Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
18 апреля 2018 года
Вариант МА10509
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

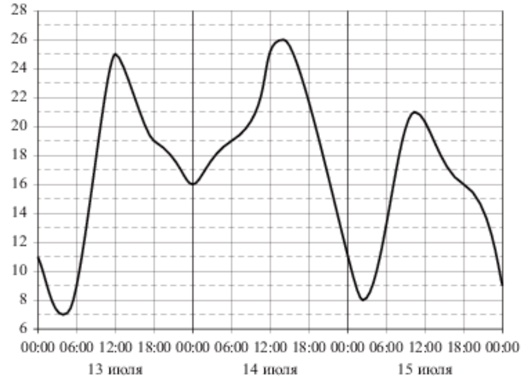
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Больному прописано лекарство, которое нужно принимать по 0,5 г 2 раза в день в течение 15 дней. В одной упаковке 6 таблеток лекарства по 0,25 г. Какого наименьшего количества упаковок хватит на весь курс лечения?

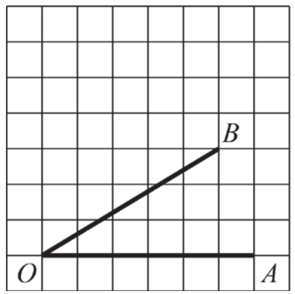
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наибольшую температуру воздуха 13 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён угол. Найдите тангенс этого угла.



Ответ: ___________________________.

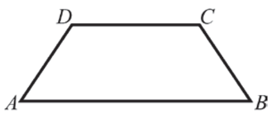
4 На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,15. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,3. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\log_{11}(16+x)=\log_{11}12$.

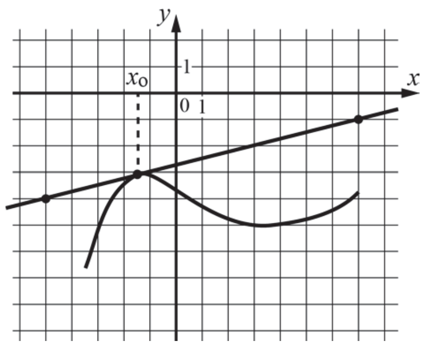
Ответ: ___________________________.

6 Большее основание равнобедренной трапеции равно 25. Боковая сторона равна 3. Синус острого угла равен $\frac{\sqrt{11}}{6}$. Найдите меньшее основание.



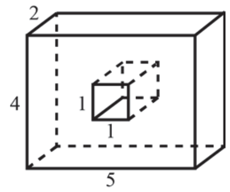
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: ___________________________.

8 Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $(49a^2-9)\cdot\left(\frac{1}{7a-3}-\frac{1}{7a+3}\right)$.

Ответ: ___________________________.

10 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t)=T_0+bt+at^2$, где t — время в минутах, $T_0=1300$ К, $a=-\frac{14}{3}$ К/мин^2, $b=98$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1720 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ___________________________.

11 Четыре одинаковые рубашки дешевле куртки на 4 %. На сколько процентов шесть таких же рубашек дороже куртки?

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=13+75x-x^3$ на отрезке $[-5;5]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

14

Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, все рёбра которой равны 12. Точка N — середина бокового ребра MA, точка K делит боковое ребро MB в отношении $2:1$, считая от вершины M.
а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки N и K параллельно прямой AD, является равнобедренной трапецией.
б) Найдите площадь этого сечения.

15

Решите неравенство $2^{\lg(x^2-4)}\ge(x+2)^{\lg 2}$.

16

Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC=3MB$.
а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC=12$.

17

В июле планируется взять кредит на сумму 1 342 000 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.
На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

18

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(a-1)x^2+2ax+a+4\le 0,\\ ax^2+2(a+1)x+a+1\ge 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

19

Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $7x=16y-73$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 204?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

Ответы на тренировочные варианты 10509-10512 (профильный уровень) от 18.04.2018

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10509	10	25	0,6	0,45	- 4	20	0,25	82	6	6	44	- 237
10510	7	- 12	5	0,55	8	14	0,75	106	- 8	5	20	- 117
10511	2500	24	12	0,375	- 5	176	16	54	54	0,8	15	746
10512	1500	11800	15	0,375	4	240	8	36	69	0,9	32	353

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде $2^{1-\cos^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$. Сделаем замену $y=2^{\cos^2 x}$.

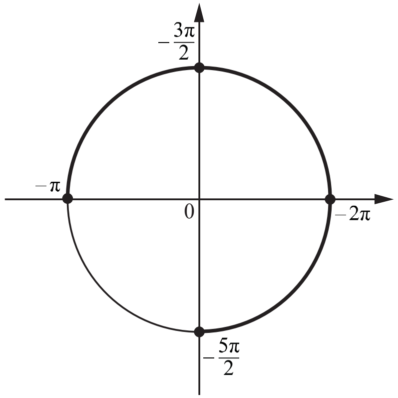
Получаем $\frac{2}{y}+y=3$; $\frac{y^2-3y+2}{y}=0$, откуда $y=1$ или $y=2$.

Сделаем обратную замену:

$$2^{\cos^2 x}=1 \text{ или } 2^{\cos^2 x}=2, \text{ откуда } \cos^2 x=0 \text{ или } \cos^2 x=1.$$

Тогда $\cos x=0$, $\cos x=-1$ или $\cos x=1$, откуда $x=\frac{\pi n}{2}$, где $n\in\mathbb{Z}$.

б) Отберём корни на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$ с помощью единичной окружности.



Получаем $-\frac{5\pi}{2}$, -2π, $-\frac{3\pi}{2}$ и $-\pi$.

Ответ: а) $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{2}$; -2π; $-\frac{3\pi}{2}$; $-\pi$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

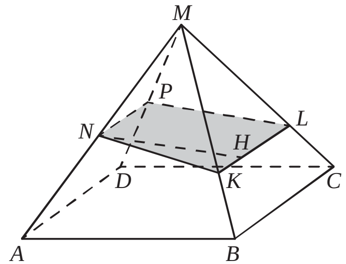
14

Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, все рёбра которой равны 12. Точка N — середина бокового ребра MA, точка K делит боковое ребро MB в отношении $2:1$, считая от вершины M.

а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки N и K параллельно прямой AD, является равнобедренной трапецией.

б) Найдите площадь этого сечения.

Решение.



а) Через точки N и K проведём прямые, параллельные ребру AD. Эти прямые пересекают рёбра MD и MC в точках P и L соответственно. Четырёхугольник $KLPN$ — сечение пирамиды указанной плоскостью. Стороны NP и KL параллельны и не равны. Следовательно, $KLPN$ — трапеция. В треугольниках NMK и PML углы при вешине M равны, $ML=MK$, $MN=MP$. Следовательно, треугольники равны, и поэтому $NK=PL$. Таким образом, трапеция $KLPN$ равнобедренная.

б) Пусть NH — высота трапеции $KLPN$. Имеем

$$NP=\frac{1}{2}AD=6,\ KL=\frac{2}{3}BC=8.$$

Найдём NK из треугольника NMK. Имеем $NM=NP=6$, $MK=KL=8$. По теореме косинусов

$$NK^2=NM^2+MK^2-2NM\cdot MK\cdot\cos\angle NMK=36+64-48=52.$$

Поскольку трапеция равнобедренная, $KH=\frac{KL-NP}{2}=1$. По теореме Пифагора из треугольника KHN получаем

$$NH=\sqrt{NK^2-HK^2}=\sqrt{52-1}=\sqrt{51}.$$

Следовательно, площадь трапеции равна

$$\frac{KL+NP}{2}\cdot NH=\frac{8+6}{2}\cdot\sqrt{51}=7\sqrt{51}.$$

Ответ: б) $7\sqrt{51}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $2^{\lg(x^2-4)}\ge(x+2)^{\lg 2}$.

Решение.

Имеем

$$2^{\lg\left(x^2-4\right)}\ge\left(x+2\right)^{\lg 2};\quad \lg 2^{\lg\left(x^2-4\right)}\ge\lg\left(x+2\right)^{\lg 2};$$

$$\lg((x-2)(x+2))\cdot\lg 2\ge\lg 2\cdot\lg(x+2);\quad \lg(x-2)+\lg(x+2)\ge\lg(x+2);$$

$$\begin{cases}x-2\ge 1,\\ x+2>0,\end{cases}\text{ откуда } x\ge 3.$$

Ответ: $x\ge 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

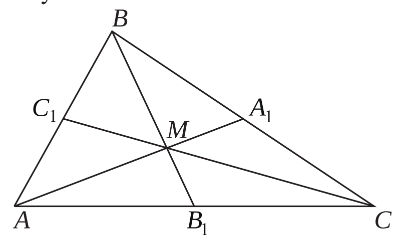
б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 12$.

Решение.

а) Известно, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. Значит,

$$BB_1=\frac{3}{2}BM=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC=\frac{1}{2}AC.$$

Можно построить окружность с центром B_1 и радиусом $\frac{1}{2}AC$. Вписанный угол ABC опирается на диаметр, поэтому он равен 90°. Следовательно, треугольник ABC прямоугольный.



б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2=A_1B^2+BA^2=\frac{1}{4}CB^2+BA^2.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника C_1BC находим

$$CC_1^2=C_1B^2+BC^2=\frac{1}{4}AB^2+BC^2.$$

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2+CC_1^2=\frac{5}{4}AB^2+\frac{5}{4}BC^2=\frac{5}{4}\left(AB^2+BC^2\right)=\frac{5}{4}AC^2=180.$$

Ответ: б) 180.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле планируется взять кредит на сумму 1 342 000 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.
На сколько рублей больше придётся отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года), по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Решение.
Пусть сумма кредита составляет $S = 1\,342\,000$ рублей, ежегодные выплаты в случае погашения кредита за 4 года составляют x рублей, а в случае погашения кредита за 2 года — y рублей. По условию долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S;\ \ 1{,}2S - x;\ \ 1{,}2^2 S - \left(1{,}2x + x\right);\ \ 1{,}2^3 S - \left(1{,}2^2 x + 1{,}2x + x\right);$$

$$1{,}2^4 S - \left(1{,}2^3 x + 1{,}2^2 x + 1{,}2x + x\right) = 0,$$

откуда $x = \dfrac{1{,}2^4 \cdot \left(1{,}2 - 1\right) S}{\left(1{,}2^4 - 1\right)} = \dfrac{20\,736 \cdot 0{,}2 \cdot 1\,342\,000}{10\,736} = 518\,400$ рублей. В этом случае придётся отдать 2 073 600 рублей.
Если отдавать кредит двумя равными платежами, то долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S;\ \ 1{,}2S - y;\ \ 1{,}2^2 S - \left(1{,}2y + y\right) = 0,$$

откуда $y = \dfrac{1{,}2^2 S}{2{,}2} = \dfrac{1{,}44 \cdot 1\,342\,000}{2{,}2} = 878\,400$ рублей. В этом случае придётся отдать 1 756 800 рублей, то есть на 316 800 рублей меньше, чем в предыдущем случае.
Ответ: 316 800 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \le 0,\\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \ge 0\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.
Решение системы может быть единственным в двух случаях.
Случай 1. Единственное решение является граничной точкой для множества решений каждого из двух неравенств. В этом случае это единственное решение должно удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases}(a-1)x^2 + 2ax + a + 4 = 0,\\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 = 0.\end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$x^2 + 2x - 3 = 0,\ \text{откуда}\ x = 1\ \text{или}\ x = -3.$$

Если $x = 1$, то $a + 2(a+1) + a + 1 = 0$, а значит, $a = -\dfrac{3}{4}$. При этом значении a система принимает вид

$$\begin{cases}x \le -\dfrac{13}{7}\ \text{или}\ x \ge 1,\\ -\dfrac{1}{3} \le x \le 1.\end{cases}$$

Единственное решение: $x = 1$.
Если $x = -3$, то $9a - 6(a+1) + a + 1 = 0$ и $a = \dfrac{5}{4}$. Система принимает вид

$$\begin{cases}x^2 + 10x + 21 \le 0,\\ 5x^2 + 18x + 9 \ge 0;\end{cases}\quad \begin{cases}-7 \le x \le -3,\\ x \le -3\ \text{или}\ x \ge -\dfrac{3}{5};\end{cases}\quad -7 \le x \le -3.$$

При этом значении a система имеет бесконечно много решений.
Случай 2. Одно из неравенств имеет единственное решение, удовлетворяющее другому неравенству.
Первое неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases}a^2 - (a-1)(a+4) = 0,\\ a > 1,\end{cases}\quad \text{откуда}\ a = \dfrac{4}{3}.$$

Первое неравенство имеет единственное решение $x = -4$, которое удовлетворяет второму неравенству.
Второе неравенство имеет единственное решение при

$$\begin{cases}(a+1)^2 - a(a+1) = 0,\\ a < 0,\end{cases}\quad \text{откуда}\ a = -1.$$

Второе неравенство имеет единственное решение $x=0$, которое не удовлетворяет первому неравенству.

Ответ: $a=-\frac{3}{4}$, $a=\frac{4}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *a*, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $7x = 16y - 73$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 204?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

Решение.

а) Для чисел $x = 17$ и $y = 12$ выполняется условие $7x = 16y - 73$, $q = 204$, $d = 1$, $\frac{q}{d}=204$.

б) и в) При $x = 1$ и $y = 5$ выполняется равенство $7x = 16y - 73$ и $\frac{q}{d}=5$.

Покажем, что никакое значение $\frac{q}{d}$, меньшее 5, не реализуется.

Пусть $x = ad$, а $y = bd$, где a и b — натуральные числа с наибольшим общим делителем 1. Тогда $q=\frac{xy}{d}=abd$ и $\frac{q}{d}=ab$.

Если $\frac{q}{d}=1$, то $a=b$, $x=y=\frac{73}{9}$, что невозможно, поскольку x и y — натуральные числа.

Если $\frac{q}{d}=2$, то возможны два случая:

1) $a = 1$, $b = 2$, то есть $y = 2x$, откуда $x=\frac{73}{25}$, что невозможно.

2) $a = 2$, $b = 1$, то есть $x = 2y$, откуда $y=\frac{73}{2}$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d}=3$, то возможны два случая:

1) $a = 1$, $b = 3$, то есть $y = 3x$, откуда $x=\frac{73}{41}$, что невозможно.

2) $a = 3$, $b = 1$, то есть $x = 3y$, откуда $y=-\frac{73}{5}$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d}=4$, то возможны два случая:

1) $a = 1$, $b = 4$, то есть $y = 4x$, откуда $x=\frac{73}{57}$, что невозможно.

2) $a = 4$, $b = 1$, то есть $x = 4y$, откуда $y=-\frac{73}{12}$, что невозможно.

Ответ: а) да; б) нет; в) 5.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4