

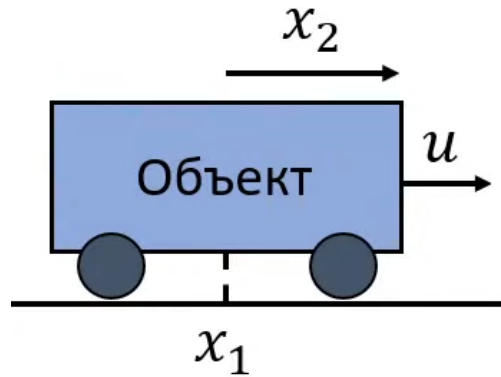
Задание 0. Синтез математической модели объекта управления.

Рис. 1: Тележка

Рассмотреть объект управления «тележка», представленный на рисунке 1, и выполнить следующие шаги:

- Синтезировать математическую модель «тележки»,

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + B_w w \\ y = Cx + D_w w, \end{cases} \quad (1)$$

приняв в качестве невозмущенной компоненты выхода линейную координату $\bar{y}(t) = Cx(t) = x_1(t)$ и считая, что некоторое возмущение $w(t)$ посредством матрицы B_w аддитивно с управлением действует на вектор состояния $x(t)$ и посредством матрицы D_w влияет на выход. Матрицы B_w и D_w задать самостоятельно.

- Задаться не менее, чем двумя вариантами регулируемого выхода

$$z(t) = C_Z x + D_Z u, \quad (2)$$

выбрав матрицы C_Z и D_Z самостоятельно.

Ожидаемые результаты:

- Математическая модель тележки.
- Выбранная матрица воздействия внешнего возмущения B_w .
- Выбранные виртуальные выходы $z(t)$ с указанием значений матриц C_Z и D_Z .

Задание 1. Синтез \mathcal{H}_2 -регулятора по состоянию.

Рассмотреть математическую модель объекта управления «тележка» (1), синтезированную в **Задании 0** (1), и для каждого из выбранного в **Задании 0** наборов матриц (C_Z, D_Z) , определяющих регулируемый выход (2), выполнить следующие шаги:

- Синтезировать соответствующий \mathcal{H}_2 -регулятор вида $u = Kx$ по состоянию путем решения соответствующего **матричного уравнения Риккати**:

$$A^\top Q + QA + C_Z^\top C_Z - QB(D_Z^\top D_Z)^{-1}B^\top Q = 0, \quad K = -(D_Z^\top D_Z)^{-1}B^\top Q. \quad (3)$$

- Найти передаточную функцию (матрицу) $W_{w \rightarrow z}(s)$ замкнутой системы от внешнего возмущения w к регулируемому выходу z .
- Построить для $W_{w \rightarrow z}(s)$ графики покомпонентных АЧХ.
- Построить для $W_{w \rightarrow z}(s)$ график сингулярных чисел.
- Найти \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормы $W_{w \rightarrow z}(s)$.
- Задаться не менее, чем двумя вариантами гармонического внешнего возмущения w на основании полученных графиков АЧХ и сингулярных чисел $W_{w \rightarrow z}(s)$. Среди выбранных возмущений должен присутствовать случай, близкий к «наихудшему» и ощутимо отличающийся от него по частоте.
- Для каждого из выбранных вариантов внешнего возмущения w выполнить компьютерное моделирование замкнутой системы при нулевых начальных условиях на объекте управления и построить графики компонент регулируемого выхода $z(t)$.
- Сравнить полученные результаты для различных вариантов внешнего возмущения и сделать выводы.

Ожидаемые результаты:

- Для каждого набора матриц (C_Z, D_Z) :
 - Матрица K \mathcal{H}_2 -регулятора.
 - Передаточная функция (матрица) $W_{w \rightarrow z}(s)$.

- АЧХ $W_{w \rightarrow z}(s)$.
- Сингулярные числа $W_{w \rightarrow z}(s)$.
- \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормы $W_{w \rightarrow z}(s)$.
- Выбранные варианты гармонического внешнего возмущения w .
- Графики сигналов $z(t)$ для каждого варианта выбранного внешнего возмущения.
- Листинги аналитических расчетов.
- Выводы.

Задание 2. Синтез \mathcal{H}_2 -регулятора по выходу.

Рассмотреть математическую модель объекта управления «тележка» (1), синтезированную в **Задании 0**, и для каждого из выбранного в **Задании 0** наборов матриц (C_Z, D_Z) , определяющих регулируемый выход (2) выполнить следующие шаги:

- Синтезировать соответствующий \mathcal{H}_2 -регулятор вида $u = K\hat{x}$ по выходу путем решения соответствующего **матричного уравнения Риккати** (3). Допускается сослаться на **Задание 1**.
- Синтезировать соответствующий \mathcal{H}_2 -наблюдатель путем решения соответствующего **матричного уравнения Риккати**:

$$AP + PA^\top + B_w B_w^\top - PC^\top (D_w D_w^\top)^{-1} CP = 0, \quad L = -PC^\top (D_w D_w^\top)^{-1}. \quad (4)$$

- Найти передаточную функцию (матрицу) $W_{w \rightarrow z}(s)$ замкнутой системы от внешнего возмущения w к регулируемому выходу z .
- Построить для $W_{w \rightarrow z}(s)$ графики покомпонентных АЧХ.
- Построить для $W_{w \rightarrow z}(s)$ график сингулярных чисел.
- Найти \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормы $W_{w \rightarrow z}(s)$.
- Задаться не менее, чем двумя вариантами гармонического внешнего возмущения w на основании полученных графиков АЧХ и сингулярных чисел $W_{w \rightarrow z}(s)$. Среди выбранных возмущений должен присутствовать случай, близкий к «наихудшему» и ощутимо отличающийся от него по частоте.

- Для каждого из выбранных вариантов внешнего возмущения w выполнить компьютерное моделирование замкнутой системы и построить графики компонент регулируемого выхода $z(t)$.
- Сравнить полученные результаты для различных вариантов внешнего возмущения и сделать выводы.

Ожидаемые результаты:

- Для каждого набора матриц (C_Z, D_Z) :
 - Матрица K \mathcal{H}_2 -регулятора.
 - Матрица L \mathcal{H}_2 -наблюдателя.
 - Передаточная функция (матрица) $W_{w \rightarrow z}(s)$.
 - АЧХ $W_{w \rightarrow z}(s)$.
 - Сингулярные числа $W_{w \rightarrow z}(s)$.
 - \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормы $W_{w \rightarrow z}(s)$.
 - Выбранные варианты гармонического внешнего возмущения w .
 - Графики сигналов $z(t)$ для каждого варианта выбранного внешнего возмущения.
- Листинги аналитических расчетов.
- Выводы.

Задание 3. Синтез \mathcal{H}_∞ -регулятора по состоянию.

Рассмотреть математическую модель объекта управления «тележка» (1), синтезированную в **Задании 0**. Выбрать один из заданных в **Задании 0** наборов матриц (C_Z, D_Z) , определяющих регулируемый выход (2) и выполнить следующие шаги:

- Задаться не менее, чем двумя значениями ограничивающего параметра $\gamma > 0$. Постараться выбрать так, чтобы одно из этих значений было приближенным к минимальному, при котором задача еще будет иметь решение. Для каждого из выбранных γ :

- Синтезировать соответствующий \mathcal{H}_∞ -регулятор вида $u = Kx$ по состоянию путем решения соответствующего **матричного уравнения типа Риккати**:

$$\begin{cases} A^\top Q + QA + C_Z^\top C_Z - QB(D_Z^\top D_Z)^{-1}B^\top Q + \gamma^{-2}QB_w B_w^\top Q = 0, \\ K = -(D_Z^\top D_Z)^{-1}B^\top Q. \end{cases} \quad (5)$$

- Найти передаточную функцию (матрицу) $W_{w \rightarrow z}(s)$ замкнутой системы от внешнего возмущения w к регулируемому выходу z .
- Построить для $W_{w \rightarrow z}(s)$ графики покомпонентных АЧХ.
- Построить для $W_{w \rightarrow z}(s)$ график сингулярных чисел.
- Найти \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормы $W_{w \rightarrow z}(s)$.
- Задаться не менее, чем двумя вариантами гармонического внешнего возмущения w на основании полученных графиков АЧХ и сингулярных чисел $W_{w \rightarrow z}(s)$. Среди выбранных возмущений должен присутствовать случай, близкий к «наихудшему» и ощутимо отличающийся от него по частоте.
- Для каждого из выбранных вариантов внешнего возмущения w выполнить компьютерное моделирование замкнутой системы при нулевых начальных условиях на объекте управления и построить графики компонент регулируемого выхода $z(t)$.
- Сравнить полученные результаты для различных вариантов внешнего возмущения и сделать выводы.
- Сравнить полученные результаты для различных вариантов ограничивающего параметра γ и сделать выводы.

Ожидаемые результаты:

- Выбранный набор матриц (C_Z, D_Z) .
- Выбранный набор параметров γ . Для каждого выбранного γ :
 - Матрица K \mathcal{H}_∞ -регулятора.
 - Передаточная функция (матрица) $W_{w \rightarrow z}(s)$.
 - АЧХ $W_{w \rightarrow z}(s)$.
 - Сингулярные числа $W_{w \rightarrow z}(s)$.
 - \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормы $W_{w \rightarrow z}(s)$.
 - Выбранные варианты гармонического внешнего возмущения w .

- Графики сигналов $z(t)$ для каждого варианта выбранного внешнего возмущения.
- Листинги аналитических расчетов.
- Выводы.

Задание 4. Синтез \mathcal{H}_∞ -регулятора по выходу.

Рассмотреть математическую модель объекта управления «тележка» (1), синтезированную в **Задании 0**. Задаться набором матриц (C_Z, D_Z) , определяющих регулируемый выход (2), который был использован в **Задании 3**, и выполнить следующие шаги:

- Задаться не менее, чем двумя значениями ограничивающего параметра $\gamma > 0$. Постараться выбрать так, чтобы одно из этих значений было приближенным к минимальному, при котором задача еще будет иметь решение. Для каждого из выбранных γ :
 - Синтезировать соответствующий \mathcal{H}_∞ -регулятор вида $u = K\hat{x}$ по выходу путем решения соответствующего **матричного уравнения типа Риккати** (5).
 - Синтезировать соответствующий \mathcal{H}_∞ -наблюдатель путем решения соответствующего **матричного уравнения типа Риккати**:

$$\begin{cases} AP + PA^\top + B_w B_w^\top - PC^\top (D_w D_w^\top)^{-1} CP + \gamma^{-2} PC_Z^\top C_Z P = 0, \\ L = -P(I - \gamma^{-2} QP)^{-1} (C + \gamma^{-2} D_w B_w^\top Q)^\top (D_w D_w^\top)^{-1}. \end{cases} \quad (6)$$

- Найти передаточную функцию (матрицу) $W_{w \rightarrow z}(s)$ замкнутой системы от внешнего возмущения w к регулируемому выходу z .
- Построить для $W_{w \rightarrow z}(s)$ графики покомпонентных АЧХ.
- Построить для $W_{w \rightarrow z}(s)$ график сингулярных чисел.
- Найти \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормы $W_{w \rightarrow z}(s)$.
- Задаться не менее, чем двумя вариантами гармонического внешнего возмущения w на основании полученных графиков АЧХ и сингулярных чисел $W_{w \rightarrow z}(s)$. Среди выбранных возмущений должен присутствовать случай, близкий к «наихудшему» и ощутимо отличающийся от него по частоте.

- Для каждого из выбранных вариантов внешнего возмущения w выполнить компьютерное моделирование замкнутой системы и построить графики компонент регулируемого выхода $z(t)$.
- Сравнить полученные результаты для различных вариантов внешнего возмущения и сделать выводы.
- Сравнить полученные результаты для различных вариантов ограничивающего параметра γ и сделать выводы.

Ожидаемые результаты:

- Выбранный набор матриц (C_Z, D_Z) .
- Выбранный набор параметров γ . Для каждого выбранного γ :
 - Матрица K \mathcal{H}_∞ -регулятора.
 - Матрица L \mathcal{H}_∞ -наблюдателя.
 - Передаточная функция (матрица) $W_{w \rightarrow z}(s)$.
 - АЧХ $W_{w \rightarrow z}(s)$.
 - Сингулярные числа $W_{w \rightarrow z}(s)$.
 - \mathcal{H}_2 и \mathcal{H}_∞ нормы $W_{w \rightarrow z}(s)$.
 - Выбранные варианты гармонического внешнего возмущения w .
 - Графики сигналов $z(t)$ для каждого варианта выбранного внешнего возмущения.
- Листинги аналитических расчетов.
- Выводы.

Контрольные вопросы для подготовки к защите:

1. Какие типы коэффициентов усиления линейных систем (*Gain*'ы) вам известны?
2. В чем заключается суть \mathcal{H}_2 -нормы передаточной функции? \mathcal{H}_∞ -нормы? Как эти нормы связаны с коэффициентами усиления (*Gain*'ами)?
3. В чем заключается геометрический смысл Грамиана управляемости? Грамиана наблюдаемости?
4. В чем заключается идея \mathcal{H}_2 -регулятора?
5. Каковы критерии существования единственного положительно определенного решения уравнения Риккати (3)?
6. В чем заключается идея \mathcal{H}_2 -наблюдателя?
7. Каковы критерии существования единственного положительно определенного решения уравнения Риккати (4)?
8. В чем заключается идея \mathcal{H}_∞ -регулятора?
9. Каковы критерии существования единственного положительно определенного решения уравнения типа Риккати (5)?
10. В чем заключается идея \mathcal{H}_∞ -наблюдателя?
11. Каковы критерии существования единственного положительно определенного решения уравнения типа Риккати (6)?
12. В чём заключается Принцип разделения (*Separation Principle*)? Соблюдается ли он в рассмотренных регуляторах?