

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ

по лабораторной работе №1, вариант 2

”Линейные системы автоматического управления”

по теме:

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Студент:

Группа R3336

Поляков А.А.

Преподаватель:

к.т.н., доцент

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1	ИСХОДНЫЙ КОД	3
2	ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-ВЫХОД	4
3	ПЕРЕХОД ОТ ФОРМЫ ВХОД-ВЫХОД К ФОРМЕ ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД.....	6
3.1	Получение передаточной функции	6
3.2	Математические модели	6
3.3	Моделирование полученных форм	8
3.4	Выводы	12
4	МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-ВЫХОД	14
4.1	Математическая модель системы	14
4.2	Структурная схема системы	14
4.3	Графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$	15
5	МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД.....	16
5.1	Строим структурную схему	16
5.2	Моделируем	17
6	ВЫВОДЫ	18

1 ИСХОДНЫЙ КОД

Запускал все симуляции симулинка через Live-script матлабовские, там же можно взглянуть на графики, в [репозитории](#) можно найти исходники.

2 ОДНОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-ВЫХОД

В случае моего второго варианта получим следующее ДУ:

$$\ddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6\ddot{u} + 4\dot{u} + 16u$$

Для того, чтобы составить структурную схему, выполним несколько преобразований с ДУ - заменим дифференцирования на применение соответствующих операторов, а после преобразуем в более удобный вид:

$$\begin{aligned} p^3[y] + 6p^2[y] + 11p[y] + 6y &= 6p^2[u] + 4p[u] + 16u \\ y &= \frac{1}{p^3} \left[-6p^2[y] - 11p[y] - 6y + 6p^2[u] + 4p[u] + 16u \right] \\ y &= -6\frac{1}{p}[y] - 11\frac{1}{p^2}[y] - 6\frac{1}{p^3}[y] + 6\frac{1}{p}[u] + 4\frac{1}{p^2}[u] + 16\frac{1}{p^3}[u] \\ y &= \frac{1}{p}[-6y + 6u] + \frac{1}{p^2}[-11y + 4u] + \frac{1}{p^3}[-6y + 16u] \end{aligned}$$

Так как блок "дифференцирования" в матлабе - довольно опасная штука, то воспользуемся классическим приёмом составления схем: от обратного, постепенно снижая степень дифференцирования у "игрека" посредством интегрирования. Снизу мы построили передаточную функцию от ДУ, чтобы проверить результат симуляции:

В итоге, структурная схема системы, построенная в *Simulink*:

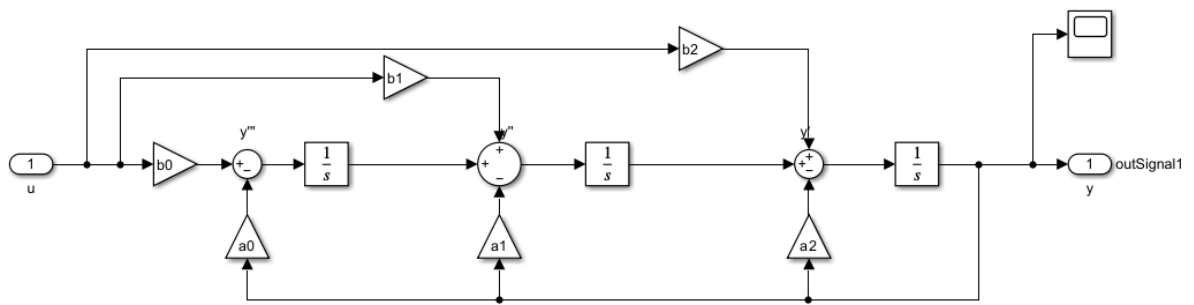


Рисунок 1 — Схема системы

Подадим на такую схему сигнал $u(t) = 1$ при нулевых начальных условиях: $\ddot{y}(0) = \dot{y}(0) = y(0) = 0$. Графики сигналов, полученные на основе схемы:

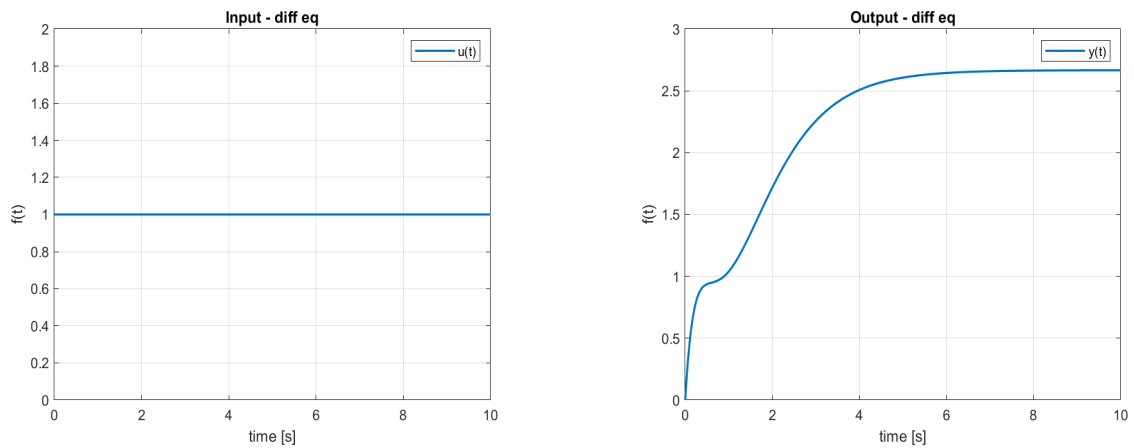


Рисунок 2 — Симуляция - дифференциальное уравнение

3 ПЕРЕХОД ОТ ФОРМЫ ВХОД-ВЫХОД К ФОРМЕ ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД

3.1 Получение передаточной функции

Выполним некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} \ddot{y} + 6\dot{y} + 11y &= 6\ddot{u} + 4\dot{u} + 16u \\ (p^3 + 6p^2 + 11p + 6)[y] &= (6p^2 + 4p + 16)[u] \\ y &= \frac{6p^2 + 4p + 16}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}[u] + 0 \end{aligned}$$

Схема для *Simulink* будет выглядеть следующим образом:

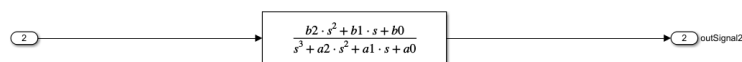


Рисунок 3 — Схема - передаточная функция

В нашем случае передаточная функция $W(p)$ будет выглядеть следующим образом:

$$W(p) = \frac{6p^2 + 4p + 16}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6}$$

3.2 Математические модели

Чтобы перейти В-В \rightarrow В-С-В в канонической управляемой и наблюдаемой форме, нужно использовать следующие формулы:

– Каноническая управляемая форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

– Каноническая наблюдаемая форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Получим следующие результаты:

– Каноническая управляемая форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

– Каноническая наблюдаемая форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Для того, чтобы построить математическую модель В-С-В в диагональной форме, нам нужно будет посмотреть на ПФ, как на дробно-рациональную функцию, а после представить её в виде простейших дробей (такой же приём мы использовали при интегрировании):

$$W(p) = \frac{6p^2 + 4p + 16}{p^3 + 6p^2 + 11p + 6} = -\frac{32}{p+2} + \frac{29}{p+3} + \frac{9}{p+1} = -\frac{8 \cdot 4}{p+2} + \frac{29 \cdot 1}{p+3} + \frac{3 \cdot 3}{p+1}$$

$$W(p) = -\frac{8 \cdot 4}{p+2} + \frac{29 \cdot 1}{p+3} + \frac{3 \cdot 3}{p+1} = \frac{\beta_1 \cdot \gamma_1}{p - \lambda_1} + \frac{\beta_2 \cdot \gamma_2}{p - \lambda_2} + \frac{\beta_3 \cdot \gamma_3}{p - \lambda_3}$$

– Диагональная форма:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

– С моими коэффициентами:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ 29 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

3.3 Моделирование полученных форм

Составим схемы с учётом того, что должны быть видны чётко каналы, соответствующие компонентам векторов состояния x :

Проверим результат из первого задания с помощью передаточной функции, её схема была выше, результат:

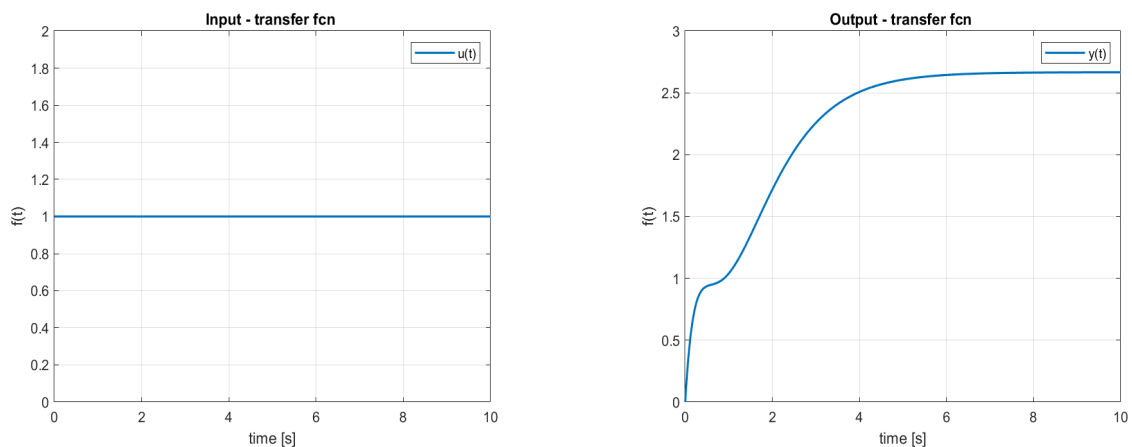


Рисунок 4 — Симуляция - передаточная функция

Каноническая управляемая форма

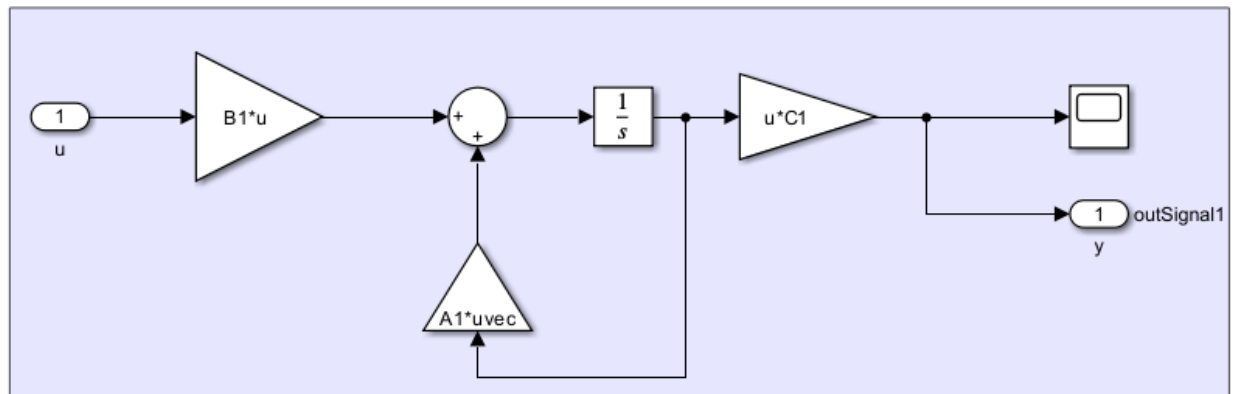


Рисунок 5 — Схема системы - управляемая форма

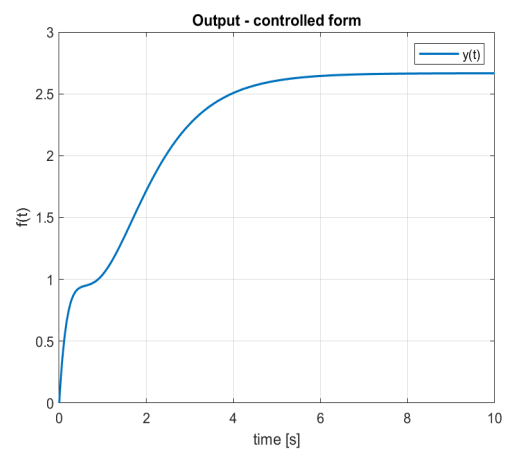
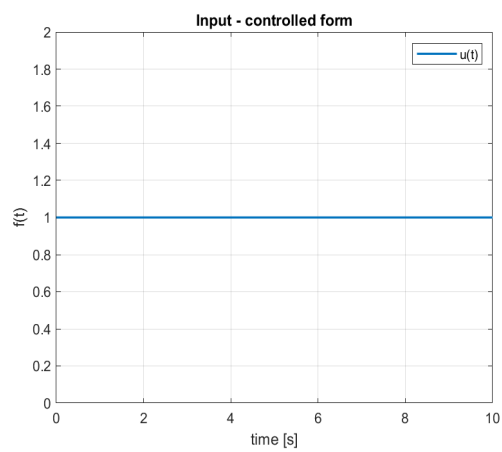


Рисунок 6 — Симуляция - управляемая форма

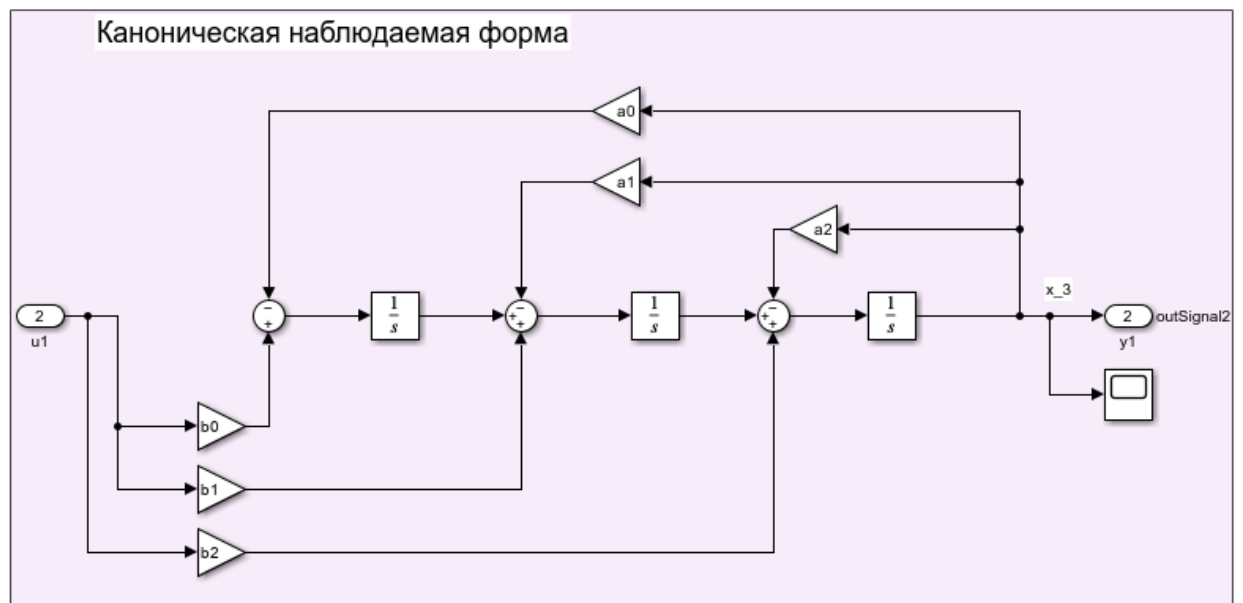


Рисунок 7 — Схема системы - наблюдаемая форма

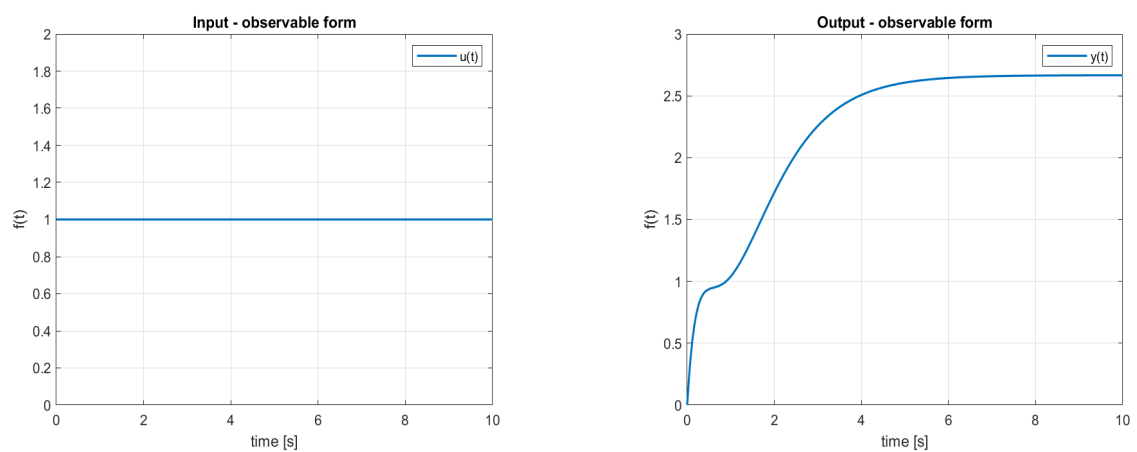


Рисунок 8 — Симуляция - наблюдаемая форма

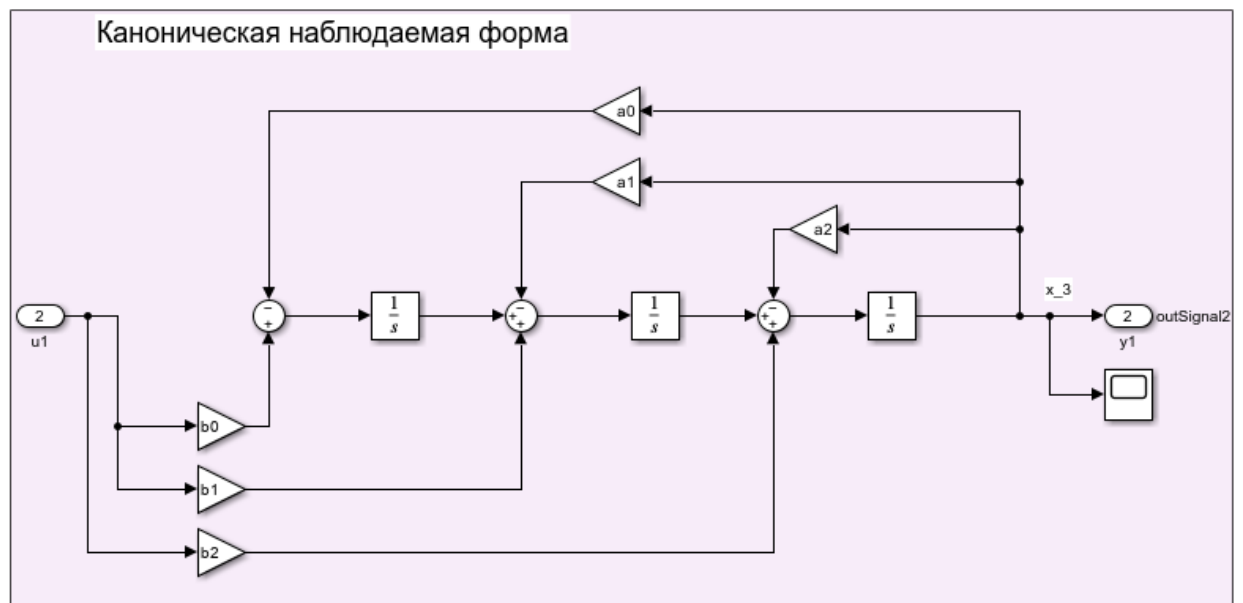


Рисунок 9 — Схема системы - контролируемая форма

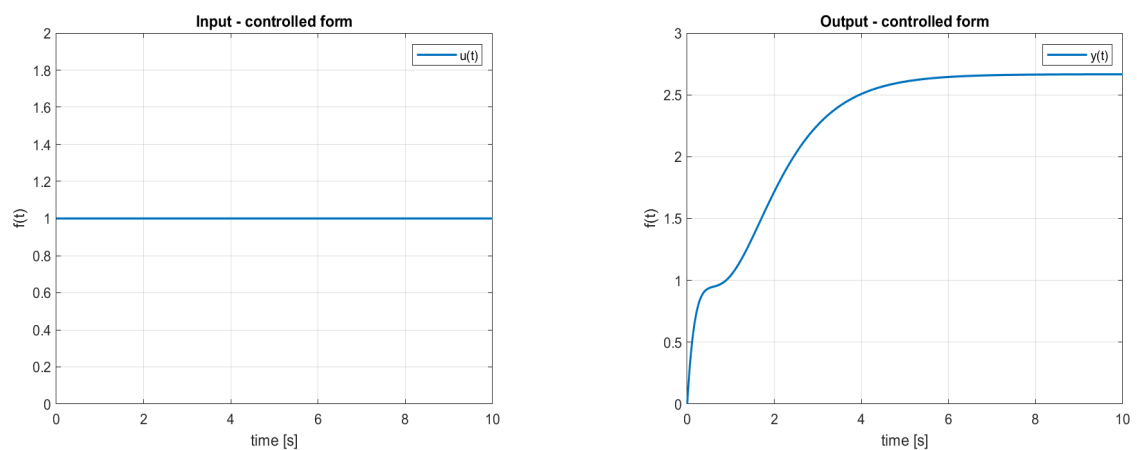


Рисунок 10 — Симуляция - контролируемая форма

Сведём четыре формы в один график, чтобы убедиться, что они совпадают: Как можно заметить, все цвета друг на друга наложились.

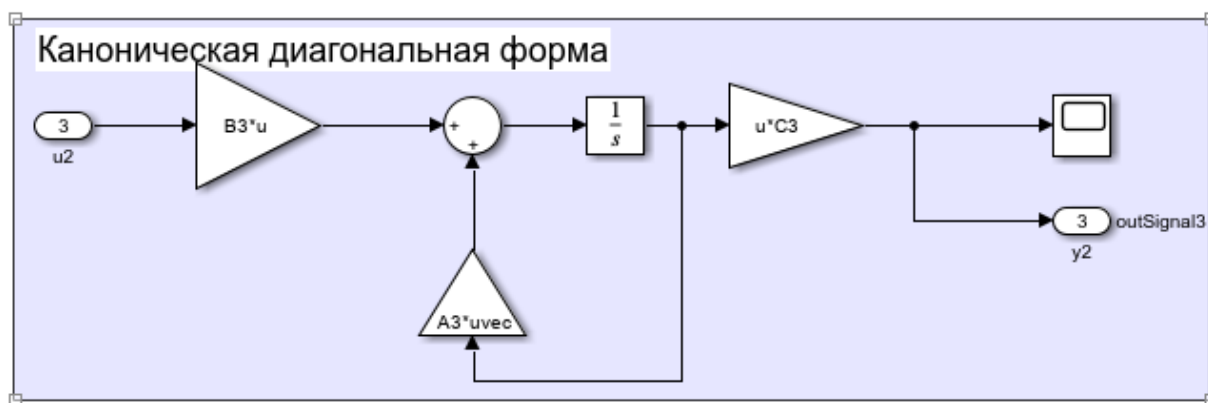


Рисунок 11 — Схема системы - диагональная форма

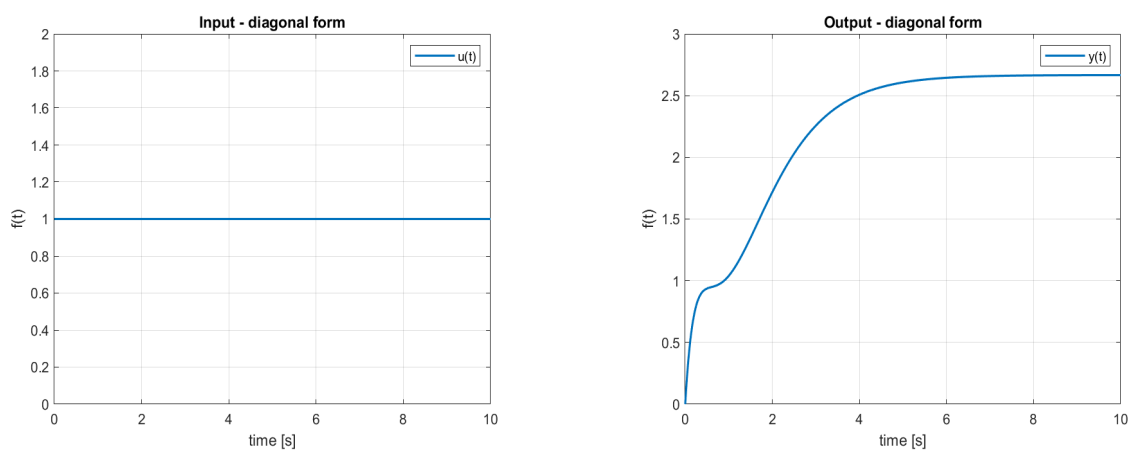


Рисунок 12 — Симуляция - диагональная форма

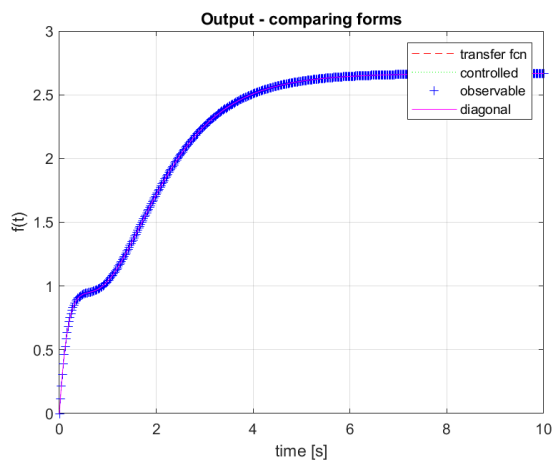


Рисунок 13 — Симуляция - сравнение форм

3.4 Выводы

Графики трёх форм В-С-В и реализацию через передаточную функцию(по сути В-В) вышли идентичными между собой.

Несложно понять почему это так - ведь мы меняем только вид схемы, меняем точку зрения на систему.

4 МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-ВЫХОД

4.1 Математическая модель системы

Рассмотрим следующую систему:

$$A(p)y(t) = B(p)u(t),$$

В моём случае у меня будут следующие численные коэффициенты у матриц:

$$A(p) = \begin{bmatrix} p + 14 & p + 2 \\ p + 7 & p + 3 \end{bmatrix}, B(p) = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$$

Чтобы получить передаточную матрицу (ПМ), немного преобразуем выражение выше:

$$y(t) = A^{-1}(p)B(p)u(t)$$

Перемножим и упростим $A^{-1}(p)B(p)$ с помощью матлаба, тогда получим следующее:

$$W(p) = \begin{bmatrix} -\frac{7p+12}{8p+32} & \frac{p+4}{2p+7} \\ \frac{7p+112}{8p+32} & -\frac{p}{2p+7} \end{bmatrix}$$

Что и будет являться математической моделью системы.

4.2 Структурная схема системы

Для построения схемы, нам нужно построить четыре передаточных функции - по каждой ячейке передаточной матрицы. Также мы знаем, что у нас два входа и выхода - $y_1(t), y_2(t), u_1(t), u_2(t)$:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p) \\ W_{21}(p) & W_{22}(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Тогда с помощью блоков ПФ получим следующую схему:

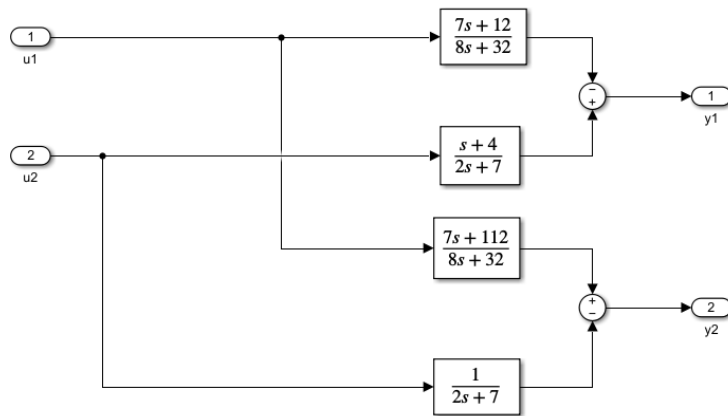


Рисунок 14 — Схема системы - ММО, ЕЕ

4.3 Графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$

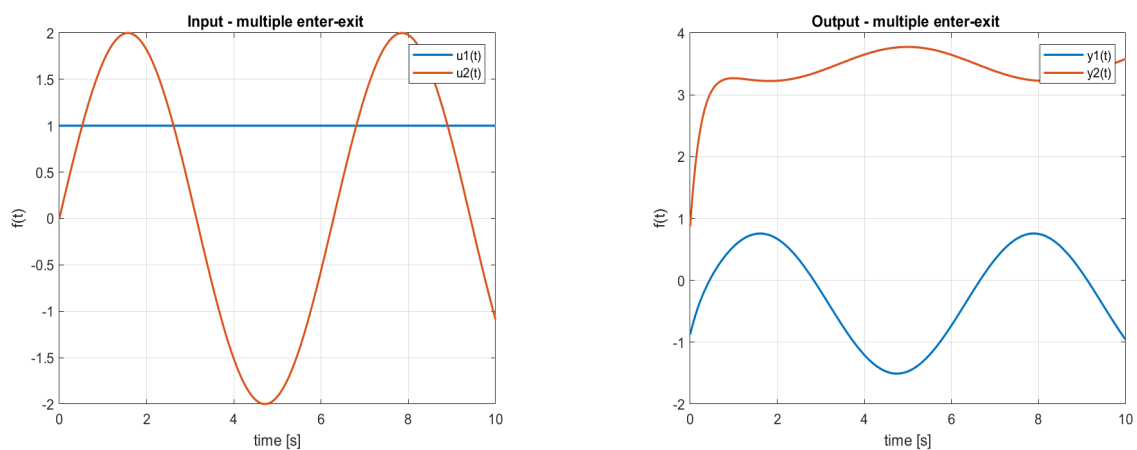


Рисунок 15 — Симуляция - $u_1(t) = 1, u_2(t) = 2\sin(t)$

5 МНОГОКАНАЛЬНАЯ СИСТЕМА В ФОРМЕ ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД

5.1 Строим структурную схему

В этом задании мы будем рассматривать систему следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases}$$

С учётом моих коэффициентов она превратится в:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \\ y = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Для удобства построения схемы, перемножим элементы системы и выпишем их:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_2 + u_1 + 3u_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 3x_2 + 3u_1 + 5u_2 \\ y_1 &= 3x_1 + 5x_2 \\ y_2 &= 4x_1 + 7x_2 \end{aligned}$$

Теперь построить схему стало значительно проще, вот же она:

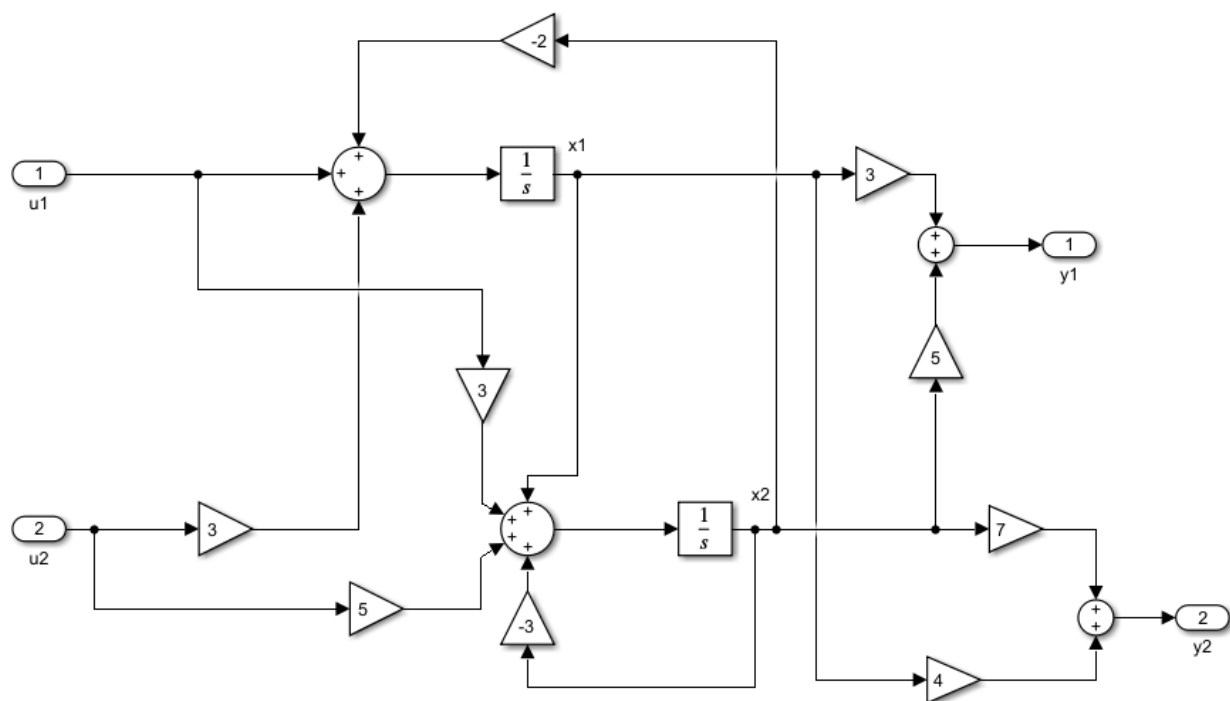


Рисунок 16 — Схему - MIMO, ECE

5.2 Моделируем

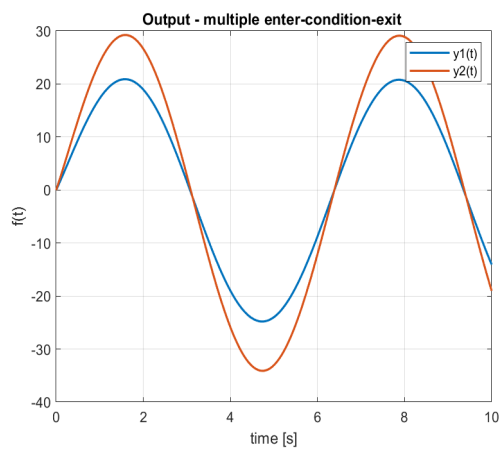
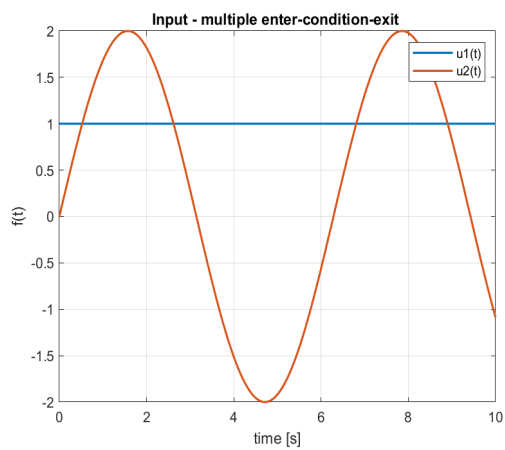


Рисунок 17 — Симуляция - $u_1(t) = 1, u_2(t) = 2\sin(t)$

6 ВЫВОДЫ

В процессе выполнения данной работы мы посмотрели как создавать простейшие линейные системы в связке *MATLAB+Simulink*, используя только элементарные блоки(integrator, gain, sum). Посмотрели мы самые разные системы - начиная с систем типа "вход-выход" потом преобразовали их в три разновидности "вход-состояния-выход" и убедились, что они дают одни и те же результаты симулирования, потому что это разный "взгляд" на линейную систему.

Мы подтвердили следующее предположение: форма В-В может быть представлена бесконечным количеством различных форм В-С-В.