Тренировочная работа по МАТЕМАТИКЕ
11 класс
21 декабря 2017 года
Вариант МА10209
(профильный уровень)

Выполнена: ФИО_________________________________ класс ______

Инструкция по выполнению работы

На выполнение работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий.

Часть 1 содержит 8 заданий базового уровня сложности с кратким ответом. Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 7 заданий повышенного и высокого уровней сложности с развёрнутым ответом.

Ответы к заданиям 1–12 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение на отдельном листе бумаги.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются.

Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

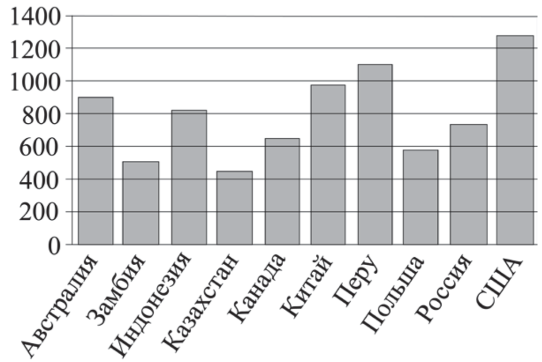
Часть 1

Ответом к каждому из заданий 1–12 является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответы к заданиям в поле ответа в тексте работы.

1 Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 3 %. Книга стоит 300 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

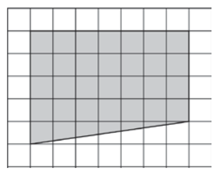
Ответ: ___________________________.

2 На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Россия?



Ответ: ___________________________.

3 На клетчатой бумаге с размером клетки 1×1 изображена трапеция. Найдите её площадь.



Ответ: ___________________________.

4 Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию A = {сумма очков равна 9}?

Ответ: ___________________________.

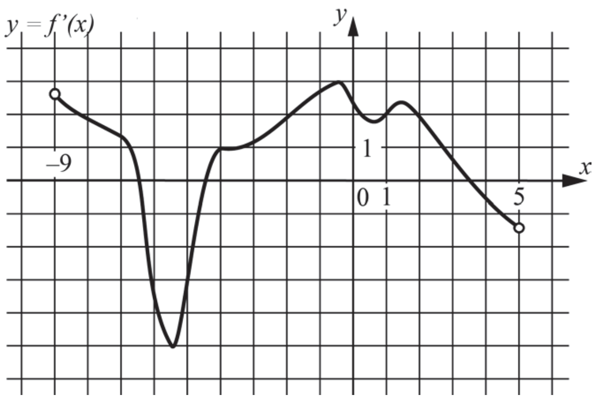
5 Найдите корень уравнения $-\frac{2}{9}x=1\frac{1}{9}$.

Ответ: ___________________________.

6 Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен $150°$. Боковая сторона треугольника равна 26. Найдите площадь этого треугольника.

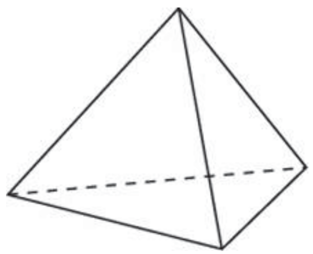
Ответ: ___________________________.

7 На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9;5)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



Ответ: ___________________________.

8 Во сколько раз уменьшится объём правильного тетраэдра, если все его рёбра уменьшить в три раза?



Ответ: ___________________________.

Часть 2

9 Найдите значение выражения $8^{\sqrt{8}+6}\cdot 8^{-5-\sqrt{8}}$.

Ответ: ___________________________.

10 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому $P=\sigma ST^4$, где P — мощность излучения звезды (в ваттах), $\sigma=5{,}7\cdot10^{-8}\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot\text{К}^4}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), а T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{729}\cdot10^{20}$ м^2, а мощность её излучения равна $5{,}13\cdot10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

Ответ: ___________________________.

11 Васе надо решить 245 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днём. Известно, что за первый день Вася решил 11 задач. Определите, сколько задач решил Вася в последний день, если со всеми задачами он справился за 7 дней.

Ответ: ___________________________.

12 Найдите наибольшее значение функции $y=8x-4\operatorname{tg}x-2\pi+2$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$.

Ответ: ___________________________.

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте отдельный лист. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\cos^2 x + \cos 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$.

14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P, а на продолжении ребра SB за точку B — точка Q, причём $AP = BQ = SA$.

а) Докажите, что прямые PQ и SC перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ.

15 Решите неравенство $\log_6\left(64^x + 36^x - 65\cdot 8^x + 64\right) \geq 2x$.

16 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A.

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $\angle ABC = 90°$, $AM = 3$, $CM = 2$, Q — точка пересечения прямых KM и AB, а T — такая точка на отрезке PQ, что $\angle OAT = 45°$. Найдите QT.

17 Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2 + x + 9$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - \left(0{,}5x^2 + x + 9\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

18 Найдите все целые отрицательные значения параметра a, при каждом из которых существует такое действительное число $b > a$, что неравенство $21b \geq 6|a+b| - 3|b-2| - |a-b| - 9\left|a^2 - b + 2\right| + 16$ **не выполнено.**

19 Шесть экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки, и подсчитывается среднее арифметическое четырёх оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{18}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{12}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

Ответы на тренировочные варианты 10209-10212 (профильный уровень) от 21.12.2017

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10209	291	6	31,5	4	- 5	169	- 7	27	8	9000	59	- 2
10210	144	3	8	1	- 15	400	21	729	5	4000	20	- 1
10211	7	13	24,5	0,13	39	55	6	55	15	0,4	36	- 15
10212	6	11	22,5	0,09	23	108	9	70	16	0,5	34	- 11

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\cos^2 x + \cos 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$.

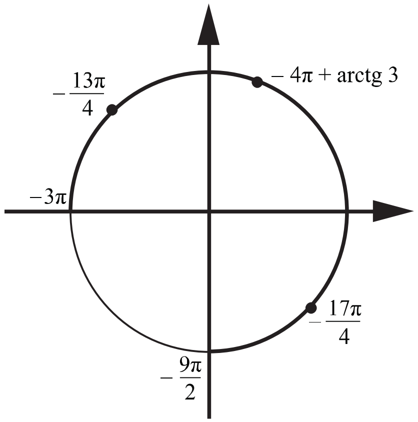
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$2\sin x\cos x + 2\cos^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0$;

$3\sin x\cos x + 3\cos^2 x - \sin x\cos x - \sin^2 x = 0$;

$(\sin x + \cos x)(3\cos x - \sin x) = 0$.



Получаем $\sin x + \cos x = 0$; $\sin x = -\cos x$; $\text{tg}x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, или

$3\cos x - \sin x = 0$; $\sin x = 3\cos x$; $\text{tg}x = 3$; $x = \text{arctg}3 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9\pi}{2};\ -3\pi\right]$. Получим числа $-\frac{17\pi}{4}$; $\text{arctg}3 - 4\pi$; $-\frac{13\pi}{4}$.

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $\text{arctg}3 + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{17\pi}{4}$; $\text{arctg}3 - 4\pi$; $-\frac{13\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

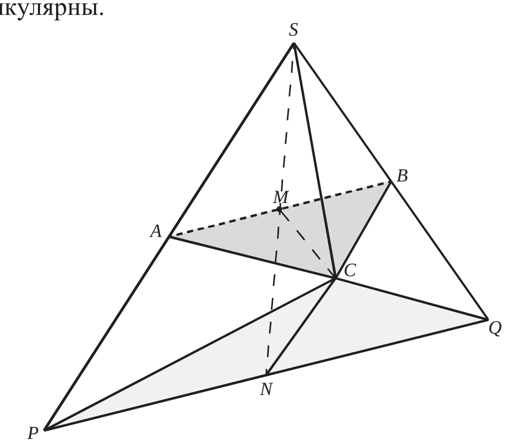
14 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P, а на продолжении ребра SB за точку B — точка Q, причём $AP = BQ = SA$.

а) Докажите, что прямые PQ и SC перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ.

Решение.

а) Пусть M — середина ребра AB, N — середина отрезка PQ. В равнобедренных треугольниках ASB и PSQ медианы SM и SN являются биссектрисами и высотами. Следовательно, точки S, M и N лежат на одной прямой. Треугольник PCQ равнобедренный, так как треугольники PAC и QBC равны, а значит, $PC = CQ$. В треугольниках ABC и PCQ высотами служат отрезки CM и CN соответственно. Из того, что отрезок PQ перпендикулярен отрезку SN и отрезку CN следует, что прямая PQ перпендикулярна плоскости SNC, но перпендикуляр к плоскости перпендикулярен любой прямой, лежащей в ней, следовательно, прямые PQ и SC перпендикулярны.



б) Из решения предыдущего пункта видно, что плоскость NSC перпендикулярна плоскостям ABC и PCQ, а потому $\angle MCN = \alpha$ искомый. Найдём стороны треугольника MCN.

Ясно, что $MN = SM = \sqrt{SA^2 - AM^2} = 2\sqrt{10}$ и $CM = AM \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$.

В треугольнике имеем SBC $\cos\angle CSB = \frac{SB^2 + SC^2 - CB^2}{2 \cdot SB \cdot SC} = \frac{31}{49}$.

Из треугольника SCQ по теореме косинусов находим
$CQ^2 = CS^2 + SQ^2 - 2\cdot CS\cdot SQ\cdot\cos\angle CSB = 121$.

Следовательно $CN = \sqrt{CQ^2 - NQ^2} = \sqrt{121-36} = \sqrt{85}$. Из треугольника MCN по теореме косинусов находим $\cos\alpha = \dfrac{27+85-40}{2\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{85}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{85}}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{85}}$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

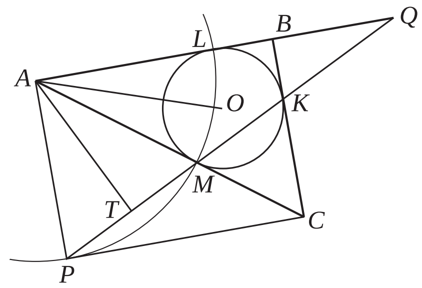
15 Решите неравенство $\log_6\left(64^x + 36^x - 65\cdot 8^x + 64\right) \ge 2x$.

Решение.
Преобразуем неравенство:
$$\log_6\left(64^x + 36^x - 65\cdot 8^x + 64\right) \ge 2x; \quad \log_6\left(64^x + 36^x - 65\cdot 8^x + 64\right) \ge \log_6 36^x;$$
$$64^x - 65\cdot 8^x + 64 \ge 0; \quad \left(8^x - 1\right)\left(8^x - 64\right) \ge 0.$$
Получаем $x \ge 2$ и $x \le 0$.
Ответ: $(-\infty;0]$; $[2;\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A.
а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC.
б) Пусть $\angle ABC = 90°$, $AM = 3$, $CM = 2$, Q — точка пересечения прямых KM и AB, а T — такая точка на отрезке PQ, что $\angle OAT = 45°$. Найдите QT.

Решение.
а) Поскольку $CK = CM$ и $AP = AM$, треугольники MCK и PAM равнобедренные, причём $\angle CMK = \angle AMP$ — углы при их основаниях MK и MP. Значит, $\angle MKC = \angle MPA$. Следовательно, прямая AP параллельна прямой BC.



б) Обозначим $BK = BL = x$. Тогда $CK = CM = 2$, $AL = AM = 3$, $BC = 2 + x$, $AB = 3 + x$.
По теореме Пифагора $AC^2 = BC^2 + AB^2$, или $25 = (2+x)^2 + (3+x)^2$, откуда $x = 1$. Значит, $BC = 3$, $AB = 4$.
Поскольку $BC = AP = 3$ и $BC \parallel AP$, четырёхугольник $ABCP$ — прямоугольник, значит, $CP = AB = 4$. Треугольник AMQ подобен треугольнику CMP с коэффициентом $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{3}{2}$, поэтому $AQ = \dfrac{3}{2}CP = \dfrac{3}{2}\cdot 4 = 6$.
По теореме Пифагора $PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2} = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$.
Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle MAO = \dfrac{\alpha}{2}$, $\angle MAT = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$,
$$\angle PAT = 90° - \angle QAT = 90° - \left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) = 45° - \frac{\alpha}{2},$$
поэтому AT — биссектриса, а значит, и высота равнобедренного треугольника MAP.
Таким образом, AT — высота прямоугольного треугольника PAQ, проведённая из вершины прямого угла, следовательно, $QT = \dfrac{AQ^2}{PQ} = \dfrac{36}{3\sqrt{5}} = \dfrac{12}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\dfrac{12}{\sqrt{5}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 Строительство нового завода стоит 115 млн рублей. Затраты на производство x тыс. единиц продукции на таком заводе равны $0{,}5x^2+x+9$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-\left(0{,}5x^2+x+9\right)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более чем за 5 лет?

Решение.

Прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составляет

$$px-\left(0{,}5x^2+x+9\right)=-0{,}5x^2+(p-1)x-9.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x=p-1$. Наибольшее значение равно $\frac{(p-1)^2}{2}-9$. Строительство завода окупится не более чем за 5 лет, если

$$\frac{(p-1)^2}{2}-9\ge\frac{115}{5};\ (p-1)^2\ge 64;\ (p-9)(p+7)\ge 0,$$

то есть при $p\ge 9$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p=9$.

Ответ: $p=9$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все целые отрицательные значения параметра a, при каждом из которых существует такое действительное число $b>a$, что неравенство $21b\ge 6|a+b|-3|b-2|-|a-b|-9\left|a^2-b+2\right|+16$ **не выполнено.**

Решение.

Решим вспомогательную противоположную задачу: найдём все a, при каждом из которых неравенство $21b\ge 6|a+b|-3|b-2|-|a-b|-9\left|a^2-b+2\right|+16$ выполнено при любом $b>a$. Заметим далее, что данное неравенство равносильно неравенству

$$F(b)=21b-6|a+b|+3|b-2|+|a-b|+9\left|a^2-b+2\right|-16\ge 0,$$

причём функция $F(b)$ строго монотонно возрастает на множестве действительных чисел и, следовательно, первоначальное неравенство выполняется для всех $b>a$ тогда и только тогда, когда $F(a)\ge 0$, то есть $9a^2+12a-12|a|+3|a-2|+2\ge 0$. Отметим, что при $a\ge 0$ полученное неравенство верно. Если $a<0$, то неравенство равносильно неравенству

$$9a^2+21a+8\ge 0;\quad \left[\begin{array}{l}\frac{-7+\sqrt{17}}{6}\le a<0;\\ a\le\frac{-7-\sqrt{17}}{6}\end{array}\right.$$

Таким образом, существует только одно целое отрицательное значение $a=-1$, при котором условие вспомогательной задачи не выполнено. Следовательно, при значении $a=-1$ существует такое $b>a$, что неравенство $21b\ge 6|a+b|-3|b-2|-|a-b|-9\left|a^2-b+2\right|+16$ не выполнено.

Ответ: -1.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 Шесть экспертов оценивали фильм. Каждый из них выставил оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Все эксперты выставили различные оценки. Старый рейтинг фильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. Новый рейтинг фильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и, подсчитывается среднее арифметическое четырёх оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{18}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\frac{1}{12}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности старого и нового рейтингов.

Решение.

Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A, а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через B.

а) Заметим, что $A=\frac{m}{6}$, $B=\frac{n}{4}$, где m и n — некоторые натуральные числа. Значит, $A-B=\frac{m}{6}-\frac{n}{4}=\frac{2m-3n}{12}$. Если $A-B=\frac{1}{18}$, то $2m-3n=\frac{12}{18}$, что невозможно. Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, не может равняться $\frac{1}{18}$.

б) Например, для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 5, 6 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна

$$\frac{0+1+2+3+5+6}{6}-\frac{1+2+3+5}{4}=\frac{17}{6}-\frac{11}{4}=\frac{1}{12}.$$

в) Пусть x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, а y — сумма остальных четырёх оценок. Тогда

$$A-B=\frac{x+y+z}{6}-\frac{y}{4}=\frac{2x-y+2z}{12}\le$$
$$\le\frac{2x+2z-\left(\left(x+1\right)+\left(x+2\right)+\left(x+3\right)+\left(x+4\right)\right)}{12}=$$
$$=\frac{2z-2x-10}{12}\le\frac{2\cdot 10-2\cdot 0-10}{12}=\frac{5}{6}.$$

Для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 10 разность $A-B$ равна $\frac{5}{6}$. Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равно $\frac{5}{6}$.

Ответ: а) нет; б) да, например, для оценок 0, 1, 2, 3, 5, 6; в) $\frac{5}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *б* и *в* либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4