

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ

по лабораторной работе №2, вариант - 2

Линейные системы автоматического управления

по теме:

СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ, УСТОЙЧИВОСТЬ

Студент:

Группа R3336

Поляков А.А.

Предподаватель:

к.т.н., доцент

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1 ИСХОДНЫЙ КОД

Запускал все симуляции симулинка через Live-script матлабовские, там же можно взглянуть на графики, в [репозитории](#) можно найти исходники.

2 СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ

2.1 Структурная схема системы

Посмотрим на систему 2-го порядка, заданную дифференциальным уравнением:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

Для симуляции все коэффициенты и начальные условия автоматически подставлялись, подтягиваясь из скрипта матлаба. В моём случае для второго варианта получатся следующие шесть экспериментов:

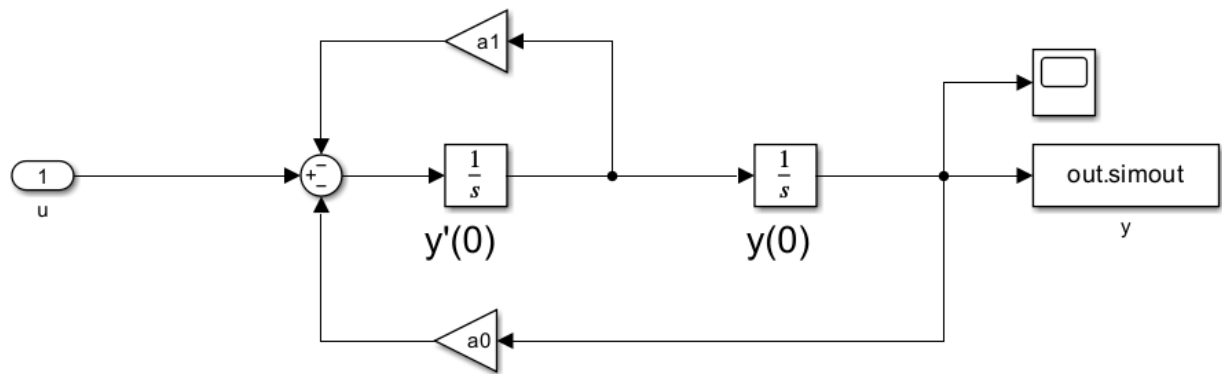


Рисунок 1 — Структурная схема - система 2-го порядка

2.2 1-й эксперимент

Так как мы решаем задачу для свободной составляющей движения системы, то учтём, что всегда будем подавать нулевой сигнал: $u = 0$:

$$\ddot{y}_{free} + a_1 \dot{y}_{free} + a_0 y_{free} = 0$$

Чтобы получить коэффициенты a_0, a_1 , которые нам нужны для симуляции, будет достаточно вспомнить две вещи - сопоставление характеристического уравнения и теорему Виета для квадратного уравнения:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Но так как мы заранее знаем корни, то решим обратную задачу с помощью теоремы Виета для нормированного случая:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = a_0$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) = a_1$$

В следующих экспериментах я не буду повторять эти выкладки, а сразу буду писать коэффициенты a_0, a_1 .

Первая пара коэффициентов на подходе:

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1.5$$

$$a_0 = 1.5, a_1 = 2.5$$

Для таких корней мы получим следующее аналитическое выражение свободного движения(воспользовались таблицей с модами):

$$y_{free}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-1.5t}$$

Вычислим константы, используя начальные условия:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 1 \quad \dot{y}(0) = -c_1 - 1.5c_2 = 0$$

$$c_2 = -2, \quad c_1 = 3$$

В итоге получим:

$$y_{free}(t) = 0.6e^{-t} + 0.4e^{-1.5t}$$

На основании корневого критерия мы можем сказать, что асимптотически устойчива, так как все корни имеют отрицательную вещественную часть.

Получим следующие результаты моделирования:

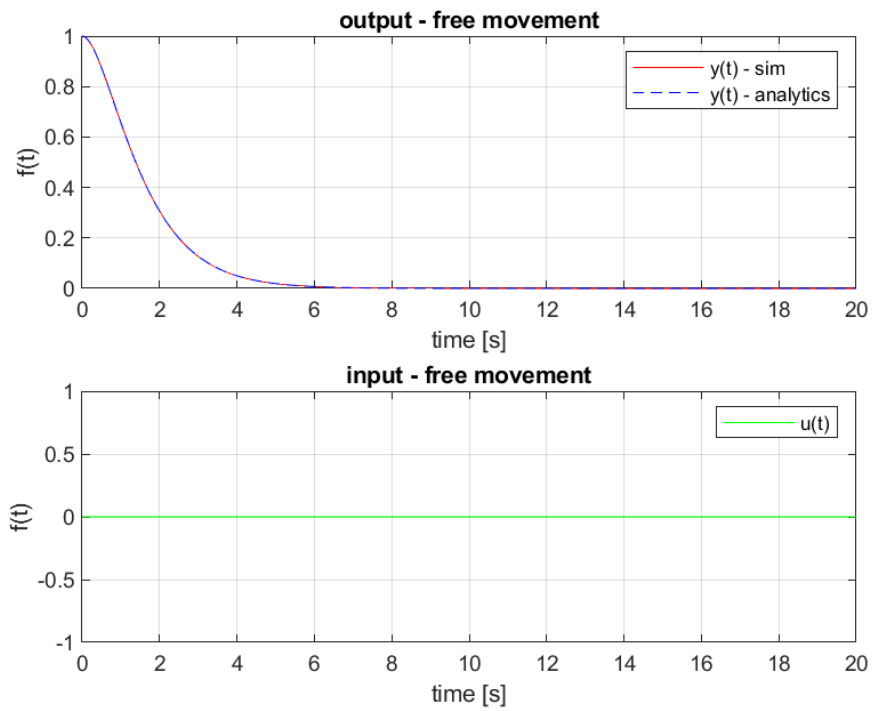


Рисунок 2 — Симуляция - сопоставляем графики сигналов, аналитические и моделирования

2.2.1 Выводы

На основе эксперимента и аналитических расчётов мы можем увидеть, что данная система имеет **асимптотическую устойчивость**.

2.3 2-й эксперимент

$$\lambda_{3,4} = -0.6 \pm 4i$$

$$a_0 = 0.36, a_1 = 1.2$$

Для таких корней мы получим следующее аналитическое выражение свободного движения(воспользовались таблицей с модами):

$$y_{free}(t) = e^{-0.6t}(c_1 \sin(4t) + c_2 \cos(4t))$$

Вычислим константы, используя начальные условия:

$$y(0) = c_2 = 1 \quad \dot{y}(0) = 4c_1 - 0.6c_2 = 0$$

$$c_2 = 1, \quad c_1 = \frac{3}{20}$$

В итоге получим:

$$y_{free}(t) = \frac{3}{20}e^{-0.6t} \sin(4t) + e^{-0.6t} \cos(4t)$$

На основании корневого критерия мы можем сказать, что асимптотически устойчива, так как все корни имеют отрицательную вещественную часть.

Получим следующие результаты моделирования:

2.3.1 Выводы

На основе эксперимента и аналитических расчётов мы можем увидеть, что данная система имеет **асимптотическую устойчивость**.

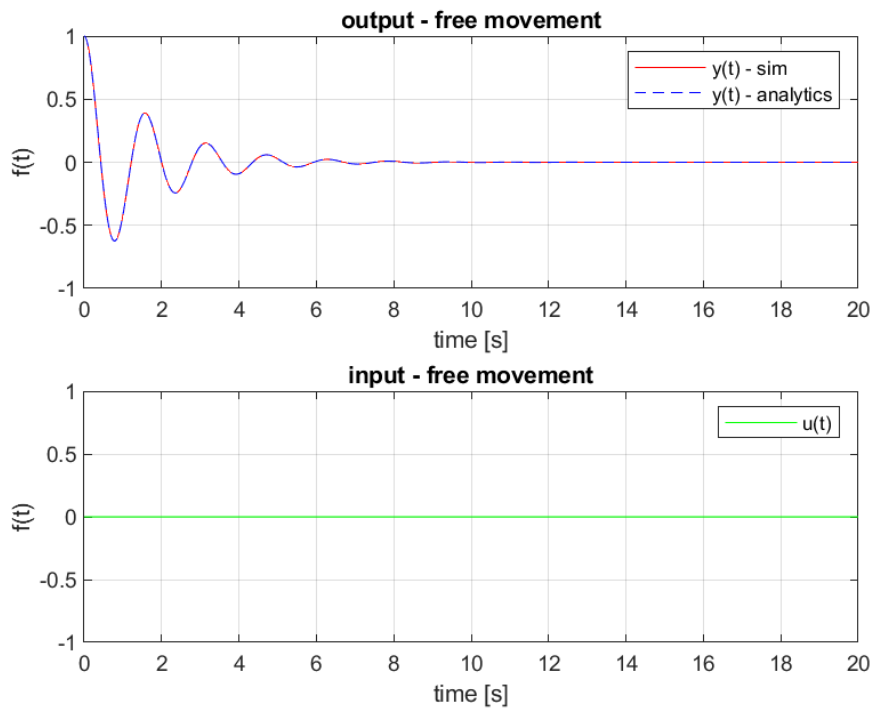


Рисунок 3 — Симуляция - сопоставляем графики сигналов, аналитические и моделирования

2.4 3-й эксперимент

$$\lambda_{5,6} = \pm 4i$$

$$a_0 = 4, a_1 = 0$$

Для таких корней мы получим следующее аналитическое выражение свободного движения(воспользовались таблицей с модами):

$$y_{free}(t) = c_1 \sin(4t) + c_2 \cos(4t)$$

Вычислим константы, используя начальные условия:

$$y(0) = c_2 = 1 \quad \dot{y}(0) = 4c_1 = 0$$

$$c_2 = 1, \quad c_1 = 0$$

В итоге получим:

$$y_{free}(t) = \sin(4t)$$

На основании корневого критерия мы можем сказать, что система устойчива по Ляпунову, так как все корни имеют нулевую вещественную часть.

Получим следующие результаты моделирования:

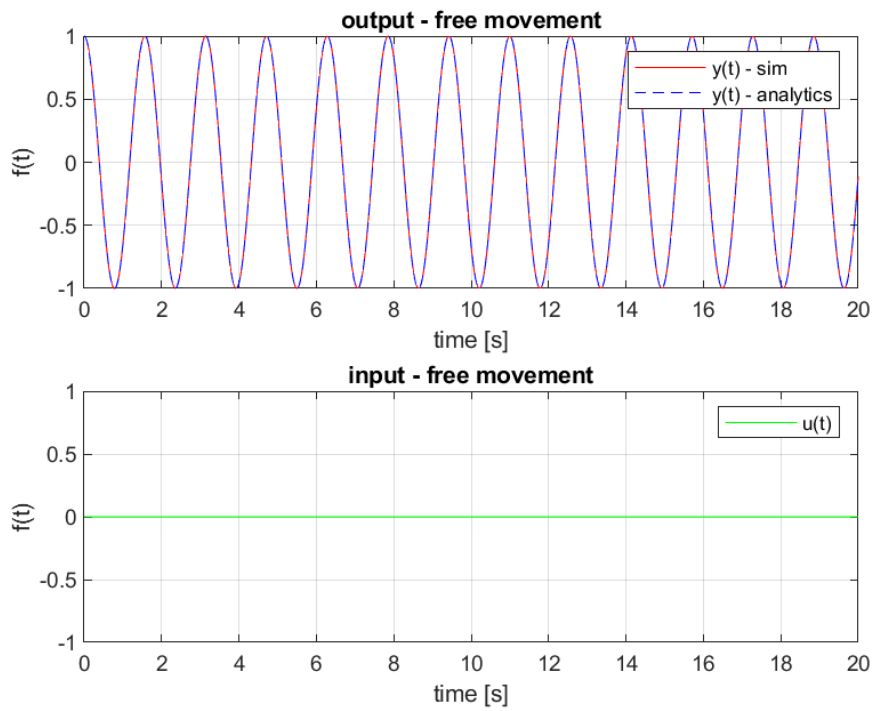


Рисунок 4 — Симуляция - сопоставляем графики сигналов, аналитические и моделирования

2.4.1 Выводы

На основе эксперимента и аналитических расчётов мы можем увидеть, что данная система имеет **устойчивость по Ляпунову**.

2.5 4-й эксперимент

$$\lambda_{7,8} = 0.6 \pm 4i$$

$$a_0 = 0.36, a_1 = -1.2$$

Для таких корней мы получим следующее аналитическое выражение свободного движения(воспользовались таблицей с модами):

$$y_{free}(t) = e^{0.6t}(c_1 \sin(4t) + c_2 \cos(4t))$$

Вычислим константы, используя начальные условия:

$$y(0) = c_2 = 0.05 \quad \dot{y}(0) = 2c_1 + 3c_2 = 0$$

$$c_2 = 0.05, \quad c_1 = -\frac{3}{400}$$

В итоге получим:

$$y_{free}(t) = e^{0.6t}\left(-\frac{3}{400}\sin(4t) + \frac{1}{20}\cos(4t)\right)$$

На основании корневого критерия мы можем сказать, что система неустойчива, так как хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть.

Получим следующие результаты моделирования:

2.5.1 Выводы

На основе эксперимента и аналитических расчётов мы можем увидеть, что данная система **неустойчива**.

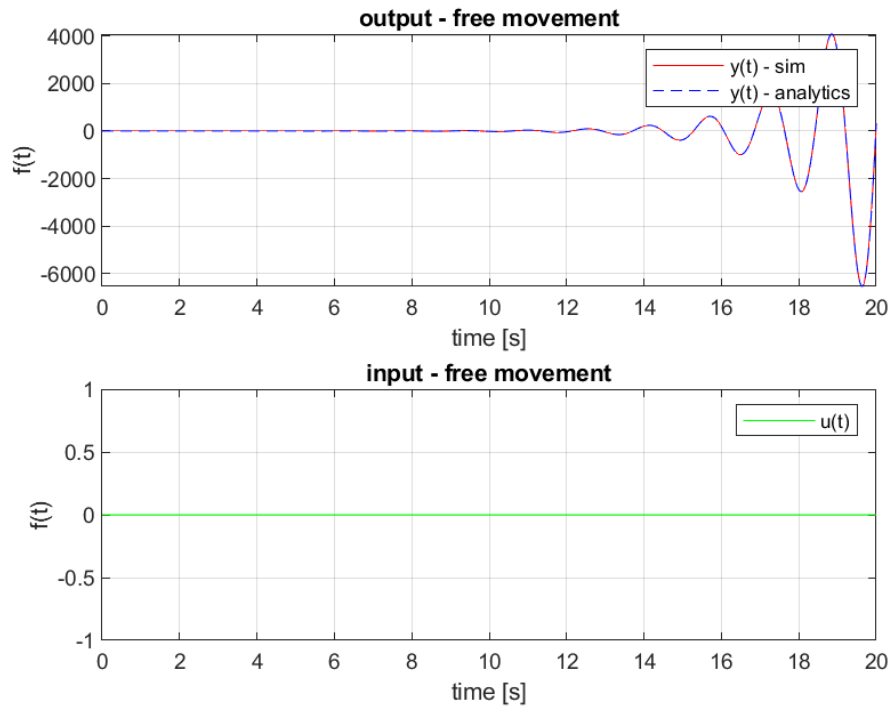


Рисунок 5 — Симуляция - сопоставляем графики сигналов, аналитические и моделирования

2.6 5-й эксперимент

$$\lambda_9 = 1, \lambda_{10} = 1.5$$

$$a_0 = 1.5, a_1 = -2.5$$

Для таких корней мы получим следующее аналитическое выражение свободного движения(воспользовались таблицей с модами):

$$y_{free}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{1.5t}$$

Вычислим константы, используя начальные условия:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0.05 \quad \dot{y}(0) = c_1 + 1.5c_2 = 0$$

$$c_2 = -\frac{1}{10}, \quad c_1 = \frac{3}{20}$$

В итоге получим:

$$y_{free}(t) = \frac{3}{20} e^t - \frac{1}{10} e^{1.5t}$$

На основании корневого критерия мы можем сказать, что система неустойчива, так как хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть.

Получим следующие результаты моделирования:

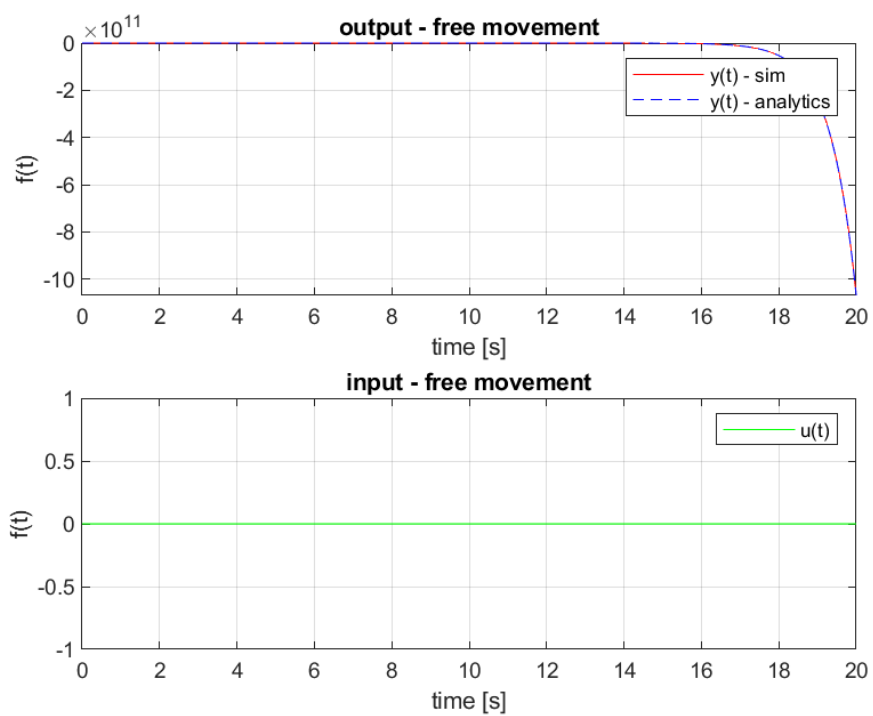


Рисунок 6 — Симуляция - сопоставляем графики сигналов, аналитические и моделирования

2.6.1 Выводы

На основе эксперимента и аналитических расчётов мы можем увидеть, что данная система **неустойчива**.

2.7 6-й эксперимент

$$\lambda_{11} = -0.2, \lambda_{12} = 0.2$$

$$a_0 = -0.04, a_1 = 0$$

Для таких корней мы получим следующее аналитическое выражение свободного движения(воспользовались таблицей с модами):

$$y_{free}(t) = c_1 e^{-0.2t} + c_2 e^{0.2t}$$

Вычислим константы, используя начальные условия:

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0 \quad \dot{y}(0) = -0.2c_1 + 0.2c_2 = 0.1$$

$$c_2 = \frac{1}{4}, \quad c_1 = -\frac{1}{4}$$

В итоге получим:

$$y_{free}(t) = -\frac{1}{4}e^{-0.2t} + \frac{1}{4}e^{0.2t}$$

На основании корневого критерия мы можем сказать, что система неустойчива, так как хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть.

Получим следующие результаты моделирования:

2.7.1 Выводы

На основе эксперимента и аналитических расчётов мы можем увидеть, что данная система **неустойчива**.

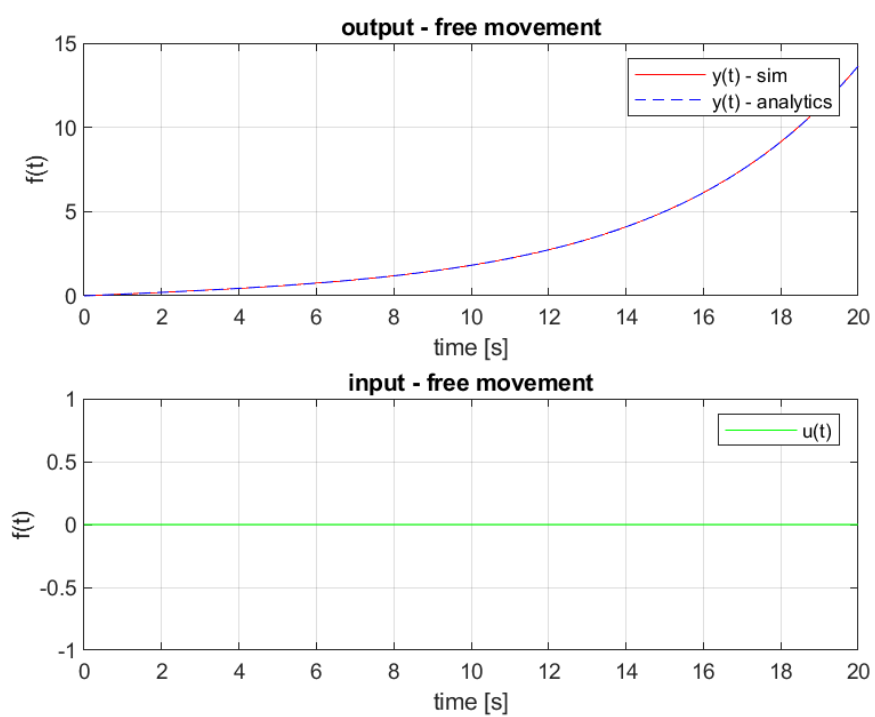


Рисунок 7 — Симуляция - сопоставляем графики сигналов, аналитические и моделирования

3 ОБЛАСТЬ УСТОЙЧИВОСТИ

3.1 Изучаем пространство параметров

В этом задании мы будем работать со следующей структурной схемой: Объединим две передаточные функции из схемы выше в одну:

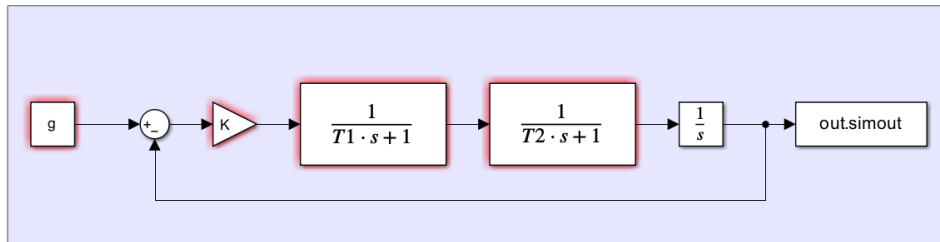


Рисунок 8 — Структурная схема - система 3-го порядка

$$W_{12}(s) = \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Вспомним как выглядела передаточная функция из первого задания, которую можно упростить, заменив уравнение решениями через лямбды, которые давали нам для экспериментов, так как по заданию мы смотрим на первый эксперимент, то упростим при помощи λ_1, λ_2 :

$$W_3(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{1}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)}$$

Приравняем передаточные функции, тогда сможем найти T_1, T_2 , при которых полюса(читать как "знаменатель") соответствующих передаточных функций

совпадут с первым набором корней:

$$\frac{1}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} = \frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} = \dots$$

$$\begin{cases} s = \lambda_1 \\ s = \lambda_2 \\ T_1s + 1 = 0 \\ T_2s + 1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1\lambda_1 + 1 = 0 \\ T_2\lambda_2 + 1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 = -\frac{1}{\lambda_1} = -\frac{1}{-1} = 1 \\ T_2 = -\frac{1}{\lambda_2} = -\frac{1}{-1.5} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Теперь зафиксируем $T_2 = \frac{2}{3}$ и зададимся вопросом устойчивости в пространстве параметров K, T_1 в смысле критерия Гурвица.

Для этого восстановим дифференциальное уравнение из структурной схемы задания, для начала зафиксируем, что g - входной сигнал, а y - выходной, s - оператор дифференцирования:

$$y = \frac{1}{s} \left(\frac{1}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)} \left(K(g - y) \right) \right)$$

$$y = \frac{K(g - y)}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$$y = \frac{K(g - y)}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

$$y = \frac{K(g - y)}{T_1T_2s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s}$$

Теперь раскроем передаточную функцию, также вспомним, что мы работаем со свободным движением, поэтому $g = 0$ будет:

$$K(g - y) = T_1T_2s^3[y] + (T_1 + T_2)s^2[y] + s[y]$$

$$g = y + \frac{1}{K} \left(T_1T_2s^3[y] + (T_1 + T_2)s^2[y] + s[y] \right)$$

$$y + \frac{1}{K} \left(T_1T_2s^3[y] + (T_1 + T_2)s^2[y] + s[y] \right) = 0 \quad \left| : \frac{K}{T_1T_2} \right.$$

$$s^3[y] + \frac{T_1 + T_2}{T_1T_2}s^2[y] + \frac{1}{T_1T_2}s[y] + \frac{K}{T_1T_2}y = 0$$

Тогда получим следующие коэффициенты системы:

$$a_2 = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}, \quad a_1 = \frac{1}{T_1 T_2}, \quad a_0 = \frac{K}{T_1 T_2};$$

Критерий Гурвица для систем третьего порядка формулируется следующим образом:

$$\begin{cases} a_0, a_1, a_2 > 0 \\ a_2 a_1 > a_0 \end{cases}$$

В нашем случае слагаемые системы будут выглядеть так (читать горизонтально):

$$\begin{cases} \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} > 0, & \frac{1}{T_1 T_2} > 0, & \frac{K}{T_1 T_2} > 0 \\ \frac{T_1 + T_2}{(T_1 T_2)^2} > \frac{K}{T_1 T_2} \end{cases}$$

Немного упростим эту громоздкую систему, сразу подставив $T_2 = \frac{2}{3}$:

$$\begin{cases} T_1 > 0 \\ K > 0 \\ \frac{T_1 + \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} T_1} > K \end{cases}$$

Удобно мы сможем построить эту систему в программе *Desmos*, область устойчивости обозначена синим цветом, а граница - красным:

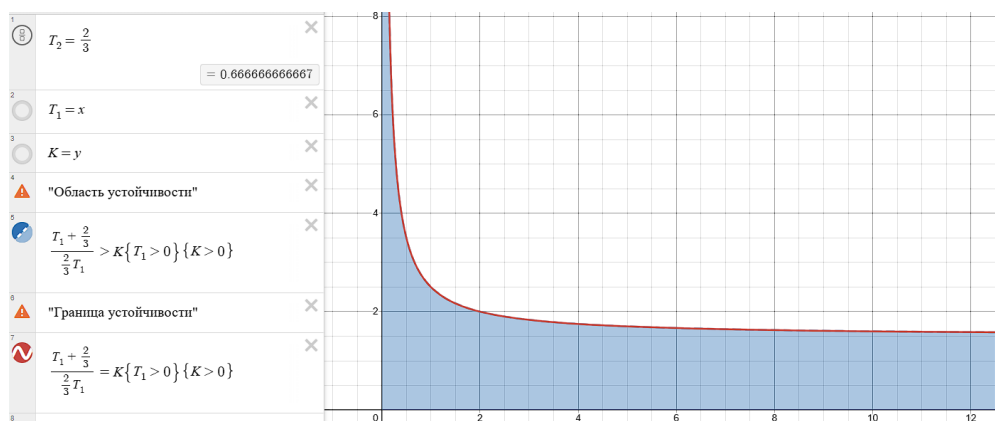


Рисунок 9 — Пространство параметров $K(T_1)$ - область и граница устойчивости

Далее по аналогии аналитически определим границу и область устойчивости в пространстве параметров $K(T_2)$, то есть уже при фиксированном $T_1 = 1$. Моделирование осуществляем при $u(t) = 1$ Теперь система будет

выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} T_2 > 0 \\ K > 0 \\ \frac{T_2+1}{T_2} > K \end{cases}$$

Тогда пространство параметров будет выглядеть вот так, область устойчивости обозначена синим цветом, а граница - красным:

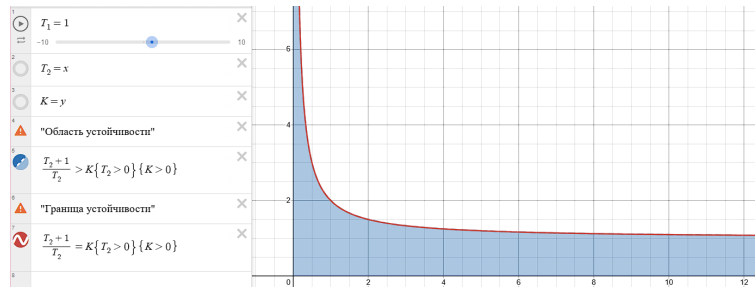


Рисунок 10 — Пространство параметров $K(T_2)$ - область и граница устойчивости

3.2 Симулируем устойчивости

Зададимся тремя наборами параметров K, T_1, T_2 , которые соответствуют трём устойчивостям. При выборе коэффициентов я опирался на пространства параметров, полученные выше...

3.2.1 Асимптотически устойчивая система

$$K = 0.5, \quad T_1 = 1, \quad T_2 = 5$$

Система **асимптотически устойчива**, так как сходится к "нулю".

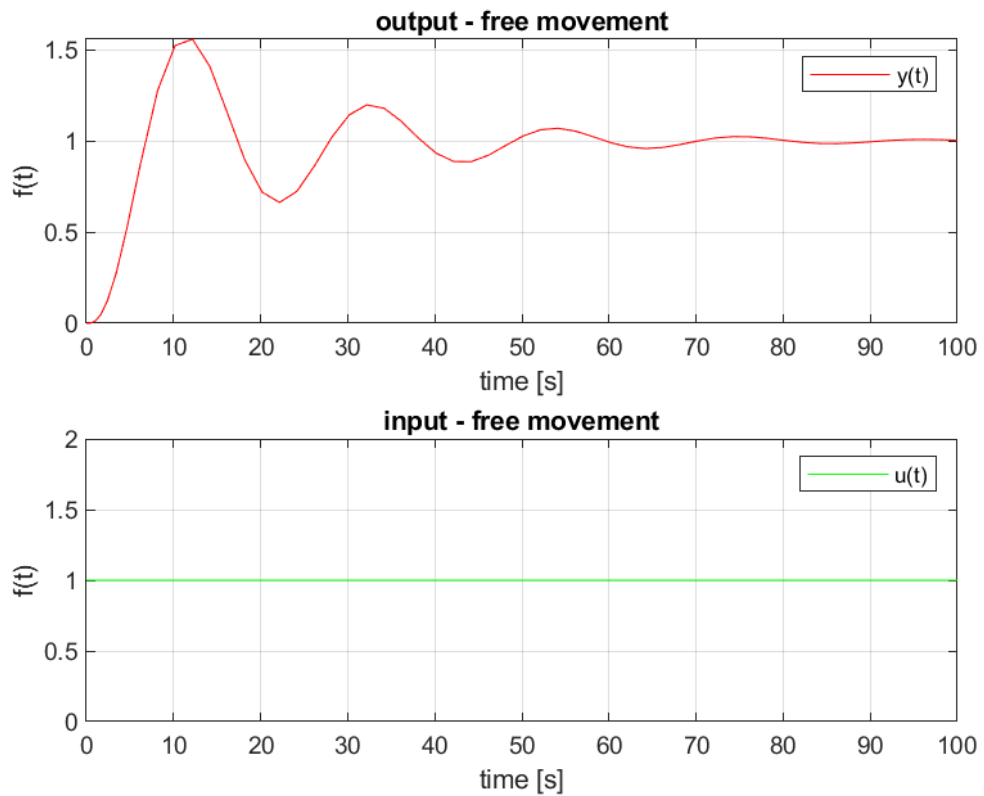


Рисунок 11 — Асимптотически устойчивая система

3.2.2 Гранично устойчивая система

$$K = 9, \quad T_1 = 1, \quad T_2 = \frac{1}{8}$$

Система соответствует **устойчивости по Ляпунову**, так как ограничена сверху и снизу.

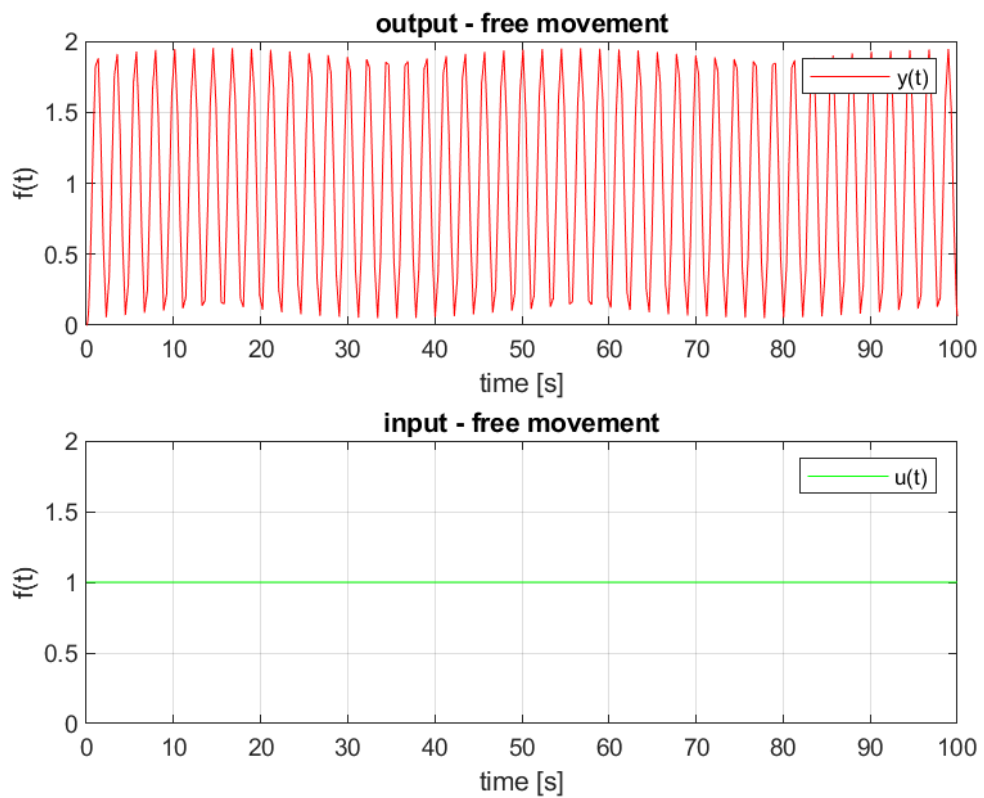


Рисунок 12 — Гранично устойчивая система

3.2.3 Неустойчивая система

$$K = 4, \quad T_1 = 4, \quad T_2 = \frac{2}{3}$$

Система **неустойчива**, так как улетает в бесконечность.

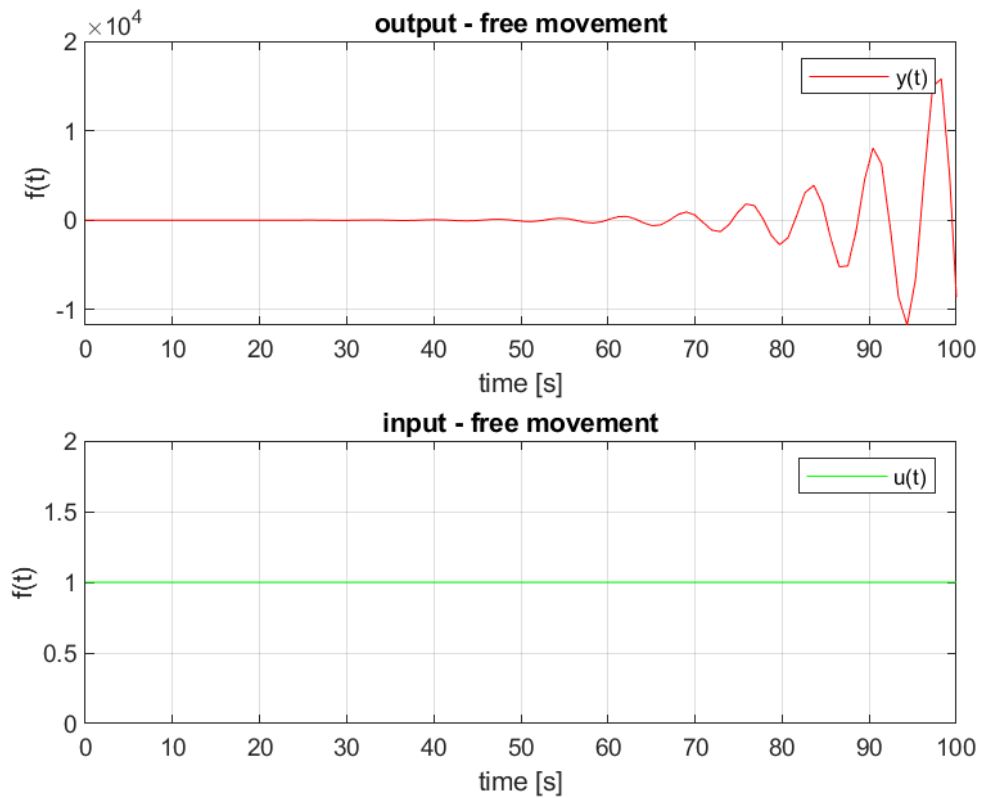


Рисунок 13 — Неустойчивая система

3.3 Выводы

В итоге, мы изучили систему третьего порядка посредством осмотра её пространства параметров при одном фиксированном значении. Это дало нам понимания границы и области устойчивости системы, которые мы можем использовать при более сложном анализе. Но в нашем случае мы воспользовались этими портретами, чтобы быстро определить три наборы коэффициентов, при котором мы показали три типа устойчивости - асимптотическую, граничную, и неустойчивость.

4 АВТОНОМНЫЙ ГЕНЕРАТОР

4.1 Постановка задачи

В этом задании нам нужно добиться желаемого выхода, в случае второго варианта он будет таковым:

$$g_{wanted}(t) = g_w(t) = \cos(-2t) + e^{6t} \sin(5t)$$

А получить желаемый сигнал нам нужно посредством подбора параметров $A, C, x(0)$ для системы вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax, \\ g = Cx; \end{cases}$$

Выход системы мы рассматриваем при свободном движении, и он должен будет совпасть с $g_w(t)$.

Проверку наших матриц с желаемым сигналом мы будем осуществлять с помощью следующей структурной схемы:

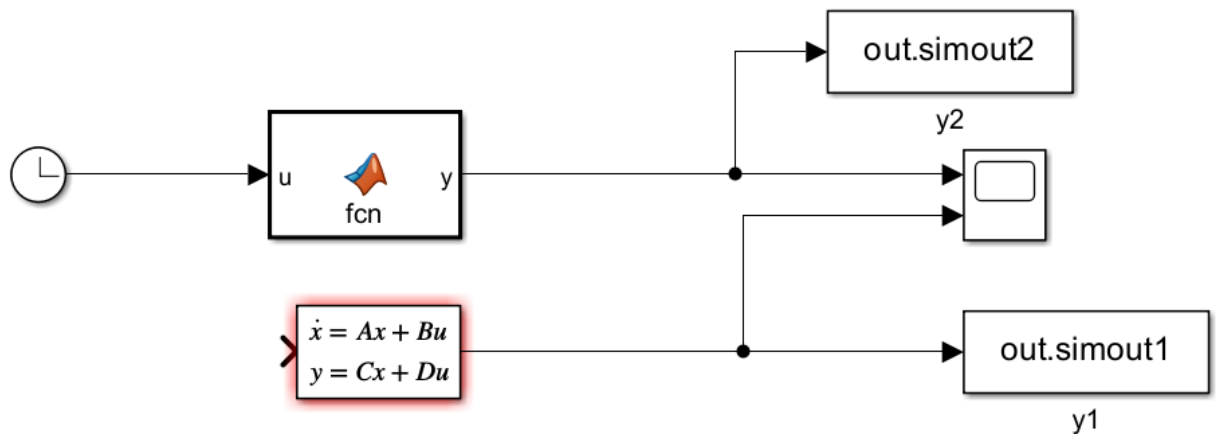


Рисунок 14 — Структурная схема - проверка

4.2 Восстановление матриц

Свободному движению системы соответствует следующая система:

$$\begin{cases} x_{free}(t) = e^{At}x(0), \\ y_{free}(t) = Ce^{At}x(0); \end{cases}$$

, где матрицы $C, x(0)$ - параметры системы:

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Пойдём методом "Жордана для этого посмотрим какие характеристические корни соответствуют решению $g_w(t)$:

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i, \quad \lambda_{3,4} = 6 \pm 5i$$

, где первая пара корней соответствует косинусу, а вторая - экспонента с синусом. Тогда составим следующую Жорданову матрицу по корням:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & +2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

Тогда возьмём матричную экспоненту, а после домножим на начальные условия:

$$e^{At}x(0) = \exp\left(\begin{bmatrix} 0 & +2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 6 \end{bmatrix} t\right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Упростим выражение:

$$e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} \cos(-2t) & \sin(-2t) & 0 & 0 \\ -\sin(-2t) & \cos(-2t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{6t}\cos(5t) & e^{6t}\sin(5t) \\ 0 & 0 & -e^{6t}\sin(5t) & e^{6t}\cos(5t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \dots$$

$$e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} a_1\cos(2t) - a_2\sin(2t) \\ a_1\sin(2t) + a_2\cos(2t) \\ e^{6t}(a_3\cos(5t) + a_4\sin(5t)) \\ e^{6t}(-a_3\sin(5t) + a_4\cos(5t)) \end{bmatrix}$$

Найдём выход системы:

$$y_{free}(t) = Ce^{At}x(0) = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1\cos(2t) - a_2\sin(2t) \\ a_1\sin(2t) + a_2\cos(2t) \\ e^{6t}(a_3\cos(5t) + a_4\sin(5t)) \\ e^{6t}(-a_3\sin(5t) + a_4\cos(5t)) \end{bmatrix}$$

$$y_{free}(t) = a_1c_1\cos(2t) - c_1a_2\sin(2t) + a_1c_2\sin(2t) + c_2a_2\cos(2t) + e^{6t}c_3(a_3\cos(5t) + a_4\sin(5t)) + e^{6t}c_4(a_4\cos(5t) - a_3\sin(5t))$$

Сгруппируем слагаемые несколько иным образом:

$$y_{free}(t) = (a_1c_2 - c_1a_2)\sin(2t)(a_1c_1 + c_2a_2)\cos(2t) + e^{6t}\cos(5t)(c_3a_3 + c_4a_4) + e^{6t}\sin(5t)(c_3a_4 - a_3c_4)$$

Посмотрим на желаемый выходной сигнал, и тогда предъявим следующие требования к коэффициентам:

$$\begin{cases} a_1c_2 = a_2c_1 \\ a_2c_2 + a_1c_1 = 1 \\ a_3c_3 + a_4c_4 = 1 \\ a_4c_3 = a_3c_4 \end{cases}$$

Как можно заметить, мы не сможем найти эти восемь коэффициентов единственным образом, здесь существует бесконечное множество их комбинаций,

поэтому просто выберем удобную:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{25} & \frac{4}{25} \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Мы смогли получить параметры $A, C, x(0)$, теперь подставим их в блок *State – Space* симулинка, а после сравним с заданием $g_w(t)$ через матлабовскую функцию: Они совпали, это прекрасно!

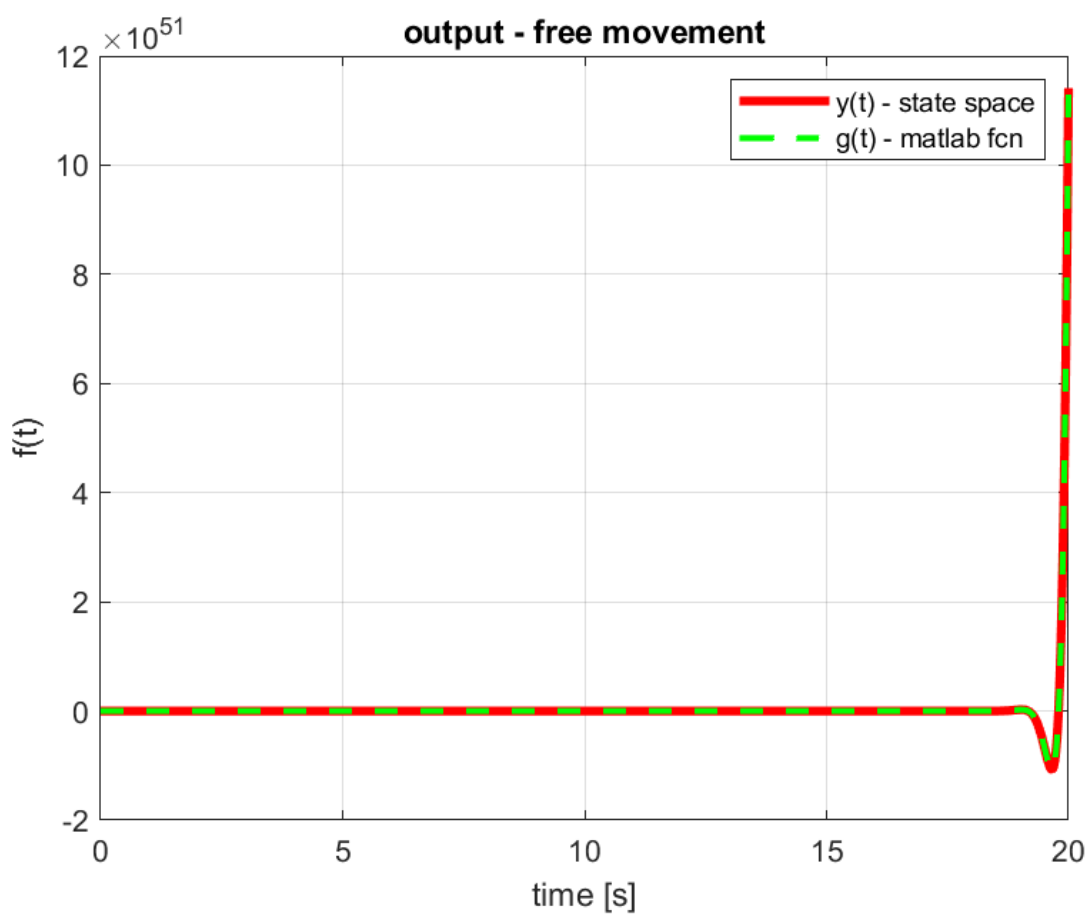


Рисунок 15 — Симуляция - сравнение нашего сигнала с желаемым

5 ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

В этой работе мы познакомились со свободным движением, самым простым и очевидным способом управлять(миром) системами - просто отпустить её и ничего не делать!

В третьем задании мы посмотрели на обратную задачу управления - нам дают в руки конкретный двигатель, который управляется такой-то математической функцией, а мы в свою очередь некоторыми методами нашли параметры системы, однозначно описывающие её, теперь по этим матрицам мы сможем делать какие-то выводы о системе.

В первом и втором задании мы посмотрели на основные типы устойчивости при свободном движении, и поняли, что пространство параметров позволяет нам гибко смотреть на систему и управлять её.