

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ

по лабораторной работе №2, вариант - 24

Теория автоматического управления

по теме:

МОДАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОРЫ И НАБЛЮДАТЕЛИ

Студент:

Группа R3336

Поляков А.А.

Предподаватель:

к.т.н., доцент

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2025

СОДЕРЖАНИЕ

1	МОДАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОР	4
1.1	Условие задачи	4
1.2	Решение задачи	5
1.2.1	Исследование управляемости системы	5
1.2.2	Достижимые спектры	6
1.2.3	Первый спектр	6
1.2.4	Второй спектр	9
1.2.5	Третий спектр	11
1.2.6	Сравнение выбора собственных чисел для синтеза регулятора	13
1.2.7	Вывод	13
2	НАБЛЮДАТЕЛЬ ПОЛНОГО ПОРЯДКА	14
2.1	Условие задачи	14
2.2	Решение задачи	15
2.2.1	Исследование наблюдаемости системы	15
2.2.2	Первый спектр	16
2.2.3	Второй спектр	20
2.2.4	Третий спектр	23
2.2.5	Сравнение выбора собственных чисел для синтеза наблюдателя	26
2.2.6	Вывод	26
3	МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ	27
3.1	Условие задачи	27
3.2	Решение задачи	28
3.2.1	Исследование наблюдаемости системы	28
3.2.2	Синтез наблюдателя и регулятора	28
3.2.3	Моделирование	30
3.2.4	Вывод	33
4	НАБЛЮДАТЕЛЬ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА	34
4.1	Условие задачи	34

4.2	Решение задачи	35
4.2.1	Исследование характеристик системы	35
4.2.2	Синтез наблюдателя	35
4.2.3	Синтез регулятора	37
4.2.4	Моделирование	37
4.2.5	Вывод	39
5	ОБЩИЕ ВЫВОДЫ	40

1 МОДАЛЬНЫЕ РЕГУЛЯТОР

1.1 Условие задачи

Необходимо рассмотреть систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

и выполнить следующие шаги:

- Найти собственные числа матрицы A и определить управляемость каждого из них. Сделать вывод об управляемости и стабилизируемости системы.
- Построить схему моделирования системы, замкнутой регулятором $u = Kx$.
- Рассмотреть предложенные желаемые спектры замкнутой системы $(A + BK)$ и определить, какие из них достижимы, а какие нет. Обосновать выбор.
- Для каждого из достижимых спектров вашего варианта:
 - Найти соответствующую матрицу регулятора K , приводящий спектр замкнутой системы к желаемому.
 - Определить собственные числа матрицы замкнутой системы $(A + BK)$ и сравнить с желаемым спектром в подтверждение корректности синтеза регулятора.
 - Выполнить компьютерное моделирование и построить графики формируемого регулятором управления $u(t)$ и вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.
- Сопоставить полученные результаты компьютерного моделирования для рассмотренных спектров, оценить возможные сравнительные преимущества и недостатки каждого из них.

1.2 Решение задачи

Параметры для объекта:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 14 \\ 6 & 0 & 6 \\ -6 & -2 & -8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

1.2.1 Исследование управляемости системы

Найдём собственные числа матрицы A :

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 3i, \quad \lambda_3 = -2$$

Вычислим матрицу Хаутуса для каждого собственного числа:

$$H_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - 3i & -1 & 14 & 11 \\ 6 & -3 - 3i & 6 & 7 \\ -6 & -2 & -11 - 3i & -7 \end{bmatrix}$$
$$\text{rank}(H_1) = 3$$

Значит собственное число λ_1 является управляемым, если ранг его матрицы Хаутуса равняется порядку системы.

$$H_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 + 3i & -1 & 14 & 11 \\ 6 & -3 + 3i & 6 & 7 \\ -6 & -2 & -11 + 3i & -7 \end{bmatrix}$$
$$\text{rank}(H_2) = 3$$

Аналогично, собственное число λ_2 является управляемым.

$$H_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & -1 & 14 & 11 \\ 6 & 2 & 4 & 7 \\ -6 & -2 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(H_3) = 2$$

Последнее собственное число λ_3 уже не управляемое. Значит система по критерию Хаутуса будет не полностью управляемой.

Однако система будет стабилизируемой, потому что это все неустойчивые (их нет) собственные числа у нас будут управляемые.

1.2.2 Достижимые спектры

Нам дан следующий набор спектров замкнутой системы $(A + BK)$:

$$\sigma_1 = \{-1, -1, -1\}$$

$$\sigma_2 = \{-2, -2, -2\}$$

$$\sigma_3 = \{-1, -10, -100\}$$

$$\sigma_4 = \{-2, -20, -200\}$$

$$\sigma_5 = \{-1, -1 - 3i, -1 + 3i\}$$

$$\sigma_6 = \{-2, -2 - 6i, -2 + 6i\}$$

Из него не все спектры мы сможем использовать как достижимы у матрицы замкнутой $(A + BK)$ на регулятор системы, потому что наша система не полностью управляема. Ограничивает нас $\lambda_3 = -2$ (не управляемое собственное число), которое нельзя будет изменить никак с помощью регулятора, поэтому оно обязано остаться одним из собственных чисел $(A + BK)$ после замыкания. После такого отбора останутся следующие спектры, и они уже будут достижимыми:

$$\sigma_2 = \{-2, -2, -2\}$$

$$\sigma_4 = \{-2, -20, -200\}$$

$$\sigma_6 = \{-2, -2 - 6i, -2 + 6i\}$$

1.2.3 Первый спектр

$$\sigma_1 = \{-2, -2, -2\}$$

Найдём матрицу регулятора K , приводящий спектр замкнутой системы к желаемому. Для её получения воспользуемся следующей системой:

$$\begin{cases} AP - PG = BY, \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

и убедимся в том, что следующие условия также более-менее выполняются:

$$\begin{cases} \sigma(A) \cap \sigma(G) = \emptyset, \\ (A, B) - \text{управляема, то всегда будет существовать } P \\ (Y, G) - \text{наблюдаема} \end{cases}$$

Матрицы G, Y - выборочные и вспомогательные при синтезе регулятора:

- Выбираем $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с желаемым спектром $\sigma(G)$
- Выбираем $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ такую, чтобы пара (Y, G) была наблюдаема
- Ищем $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ как решение уравнения Сильвестра $AP - PG = BY$
- Вычисляем коэффициенты регулятора: $K = -YP^{-1}$

В нашем случае пара (A, B) - лишь стабилизируема, но это не значит, что регулятор нельзя синтезировать, пока что это лишь значит, что решение может быть не единственным или/и вырожденным. Остальные два условия мы выполним умным выбором Y, G :

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Проделав вычисления, получим следующие коэффициенты:

$$K = \begin{bmatrix} 1.09 & -2.08 & 1.06 \end{bmatrix}$$

Тогда получим следующие собственные числа $(A + BK)$:

$$\lambda_{1,2,3} = -2$$

Что совпадает с исходно заданным спектром, а значит контроллер мы синтезировали верно.

Для проведения моделирования была составлена следующая схема:

С помощью неё построим графики управления $u(t)$ от регулятора и вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$:

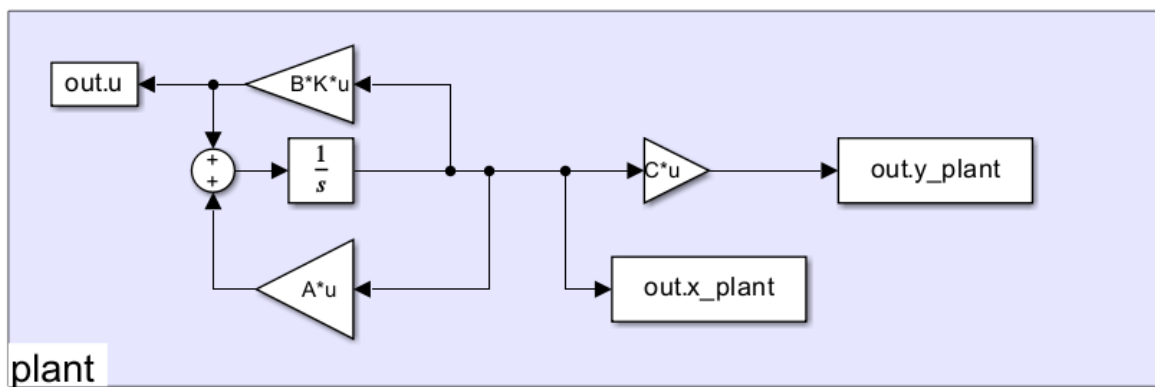


Рисунок 1 — Модель с модальным регулятором

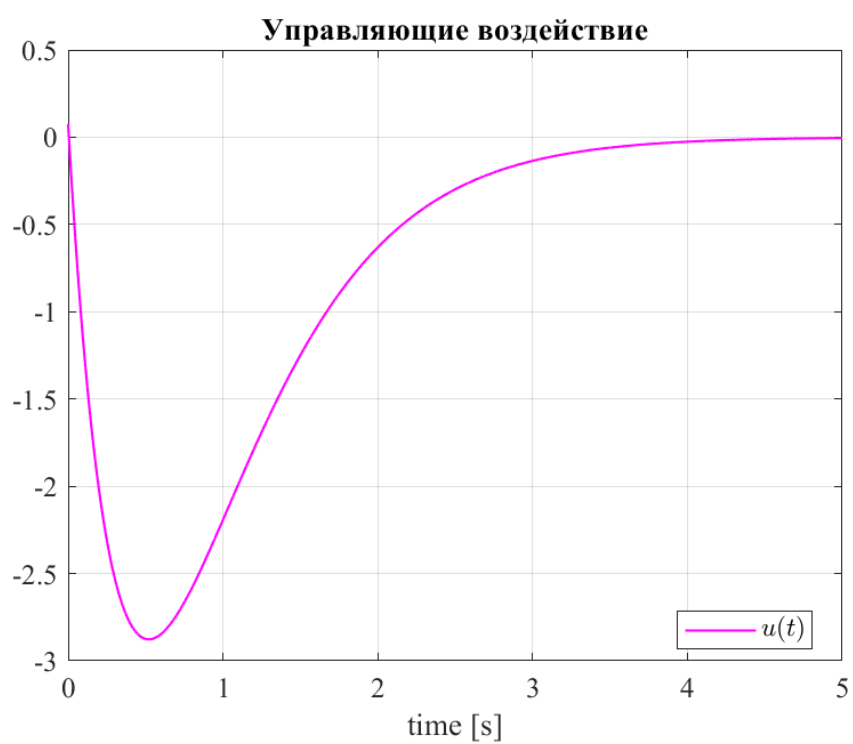


Рисунок 2 — Сигнал управления

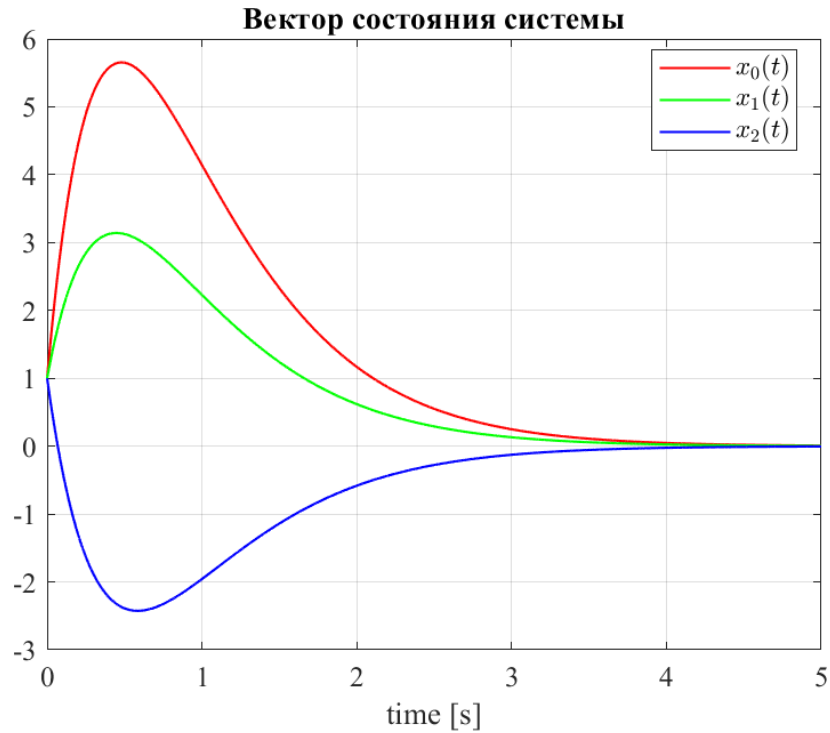


Рисунок 3 — Состояние системы

1.2.4 Второй спектр

$$\sigma_2 = \{-2, -20, -200\}$$

Найдём матрицу регулятора K , воспользуемся следующей системой:

$$\begin{cases} AP - PG = BY, \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

Для этого с умом выберем Y, G :

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -200 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Проделав вычисления, получим следующие коэффициенты:

$$K = \begin{bmatrix} 425.89 & -387.02 & 314.51 \end{bmatrix}$$

Тогда получим следующие собственные числа $(A + BK)$:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -20, \quad \lambda_3 = -200$$

Что совпадает с исходно заданным спектром, а значит контроллер мы синтезировали верно.

Построим графики управления $u(t)$ и вектора состояния $x(t)$:

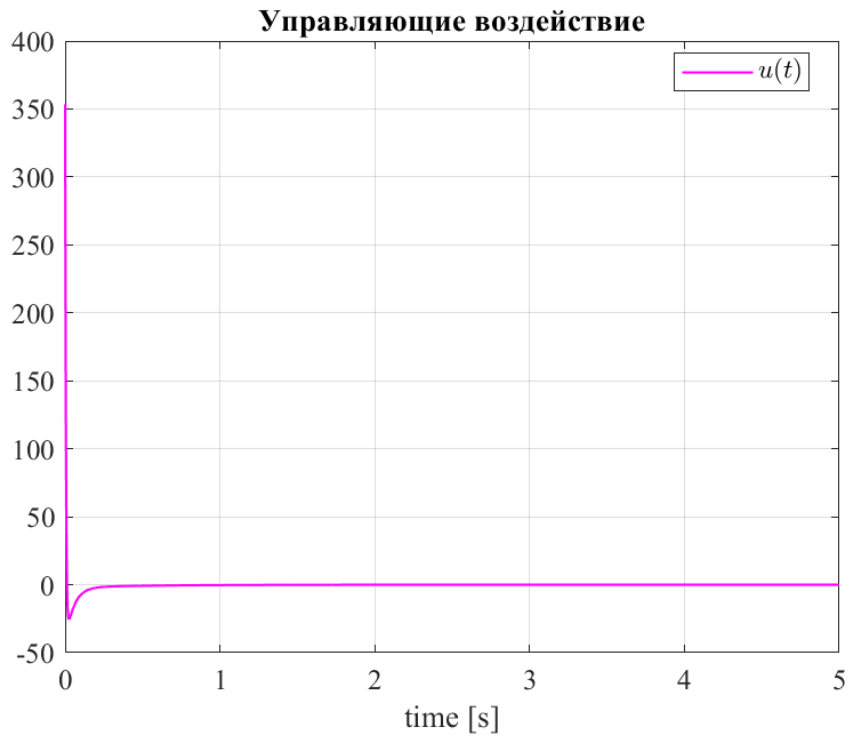


Рисунок 4 — Сигнал управления

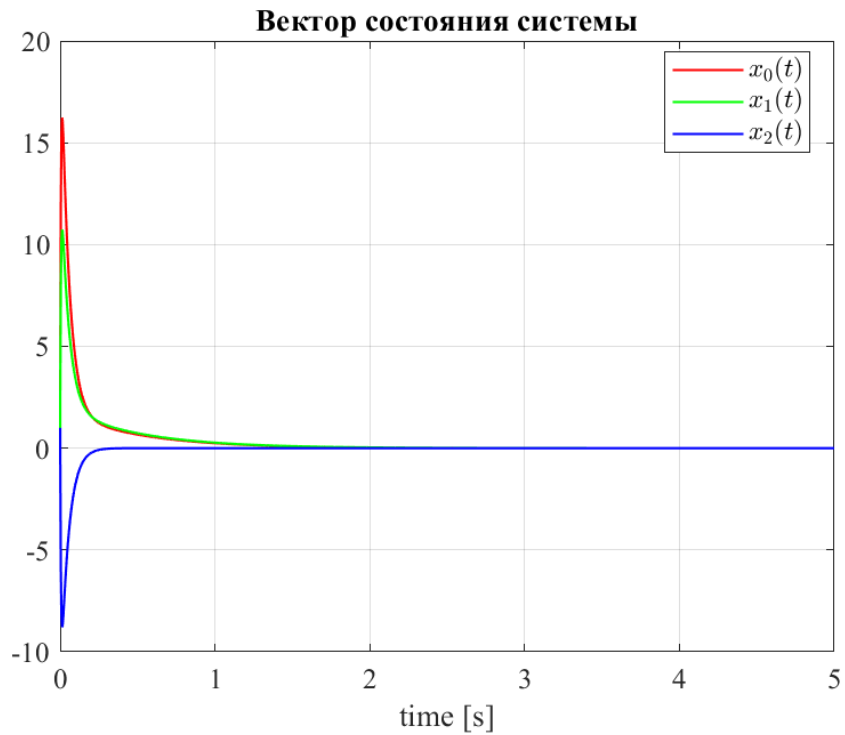


Рисунок 5 — Состояние системы

1.2.5 Третий спектр

$$\sigma_3 = \{-2, -2 - 6i, -2 + 6i\}$$

Найдём матрицу регулятора K , воспользуемся следующей системой:

$$\begin{cases} AP - PG = BY, \\ K = -YP^{-1} \end{cases}$$

Для этого с умом выберем Y, G :

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -6 & -2 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Проделав вычисления, получим следующие коэффициенты:

$$K = \begin{bmatrix} 4.45 & -5.09 & 3.32 \end{bmatrix}$$

Тогда получим следующие собственные числа $(A + BK)$:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_{2,3} = -2 \pm 6i$$

Что совпадает с исходно заданным спектром, а значит контроллер мы синтезировали верно.

Построим графики управления $u(t)$ и вектора состояния $x(t)$:

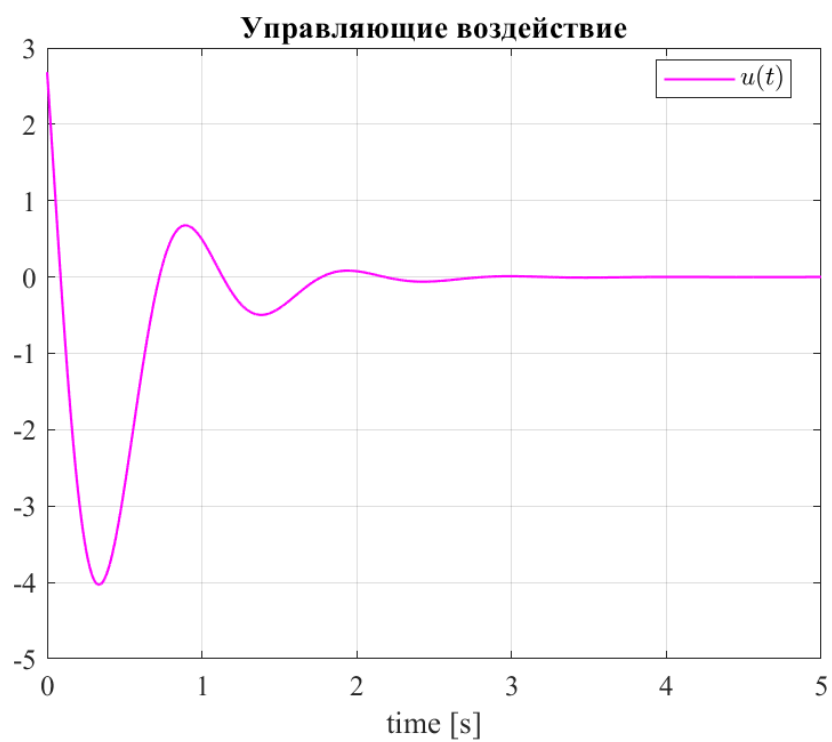


Рисунок 6 — Сигнал управления

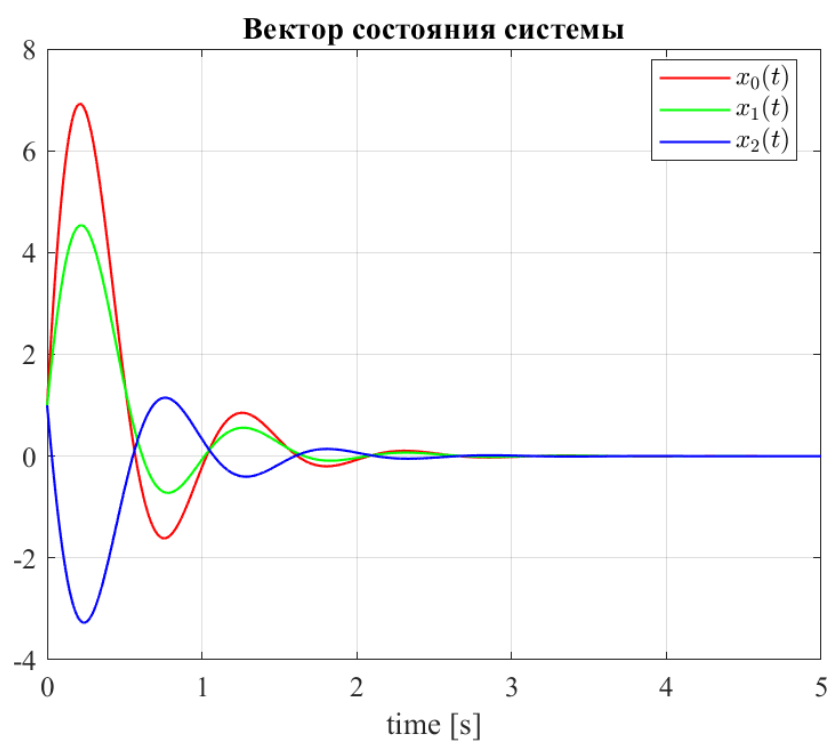


Рисунок 7 — Состояние системы

1.2.6 Сравнение выбора собственных чисел для синтеза регулятора

В первом случае мы выбрали относительно небольшие устойчивые моды, поэтому регулятор в целом корректировал систему плавно и с небольшим перерегулированием.

Во втором случае мы решили ускорить процесс управления и многократно увеличили моды, поэтому управление действовало агрессивно, но привело систему в нулевую позицию очень быстро. Однако в реальном мире таким управлением воспользоваться вряд ли удастся - нам помешают физические ограничения по току, потому что иначе просто двигатель сможет сгореть от такого резкого и высокого напряжения, или просто такое управление переполнит буфер памяти контроллера. В общем, такое управление довольно рискованно.

В третьем случае в спектр вошла комплексно сопряжённая мода, поэтому система сходится с небольшими колебаниями, но вполне плавно, с небольшим перерегулированием, потому что вещественная часть этих мод не слишком велика.

1.2.7 Вывод

Исследование системы задания показало, что стабилизируемой системой мы можем управлять с разным "характером" сходимости, и не важна, что она не полностью управляема. Для управления мы успешно синтезировали модальный регулятор с помощью уравнения Сильвестра, желаемые спектры и спектр матрицы $(A + BK)$ - сошлись, что свидетельствует о корректном синтезе.

2 НАБЛЮДАТЕЛЬ ПОЛНОГО ПОРЯДКА

2.1 Условие задачи

Рассмотреть систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

и выполнить следующие шаги:

- Найти собственные числа матрицы A и определить наблюдаемость каждого из них. Сделать вывод об наблюдаемости и обнаруживаемости системы.
- Построить схему моделирования системы с наблюдателем состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + L(C\hat{x} - y)$
- Для каждого из спектров:
 - Найти соответствующую матрицу коррекции наблюдателя L , обеспечивающую желаемый спектр.
 - Определить собственные числа матрицы наблюдателя $(A + LC)$ и сравнить с желаемым спектром в подтверждение корректности синтеза наблюдателя.
 - Выполнить компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$. Построить сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, а также график ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$
- Сопоставить полученные результаты компьютерного моделирования для рассмотренных спектров, оценить возможные сравнительные преимущества и недостатки каждого из них.

2.2 Решение задачи

Параметры для объекта:

$$A = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 & -7 \\ -64 & 25 & 14 & -12 \\ -26 & 11 & 7 & -3 \\ 48 & -18 & -14 & 8 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

И следующие спектры сходимости для синтеза наблюдателя:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \{-4, -4, -4, -4\} \\ \sigma_2 &= \{-4, -40, -400, -4000\} \\ \sigma_3 &= \{-4 \pm 5i, -4 \pm 6i\} \end{aligned}$$

2.2.1 Исследование наблюдаемости системы

Найдём собственные числа матрицы A :

$$\lambda_{1,2} = \pm 3i, \quad \lambda_{3,4} = \pm 2i,$$

Можно заметить, что тут только комплексные моды, поэтому тип вектора состояния будет иметь колебательный характер. Найдём матрицу наблюдаемости системы:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 5 & -3 \\ 134 & -53 & -14 & 34 \\ 28 & 53 & -110 & 12 \\ -1076 & 347 & 56 & -406 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \text{rank}(V) = 4$$

В таком случае по критерию Калмана - система полностью наблюдаема, а значит и все собственные числа наблюдаемы, и как следствие - система обнаруживаема.

Рассмотрим несколько вариантов синтеза наблюдателей, с разными спектрами:

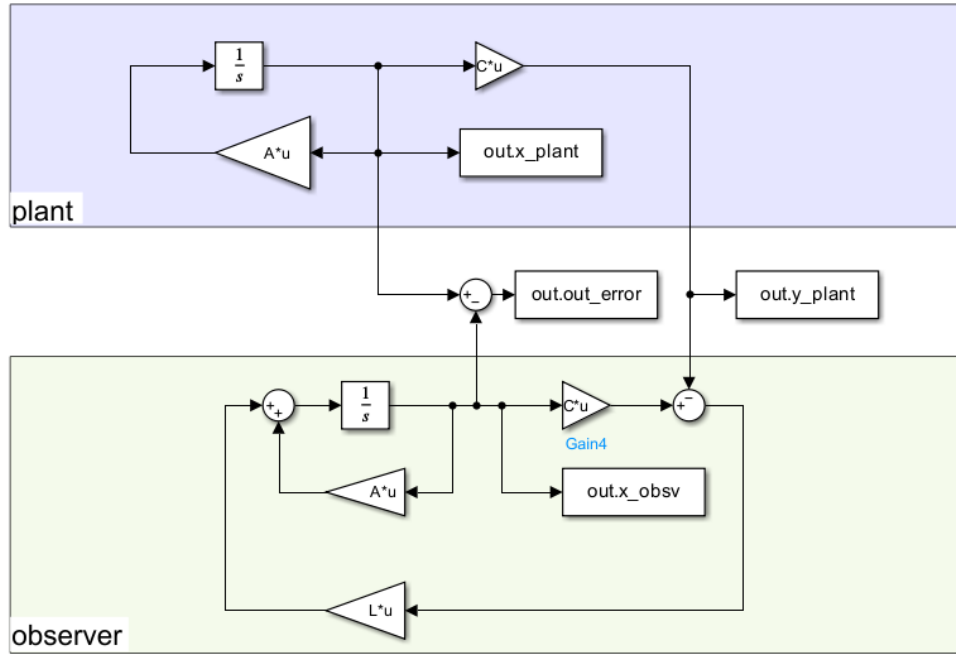


Рисунок 8 — Модель с модальным наблюдателем

2.2.2 Первый спектр

$$\sigma_1 = \{-4, -4, -4, -4\}$$

Система с наблюдателем полного порядка будет иметь следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}, \quad \begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + \mathbf{L}(\hat{y} - y) \\ \hat{y} = C\hat{x} \end{cases}$$

Для синтеза наблюдателя должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} \sigma(A) \cup \sigma(G) = \emptyset \\ (G, Y) - \text{управляема, то всегда существует } Q \\ (C, A) - \text{наблюдаема} \end{cases}$$

Тогда можно проследовать по алгоритму:

1. Выбираем $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ с желаемым спектром $\sigma(G)$.
2. Выбираем $Y \in \mathbb{R}^{n \times k}$ такую, чтобы пара (G, Y) - была управляема.
3. Найдем $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ как решение уравнения Сильвестра $GQ - QA = YC$.

4. Вычисляем матрицу коррекции наблюдателя: $L = Q^{-1}Y$

Для получения L возьмём следующую управляемую пару G, Y :

$$G = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 11.08 \\ 16.99 \\ 9.74 \\ -15.62 \end{bmatrix}$$

Определим собственные числа матрицы наблюдателя ($A + LC$):

$$\sigma_{obsv} = \{-4, -4, -4, -4\}$$

Однако я записал их в несколько округленном виде, поскольку мне не удалось подобрать удачный вектор Y , чтобы устранить такое отклонение:

$$\sigma_{true} = \{-4.0044, -4 + 0.0044i, -4 - 0.0044i, -3.9956\}$$

Но всё же погрешность здесь несколько незначительна, поэтому всё же сделаю вывод, что желаемые спектры совпали с спектром матрицы наблюдателя - синтез корректен.

Проведём моделирование, посмотрим на сравнительный график сходимости вектора состояния наблюдателя и системы, а также на их ошибку:

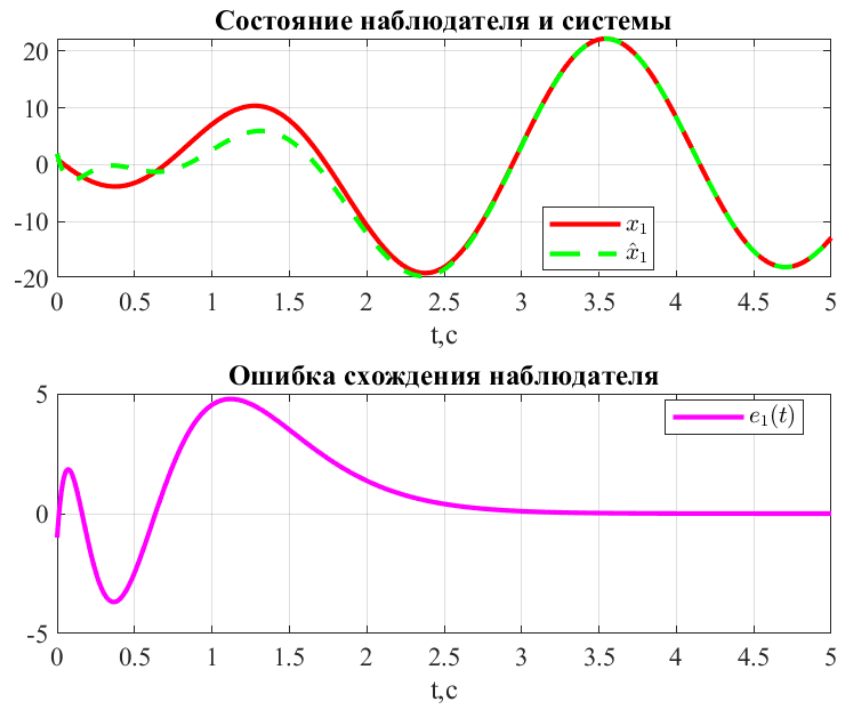


Рисунок 9 — Состояние системы и ошибка сходимости

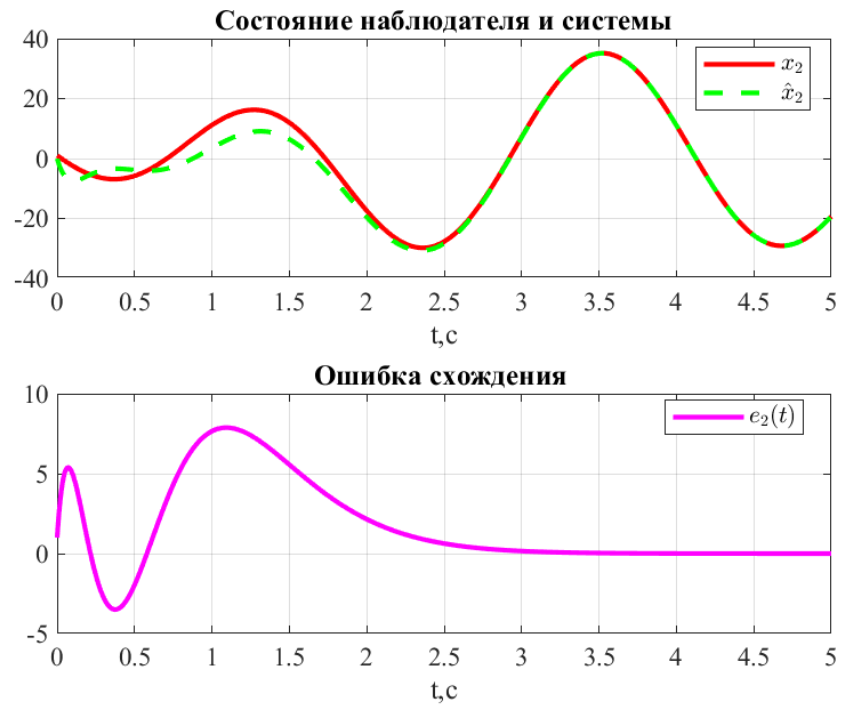


Рисунок 10 — Состояние системы и ошибка сходимости

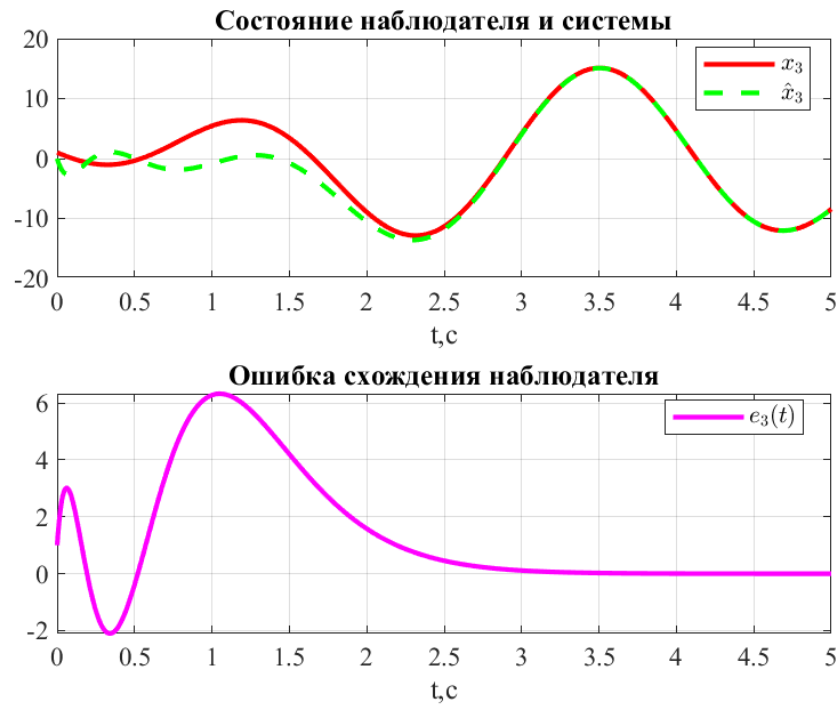


Рисунок 11 — Состояние системы и ошибка сходимости

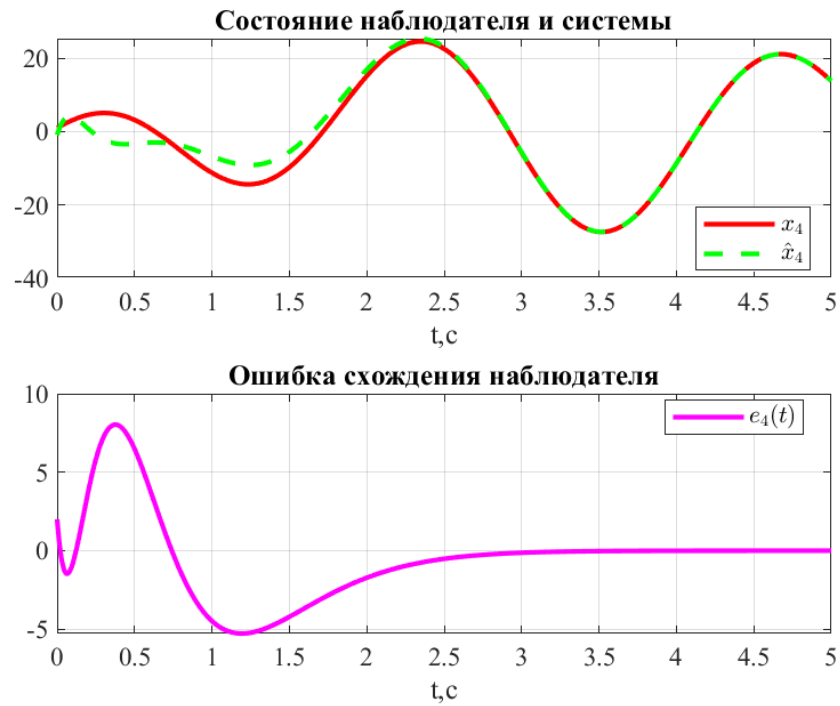


Рисунок 12 — Состояние системы и ошибка сходимости

2.2.3 Второй спектр

$$\sigma_2 = \{-4, -40, -400, -4000\}$$

Для получения L возьмём следующую управляемую пару G, Y :

$$G = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -400 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4000 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad L = 10^5 \cdot \begin{bmatrix} 3.157 \\ 9.716 \\ 12.754 \\ 7.427 \end{bmatrix}$$

Определим собственные числа матрицы наблюдателя ($A + LC$):

$$\sigma_{obsv} = \{-4, -40, -400, -4000\}$$

Можно сделать вывод, что желаемые спектры совпали с спектром матрицы наблюдателя - синтез корректен.

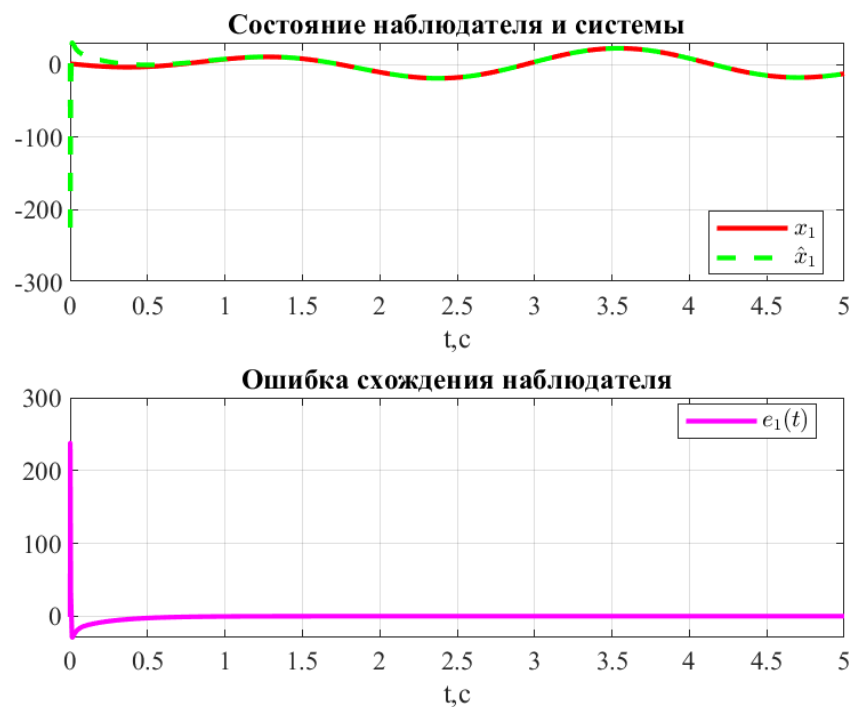


Рисунок 13 — Состояние системы и ошибка сходимости

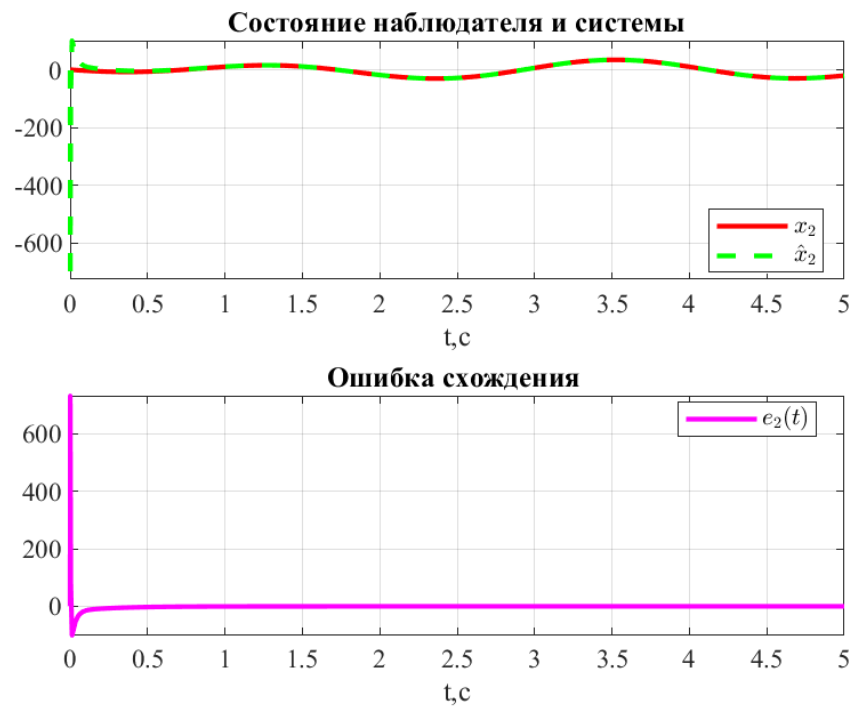


Рисунок 14 — Состояние системы и ошибка сходимости

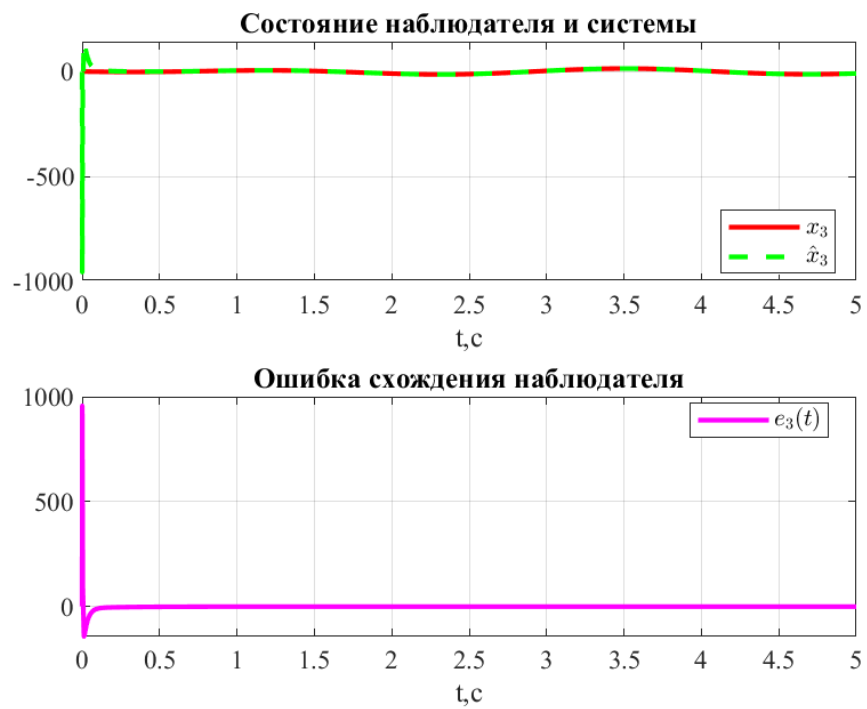


Рисунок 15 — Состояние системы и ошибка сходимости

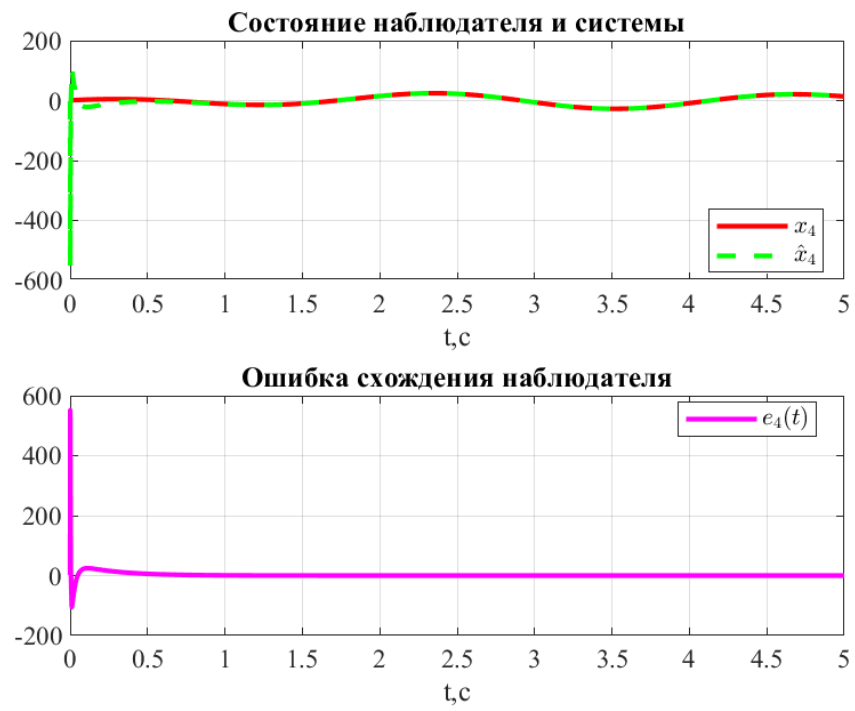


Рисунок 16 — Состояние системы и ошибка сходимости

2.2.4 Третий спектр

$$\sigma_3 = \{-4 \pm 5i, -4 \pm 6i\}$$

Для получения L возьмём следующую управляемую пару G, Y :

$$G = \begin{bmatrix} -4 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad L = \begin{bmatrix} 14.56 \\ 25.87 \\ 19.60 \\ -13.23 \end{bmatrix}$$

Определим собственные числа матрицы наблюдателя ($A + LC$):

$$\sigma_{obsv} = \{-4 \pm 5i, -4 \pm 6i\}$$

Можно сделать вывод, что желаемые спектры совпали с спектром матрицы наблюдателя - синтез корректен. Проведём моделирование:

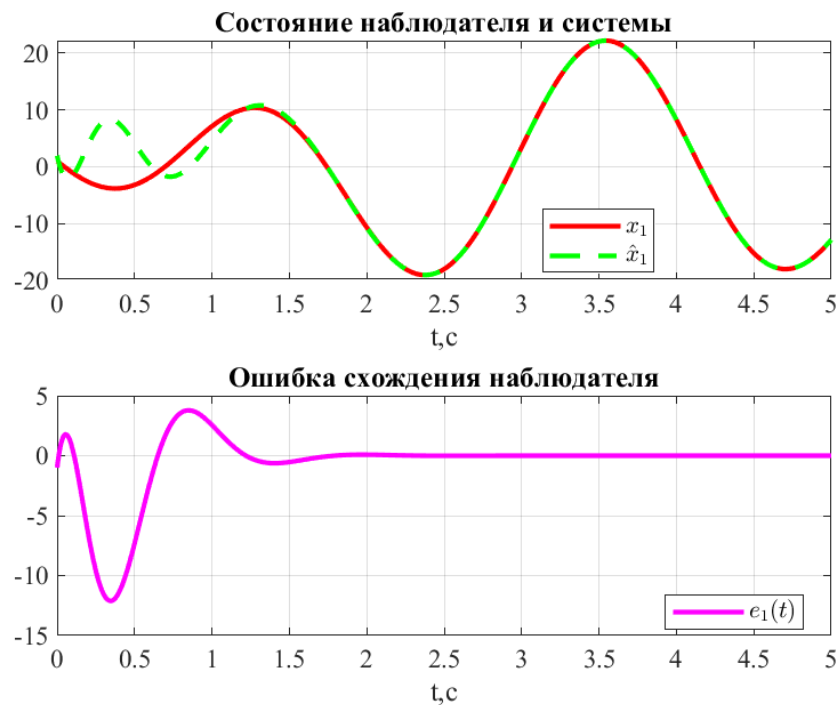


Рисунок 17 — Состояние системы и ошибка сходимости

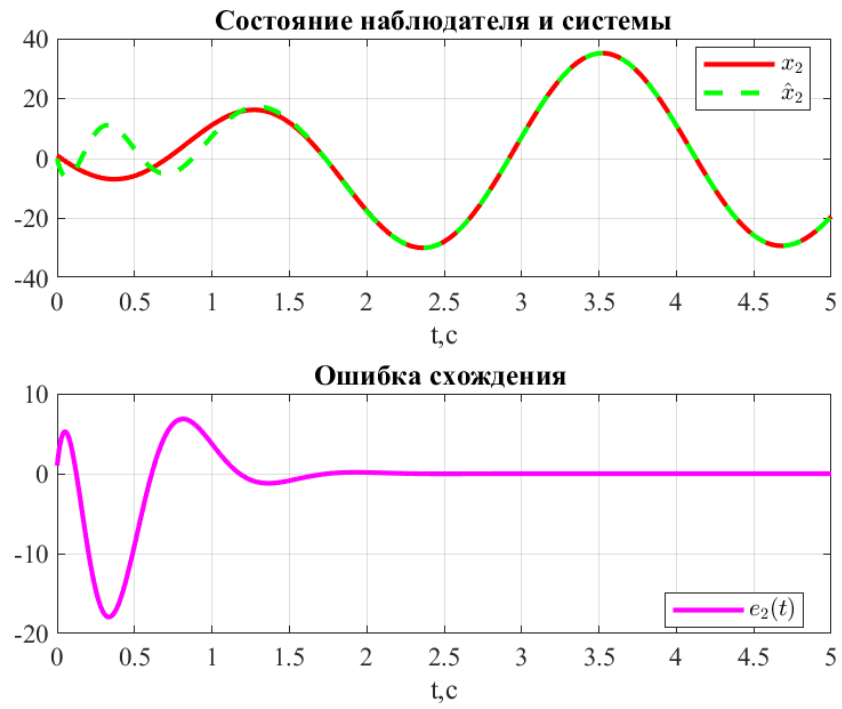


Рисунок 18 — Состояние системы и ошибка сходимости

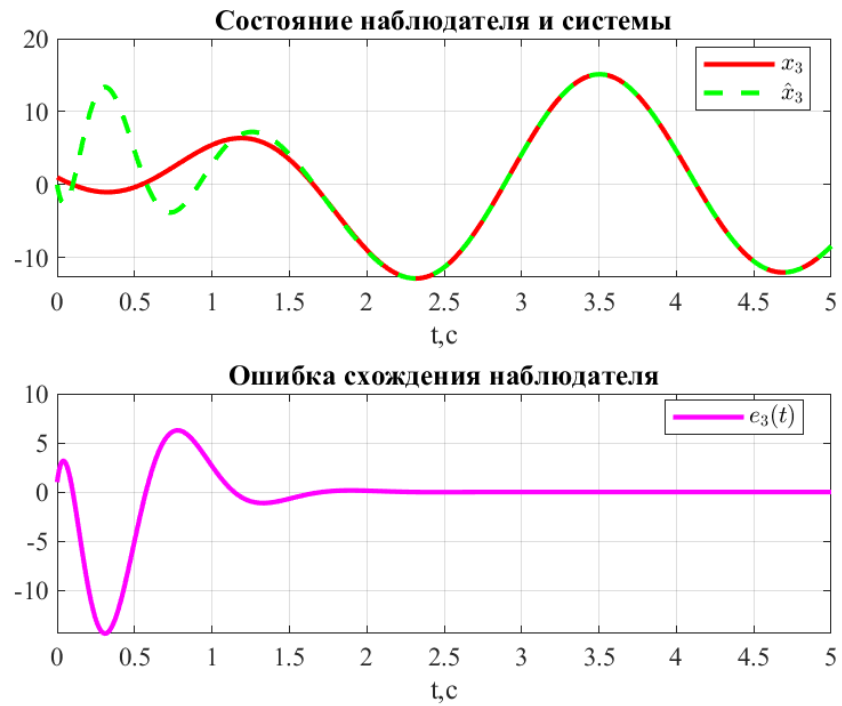


Рисунок 19 — Состояние системы и ошибка сходимости

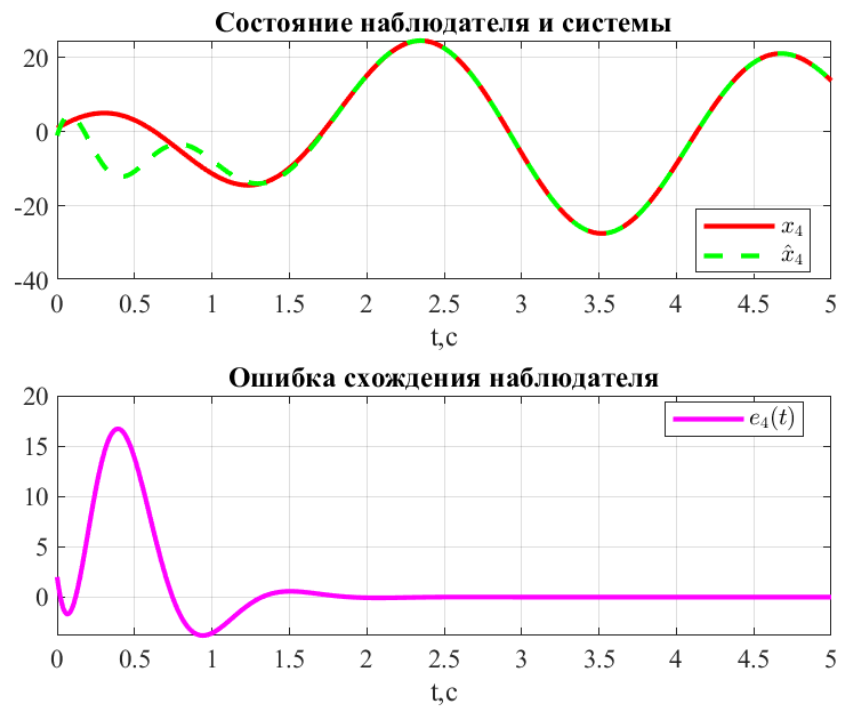


Рисунок 20 — Состояние системы и ошибка сходимости

2.2.5 Сравнение выбора собственных чисел для синтеза наблюдателя

Мы можем заметить, что происходят похожие процессы, как и при синтезе модального регулятора - выбор мод наблюдателя напрямую влияет на характер его схождения к истинной системе. В первом случае спектр выбран не слишком большим, поэтому матрица коррекции не слишком велика, в итоге мы получили довольно большое перерегулирование (по графику ошибки) при небольшом времени переходного процесса.

Во втором случае мы получили довольно агрессивную сходимость (перерегулирования практически нет, время переходного процесса экстремально мало), но в реальных физических системах вряд ли наша оценка может так быстро/резко сойтись к истинной безошибочно, потому что датчики шумные, и их фильтрация стоит какого-то времени на сбор достаточного количества данных, и последующую обработку.

В третьем случае наш спектр состоял в том числе и из колебательных мод, поэтому переходный процесс был с перерегулированием куда больше, чем в первом случае, однако время этого процесса стало куда меньше.

2.2.6 Вывод

В этом задании мы работали с полностью наблюдаемой системой, это мы узнали через критерий Калмана. Мы узнали, что синтезировать наблюдателя можно с разным "характером" сходимости. Для наблюдения мы синтезировали модального наблюдателя с помощью уравнения Сильвестра, а также провели серию моделирований с разными наблюдателями, все они показали то, что мы сходимся к оригинальной системе с разным качеством переходного процесса - его времени и перерегулирования.

3 МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ

3.1 Условие задачи

Рассматриваем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

и выполнить следующие шаги:

- Найти собственные числа матрицы A и определить наблюдаемость каждого из них. Сделать вывод об наблюдаемости и обнаруживаемости системы.
- Построить схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящем из наблюдателя состояния и закона управления.
- Задаться парой достижимых желаемых спектров для регулятора и наблюдателя, обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы.
- Синтезировать регулятор K на основании выбранного желаемого спектра, определить собственные числа матрицы $(A + BK)$ и сравнить с желаемым спектром для проверки корректности расчетов.
- Синтезировать матрицу коррекции наблюдателя L на основании выбранного желаемого спектра, определить собственные числа матрицы $(A + LC)$ и сравнить с желаемым спектром для проверки корректности расчетов.
- Выполнить компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$. Построить сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, график управления $u(t)$ и ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

3.2 Решение задачи

Параметры для объекта:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & 5 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3.2.1 Исследование наблюдаемости системы

Для начала найдём матрицу наблюдаемости системы:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -11 & -6 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\text{rank}(V) = 3$$

По критерию Калмана, наша система полностью наблюдаема, так как ранг матрицы наблюдаемости равен порядку системы.

Найдём собственные числа матрицы A :

$$\sigma(A) = \{-8, 4, 8, 16\}$$

3.2.2 Синтез наблюдателя и регулятора

Выберем следующие два спектра для наблюдателя и регулятора, которые обеспечат асимптотическую устойчивость замкнутой системы:

$$\sigma(G_{ctrl}) = \{-1, -4, -4, -4\}, \quad \sigma(G_{obsv}) = \{-1, -3, -3, -3\}$$

Пользуясь упомянутой методикой синтеза регулятора и наблюдателя через уравнения Сильвестра, получим следующие матрицы K, L :

$$G_{ctrl} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T, \rightarrow K = \begin{bmatrix} 8.51 \\ -8.91 \\ -0.87 \\ -1.36 \end{bmatrix}^T$$

$$G_{obsv} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \rightarrow L = \begin{bmatrix} 35.60 & 35.60 \\ -38.39 & -38.39 \\ -12.02 & -12.02 \\ -15.18 & -15.18 \end{bmatrix}$$

Теперь вычислим собственные числа матрицы регулятора $(A + BK)$ и наблюдателя $(A + LC)$:

$$\sigma(A + LC) = \{-1, -3.0005, -2.9997 \pm 0.0004i\}$$

$$\sigma(A + BK) = \{-1, -3.9996 - 4.0002 \pm 0.0004i\}$$

Спектры почти совпали с точностью до погрешности, значит синтез корректен в обоих случаях.

3.2.3 Моделирование

Выполним моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
Построим следующие графики:

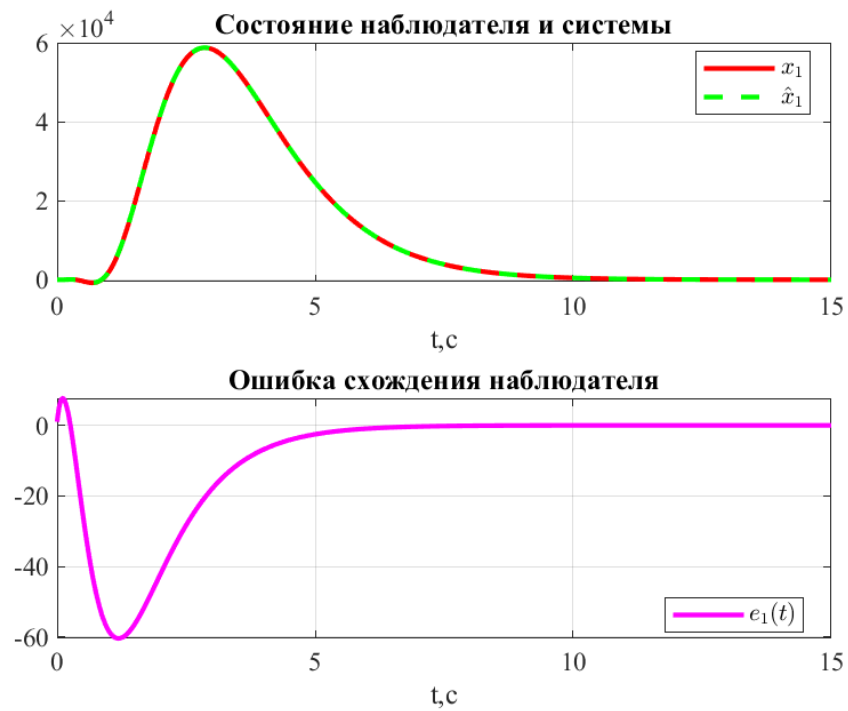


Рисунок 21 — Состояние системы и ошибка сходимости

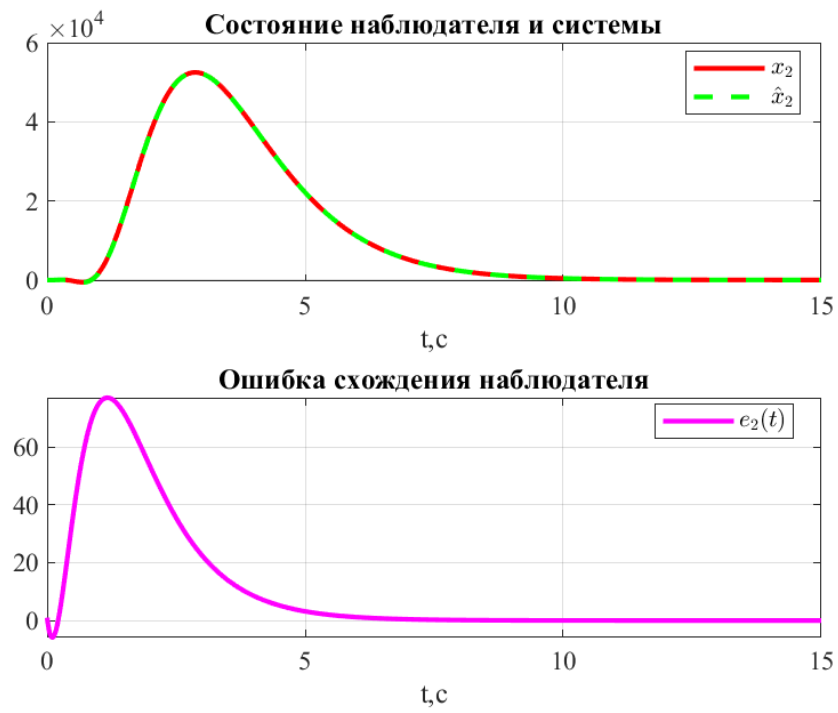


Рисунок 22 — Состояние системы и ошибка сходимости

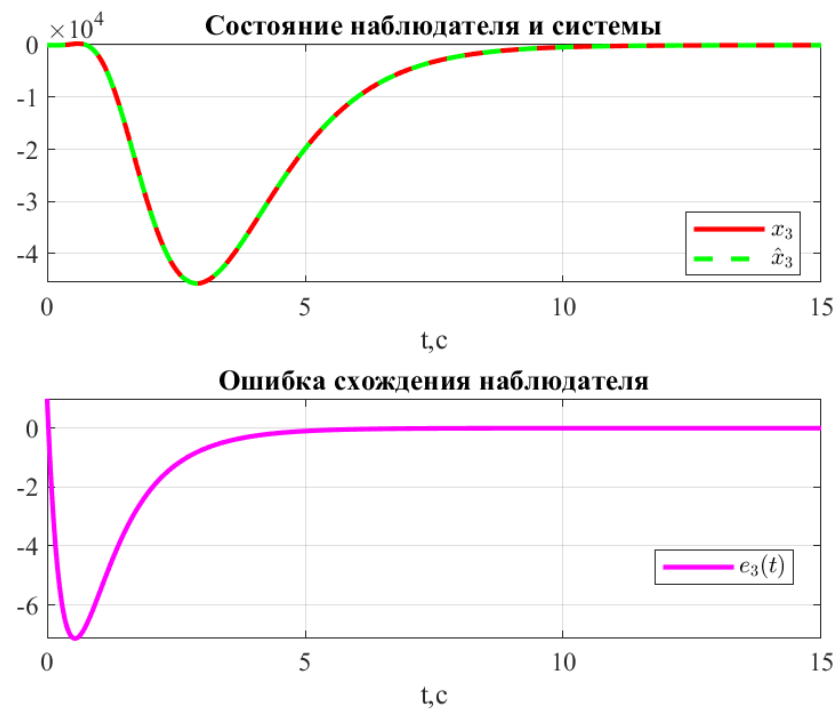


Рисунок 23 — Состояние системы и ошибка сходимости

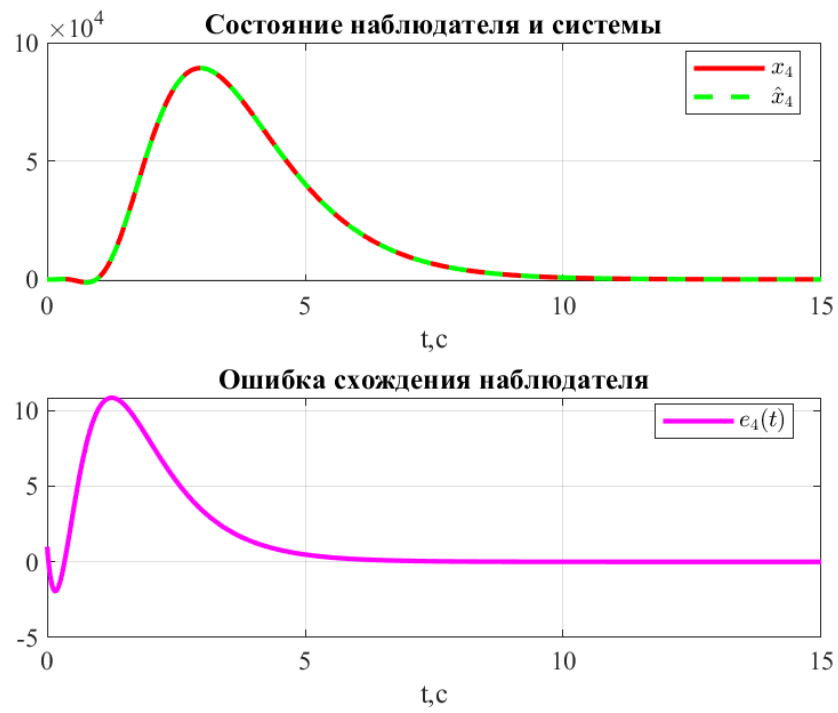


Рисунок 24 — Состояние системы и ошибка сходимости

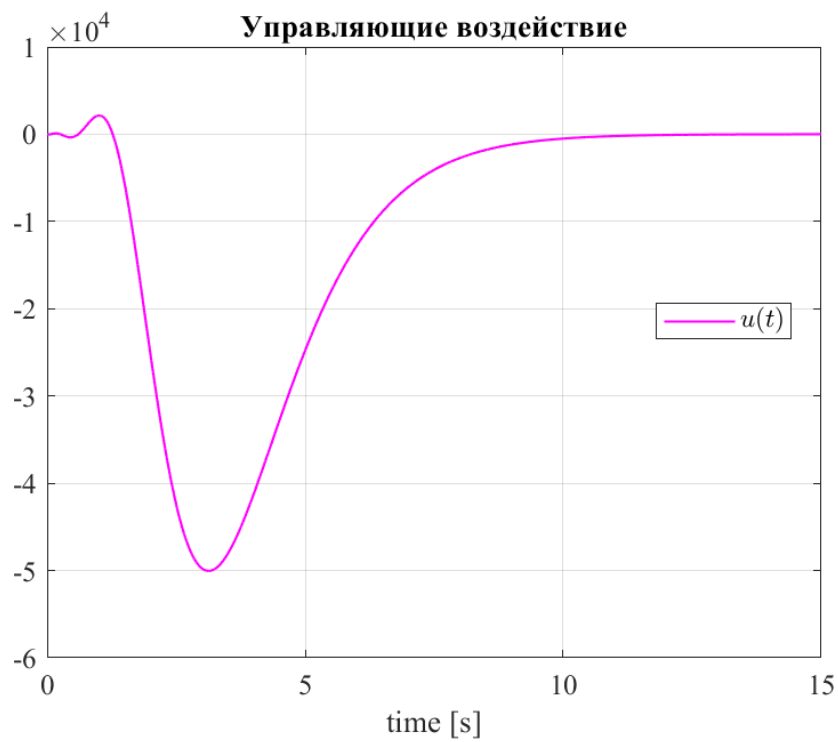


Рисунок 25 — Управление регулятора

3.2.4 Вывод

В этом задании мы синтезировали полное управление по выходу - связку наблюдателя и регулятора. В этот раз мы работали с полностью наблюдаемой и управляемой системой, поэтому мы могли использовать любой желаемый спектр у наблюдателя/регулятора. Моделирование показало, что связка отработала успешно.

4 НАБЛЮДАТЕЛЬ ПОНИЖЕННОГО ПОРЯДКА

4.1 Условие задачи

Рассмотреть систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

и выполнить следующие шаги:

- Найти собственные числа матрицы A и определить управляемость и наблюдаемость каждого из них. Сделать вывод об управляемости, стабилизируемости, наблюдаемости и обнаруживаемости системы.
- Построить схему моделирования системы, замкнутой регулятором, состоящем из наблюдателя состояния $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + (B + LD)u + L(C\hat{x} - y)$ и закона управления $u = K\hat{x}$.
- Задаться парой достижимых желаемых спектров для регулятора и наблюдателя, обеспечивающих асимптотическую устойчивость замкнутой системы.
- Синтезировать регулятор K на основании выбранного желаемого спектра, определить собственные числа матрицы $(A + BK)$ и сравнить с желаемым спектром для проверки корректности расчетов.
- Синтезировать матрицу коррекции наблюдателя L на основании выбранного же лаемого спектра, определить собственные числа матрицы $(A + LC)$ и сравнить с желаемым спектром для проверки корректности расчетов.
- Выполнить моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Построить графики формируемого регулятором управления $u(t)$, сравнительные графики $x(t)$, $\hat{x}(t)$, а также ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

4.2 Решение задачи

Параметры для объекта:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & 5 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix}^T \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad D = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4.2.1 Исследование характеристик системы

Найдём собственные числа матрицы A :

$$\sigma(A) = \{-8, 4, 8, 16\}$$

Чтобы не вычислять матрицу Хаутусу для наблюдаемости/управляемости каждого собственного числа, для начала проверим по матрице наблюдаемости/управляемости полные характеристики:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}$$
$$\text{rank}(V) = 4, \quad \text{rank}(U) = 4$$

Матрицы вышли полноранговыми, а значит наша система полностью наблюдаема/управляема по всем собственным числам и в целом. Стабилизируемость/обнаруживаемость также следует из прошлого вывода.

4.2.2 Синтез наблюдателя

Для наблюдателя пониженного порядка, то есть наблюдателя не за всеми компонентами вектора состояния нашей системы, выберем следующие матрицы Y, G :

$$G = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Очевиден её спектр: $\sigma(G) = \{-3, -3\}$. Условия на синтез наблюдателя будут теми же, что и для полного порядка, просто оперировать будем матрицами меньшими размерностями.

Получим матрицу преобразования Q , решив уравнения Сильвестра:

$$GQ - QA = YC, \quad \rightarrow \quad Q = \begin{bmatrix} 0.03 & -0.03 & 0.09 & -0.07 \\ -0.02 & 0.05 & 0.07 & -0.09 \end{bmatrix}$$

Как и в случае с полным порядком, пропускаем выход объекта и управления через динамическую систему с матрицей G и получаем что-то полезное:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= QAQ^{-1}z + QBu, \\ \dot{\hat{z}} &= G\hat{z} - Yy + (QB + YD)u \end{aligned}$$

Для управления по обратной связи нам понадобится вектор состояния, вот как он будет формироваться:

$$u = K\hat{x}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} C \\ Q \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y - Du \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

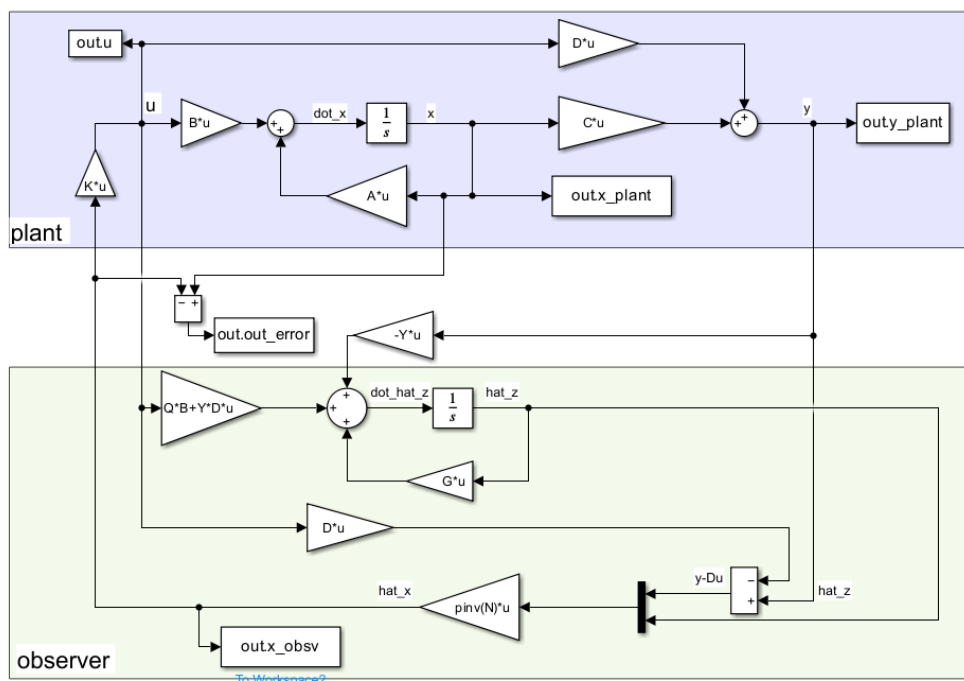


Рисунок 26 — Схема наблюдателя пониженного порядка с обратной связью по управлению

4.2.3 Синтез регулятора

Для синтеза регулятора воспользуемся матрицами Y, G из прошлого задания, коэффициенты регулятора идентичны...

$$K = \begin{bmatrix} 8.51 & -8.91 & -0.87 & -1.36 \end{bmatrix}$$

4.2.4 Моделирование

Выполним моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$: Как можно заметить, ошибка наблюдателя почти сразу становится предельно мала, поэтому на векторе состояние наблюдатель почти сразу сливается с компонентами вектора состояния...

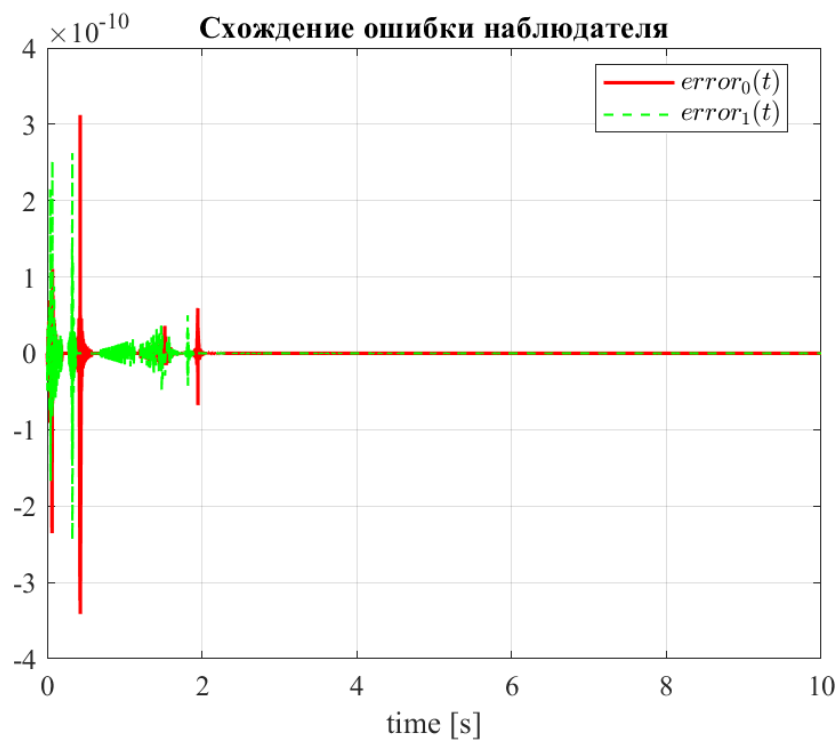


Рисунок 27 — Ошибка наблюдателя

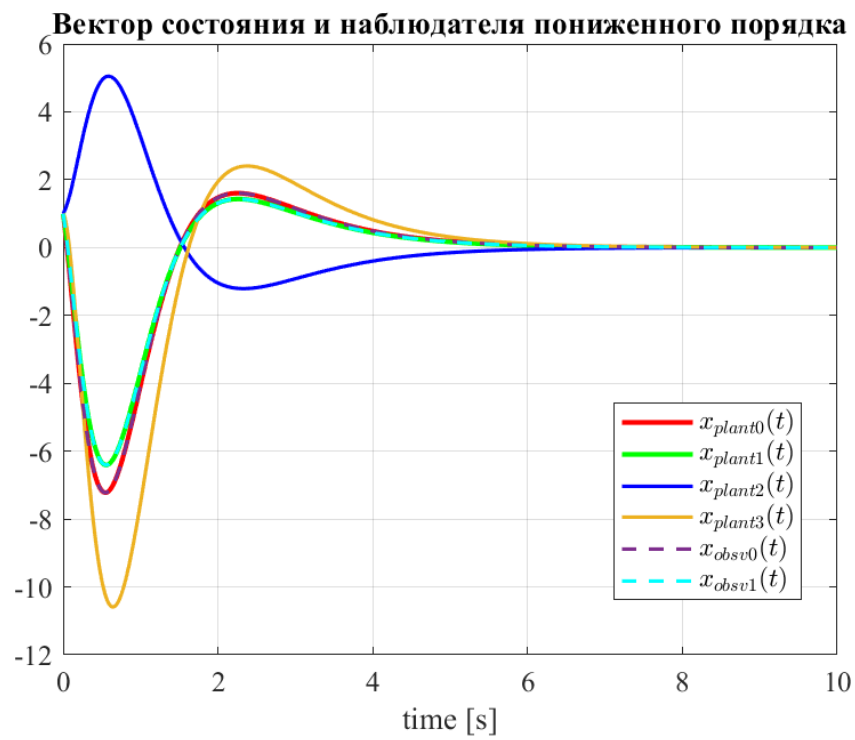


Рисунок 28 — Состояния системы - сравнение

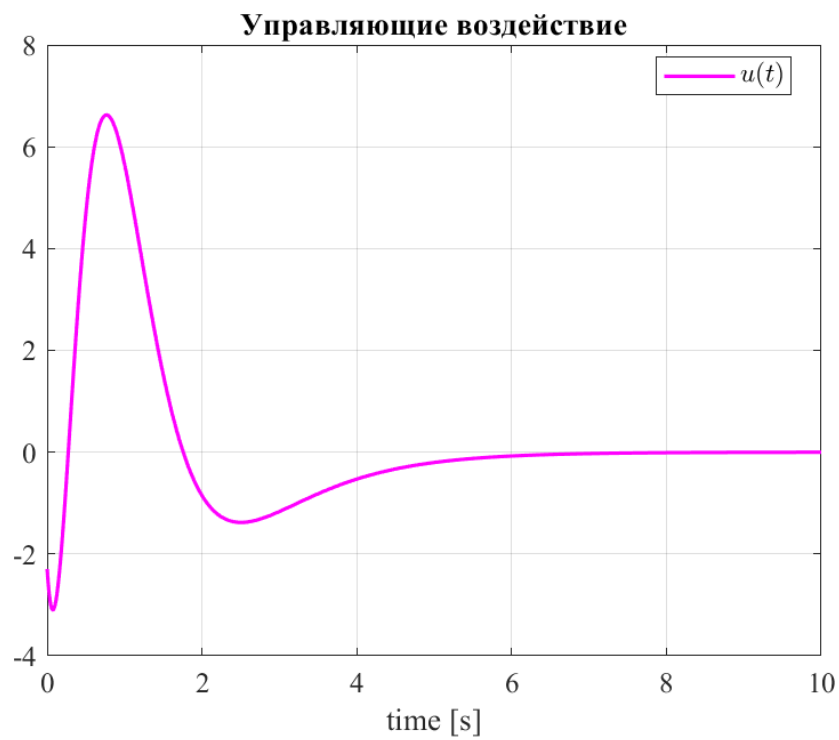


Рисунок 29 — Управление регулятора

4.2.5 Вывод

В этом задании мы синтезировали связку модального наблюдателя пониженного порядка и регулятора. Здесь мы работали с полностью наблюдаемой и управляемой системой, поэтому мы могли использовать любой желаемый спектр у наблюдателя/регулятора. При моделировании мы отслеживали всего лишь 2 компоненты состояния системы, хотя она состоит из 4-х, для этого мы использовали другой подход к синтезу наблюдателя, но по-прежнему основанный на решении уравнения Сильвестра, который нам позволил найти матрицу преобразования Q .

Моделирование показало, что связка отработала успешно.

5 ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

В ходе выполнения лабораторной работы был рассмотрен синтез модального регулятора и наблюдателя (полный/пониженного порядка) по отдельности, а также вместе (стандартный линейный регулятор по выходу). Синтез осуществлялся при помощи метода уравнения Сильвестра, синтезированные компоненты системы проверялись при помощи компьютерного моделирования, наблюдатель успешно сходил к истинной системе, а регулятор успешно приводил в положение равновесия.

Использовал связку *Live-script* + *Matlab*, все исходные материалы, использованные в работе можно найти в [репозитории](#).