Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
6 марта 2018 года
Вариант МА10409
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс _______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

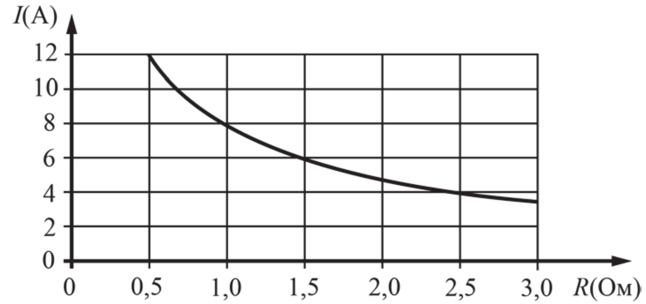
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Теплоход рассчитан на 1000 пассажиров и 30 членов команды. Каждая спасательная шлюпка может вместить 70 человек. Какое наименьшее число шлюпок должно быть на теплоходе, чтобы в случае необходимости в них можно было разместить всех пассажиров и всех членов команды?

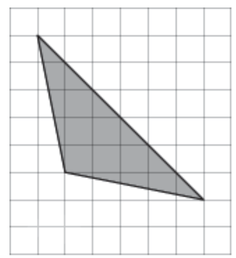
Ответ: ___________________________.

2 Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. Каково сопротивление цепи (в омах), если сила тока составляет 6 А?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображён треугольник. Найдите его площадь.



Ответ: ___________________________.

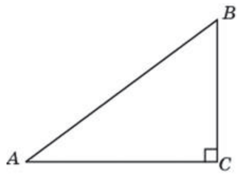
4 В сборнике билетов по химии всего 25 билетов, в 6 из них встречается вопрос по теме «Углеводороды». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Углеводороды».

Ответ: ____________________________.

5 Найдите корень уравнения $\log_3(6-4x)=4\log_3 2$.

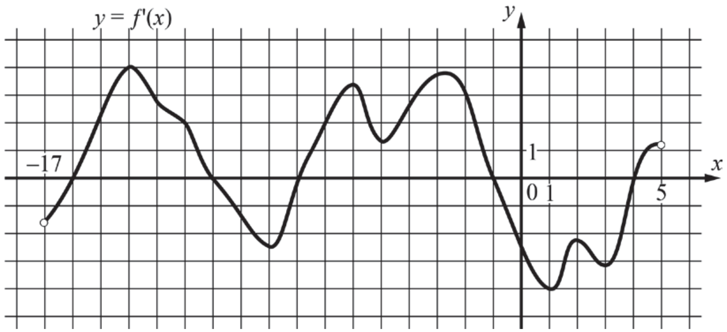
Ответ: ____________________________.

6 В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $BC=3$, $\sin A=\frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите AC.



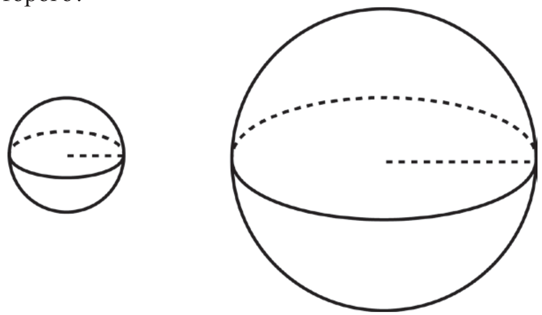
Ответ: ____________________________.

7 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-17;5)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-15;0]$.



Ответ: ____________________________.

8 Дано два шара. Радиус первого шара в 14 раз больше радиуса второго. Во сколько раз площадь поверхности первого шара больше площади поверхности второго?



Ответ: ____________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $4^{0,03}\cdot 8^{0,98}$.

Ответ: ____________________________.

10 Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0=21$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a=3$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S=v_0t-\frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 60 метров. Ответ выразите в секундах.

Ответ: ____________________________.

11 Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вчетверо, общий доход семьи вырос бы на 165 %. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 1 %. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ____________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^2 - 11x + 7\ln x + 12$ на отрезке $\left[\frac{11}{12}; \frac{13}{12}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = 3\cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

14 На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A, B и C так, что $AB = BC$. Медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса.
а) Точка N — середина отрезка AC. Докажите, что угол MNB прямой.
б) Найдите угол между прямыми AM и SB, если $AS = 2$, $AC = \sqrt{6}$.

15 Решите неравенство $\frac{10^x - 2\cdot 5^x - 25\cdot 2^x + 50}{\sqrt{x+3}} \geq 0$.

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M, а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает её в точке N.
а) Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM = \angle BA_1D_1$.
б) Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, если угол CDB вдвое меньше угла ADB.

17 В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на шесть лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 2 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}9S$	$0{,}8S$	$0{,}7S$	$0{,}6S$	$0{,}5S$	0

Найдите S, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 327 тысяч рублей.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left((x-1)^2 + (y-4)^2\right)\left((x-6)^2 + (y-4)^2\right) \leq 0, \\ (x-a)^2 + (y-2a)^2 \leq 4a^2 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

19 Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.
а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 2S(n) + 23$?
б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 3S(n) + 23$?
в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n) = 8S(n) + 83$?

Ответы на тренировочные варианты 10409-10412 (профильный уровень) от 06.03.2018

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10409	15	1,5	12	0,24	- 2,5	12	2	196	8	4	43	3
10410	16	2,5	17	0,32	3,5	15	1	361	25	5	47	- 5
10411	21000	3	30	0,9711	- 3	169	3	1,5	3	30	32	64
10412	16800	2	24	0,9919	- 6	625	7	3,5	8	30	35	121

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos\left(x + \frac{7\pi}{6}\right) = 3\cos x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Решение.

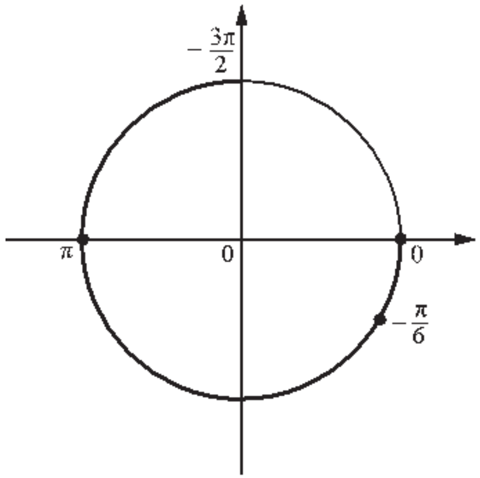
а) Запишем исходное уравнение в виде

$$\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos x \cos\frac{7\pi}{6} + 2\sqrt{3}\sin x \sin\frac{7\pi}{6} = 3\cos x;$$

$$2\sin x\cos x + 3\cos x - \sqrt{3}\sin x = 3\cos x; \quad \sin x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right) = 0.$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$. Получим числа $-\pi$; $-\frac{\pi}{6}$; 0.



Ответ: а) πn, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi$; $-\frac{\pi}{6}$; 0.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 На окружности основания конуса с вершиной S отмечены точки A, B и C так, что $AB = BC$. Медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса.

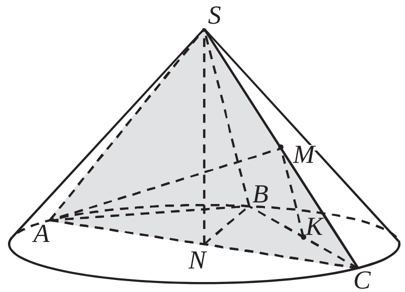
а) Точка N — середина отрезка AC. Докажите, что угол MNB прямой.

б) Найдите угол между прямыми AM и SB, если $AS = 2$, $AC = \sqrt{6}$.

Решение.

а) Поскольку медиана AM треугольника ACS пересекает высоту конуса, плоскость ACS содержит высоту конуса. Значит, AC — диаметр основания конуса и SN — его высота.

Медиана BN треугольника ABC перпендикулярна прямой AC. Также отрезок BN перпендикулярен высоте конуса SN как радиус основания. Следовательно, прямая BN перпендикулярна плоскости ACS, а значит, угол MNB прямой.



б) Пусть K — середина отрезка BC, $AS = 2$, $AC = \sqrt{6}$. Тогда искомый угол будет равен углу AMK, поскольку средняя линия MK треугольника BCS параллельна прямой SB; $MK = \frac{SB}{2} = 1$.

В треугольнике ACS медиана AM равна

$$\frac{\sqrt{2AS^2 + 2AC^2 - SC^2}}{2} = \frac{\sqrt{AS^2 + 2AC^2}}{2} = 2.$$

В прямоугольном треугольнике ABC имеем

$$AB=\sqrt{3}\,,\ BK=\frac{\sqrt{3}}{2};\ AK=\sqrt{AB^2+BK^2}=\frac{\sqrt{15}}{2}.$$

По теореме косинусов в треугольнике AMK имеем

$$\cos\angle AMK=\frac{AM^2+MK^2-AK^2}{2\cdot AM\cdot MK}=\frac{5}{16};\quad \angle AMK=\arccos\frac{5}{16}.$$

Ответ: б) $\arccos\frac{5}{16}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\dfrac{10^x-2\cdot 5^x-25\cdot 2^x+50}{\sqrt{x+3}}\geq 0$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{10^x-2\cdot 5^x-25\cdot 2^x+50}{\sqrt{x+3}}\geq 0;$$

$$\frac{\left(5^x-25\right)\left(2^x-2\right)}{\sqrt{x+3}}\geq 0.$$

Получаем $-3<x\leq 1$ и $x\geq 2$.

Ответ: $\left(-3;\,1\right]$, $\left[2;\,\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диаметр CC_1 перпендикулярен стороне AD и пересекает её в точке M, а диаметр DD_1 перпендикулярен стороне AB и пересекает её в точке N.

а) Пусть AA_1 также диаметр окружности. Докажите, что $\angle DNM=\angle BA_1D_1$.

б) Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, если угол CDB вдвое меньше угла ADB.

Решение.

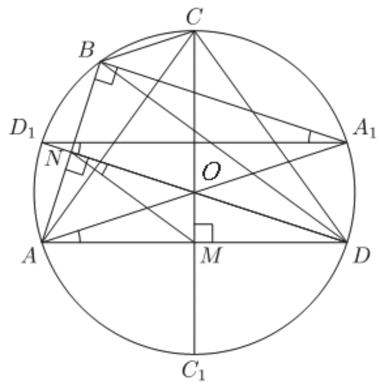
а) Точка B лежит на окружности с диаметром AA_1, поэтому прямая A_1B перпендикулярна прямой AB, а так как прямая DD_1 перпендикулярна прямой AB, прямая A_1B параллельна прямой DD_1, поэтому $\angle BA_1D_1=\angle A_1D_1D$ как накрест лежащие.

Вписанные углы A_1D_1D и A_1AD опираются на одну и ту же дугу, значит, $\angle BA_1D_1=\angle A_1D_1D=\angle A_1AD$.

Пусть O — центр окружности. Из точек M и N отрезок OA виден под прямым углом, значит, эти точки лежат на окружности с диаметром OA. Вписанные в эту окружность углы MAO и MNO опираются на одну и ту же дугу, поэтому

$$\angle DNM=\angle MNO=\angle OAM=\angle A_1AD.$$

Следовательно, $\angle DNM=\angle BA_1D_1$.



б) Поскольку диаметр, перпендикулярный хорде, делит её пополам, треугольники ACD и ABD равнобедренные (их высоты являются медианами). Положим $\angle CDB=\alpha$, $\angle ADB=2\alpha$. Тогда

$$\angle BAD=\angle ABD=\angle ACD=180^\circ-2\angle ADC=180^\circ-6\alpha.$$

С другой стороны, $\angle BAD=\frac{1}{2}\left(180^\circ-\angle ADB\right)=90^\circ-\alpha$,

Из равенства $180^\circ-6\alpha=90^\circ-\alpha$ находим, что $\alpha=18^\circ$. Следовательно,

$$\angle ADC=3\alpha=54^\circ,$$

$$\angle ABC=180^\circ-\angle ADC=126^\circ,\ \angle BAD=90^\circ-\alpha=72^\circ,$$

$$\angle BCD = 180° - \angle BAD = 108°.$$

Ответ: б) $72°, 126°, 108°, 54°$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 В июле 2018 года планируется взять кредит в банке на шесть лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 2 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022	Июль 2023	Июль 2024
Долг (в тыс. рублей)	S	$0{,}9S$	$0{,}8S$	$0{,}7S$	$0{,}6S$	$0{,}5S$	0

Найдите S, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составила 327 тысяч рублей.

Решение.

Заметим, что долг перед банком по состоянию на февраль будет составлять

$1{,}02S$; $1{,}02\cdot 0{,}9S$; $1{,}02\cdot 0{,}8S$; $1{,}02\cdot 0{,}7S$; $1{,}02\cdot 0{,}6S$; $1{,}02\cdot 0{,}5S$ тыс. рублей.

Найдём размеры ежегодных выплат:

$1{,}02S - 0{,}9S$;

$1{,}02\cdot 0{,}9S - 0{,}8S$;

$1{,}02\cdot 0{,}8S - 0{,}7S$;

$1{,}02\cdot 0{,}7S - 0{,}6S$;

$1{,}02\cdot 0{,}6S - 0{,}5S$;

$1{,}02\cdot 0{,}5S$.

Общая сумма выплат составит

$1{,}02S(1+0{,}9+...+0{,}5) - S(0{,}9+0{,}8+...+0{,}5) = 4{,}59S - 3{,}5S = 1{,}09S = 327$ (тыс. рублей).

Значит, $S = 327 : 1{,}09 = 300$ (тыс. рублей).

Ответ: 300 тыс. рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}\left((x-1)^2+(y-4)^2\right)\left((x-6)^2+(y-4)^2\right)\le 0,\\ (x-a)^2+(y-2a)^2\le 4a^2\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Решение.

Первое неравенство имеет ровно два решения: $(1;4), (6;4)$. Следовательно, данная система имеет ровно одно решение тогда и только тогда, когда второму неравенству удовлетворяет только одно из решений первого неравенства.

Найдём все значения $a,$ при которых справедлива каждая из систем:

$$\begin{cases}(1-a)^2+(4-2a)^2\le 4a^2,\\(6-a)^2+(4-2a)^2>4a^2\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}(1-a)^2+(4-2a)^2>4a^2,\\(6-a)^2+(4-2a)^2\le 4a^2.\end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases}(1-a)^2+(4-2a)^2\le 4a^2,\\(6-a)^2+(4-2a)^2>4a^2;\end{cases} \quad \begin{cases}(a-1)(a-17)\le 0,\\(a-2)(a-26)>0.\end{cases}$$

Получаем $1\le a<2$.

Решим вторую систему:

$$\begin{cases}(1-a)^2+(4-2a)^2>4a^2,\\(6-a)^2+(4-2a)^2;\le 4a^2\end{cases} \quad \begin{cases}(a-1)(a-17)>0,\\(a-2)(a-26)\le 0.\end{cases}$$

Получаем $17<a\le 26$.

Ответ: $[1;2)$; $(17;\ 26]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены оба решения первого уравнения из системы и верно рассмотрен хотя бы один из случаев	2
Задача верно сведена к исследованию возможных значений корней системы уравнений	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Пусть $S(n)$ и $K(n)$ обозначают сумму всех цифр и сумму квадратов всех цифр натурального числа n соответственно.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 2S(n) + 23$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $K(n) = 3S(n) + 23$?

в) Для какого наименьшего натурального числа n выполнено равенство $K(n) = 8S(n) + 83$?

Решение.

а) Такое число существует. Например, при $n = 16$ имеем $S(n) = 7$ и $K(n) = 37 = 2 \cdot 7 + 23$.

б) Предположим, что такое число существует. Тогда если число $S(n)$ чётное, то число $K(n) = 3S(n) + 23$ нечётное. Если же число $S(n)$ нечётное, то число $K(n) = 3S(n) + 23$ чётное. С другой стороны, любая цифра и её квадрат имеют одинаковую чётность (то есть чётны или нечётны одновременно). Значит $S(n)$ и $K(n)$ также имеют одинаковую чётность. Пришли к противоречию.

в) Пусть n — искомое число, m — количество всех девяток в десятичной записи числа n. Тогда сумма всех отличных от девятки цифр числа n равна

$S(n) - 9m$, а сумма их квадратов не более $8(S(n) - 9m)$. Значит, $8S(n) + 83 = K(n) \le 81m + 8(S(n) - 9m) = 8S(n) + 9m$. Следовательно, $m \ge 10$.

Поскольку искомое число n является наименьшим натуральным из удовлетворяющих равенству $K(n) = 8S(n) + 83$, среди его цифр нет нулей (иначе их можно было бы вычеркнуть) и все его цифры расположены по возрастанию (иначе перестановкой цифр n можно было бы уменьшить). Значит, все девятки в десятичной записи числа n стоят в конце.

Из равенства $K(n) = 8S(n) + 83$ следует, что либо $S(n)$, либо $K(n)$ не делится на 9 и в числе n есть отличные от девяток цифры. Поэтому $n \ge 19\,999\,999\,999$. При этом $K(19\,999\,999\,999) = 811 = 8 \cdot 91 + 83 = 8S(19\,999\,999\,999) + 83$. Значит, число $n = 19\,999\,999\,999$ и есть искомое.

Ответ: а) Да; б) нет; в) 19 999 999 999.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4