Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
22 сентября 2016 года
Вариант МА10109
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_______________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

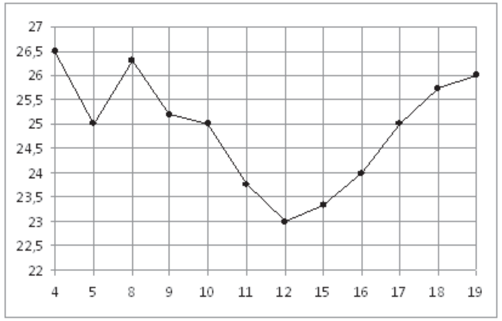
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Флакон шампуня стоит 160 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25 %?

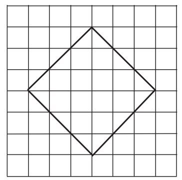
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наименьшую цену нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён квадрат. Найдите радиус описанной около него окружности.



Ответ: ___________________________.

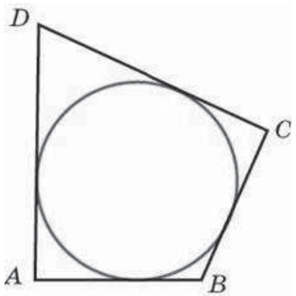
4 В кармане у Дани было четыре конфеты — «Мишка», «Маска», «Белочка» и «Взлётная», а также ключи от квартиры. Вынимая ключи, Даня случайно выронил из кармана одну конфету. Найдите вероятность того, что потерялась конфета «Маска».

Ответ: ___________________________.

5 Найдите корень уравнения $(3x+4)^2=(3x+8)^2$.

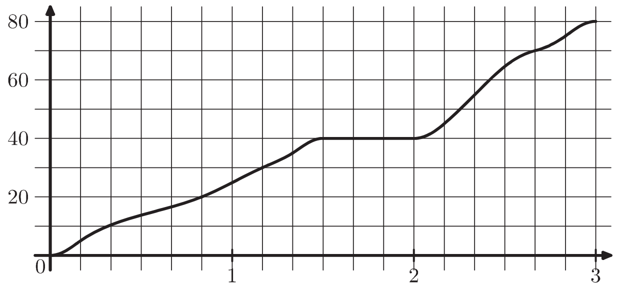
Ответ: ___________________________.

6 В четырёхугольник $ABCD$, периметр которого равен 48, вписана окружность, $CD=22$. Найдите AB.



Ответ: ___________________________.

7 На рисунке показан график движения автобуса. На горизонтальной оси отмечено время в часах, на вертикальной оси — пройденный путь в километрах. Найдите среднюю скорость автобуса за последний час пути. Ответ дайте в километрах в час.



Ответ: ___________________________.

8 В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 7, а сторона основания равна $\sqrt{39}$. Найдите высоту пирамиды.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите $-49\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=0,2$.

Ответ: ___________________________.

10 При температуре $0\,°\mathrm{C}$ рельс имеет длину $l_0=20$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t°)=l_0(1+\alpha\cdot t°)$, где $\alpha=1,2\cdot10^{-5}\,(°\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, $t°$ — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответ: ___________________________.

11 Автомобиль выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 340 км. Одновременно с ним из города C в город B, расстояние между которыми равно 300 км, с постоянной скоростью выехал мотоцикл. По дороге он сделал остановку на 40 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город B одновременно. Найдите скорость мотоцикла, если она больше скорости автомобиля на 5 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y=x-\frac{1}{x}+6$ на отрезке $[0,5;\ 13]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\left(3\operatorname{tg}^2x-1\right)\sqrt{-5\cos x}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

14 В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB = BC$) треугольник ABC. Точки K и M — середины рёбер A_1B_1 и AC соответственно.
а) Докажите, что $KM = KB$.
б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB = 8$, $AC = 6$ и $AA_1 = 3$.

15 Решите неравенство

$$\frac{15^x - 3^{x+1} - 5^{x+1} + 15}{-x^2 + 2x} \ge 0.$$

16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.
а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.
б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A = 45^\circ$, $B_1C_1 = 6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

17 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение 12 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в конце первого и второго года, а также целое число m млн рублей в конце третьего и четвёртого года. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года, как минимум удвоятся, и наименьшее такое значение m, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y = \dfrac{5a - 15x + ax}{x^2 - 2ax + a^2 + 25}$ содержит отрезок [0; 1].

19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 3111.
а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна 221.
б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 2001?
в) Найдите наименьшее нечётное число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

Ответы на тренировочные варианты 10109-10112 (профильный уровень) от 22.09.2016

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10109	8	23	3	0,25	- 2	2	40	6	45,08	12,5	90	4,5
10110	9	12000	4	0,25	1,5	9	36	5	- 7	37,5	54	2,5
10111	22	20	3	0,09	- 0,5	6	4	30	0,25	0,8	80	7
10112	6	10	2	0,02	- 0,35	4	3	80	64	0,48	120	12

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\left(3\operatorname{tg}^2 x-1\right)\sqrt{-5\cos x}=0$.

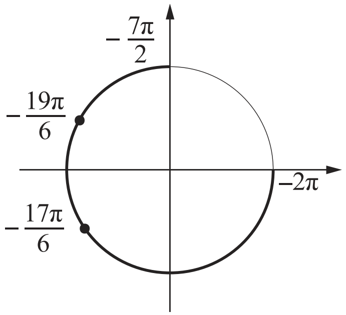
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

Решение.

а) Имеем $\left(3\operatorname{tg}^2 x-1\right)\sqrt{-5\cos x}=0$; $\begin{cases}\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{3},\\ \cos x<0,\end{cases}$

откуда $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ или $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$.

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем $-\frac{19\pi}{6}$ и $-\frac{17\pi}{6}$.



Ответ: а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n$, $n\in Z$; б) $-\frac{19\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов — пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

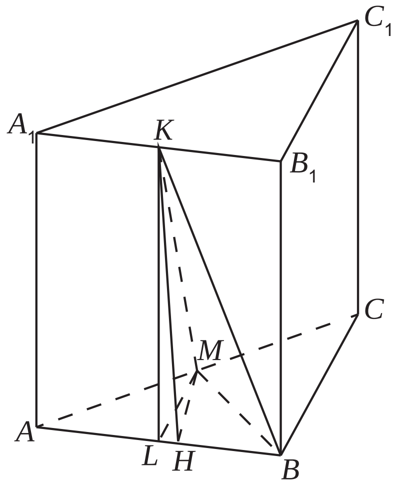
14

В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный ($AB=BC$) треугольник ABC. Точки K и M — середины рёбер A_1B_1 и AC соответственно.

а) Докажите, что $KM=KB$.

б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABB_1, если $AB=8$, $AC=6$ и $AA_1=3$.

Решение.



а) Пусть L — середина ребра AB. Треугольник AMB прямоугольный, поэтому его медиана LM равна половине гипотенузы и равна LB. Из равенства треугольников KLM и KLB следует, что $KM=KB$.

б) Пусть MH — высота в треугольнике AMB. Имеем $MH\perp AB$ и $MH\perp BB_1$, следовательно, $MH\perp ABB_1$, угол HKM искомый. Вычисляя двумя способами площадь треугольника AMB, получим $MH\cdot AB=MA\cdot MB$, откуда $MH=\frac{MA\cdot MB}{AB}=\frac{3\sqrt{8^2-3^2}}{8}=\frac{3\sqrt{55}}{8}$, поэтому

$$\sin\angle HKM=\frac{HM}{KM}=\frac{HM}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3\sqrt{55}}{40}=\frac{3\sqrt{11}}{8\sqrt{5}}.$$

Ответ: б) $\arcsin\frac{3\sqrt{11}}{8\sqrt{5}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство

$$\frac{15^x-3^{x+1}-5^{x+1}+15}{-x^2+2x}\ge 0.$$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{15^x-3^{x+1}-5^{x+1}+15}{-x^2+2x}\ge 0;$$

$$\frac{\left(5^x-3\right)\left(3^x-5\right)}{x\left(2-x\right)}\ge 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}0<x\le\log_5 3,\\ \log_3 5\le x<2.\end{array}\right.$$

Ответ: $0<x\le\log_5 3$; $\log_3 5\le x<2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно.

а) Докажите, что треугольник ABC подобен треугольнику AB_1C_1.

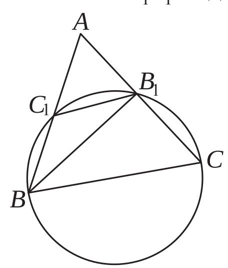
б) Вычислите длину стороны BC и радиус данной окружности, если $\angle A=45^\circ$, $B_1C_1=6$ и площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1.

Решение.

а) Заметим, что $\angle AB_1C_1+\angle C_1B_1C=180^\circ$. Четырёхугольник BCB_1C_1 вписан в окружность, поэтому $\angle C_1BC+\angle C_1B_1C=180^\circ$. Значит,

$$\angle AB_1C_1=\angle C_1BC=\angle ABC.$$

Следовательно, треугольники ABC и AB_1C_1 подобны по двум углам.



б) Площадь треугольника AB_1C_1 в восемь раз меньше площади четырёхугольника BCB_1C_1, поэтому площадь треугольника ABC в девять раз больше площади треугольника AB_1C_1 и коэффициент подобия этих треугольников равен 3. Отсюда следует, что $BC=3B_1C_1=18$.

Пусть $AB_1=x$, тогда $AB=3x$. Найдём BB_1 по теореме косинусов:

$$BB_1^2=x^2+9x^2-6x\cdot x\cdot\cos 45^\circ=x^2\left(10-3\sqrt{2}\right).$$

Следовательно,

$$BB_1=x\sqrt{10-3\sqrt{2}}.$$

Теперь по теореме синусов из треугольника ABB_1 получаем

$$\frac{AB}{\sin\angle AB_1B}=\frac{BB_1}{\sin\angle A};\qquad \sin\angle AB_1B=\frac{AB}{BB_1}\sin\angle A.$$

Но $\sin\angle AB_1B=\sin\angle BB_1C$, поскольку синусы смежных углов равны.

Получаем

$$\sin\angle BB_1C=\frac{AB}{BB_1}\sin\angle A=\frac{3x}{x\sqrt{10-3\sqrt{2}}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{10-3\sqrt{2}}}.$$

Теперь находим радиус окружности, описанной около треугольника BB_1C

$$2R=\frac{BC}{\sin\angle BB_1C}=6\sqrt{20-6\sqrt{2}}\,;\quad R=3\sqrt{20-6\sqrt{2}}\,.$$

Ответ: б) 18; $3\sqrt{20-6\sqrt{2}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение 12 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в конце первого и второго года, а также целое число m млн рублей в конце третьего и четвёртого года. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года, как минимум удвоятся, и наименьшее такое значение m, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

Решение.

К началу второго года получится $1{,}15\cdot 12+n$, а к началу третьего года — $1{,}15\cdot 1{,}15\cdot 12+2{,}15n$ млн вложений.

По условию $15{,}87+2{,}15n>24$. Наименьшее целое решение этого неравенства — $n=4$.

При найденном значении n к началу 4-го года имеем $1{,}15\cdot 24{,}47+m$ млн вложений, а в конце проекта — $1{,}15\cdot 1{,}15\cdot 24{,}47+2{,}15m=1{,}3225\cdot 24{,}47+2{,}15m$.

Из условия следует, что $1{,}3225\cdot 24{,}47+2{,}15m>36$, то есть

$$32{,}361575+2{,}15m>36;$$

значит, $2{,}15m>3{,}638425$; $m>\frac{3{,}638425}{2{,}15}$.

Наименьшее целое решение этого неравенства - $m=2$.

Ответ: 4 и 2 млн руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено или имеется верный ответ без обоснования	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{5a-15x+ax}{x^2-2ax+a^2+25}$ содержит отрезок [0;1].

<u>Решение.</u>

Запишем функцию в виде $y=\dfrac{5a-(15-a)x}{(x-a)^2+25}$. Если при некоторых значениях a существуют такие числа x_0, x_1, что выполняются равенства $0=\dfrac{5a-(15-a)x_0}{(x_0-a)^2+25}$ и $1=\dfrac{5a-(15-a)x_1}{(x_1-a)^2+25}$, то отрезок [0; 1] будет принадлежать множеству значений данной функции.

Первое уравнение: $0=\dfrac{5a-(15-a)x}{(x-a)^2+25}$; $(15-a)x=5a$. Уравнение имеет решение при любом $a\neq 15$.

Второе уравнение: $1=\dfrac{5a-(15-a)x}{(x-a)^2+25}$; $x^2+3(5-a)x+a^2-5a+25=0$.

Уравнение имеет решения тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен: $D=9(5-a)^2-4(a^2-5a+25)\geq 0$; $5(a^2-14a+25)\geq 0$; $\left(a-7+2\sqrt{6}\right)\left(a-7-2\sqrt{6}\right)\geq 0$. Решение этого неравенства: $\left(-\infty;\ 7-2\sqrt{6}\right]$, $\left[7+2\sqrt{6};+\infty\right)$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют все значения a, принадлежащие множеству $\left(-\infty;\ 7-2\sqrt{6}\right]$, $\left[7+2\sqrt{6};15\right)$, $(15;+\infty)$, и только они

Ответ: $\left(-\infty;\ 7-2\sqrt{6}\right]$, $\left[7+2\sqrt{6};15\right)$, $(15;+\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Будем называть четырёхзначное число *интересным*, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 3111.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна 221.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 2001?

в) Найдите наименьшее нечётное число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

<u>Решение.</u>

а) Примером таких чисел являются числа 2916 и 3137.

б) Предположим, что такие числа существуют. Рассмотрим какие-либо два таких интересных числа. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись большего из них, $\overline{pqrs}$ — десятичная запись меньшего из них, а k — та из цифр a, b, c и d, которая равна сумме трёх других. Тогда сумма цифр этого числа равна $2k$, то есть чётна. Аналогично получаем, что сумма цифр меньшего из рассматриваемых интересных чисел также чётна. Так как $d\neq 0$, следует, что $s\neq 9$, откуда получаем, что $d=s+1$, $c=r$, $b=q$.

Так как оба числа четырёхзначные, $a=p+2$, значит, числа $a+b+c+d$ и $p+q+r+s$ разной чётности. Приходим к противоречию.

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём пример интересного четырёхзначного числа, кратного 3, 5, 7 и 9, — это число 9135.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо интересного числа, кратного 11. Тогда $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d=11(91a+9b+c)+(b-a+d-c)$.

Получаем, что число $b-a+d-c$ кратно 11. Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b+d=a+c$, либо эти две суммы отличаются на 11. Составим две пары чисел: a и c, b и d. Пусть k — та из цифр a, b, c и d, которая равна сумме трёх других, l — та из них, которая в паре с k. Пусть также m и n — две оставшиеся из цифр a, b, c и d. Поскольку $k=l+m+n$, имеем $k+l>m+n$. Значит, $k+l=m+n+11$. Вычитая из этого равенства равенство $k=l+m+n$, получаем $l=11-l$, и, следовательно, $2l=11$. Пришли к противоречию. Значит, не существует интересных четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) 2916 и 3137; б) нет; в) 11.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4