Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
21сентября 2017 года
Вариант МА10109 (без логарифмов)

Выполнена: ФИО______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

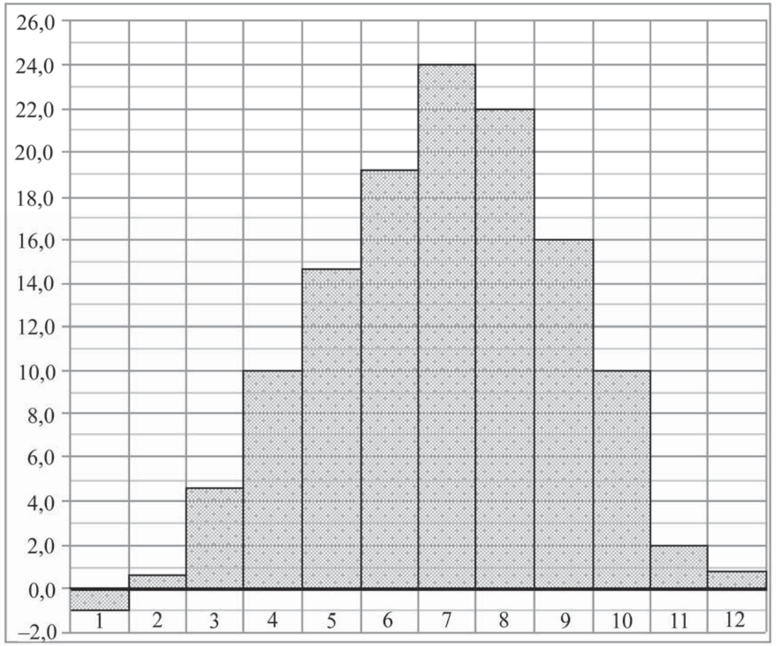
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Оптовая цена учебника 100 рублей. Розничная цена на 20 % выше оптовой. Какое наибольшее число таких учебников можно купить по розничной цене на 4000 рублей?

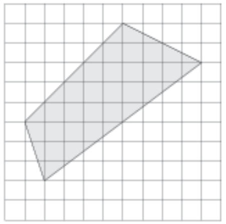
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев в 1988 году, когда среднемесячная температура превышала 12 градусов Цельсия.



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён четырёхугольник. Найдите его площадь. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ____________________________.

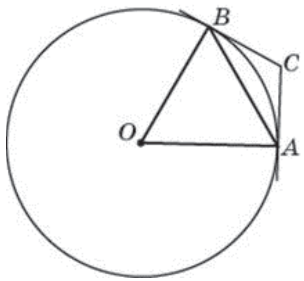
4 Из районного центра в деревню ежедневно ходит автобус. Вероятность того, что в понедельник в автобусе окажется меньше 19 пассажиров, равна 0,88. Вероятность того, что окажется меньше 9 пассажиров, равна 0,49. Найдите вероятность того, что число пассажиров будет от 9 до 18.

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{5}{8-4x}}=\dfrac{1}{12}$.

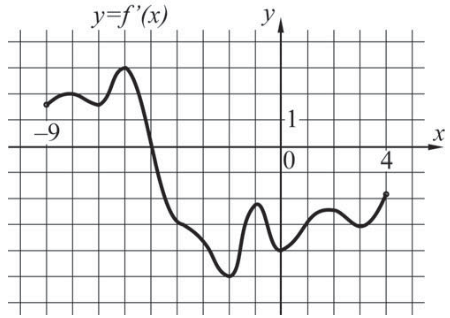
Ответ: ____________________________.

6 Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные AC и BC. Меньшая дуга AB равна $62°$. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



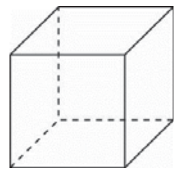
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9;4)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$, принадлежащую отрезку $[-7;1]$.



Ответ: ____________________________.

8 Объём куба равен 343. Найдите площадь его поверхности.



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите $9\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{5}{6}$.

Ответ: ____________________________.

10 К источнику с ЭДС $\varepsilon = 60$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R Ом. Напряжение на этой нагрузке, выражаемое в вольтах, задаётся формулой $U = \dfrac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком сопротивлении нагрузки напряжение на ней будет 50 В? Ответ выразите в омах.

Ответ: ____________________________.

11 Два велосипедиста одновременно отправились в 130-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найти скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ____________________________.

12 Найдите точку минимума функции $y = (x + 12)e^{x-12}$.

Ответ: ____________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{3}{\cos\left(\dfrac{15\pi}{2} + x\right)} = -2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

14 Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $\sqrt{6}$.

15 Решите неравенство $\left(3^{x+1} + 3^{2-x}\right)x \geq 28x$.

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $3:4$.

17 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,3 млн рублей?

18 Найдите все значения x, каждое из которых является решением уравнения $\frac{a\sqrt{3}\sin x + (\sqrt{3}-a)\cos x}{6\sin x - \sqrt{3}\cos x} = 1$ при любом значении a из отрезка $[-1;\, 3\sqrt{2}]$.

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 462. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).
а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.
б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?
в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Ответы на тренировочные варианты 10109-10112 (профильный уровень) от 21.09.2017

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10109	33	5	30	0,39	- 178	118	- 5	294	3,5	10	13	- 13
10110	17	4	21	0,29	- 2	26	- 2	384	- 7	5	16	- 23
10111	1900	4	18	0,392	- 31	151	0	2	319	13	52	23
10112	1700	12	28	0,244	- 26	156	9	3	573	2	71	- 10

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{3}{\cos\left(\dfrac{15\pi}{2}+x\right)}=-2$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

<u>Решение.</u>

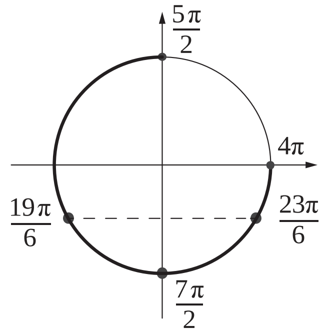
а) Поскольку $\cos\left(\dfrac{15\pi}{2}+x\right)=\sin x$, уравнение примет вид $\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{3}{\sin x}=-2$.

Пусть $\sin x=t$, тогда $\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{3}{t}=-2$; $2t^2+3t+1=0$, откуда $t=-1$ или $t=-\dfrac{1}{2}$.

При $t=-1$ имеем $\sin x=-1$; $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. При $t=-\dfrac{1}{2}$ имеем $\sin x=-\dfrac{1}{2}$; $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Получим числа $\dfrac{19\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{2}$; $\dfrac{23\pi}{6}$.



Ответ: а) $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

$x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\dfrac{19\pi}{6}$; $\dfrac{7\pi}{2}$; $\dfrac{23\pi}{6}$.

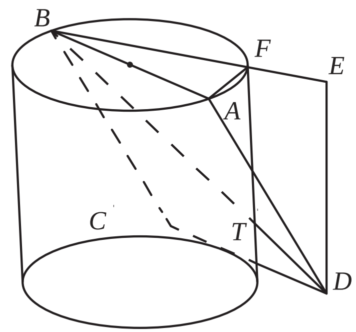
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Квадрат $ABCD$ и цилиндр расположены таким образом, что AB — диаметр верхнего основания цилиндра, а CD лежит в плоскости нижнего основания и касается его окружности.

а) Докажите, что плоскость квадрата наклонена к плоскости основания цилиндра под углом $60°$.

б) Найдите длину той части отрезка BD, которая находится внутри цилиндра, если образующая цилиндра равна $\sqrt{6}$.

<u>Решение.</u>



а) Пусть сторона CD квадрата касается окружности нижнего основания в точке K, O_1 — центр верхнего основания, а O — центр нижнего. Тогда O_1O — перпендикуляр к плоскости основания, отрезок OK перпендикулярен отрезку CD и по теореме о трёх перпендикулярах отрезок O_1K перпендикулярен CD. Поэтому K — середина CD. Тогда упомянутый угол наклона — угол OKO_1 и $\cos\angle OKO_1=\dfrac{OK}{O_1K}=\dfrac{r}{O_1K}$, где r — радиус цилиндра. При этом $O_1K=AD=AB=2r$, поэтому $\cos\angle OKO_1=\dfrac{1}{2}$ и $\angle OKO_1=60°$.

б) Пусть отрезок BD пересекает поверхность цилиндра в точке T; E и F — проекции точек D и T соответственно на плоскость верхнего основания. Тогда FT лежит на образующей, и поэтому отрезок FT параллелен отрезку DE. Значит, $\dfrac{DT}{TB}=\dfrac{EF}{FB}$. Поскольку $\angle AFB=90°$ как угол, опирающийся на диаметр, $\dfrac{EF}{FB}=\dfrac{EF}{FA}\cdot\dfrac{FA}{FB}=\operatorname{tg}\angle EAF\cdot\operatorname{tg}\angle ABF=\operatorname{tg}^2\angle ABF=\left(\dfrac{EA}{AB}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

Поэтому и $\dfrac{DT}{TB}=\dfrac{1}{4}$, т. е. $BT=\dfrac{4}{5}BD=\dfrac{4}{5}AD\sqrt{2}=\dfrac{4}{5}DE\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{2}=\dfrac{16}{5}=3{,}2$.

Ответ: $3{,}2$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\left(3^{x+1}+3^{2-x}\right)x \geq 28x$.

Решение.

Преобразуем неравенство $\left(3^{x+1}+3^{2-x}\right)x \geq 28x$; $\dfrac{\left(3\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^x+9\right)x}{3^x} \geq 0$;

$\dfrac{(3^x-9)(3\cdot 3^x-1)x}{3^x} \geq 0$.

Отсюда находим множество решений данного неравенства: $[-1;\,0];[2;\,+\infty)$.

Ответ: $[-1;\,0];[2;\,+\infty)$.

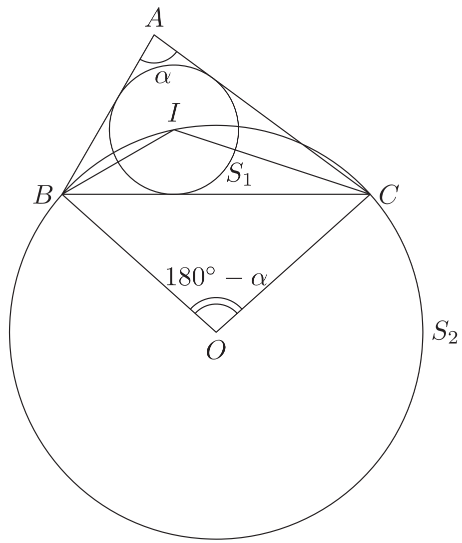
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точка I — центр окружности S_1, вписанной в треугольник ABC, точка O — центр окружности S_2, описанной около треугольника BIC.

а) Докажите, что точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Найдите косинус угла BAC, если радиус описанной окружности треугольника ABC относится к радиусу окружности S_2 как $3:4$.

Решение.



а) Обозначим $\angle BAC=\alpha$. Поскольку I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC, получаем, что $\angle BIC = 90^\circ+\dfrac{\alpha}{2}$.

Дуга BC окружности S_2, не содержащая точки I, вдвое больше вписанного в эту окружность угла BIC, т. е. равна $180^\circ+\alpha$. Значит, дуга BIC окружности S_2 равна

$$360^\circ-\left(180^\circ+\alpha\right)=180^\circ-\alpha.$$

Сумма углов при вершинах A и O четырёхугольника $ABOC$ равна 180°, значит, этот четырёхугольник вписанный. Следовательно, точка O лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Пусть r и R — радиусы описанной окружности треугольника ABC и окружности S_2 соответственно. По теореме синусов

$$r=\frac{BC}{2\sin\alpha},\qquad R=\frac{BC}{2\sin\left(90^\circ+\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\frac{BC}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}.$$

Значит,

$$\frac{3}{4}=\frac{r}{R}=\frac{\dfrac{BC}{2\sin\alpha}}{\dfrac{BC}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}}}=\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}=\frac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

откуда $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{3}$. Следовательно, $\cos\alpha=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1-2\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{9}$.

Ответ: $\dfrac{1}{9}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,3 млн рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна *S*. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

S; $\frac{13S}{14}$; …; $\frac{2S}{14}$; $\frac{S}{14}$; 0.

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$1{,}04S$; $1{,}04\cdot\frac{13S}{14}$; …; $1{,}04\cdot\frac{2S}{14}$; $1{,}04\cdot\frac{S}{14}$.

Таким образом, выплаты должны быть следующими:

$0{,}04S+\frac{S}{14}$; $\frac{13\cdot 0{,}04S+S}{14}$; …; $\frac{2\cdot 0{,}04S+S}{14}$; $\frac{0{,}04S+S}{14}$.

Всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0{,}04\left(1+\frac{13}{14}+\ldots+\frac{2}{14}+\frac{1}{14}\right)=S\left(1+\frac{15\cdot 0{,}04}{2}\right)=1{,}3S.$$

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 1 млн рублей.

Ответ: 1 млн рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения *x*, каждое из которых является решением уравнения $\frac{a\sqrt{3}\sin x+(\sqrt{3}-a)\cos x}{6\sin x-\sqrt{3}\cos x}=1$ при любом значении *a* из отрезка $[-1;\,3\sqrt{2}]$.

Решение.

Искомые значения *x* должны быть среди решений данного уравнения при $a=0$, то есть среди решений уравнения

$\frac{\sqrt{3}\cos x}{6\sin x-\sqrt{3}\cos x}=1$; $\sqrt{3}\cos x=6\sin x-\sqrt{3}\cos x$; $\operatorname{tg} x=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x=\frac{\pi}{6}+m\pi$, где $m\in\mathbb{Z}$.

Пусть некоторое $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ решение данного уравнения. Тогда равенство

$\frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{6\cdot\frac{1}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех *a* из отрезка $[-1;\,3\sqrt{2}]$ выполняется.

Следовательно, все значения $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ условию задачи удовлетворяют.

Пусть некоторое $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ решение данного уравнения. Тогда равенство $\frac{-a\frac{\sqrt{3}}{2}-(\sqrt{3}-a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6\cdot\frac{1}{2}+\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=1$ при всех a из отрезка $[-1;3\sqrt{2}]$ выполняется**.**

Следовательно, все значения $x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+k\pi$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *а*, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 462. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение.

а) Пусть первоначально на доске 20 раз было записано число 19 и один раз число 82. Тогда сумма этих чисел равна 462. После перестановки цифр на доске 20 раз оказалось записано число 91 и один раз число 28. Сумма этих чисел равна $1848=4\cdot 462$.

б) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, …, $\overline{a_nb_n}$. Обозначим $A=a_1+\ldots+a_n$, $B=b_1+\ldots+b_n$. По условию $10A+B=462$ и $10B+A=2\cdot 462$. Тогда разность этих чисел равна $9(B-A)=462$. Но левая часть последнего равенства делится на 9, а правая не делится. Значит, такая ситуация невозможна.

в) Пусть на доске были написаны двузначные числа $\overline{a_1b_1}$, …, $\overline{a_nb_n}$. Обозначим $A=a_1+\ldots+a_n$, $B=b_1+\ldots+b_n$. По условию $10A+B=462$, и нужно найти наибольшее значение числа $S=10B+A$. Тогда

$$S=10B+A=10(462-10A)+A=4620-99A.$$

Таким образом, необходимо найти наименьшее возможное значение числа A. Поскольку $b_1\le 9a_1$, …, $b_n\le 9a_n$, получаем $B\le 9A$. Поэтому

$$462=10A+B\le 10A+9A=19A,$$

откуда $A\ge\frac{462}{19}>24$, т. е. $A\ge 25$. Значит,

$$S=4620-99A\le 4620-99\cdot 25=2145.$$

Приведём пример, показывающий, что число S действительно может быть равным 2145. Пусть первоначально на доске 23 раза было записано число 19 и один раз число 25. Тогда сумма этих чисел равна 462. После перестановки цифр на доске 23 раза оказалось записано число 91 и один раз число 52. Сумма этих чисел равна 2145.

Ответ: а) Да, например, 20 раз число 19 и один раз число 82; б) нет; в) 2145.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4