

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ

по лабораторной работе №4, вариант - 2

*Линейные системы автоматического управления*

по теме:

ТОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ, АСТАТИЗМЫ И РЕГУЛЯТОРЫ

Студент:

*Группа R3336*

*Поляков А.А.*

Предподаватель:

*к.т.н., доцент*

*Пашенко А.В.*

Санкт-Петербург  
2024

## СОДЕРЖАНИЕ

1	СТАБИЛИЗАЦИЯ С ИДЕАЛЬНЫМ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМ ЗВЕНОМ .....	3
2	СТАБИЛИЗАЦИЯ С РЕАЛЬНЫМ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМ ЗВЕНОМ .....	7
3	СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА (П-РЕГУЛЯТОР).....	10
3.1	Стационарный режим работы .....	10
3.2	Движение с постоянной скоростью .....	14
4	СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (И-РЕГУЛЯТОР).....	18
4.1	Стационарный режим работы .....	18
4.2	Движение с постоянной скоростью .....	21
4.3	Движение с постоянным ускорением .....	25
5	СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (ПИ-РЕГУЛЯТОР).....	29
5.1	Движение с постоянной скоростью .....	29
5.2	Движение за гармоническим сигналом .....	33
6	СЛЕЖЕНИЕ ЗА ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ (РЕГУЛЯТОР ОБЩЕГО ВИДА) .....	37
7	ОБЩИЕ ВЫВОДЫ .....	41

# 1 СТАБИЛИЗАЦИЯ С ИДЕАЛЬНЫМ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМ ЗВЕНОМ

Перед нами объект управления 2-го порядка, заданный дифференциальным уравнением:

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = u$$

Придумаем такие  $a_2, a_1, a_0$ , чтобы система содержала хотя бы один неустойчивый полис.

Воспользуемся для этого старой доброй - теоремой Виета:

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = \frac{a_0}{a_2} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{a_1}{a_2} \end{cases}$$

Допустим...

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = \frac{-3}{1} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{-2}{1} \end{cases}$$

Тогда получаем следующие коэффициенты:

$$\lambda_1 = 3$$

$$\lambda_2 = -1,$$

$$a_0 = -3,$$

$$a_1 = -2,$$

$$a_2 = 1$$

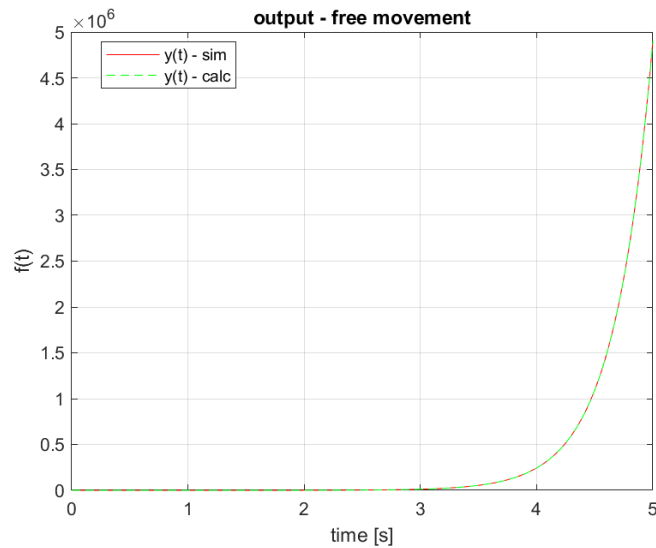


Рисунок 1 — Симуляция - свободное движение,  $\dot{y}(0) = 3, y(0) = 3$

В этом случае мы получим следующее аналитическое выражение, уже учитывая прошлые начальные условия:

$$y_{open}(t) = 1.5(e^{-t} + e^{3t})$$

Как можно заметить по графику выше, результаты симуляции и аналитический расчётов совпадут.

Рассмотрим ПД-регулятор:

$$u = k_0 y + k_1 \dot{y}$$

Получим следующую схему для нашей замкнутой системы с ПД-регулятором в режиме стабилизации:

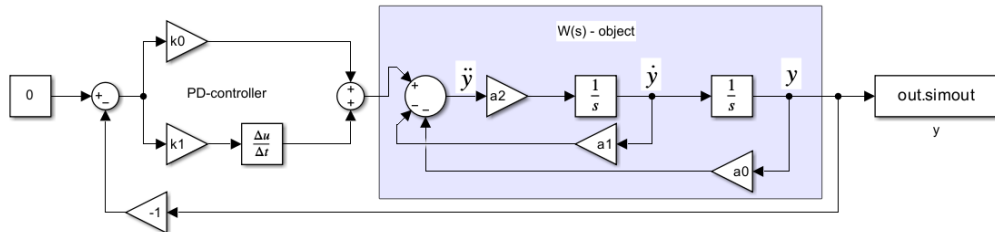


Рисунок 2 — Структурная схема - замкнутая система с ПД-регулированием

Выполним некоторые преобразования над уравнением системы, чтобы воспользоваться критерием Гурвица:

$$\begin{aligned} a_2 \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y &= k_0 y + k_1 \dot{y} \\ a_2 \ddot{y} + (a_1 - k_1) \dot{y} + (a_0 - k_0) y &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{a_1 - k_1}{a_2} \dot{y} + \frac{a_0 - k_0}{a_2} y &= 0 \end{aligned}$$

Следуя критерию, получим следующие неравенства в общем виде:

$$\begin{cases} \frac{a_1 - k_1}{a_2} > 0, \\ \frac{a_0 - k_0}{a_2} > 0 \end{cases}$$

В нашем случае они чуть упростятся:

$$\begin{aligned} k_1 &\in (-\infty, -2), \\ k_0 &\in (-\infty, -3) \end{aligned}$$

Возьмём конкретные значения параметра, чтобы провести моделирование, начальные условия возьмём такие же, как в прошлом опыте:

$$k_1 = -4, k_0 = -6$$

В этом случае мы получим следующее аналитическое выражение, уже учитывая прошлые начальные условия:

$$y_{closed}(t) = e^{-t} (3 \cos(\sqrt{2}t) + \frac{6}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t))$$

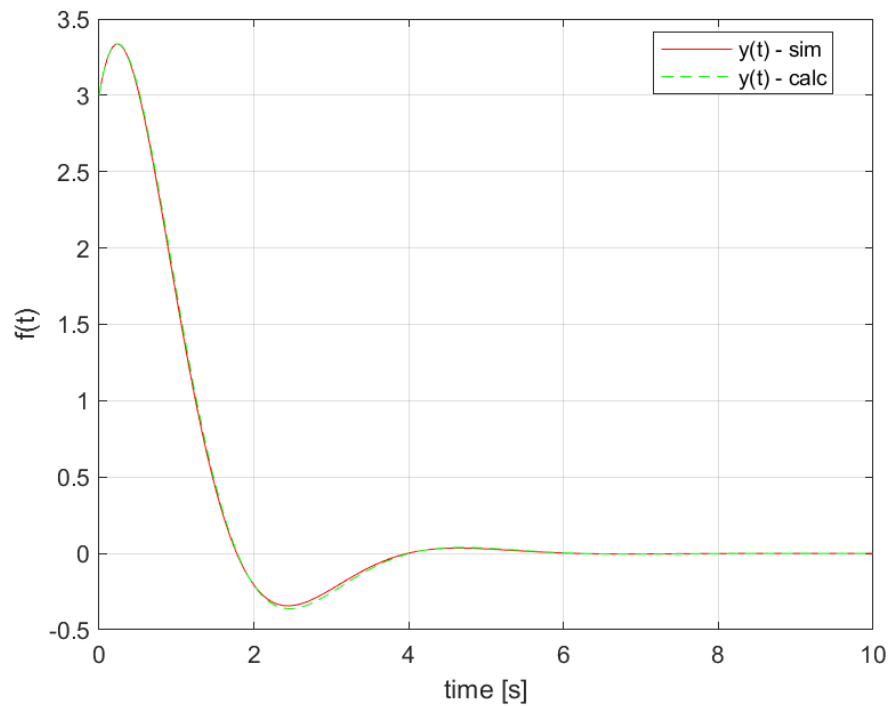


Рисунок 3 — Симуляция - асимптотически устойчивая система с ПД-регулированием

Как можно заметить по графику выше, результаты симуляции и аналитический расчётов также совпадают.

Сделаем промежуточные выводы: два графика выше отличаются своей устойчивостью, показывая то, что если мы подберём ”хорошие” коэффициенты регулятора, то сможем получить асимптотическую устойчивость, это можно назвать неким свойством работы регулятора.

## 2 СТАБИЛИЗАЦИЯ С РЕАЛЬНЫМ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМ ЗВЕНОМ

Заменим блок аппроксимации производной *derivative* на передаточную функцию вида:

$$W_{diff}(s) = \frac{s}{Ts + 1}$$

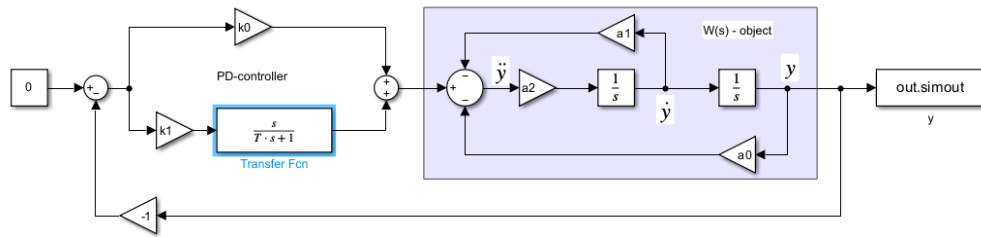


Рисунок 4 — Структурная схема - новая передаточная функция

Определим критические значения параметра  $T$ , для этого воспользуемся преобразованием Лапласа, а также ранее определённые константы регулятора:

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) + 0 = k_0 Y(s) + k_1 Y \frac{s}{Ts + 1}$$

где  $+0$  - обнулённые начальные условия, поскольку сейчас нас волнует вопрос устойчивости -, а это только знаменатель от  $Y(s)$

$$s^2 Y(s) - 2s Y(s) - 3Y(s) + 0 = -6Y(s) - 4Y \frac{s}{Ts + 1}$$

$$s^2 Y(s) - 2s Y(s) + 3Y(s) = -4Y \frac{s}{Ts + 1} \Big| \cdot Ts + 1$$

...

$$s^3 Y(s) + s^2 Y(s) \left( \frac{1-2T}{T} \right) + s Y(s) \left( \frac{3T+2}{T} \right) + \frac{3}{T} = 0$$

Воспользуемся критерием Гурвица для системы третьего порядка:

$$\begin{cases} T > 0 \\ 3T + 2 > 0 \\ 1 - 2T > 0 \\ \frac{(3T+2)(1-2T)}{T^2} > \frac{3}{T} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T \in (0, \frac{1}{2}) \\ (3T + 2)(1 - 2T) > 3T \end{cases}$$

В итоге получим следующий интервал:  $T \in (0; \frac{1}{3})$ .

Проведём несколько экспериментов при разных  $T$ , сведём их в один график для сопоставления:

$$T_1 = 1/4, T_2 = 1/12, T_3 = 1/24, T_4 = 1/48$$

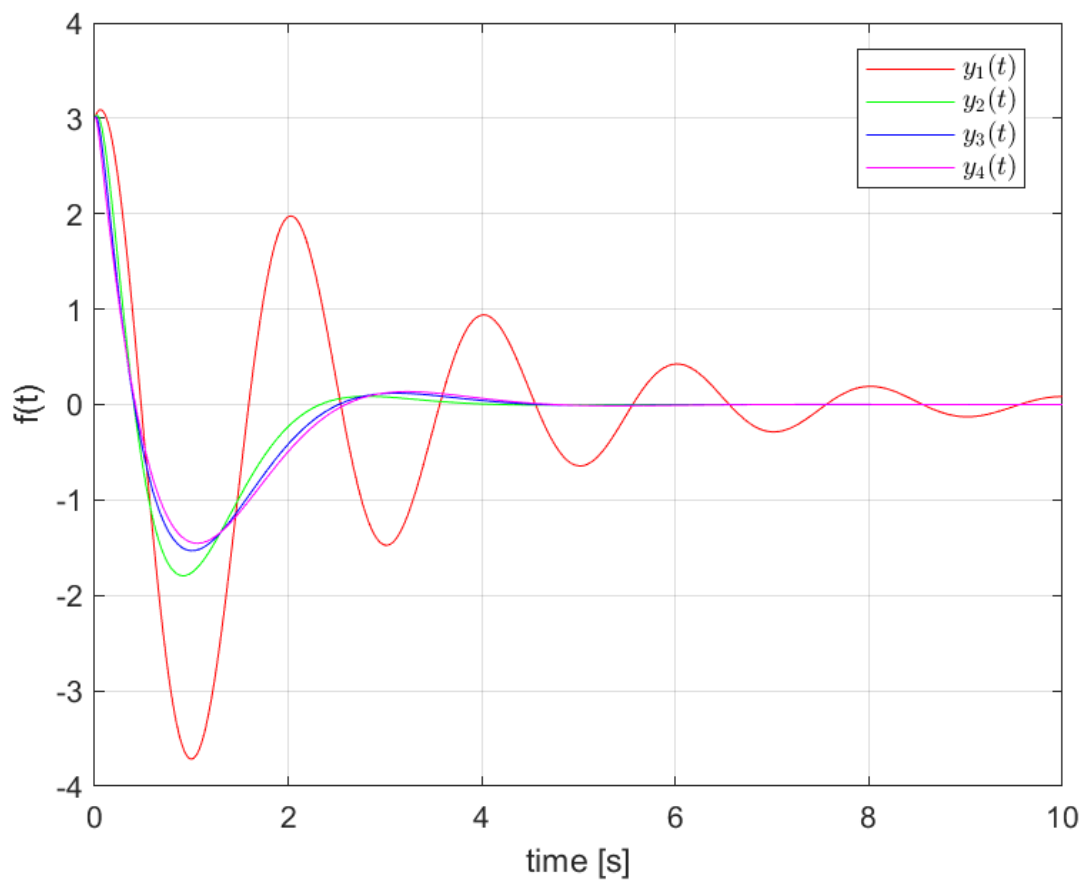


Рисунок 5 — Симуляция - устойчивость при  $T = 1/4$



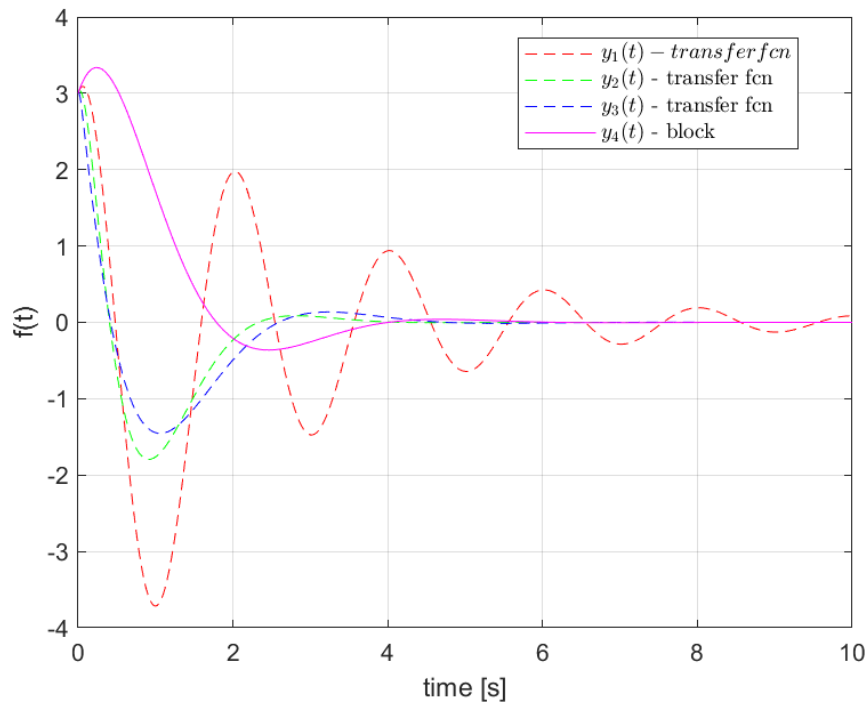


Рисунок 6 — Симуляция - сравнение задание 1/2

**Выводы:** Как можно заметить, при уменьшении параметра  $T$  к нулю, у нас улучшается регулирование - уменьшается перерегулирование (убираем колебания системы) и время переходного процесса.

Разница между аппроксимацией производной с помощью специального блока из *simulink* или с помощью передаточной функции довольно заметна на сравнительном графике - но при хорошо подобранном  $T$  (достаточно маленьком) наша аппроксимация с помощью блока передаточной функции примерно также быстро сходится в ноль, также как и блоковая аппроксимация, хотя она все равно быстрее. Думаю, что передаточная функция в качестве аппроксимации менее вычислительно требовательная, нежели блок симулинка.

### 3 СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА (П-РЕГУЛЯТОР)

Теперь будем работать с пропорциональным регулятором следующего вида:

$$H(s) = k$$

В случае моего второго варианта у меня будет следующая функция управления:

$$W(s) = \frac{3}{s^2 + 2.5s + 1}$$

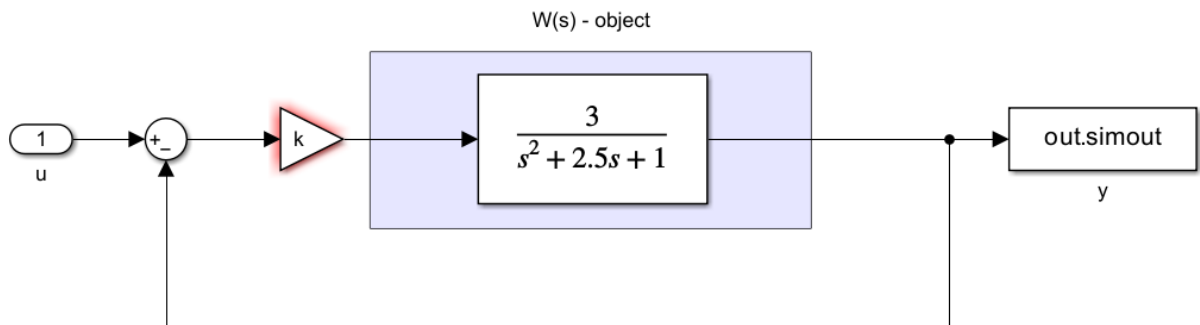


Рисунок 7 — Структурная схема - П-регулятор

#### 3.1 Стационарный режим работы

Будем пытаться угнаться за сигналом  $g(t) = A = 2$  в случае моего варианта. Выберем следующие  $k$ :

$$k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 10$$

Аналитически определим  $e_{final}$  пользуясь теоремой о предельном значении для каждого  $k$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Для начала найдём образ ошибки слежения:  $E(s) = W_{g \rightarrow e}(s)G(s)$

$$W_{g \rightarrow e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s^2 + 2.5s + 1}{s^2 + 2.5s + 3k + 1}$$

$$G(s) = \frac{A}{s}$$

$$E(s) = \frac{A(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^2 + 2.5s + 3k + 1)}$$

В итоге:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^2 + 2.5s + 3k + 1)}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A(s^2 + 2.5s + 1)}{s^2 + 2.5s + 3k + 1} = \frac{A}{3k + 1}$$

$$e_1 = 0.5$$

$$e_2 = 2/13$$

$$e_3 = 2/31$$

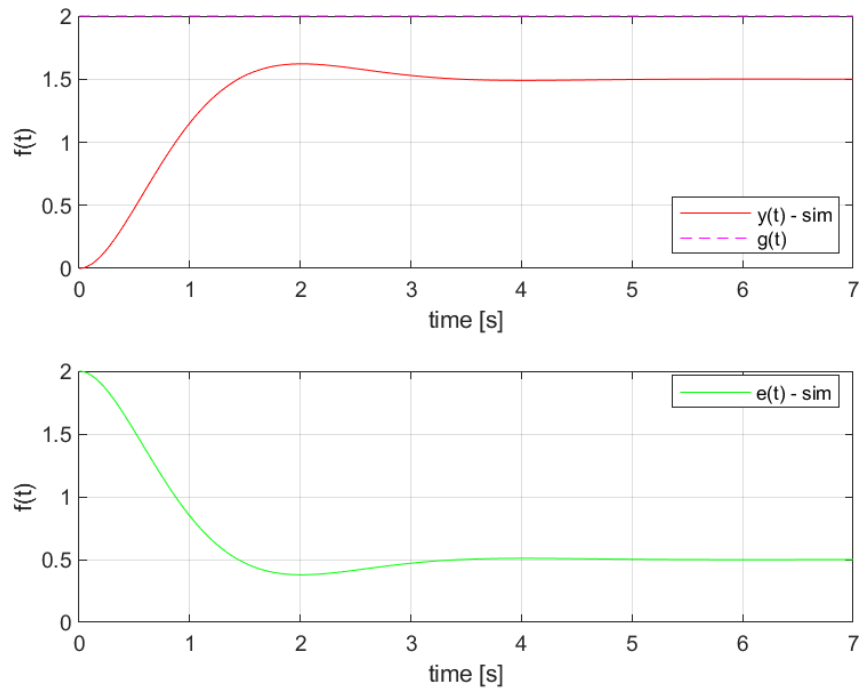


Рисунок 8 — Симуляция - стационарный,  $k = 1$

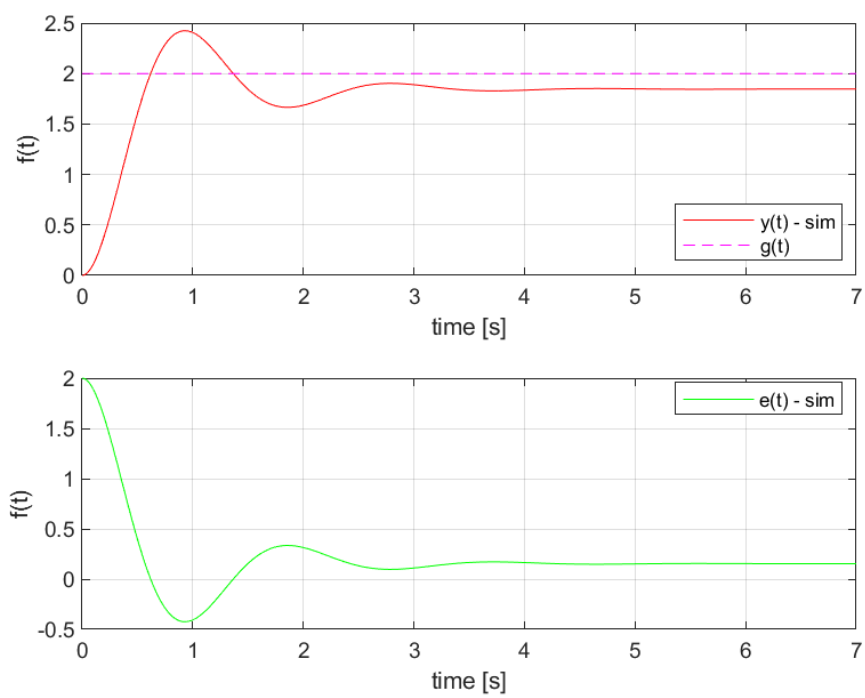


Рисунок 9 — Симуляция - стационарный,  $k = 4$

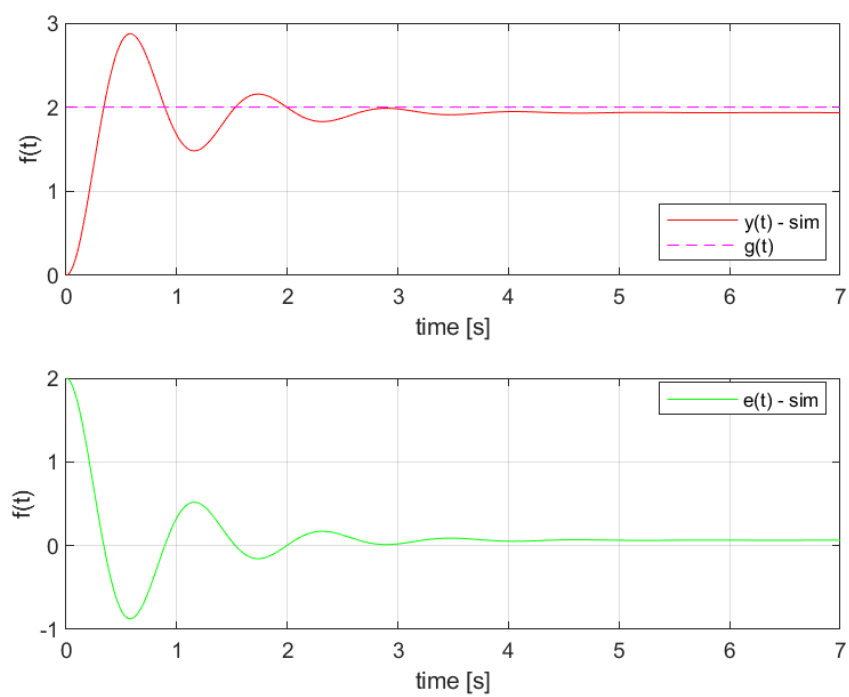


Рисунок 10 — Симуляция - стационарный,  $k = 10$

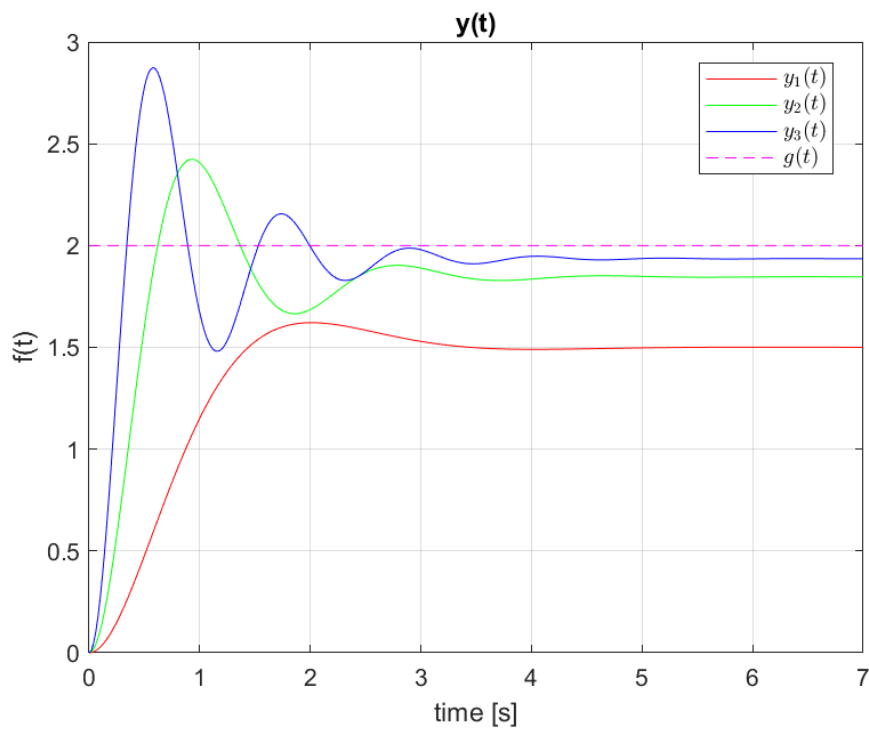


Рисунок 11 — Симуляция - стационарный, сравнение сигналов

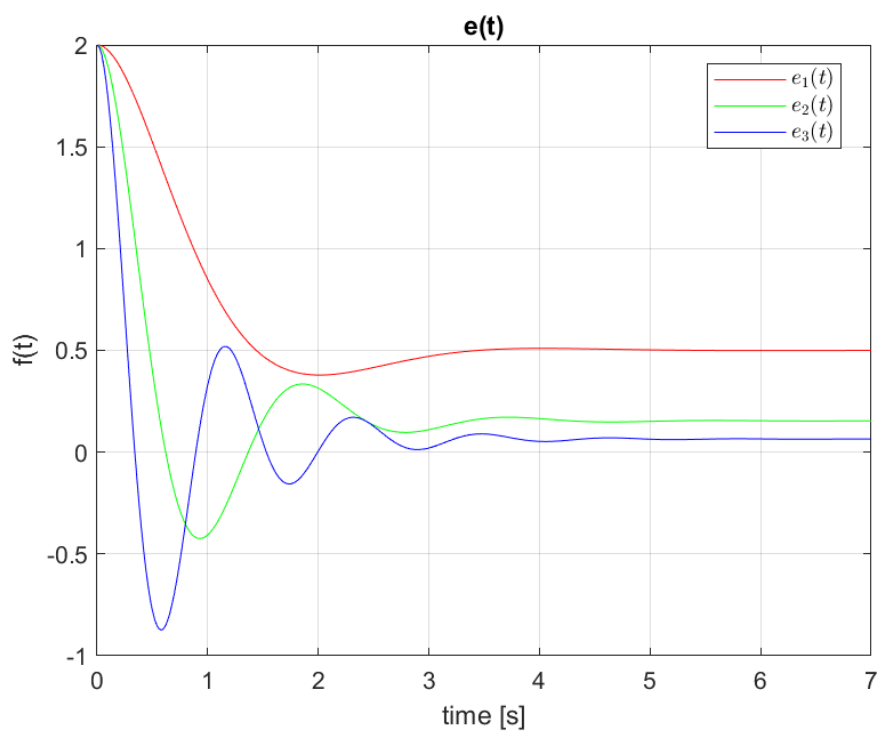


Рисунок 12 — Симуляция - стационарный, сравнение ошибок

**Выводы:** при увеличении  $k$  наш сигнал  $y(t)$  всё больше и больше приближается к  $g(t)$  с установившейся ошибкой  $e_{final} = \frac{k}{3k+1}$ . Также увеличение  $k$  усиливает перерегулирование при достижении цели.

### 3.2 Движение с постоянной скоростью

Будем пытаться угнаться за сигналом  $g(t) = Vt = 2t$  в случае моего варианта. Выберем следующие  $k$ :

$$k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 10$$

Аналитически определим  $e_{final}$  пользуясь теоремой о предельном значении для каждого  $k$ :

$$W_{g \rightarrow e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s^2 + 2.5s + 1}{s^2 + 2.5s + 3k + 1}$$

$$G(s) = \frac{V}{s^2}$$

Образ ошибки слежения:

$$E(s) = \frac{V(s^2 + 2.5s + 1)}{s^2(s^2 + 2.5s + 3k + 1)}$$

В итоге:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{V(s^2 + 2.5s + 1)}{s^2(s^2 + 2.5s + 3k + 1)} = \infty$$

А значит при любом  $k$  ошибка будет улетать в бесконечность.. сигналы  $y(t)$  и  $g(t)$  будут расходиться

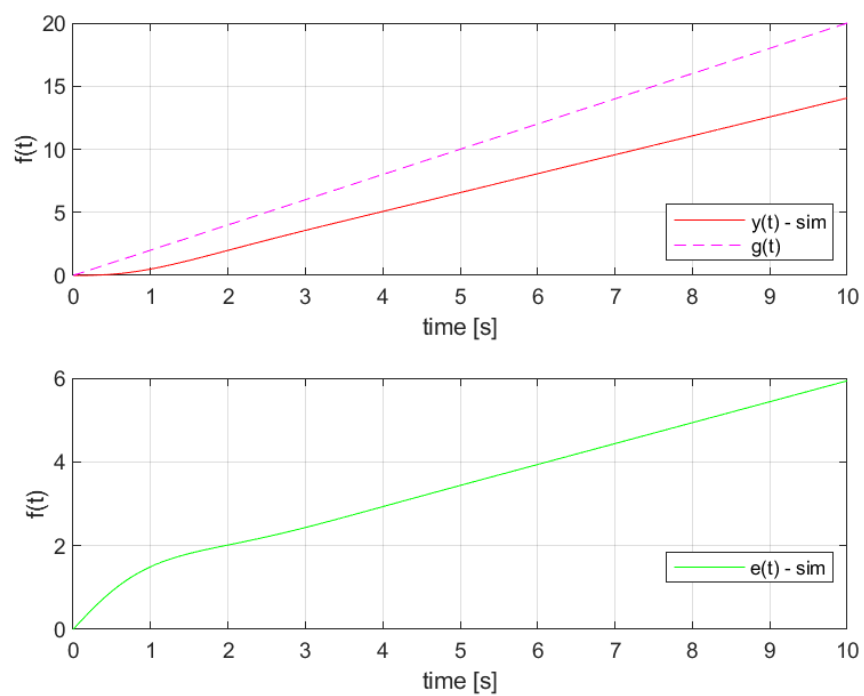


Рисунок 13 — Симуляция - постоянная скорость,  $k = 1$

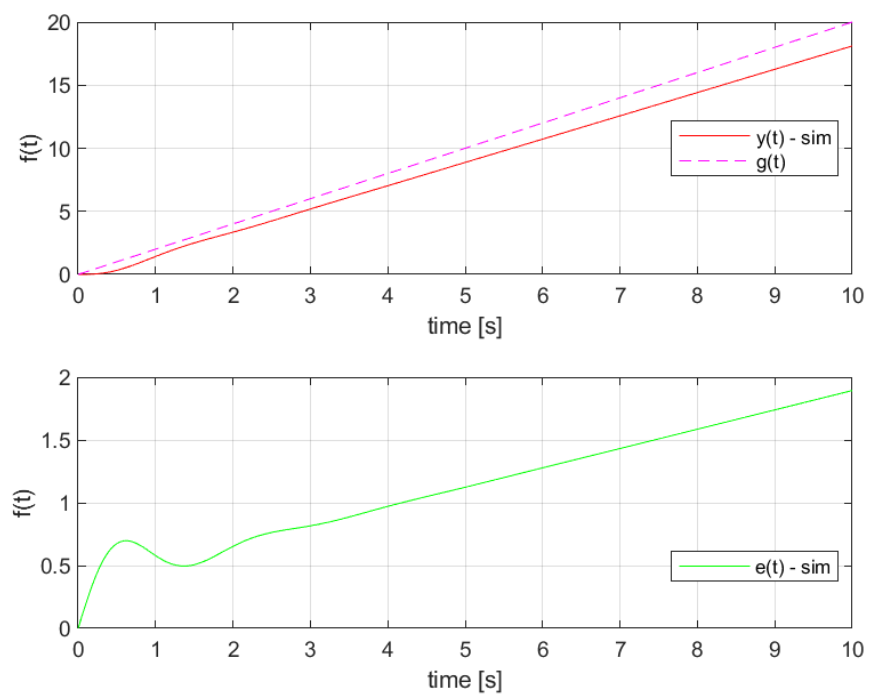


Рисунок 14 — Симуляция - постоянная скорость,  $k = 4$

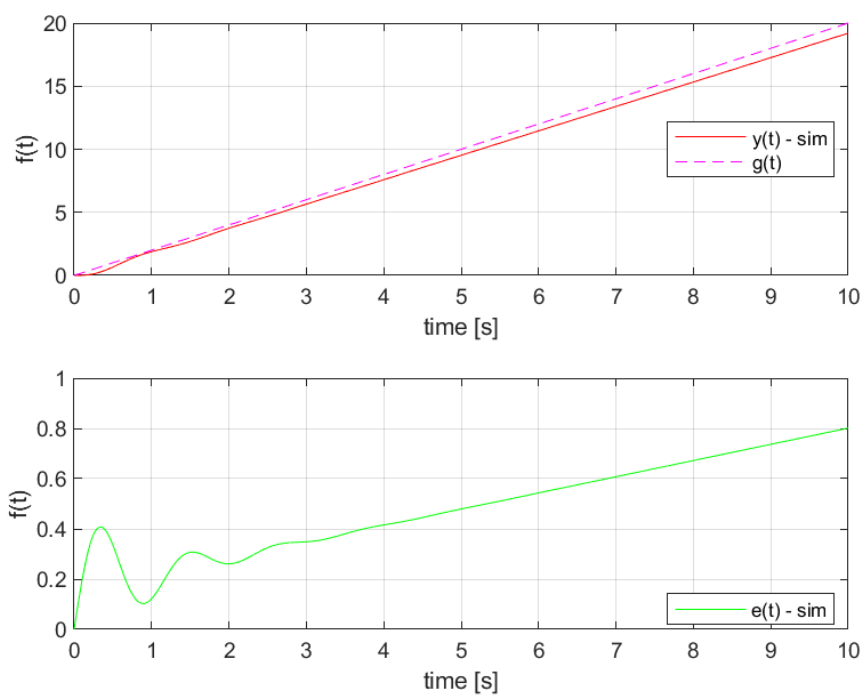


Рисунок 15 — Симуляция - постоянная скорость,  $k = 10$

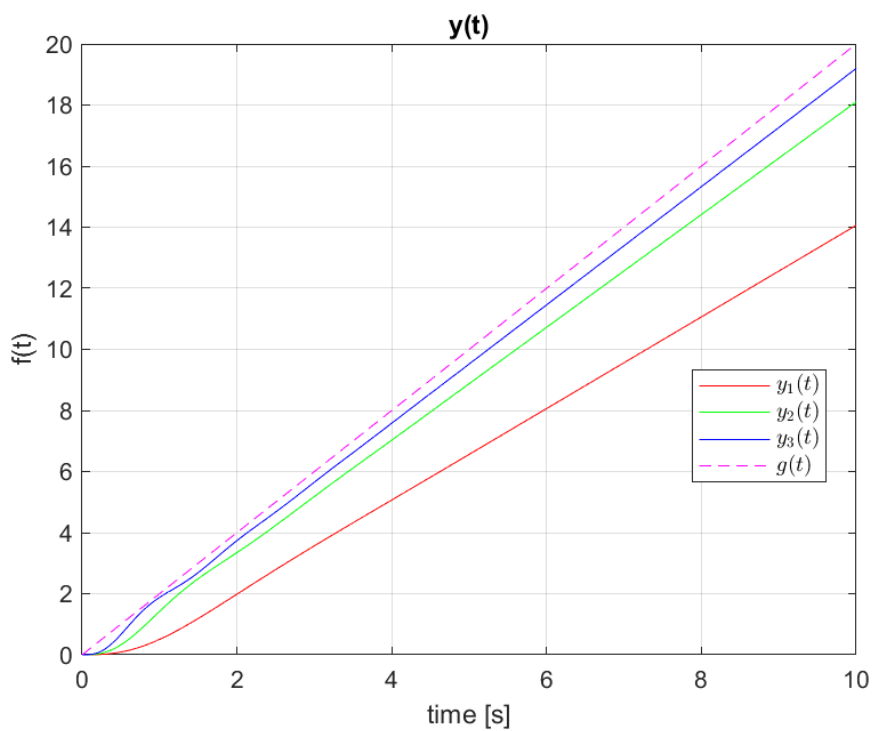


Рисунок 16 — Симуляция - постоянная скорость, сравнение сигналов



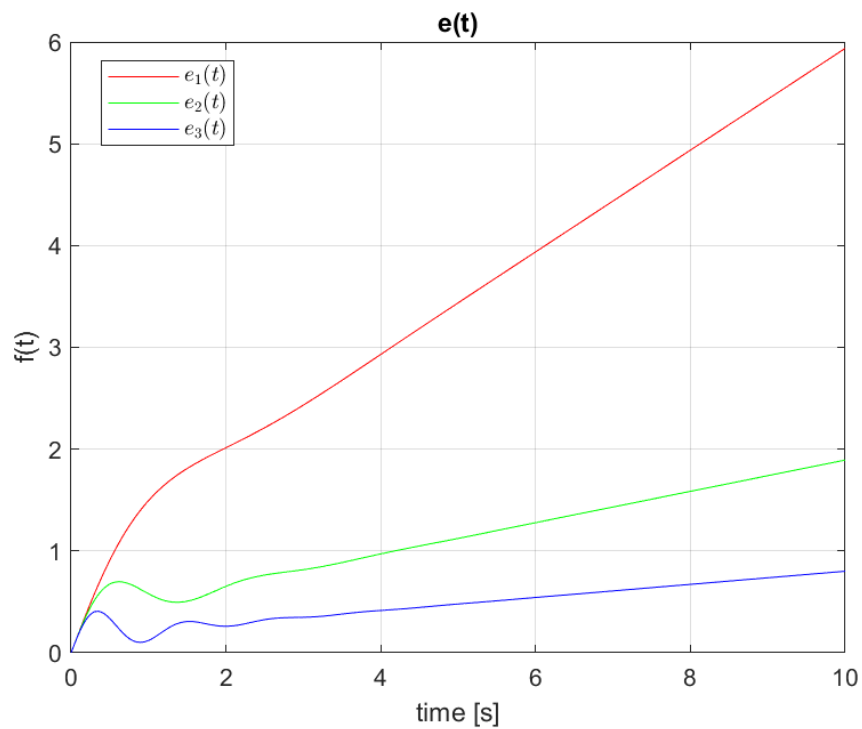


Рисунок 17 — Симуляция - постоянная скорость, сравнение ошибок

**Выводы:** хоть и сигналы будут всегда расходиться, но можно заметить, что при увеличении  $k$  наш сигнал  $y(t)$  будет сначала достаточно близок к  $g(t)$ , а только потом начнёт удаляться. Также увеличение  $k$  усиливает перерегулирование при достижении цели.

## 4 СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (И-РЕГУЛЯТОР)

Теперь будем работать с интегральным регулятором следующего вида:

$$H(s) = \frac{k}{s}$$

### 4.1 Стационарный режим работы

Будем пытаться угнаться за сигналом  $g(t) = A = 2$ . Выберем следующие  $k$ :

$$k_1 = 0.05, k_2 = 0.5, k_3 = 0.3$$

Аналитически определим  $e_{final}$  пользуясь теоремой о предельном значении для каждого  $k$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$$

Для начала найдём образ ошибки слежения:  $E(s) = W_{g \rightarrow e}(s)G(s)$

$$W_{g \rightarrow e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k}$$

$$G(s) = \frac{A}{s}$$

$$E(s) = \frac{A(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k}$$

В итоге:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{As^2(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^2 + 2.5s + 3k + 1)} = 0$$

А это значит, что наш астатизм справился с постоянным сигналом, успеваем.

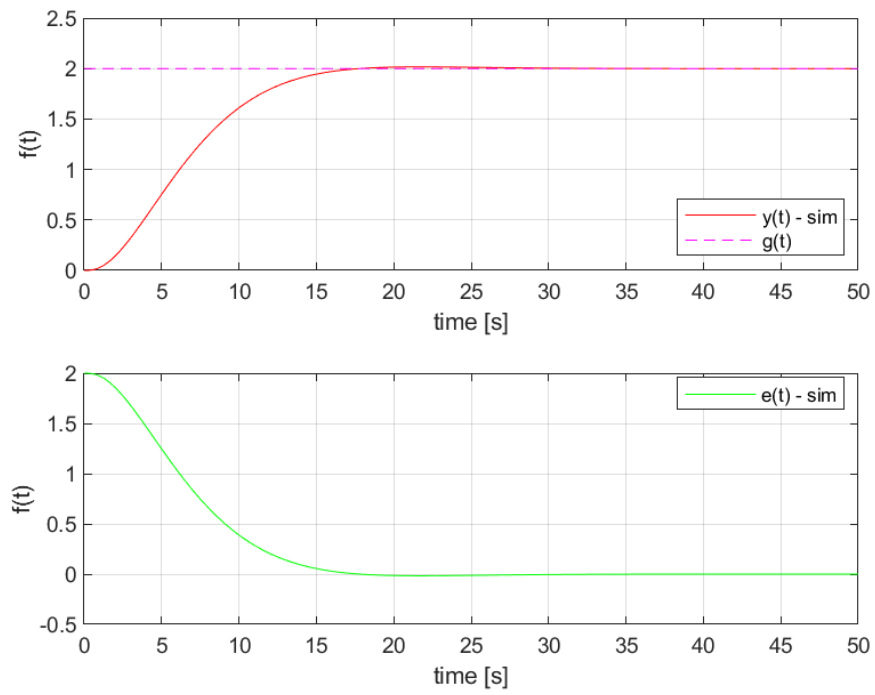


Рисунок 18 — Симуляция - стационарный,  $k = 0.05$

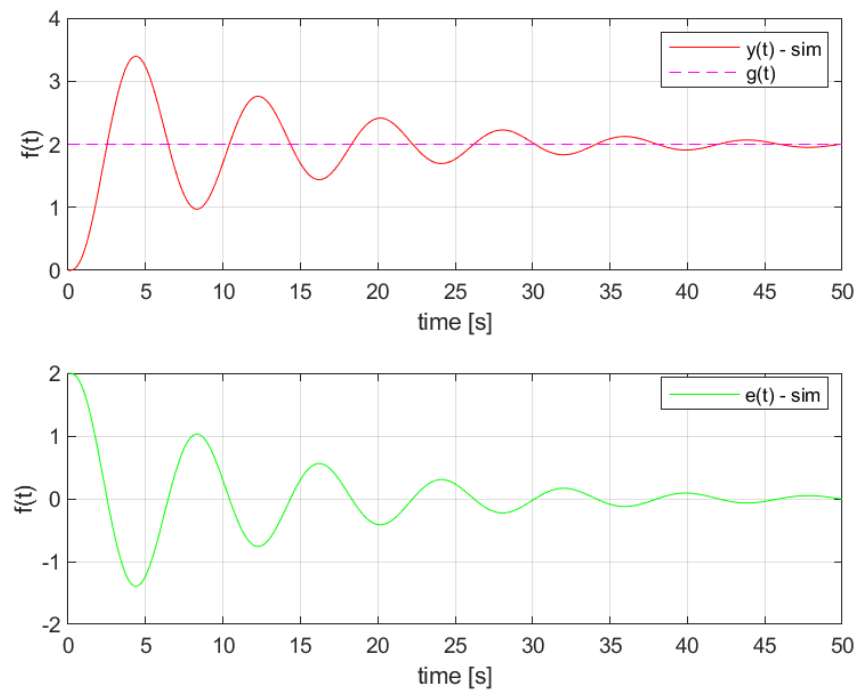


Рисунок 19 — Симуляция - стационарный,  $k = 0.5$

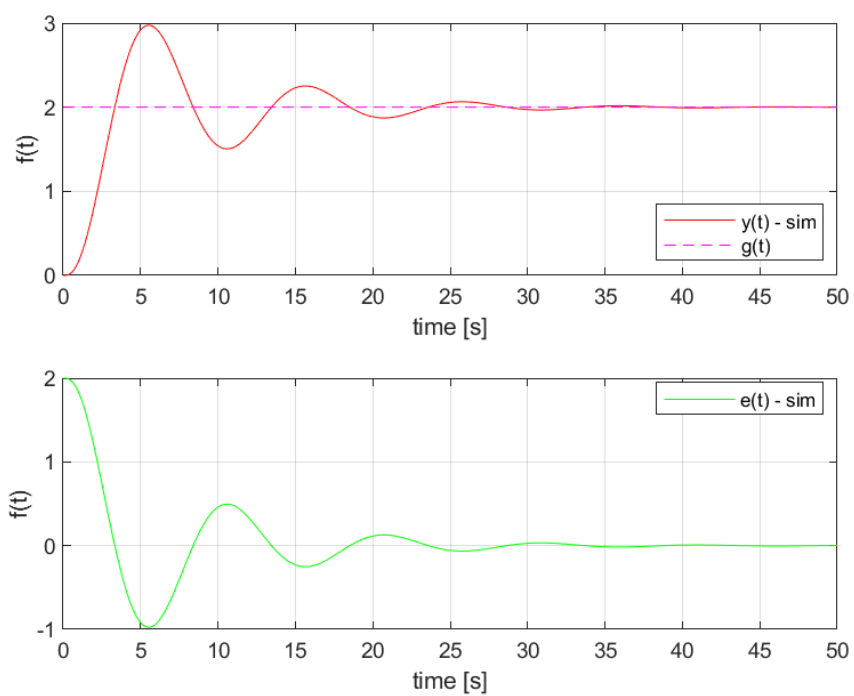


Рисунок 20 — Симуляция - стационарный,  $k = 0.3$

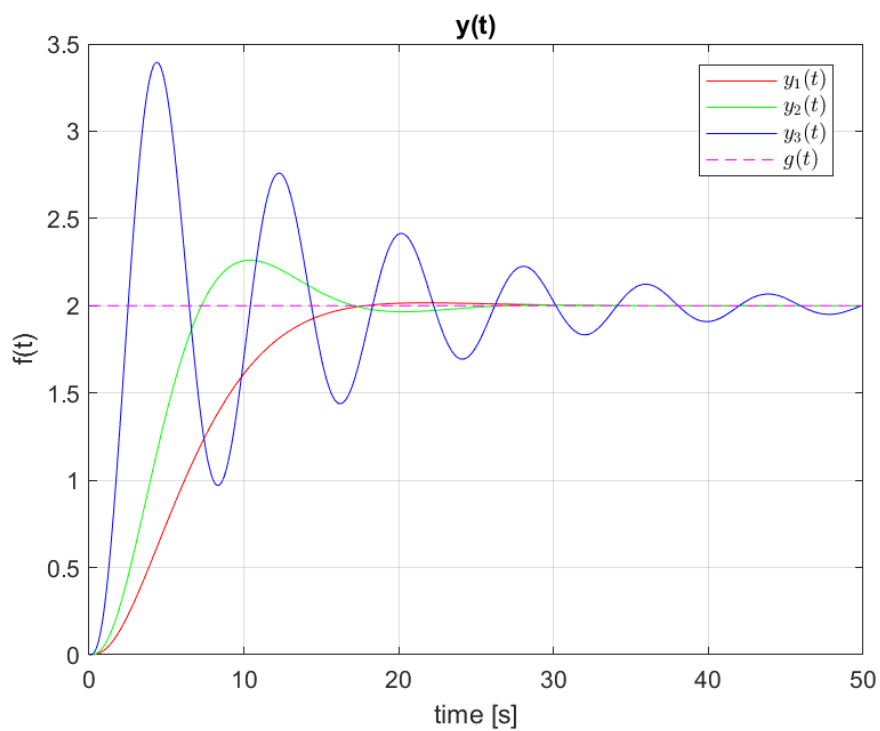


Рисунок 21 — Симуляция - стационарный, сравнение сигналов

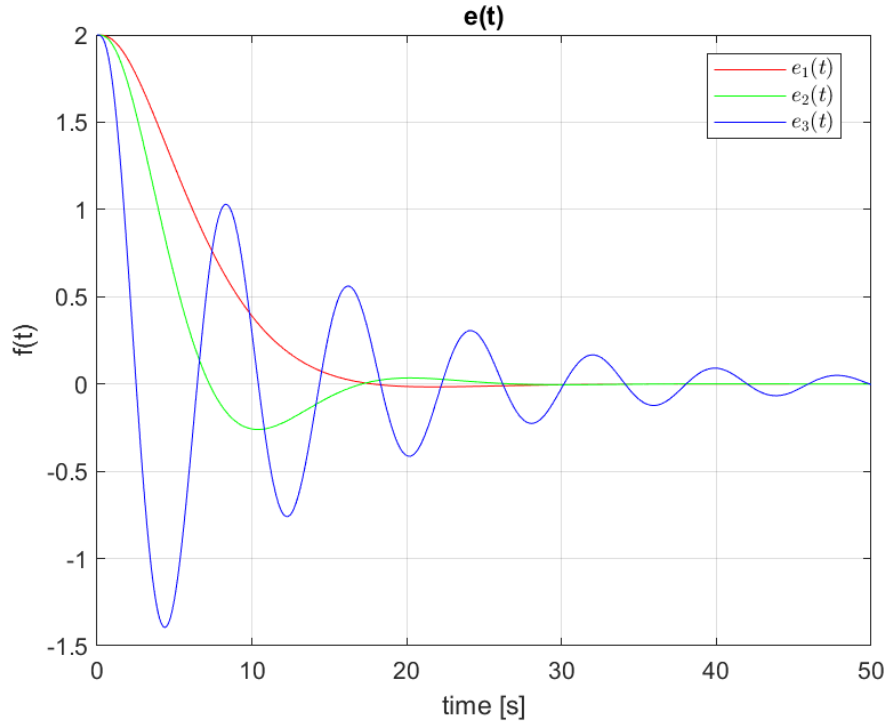


Рисунок 22 — Симуляция - стационарный, сравнение ошибок

**Выводы:** при увеличении  $k$  начальная амплитуда сигнала  $y(t)$  будет больше, а также увеличится время переходного процесса, но рано или поздно мы придём(полностью совпадать) к  $g(t)$ . При небольших  $k$  мы приходим к цели быстрее и с мягкими колебаниями.

## 4.2 Движение с постоянной скоростью

Будем пытаться угнаться за сигналом  $g(t) = Vt = 2t$  в случае моего варианта. Выберем следующие  $k$ :

$$k_1 = 0.5, k_2 = 0.05, k_3 = 0.1$$

Аналитически определим  $e_{final}$  пользуясь теоремой о предельном значении:

$$W_{g \rightarrow e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k}$$

$$G(s) = \frac{V}{s^2}$$

Образ ошибки слежения:

$$E(s) = \frac{Vs(s^2 + 2.5s + 1)}{s^2(s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k)}$$

В итоге:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{V s^2 (s^2 + 2.5s + 1)}{s^2 (s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k)} =$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{V (s^2 + 2.5s + 1)}{s (s^2 + 2.5s + 1) + 3k} = \frac{V}{3k} = \frac{2}{3k}$$

Посчитаем ошибки для каждого  $k$ :

$$e_1 = 4/3$$

$$e_2 = 40/3$$

$$e_3 = 20/3$$

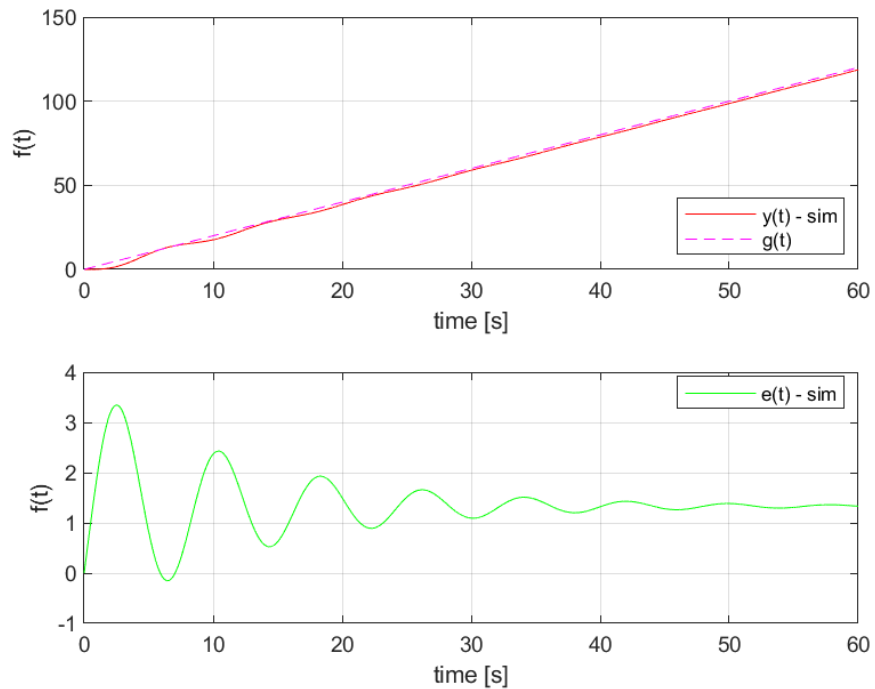


Рисунок 23 — Симуляция - постоянная скорость,  $k = 0.5$

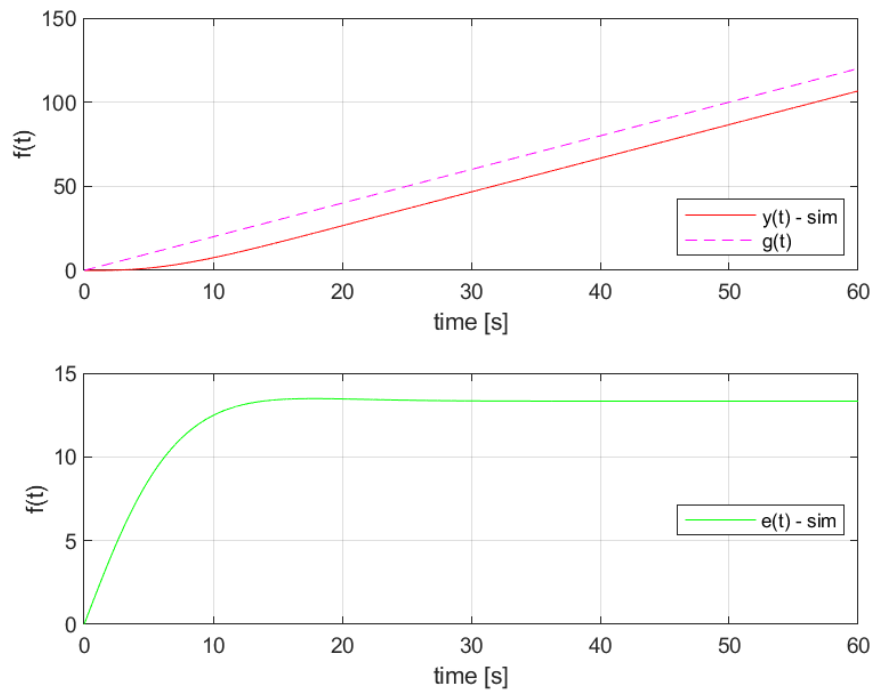


Рисунок 24 — Симуляция - постоянная скорость,  $k = 0.05$

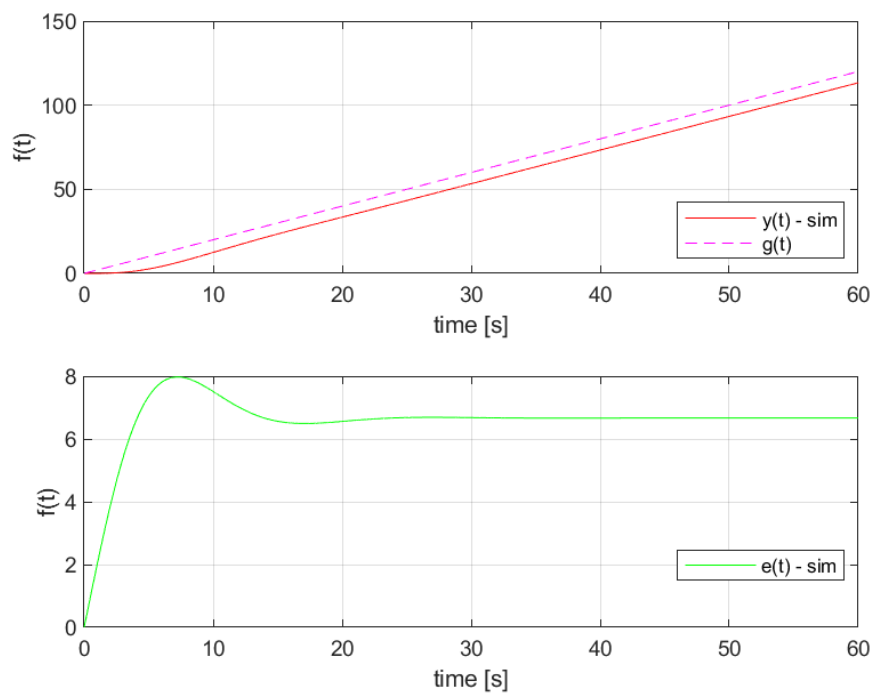


Рисунок 25 — Симуляция - постоянная скорость,  $k = 0.1$

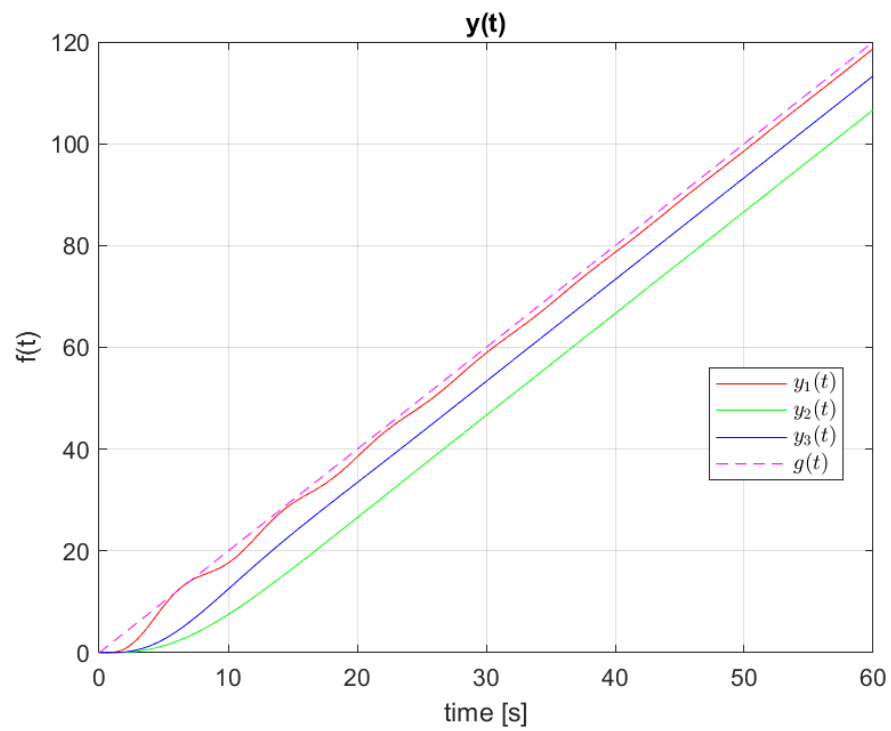


Рисунок 26 — Симуляция - постоянная скорость, сравнение сигналов

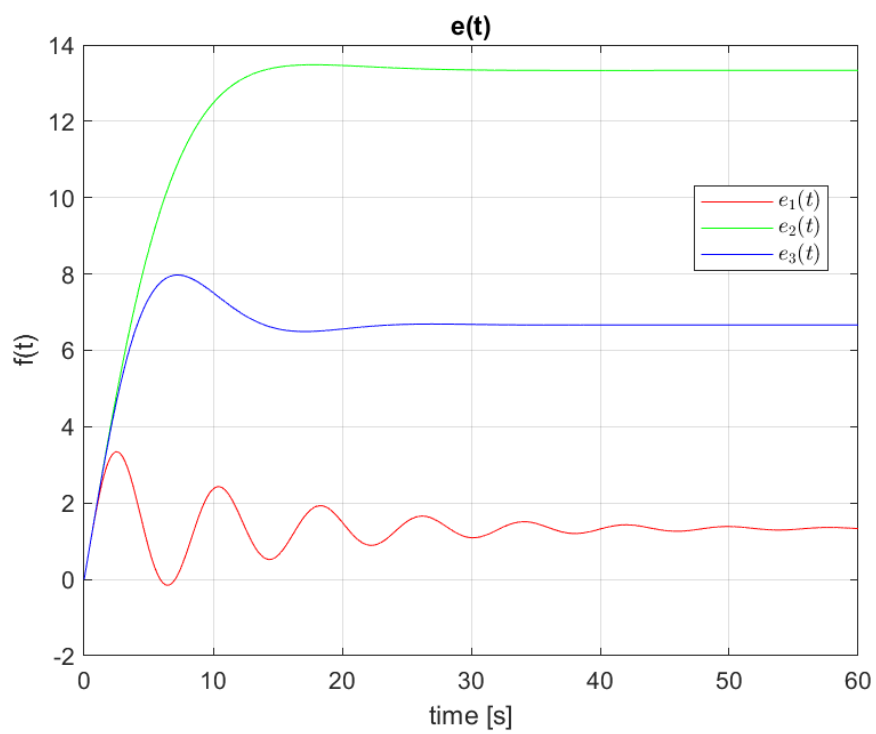


Рисунок 27 — Симуляция - постоянная скорость, сравнение ошибок



**Выводы:** Так как система имеет у нас астатизм первого порядка, то и линейный сигнал она должна ”почти”догонять, с точностью до установившейся ошибки, что тоже неплохо, в нашем случае  $e_{final} = \frac{2}{3k}$ .

Как можно заметить по общему графику ошибок - чем больше  $k$ , тем  $y(t)$  ближе к  $g(t)$ , и также больше колебаний. И наоборот - чем меньше  $k$ , тем мы дальше будем от  $g(t)$ , но с куда меньшими колебаниями.

### 4.3 Движение с постоянным ускорением

Будем пытаться угнаться за сигналом  $g(t) = \frac{at^2}{2} = 0.5t^2 = Bt^2$  в случае моего варианта.

Выберем следующие  $k$ :

$$k_1 = 0.05, k_2 = 0.1, k_3 = 0.5$$

Определим установившуюся ошибку, пользуясь теоремой о предельном значении:

$$W_{g \rightarrow e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k}$$

$$G(s) = \frac{2B}{s^3}$$

Образ ошибки слежения:

$$E(s) = \frac{2Bs(s^2 + 2.5s + 1)}{s^2(s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k)}$$

В итоге:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2Bs^2(s^2 + 2.5s + 1)}{s^3(s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{2B(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k)} = \frac{2B}{0} = \infty \end{aligned}$$

А значит при любом  $k$  ошибка будет улетать в бесконечность.. сигналы  $y(t)$  и  $g(t)$  будут расходиться

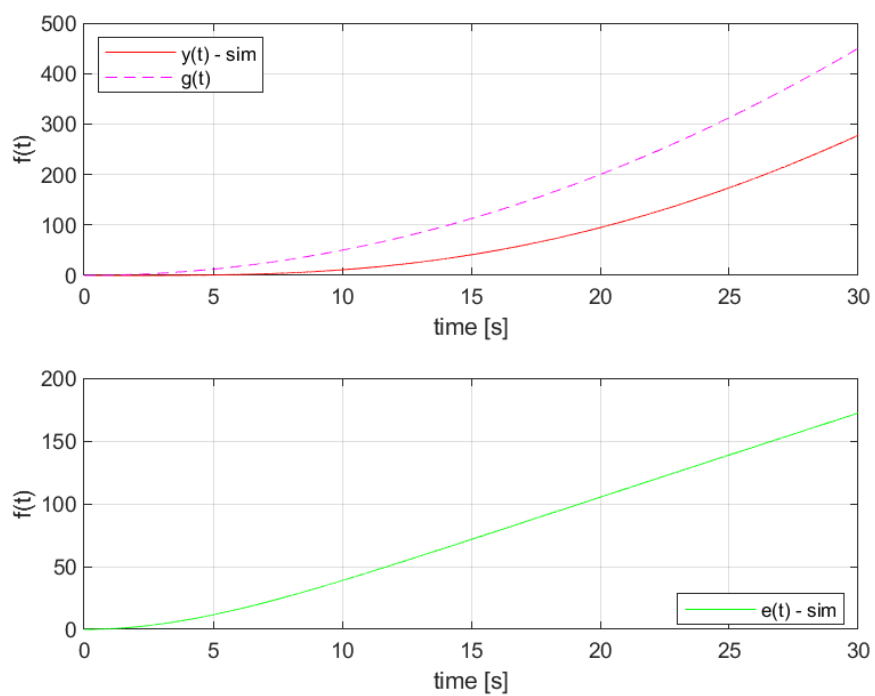


Рисунок 28 — Симуляция - постоянное ускорение,  $k = 0.05$

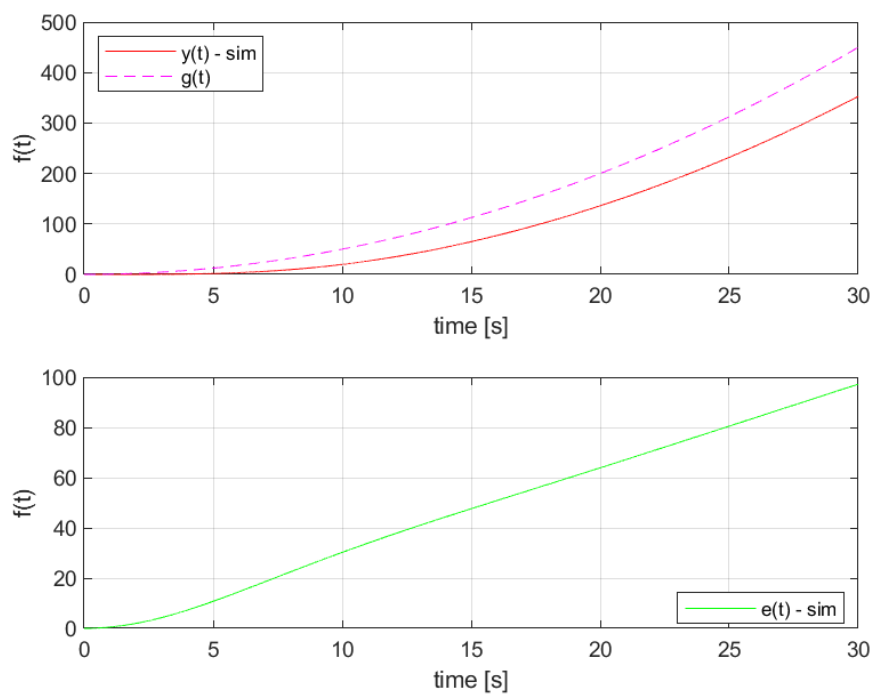


Рисунок 29 — Симуляция - постоянное ускорение,  $k = 0.1$

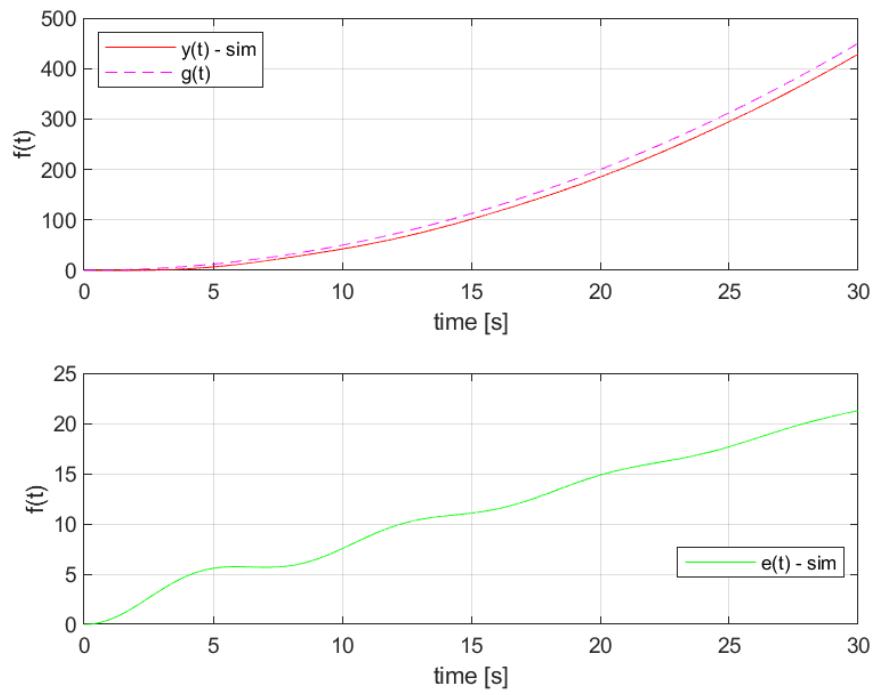


Рисунок 30 — Симуляция - постоянное ускорение,  $k = 0.5$

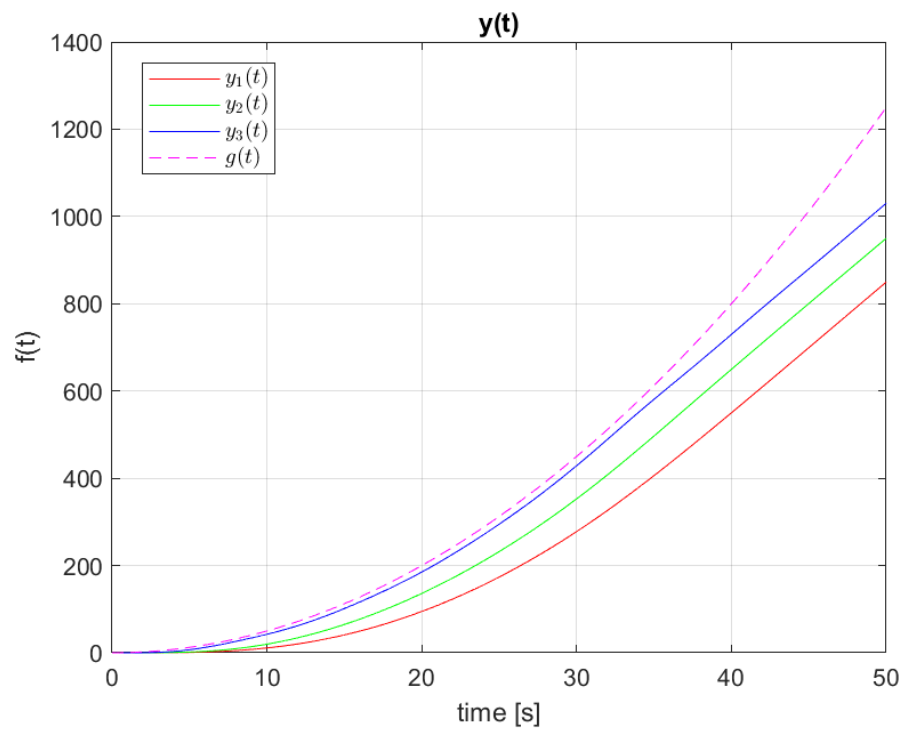


Рисунок 31 — Симуляция - постоянное ускорение, сравнение сигналов

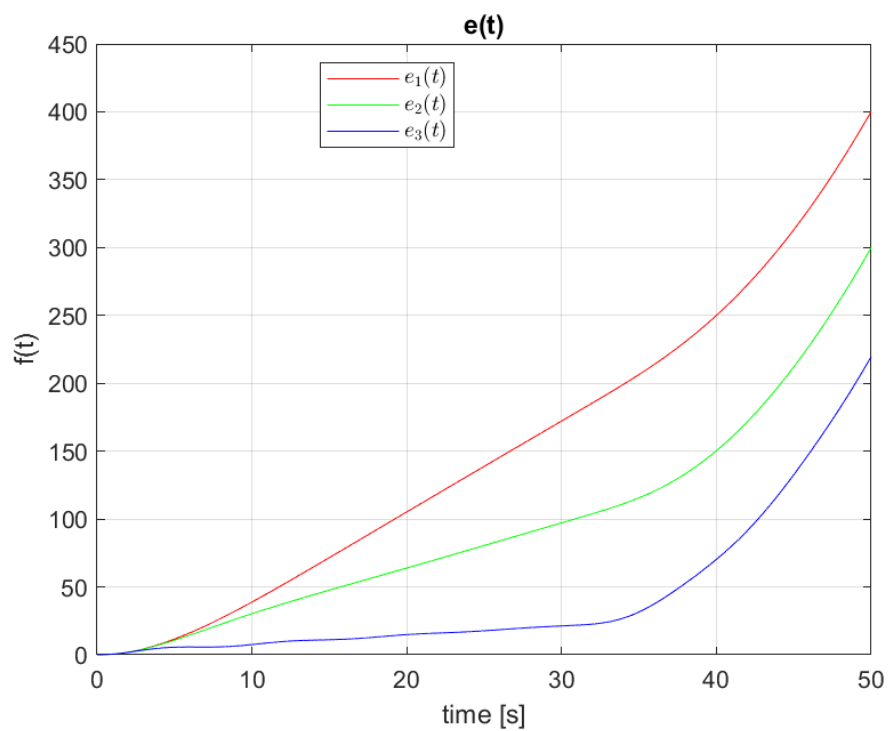


Рисунок 32 — Симуляция - постоянное ускорение, сравнение ошибок

**Выводы:** сигналы будут расходиться, но при этом график ошибки возрастает линейно, и чем больше у нас  $k$ , тем плавнее и дольше будет происходить отдаление на бесконечность (и наоборот).

## 5 СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (ПИ-РЕГУЛЯТОР)

Рассмотрим ПИ-регулятор следующего вида:

$$H(s) = \frac{k_i}{s} + k_p$$

### 5.1 Движение с постоянной скоростью

Будем пытаться угнаться за сигналом  $g(t) = Vt = 2t$ . Выберем следующие пары коэффициентов  $k$ :

$k_i$	1	2	3
$k_p$	4	5	6

Определим установившуюся ошибку, пользуясь теоремой о предельном значении:

$$W_{g \rightarrow e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s^3 + 2.5s^2 + s}{s^3 + 2.5s^2 + (1 + 3k_p)s + 3k_i}$$

$$G(s) = \frac{V}{s^2}$$

Образ ошибки слежения:

$$E(s) = \frac{V(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^3 + 2.5s^2 + (1 + 3k_p)s + 3k_i)}$$

В итоге:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{V(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^3 + 2.5s^2 + (1 + 3k_p)s + 3k_i)} = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{V(s^2 + 2.5s + 1)}{s^3 + 2.5s^2 + (1 + 3k_p)s + 3k_i} = \dots \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{V}{3k_i} = \frac{2}{3k_i} \end{aligned}$$

Мы справились со слежением с точностью до установившейся ошибки, тоже неплохо.

Из таблицы выше мы получим следующие девять экспериментов:

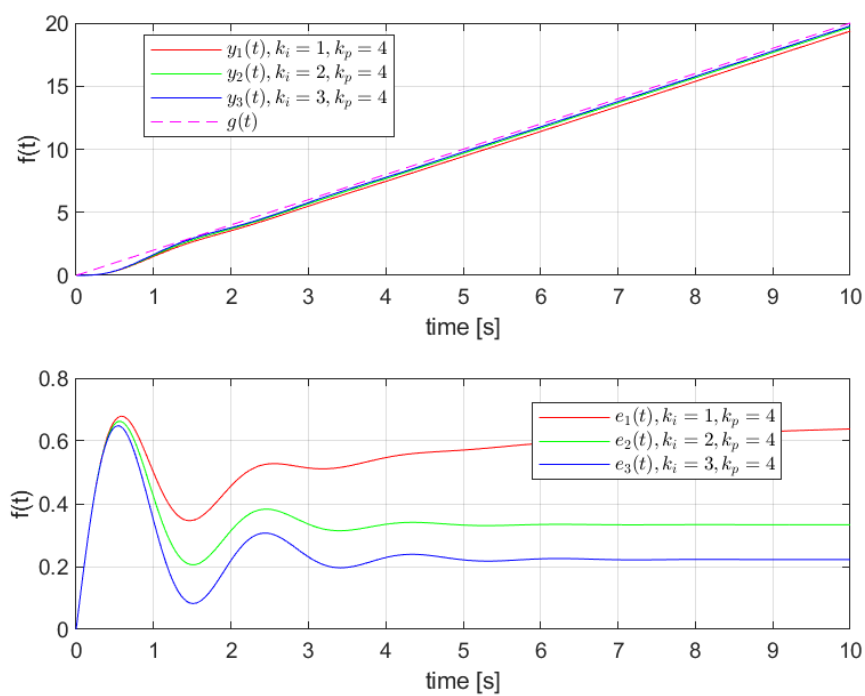


Рисунок 33 — Симуляция - движение с постоянной скоростью

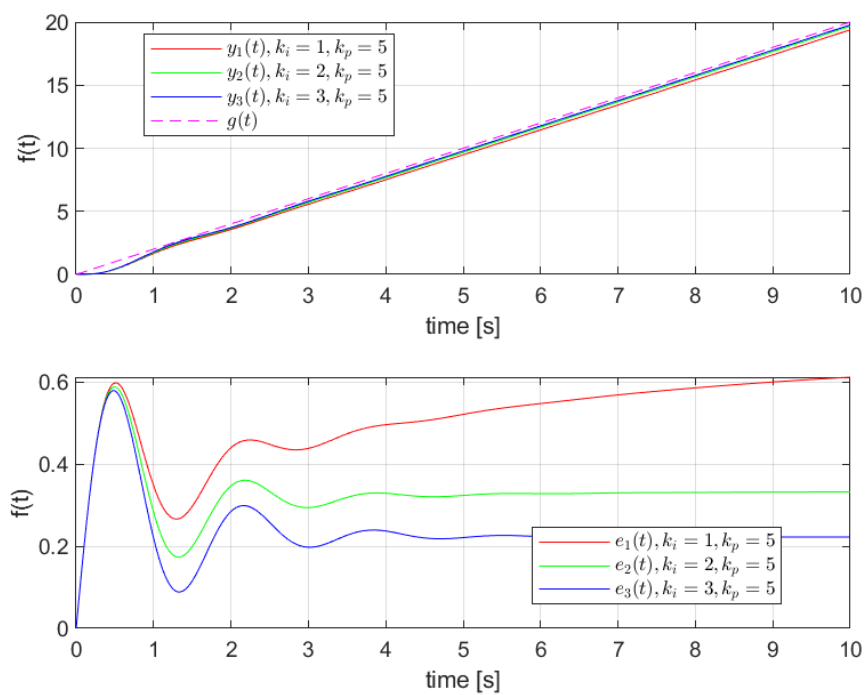


Рисунок 34 — Симуляция - движение с постоянной скоростью

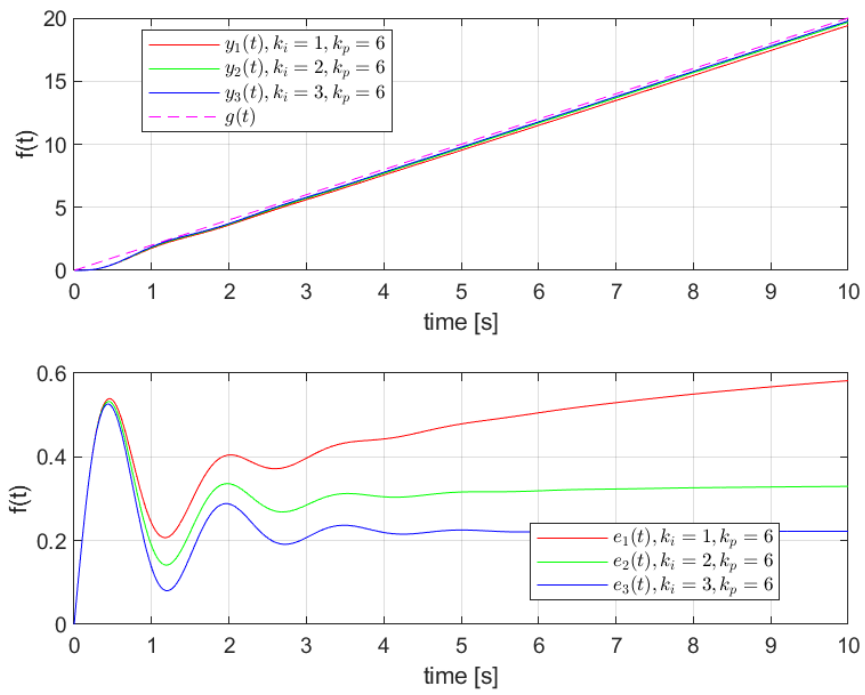


Рисунок 35 — Симуляция - движение с постоянной скоростью

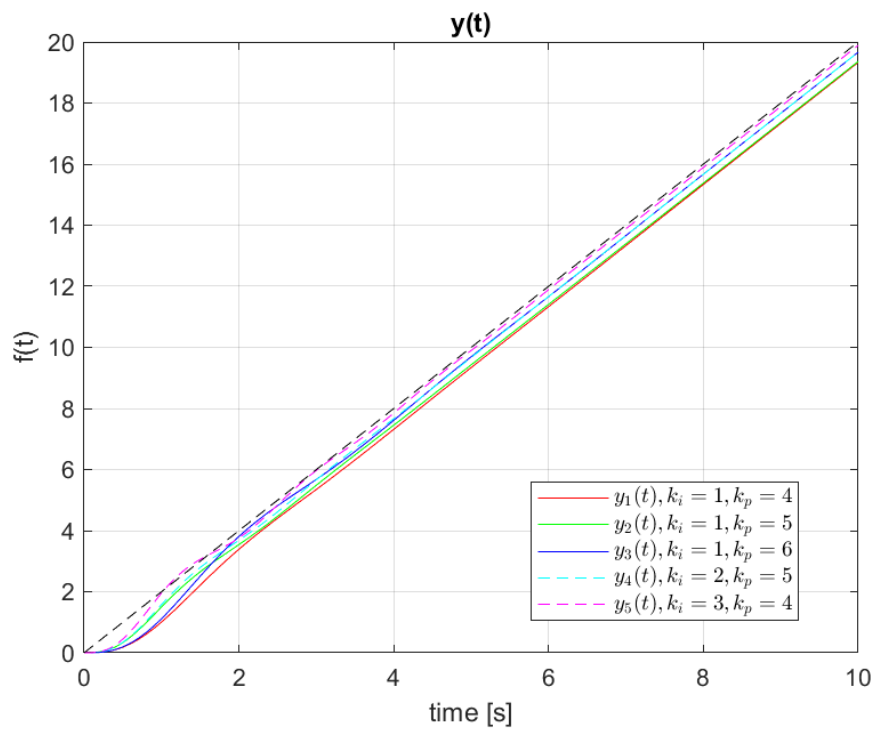


Рисунок 36 — Симуляция - движение с постоянной скоростью, сопоставление сигналов

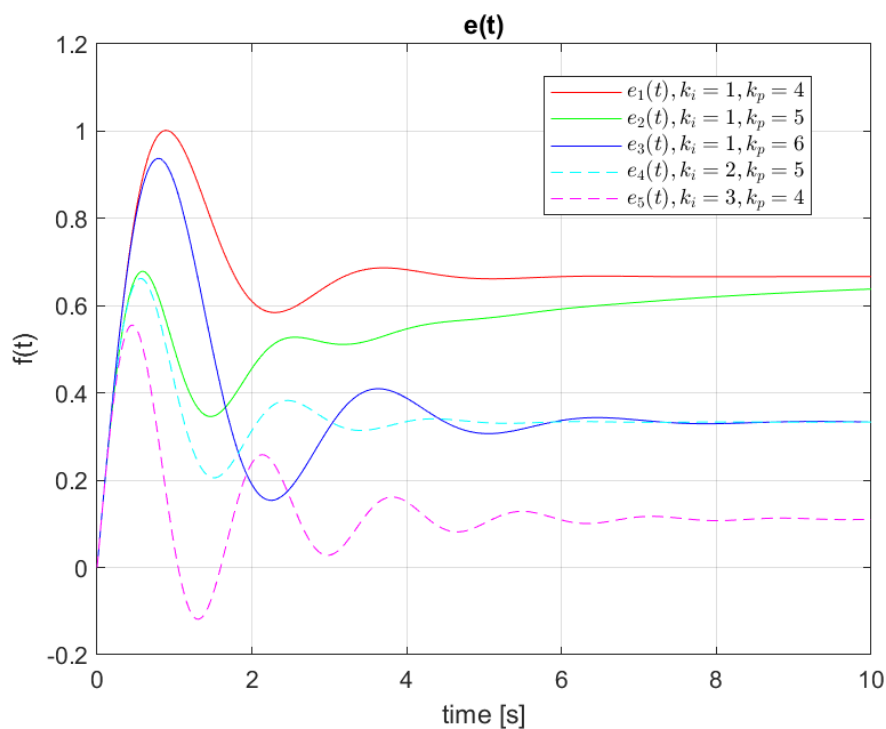


Рисунок 37 — Симуляция - движение с постоянной скоростью, сопоставление ошибок

**Выводы:** При фиксированном  $k_i$  уменьшение  $k_p$  уменьшает время установления системы. Интегральный коэффициент, чем больше, тем больше амплитуда колебаний и меньше время установления. Для астатизма первого порядка выход системы  $y(t)$  совпадает с  $g(t)$  по наклону, но находится ниже на расстоянии установившейся ошибки. По графикам "слежения" можно подумать, что  $y(t)$  и  $g(t)$  совпадают, но это не так с точностью до установившейся ошибки, которая уменьшается обратно пропорционально  $k_i$ .



## 5.2 Движение за гармоническим сигналом

Будем пытаться угнаться за сигналом  $g(t) = a \sin(\omega t) = 2 \sin(0.5t)$  в случае моего варианта. Выберем следующие пары коэффициентов  $k$ :

$k_i$	1	2	3
$k_p$	4	5	6

Определим установившуюся ошибку, пользуясь теоремой о предельном значении:

$$W_{g \rightarrow e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s^3 + 2.5s^2 + s}{s^3 + 2.5s^2 + (1 + 3k_p)s + 3k_i}$$

$$G(s) = \frac{a\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{1}{s^2 + 0.25}$$

Образ ошибки слежения:

$$E(s) = \frac{s^3 + 2.5s^2 + s}{(s^2 + 0.25)(s^3 + 2.5s^2 + (1 + 3k_p)s + 3k_i)}$$

По виду знаменателя (критерий Декарта) можно понять, что он будет содержать хотя бы один положительный корень, поэтому применить здесь предельную теорему не выйдет, мы не знаем что будет за ошибка, или  $+\infty$  она.

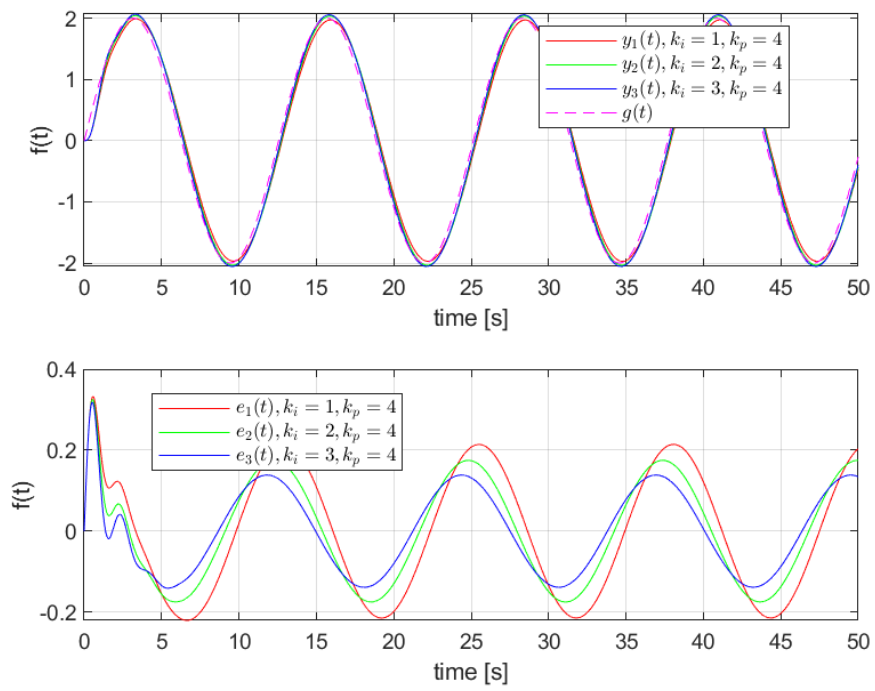


Рисунок 38 — Симуляция - гармоническое движение

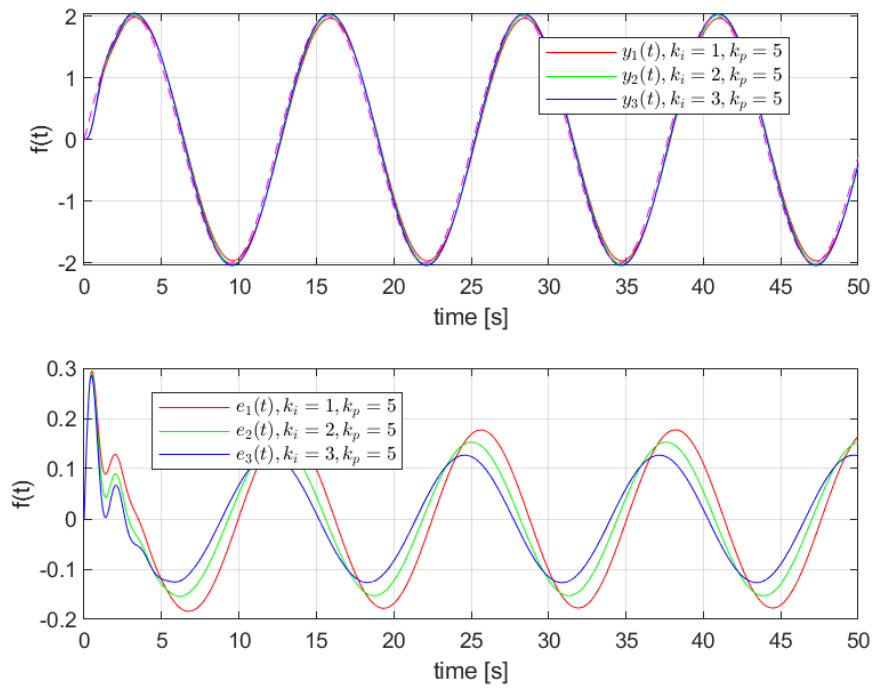


Рисунок 39 — Симуляция - гармоническое движение

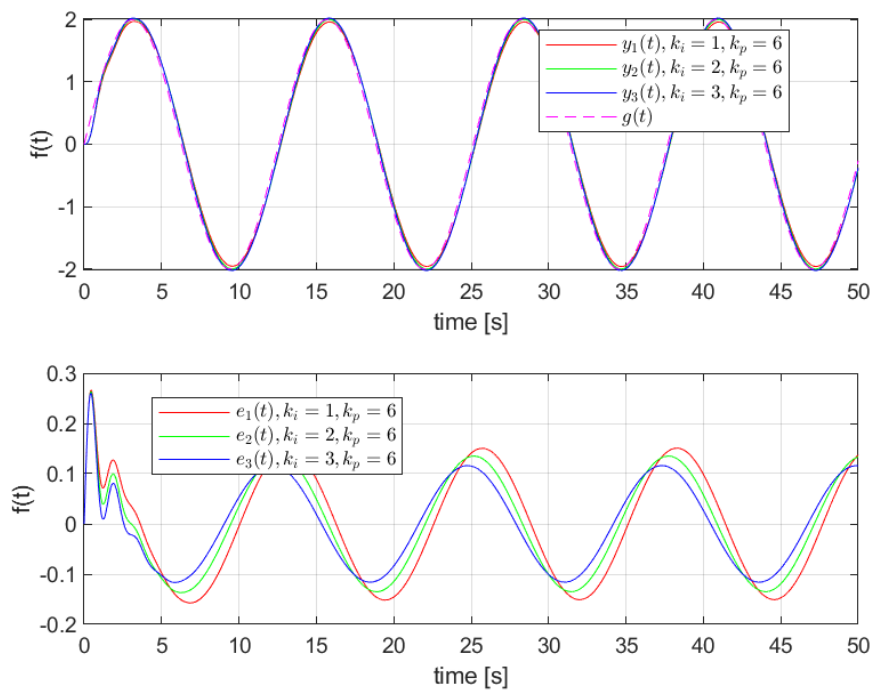


Рисунок 40 — Симуляция - гармоническое движение

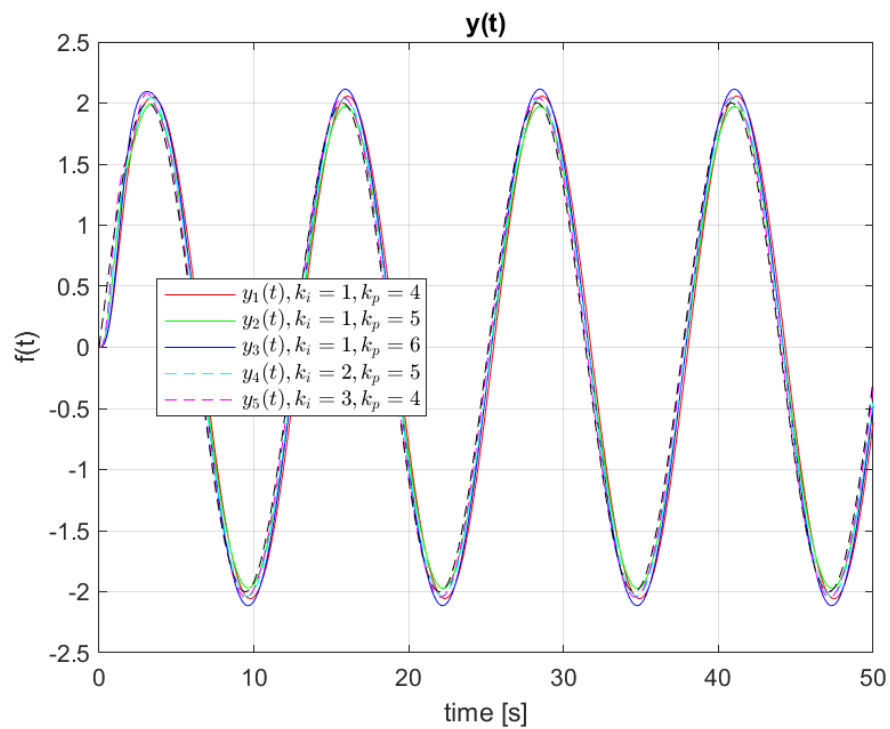


Рисунок 41 — Симуляция - гармоническое движение, сопоставление сигналов

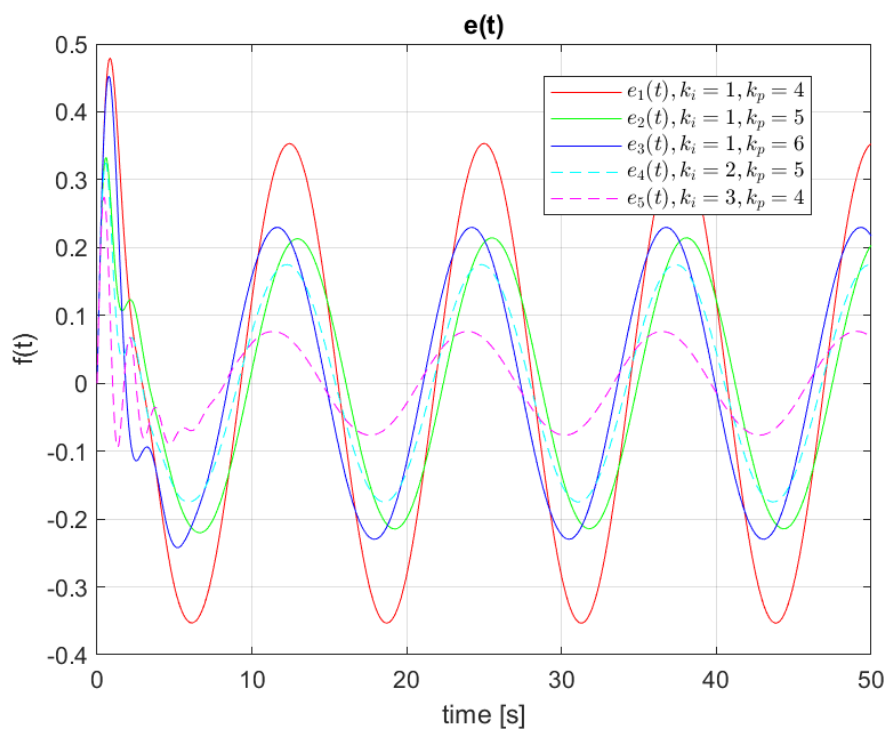


Рисунок 42 — Симуляция - гармоническое движение, сопоставление ошибок

**Выводы:** Увеличение  $k_i$  уменьшает время установки системы и немного сглаживает колебания ошибки в начале(и наоборот). Чем больше  $k_p$ , тем выше пик у ошибки в начале и тем больше будет максимальная ошибка дальше(и наоборот).

## 6 СЛЕЖЕНИЕ ЗА ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ (РЕГУЛЯТОР ОБЩЕГО ВИДА)

Рассмотрим регулятор общего вида:

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^m (b_k s^k)}{\sum_{k=0}^m (a_k s^k)}$$

Нам нужно определить необходимый порядок  $m$ , выбрать конкретные параметры  $a_k, b_k$ , чтобы синтезировать физически реализуемый регулятор, для следующего задающего сигнала:

$$g(t) = 2\sin(0.5t)$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.25}$$

Пользуясь принципом внутренней модели из лекции напомним предпологаемый регулятор в общем виде, сразу с учётом того, что он должен быть физически реализуем ( $n \geq m$ ):

$$W_{reg}(s) = \frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^2 + 0.25}$$

Как можно заметить, знаменатель мы выбрали таким, что загасить влияние сигнала  $g(t)$ , который в прошлом задании не давал нам использовать предельную теорему. Мы это увидим далее...

$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{1}{1 + W} = \frac{1}{1 + \frac{3(k_2 s^2 + k_1 s + k_0)}{(s^2 + 0.25)(s^2 + 2.5s + 1)}}$$
$$W_{g \rightarrow e}(s) = \frac{(s^2 + 0.25)(s^2 + 2.5s + 1)}{(s^2 + 0.25)(s^2 + 2.5s + 1) + 3(k_2 s^2 + k_1 s + k_0)}$$

Тогда ошибка слежения будет такова:

$$E(s) = \frac{(s^2 + 2.5s + 1)}{(s^2 + 0.25)(s^2 + 2.5s + 1) + 3(k_2 s^2 + k_1 s + k_0)}$$

Тогда предельная теорема:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s^3 + 2.5s^2 + s)}{(s^2 + 0.25)(s^2 + 2.5s + 1) + 3(k_2 s^2 + k_1 s + k_0)} = 0$$

Нам удаётся свести установившуюся ошибку в ноль, но при этом теперь нам нужно подобрать такие коэффициенты регулятора, чтобы у нас были только отрицательные полюса, для этого мы раскроем скобки у знаменателя и применим критерий Гурвица:

$$s^4 + 2.5s^3 + (1.25 + 3k_2)s^2 + (3k_1 + 0.625)s + k_0 + 0.25$$

Для удобства примем  $k_0 = -0.25$ , чтобы упростить грядущие равенства:

$$a_4 = 1,$$

$$a_3 = 2.5,$$

$$a_2 = 1.25 + 3k_2,$$

$$a_1 = 3k_1 + 0.625,$$

$$a_0 = 0$$

Составим матрицу Гурвица 4-го порядка, а после выпишем с неё угловые миноры...

$$\begin{cases} a_1 > 0, \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 > 0, \\ a_2 > 0, \\ a_2 a_3 - a_1 > 0 \end{cases}$$

Последнее неравенство решим отдельно:

$$\frac{5}{2}(\frac{5}{4} + 3k_2) > 3k_1 + 0.625$$

...

$$k_1 < \frac{5}{6}(k_2 + 1)$$

Проведём несколько опытов:

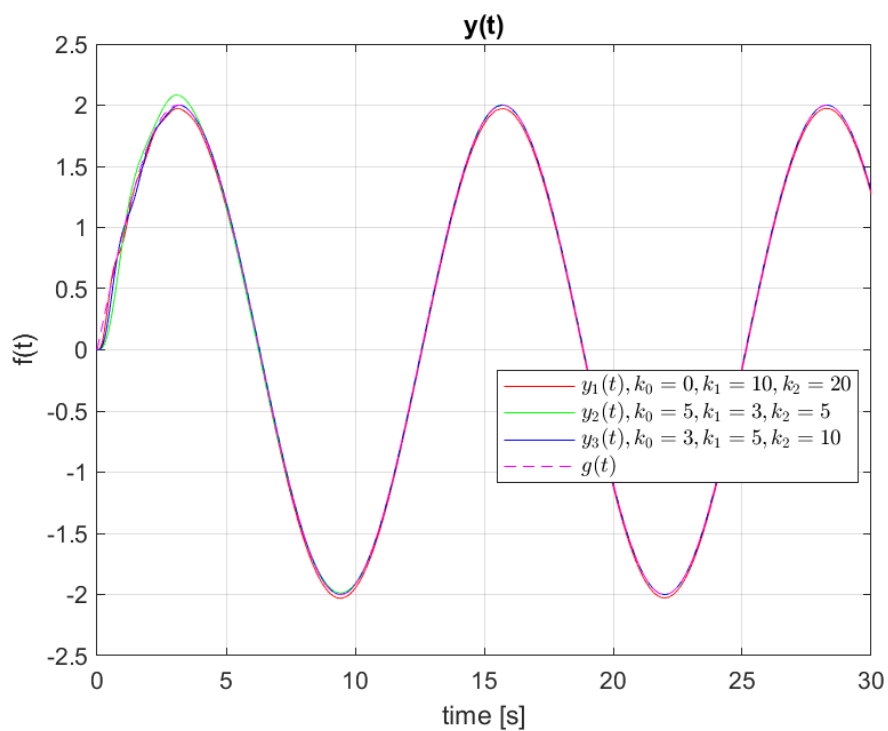


Рисунок 43 — Симуляция - гармоническое движение

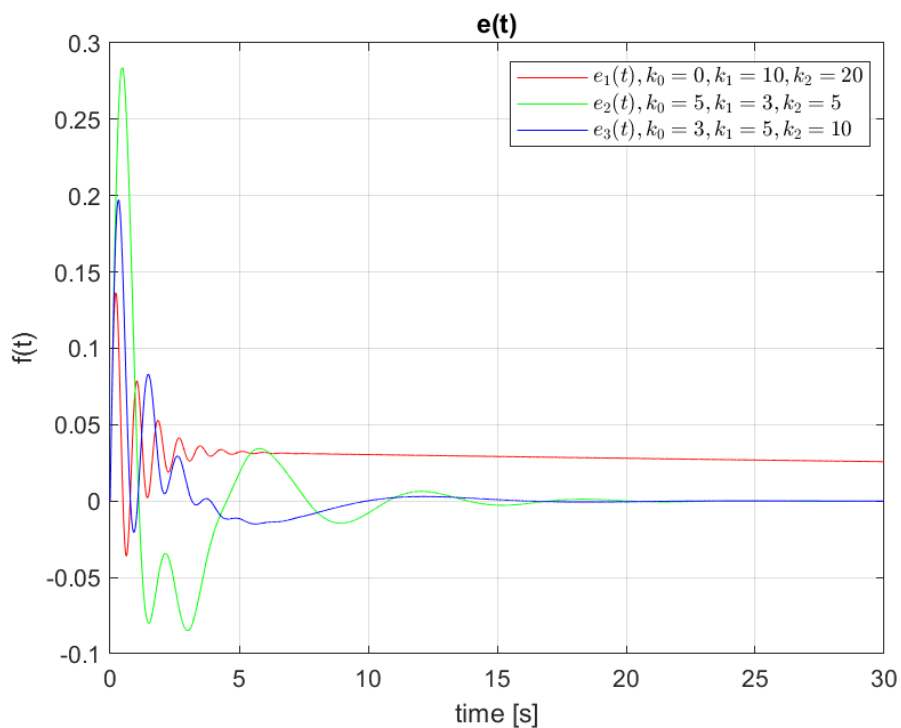


Рисунок 44 — Симуляция - гармоническое движение

**Выводы:** Ошибка системы стремится к нулю, хоть и неохотно (красный график ошибки), на графиках я взял относительно небольшой временной

промежуток, чтобы можно было начальные переходные процессы сравнить, далее они все монотонно стремятся к нулю, с разной скоростью.

Как можно заметить, в моём случае третий параметр  $k_0$  довольно сильно доводит переходный процесс до конца, то есть уводит ошибку максимально к нулю.

Мы смогли посчитать установившейся ошибку только из-за того, что построили регулятор таким образом, чтобы сократить мнимый корень из гармонического сигнала знаменателя.



## 7 ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

В этой работе были рассмотрены задачи стабилизации и слежения. Стабилизация была воспроизведена для идеального и реального дифференцирующего звена. Также мы посмотрели на задачу слежения для систем с различным порядком астатизма и используемым регулятором(П,И,ПИ).

Использовал связку *Live-script* + *Simulink*, там же можно взглянуть на графики и код, в [репозитории](#) можно найти исходники.