнения Беллмана-Айзека, отражающие игровую интерпретацию для исходной (детерминистской) задачи, могут быть записаны в виде

---

<sup>\*</sup> Составители: Андреев Н.А., Смирнов С.Н.

уравнений Беллмана, где задача ценообразования отделена от задачи хеджирования:

$$\begin{aligned}
v_N^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_N(\bar{x}_{t-1}), \\
v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) &= g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \sup_{Q \in \mathcal{P}_t^n(\bar{x}_{t-1})} \left[ \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) Q(dy) - \sigma_{D_t(\bar{x}_{t-1})} \left( \int y Q(dy) \right) \right], \\
t &= 1, \dots, N,
\end{aligned} \tag{1}$$

где  $\sigma_{D_t(\bar{x}_{t-1})}(\cdot)$  – опорная функция множества  $D_t(\bar{x}_{t-1})$ . Уравнение (1) может быть решено для каждого  $t$  в два этапа:

1. для фиксированного  $z \in K_t(\bar{x}_{t-1})$  находится функция

$$u_t(\bar{x}_{t-1}, z) = \sup_{\substack{Q \in \mathcal{P}_t^n(\bar{x}_{t-1}) \\ \int y Q(dy) = z}} \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) Q(dy). \tag{2}$$

2. функция цены находится как

$$v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \vee \sup_{z \in K_t(\bar{x}_{t-1})} [u_t(\bar{x}_{t-1}, z) - \sigma_{D_t(\bar{x}_{t-1})}(z)]. \tag{3}$$

Функция  $z \mapsto u_t(\bar{x}_{t-1}, z)$ , определенная посредством (2), совпадает с вогнутой оболочкой<sup>1</sup> функции  $f(y) = \begin{cases} v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y), & y \in K_t(\bar{x}_{t-1}), \\ -\infty, & y \notin K_t(\bar{x}_{t-1}) \end{cases}$  в точке  $z$ . Таким образом, для решения задач требуется находить вогнутую оболочку функции.

Для описания неопределенной динамики цен модели будем использовать мультипликативную форму, эквивалентную аддитивной. Обозначим

$$\begin{cases} x_t^i = m_t^i x_{t-1}^i, & i = 1, \dots, n, \\ m_t = (m_t^1, \dots, m_t^n) \in E_t(\cdot), \end{cases} \tag{4}$$

где компактное множество  $E_t(\cdot)$  задается как множество мультипликаторов  $m = (m^1, \dots, m^n)$ , таких что точка  $y = (y^1, \dots, y^n)$  с координатами  $y^i = (m^i - 1)x_{t-1}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  принадлежит  $K_t(\cdot)$ . Цены рискованных активов в каждый момент времени  $t = 0, \dots, n$  должны быть положительными, т.е.  $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^n) \in (0, \infty)^n$ , что равносильно положительности цен в начальный момент и условию  $E_t(\cdot) \subseteq (0, \infty)^n$ . При этом начальные цены предполагаются известными и фиксированными.

---

<sup>1</sup>Вогнутой оболочкой функции  $f$  называется функция, чей подграфик является выпуклой оболочкой подграфика  $f$  (в частности, область ее определения — выпуклая оболочка области определения  $f$ ).

## Варианты заданий

Во всех вариантах  $n = 2$ . Требуется построить решения уравнений (1) используя двух-этапную схему (2) и (3). Для корректного численного анализа моделей следует убедиться в выполнении RNDSAUP, грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. Далее необходимо качественное поведение премии  $V_0(\cdot)$  за опцион (при суперхеджировании) при разных торговых ограничениях в зависимости от

1. начальных цен активов
2. дисперсии цен
3. коэффициента корреляции (для эллипса  $E_t$ )

и проинтерпретировать результаты. Стоимости сравниваются при следующих торговых ограничениях  $D_t(\cdot)$ :

1. запрет коротких позиций по обоим активам
2. запрет коротких позиций по более волатильному активу
3. запрет коротких позиций по менее волатильному активу
4. отсутствие ограничений

### Вариант 1

Динамика цен описывается при помощи  $E_t(\cdot) \equiv E$ , где  $E = [a; b] \times [c; d]$  — прямоугольник,  $0 < a < b$ ,  $0 < c < d$ . Найти значение параметров, для которых выполняется условие отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью  $NDSAUP$ , т.е. когда  $\text{conv}(K_t(\cdot)) \cap \text{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$  и использовать их в расчетах.

Опцион — Call on Max американского типа с ценой исполнения (страйком)  $\chi > 0$  и функцией выплат

$$g_t(\bar{x}_t) = \max\{\max\{x_t^1, x_t^2\} - \chi, 0\}, \quad t = 1, \dots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

## Вариант 2

Динамика цен описывается при помощи  $E_t(\cdot) \equiv E$ , где  $E$  — эллипс с полуосями  $a > 0$  и  $b > 0$  и с углом поворота  $\varphi$ . Параметры эллипса должны быть выбраны так, чтобы он не содержал отрицательных координат. Параметры эллипса выбираются так, чтобы обеспечить отсутствие арбитражных возможностей.

Опцион — Put on Max американского типа с ценой исполнения (страйком)  $\chi > 0$  и функцией выплат

$$g_N(\bar{x}_N) = \max\{\chi - \max\{x_N^1, x_N^2\}, 0\}, \quad t = 1, \dots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

## Вариант 3

Динамика цен описывается при помощи  $E_t(\cdot) \equiv E$ , где  $E = [a; b] \times [c; d]$  — прямоугольник,  $0 < a < b$ ,  $0 < c < d$ . Параметры прямоугольника выбираются так, чтобы обеспечить отсутствие арбитражных возможностей.

Опцион — Put on Min американского типа с ценой исполнения (страйком)  $\chi > 0$  и функцией выплат

$$g_t(\bar{x}_t) = \max\{\chi - \min\{x_t^1, x_t^2\}, 0\}, \quad t = 1, \dots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

## Вариант 4

Динамика цен описывается при помощи  $E_t(\cdot) \equiv E$ , где  $E$  — эллипс с полуосями  $a > 0$  и  $b > 0$  и с углом поворота  $\varphi$ . Параметры эллипса должны быть выбраны так, чтобы он не содержал отрицательных координат. Параметры эллипса выбираются так, чтобы обеспечить отсутствие арбитражных возможностей.

Опцион — Put 2 and Call 1 американского типа с функцией выплат

$$g_t(\bar{x}_t) = \max\{x_t^1 - x_t^2, 0\}, \quad t = 1, \dots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

## Вариант 5

Динамика цен описывается при помощи  $E_t(\cdot) \equiv E$ , где  $E$  — эллипс с полуосями  $a > 0$  и  $b > 0$  и с углом поворота  $\varphi$ . Параметры эллипса должны быть выбраны так, чтобы он не содержал отрицательных координат. Параметры эллипса выбираются так, чтобы обеспечить отсутствие арбитражных возможностей.

Опцион — Best of Asset or Cash американского типа с ценой исполнения (страйком)  $\chi > 0$  и функцией выплат

$$g_t(\bar{x}_t) = \max\{x_t^1, x_t^2, K\}, \quad t = 1, \dots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

## Вариант 6

Динамика цен описывается при помощи  $E_t(\cdot) \equiv E$ , где  $E = [a; b] \times [c; d]$  — прямоугольник,  $0 < a < b$ ,  $0 < c < d$ . Параметры прямоугольника выбираются так, чтобы обеспечить отсутствие арбитражных возможностей.

Опцион — Call on Min американского типа с ценой исполнения (страйком)  $\chi > 0$  и функцией выплат

$$g_t(\bar{x}_t) = \max\{\min\{x_t^1, x_t^2\} - \chi, 0\}, \quad t = 1, \dots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

## Вариант 7

Динамика цен описывается при помощи  $E_t(\cdot) \equiv E$ , где  $E$  — эллипс с полуосями  $a > 0$  и  $b > 0$  и с углом поворота  $\varphi$ . Параметры эллипса должны быть выбраны так, чтобы он не содержал отрицательных координат. Параметры эллипса выбираются так, чтобы обеспечить отсутствие арбитражных возможностей.

Опцион — Multi-strike американского типа с ценами исполнения (страйками)  $\chi^1, \dots, \chi^n > 0$  и функцией выплат

$$g_t(\bar{x}_t) = \max\{x_t^1 - \chi^1, x_t^2 - \chi^2, 0\}, \quad t = 1, \dots, N,$$

$$g_0(x_0) = -\infty.$$

## Представление результатов

По итогам работы должен быть подготовлен отчет, в котором описано численное решение задачи, а также представлены графики сравнения стоимостей опциона в зависимости от торговых ограничений для  $N$  не менее 3. Графики должны быть наглядны. Если графики сливаются, результаты можно иллюстрировать на картах высот.

## Указания к решению

1. Функцию цены рекомендуется искать на сетке, восстанавливая от конечного к начальному моменту времени. Задачу поиска вогнутой оболочки функции можно тогда свести к задаче поиска выпуклой оболочки конечного множества точек в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Подграфик функции при этом можно ограничить снизу нулевой плоскостью, поскольку функция цены  $v_t^*(\cdot) \geq 0$ .
2. Найдя точки выпуклой оболочки, максимум в (2) можно найти, определив соответствующую грань многогранника, проекция которой содержит  $z$ , также можно свести задачу к задаче линейного программирования.
3. Аппроксимирующие компакты  $\tilde{K}_t$  — конечные множества на сетке.
4. Максимизацию в (3) имеет смысл проводить на множестве тех  $z$ , для которых  $\sigma_{D_t(\cdot)}(z) < +\infty$  (непустом благодаря условию безарбитражности NDSAUP).
5. Для поиска выпуклой оболочки можно использовать различные численные алгоритмы, включая уже реализованные в MATLAB/Python.
6. Для решения задачи можно использовать разработанный комплекс программ «Робастное управление портфелем финансовых инструментов» <https://github.com/andreevnick/robust-financial-portfolio-management-framework>. Документация: <https://robust-financial-portfolio-management-framework.readthedocs.io/en/stable/?badge=stable>. В коде проекта возможны изменения.

Для студентов создан fork основного проекта (версия 0.1.0), доступный по ссылке: <https://github.com/doctormee/robust-fpm-cmc-msu-edu-2021>. Документация для fork находится в папке docs/stable.

## Список литературы

- [1] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория. М.: ФАЗИС, 1998. 544 с.
- [2] Föllmer, H. Schied. A. Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time, 4nd edition New York : Walter de Gruyter, 2016. 608 p.
- [3] Смирнов С.Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения и уравнения Беллмана–Айзекса // Математическая теория игр и ее приложения. 2018. Т. 10. No 4. С. 59–99.
- [4] Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства «безарбитражности» рынка // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Т. 11. No 2. С. 68–95.
- [5] Смирнов, С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана–Айзекса // Математическая теория игр и ее приложения. 2019. Т. 11. No 4. С. 87–115.
- [6] Смирнов С. Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: смешанные стратегии и игровое равновесие // Математическая теория игр и ее приложения. 2020. Т. 12, No 1. С. 60–90.
- [7] Смирнов С.Н. Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: наиболее неблагоприятные сценарии поведения рынка и проблема моментов // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2020. Т. 12. № 3. С. 50–88.
- [8] Смирнов С.Н. Порог структурной устойчивости для грубого условия отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная Математика и Кибернетика. 2021. № 1. С. 38–49.