Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
6 марта 2017 года
Вариант МА10609
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

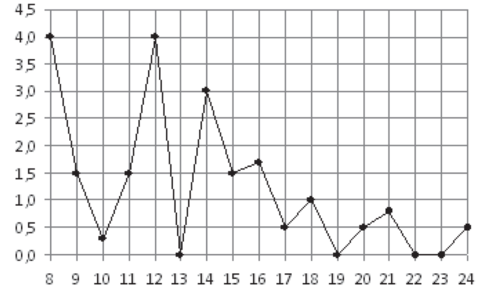
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Показания счётчика электроэнергии 1 февраля составляли 71 181 кВт · ч, а 1 марта — 71 326 кВт · ч. Сколько нужно заплатить за электроэнергию за февраль, если 1 кВт · ч электроэнергии стоит 5 рублей 20 копеек? Ответ дайте в рублях.

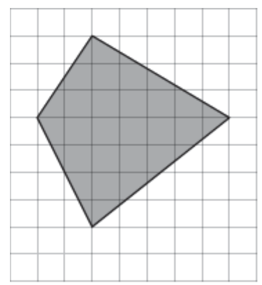
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Томске с 8 по 24 января 2005 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа за данный период впервые выпало ровно 1,5 миллиметра осадков.



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь четырёхугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1×1.



Ответ: ___________________________.

4 На конференцию приехали 6 учёных из Швейцарии, 3 из Болгарии и 6 из Австрии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что третьим окажется доклад учёного из Болгарии.

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{3}{5x-30}}=\dfrac{1}{5}$.

Ответ: ___________________________.

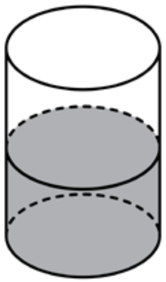
6 Основания равнобедренной трапеции равны 43 и 7. Высота трапеции равна 27. Найдите тангенс острого угла трапеции.

Ответ: ___________________________.

7 Прямая $y=-3x+8$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+7x-6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ: ___________________________.

8 В цилиндрический сосуд налили 2200 $см^3$ воды. Уровень жидкости оказался равным 16 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 6 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в $см^3$.



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\left(17a^{12}b^3-\left(5a^4b\right)^3\right):\left(4a^{12}b^3\right)$ при $a=-2{,}8$ и $b=5{,}3$.

Ответ: ___________________________.

10 Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p=600$ руб. за единицу, переменные текущие затраты на производство одной единицы продукции составляют $v=400$ руб., постоянные расходы предприятия $f=600\,000$ руб. в месяц. Месячная прибыль предприятия (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q)=q(p-v)-f$, где q (единиц продукции) — месячный объём производства. Определите значение q, при котором месячная прибыль предприятия будет равна 500 000 руб.

Ответ: ___________________________.

11 Пристани A и B расположены на озере, расстояние между ними равно 234 км. Баржа отправилась с постоянной скоростью из A в B. На следующий день после прибытия она отправилась обратно со скоростью на 4 км/ч больше прежней, сделав по пути остановку на 8 часов. В результате она затратила на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость баржи на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=8+\dfrac{5\pi\sqrt{3}}{18}-\dfrac{5\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{10\sqrt{3}}{3}\cos x$ на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\,2\pi\right]$.

14 В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

15 Решите неравенство $\dfrac{35^{|x|}-5^{|x|}-5\cdot 7^{|x|}+5}{2^{\sqrt{x+2}}+1}\geq 0$.

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM=\angle DBC=30^\circ$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC=9$.

17 У фермера есть два поля, каждое площадью 8 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 350 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 300 ц/га.

Фермер может продавать картофель по цене 2500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 3000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(2x+a+1+\operatorname{tg}x)^2=(2x+a-1-\operatorname{tg}x)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ состоят из натуральных чисел.

а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1b_1+a_3b_3=3a_2b_2$.

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1+2a_4b_4=3a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $a_1b_1+2a_4b_4\leq 300$?

Ответы к тренировочной работе по математике 06.03.2017

(профильный уровень)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Вариант 10609	754	9	24,5	0,2	21	1,5	-5	825	-27	5500	9	3
Вариант 10610	918	14	22,5	0,4	30	2	4	300	-20	6000	10	4
Вариант 10611	3	277	5	0,16	5	45	-5	282,5	-13	4	90	-5
Вариант 10612	5	23	6,5	0,25	-1	45	-1	170	14	5	80	-4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\, 2\pi\right]$.

Решение.

а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases}\log_2(\sin x)\left(\log_2(\sin x)+1\right)=0,\\ 2\cos x-\sqrt{3}\neq 0.\end{cases}$$

Пусть $y=\log_2(\sin x)$.

Получаем

$$y\left(y+1\right)=0,\ \text{откуда}\ y=0\ \text{или}\ y=-1.$$

После обратной замены получаем $\log_2(\sin x)=0$ или $\log_2(\sin x)=-1$, то есть $\sin x=1$ или $\sin x=\dfrac{1}{2}$ при условии $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Если $\sin x=\dfrac{1}{2}$, то

$$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k\ \text{ или }\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ k,n\in\mathbb{Z}.$$

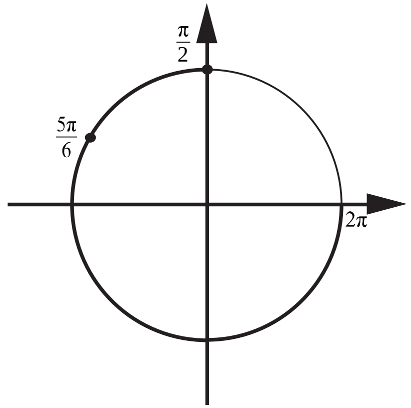
Числа $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ не удовлетворяют условию $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Если $\sin x=1$, то

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\, 2\pi\right]$.

Получим $x=\dfrac{5\pi}{6}$ или $x=\dfrac{\pi}{2}$.



Ответ: а) $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\ \dfrac{\pi}{2}+2\pi m,\ n,m\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{5\pi}{6}$.

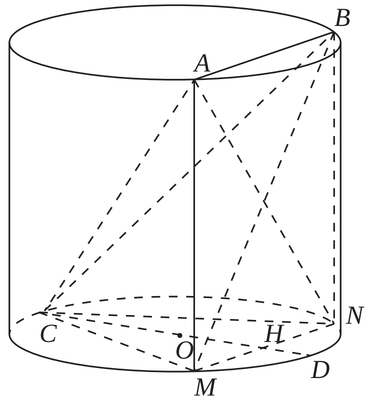
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 В одном основании прямого кругового цилиндра с высотой 3 и радиусом основания 8 проведена хорда AB, равная радиусу основания, а в другом его основании проведён диаметр CD, перпендикулярный AB. Построено сечение $ABNM$, проходящее через прямую AB перпендикулярно прямой CD так, что точка C и центр основания цилиндра, в котором проведён диаметр CD, лежат с одной стороны от сечения.

а) Докажите, что диагонали этого сечения равны между собой.

б) Найдите объём пирамиды $CABNM$.

Решение.



а) Для построения сечения опустим перпендикуляры AM и BN на второе основание цилиндра. Отрезки AM и BN параллельны и равны, значит, $ABNM$ — параллелограмм. Так как прямые AM и BN перпендикулярны основаниям цилиндра и, в частности, прямой AB, параллелограмм $ABNM$ является прямоугольником. Отрезки AN и BM равны как диагонали прямоугольника, что и требовалось доказать.

б) Площадь прямоугольника $ABNM$ равна $3\cdot 8=24$. Пусть H — точка пересечения отрезков NM и CD. Отрезок OH равен $\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$. Высота CH пирамиды $CABNM$ равна $8+4\sqrt{3}$. Следовательно, объём пирамиды $CABNM$ равен

$$\frac{1}{3}\cdot 24\cdot\left(8+4\sqrt{3}\right)=64+32\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $64+32\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\dfrac{35^{|x|}-5^{|x|}-5\cdot 7^{|x|}+5}{2^{\sqrt{x+2}}+1}\ge 0.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{\left(7^{|x|}-1\right)\left(5^{|x|}-5\right)}{2^{\sqrt{x+2}}+1}\ge 0.$$

Имеем $2^{\sqrt{x+2}}+1>0$ при любом $x\ge -2$; при $x<-2$ неравенство решений не имеет.

Если $x=0$, то $7^{|x|}-1=0$.

Если $x\ne 0$, то $7^{|x|}-1>0$, тогда

$$5^{|x|}-5\ge 0,\text{ откуда } |x|\ge 1.$$

Ответ: $-2\le x\le -1$; $x=0$; $x\ge 1$.

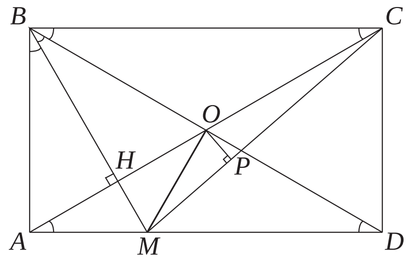
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника $ABCD$ перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

а) Докажите, что $\angle ABM=\angle DBC=30^\circ$.

б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM, если $BC=9$.

Решение.



а) Обозначим $\angle CBD=\alpha$. Треугольник BMD равнобедренный, поэтому $\angle DBM=\angle BDM=\angle CBD=\alpha.$

Прямоугольные треугольники ACB и BDA равны по катету и гипотенузе, поэтому $\angle ACB=\angle ADB=\alpha.$

Пусть H — точка пересечения BM и AC. Тогда BH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла. Значит, $\angle ABH=\angle ACB=\alpha.$

Следовательно, $\angle ABM=\angle DBM=\angle CBD=\frac{1}{3}\cdot 90^\circ=30^\circ.$

б) Имеем $AB=BC\operatorname{tg}30^\circ=\frac{9}{\sqrt{3}}=3\sqrt{3}$,

$AM=AB\operatorname{tg}30^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=3$, $MD=AD-AM=9-3=6$.

Из прямоугольного треугольника CMD находим

$MC=\sqrt{CD^2+MD^2}=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2+6^2}=3\sqrt{7}.$

Пусть O — центр прямоугольника $ABCD$. Расстояние от центра O прямоугольника $ABCD$ до прямой CM равно высоте OP треугольника CMO. Площадь треугольника CMO равна половине площади треугольника ACM:

$$S_{OCM}=\frac{1}{2}S_{ACM}=\frac{1}{4}AM\cdot AB=\frac{1}{2}CM\cdot OP;\quad OP=\frac{AM\cdot AB}{2\cdot MC}=\frac{3\cdot 3\sqrt{3}}{2\cdot 3\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 У фермера есть два поля, каждое площадью 8 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 350 ц/га, а на втором — 200 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 250 ц/га, а на втором — 300 ц/га.
Фермер может продавать картофель по цене 2500 руб. за центнер, а свёклу — по цене 3000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение.
Заметим, что на первом поле с одного гектара можно собрать либо 350 центнеров картофеля и получить 875 000 рублей, либо 250 центнеров свёклы и получить 750 000 рублей. Таким образом, нужно всё первое поле отдать под картофель. На втором поле с одного гектара можно собрать либо 200 центнеров картофеля и получить 500 000 рублей, либо 300 центнеров свёклы и получить 900 000 рублей. Поэтому второе поле нужно целиком отдать под свёклу.
В этом случае фермер сможет заработать $8\cdot 350\cdot 2500+8\cdot 300\cdot 3000=$ $=14\,200\,000$ (рублей).
Ответ: 14,2 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\left(2x+a+1+\operatorname{tg}x\right)^2=\left(2x+a-1-\operatorname{tg}x\right)^2$$

имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$\left(2x+a+1+\operatorname{tg}x\right)^2-\left(2x+a-1-\operatorname{tg}x\right)^2=0;$$

$$\left(2+2tg\,x\right)\left(4x+2a\right)=0,$$

откуда

$\operatorname{tg}x=-1$ или $x=-\frac{a}{2}$ при условии, что $-\frac{a}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Число $\frac{\pi}{2}+\pi k$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ при $k=-1$ и $k=0$.

Уравнение $\operatorname{tg}x=-1$ имеет на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ единственный корень $-\frac{\pi}{4}$.

Следовательно, данное уравнение имеет единственное решение на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, только если число $-\frac{a}{2}$ или находится вне отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, или совпадает с $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или совпадает с $-\frac{\pi}{4}$, то есть $-\frac{a}{2}<-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{a}{2}>\frac{\pi}{2}$; $-\frac{a}{2}=-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{a}{2}=\frac{\pi}{2}$ или $-\frac{a}{2}=-\frac{\pi}{4}$; откуда $a\le-\pi$; $a=\frac{\pi}{2}$ или $a\ge\pi$.

Ответ: $a\le-\pi$; $a=\frac{\pi}{2}$; $a\ge\pi$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *a*, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \dots$ и $b_1, b_2, \dots$ состоят из натуральных чисел.

а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1b_1+a_3b_3=3a_2b_2$.

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1+2a_4b_4=3a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $a_1b_1+2a_4b_4\le300$?

Решение.

а) Подходящим примером являются прогрессии 1, 3, 5, ... и 1, 4, 7, ... Для этих прогрессий имеем $a_1b_1+a_3b_3=1\cdot1+5\cdot7=36=3\cdot3\cdot4=3a_2b_2$.

б) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответственно. Тогда

$$a_1b_1+2a_4b_4=a_1b_1+2(a_1+3c)(b_1+3d)=3a_1b_1+6a_1d+6b_1c+18cd,$$

$$3a_3b_3=3(a_1+2c)(b_1+2d)=3a_1b_1+6a_1d+6b_1c+12cd \text{ и}$$

$$a_1b_1+2a_4b_4-3a_3b_3=6cd.$$

Если $a_1b_1+2a_4b_4=3a_3b_3$, то $cd=0$. Пришли к противоречию, ведь по условию $c>0$ и $d>0$.

в) По условию $c\ge1$ и $d\ge1$. По доказанному в пункте (б) имеем

$$a_1b_1+2a_4b_4-3a_3b_3=6cd.$$

Значит, $a_3b_3=\frac{a_1b_1+2a_4b_4-6cd}{3}\le\frac{300-6}{3}=98$,

то есть $a_3b_3\le98$. Покажем, что случай $a_3b_3=98$ возможен. Это равенство выполняется, например, для прогрессий 5, 6, 7, 8, ... и 12, 13, 14, 15, ... Для этих прогрессий $a_1b_1+2a_4b_4=300$ и $a_3b_3=7\cdot14=98$.

Ответ: а) 1, 3, 5, ... и 1, 4, 7, ...; б) нет; в) 98.

Содержание критерия	**Баллы**
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4