Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
26 января 2017 года
Вариант МА10309
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

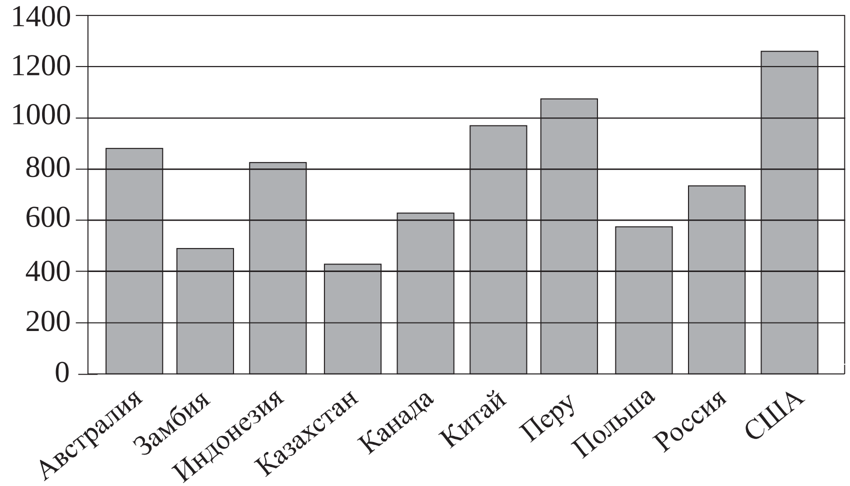
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Установка счётчиков холодной и горячей воды стоит 2300 рублей. До установки счётчиков за водоснабжение платили 1200 рублей ежемесячно. После установки счётчиков ежемесячная оплата стала 600 рублей. Через сколько месяцев экономия впервые превысит затраты на установку счётчиков, если тарифы на воду не изменятся?

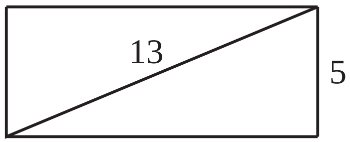
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показано количество выплавляемой меди в 10 странах мира в 2006 году. По горизонтали указываются страны, по вертикали – количество выплавляемой меди (в тысячах тонн). Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимает Польша?



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь прямоугольника по данным рисунка.



Ответ: ____________________________.

4 Чтобы выйти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,4.

Ответ: ____________________________.

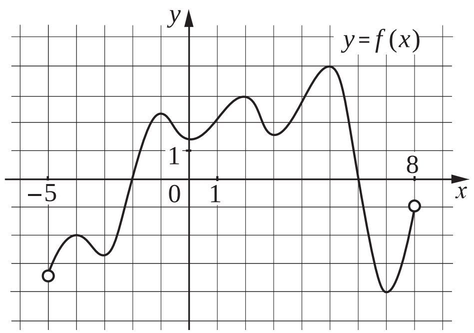
5 Найдите корень уравнения $\sqrt{52-6x}=4$.

Ответ: ____________________________.

6 Найдите площадь прямоугольника, диагональ которого равна 13, а одна из сторон равна 5.

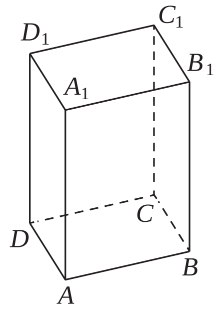
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-5;8)$. Найдите наибольшее значение функции на отрезке $[-2;3]$.



Ответ: ____________________________.

8 Дана правильная четырёхугольная призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, площадь основания которой равна 6, а боковое ребро равно 7. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, A_1, B_1.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{7}{\sqrt{149}}$ и $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$.

Ответ: ____________________________.

10 При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0=160$ Гц и равна: $f=f_0\cdot\frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u=8$ м/с и $v=16$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота f сигнала в приёмнике будет равна 170 Гц?

Ответ: ____________________________.

11 Завод получил заказ на партию штампованных деталей. Один автомат может отштамповать все детали за 16 часов. Через 2 часа после того, как первый автомат начал штамповать детали, начал работу второй такой же автомат, и оставшиеся детали были распределены между двумя автоматами поровну. Сколько всего часов потребовалось на выполнение этого заказа?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y=\sqrt{x^2-6x+11}$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{4^{\sin 2x}-2^{2\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{7\sin x}}=0$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{13\pi}{2};-5\pi\right]$.

14 Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.
а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.
б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ, если ребро куба равно 4.

15 Решите неравенство $3^{|x|}-8-\dfrac{3^{|x|}+9}{9^{|x|}-4\cdot 3^{|x|}+3}\le\dfrac{5}{3^{|x|}-1}$.

16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.
а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.
б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC=12$ и $BD=6{,}5$.

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 4 млн рублей.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4-16x^2+64a^2}=x^2+4x-8a$ имеет ровно 3 решения.

19 Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, …, a_n состоит из $n\ge 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k\le n-2$ выполнено равенство $4a_{k+2}=7a_{k+1}-3a_k$.
а) Приведите пример такой последовательности при $n=5$.
б) Может ли в такой последовательности при некотором $n\ge 3$ выполняться равенство $a_n=4a_2-3a_1$?
в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n=527$?

Ответы к тренировочной работе по математике 26.01.2017 (профиль)

	МА10309	**МА10310**	**МА10311**	**МА10312**
1	4	6	75	165
2	8	8	8	8
3	60	12	120	168
4	0,32	0,33	0,039	0,078
5	6	1	-5	-4
6	60	12	120	168
7	3	1	4	3
8	14	16	126	180
9	-0,7	-1,25	8	4
10	400	365	0,05	0,01
11	9	10	14	20
12	3	6	19	11

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\dfrac{4^{\sin 2x}-2^{2\sqrt{3}\sin x}}{\sqrt{7\sin x}}=0$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{13\pi}{2};-5\pi\right]$.

Решение.

а) Перейдём к системе

$$\begin{cases}4^{\sin 2x}-2^{2\sqrt{3}\sin x}=0,\\ \sin x>0.\end{cases}$$

Значит,

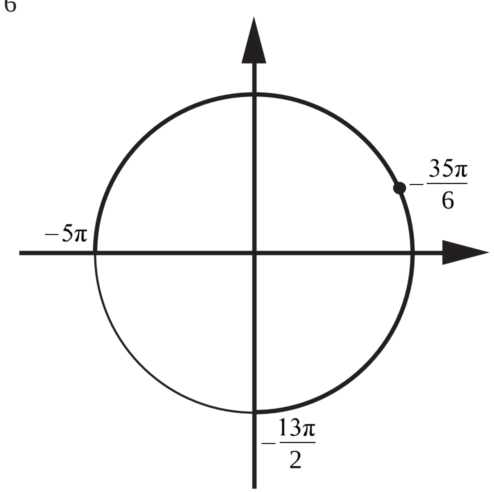
$$\begin{cases}2^{4\sin x\cos x}=2^{2\sqrt{3}\sin x},\\ \sin x>0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin x>0.\end{cases}$$

Получим $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[-\dfrac{13\pi}{2};-5\pi\right]$.

Получим $x=-\dfrac{35\pi}{6}$.



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{35\pi}{6}$.

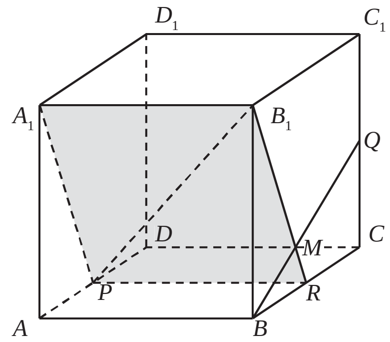
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Точки P и Q — середины рёбер AD и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1P и QB перпендикулярны.

б) Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку P и перпендикулярной прямой BQ, если ребро куба равно 4.

Решение.



а) Проведём отрезок B_1R, параллельный A_1P. Пусть M — точка пересечения отрезков B_1R и QB. Треугольник BMR прямоугольный с прямым углом при вершине M. Это следует из равенства треугольников RB_1B и QBC. Значит, прямые QB и B_1R перпендикулярны. Прямые QB и PR перпендикулярны, так как прямая PR перпендикулярна плоскости BCC_1. Поэтому прямая QB перпендикулярна плоскости A_1B_1P, и, следовательно, прямая QB перпендикулярна прямой B_1P.

б) Указанное сечение — прямоугольник A_1B_1RP. Его площадь равна $A_1B_1\cdot A_1P=8\sqrt{5}$.

Ответ: б) $8\sqrt{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $3^{|x|}-8-\frac{3^{|x|}+9}{9^{|x|}-4\cdot 3^{|x|}+3}\le\frac{5}{3^{|x|}-1}$.

Решение.

Сделаем замену $y=3^{|x|}$.

Получим

$y-8-\frac{y+9}{y^2-4y+3}\le\frac{5}{y-1}$;

$y-8-\frac{y+9+5y-15}{(y-1)(y-3)}\le 0$;

$y-8-6\frac{y-1}{(y-1)(y-3)}\le 0$;

$\frac{(y-9)(y-2)(y-1)}{(y-3)(y-1)}\le 0$.

$-\infty<y<1$; $1<y\le 2$; $3<y\le 9$.

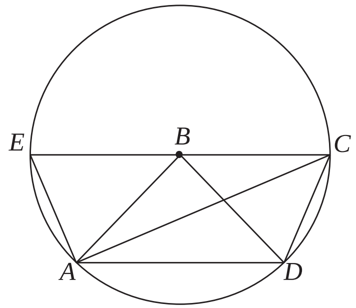
После обратной замены получаем $-2\le x<-1$; $-\log_3 2\le x<0$; $0<x\le\log_3 2$; $1<x\le 2$.

Ответ: $[-2;-1)$; $[-\log_3 2;0)$; $(0;\log_3 2]$; $(1;2]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагональ BD разбивает её на два равнобедренных треугольника с основаниями AD и CD.
а) Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.
б) Найдите CD, если известны диагонали трапеции: $AC=12$ и $BD=6{,}5$.

Решение.



а) $\angle BAC=\angle ACB=\angle CAD$, следовательно, AC — биссектриса угла BAD.

б) Поскольку $BA=BD=BC=6{,}5$, точки A, D и C лежат на окружности радиуса 6,5 с центром в точке B. Продолжим основание BC за точку B до пересечения с этой окружностью в точке E. Тогда EC — диаметр окружности, а $ADCE$ — равнобедренная трапеция. Поэтому $AE=CD$, а так как точка A лежит на окружности с диаметром CE, получаем, что $\angle CAE=90°$. Из прямоугольного треугольника CAE находим, что $AE=\sqrt{CE^2-AC^2}=\sqrt{13^2-12^2}=5$. Следовательно, $CD=AE=5$.

Ответ: 5.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 4 млн рублей.

Решение.

В январе 2017 года долг будет составлять $1{,}15S$ млн рублей, а в июле 2017 года — $0{,}8S$ млн рублей. Значит, выплата в 2017 году составит $0{,}35S$ млн рублей.

В январе 2018 года долг будет составлять $1{,}15\cdot 0{,}8S = 0{,}92S$ млн рублей, а в июле 2018 года — $0{,}5S$ млн рублей. Значит, выплата в 2018 году составит $0{,}42S$ млн рублей.

В январе 2019 года долг перед банком составит $1{,}15\cdot 0{,}5S = 0{,}575S$, а в июле — 0 рублей. Значит, выплата в 2019 году составит $0{,}575S$ млн рублей.

Решим систему:

$$\begin{cases} 0{,}35S < 4, \\ 0{,}42S < 4, \\ 0{,}575S < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S < 11{,}42..., \\ S < 9{,}52..., \\ S < 6{,}95... \end{cases}$$

Наибольшее целое решение этой системы — $S = 6$ млн рублей.

Ответ: 6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 - 16x^2 + 64a^2} = x^2 + 4x - 8a$ имеет ровно 3 решения.

Решение.

Перейдём к системе

$$\begin{cases} x^4 - 16x^2 + 64a^2 = x^4 + 16x^2 + 64a^2 + 8x^3 - 16ax^2 - 64ax, \\ x^2 + 4x - 8a \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ax(x+4) = x^2(x+4), \\ x^2 + 4x - 8a \ge 0. \end{cases}$$

Уравнение имеет корни $x = 0$ и $x = -4$ при любых значениях a и ещё один корень $x = 2a$, который не должен совпадать с двумя другими. Значит, $a \ne -2$ и $a \ne 0$. При этом должно выполняться неравенство $x^2 + 4x - 8a \ge 0$.

Получаем

$$\begin{cases} (-4)^2 - 16 - 8a \ge 0, \\ 0^2 + 0 - 8a \ge 0, \\ 4a^2 + 8a - 8a \ge 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \le 0, \\ a^2 \ge 0, \end{cases}$$

откуда $a \le 0$.

Ответ: $a < -2$, $-2 < a < 0$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Конечная возрастающая последовательность a_1, a_2, …, a_n состоит из $n \ge 3$ различных натуральных чисел, причём при всех натуральных $k \le n-2$ выполнено равенство $4a_{k+2} = 7a_{k+1} - 3a_k$.

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \ge 3$ выполняться равенство $a_n = 4a_2 - 3a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 527$?

Решение.

а) Например, подходит последовательность 1, 65, 113, 149, 176.

б) При всех натуральных $k \le n-1$ положим $b_k = a_{k+1} - a_k$. Тогда равенство $4a_{k+2} = 7a_{k+1} - 3a_k$ равносильно равенству $4b_{k+1} = 3b_k$. Следовательно, последовательность b_k при $1 \le k \le n-1$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{3}{4}$.

Имеем

$$a_n = a_1 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1} = a_1 + \frac{b_1(1-q^{n-1})}{1-q} < a_1 + \frac{b_1}{1-q} = a_1 + 4b_1 = 4a_2 - 3a_1.$$

Значит, равенство $a_n = 4a_2 - 3a_1$ ни при каком $n \ge 3$ выполняться не может.

в) Как доказано в решении пункта б, последовательность $b_k = a_{k+1} - a_k$ при $1 \le k \le n-1$ образует геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{3}{4}$.

Имеем $527 = a_n = a_1 + \frac{b_1(1-q^{n-1})}{1-q} = a_1 + \frac{b_1(4^{n-1} - 3^{n-1})}{4^{n-2}}$. Следовательно, b_1 делится на 4^{n-2}, а a_1 даёт при делении на $4^{n-1} - 3^{n-1}$ тот же остаток, что и число 527. Так как $4^5 = 1024 > 527 > b_1 \ge 4^{n-2}$, получаем, что $n \le 6$. Остатки при делении числа 527 на $4^2 - 3^2 = 7$, $4^3 - 3^3 = 37$, $4^4 - 3^4 = 175$ и $4^5 - 3^5 = 781$ соответственно равны 2, 9, 2 и 527. Значит, a_1 не может быть меньше 2.

Пример последовательности 2, 194, 338, 446, 527 показывает, что a_1 может равняться 2.

Ответ: а) например, последовательность 1, 65, 113, 149, 176; б) нет; в) 2.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4