МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ
по дисциплине
”Линейные системы автоматического управления”

по теме:
ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Студент:
Группа R3336 *Поляков А.А.*

Предподаватель:
к.т.н., доцент *Перегудин А.А.*

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1 ИСХОДНЫЙ КОД 3

2 ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-ВЫХОД 4

3 ПЕРЕХОД ОТ ФОРМЫ ВХОД-ВЫХОД К ФОРМЕ ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД........ 7

3.1 Получение передаточной функции 7

3.2 Математические модели 7

3.3 Моделирование полученных форм 9

3.4 Выводы 11

4 МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-ВЫХОД 12

4.1 Математическая модель системы 12

4.2 Структурная схема системы 12

4.3 Графики сигналов u(t) и y(t) 13

5 МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД........ 14

5.1 Строим структурную схему 14

5.2 Моделируем 15

1 ИСХОДНЫЙ КОД

Запускал все симуляции симулинка через Live-script матлабовские, там же можно взглянуть на графики, в репозитории можно найти исходники.

2 ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-ВЫХОД

В случае моего второго варианта получим следующее ДУ:

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6\ddot{u} + 4\dot{u} + 16u$$

Для того, чтобы составить структурную схему, выполним несколько преобразований с ДУ - заменим дифференцирования на применение соответсвующих операторов, а после преобразуем в более удобный вид:

$$\begin{aligned}
p^3[y] + 6p^2[y] + 11p[y] + 6y = 6p^2[u] + 4p[u] + 16u \\
y = \frac{1}{p^3}\Big[- 6p^2[y] - 11p[y] - 6y + 6p^2[u] + 4p[u] + 16u\Big] \\
y = -6\frac{1}{p}[y] - 11\frac{1}{p^2}[y] - 6\frac{1}{p^3}[y] + 6\frac{1}{p}[u] + 4\frac{1}{p^2}[u] + 16\frac{1}{p^3}[u] \\
y = \frac{1}{p}[-6y + 6u] + \frac{1}{p^2}[-11y + 4u]\frac{1}{p^3}[-6y + 16u]
\end{aligned}$$

Так как блок "дифференцирования"в матлабе - довольно опасная штука, то воспользуемся классическим приёмом составления схем: от обратного, постепенно снижая степень дифференцирования у "игрека"посредством интегрирования. Снизу мы построили передаточную функцию от ДУ, чтобы проверить результат симуляции:

В итоге, структурная схема системы, построенная в *Simulink*:

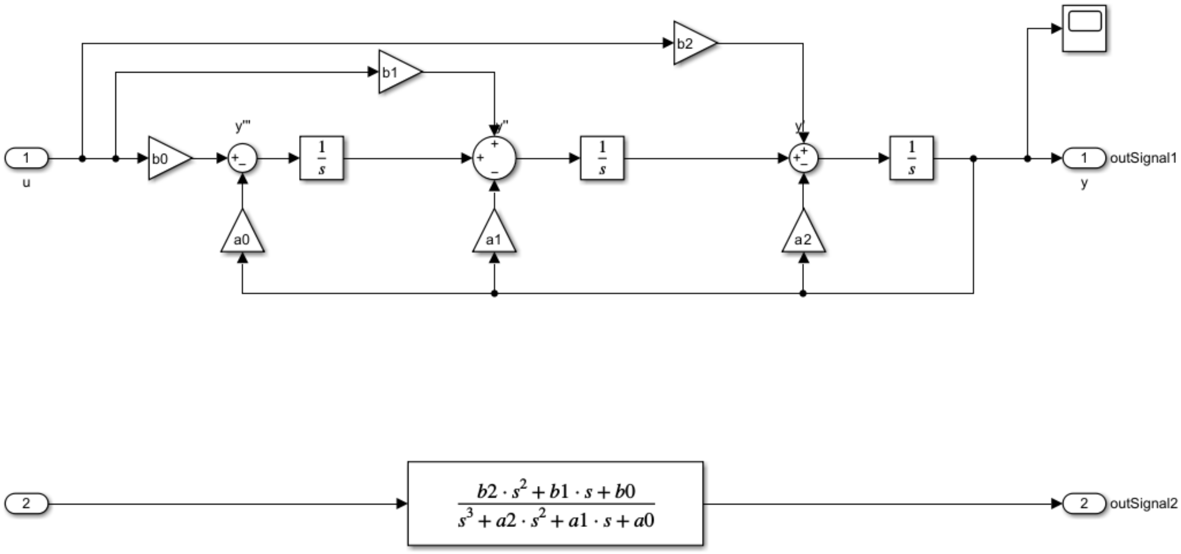

Рисунок 1 — Схема системы

Подадим на такую схему сигнал $u(t) = 1$ при нулевых начальных условиях: $\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0$. Графики сигналов, полученные на основе схемы:

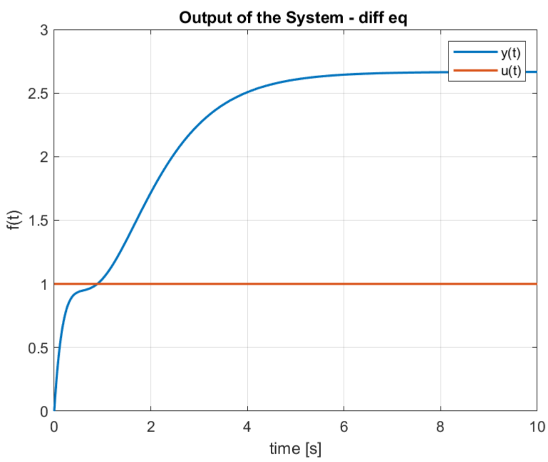

Рисунок 2 — Симуляция - дифференциальное уравнение

Проверим полученный результат с помощью передаточной функции, её схема была выше, результат:

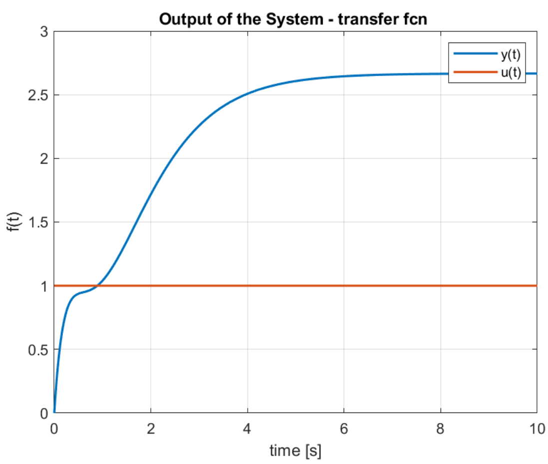

Рисунок 3 — Симуляция - передаточная функция

3 ПЕРЕХОД ОТ ФОРМЫ ВХОД-ВЫХОД К ФОРМЕ ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД

3.1 Получение передаточной функции

Выполним некоторые преобразования:

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6\ddot{u} + 4\dot{u} + 16u$$

$$(p^3 + 6p^2 + 11p + 6)[y] = (6p^2 + 4p + 16)[u]$$

$$y = \frac{6p^2 + 4p + 16}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}[u] + 0$$

В нашем случае передаточная функция $W(p)$ будет выглядеть следующим образом:

$$W(p) = \frac{6p^2 + 4p + 16}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

3.2 Математические модели

Чтобы перейти В-В $\to$ В-С-В в канонической управляемой и наблюдаемой форме, нужно использовать следующие формулы:

– Каноническая управляемая форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

– Каноническая наблюдаемая форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Получим следующие результаты:

– Каноническая управляемая форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

– Каноническая наблюдаемая форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Для того, чтобы построить математическую модель В-С-В в диагональной форме, нам нужно будет посмотреть на ПФ, как на дробно-рациональную функцию, а после представить её в виде простейших дробей(такой же приём мы использовали при интегрировании):

$$W(p) = \frac{6p^2 + 4p + 16}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} = -\frac{32}{p+2} + \frac{29}{p+3} + \frac{9}{p+1} = -\frac{8 \cdot 4}{p+2} + \frac{29 \cdot 1}{p+3} + \frac{3 \cdot 3}{p+1}$$

$$W(p) = -\frac{8 \cdot 4}{p+2} + \frac{29 \cdot 1}{p+3} + \frac{3 \cdot 3}{p+1} = \frac{\beta_1 \cdot \gamma_1}{p - \lambda_1} + \frac{\beta_2 \cdot \gamma_2}{p - \lambda_2} + \frac{\beta_3 \cdot \gamma_3}{p - \lambda_3}$$

– Диагональная форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

– С моими коэффициентами:

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\\ \dot{x_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-8\\ 29\\ 3\end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix}4 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

3.3 Моделирование полученных форм

Составим схемы с учётом того, что должны быть видны чётко каналы, соответствующие компонентам векторов состояния x:

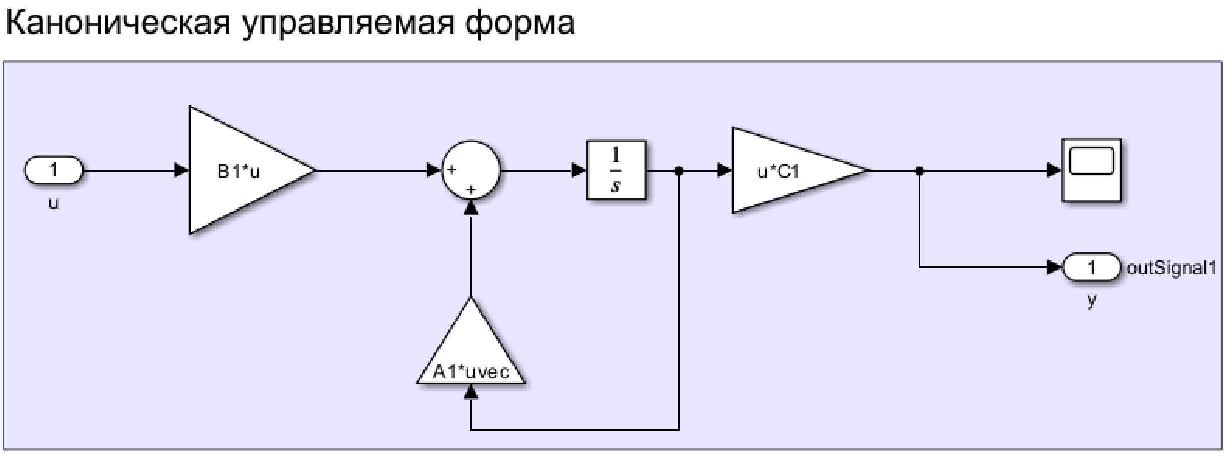

Рисунок 4 — Схема системы - управляемая форма

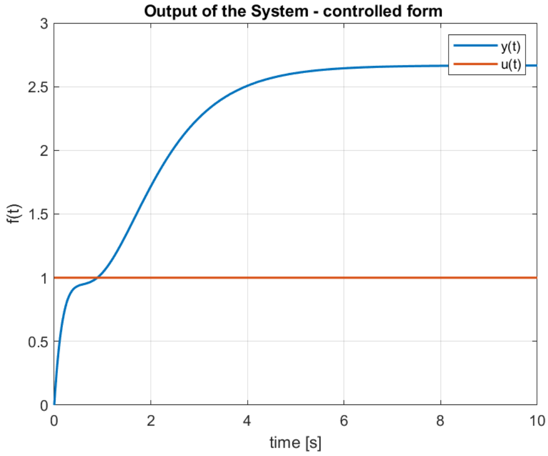

Рисунок 5 — Симуляция - управляемая форма

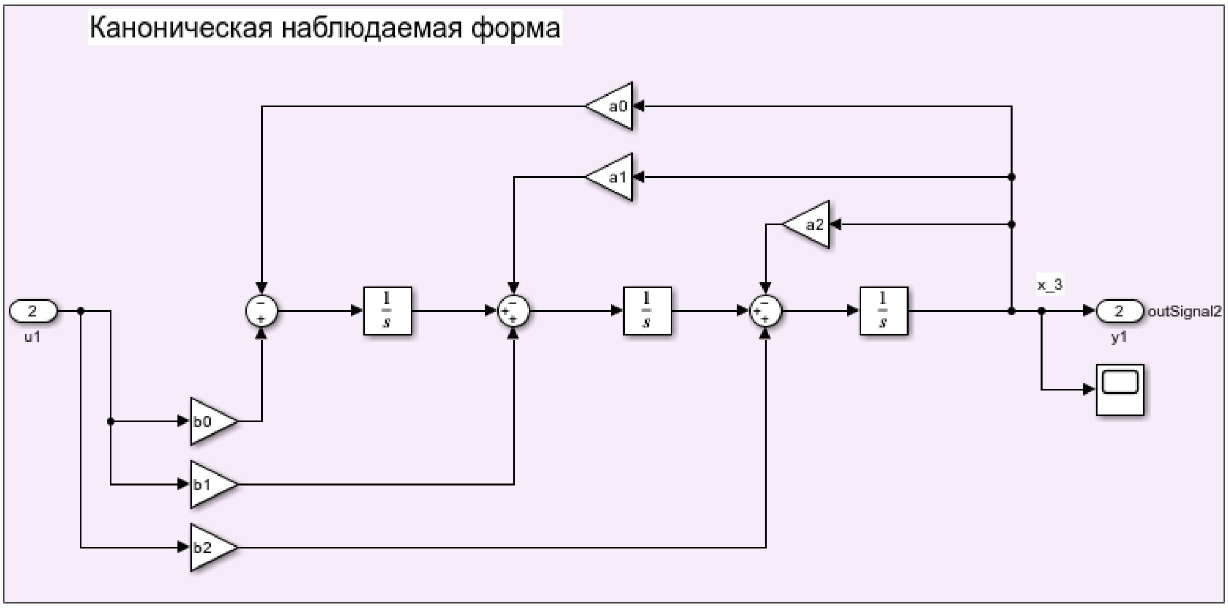

Рисунок 6 — Схема системы - наблюдаемая форма

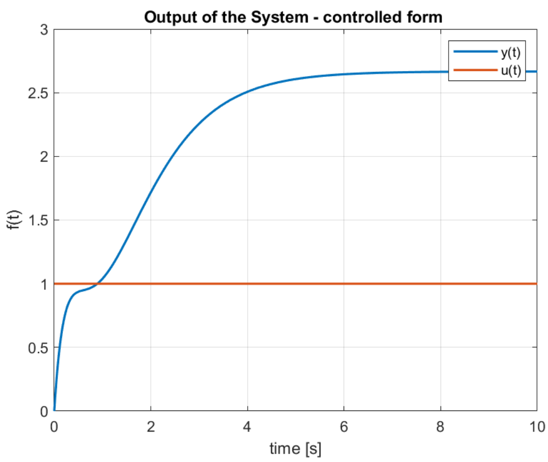

Рисунок 7 — Симуляция - наблюдаемая форма

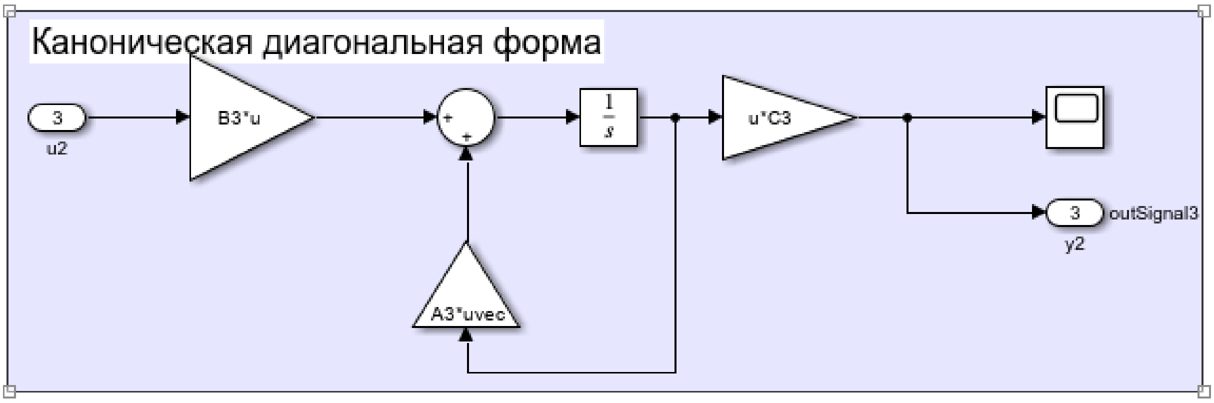

Рисунок 8 — Схема системы - диагональная форма

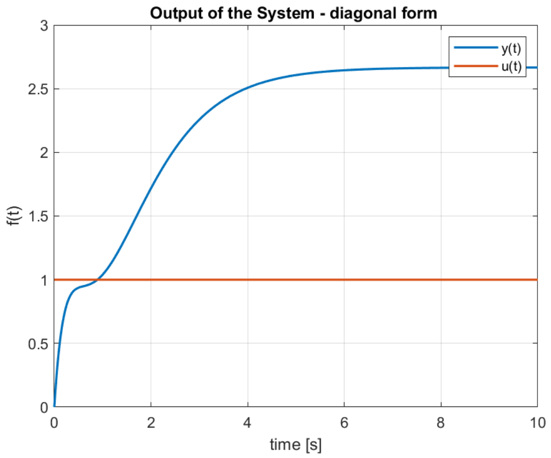

Рисунок 9 — Симуляция - диагональная форма

3.4 Выводы

Невооружённым взглядом видно, что все графики вышли идентичными между собой и по сравнению с формой В-В.

Несложно понять почему это так - ведь мы меняем только вид схемы, меняем точку зрения на систему.

4 МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-ВЫХОД

4.1 Математическая модель системы

Рассмотрим следующую систему:

$$A(p)y(t) = B(p)u(t),$$

В моём случае у меня будут следующие численные коэффициенты у матриц:

$$A(p) = \begin{bmatrix} p+14 & p+2 \\ p+7 & p+3 \end{bmatrix}, B(p) = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Чтобы получить передаточную матрицу (ПМ), немного преобразуем выражение выше:

$$y(t) = A^{-1}(p)B(p)u(t)$$

Перемножим и упростим $A^{-1}(p)B(p)$ с помощью матлаба, тогда получим следующее:

$$W(p) = \begin{bmatrix} -\frac{7p+12}{8p+32} & \frac{p+4}{2p+7} \\ \frac{7p+112}{8p+32} & -\frac{p}{2p+7} \end{bmatrix}$$

Что и будет являться математической моделью системы.

4.2 Структурная схема системы

Для построения схемы, нам нужно построить четыре передаточных функции - по каждой ячейке передаточной матрицы. Также мы знаем, что у нас два входа и выхода - $y_1(t), y_2(t), u_1(t), u_2(t)$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Тогда с помошью блоков ПФ получим следующую схему:

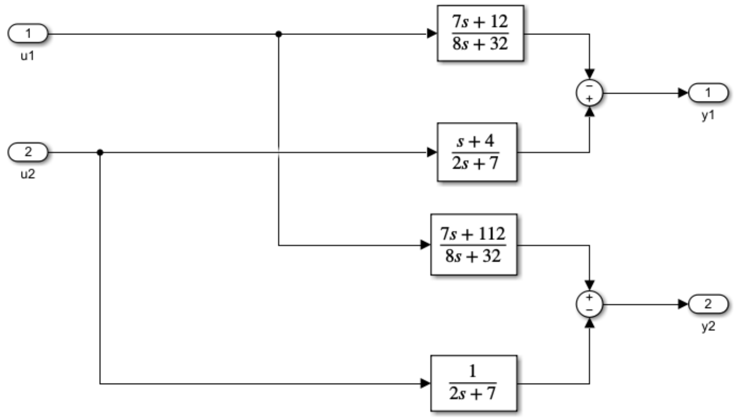

Рисунок 10 — Схема системы - MIMO, EE

4.3 Графики сигналов u(t) и y(t)

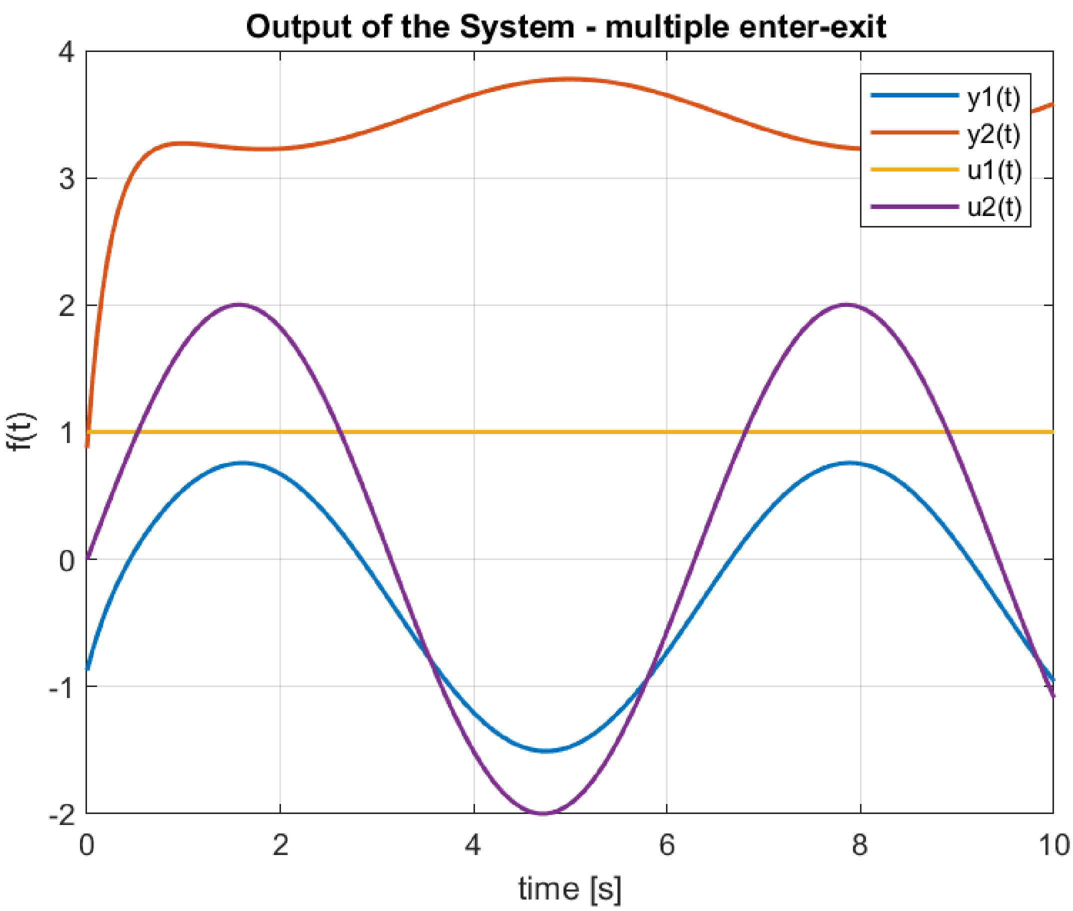

Рисунок 11 — Симуляция - $u_1(t) = 1, u_2(t) = 2sin(t)$

5 МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД

5.1 Строим структурную схему

В этом задании мы будем рассматривать систему следующего вида:

$$\begin{cases} x = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases}$$

С учётом моих коэффициентов она превратится в:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \\ y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Для удобства построения схемы, перемножим элементы системы и выпишем их:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= -2x_2 + u_1 + 3u_2 \\ \dot{x_2} &= x_1 - 3x_2 + 3u_1 + 5u_2 \\ y_1 &= 3x_1 + 5x_2 \\ y_2 &= 4x_1 + 7x_2 \end{aligned}$$

Теперь построить схему стало значительно проще, вот же она:

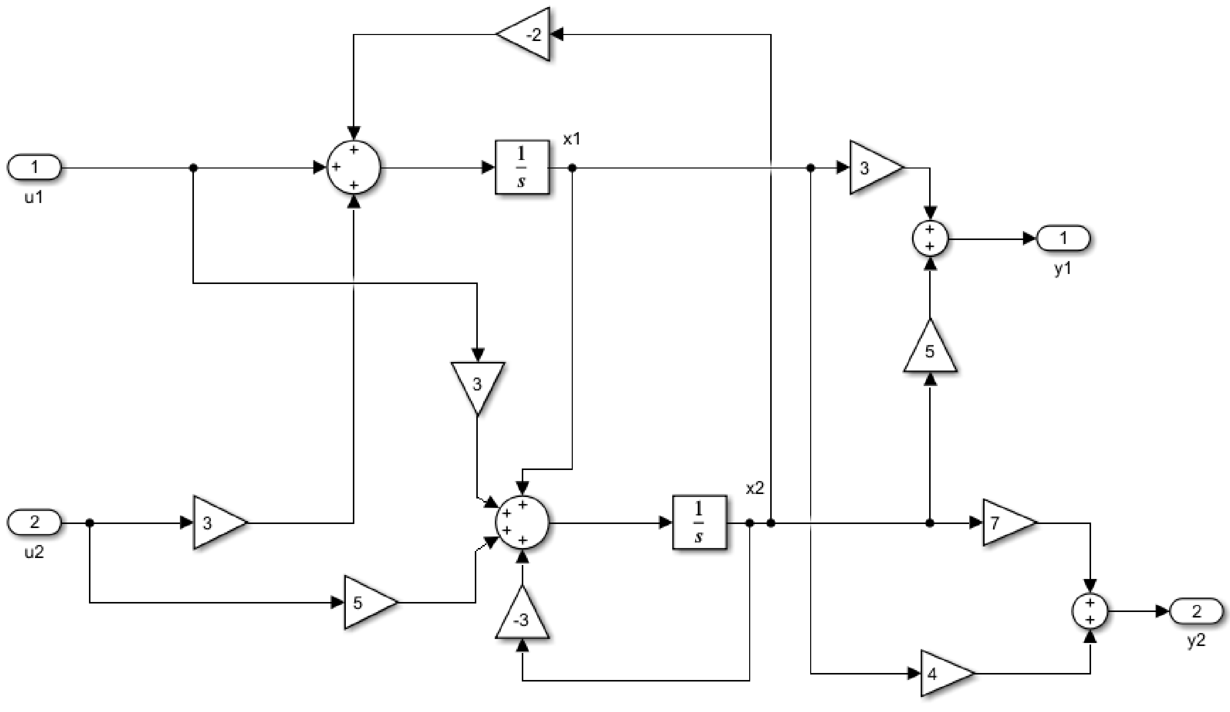

Рисунок 12 — Схему - MIMO, ECE

5.2 Моделируем

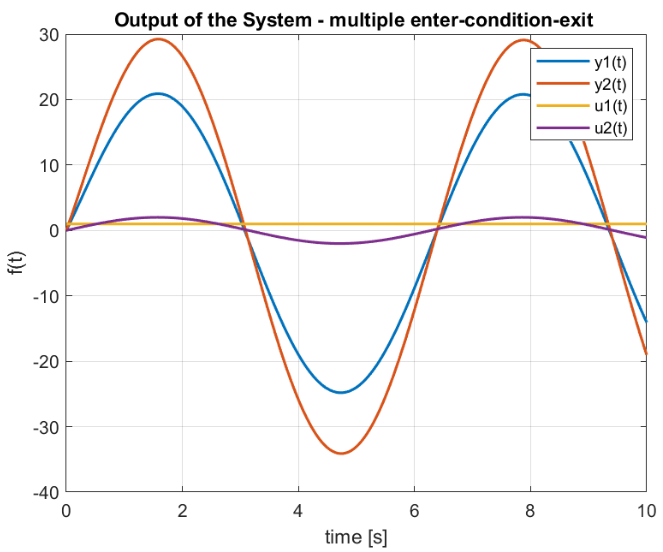

Рисунок 13 — Симуляция - $u_1(t) = 1, u_2(t) = 2sin(t)$