

ЕДИНЫЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ



ЭКЗАМЕН

К НОВОЙ ОФИЦИАЛЬНОЙ
ДЕМОНСТРАЦИОННОЙ ВЕРСИИ ЕГЭ
СОЗДАНО РАЗРАБОТЧИКАМИ ЕГЭ

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ЕГЭ

2019

**ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ
ЗАДАНИЯ**

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Под редакцией И. В. Ященко

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

14 вариантов заданий

Ответы и решения

Критерии оценок

Бланки ответов

*Издательство
«ЭКЗАМЕН»*

МОСКВА
2019

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
Е33

Е33 ЕГЭ 2019. Математика. Профильный уровень. 14 вариантов. Типовые тестовые задания от разработчиков ЕГЭ / И. В. Ященко, М. А. Волчкевич, И. Р. Высоцкий, Р. К. Гордин, П. В. Семёнов, О. Н. Косухин, Д. А. Фёдоровых, А. И. Суздальцев, А. Р. Рязановский, В. А. Смирнов, А. В. Хачатурян, С. А. Шестаков, Д. Э. Шноль; под ред. И. В. Ященко. — М. : Издательство «Экзамен», 2019. — 79, [1] с. (Серия «ЕГЭ. ОФЦ. Тесты от разработчиков»)

ISBN 978-5-377-13528-9

Авторы пособия — ведущие специалисты, принимающие непосредственное участие в разработке методических материалов для подготовки к выполнению контрольных измерительных материалов ЕГЭ.

Типовые тестовые задания по математике содержат 14 вариантов комплектов заданий, составленных с учётом всех особенностей и требований Единого государственного экзамена по математике профильного уровня в 2019 году. Назначение пособия — предоставить читателям информацию о структуре и содержании контрольных измерительных материалов 2019 г. по математике профильного уровня, степени трудности заданий.

В сборнике даны ответы на все варианты тестов и приводятся решения всех заданий одного из вариантов. Кроме того, приведены образцы бланков, используемых на ЕГЭ для записи ответов и решений.

Пособие может быть использовано учителями для подготовки учащихся к экзамену по математике в форме ЕГЭ, а также старшеклассниками и выпускниками — для самоподготовки и самоконтроля.

Приказом № 699 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Формат 60×90/8. Гарнитура «Школьная». Бумага газетная. Уч.-изд. л. 3,84.
Усл. печ. л. 10. Тираж 5000 экз. Заказ 6139/18.

ISBN 978-5-377-13528-9

- © Ященко И. В., Волчкевич М. А., Высоцкий И. Р., Гордин Р. К., Семёнов П. В., Косухин О. Н., Фёдоровых Д. А., Суздальцев А. И., Рязановский А. Р., Смирнов В. А., Хачатурян А. В., Шестаков С. А., Шноль Д. Э., 2019
- © Издательство «**ЭКЗАМЕН**», 2019

СОДЕРЖАНИЕ

Инструкция по выполнению работы	7
Вариант 1	
Часть 1	8
Часть 2	10
Вариант 2	
Часть 1	12
Часть 2	14
Вариант 3	
Часть 1	16
Часть 2	18
Вариант 4	
Часть 1	20
Часть 2	22
Вариант 5	
Часть 1	24
Часть 2	26
Вариант 6	
Часть 1	28
Часть 2	29
Вариант 7	
Часть 1	32
Часть 2	34
Вариант 8	
Часть 1	37
Часть 2	39
Вариант 9	
Часть 1	42
Часть 2	44
Вариант 10	
Часть 1	46
Часть 2	48
Вариант 11	
Часть 1	50
Часть 2	52

Вариант 12	
Часть 1	54
Часть 2	56
Вариант 13	
Часть 1	58
Часть 2	60
Вариант 14	
Часть 1	62
Часть 2	64
Ответы	
Вариант 1	66
Вариант 2	66
Вариант 3	66
Вариант 4	67
Вариант 5	67
Вариант 6	67
Вариант 7	68
Вариант 8	68
Вариант 9	68
Вариант 10	69
Вариант 11	69
Вариант 12	69
Вариант 13	70
Вариант 14	70
Решение заданий	
Вариант 7. Часть 2	73

Единственный государственный экзамен

Бланк
ответов № 1

Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЕРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
А В С D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z ,

Регион

Код
предмета

Название предмета

С правилами экзамена ознакомлен и согласен
Совпадение номеров вариантов в задании
и бланке регистрации подтверждаю
Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка

Номер варианта

ВНИМАНИЕ! Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета

Результаты выполнения заданий с ответом в краткой форме

1		21	
2		22	
3		23	
4		24	
5		25	
6		26	
7		27	
8		28	
9		29	
10		30	
11		31	
12		32	
13		33	
14		34	
15		35	
16		36	
17		37	
18		38	
19		39	
20		40	

Бланк ответов № 2

Регион	Код предмета	Название предмета	Номер варианта
--------	--------------	-------------------	----------------

ВНИМАНИЕ! Данный бланк использовать только совместно с двумя другими бланками из данного пакета

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin black lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

5



Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 8 заданий с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания с кратким ответом и 7 заданий с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

ВАРИАНТ 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

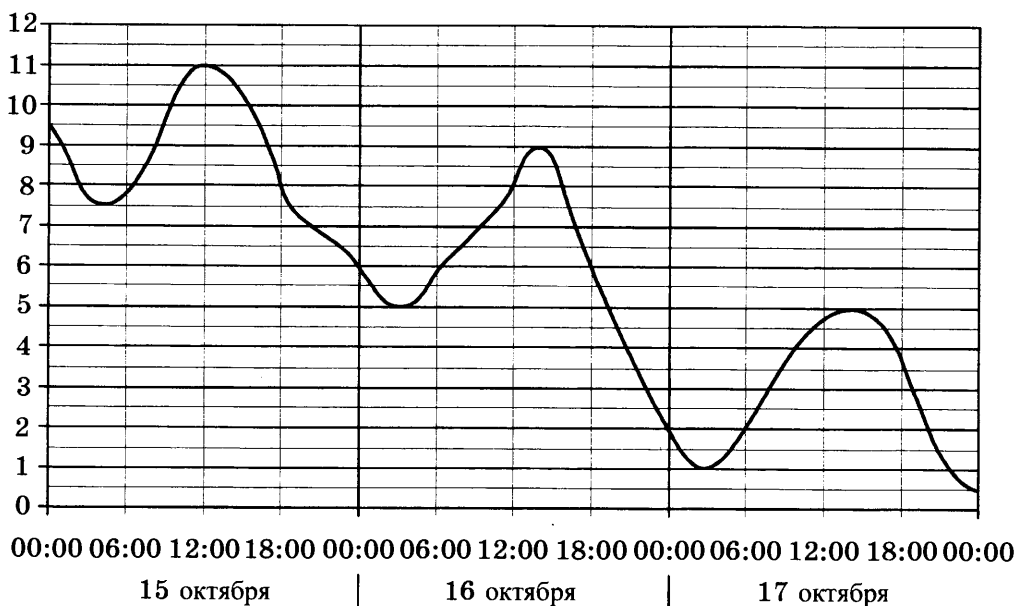
Часть 1

1

1. Розничная цена учебника 204 рубля, она на 20% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 7500 рублей?

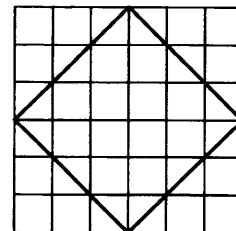
2

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 17 октября. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



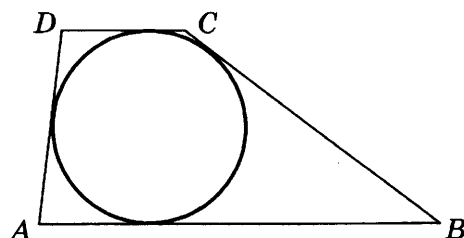
4. На фабрике керамической посуды 30% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 65% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

 4

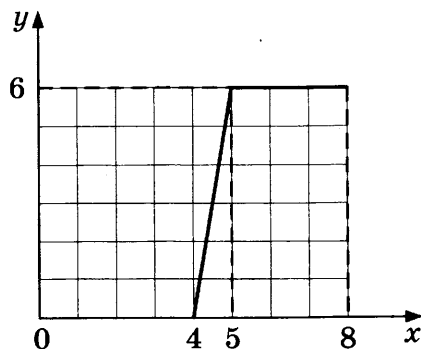
5. Найдите корень уравнения $\log_3(12 - x) = 3 \log_3 4$.

 5

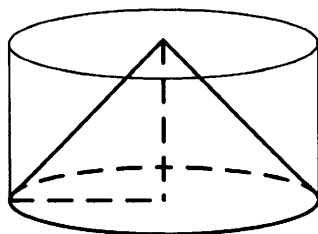
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 25 и 3. Найдите среднюю линию трапеции.

 6


7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(8) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

 7


8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $21\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

 8


Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $(\sqrt{72} - \sqrt{98}) \cdot \sqrt{8}$.

10

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 3$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1,8$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 7,9 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300 \text{ К}$ — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в $14\,220 \text{ Дж}$.

11

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 7 рабочих, а во второй — 10 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 2 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (x - 8)^2 (x - 9) + 1$ на отрезке $[-4; 8,5]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

14

14. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α .
а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.
б) Найдите объём пирамиды $MBKL$, если $AB = 6$.

15. Решите неравенство $0,2^{\frac{2x+3}{x-5}} \cdot 15^{2x} \cdot 25x^{-2} \geq \frac{25^{\frac{2x+3}{x-5}} \cdot 9^x}{5x^2}$.

15

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC , а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D , причём $CD = DO = OH$.

16

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q . Найдите AQ , если сторона квадрата $KL = 5$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 17 месяцев. Условия возврата таковы:

17

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 15% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r .

18. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

18

$$\begin{cases} (ay + ax + 3)(y + x - a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

19. Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 6000.

19

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

ВАРИАНТ 2

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

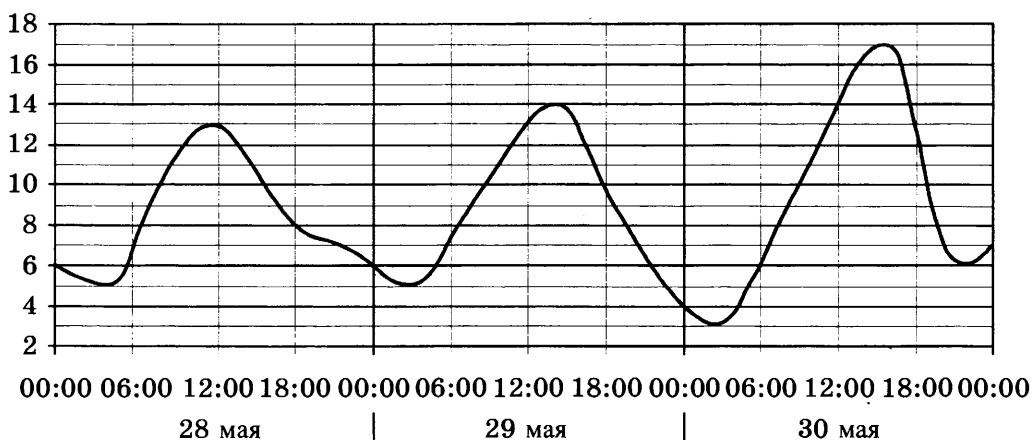
Часть 1

1

1. Розничная цена учебника 125 рублей, она на 25% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 5800 рублей?

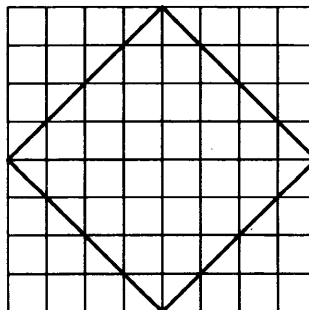
2

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 29 мая. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



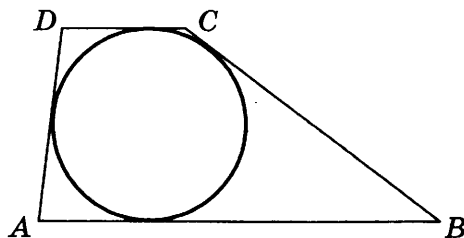
4. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 70% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

 4

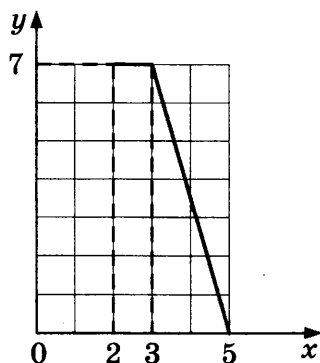
5. Найдите корень уравнения $\log_3(14 - x) = 2\log_3 5$.

 5

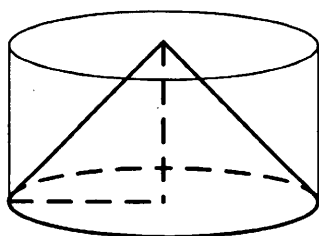
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 13 и 1. Найдите среднюю линию трапеции.

 6


7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(5) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

 7


8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $80\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

 8


Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $(\sqrt{96} - \sqrt{6}) \cdot \sqrt{6}$.

10

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 5$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1,8$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 6,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300 \text{ К}$ — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 28 350 Дж.

11

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 3 рабочих, а во второй — 9 рабочих. Через 4 дня после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (x + 6)^2 (x - 10) + 8$ на отрезке $[-14; -3]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sin \frac{5\pi}{6}$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

14

14. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α .
а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.
б) Найдите объём пирамиды $MCKL$, если $AB = 4$.

15. Решите неравенство $0,25^{\frac{3x-2}{x+2}} \cdot 14^x \cdot x^{-2} \leq \frac{2^{\frac{3x-2}{x+2}} \cdot 112^x}{4x^2}$.

15

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC , а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D , причём $CD = DO = OH$.

16

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q . Найдите AQ , если сторона квадрата $KL = 10$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 17 месяцев. Условия возврата таковы:

17

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 25% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r .

18. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

18

$$\begin{cases} (ay + ax - 2)(y + x + 3a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно восемь решений.

19. Даны пять различных натуральных чисел. Известно, что их произведение равно 2160.

19

а) Могут ли все пять чисел образовывать геометрическую прогрессию?

б) Могут ли четыре числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

в) Могут ли три числа из этих пяти образовывать геометрическую прогрессию?

ВАРИАНТ 3

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

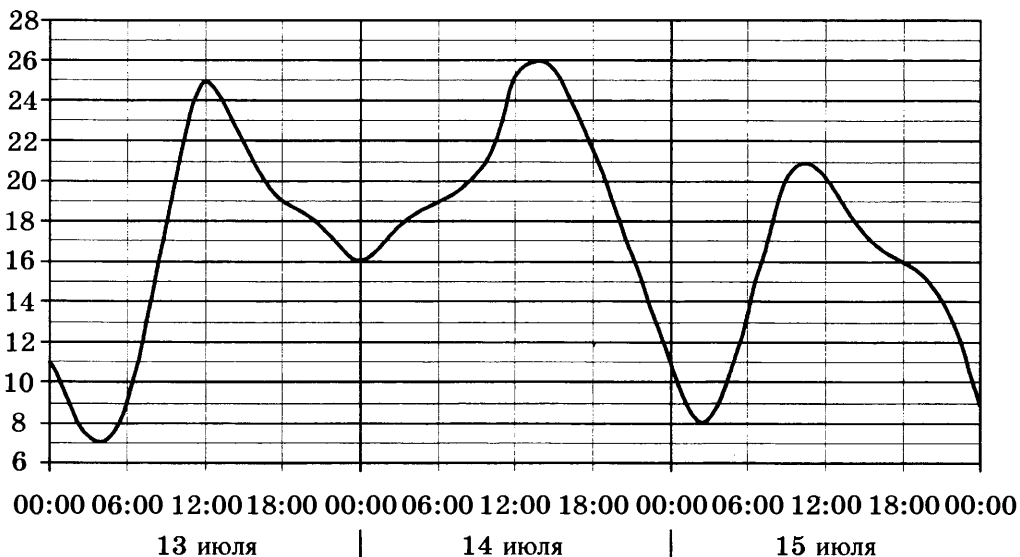
Часть 1

1

1. Розничная цена учебника 230 рублей, она на 15% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 8200 рублей?

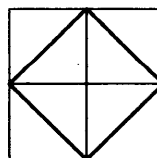
2

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 14 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



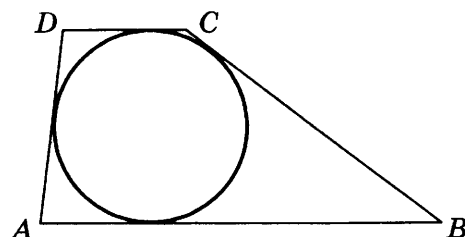
4. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 55% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

 4

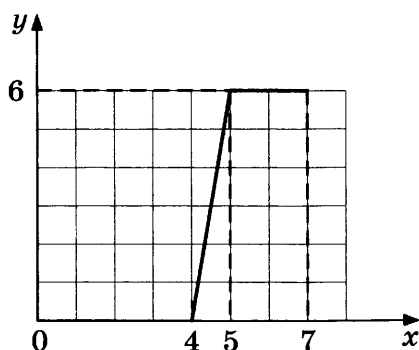
5. Найдите корень уравнения $\log_2 (10 - 5x) = 3 \log_2 5$.

 5

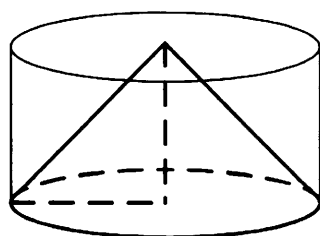
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 25 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.

 6


7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(4)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

 7


8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $14\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

 8


Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $(\sqrt{12} - \sqrt{48}) \cdot \sqrt{3}$.

10

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 5$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1,6$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 7,4 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300 \text{ К}$ — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в $33\,300 \text{ Дж}$.

11

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 13 рабочих, а во второй — 14 рабочих. Через 7 дней после начала работы в первую бригаду перешли 4 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^2(x - 8) + 10$ на отрезке $[-9; 5]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(\pi + x) \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[7\pi; \frac{17\pi}{2}\right]$.

14

14. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α .
а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.
б) Найдите угол между плоскостью α и ребром MB .

15. Решите неравенство $0,5^{\frac{x-2}{2x+4}} \cdot 10^x \cdot x^{-2} \geq \frac{32^{\frac{x-2}{2x+4}} \cdot 40^x}{16x^2}$.

15

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC , а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D , причём $CD = DO = OH$.

16

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q . Найдите AQ , если сторона квадрата $KL = 2$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 17 месяцев. Условия возврата таковы:

17

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 9% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r .

18. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

18

$$\begin{cases} (ay + ax + 3)(y + x - a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет от одного до пяти решений.

19. На доске в одну строку слева направо написаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Известно, что каждое следующее число (кроме первого) или на 1 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего.

19

а) Может ли оказаться так, что первое число равно 8, а шестое равно 5?

б) Может ли оказаться так, что первое число равно 1000, а двадцатое равно 62?

в) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно 1000, а последнее число равно 9?

ВАРИАНТ 4

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

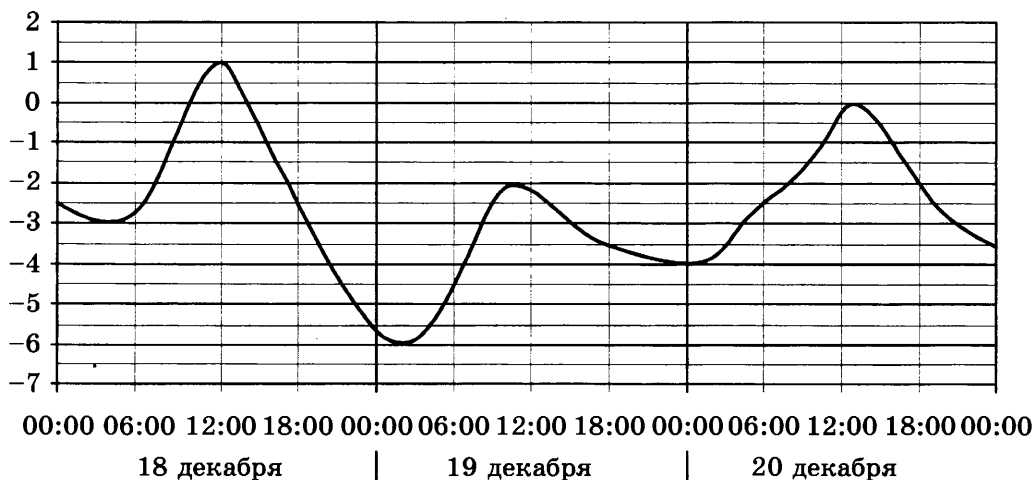
Часть 1

1

1. Розничная цена учебника 156 рублей, она на 30% выше оптовой цены. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по оптовой цене на 4000 рублей?

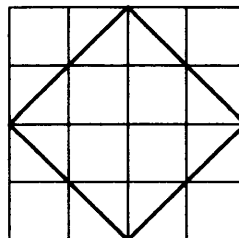
2

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку наименьшую температуру воздуха 18 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



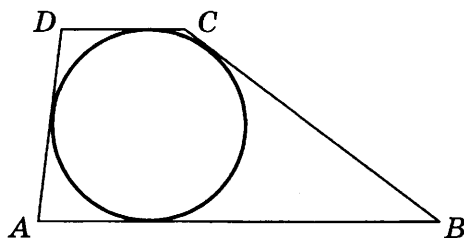
4. На фабрике керамической посуды 20% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 60% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

 4

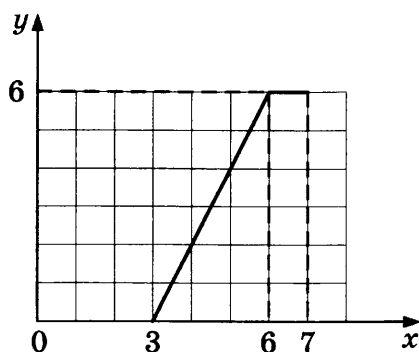
5. Найдите корень уравнения $\log_3(5 - 2x) = \log_3 5$.

 5

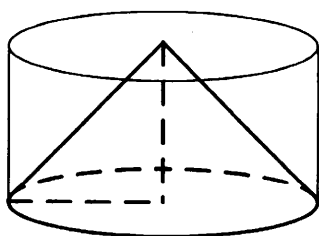
6. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 5 и 1. Найдите среднюю линию трапеции.

 6


7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Пользуясь рисунком, вычислите $F(7) - F(3)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.

 7


8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $13\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

 8


Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $(\sqrt{50} - \sqrt{18}) \cdot \sqrt{2}$.

10

10. Водолазный колокол, содержащий $\nu = 3$ моль воздуха при давлении $p_1 = 1,7$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит сжатие воздуха до конечного давления p_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha = 9,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ — постоянная, $T = 300 \text{ К}$ — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 (в атмосферах) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 25 110 Дж.

11

11. Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 19 рабочих, а во второй — 27 рабочих. Через 9 дней после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

12

12. Найдите наибольшее значение функции $y = (x + 9)^2 (x - 5) - 5$ на отрезке $[-19; -5]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}(2\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14

14. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Противоположные боковые грани пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины K и L рёбер AB и AD соответственно и точку M проведена плоскость α .
а) Докажите, что сечение пирамиды $MABCD$ плоскостью α является равносторонним треугольником.
б) Найдите расстояние от точки A до плоскости α , если $AB = 2\sqrt{3}$.

15. Решите неравенство $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{2x+2}{x+4}} \cdot 18^{2x} \cdot 3x^{-2} \leq \frac{27^{\frac{x+1}{x+4}} \cdot 12^x}{9x^2}$.

15

16. Вершины K и L квадрата $KLMN$ с центром O лежат на стороне AB треугольника ABC , а вершины M и N — на сторонах BC и AC соответственно. Высота CH треугольника ABC проходит через точку O и пересекает отрезок MN в точке D , причём $CD = DO = OH$.

16

а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный.

б) Пусть прямая AD пересекает сторону BC в точке Q . Найдите AQ , если сторона квадрата $KL = 4$.

17. Клиент банка планирует взять 15-го августа кредит на 17 месяцев. Условия возврата таковы:

17

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования, на 19% больше, чем сумма, взятая в кредит. Найдите r .

18. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

18

$$\begin{cases} (ay + ax - 2)(y + x + 3a) = 0, \\ |xy| = a \end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

19. На доске в одну строку слева направо написаны несколько не обязательно различных натуральных чисел. Известно, что каждое следующее число (кроме первого) или на 1 больше предыдущего, или в 2 раза меньше предыдущего.

19

а) Может ли оказаться так, что первое число равно 12, а седьмое равно 2?

б) Может ли оказаться так, что первое число равно 1200, а двадцать пятое равно 63?

в) Какое наименьшее количество чисел могло быть написано на доске, если первое число равно 1200, а последнее число равно 5?

ВАРИАНТ 5

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

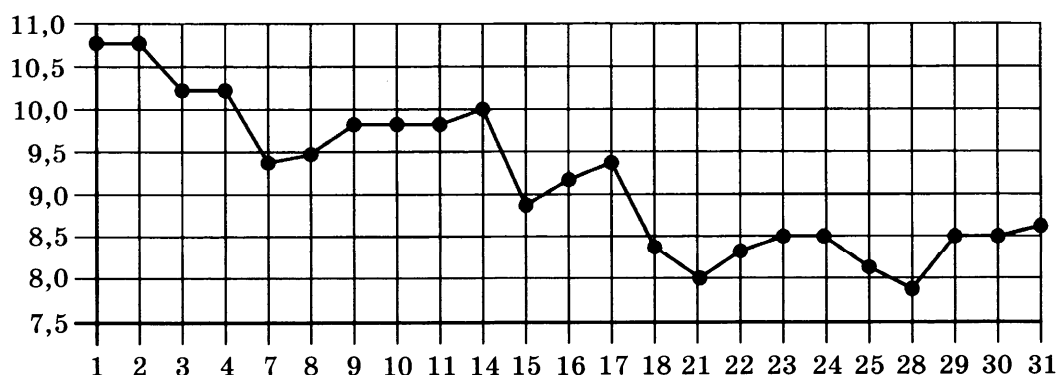
Часть 1

1

1. Павел Иванович купил американский автомобиль, спидометр которого показывает скорость в милях в час. Американская миля равна 1609 м. Какова скорость автомобиля в километрах в час, если спидометр показывает 39 миль в час? Ответ округлите до целого числа.

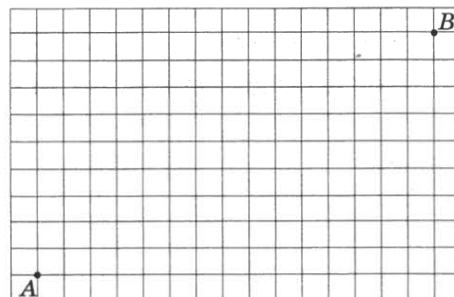
2

2. На рисунке жирными точками показана цена серебра, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2008 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена серебра в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа цена серебра была наименьшей за указанный период.



3

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 отмечены точки A и B . Найдите длину отрезка AB .



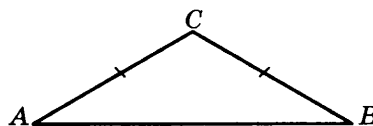
4. В некотором городе из 2000 появившихся на свет младенцев 990 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе.

 4

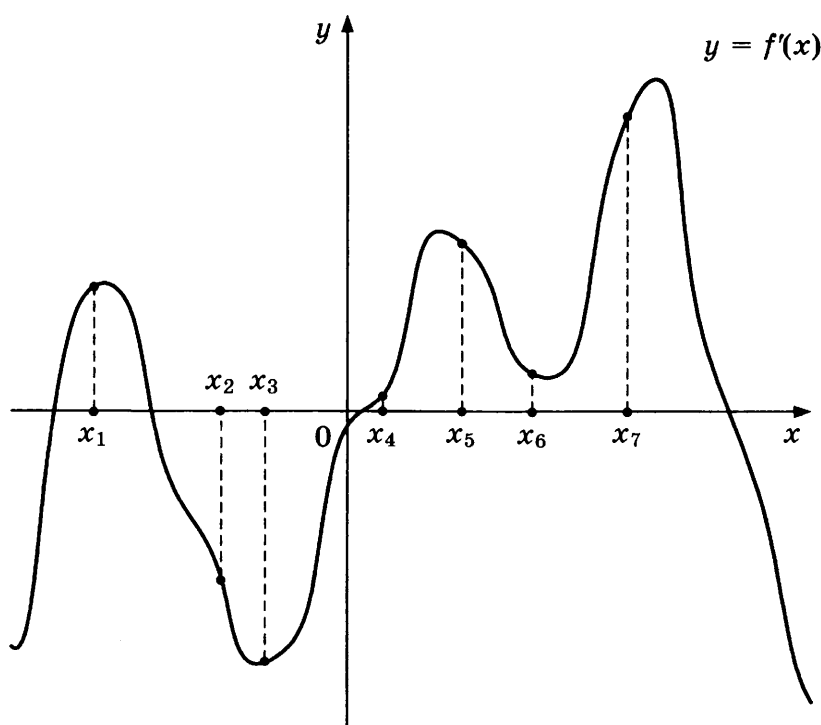
5. Найдите корень уравнения $\sqrt{14 + 5x} = 7$.

 5

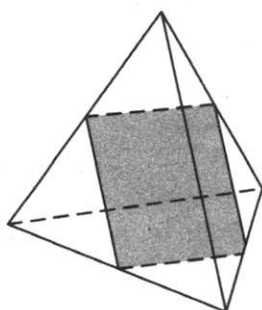
6. В треугольнике ABC $AC = BC$, угол C равен 120° , $AB = \sqrt{3}$. Найдите AC .


 6

7. На рисунке изображены график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ возрастает?

 7


8. Рёбра правильного тетраэдра равны 14. Найдите площадь сечения, проходящего через середины четырёх его рёбер.

 8


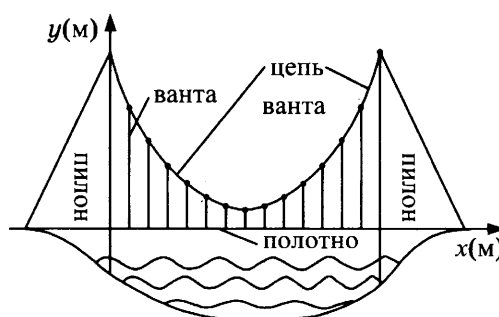
Часть 2

9

9. Найдите $\sin \alpha$, если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и $\alpha \in (\pi; 2\pi)$.

10

10. На рисунке изображена схема вантового моста. Вертикальные пилоны связаны провисающей цепью. Тросы, которые свисают с цепи и поддерживают полотно моста, называются вантами. Введём систему координат: ось Oy направим вертикально вдоль одного из пилонов, а ось Ox направим вдоль полотна моста, как показано на рисунке. В этой системе координат линия, по которой провисает цепь моста, имеет уравнение $y = 0,0013x^2 - 0,35x + 27$, где x и y измеряются в метрах. Найдите длину ванты, расположенной в 30 метрах от пилона. Ответ дайте в метрах.



11

11. Моторная лодка прошла против течения 24 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 20 мин меньше, чем при движении против течения. Найдите скорость (в км/ч) лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч.

12

12. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 29$ на отрезке $[-1; 4]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $3 \sin^2 x + 5 \sin x + 2 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

14. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S боковое ребро вдвое больше стороны основания.

а) Докажите, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C , делит ребро SB в отношении $1 : 3$, считая от вершины B .

б) Найдите отношение, в котором плоскость, проходящая через середины рёбер SA и SE и вершину C , делит ребро SF , считая от вершины S .

15. Решите неравенство $4^x - 3 \cdot 2^{x+2} + 32 \geq 0$.

16. На сторонах AC и BC треугольника ABC вне треугольника построены квадраты $ACDE$ и $BFKC$. Точка M — середина стороны AB .

а) Докажите, что $CM = \frac{1}{2} DK$.

б) Найдите расстояния от точки M до центров квадратов, если $AC = 10$, $BC = 32$ и $\angle ACB = 30^\circ$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение первого года кредитования нужно вернуть банку 2466 тыс. рублей. Какую сумму нужно выплатить банку за последние 12 месяцев?

18. Найдите все неотрицательные значения a , при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \leq \frac{2a + x^2 - 4 \log_{1/3}(4a^2 - 4a + 9)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 2a + 4 + \log_{1/3}^2(4a^2 - 4a + 9)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение.

19. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 50, а вместе солдат меньше, чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

ВАРИАНТ 6

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

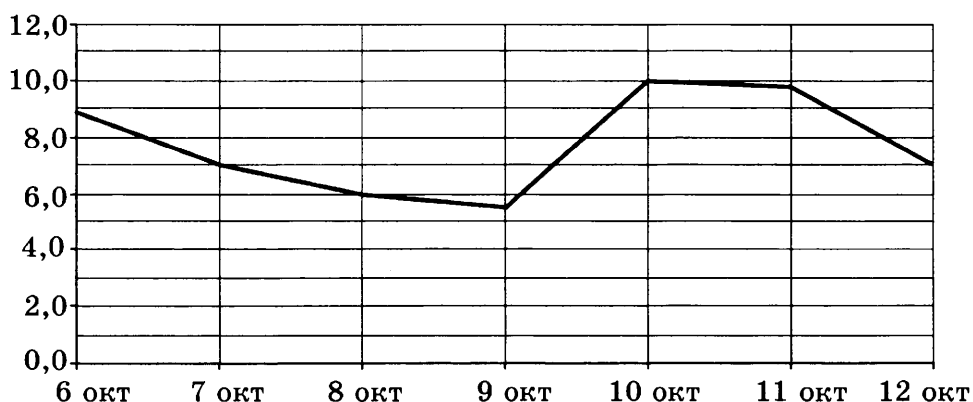
Часть 1

1

1. Сырок стоит 5 руб. 40 коп. Какое наибольшее число сырков можно купить на 40 рублей?

2

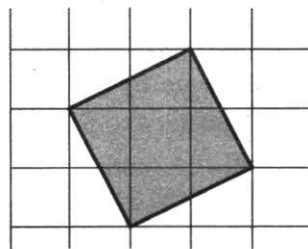
2. На рисунке изображён график среднесуточной температуры в г. Саратове в период с 6 по 12 октября 1969 г. На оси абсцисс откладываются числа, на оси ординат — температура в градусах Цельсия.



Определите по графику, сколько дней из указанного периода средняя температура была в пределах от 6,5 °C до 9 °C.

3

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите его площадь.



4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

 4

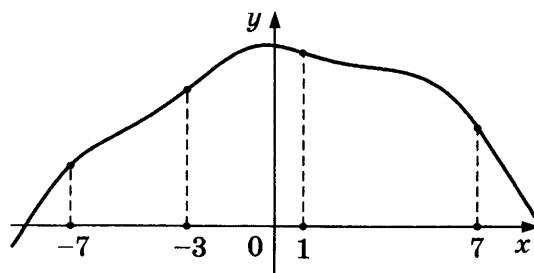
5. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-3} = 2$.

 5

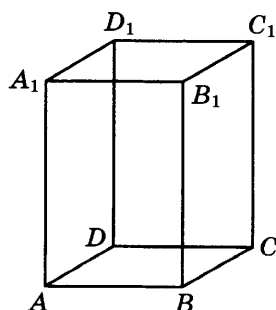
6. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке M . Найдите MC , если $AB = 11$, $DC = 33$, $AC = 28$.

 6

7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -7 , -3 , 1 , 7 . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.

 7


8. Диагональ правильной четырёхугольной призмы наклонена к плоскости основания под углом 30° . Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.

 8


Часть 2

9. Найдите значение выражения: $(3^{\log_7 5})^{\log_3 7}$.

 9

10. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) — начальная масса изотопа, t (мин) — время, прошедшее от начального момента, T (мин) — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0 = 200$ мг. Период его полураспада $T = 4$ мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 25 мг?

 10

11

11. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, а вторую половину времени — со скоростью 46 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

12

12. Найдите наибольшее значение функции $y = x^5 + 20x^3 - 65x$ на отрезке $[-4; 0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $6^{x^2-4x} + 6^{x^2-4x-1} = 42$.
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2; 4]$.

14

14. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , все рёбра которой равны 6, точка M — середина ребра BC , точка O — центр основания пирамиды, точка F делит отрезок SO в отношении $1:2$, считая от вершины пирамиды.
а) Найдите отношение, в котором плоскость CMF делит отрезок SA , считая от вершины S .
б) Найдите угол между плоскостью MCF и плоскостью ABC .

15

15. Решите неравенство $\log_x(x-2) \cdot \log_x(x+2) \leq 0$.

16

16. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.
а) Докажите, что $ABCD$ — ромб.
б) Эта окружность пересекает сторону AB в точке M , причём $AM:MB = 1:2$. Найдите диагональ AC , если известно, что $AD = 2\sqrt{3}$.

17

17. 31 декабря 2014 года Василий взял в банке некоторую сумму в кредит под 11% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 11%), затем Василий переводит в банк 3 696 300 рублей. Какую сумму взял Василий в банке, если он выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

18. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x^2 - x - 6| = (y - 1)^2 + x - 7, \\ 3y = 2x + a \end{cases}$$

имеет ровно один или два корня.

19. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 363. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

- а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.
б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?
в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

ВАРИАНТ 7

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

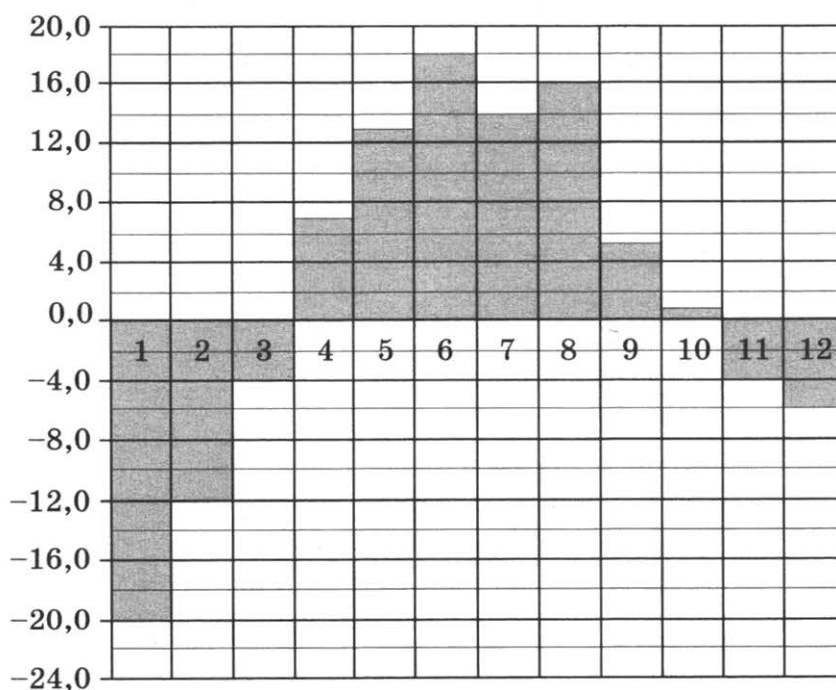
Часть 1

1

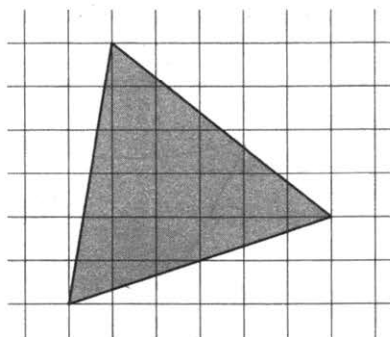
1. Диагональ экрана телевизора равна 21 дюйму. Выразите эту величину в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.

2

2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Екатеринбурге (Свердловске) за каждый месяц 1973 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в период с мая по декабрь 1973 года включительно. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

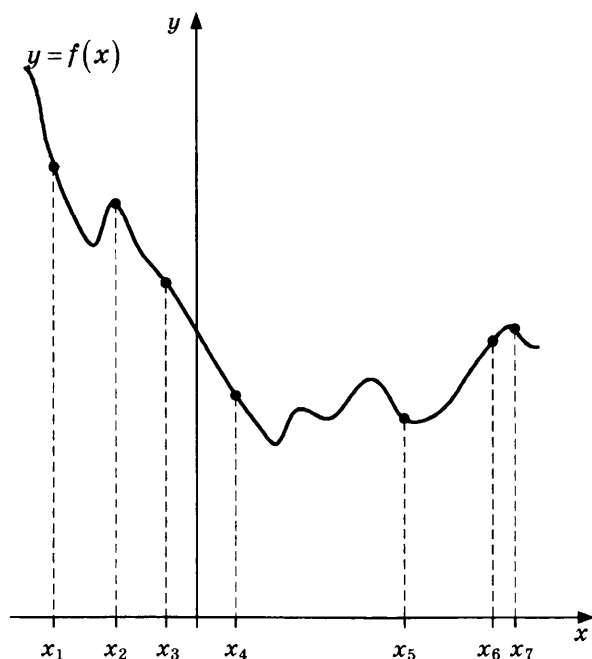


4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что разность выпавших очков равна 1 или 2.

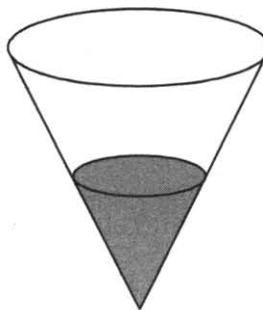
5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2x} = 4^{2x}$.

6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 9$, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{\sqrt{20}}$. Найдите AC .

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и семь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{1}{2}$ высоты. Объём жидкости равен 54 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $(252^2 - 23^2) : 275$.

10. Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.

Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4,8 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 10 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 6,4 километра?

11. Если смешать 45-процентный раствор кислоты и 97-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 45-процентного раствора использовали для получения смеси?

12. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 144}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\cos x + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \cdot (\sin x + 1) = 0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$.

14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 3$, а на ребре $B_1 C_1$ — точка T так, что $B_1 T : TC_1 = 1 : 2$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.

15. Решите неравенство $\sqrt[5]{32^{4x-3}} < \sqrt[4]{16^{\frac{2x+1}{x}}}$.

16. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = 3\sqrt{2}$.

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 + x + 2a^2 + 1)^2 = 8a^2(x^2 + x + 1)$$

имеет ровно один корень.

	13
--	----

	14
--	----

	15
--	----

	16
--	----

	17
--	----

	18
--	----

19. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $5a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k$.

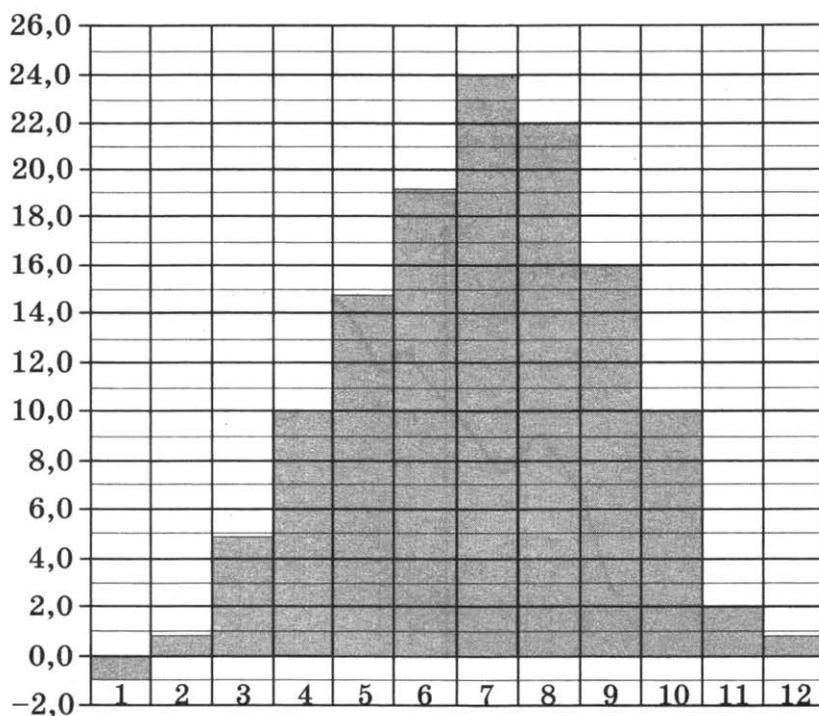
- а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.
- б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $4a_n = 5a_2 - a_1$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать a_1 , если $a_n = 286$?

ВАРИАНТ 8

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

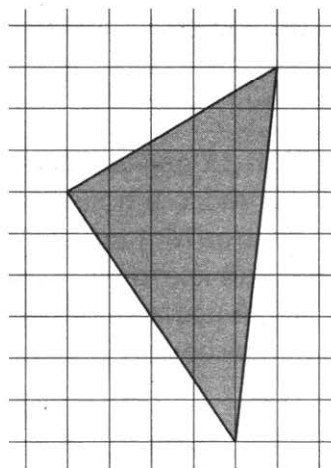
Часть 1

1. Диагональ экрана телевизора равна 31 дюйму. Выразите эту величину в сантиметрах. Считайте, что 1 дюйм равен 2,54 см. Результат округлите до целого числа сантиметров.
2. На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру с апреля по октябрь 1988 года. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



4

4. В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что произведение выпавших очков делится на 5, но не делится на 30.

5

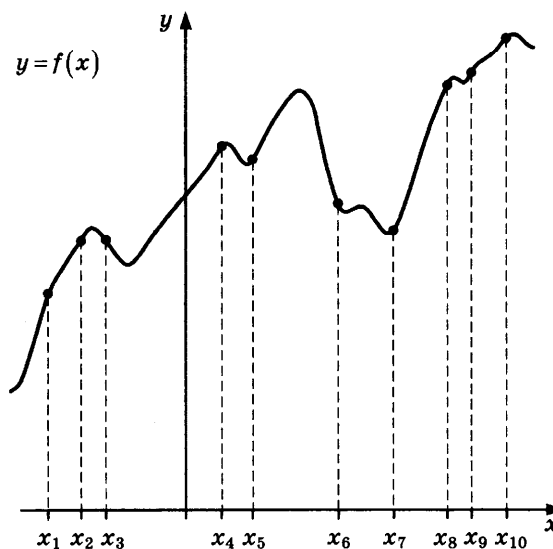
5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{13-5x} = 16^{3x}$.

6

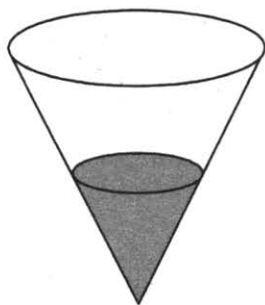
6. В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 12$, $\operatorname{tg} A = \frac{5}{\sqrt{20}}$. Найдите AC .

7

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и десять точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?



8. В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 152 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Часть 2

9. Найдите значение выражения $(651^2 - 17^2) : 668$.
10. Наблюдатель, находящийся на высоте h м над поверхностью земли, видит линию горизонта на расстоянии l км, которое можно найти по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.
Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 6,4 километра. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На сколько ступенек ему нужно подняться, чтобы он увидел горизонт на расстоянии 11,2 километра?
11. Если смешать 40-процентный раствор кислоты и 90-процентный раствор этой же кислоты и добавить 10 кг чистой воды, получится 62-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 72-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 40-процентного раствора использовали для получения смеси?
12. Найдите точку максимума функции $y = -\frac{x}{x^2 + 625}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $\sin x = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

14

14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 4 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 2 : 5$, а на ребре CC_1 — точка T — середина ребра $B_1 C_1$. Известно, что $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 7$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .

б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.

15

15. Решите неравенство $\sqrt[6]{64^{3x-1}} > \sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1-3x}{x-1}}}$.

16

16. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = 6\sqrt{7}$.

17

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 8 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

18

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(3x^2 - 3x + a^2 + 9)^2 = 12a^2(x^2 - x + 3)$$

имеет ровно один корень.

19. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $6a_{k+2} = 7a_{k+1} - a_k$.
- а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.
- б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $5a_n = 6a_2 - a_1$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать a_1 , если $a_n = 404$?

ВАРИАНТ 9

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

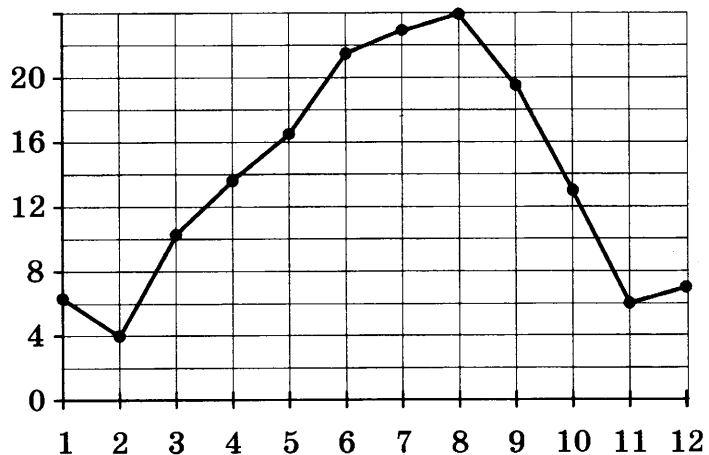
Часть 1

1

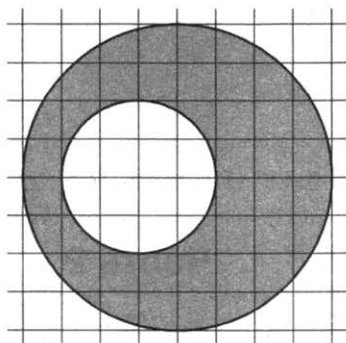
1. Студент получил свой первый гонорар в размере 700 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет гвоздик для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество гвоздик сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, гвоздики стоят 40 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

2

2. На рисунке жирными точками показана среднемесячная температура воздуха в Сочи за каждый месяц 1920 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднемесячными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



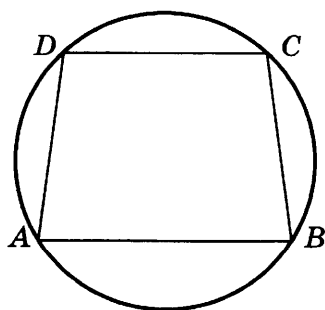
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 5. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,97. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

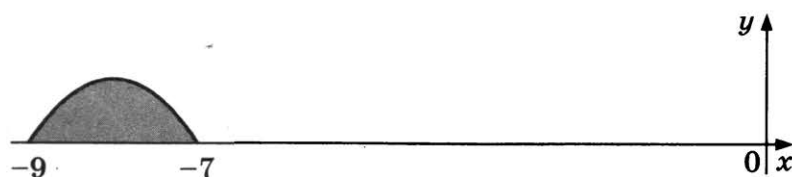
5. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 48 и 20. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 26. Найдите высоту трапеции.



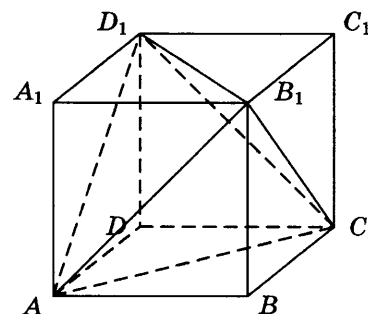
7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{1}{4}x^3 - 6x^2 - \frac{189}{4}x - 1$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8

8. Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 6. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $\frac{\left(5^{\frac{4}{7}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{45^{12}}$.

10

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\Pi} = 25^{\circ}\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 57^{\circ}\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,4$ — постоянная.

Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 56 м.

11

11. Расстояние между городами А и В равно 400 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через час следом за ним со скоростью 120 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12

12. В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 - 6x + 13}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $(81^{\sin x})^{\cos x} = 9^{\sqrt{2} \cos x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 5$, $AC = 8$ и $AA_1 = 4$.

14

15. Решите неравенство $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-1} > \sqrt{x-2}$.

15

16. Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = \frac{\sqrt{11}}{6}$ и сторона $AC = 45$.

16

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 450 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 200 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 1200 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1400 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

17

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{a+2,5}(x^2+3) = \log_{a+2,5}((a+4)x+4)$$

имеет ровно два различных корня.

18

19. Конечная последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 3$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_3 = a_{11}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 50?

19

ВАРИАНТ 10

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1

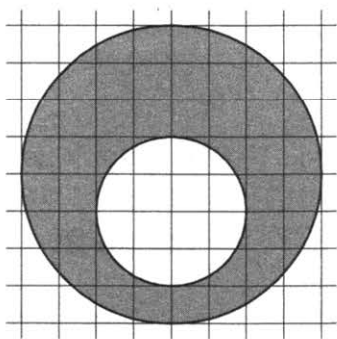
1. Студент получил свой первый гонорар в размере 1100 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет лилий для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество лилий сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, лилии стоят 120 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

2

2. На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 17 по 31 августа 2004 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 4. Найдите площадь заштрихованной фигуры.


 3

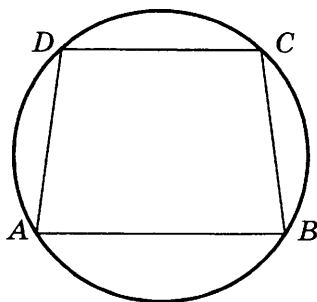
4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

 4

5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

 5

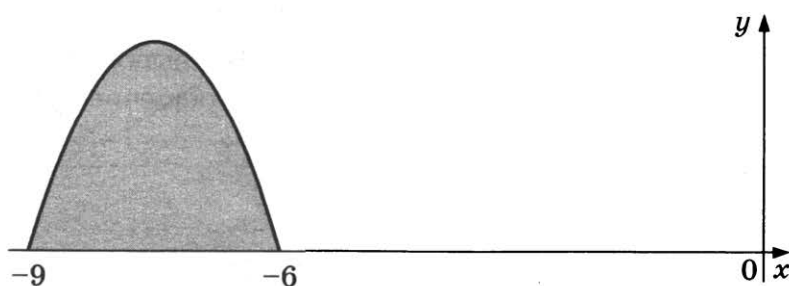
6. Основания равнобедренной трапеции равны 72 и 30. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 39. Найдите высоту трапеции.

 6


7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

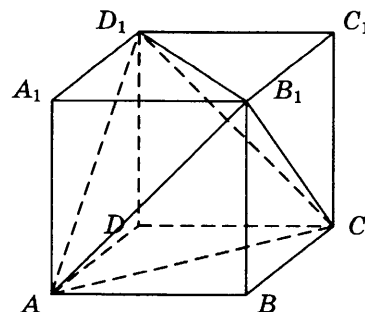
 7

Функция $F(x) = -\frac{10}{27}x^3 - \frac{25}{3}x^2 - 60x - \frac{5}{11}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



8

8. Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 21. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $\frac{\left(4^{\frac{4}{7}} \cdot 7^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{28^{12}}$.

10

10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\text{п}} = 25^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}} = 49^\circ\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,1$ — постоянная.

Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 66 м.

11

11. Расстояние между городами А и В равно 400 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 3 часа следом за ним со скоростью 110 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.

12

12. В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 - 18x + 100}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $(36^{\sin x})^{\cos x} = 6^{\sqrt{3} \cos x}$.
б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 10$, $AC = 12$ и $AA_1 = 7$.

14

15. Решите неравенство $\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-1} > \sqrt{x-1}$.

15

16. Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = \frac{\sqrt{5}}{3}$ и сторона $AC = 18$.

16

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 15 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 150 ц/га, а на втором — 250 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 180 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 2000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1800 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

17

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{2,5-a}(x^2+1) = \log_{2,5-a}((a-4)x+2)$$

имеет ровно два различных корня.

18

19. Конечная последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 2$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_6 = a_{18}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 100?

19

ВАРИАНТ 11

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

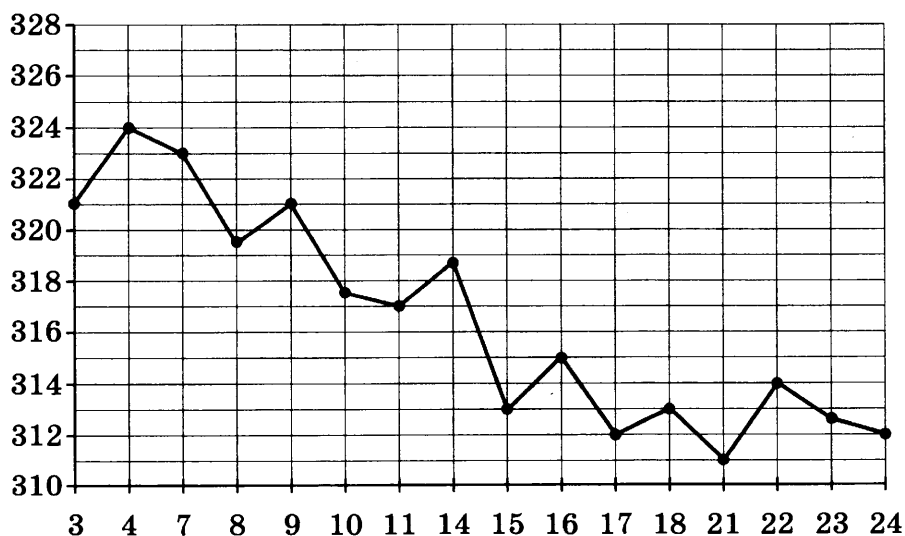
Часть 1

1

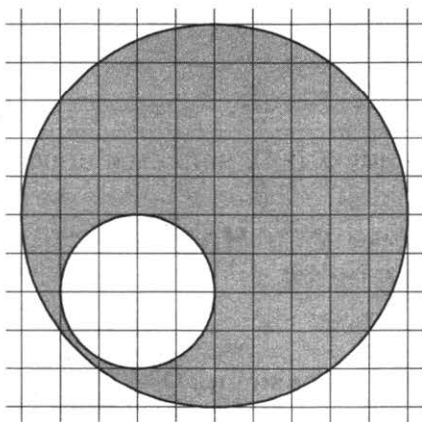
1. Студент получил свой первый гонорар в размере 900 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет тюльпанов для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество тюльпанов сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, тюльпаны стоят 60 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

2

2. На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 24 октября 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена унции золота в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей ценой золота на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за унцию).



3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 16. Найдите площадь заштрихованной фигуры.


 3

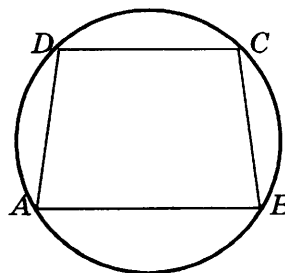
4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,02. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

 4

5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

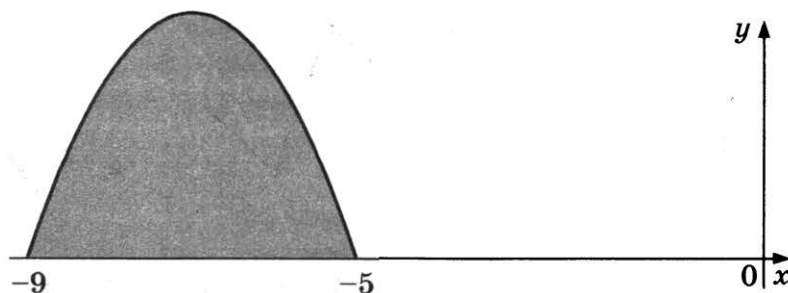
 5

6. Основания равнобедренной трапеции равны 96 и 28. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 50. Найдите высоту трапеции.


 6

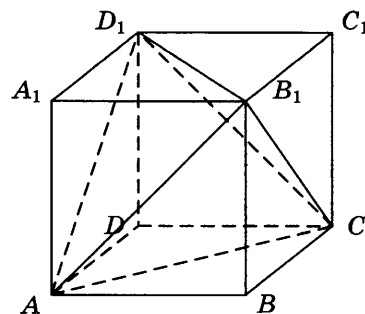
7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{21}{4}x^2 - \frac{135}{4}x - \frac{13}{2}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.


 7

8

8. Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 12. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



Часть 2

$$\frac{\left(7^{\frac{3}{5}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{63^9}.$$

9. Найдите значение выражения $\frac{\left(7^{\frac{3}{5}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{63^9}$.
10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\Pi} = 15^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 1,4$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_B = 75^\circ\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_B - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,8$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 168 м.
11. Расстояние между городами А и В равно 600 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.
12. В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 - 22x + 122}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $(64^{\sin x})^{\cos x} = 8^{\sin x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

13

14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.

а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 10$, $AC = 16$ и $AA_1 = 5$.

14

15. Решите неравенство $\sqrt{x+3} - \sqrt{3x-2} > \sqrt{x-2}$.

15

16. Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .

а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$ и сторона $AC = 36$.

16

17. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 200 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 200 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 1500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1800 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

17

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{a-7,5}(x^2+2) = \log_{a-7,5}((a-6)x+2)$$

имеет ровно два различных корня.

18

19. Конечная последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 1$.

б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_6 = a_{16}$?

в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 75?

19

ВАРИАНТ 12

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

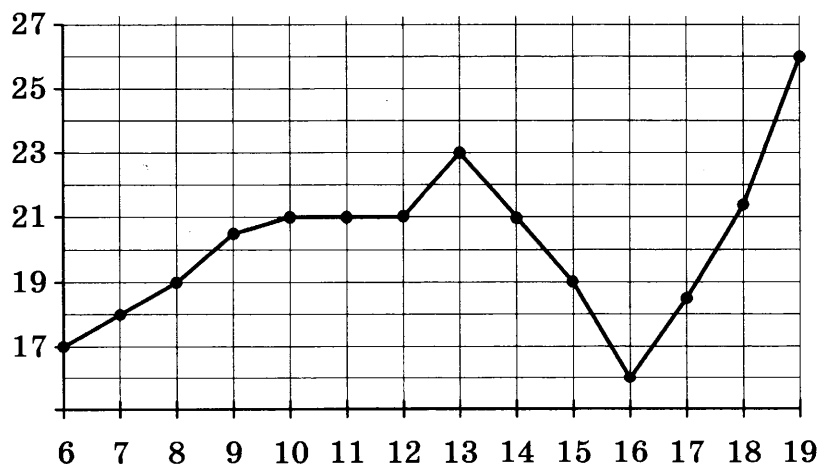
Часть 1

1

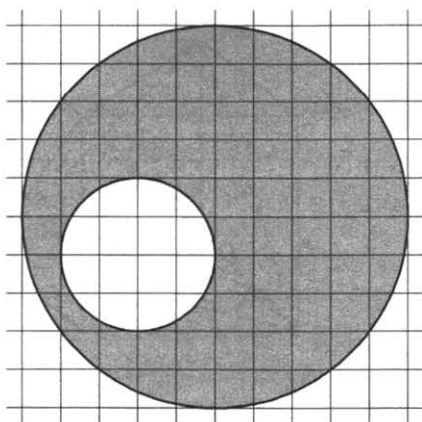
1. Студент получил свой первый гонорар в размере 1300 рублей за выполненный перевод. Он решил на все полученные деньги купить букет гвоздик для своей учительницы английского языка. Какое наибольшее количество гвоздик сможет купить студент, если удержанный у него налог на доходы составляет 13% гонорара, гвоздики стоят 40 рублей за штуку и букет должен состоять из нечетного числа цветов?

2

2. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Бресте каждый день с 6 по 19 июля 1981 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей среднесуточными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.



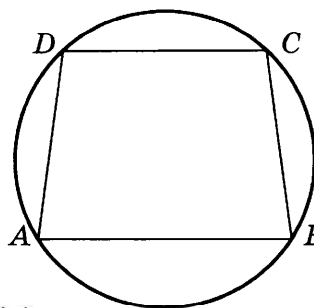
3. На клетчатой бумаге изображены два круга. Площадь внутреннего круга равна 12. Найдите площадь заштрихованной фигуры.



4. Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что неисправная батарейка будет забракована, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,03. Найдите вероятность того, что случайно выбранная батарейка будет забракована системой контроля.

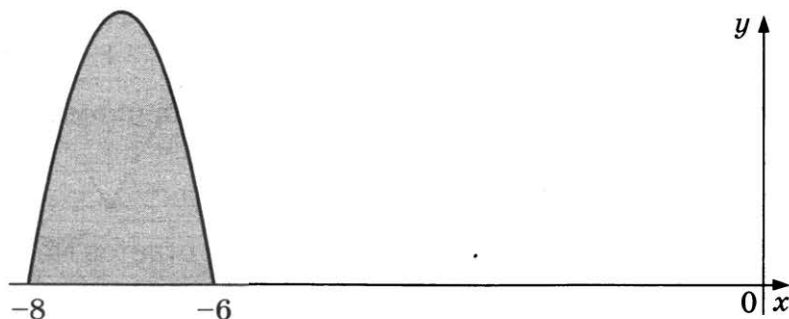
5. Найдите наименьший положительный корень уравнения $\sin \frac{\pi x}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 120 и 50. Центр окружности, описанной около трапеции, лежит внутри трапеции, а радиус окружности равен 65. Найдите высоту трапеции.



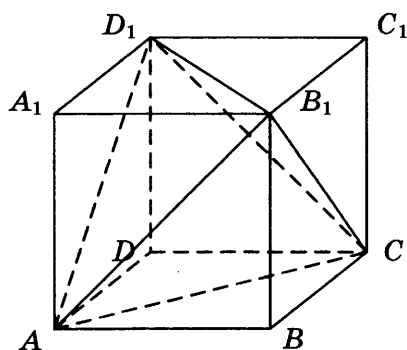
7. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$.

Функция $F(x) = -x^3 - 21x^2 - 144x - \frac{11}{4}$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.





8. Объём параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 27. Найдите объём треугольной пирамиды $AD_1 CB_1$.



Часть 2



9. Найдите значение выражения $\frac{\left(4^{\frac{4}{7}} \cdot 11^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{44^{12}}$.



10. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_{\Pi} = 20^{\circ}\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0,2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x , вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{В}} = 68^{\circ}\text{C}$ до температуры T , причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{В}} - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,7$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 136 м.



11. Расстояние между городами А и В равно 240 км. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 2 часа следом за ним со скоростью 80 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите скорость автомобиля. Ответ дайте в километрах в час.



12. В какой точке функция $y = \sqrt{x^2 + 30x + 248}$ принимает наименьшее значение?

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $49^{\cos^2 x} = 7^{\sqrt{2}\cos^2 x}$.
 б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.
14. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Точка K — середина ребра A_1B_1 , а точка M делит ребро AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$.
 а) Докажите, что KM перпендикулярно AC .
 б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1 , если $AB = 14$, $AC = 16$ и $AA_1 = 6$.
15. Решите неравенство $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x-3} > \sqrt{x-3}$.
16. Дан треугольник ABC . Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K , лежащей на стороне BC .
 а) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.
 б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC , если $\sin B = 0,8$ и сторона $AC = 30$.
17. У фермера есть два поля, каждое площадью 20 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 230 ц/га, а на втором — 150 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 300 ц/га.
 Фермер может продавать картофель по цене 1800 руб. за центнер, а свёклу — по цене 1600 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?
18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение
- $$\log_{6,5-a}(x^2 + 3) = \log_{6,5-a}((a-8)x - 3)$$
- имеет ровно два различных корня.
19. Конечная последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ не обязательно различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство $a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$.
 а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$, в которой $a_5 = 1$.
 б) Может ли в такой последовательности оказаться так, что $a_9 = a_{27}$?
 в) При каком наибольшем n такая последовательность может состоять только из чисел, не превосходящих 150?

	13
--	----

	14
--	----

	15
--	----

	16
--	----

	17
--	----

	18
--	----

	19
--	----

ВАРИАНТ 13

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

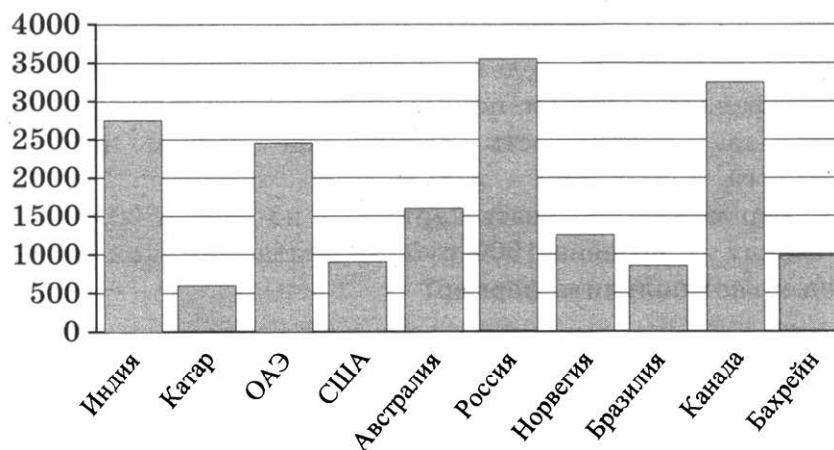
Часть 1

1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 марта составляли 46 987 кВт · ч, а 1 апреля — 47 157 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за март, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 2 рубля 50 копеек? Ответ дайте в рублях.

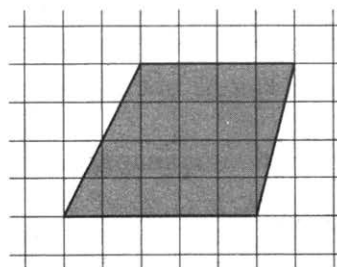
2

2. На диаграмме показано распределение выплавки алюминия в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2016 год. Среди представленных стран первое место по выплавке алюминия занимала Россия, десятое место занимал Катар. Какое место занимала Норвегия?



3

3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



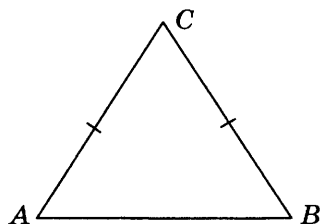
4. Одиннадцать детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Антон и его сестра Маша. Какова вероятность того, что Антон и Маша окажутся рядом?

 4

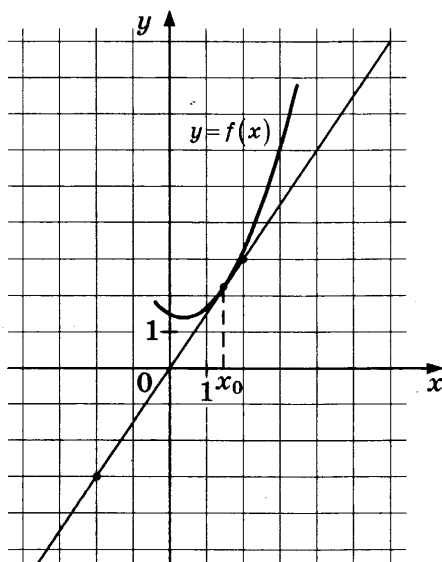
5. Найдите корень уравнения $\log_7(9 + x) = \log_7 2$.

 5

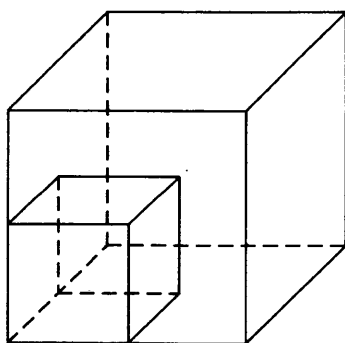
6. В треугольнике ABC угол C равен 66° , стороны AC и BC равны. Найдите угол A . Ответ дайте в градусах.

 5


7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

 7


8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 7 раз?



Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $-32\sqrt{3}\operatorname{tg}(-600^\circ)$.

10

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 110 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11

11. Девять одинаковых рубашек дешевле куртки на 7%. На сколько процентов двенадцать таких же рубашек дороже куртки?

12

12. Найдите точку минимума функции $y = (25 - x)e^{25 - x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $\frac{(x+3)^2}{5} + \frac{20}{(x+3)^2} = 8\left(\frac{x+3}{5} - \frac{2}{x+3}\right) + 1$.
б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-6; -4]$.

14

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $2\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 3$, а $C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .
а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

15

15. Решите неравенство $\log_{\sqrt[4]{4}} \left(\log_{\frac{1}{5}} (x+3) \right) \geq 3$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC . Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB .
а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC .
б) Найдите AB , если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 12$ и $AC = 7,5$.

	16
--	----

17. 31 декабря 2016 года Виктор взял в банке 3 972 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Виктор переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x , чтобы Виктор выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

	17
--	----

18. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2x^2 + y^2 \\ -x + y + 3z = a \end{cases}$$

	18
--	----

имеет единственное решение.

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

	19
--	----

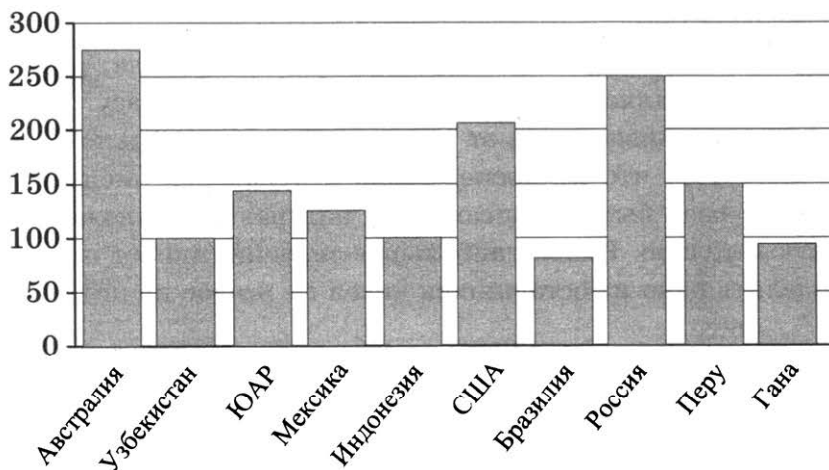
- а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 11, если сначала по одному разу были написаны числа 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 и 11?
б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 24, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно?
в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 100 до 151 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

ВАРИАНТ 14

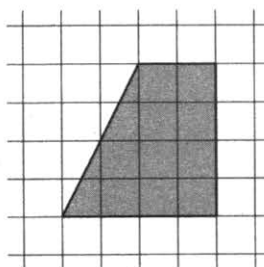
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в бланк ответов № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Показания счётчика электроэнергии 1 сентября составляли 54 209 кВт · ч, а 1 октября — 54 399 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за сентябрь, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 1 рубль 10 копеек? Ответ дайте в рублях.
2. На диаграмме показано распределение выплавки золота в 10 странах мира (в тоннах) за 2016 год. Среди представленных стран первое место по выплавке золота занимала Австралия, десятое место — Бразилия. Какое место занимала ЮАР?



3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите длину средней линии этой трапеции.



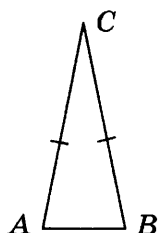
4. Девять детей встают в хоровод в случайном порядке. Среди них Дима и его сестра Катя. Какова вероятность того, что Дима и Катя не окажутся рядом?

 4

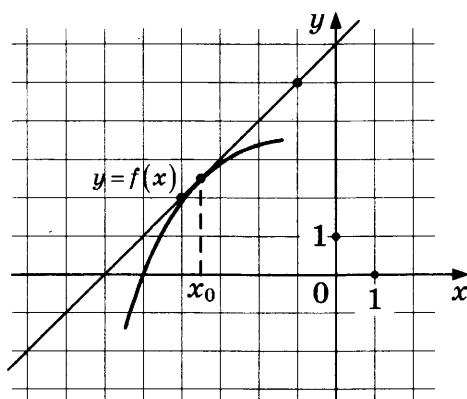
5. Найдите корень уравнения $\log_5(1+x) = \log_5 4$.

 5

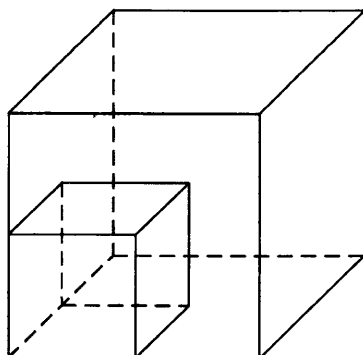
6. В треугольнике ABC угол C равен 20° , стороны AC и BC равны. Найдите угол A . Ответ дайте в градусах.

 6


7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

 7


8. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 11 раз?

 8


Часть 2

9

9. Найдите значение выражения $-17\sqrt{3}\operatorname{tg}(1050^\circ)$.

10

10. Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб. за ед.) задаётся формулой $q = 75 - 5p$. Выручка предприятия r (в тыс. руб. за месяц) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p , при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 270 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб. за ед.

11

11. Десять одинаковых рубашек дешевле куртки на 4%. На сколько процентов пятнадцать таких же рубашек дороже куртки?

12

12. Найдите точку минимума функции $y = (16 - x)e^{16 - x}$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

13. а) Решите уравнение $\frac{(x-1)^2}{8} + \frac{8}{(x-1)^2} = 7\left(\frac{x-1}{4} - \frac{2}{x-1}\right) - 1$.
б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 3]$.

14

14. В правильной четырёхугольной призме $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ сторона AB основания равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $3\sqrt{2}$. На рёбрах BC и $C_1 D_1$ отмечены точки K и L соответственно, причём $CK = 4$, а $C_1 L = 1$. Плоскость γ параллельна прямой BD и содержит точки K и L .
а) Докажите, что прямая $A_1 C$ перпендикулярна плоскости γ .
б) Найдите объём пирамиды, вершина которой — точка A_1 , а основание — сечение данной призмы плоскостью γ .

15

15. Решите неравенство $\log_{\frac{9}{8}} \left(\log_{\frac{1}{7}} (x+1) \right) \geq 3$.

16. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC . Диагональ AC разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и AB .

16

а) Докажите, что луч DB — биссектриса угла ADC .

б) Найдите AB , если известны длины диагоналей трапеции: $BD = 15$ и $AC = 8,5$.

17. 31 декабря 2016 года Александр взял в банке 3 276 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Александр переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x , чтобы Александр выплатил долг тремя равными платежами (то есть за три года)?

17

18. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} -x - 3y + 2z = x^2 + 3y^2 \\ x - 3y - 4z = a \end{cases}$$

18

имеет единственное решение.

19. На доске были написаны несколько целых чисел. Несколько раз с доски стирали по два числа, сумма которых делится на 3.

19

а) Может ли сумма всех оставшихся на доске чисел равняться 13, если сначала по одному разу были написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10?

б) Может ли на доске остаться ровно два числа, разность между которыми равна 21, если сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно?

в) Известно, что на доске осталось ровно два числа, а сначала по одному разу были написаны все натуральные числа от 140 до 191 включительно. Какое наибольшее значение может получиться, если поделить одно из оставшихся чисел на второе из них?

ОТВЕТЫ

Вариант 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
44	0,5	3	0,87	-52	14	21	42	-4	7,2	28	1

13	а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$
14	б) 4,5
15	$[-1,5; 0); (0; 2]; (5; +\infty)$
16	$3\sqrt{13}$
17	1,5
18	$0 < a < \sqrt[3]{2,25}$; $a > 4$
19	а) Нет. б) Нет. в) Да, например, 2, 3, 4, 10 и 25

Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
58	4	4	0,97	-11	7	14	160	18	14,4	7	8

13	а) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{7\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$
14	б) 4
15	$(-2; 0); \left(0; \frac{2}{3}\right]; [1; +\infty)$
16	$6\sqrt{13}$
17	2,5
18	$\frac{4}{9} < a < 1$
19	а) Нет. б) Нет. в) Да, например, 1, 3, 9, 16, 5

Вариант 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
41	11	1	0,95	-23	15	15	28	-6	12,8	8	10

13	а) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{43\pi}{6}$; $\frac{47\pi}{6}$; $\frac{49\pi}{6}$
14	б) $\arcsin \frac{2}{3}$
15	$(-\infty; -2); [-0,5; 0); (0; 2]$
16	$\frac{6\sqrt{13}}{5}$
17	1
18	$\sqrt[3]{2,25} \leq a \leq 4$, $a = 0$
19	а) Да, например, 8, 4, 2, 3, 4, 5. б) Нет. в) 11

Вариант 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
33	-5,5	2	0,91	-10	3	15	26	4	13,6	21	-5

13	а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}$
14	б) 2
15	$(-\infty; -4); \left[-\frac{5}{3}; -1\right]$
16	$\frac{12\sqrt{13}}{5}$
17	2
18	$0 < a < \frac{4}{9}; a > 1$
19	а) Да, например, 12, 6, 3, 4, 2, 1, 2. б) Нет. в) 11

Вариант 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
63	28	17	0,505	7	1	5	49	-0,75	17,67	21	-2

13	а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $(-1)^{m+1} \arcsin \frac{2}{3} + \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi - \arcsin \frac{2}{3}$, $\pi + \arcsin \frac{2}{3}$
14	б) 3 : 4
15	$(-\infty; 2]; [3; +\infty)$
16	19
17	2 034 000 рублей
18	$x = 0$ при $a = 0$ или $a = 1$
19	а) Например, 54 и 63; б) нет; в) 117 или 119

Вариант 6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	3	5	0,17	11	21	7	6	5	12	53	44

13	а) $2 \pm \sqrt{6}$; б) $2 - \sqrt{6}$
14	а) 1 : 6; б) $\arctg \frac{4\sqrt{2}}{3}$
15	$(2; 3]$
16	$4\sqrt{2}$
17	6 330 000
18	$(-9; -2]; [3; +\infty)$
19	а) например, 15 раз число 19 и число 78; б) нет; в) 1650

Вариант 7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
53	-6	17	0,5	-3	6	6	378	229	14	15	-12

13	а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{21\pi}{4}; -\frac{9\pi}{2}$
14	б) $\arccos \frac{1}{3}$
15	$x < -\frac{1}{4}, 0 < x < 2$
16	$2\sqrt{42}$
17	115
18	$a = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$
19	а) например, последовательность 1, 126, 151, 156, 157; б) нет; в) 4

Вариант 8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
79	10	21	0,25	-13	8	2	361	634	33	10	-25

13	а) $2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $2\pi; \frac{8\pi}{3}$
14	б) $\arccos \sqrt{\frac{2}{11}}$
15	$\frac{1}{3} < x < 1, x > 3$
16	$28\sqrt{3}$
17	113,5
18	$a = \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$
19	а) например, последовательность 1, 433, 505, 517, 519; б) нет; в) 5

Вариант 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
15	20	15	0,039	-5	34	1	2	81	33	80	3

13	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k; (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}$
14	$\arcsin \frac{12}{5\sqrt{73}}$
15	$2 \leq x < \frac{\sqrt{17}}{2}$
16	$3\sqrt{11}$
17	14,4 млн рублей
18	$-2 < a < -1,5; -1,5 < a$
19	а) например, подходит последовательность 5, 6, 6, 5, 3; б) нет; в) при $n = 20$

Вариант 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
7	7	12	0,0476	4	51	5	7	49	37	50	9

13	a) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $(-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{8\pi}{3}$
14	$\arcsin \frac{12}{5\sqrt{65}}$
15	$1 \leq x < \frac{2\sqrt{13}-4}{3}$
16	$\frac{3\sqrt{5}}{2}$
17	15,6 млн рублей
18	$a < 1,5$; $1,5 < a < 2$
19	а) например, подходит последовательность 8, 5, 3, 2, 2; б) нет; в) при $n = 28$

Вариант 11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	13	84	0,0294	1	62	8	4	9	45	60	11

13	a) πk ; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) -2π ; $-\frac{5\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$
14	$\arcsin \frac{12}{5\sqrt{34}}$
15	$2 \leq x < \frac{2\sqrt{31}-5}{3}$
16	$3\sqrt{7}$
17	9 млн рублей
18	$8 < a < 8,5$; $8,5 < a$
19	а) например, подходит последовательность 7, 7, 6, 4, 1; б) нет; в) при $n = 24$

Вариант 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
27	10	63	0,078	5	85	4	9	121	32	40	-15

13	a) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$
14	$\arcsin \frac{4\sqrt{11}}{7\sqrt{13}}$
15	$3 \leq x < \frac{\sqrt{89}-2}{2}$
16	4
17	17,88 млн рублей
18	$a < 5,5$; $5,5 < a < 6$
19	а) например, подходит последовательность 11, 7, 4, 2, 1; б) нет; в) при $n = 34$

Вариант 13

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
425	6	4,5	0,2	-7	57	1,5	49	96	12	24	26

13	а) -5 ; 2; $\frac{-1 \pm \sqrt{65}}{2}$; б) -5 ; $-\frac{1 + \sqrt{65}}{2}$
14	б) $\frac{28\sqrt{2}}{3}$
15	$-3 < x \leq -\frac{74}{25}$
16	9
17	1 597 200 рублей
18	$a = -\frac{33}{4}$
19	а) может; б) не может; в) 1,5

Вариант 14

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
209	5	3	0,75	3	80	1	121	17	9	44	17

13	а) -1 ; 5; $7 \pm 2\sqrt{11}$; б) -1 ; $7 - 2\sqrt{11}$
14	б) $\frac{55\sqrt{2}}{2}$
15	$-1 < x \leq -\frac{48}{49}$
16	8
17	1 555 200 рублей
18	$a = 3,5$
19	а) может; б) не может; в) $\frac{191}{141}$

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ

Вариант 7

Часть 2

13. а) Решите уравнение $\cos x + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} \cdot (\sin x + 1) = 0$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$.

Решение.

а) Перейдем к системе

$$\begin{cases} \frac{2-\sqrt{2}}{2} \cdot (\sin x + 1) = \cos^2 x; \\ \cos x \leq 0, \end{cases}$$

Решим уравнение:

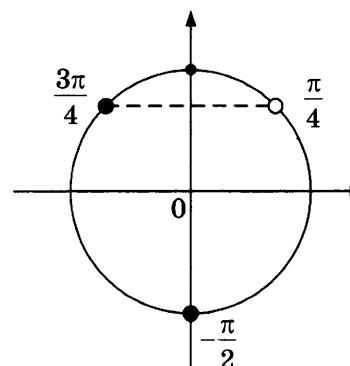
$$\begin{aligned} (2-\sqrt{2})(\sin x + 1) &= 2\cos^2 x; & (2-\sqrt{2})\sin x + 2 - \sqrt{2} &= 2 - 2\sin^2 x; \\ 2\sin^2 x + (2-2\sqrt{2})\sin x - \sqrt{2} &= 0; & \sin x &= -1 \text{ или } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

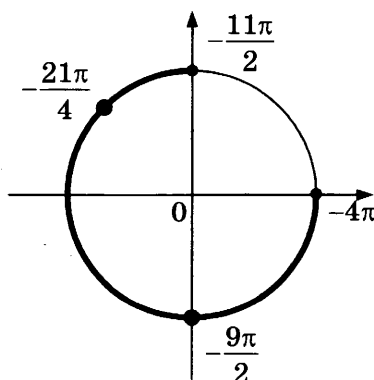
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ или } x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

С помощью тригонометрической окружности отберём серии, удовлетворяющие условию $\cos x \leq 0$. Получим:

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$. Получим $x = -\frac{21\pi}{4}$, $x = -\frac{9\pi}{2}$.

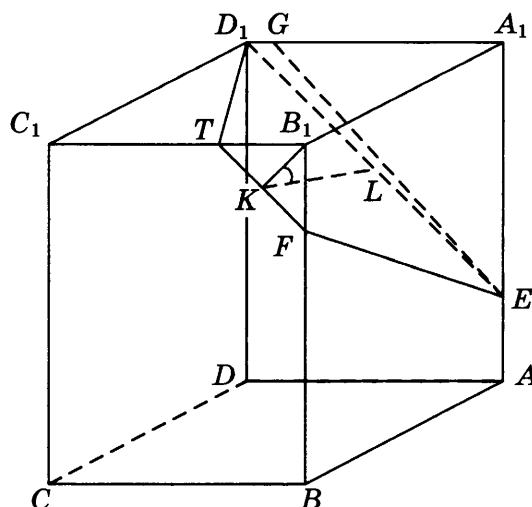


Ответ: а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{21\pi}{4}; \quad -\frac{9\pi}{2}.$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>а</i> или в пункте <i>б</i> . ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взята точка E так, что $A_1 E : EA = 3 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1 F : FB = 1 : 3$, а на ребре $B_1 C_1$ — точка T так, что $B_1 T : TC_1 = 1 : 2$. Известно, что $AB = 4$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$.
- а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1 .
- б) Найдите угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$.

Решение.



- а) В плоскости $AA_1 D_1$ проведём через точку E прямую, параллельную TF . Пусть она пересекает ребро $A_1 D_1$ или его продолжение в точке G . Плоскость EFT проходит через точку G . Треугольник EGA_1 подобен равнобедренному треугольнику FTB_1 , в котором $FB_1 = B_1 T = 1$. Отсюда $EA_1 = A_1 G = 3$, значит, точка G совпадает с точкой D_1 .
- б) В плоскости $BB_1 C_1$ из точки B_1 опустим перпендикуляр $B_1 K$ на отрезок FT . В плоскости EFT из точки K проведём перпендикуляр к FT , который пересекает ED_1 в точке L . Тогда $\angle B_1 K L$ — угол между плоскостью EFT и плоскостью $BB_1 C_1$ или смежный с ним. Из равнобедренного треугольника $FB_1 T$ находим $B_1 K = \frac{FB_1 \cdot B_1 T}{FT} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из равнобедренной трапеции $EFTD_1$ находим

$$KL = \sqrt{TD_1^2 - \left(\frac{ED_1 - FT}{2} \right)^2} = \sqrt{20 - \left(\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} \right)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Точка L — середина отрезка ED_1 , поэтому она удалена от сторон AA_1 и A_1D_1 параллелепипеда на $\frac{3}{2}$. Значит, B_1L является диагональю параллелепипеда со сторонами $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2}$ и 4.

Отсюда $B_1L = \sqrt{\frac{41}{2}}$. Из теоремы косинусов для треугольника B_1KL находим

$$\cos \angle B_1KL = \frac{B_1K^2 + KL^2 - B_1L^2}{2 \cdot B_1K \cdot KL} = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: б) $\arccos \frac{1}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	2
Верно доказан пункт а. ИЛИ Верно решён пункт б при отсутствии обоснований в пункте а	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15. Решите неравенство $\sqrt[5]{32^{4x-3}} < \sqrt{16^{\frac{2x+1}{x}}}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$2^{4x-3} < 2^{\frac{4x+2}{x}}; \quad 4x-3 < \frac{4x+2}{x}; \quad \frac{4x^2-3x}{x} < \frac{4x+2}{x}; \quad \frac{4x^2-7x-2}{x} < 0; \quad \frac{(4x+1)(x-2)}{x} > 0.$$

Применяя метод интервалов, получаем решение: $x < -\frac{1}{4}$ или $0 < x < 2$.

Ответ: $x < -\frac{1}{4}$, $0 < x < 2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K . При этом $AK : KC = 1 : 2$.

а) Докажите, что $\angle BAC = 30^\circ$.

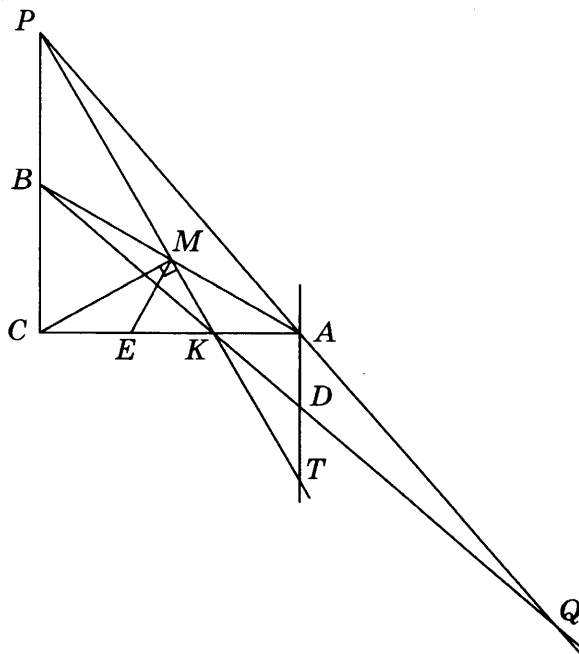
б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK — в точке Q . Найдите KQ , если $BC = 3\sqrt{2}$.

ение.

а) Пусть E — середина KC . Тогда ME — медиана прямоугольного треугольника CMK , проведённая из вершины прямого угла. Значит,

$$ME = \frac{1}{2}CK = AK = \frac{1}{2}AE.$$

Следовательно, $\angle A = 30^\circ$.



б) Из прямоугольных треугольников ABC и KBC находим, что

$$AC = BC \operatorname{ctg} 30^\circ = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{6},$$

$$BK = \sqrt{BC^2 + \left(\frac{2}{3}AC\right)^2} = \sqrt{18 + 24} = \sqrt{42}.$$

Через вершину A проведём прямую, параллельную BC . Пусть T — точка пересечения этой прямой с прямой MK , D и Q — точки пересечения прямой BK с прямыми AT и AP соответственно.

Из равенства треугольников AMT и BMP получаем, что $AT = BP$, а из подобия треугольников CKP и AKT следует $CP = 2AT = 2BP$. Значит, B — середина CP .

Треугольник AKD подобен треугольнику CKB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, поэтому

$AD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}BP$, а так как AD параллельна BP , AD — средняя линия треугольника BQP . Значит,

$$BQ = 2DB = 2 \cdot \frac{3}{2}BK = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{42} = 3\sqrt{42}.$$

Следовательно,

$$KQ = BQ - BK = 3\sqrt{42} - \sqrt{42} = 2\sqrt{42}.$$

Ответ: $2\sqrt{42}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> . ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> . ИЛИ При обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17. 15 января планируется взять кредит в банке на 5 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 5% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Сколько процентов от суммы кредита составляет общая сумма денег, которую нужно выплатить банку за весь срок кредитования?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S . По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S, \frac{4S}{5}, \frac{3S}{5}, \frac{2S}{5}, \frac{S}{5}, 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 5%, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$$1,05S, 1,05 \cdot \frac{4S}{5}, 1,05 \cdot \frac{3S}{5}, 1,05 \cdot \frac{2S}{5}, 1,05 \cdot \frac{S}{5}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$0,05S + \frac{S}{5}, \frac{4 \cdot 0,05S + S}{5}, \frac{3 \cdot 0,05S + S}{5}, \frac{2 \cdot 0,05S + S}{5}, \frac{0,05S + S}{5}.$$

Всего следует выплатить

$$S + S \cdot 0,05 \left(1 + \frac{4}{5} + \dots + \frac{1}{5} \right) = S \left(1 + \frac{6 \cdot 0,05}{2} \right) = 1,15S.$$

Значит, банку нужно вернуть 115% от суммы кредита.

Ответ: 115.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	3

18. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(x^2 + x + 2a^2 + 1)^2 = 8a^2(x^2 + x + 1)$$

имеет ровно один корень.

Решение.

Сделаем замену $y = x^2 + x + 1$. Получим уравнение на y :

$$(y + 2a^2)^2 = 8a^2y;$$

$$y^2 + 4a^2y + 4a^4 - 8a^2y = 0;$$

$$(y - 2a^2)^2 = 0; y = 2a^2.$$

Вернёмся к переменной x : $x^2 + x + 1 - 2a^2 = 0$. Это уравнение имеет единственный корень в том и только том случае, когда его дискриминант равен 0:

$$1 - 4(1 - 2a^2) = 0; 8a^2 - 3 = 0; a = \pm \sqrt{\frac{8}{3}} = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $a = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a , но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

19. Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, \dots, a_n состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \leq n - 2$ выполнено равенство $5a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $4a_n = 5a_2 - a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1 , если $a_n = 286$?

Решение.

а) Например, подходит последовательность 1, 126, 151, 156, 157.

б) При всех натуральных $k \leq n - 1$ положим $b_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда равенство $5a_{k+2} = 6a_{k+1} - a_k$ равносильно равенству $5b_{k+1} = b_k$. Следовательно, последовательность b_k при $1 \leq k \leq n - 1$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{5}$.

Имеем $a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \dots + b_{n-1} = a_1 + \frac{b_1(1-q^{n-1})}{1-q} < a_1 + \frac{b_1}{1-q} = a_1 + \frac{5}{4}b_1 = \frac{5}{4}a_2 - \frac{1}{4}a_1$. Значит, равенство $4a_n = 5a_2 - a_1$ ни при каком $n \geq 3$ выполняться не может.

в) Как доказано в решении пункта б, последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k$ при $1 \leq k \leq n - 1$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{5}$.

$$\text{Имеем } 286 = a_n = a_1 + \frac{b_1(1-q^{n-1})}{1-q} = a_1 + \frac{b_1(5^{n-1}-1)}{2 \cdot 5^{n-2}}.$$

Следовательно, b_1 делится на 5^{n-2} , а a_1 даёт при делении на $\frac{5^{n-1}-1}{2}$ тот же остаток, что и число 286. Так как $5^4 = 625 > 286 > b_1 \geq 5^{n-2}$, получаем, что $n \leq 5$. Остатки при делении числа 286 на $\frac{5^2-1}{4} = 6$, $\frac{5^3-1}{4} = 31$, $\frac{5^4-1}{4} = 156$, $\frac{5^5-1}{4} = 781$ соответственно равны 4, 7, 130 и 286. Значит, a_1 не может быть меньше 4.

Пример последовательности 4, 239, 286 показывает, что a_1 может равняться 4.

Ответ: а) например, последовательность 1, 126, 151, 156, 157; б) нет; в) 4.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а, б и в	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах а и б, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах а и в	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте б, пункты а и в не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте в, пункты а и б не решены	2
Приведён пример в пункте а, пункты б и в не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Справочное издание

**Ященко И. В., Волчкевич М. А., Высоцкий И. Р., Гордин Р. К.,
Семёнов П. В., Косухин О. Н., Фёдоровых Д. А., Суздальцев А. И.,
Рязановский А. Р., Смирнов В. А., Хачатурян А. В.,
Шестаков С. А., Шноль Д. Э.**

ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

Издательство **«ЭКЗАМЕН»**

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU.АД44.Н02841 от 30.06.2017 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Л. К. Корнилова, Н. Н. Яковлева*
Дизайн обложки *Л. В. Демьянова*
Компьютерная верстка *К. А. Реутова, Е. Ю. Лысова*

Россия, 107045, Москва, Луков пер., д. 8. www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 8 (495) 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», Россия, г. Тверь, www.pareto-print.ru

По вопросам реализации обращаться по тел.: 8 (495) 641-00-30 (многоканальный).