Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
20 декабря 2016 года
Вариант МА10209
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО____ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

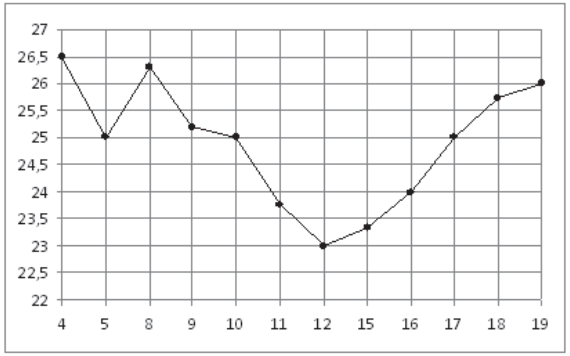
Часть 1

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Флакон шампуня стоит 140 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 900 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35 %?

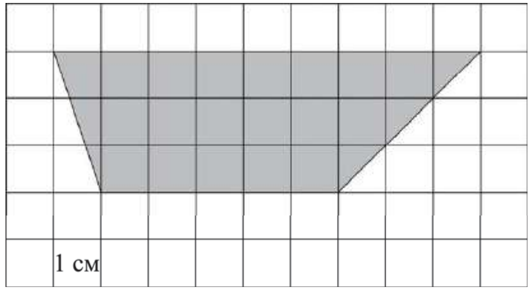
Ответ: ___________________________.

2 На рисунке жирными точками показана цена нефти на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 4 по 19 апреля 2002 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали цена барреля нефти в долларах США. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку наибольшую цену нефти на момент закрытия торгов в указанный период (в долларах США за баррель).



Ответ: ___________________________.

3 Найдите площадь трапеции, изображённой на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Ответ: ___________________________.

4 В группе туристов 32 человека. Их вертолётом в несколько приёмов забрасывают в труднодоступный район по 4 человека за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист К. полетит пятым рейсом вертолёта.

Ответ: ___________________________.

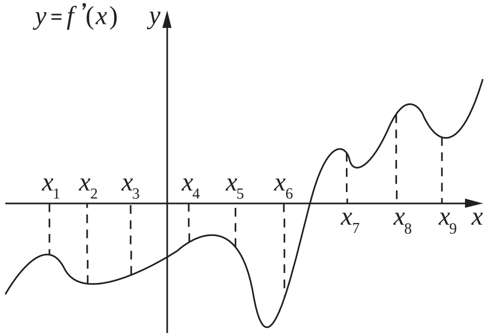
5 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{2}{2x-54}}=\frac{1}{3}$.

Ответ: ___________________________.

6 Сторона AB треугольника ABC равна 37. Противолежащий ей угол C равен $150°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены девять точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9. Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции $f(x)$?



Ответ: ___________________________.

8 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO=24$, $SD=26$. Найдите длину отрезка AC.

Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $\frac{8^{6,4}}{16^{4,05}}$.

Ответ: ___________________________.

10 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=1,8+10t-5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Какое время мяч будет находиться на высоте не менее 5 метров? Ответ дайте в секундах.

Ответ: ___________________________.

11 От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 154 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 3 часа после этого следом за ним со скоростью на 3 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=(x-2)^2(x-4)+5$ на отрезке $[1;3]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\frac{2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x}{\log_4(\sin x)}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3}{2}\pi\right]$.

14 Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

15 Решите неравенство $\dfrac{3^{2x}-54\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2(x+1)}-1}{x+3}\le 0$.

16 Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2=BC\cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKB, если $\cos B=\dfrac{2}{3}$, $AC=36$, а площадь треугольника AKC равна $126\sqrt{5}$.

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 миллионов рублей в первый и второй годы, а также по 10 миллионов в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 100 миллионов, а за четыре года станут больше 170 миллионов рублей.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left((x-5)^2+(y-3)^2-9\right)\left((x-2)^2+(y+1)^2\right)\le 0,\\ y=ax+a+3\end{cases}$$

не имеет решений.

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\dfrac{a_1}{b_1}$, $\dfrac{a_2}{b_2}$ и $\dfrac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\dfrac{a_1}{b_1}$, $\dfrac{b_2}{a_2}$ и $\dfrac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a_2}{b_2}$, если известно, что $\dfrac{a_1}{b_1}$, $\dfrac{a_2}{b_2}$ и $\dfrac{a_{10}}{b_{10}}$ — различные натуральные числа?

Ответы на тренировочные варианты 10209-10212 (профильный уровень) от 20.12.2016

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10209	9	26,5	21	0,125	36	37	3	20	8	1,2	11	5
10210	7	24	26	0,1	137	42	5	72	49	1,6	12	- 1
10211	190	4	8	0,4	10	64,5	5	70	6	0,75	9	- 7
10212	105	315	3	0,45	- 0,75	31,5	7	155	2	2,6	10	- 6

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13

а) Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x}{\log_4(\sin x)}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\,-\dfrac{3}{2}\pi\right]$.

Решение.

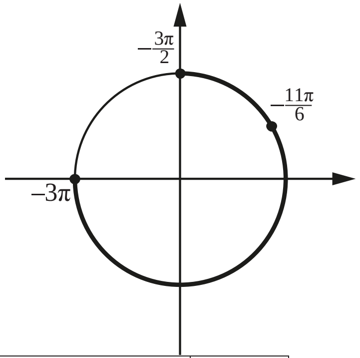
Перейдём к системе $\begin{cases}2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0;\\ \sin x\neq 1;\\ \sin x>0.\end{cases}$

Решаем уравнение системы $2\cos x\left(\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$.

Получаем $\left[\begin{array}{l}\cos x=0;\\ \cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=0.\end{array}\right.$

С учётом всех ограничений $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\,-\dfrac{3}{2}\pi\right]$.



Получим число $-\dfrac{11\pi}{6}$.

Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{11\pi}{6}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

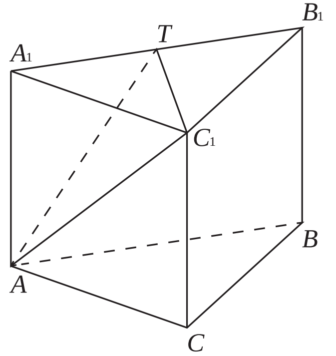
14

Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3. Через точки A, C_1 и середину T ребра A_1B_1 проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы указанной плоскостью является прямоугольным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

Решение.



а) Прямая C_1T перпендикулярна A_1B_1, поскольку C_1T — медиана равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$. Кроме того, прямая C_1T перпендикулярна AA_1, поскольку AA_1 перпендикулярна плоскости основания $A_1B_1C_1$. Значит, прямая C_1T перпендикулярна плоскости AA_1B_1, и потому C_1T перпендикулярна AT.

Следовательно, треугольник AC_1T прямоугольный.

б) Так как прямая C_1T перпендикулярна прямым A_1T и AT, угол A_1TA искомый. Имеем $\operatorname{tg}\angle A_1TA=\dfrac{AA_1}{A_1T}=\dfrac{3}{1}=3$.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}3$.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15

Решите неравенство $\dfrac{3^{2x}-54\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2(x+1)}-1}{x+3}\le 0$.

Решение.

Имеем

$$\frac{3^{2x}-54\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2(x+1)}-1}{x+3}\le 0;$$

$$\frac{9^{x}-\frac{6}{9^{x}}-1}{x+3}\le 0;$$

$$\frac{9^{2x}-9^{x}-6}{(x+3)}\le 0;$$

$$\frac{9^{x}-3}{x+3}\le 0.$$

Решая неравенство, находим $x\in(-3;0,5]$.

Ответ: $(-3;0,5]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

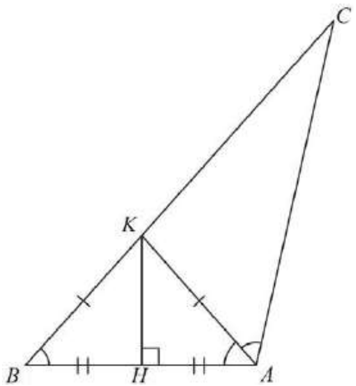
16

Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

а) Докажите, что $AC^2=BC\cdot CK$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKB, если $\cos B=\dfrac{2}{3}$, $AC=36$, а площадь треугольника AKC равна $126\sqrt{5}$.

Решение.



а) Точка K лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB, значит, $\Delta AKH=\Delta BKH$ и $\angle ABC=\angle BAK=\angle CAK$. Треугольники ABC и KAC подобны по двум углам, поэтому $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{CK}{AC}$.

Следовательно, $AC^2=BC\cdot CK$.

б) Пусть $\angle KAB=\angle KBA=\beta$. Тогда

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$S_{ACK}=\frac{1}{2}AC\cdot AK\cdot\sin\beta,$$

или

$$126\sqrt{5}=\frac{1}{2}\cdot 36\cdot AK\cdot\frac{\sqrt{5}}{3},$$

откуда $AK=21$. Далее

$$\cos\beta=\frac{AB}{2AK},\qquad AB=2AK\cos\beta=2\cdot 21\cdot\frac{2}{3},$$

откуда $AB=28$. Тогда

$$S_{ABK}=\frac{1}{2}AB\cdot AK\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}28\cdot 21\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=98\sqrt{5}.$$

Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник AKB. Тогда

$$r=\frac{2S_{AKB}}{AK+KB+AB}=\frac{2\cdot 98\sqrt{5}}{21+21+28}=\frac{14\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект **целое** число миллионов рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 миллионов рублей в первый и второй годы, а также по 10 миллионов в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 100 миллионов, а за четыре года станут больше 170 миллионов рублей.

Решение.
Пусть S миллионов рублей — первоначальные вложения. К началу 2-го года получится $1{,}2S+20$ миллионов рублей, а к началу 3-го года — $1{,}2(1{,}2S+20)+20=1{,}44S+44$. По условию $1{,}44S+44>100$, откуда $S>\frac{56}{1{,}44}>38{,}8$.

К началу 4-го года имеем $1{,}2\left(1{,}44S+44\right)+10$, а в конце проекта

$$1{,}2\left(1{,}2\left(1{,}44S+44\right)+10\right)=2{,}0736S+63{,}36+12=2{,}0736S+75{,}36.$$

По условию $2{,}0736S+75{,}36>160$, откуда $S>\frac{84{,}64}{2{,}0736}>40{,}8$.

А значит, минимальное возможное целое число, удовлетворяющее условию $S=41$.
Ответ: 41 миллион руб.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

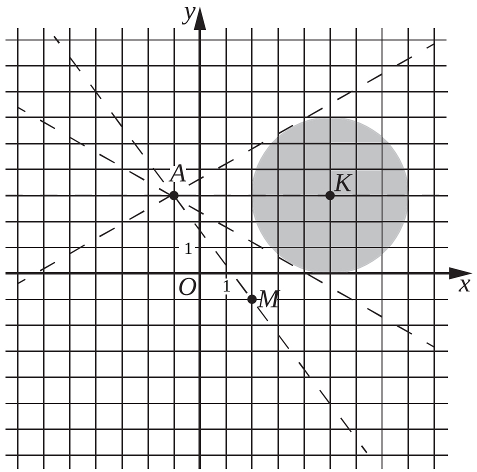
18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left(\left(x-5\right)^2+\left(y-3\right)^2-9\right)\left(\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2\right)\le 0,\\ y=ax+a+3\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.
Уравнение $y=ax+a+3$ задает прямую. Эта прямая при всех a проходит через точку $A\left(-1;3\right)$.

Неравенство системы $\left(\left(x-5\right)^2+\left(y-3\right)^2-9\right)\left(\left(x-2\right)^2+\left(y+1\right)^2\right)\le 0$ задаёт объединение круга с центром в точке $K\left(5;3\right)$ и радиусом 3 и точки $M\left(2;-1\right)$. Система не будет иметь решений тогда и только тогда, когда прямая $y=ax+a+3$ не имеет общих точек с кругом и не проходит через точку M.



Расстояние между точками $A(-1;3)$ и $K(5;3)$ равно 6, а радиус круга равен 3, значит, касательные к кругу, проведённые из точки $A(-1;3)$, образуют углы $\frac{\pi}{6}$ с прямой AK. Этим касательным соответствуют значения $a=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Прямая AM имеет угловой коэффициент $-\frac{4}{3}$.

Отсюда получаем $a<-\frac{4}{3}$; $-\frac{4}{3}<a<-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $a>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)$; $\left(-\frac{4}{3};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения *a*, но ответ содержит лишнее значение	3
Начато верное рассуждение и даже получено одно какое-нибудь значение параметра, но до конца задача не доведена	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения прямой и окружности (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ и $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{b_2}{a_2}$ и $\frac{a_4}{b_4}$ — различные натуральные числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a_2}{b_2}$, если известно, что $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}$ — различные натуральные числа?

Решение.

а) Подходящим примером являются прогрессии $1, 6, 11, 16, ...$ и $1, 2, 3, 4, ...$ соответственно. Для этих прогрессий имеем $\frac{a_1}{b_1}=1$, $\frac{a_2}{b_2}=3$ и $\frac{a_4}{b_4}=4$.

б) Предположим, что такие прогрессии существуют. Тогда одно из чисел $\frac{a_1}{b_1}$ или $\frac{b_2}{a_2}$ не меньше 1, а второе больше 1. Значит, либо $a_1\ge b_1$ и $a_2<b_2$, либо $a_1>b_1$ и $a_2\le b_2$, и, следовательно, $a_2-a_1<b_2-b_1$. Отсюда, используя свойства арифметической прогрессии, получаем

$$a_4=a_2+2(a_2-a_1)<b_2+2(b_2-b_1)=b_4 \text{ и } \frac{a_4}{b_4}<1.$$

Пришли к противоречию.

в) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ и $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ соответственно. Из условия следует, что числа c и d натуральные, а $\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}-\frac{a_2}{b_2}$ целые и не равные нулю. Имеем

$$\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_1+c}{b_1+d}-\frac{a_1}{b_1}=\frac{cb_1-da_1}{b_1(b_1+d)} \text{ и}$$

$$\frac{a_{10}}{b_{10}}-\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_1+9c}{b_1+9d}-\frac{a_1+c}{b_1+d}=\frac{8(cb_1-da_1)}{(b_1+d)(b_1+9d)}.$$

Знаменатели дробей $\frac{cb_1-da_1}{b_1(b_1+d)}$ и $\frac{8(cb_1-da_1)}{(b_1+d)(b_1+9d)}$ положительны, а числители этих дробей имеют одинаковый знак. Значит, числа $\frac{a_2}{b_2}-\frac{a_1}{b_1}$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}-\frac{a_2}{b_2}$ имеют одинаковый знак, то есть либо $1\le\frac{a_1}{b_1}<\frac{a_2}{b_2}<\frac{a_{10}}{b_{10}}$, либо $1\le\frac{a_{10}}{b_{10}}<\frac{a_2}{b_2}<\frac{a_1}{b_1}$. В обоих случаях получаем, что $\frac{a_2}{b_2}\ge 2$.

Если прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ и $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ являются прогрессиями $9, 32, ..., 216, ...$ и $9, 16, ..., 72, ...$ соответственно, то $\frac{a_1}{b_1}=1$, $\frac{a_2}{b_2}=2$ и $\frac{a_{10}}{b_{10}}=3$.

Этот пример показывает, что наименьшее возможное значение дроби $\frac{a_2}{b_2}$ равно 2.

Ответ: а) да, например, $1, 6, 11, 16, \ldots$ и $1, 2, 3, 4, \ldots$ соответственно; б) нет; в) 2.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*, – обоснованное решение в п. *б*, – искомая оценка в п. *в*, – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4