МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ
по лабораторной работе №4, вариант - 2
Линейные системы автоматического управления

по теме:
ТОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМЫ, АСТАТИЗМЫ И РЕГУЛЯТОРЫ

Студент:
Группа R3336 *Поляков А.А.*

Предподаватель:
к.т.н., доцент *Пашенко А.В.*

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1 СТАБИЛИЗАЦИЯ С ИДЕАЛЬНЫМ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМ ЗВЕНОМ 3

2 СТАБИЛИЗАЦИЯ С РЕАЛЬНЫМ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМ ЗВЕНОМ 7

3 СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА (П-РЕГУЛЯТОР) 10

3.1 Стационарный режим работы 10

3.2 Движение с постоянной скоростью 14

4 СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (И-РЕГУЛЯТОР) 18

4.1 Стационарный режим работы 18

4.2 Движение с постоянной скоростью 21

4.3 Движение с постоянным ускорением 25

5 СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (ПИ-РЕГУЛЯТОР) 29

5.1 Движение с постоянной скоростью 29

5.2 Движение за гармоническим сигналом 33

6 СЛЕЖЕНИЕ ЗА ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ (РЕГУЛЯТОР ОБЩЕГО ВИДА) 37

7 ОБЩИЕ ВЫВОДЫ 41

1 СТАБИЛИЗАЦИЯ С ИДЕАЛЬНЫМ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМ ЗВЕНОМ

Перед нами объект управления 2-го порядка, заданный дифференциальным уравнением:

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = u$$

Придумаем такие a_2,a_1,a_0, чтобы система содержала хотя бы один неустойчивый полис.

Воспользуемся для этого старой доброй - теоремой Виета:

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = \frac{a_0}{a_2} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{a_1}{a_2} \end{cases}$$

Допустим…

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2 = \frac{-3}{1} \\ \lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{-2}{1} \end{cases}$$

Тогда получаем следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 3 \\ \lambda_2 &= -1, \\ a_0 &= -3, \\ a_1 &= -2, \\ a_2 &= 1 \end{aligned}$$

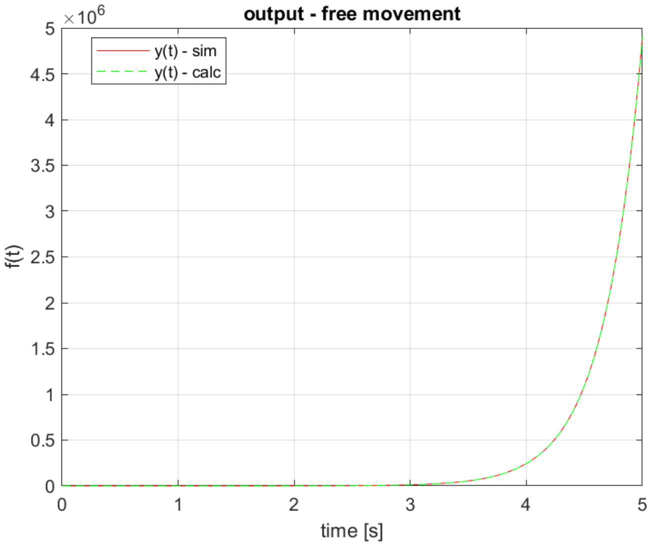

Рисунок 1 — Симуляция - свободное движение, $\dot{y}(0) = 3, y(0) = 3$

В этом случае мы получим следующее аналитическое выражение, уже учитывая прошлые начальные условия:

$$y_{open}(t) = 1.5(e^{-t} + e^{3t})$$

Как можно заметить по графику выше, результаты симуляции и аналитический расчётов совпадут.

Рассмотрим ПД-регулятор:

$$u = k_0 y + k_1 \dot{y}$$

Получим следующую схему для нашей замкнутой системы с ПД-регулятором в режиме стабилизации:

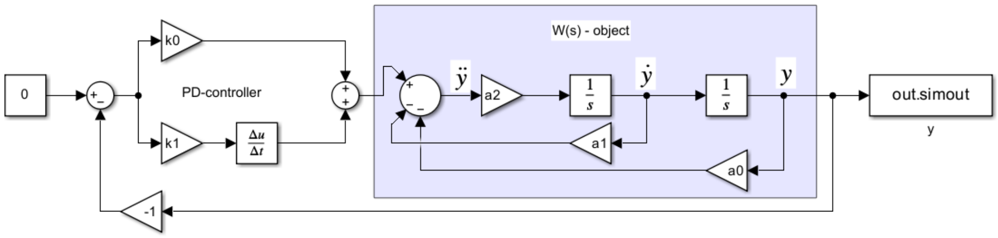

Рисунок 2 — Структурная схема - замкнутая система с ПД-регулированием

Выполним некоторые преобразования над уравнением системы, чтобы воспользоваться критерием Гурвица:

$$a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = k_0 y + k_1 \dot{y}$$
$$a_2\ddot{y} + (a_1 - k_1)\dot{y} + (a_0 - k_0)y = 0$$
$$\ddot{y} + \frac{a_1 - k_1}{a_2}\dot{y} + \frac{a_0 - k_0}{a_2}y = 0$$

Следуя критерию, получим следующие неравенства в общем виде:

$$\begin{cases} \frac{a_1 - k_1}{a_2} > 0, \\ \frac{a_0 - k_0}{a_2} > 0 \end{cases}$$

В нашем случае они чуть упростится:

$$k_1 \in (-\infty, -2),$$
$$k_0 \in (-\infty, -3)$$

Возьмём конкретные значения параметра, чтобы провести моделирование, начальные условия возьмём такие же, как в прошлом опыте:

$$k_1 = -4, k_0 = -6$$

В этом случае мы получим следующее аналитическое выражение, уже учитывая прошлые начальные условия:

$$y_{closed}(t) = e^{-t}(3cos(\sqrt{2}t) + \frac{6}{\sqrt{2}}sin(\sqrt{2}t))$$

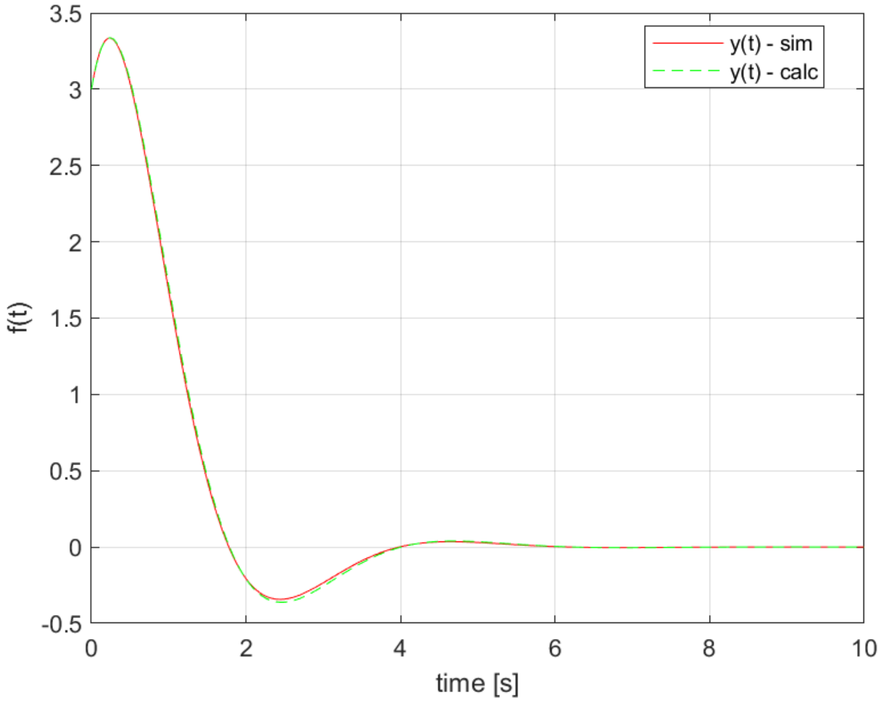

Рисунок 3 — Симуляция - асимпотитчески устойчивая система с ПД-регулированием

Как можно заметить по графику выше, результаты симуляции и аналитический расчётов также совпадают.

Сделаем промежуточные выводы: два графика выше отличаются своей устойчивостью, показывая то, что если мы подберём ”хорошие”коэффициенты регулятора, то сможем получить асимпотическую устойчивость, это можно назвать неким свойством работы регулятора.

2 СТАБИЛИЗАЦИЯ С РЕАЛЬНЫМ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИМ ЗВЕНОМ

Заменим блок аппроксимации производной *derivative* на передаточную функцию вида:

$$W_{diff}(s) = \frac{s}{Ts+1}$$

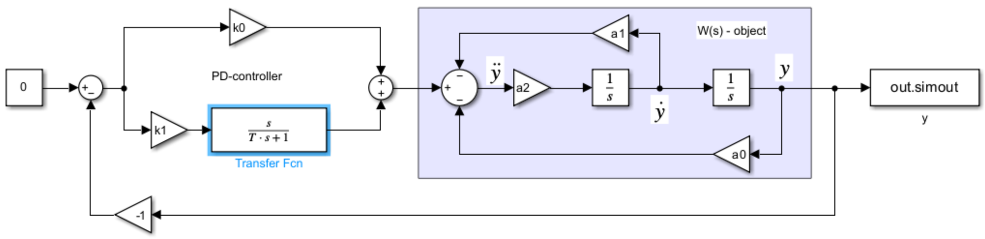

Рисунок 4 — Структурная схема - новая передаточная функция

Определим критические значения параметра T, для этого воспользуемся преобразованием Лапласа, а также ранее определённые константы регулятора:

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) + 0 = k_0 Y(s) + k_1 Y \frac{s}{Ts+1}$$

где $+0$ - обнулённые начальные условия, поскольку сейчас нас волнует вопрос устойчости -, а это только знаменатель от $Y(s)$

$$s^2 Y(s) - 2sY(s) - 3Y(s) + 0 = -6Y(s) - 4Y\frac{s}{Ts+1}$$

$$s^2 Y(s) - 2sY(s) + 3Y(s) = -4Y\frac{s}{Ts+1}\bigg| \cdot Ts+1$$

$$\dots$$

$$s^3 Y(s) + s^2 Y(s)(\frac{1-2T}{T}) + sY(s)(\frac{3T+2}{T}) + \frac{3}{T} = 0$$

Воспользуемся критерием Гурвица для системы третьего порядка:

$$\begin{cases} T > 0 \\ 3T+2 > 0 \\ 1-2T > 0 \\ \frac{(3T+2)(1-2T)}{T^2} > \frac{3}{T} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T \in (0, \frac{1}{2}) \\ (3T+2)(1-2T) > 3T \end{cases}$$

В итоге получим следующий интервал: $T \in (0; \frac{1}{3})$.

Проведём несколько экспериментов при разных T, сведём их в один график для сопоставления:

$$T_1 = 1/4, T_2 = 1/12, T_3 = 1/24, T_4 = 1/48$$

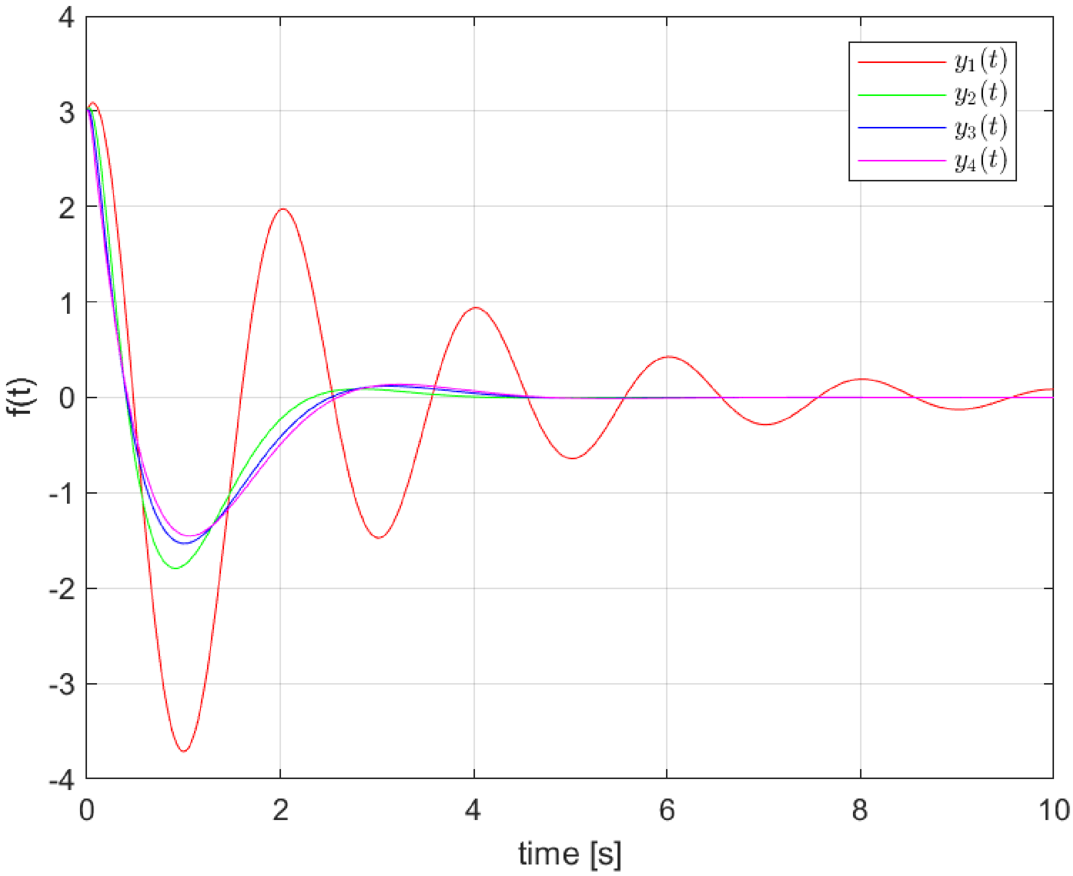

Рисунок 5 — Симуляция - устойчивость при $T = 1/4$

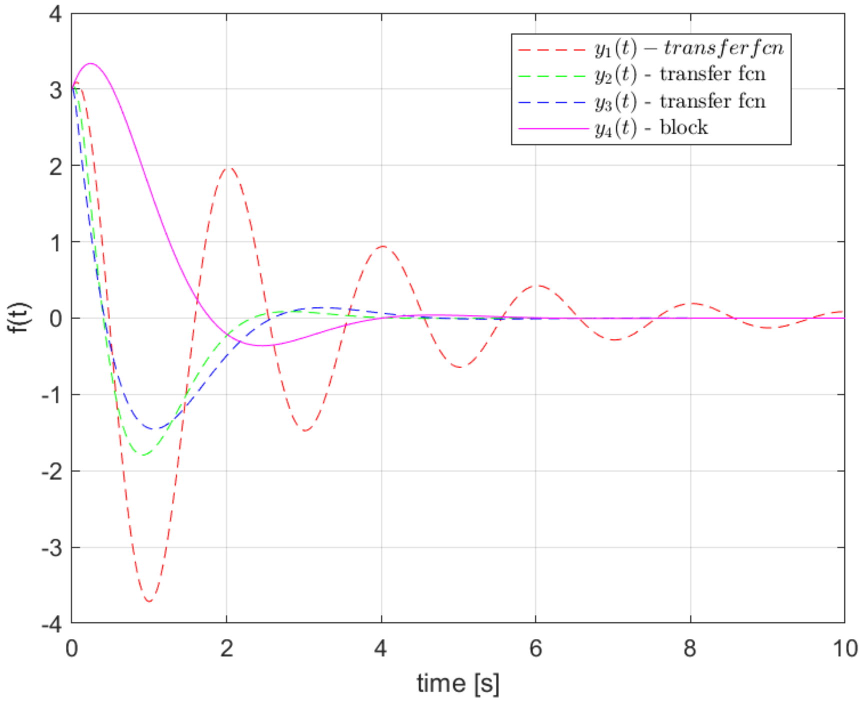

Рисунок 6 — Симуляция - сравнение задание 1/2

Выводы: Как можно заметить, при уменьшении параметра T к нулю, у нас улучшается регулирование - уменьшается перерегулирование (убираем колебания системы) и время переходного процесса.

Разница между аппроксимацией производной с помощью специального блока из *simulink* или с помощью передаточной функции довольна заметна на сравнительном графике - но при хорошо подобранном T(достаточно маленьком) наша аппроксимация с помощью блока передаточной функции примерно также быстро сходится в ноль, также как и блоковая аппроксимация, хотя она все равно быстрее. Думаю, что передаточная функция в качестве аппроксимации менее вычислительно требовательная, нежели блок симулинка.

3 СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ НУЛЕВОГО ПОРЯДКА (П-РЕГУЛЯТОР)

Теперь будем работать с пропорциональным регулятором следующего вида:

$$H(s) = k$$

В случае моего второго варианта у меня будет следующая функция управления:

$$W(s) = \frac{3}{s^2 + 2.5s + 1}$$

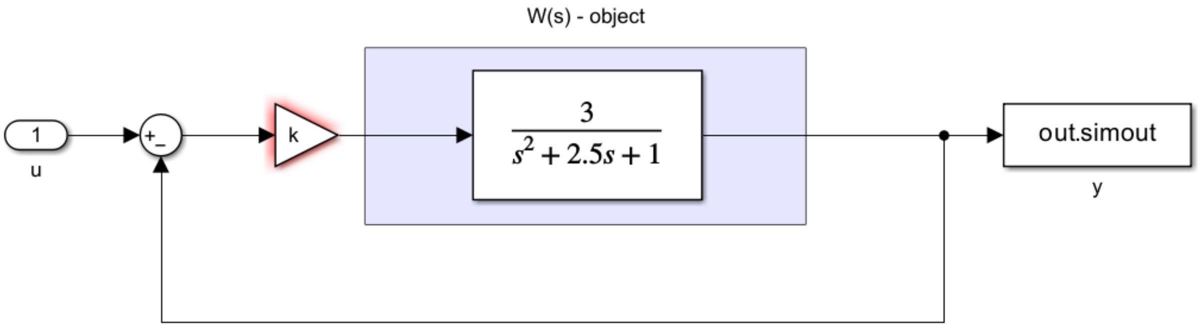

Рисунок 7 — Структурная схема - П-регулятор

3.1 Стационарный режим работы

Будем пытаться угнаться за сигналом $g(t) = A = 2$ в случае моего варианта. Выберем следующие k:

$$k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 10$$

Аналитически определим e_{final} пользуясь теоремой о предельном значении для каждого k:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

Для начала найдём образ ошибки слежения: $E(s) = W_{g\to e}(s)G(s)$

$$W_{g\to e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s^2 + 2.5s + 1}{s^2 + 2.5s + 3k + 1}$$

$$G(s) = \frac{A}{s}$$

$$E(s) = \frac{A(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^2 + 2.5s + 3k + 1)}$$

В итоге:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{A(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^2 + 2.5s + 3k + 1)}$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} \frac{A(s^2 + 2.5s + 1)}{s^2 + 2.5s + 3k + 1} = \frac{A}{3k + 1}$$

$$e_1 = 0.5$$

$$e_2 = 2/13$$

$$e_3 = 2/31$$

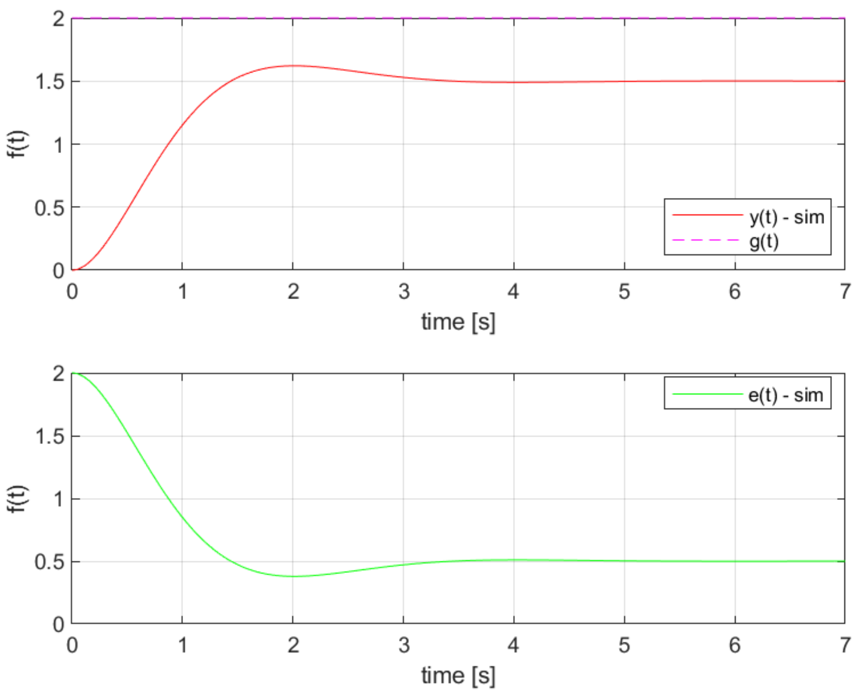

Рисунок 8 — Симуляция - стационарный, $k = 1$

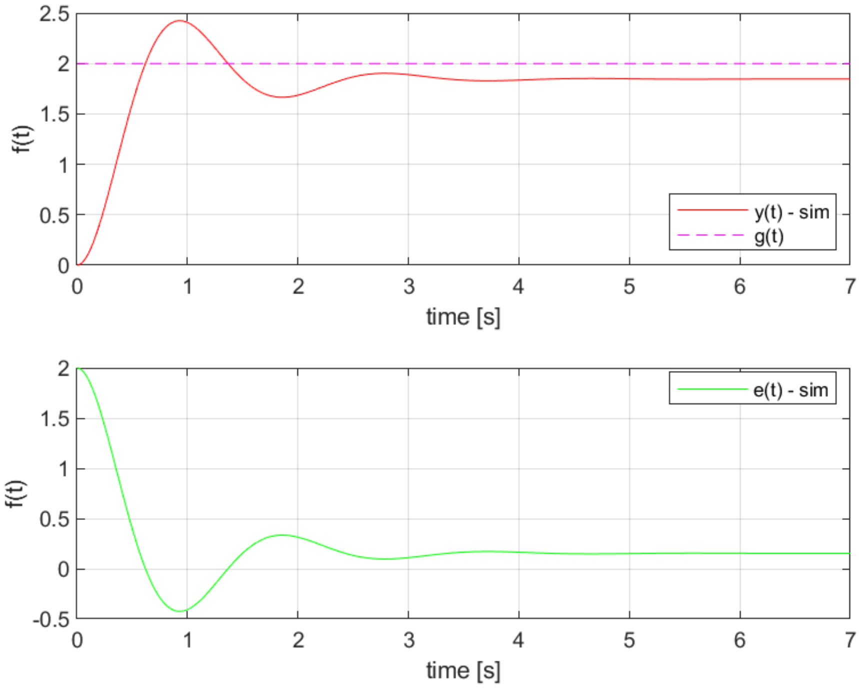

Рисунок 9 — Симуляция - стационарный, $k = 4$

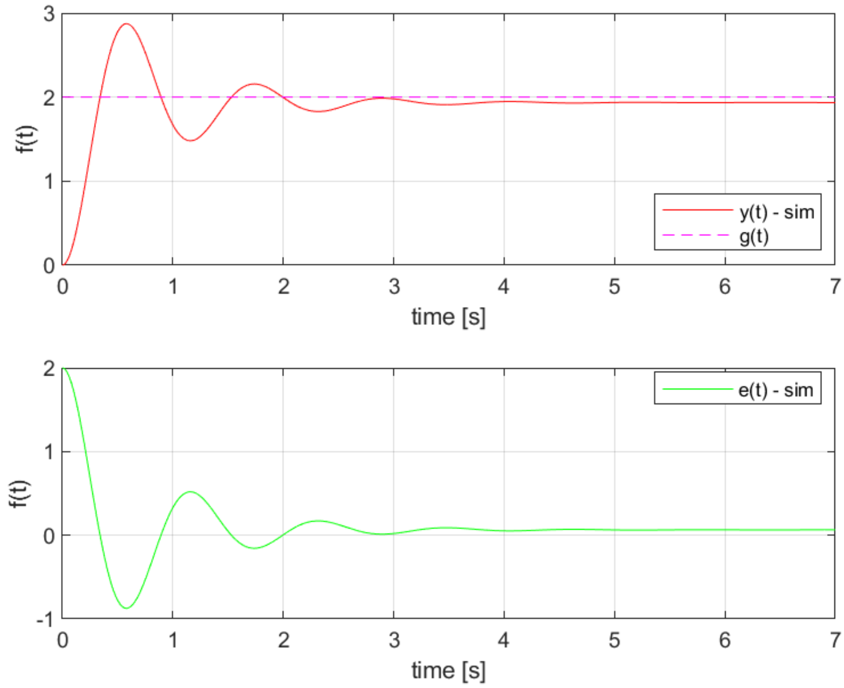

Рисунок 10 — Симуляция - стационарный, $k = 10$

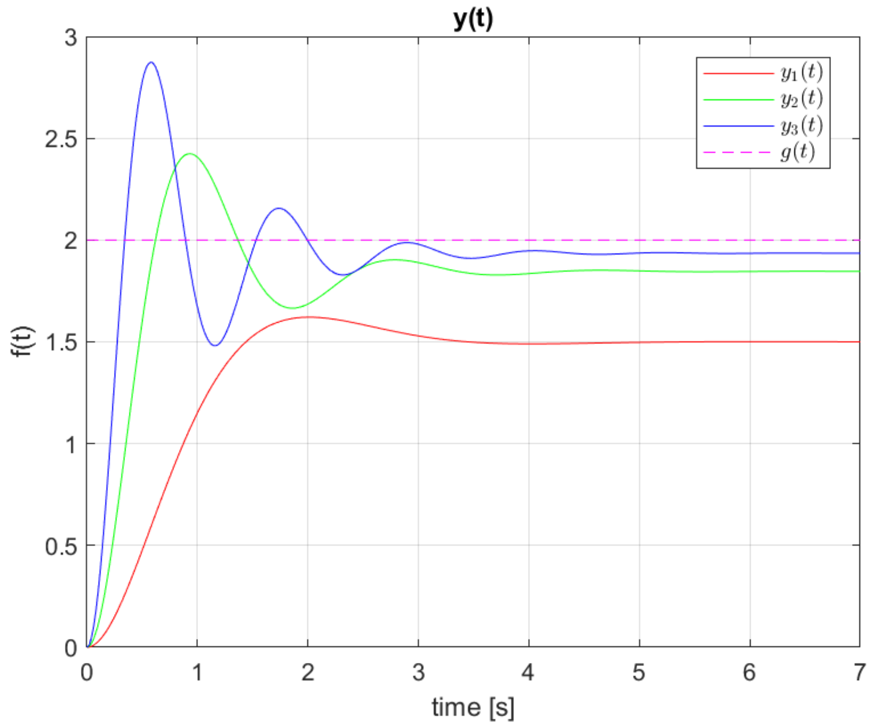

Рисунок 11 — Симуляция - стационарный, сравнение сигналов

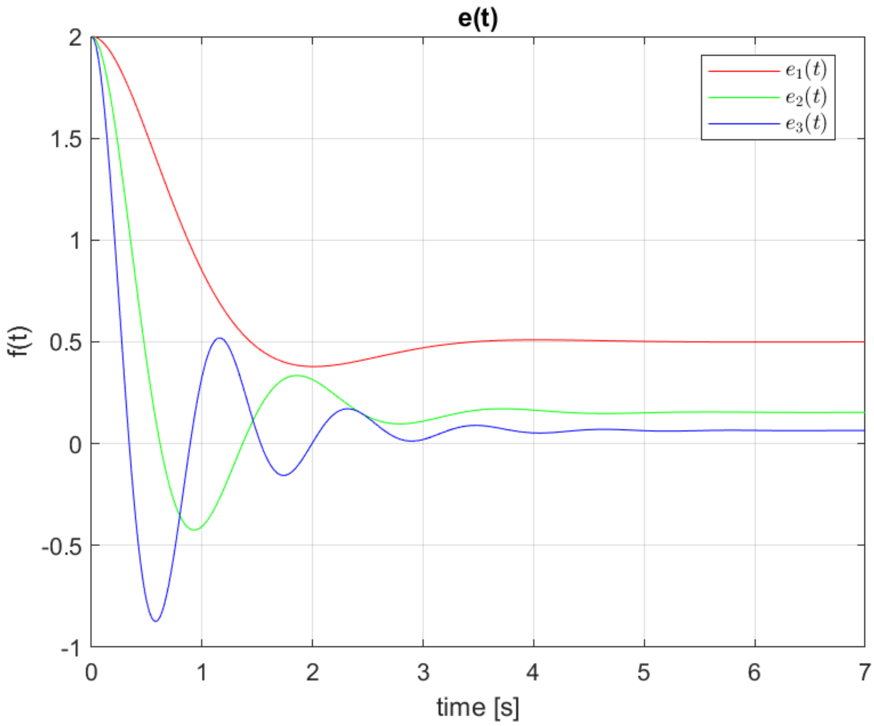

Рисунок 12 — Симуляция - стационарный, сравнение ошибок

Выводы: при увеличении k наш сигнал $y(t)$ всё больше и больше приближается к $g(t)$ с установившейся ошибкой $e_{final} = \frac{k}{3k+1}$. Также увеличение k усиливает перерегулирование при достижении цели.

3.2 Движение с постоянной скоростью

Будем пытаться угнаться за сигналом $g(t) = Vt = 2t$ в случае моего варианта. Выберем следующие k:

$$k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 10$$

Аналитически определим e_{final} пользуясь теоремой о предельном значении для каждого k:

$$W_{g\to e} = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s^2+2.5s+1}{s^2+2.5s+3k+1}$$

$$G(s) = \frac{V}{s^2}$$

Образ ошибки слежения:

$$E(s) = \frac{V(s^2+2.5s+1)}{s^2(s^2+2.5s+3k+1)}$$

В итоге:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{V(s^2+2.5s+1)}{s^2(s^2+2.5s+3k+1)} = \infty$$

А значит при любом k ошибка будет улетать в бесконечность.. сигналы $y(t)$ и $g(t)$ будут расходиться

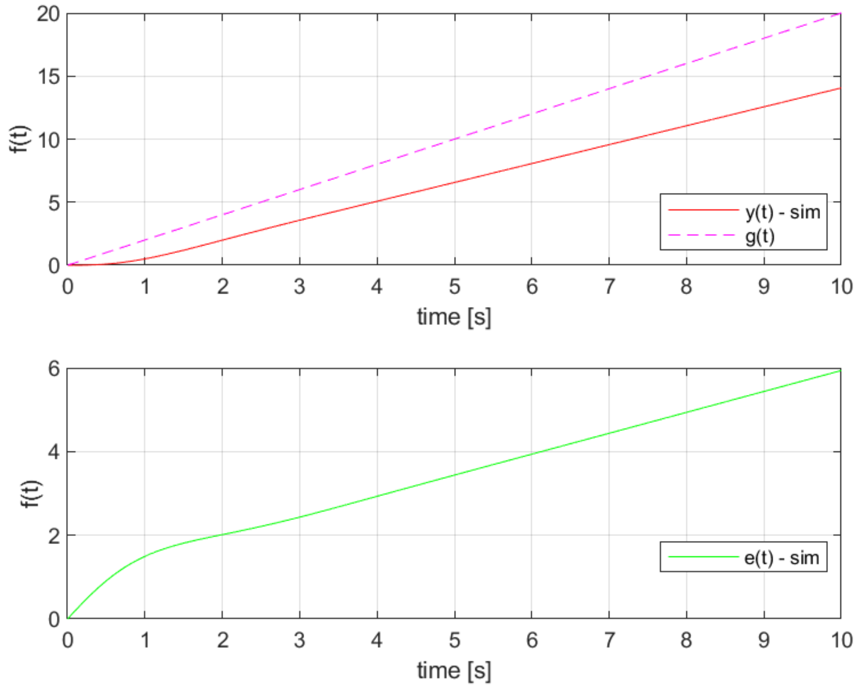

Рисунок 13 — Симуляция - постоянная скорость, $k = 1$

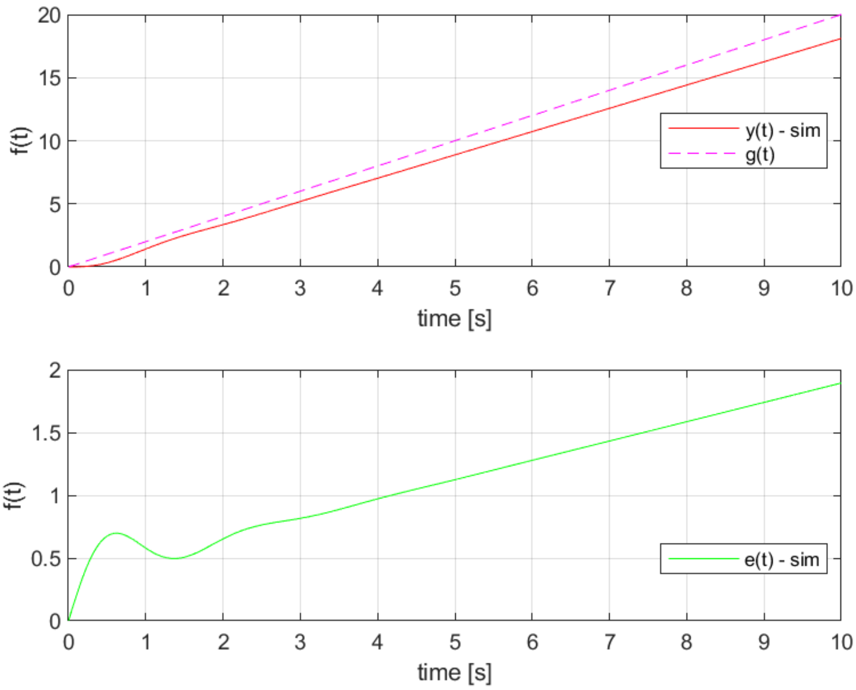

Рисунок 14 — Симуляция - постоянная скорость, $k = 4$

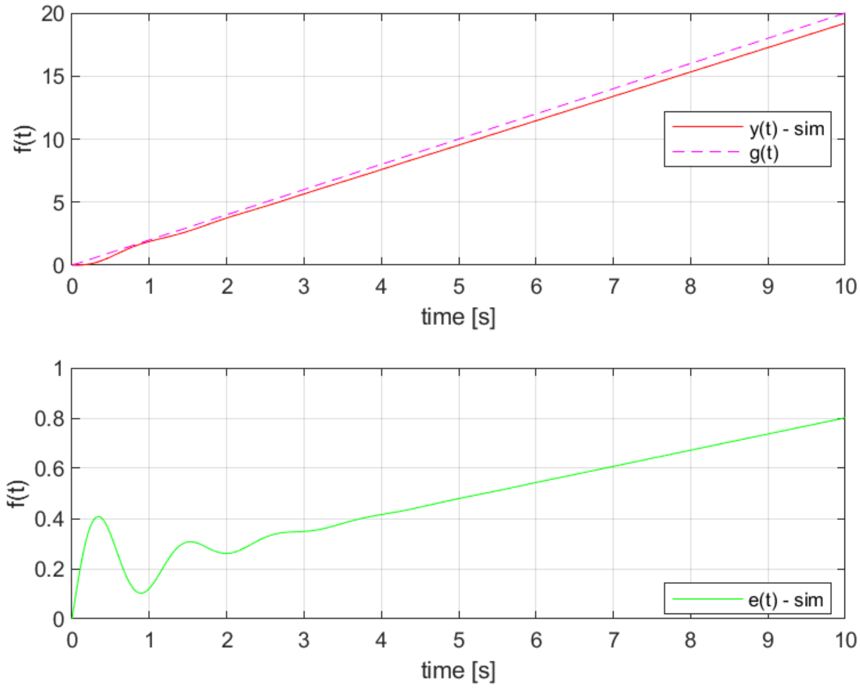

Рисунок 15 — Симуляция - постоянная скорость, $k = 10$

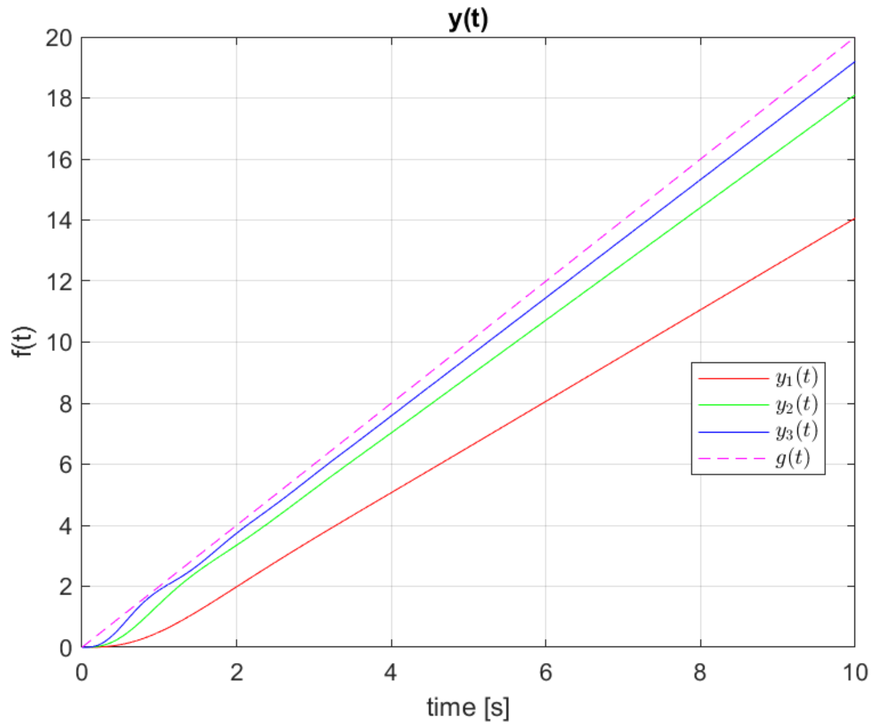

Рисунок 16 — Симуляция - постоянная скорость, сравнение сигналов

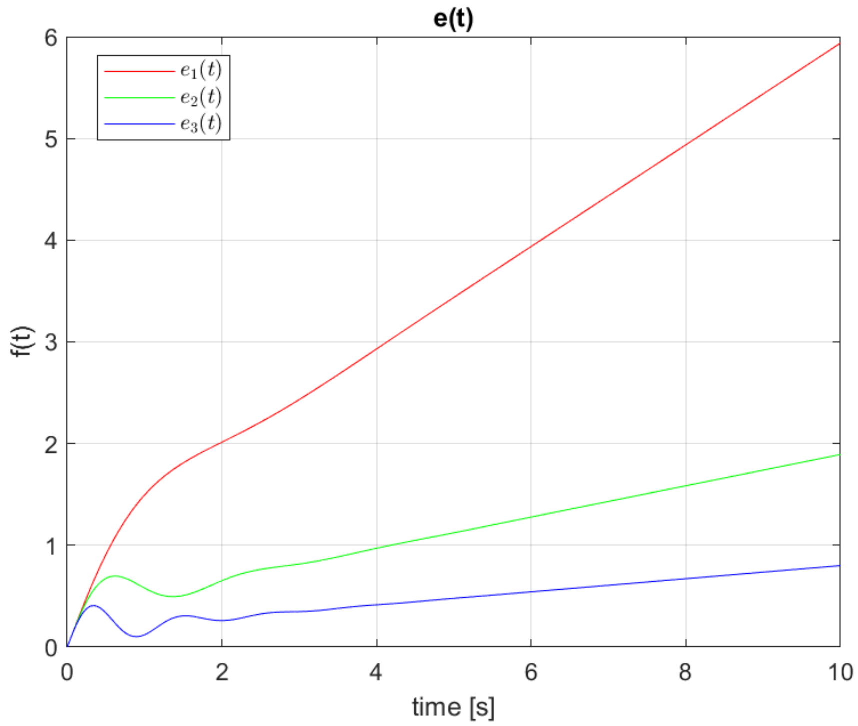

Рисунок 17 — Симуляция - постоянная скорость, сравнение ошибок

Выводы: хоть и сигналы будут всегда расходиться, но можно заметить, что при увеличении k наш сигнал $y(t)$ будет сначало достаточно близок к $g(t)$, а только потом начнёт удаляться. Также увеличение k усиливает перерегулирование при достижении цели.

4 СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (И-РЕГУЛЯТОР)

Теперь будем работать с интегральным регулятором следующего вида:

$$H(s) = \frac{k}{s}$$

4.1 Стационарный режим работы

Будем пытаться угнаться за сигналом $g(t) = A = 2$. Выберем следующие k:

$$k_1 = 0.05, k_2 = 0.5, k_3 = 0.3$$

Аналитически определим e_{final} пользуясь теоремой о предельном значении для каждого k:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

Для начала найдём образ ошибки слежения: $E(s) = W_{g\to e}(s)G(s)$

$$W_{g\to e} = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s(s^2+2.5s+1)}{s(s^2+2.5s+1)+3k}$$

$$G(s) = \frac{A}{s}$$

$$E(s) = \frac{A(s^2+2.5s+1)}{s(s^2+2.5s+1)+3k}$$

В итоге:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{As^2(s^2+2.5s+1)}{s(s^2+2.5s+3k+1)} = 0$$

А это значит, что наш астатизм справился с постоянным сигналом, успеваем.

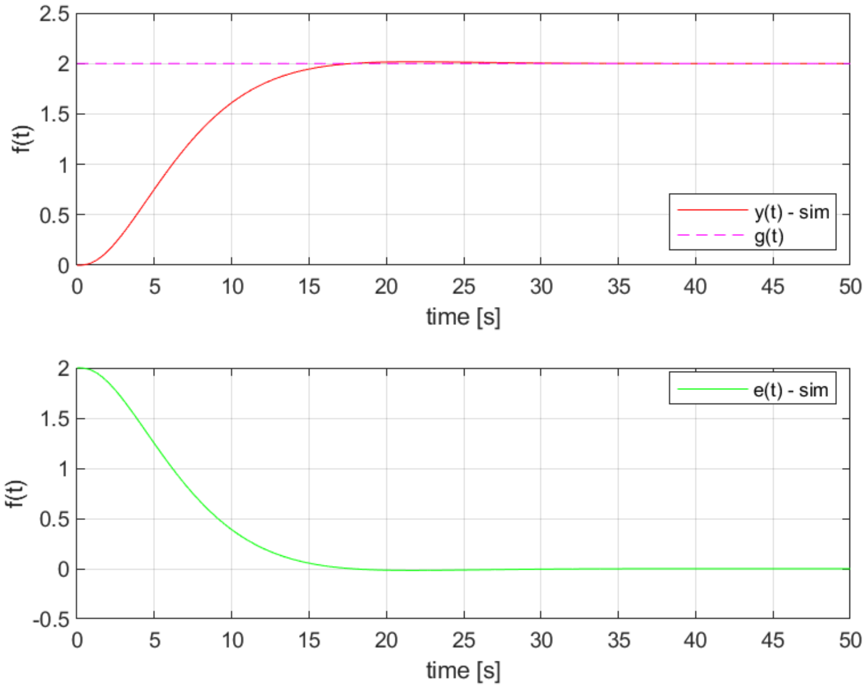

Рисунок 18 — Симуляция - стационарный, $k = 0.05$

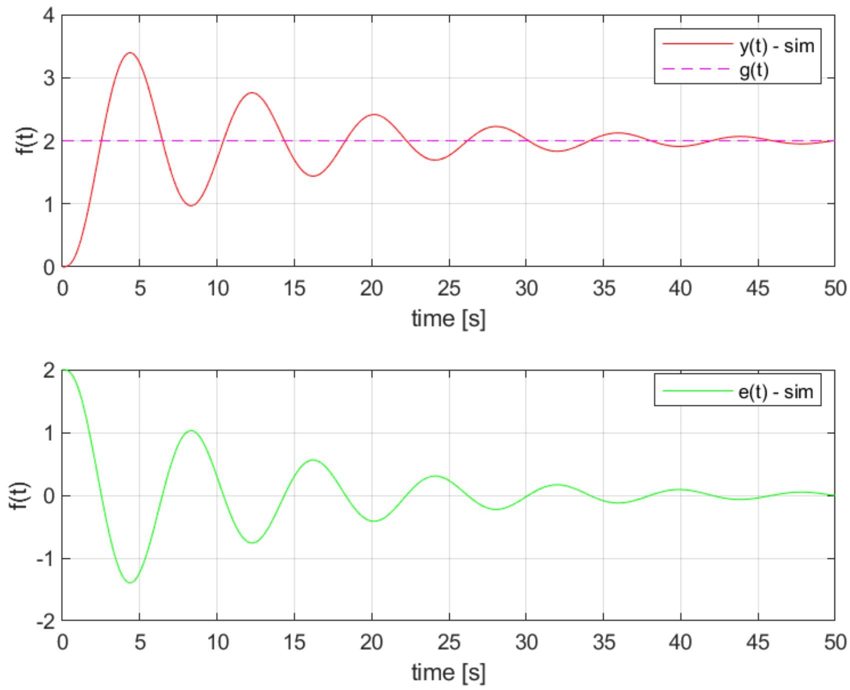

Рисунок 19 — Симуляция - стационарный, $k = 0.5$

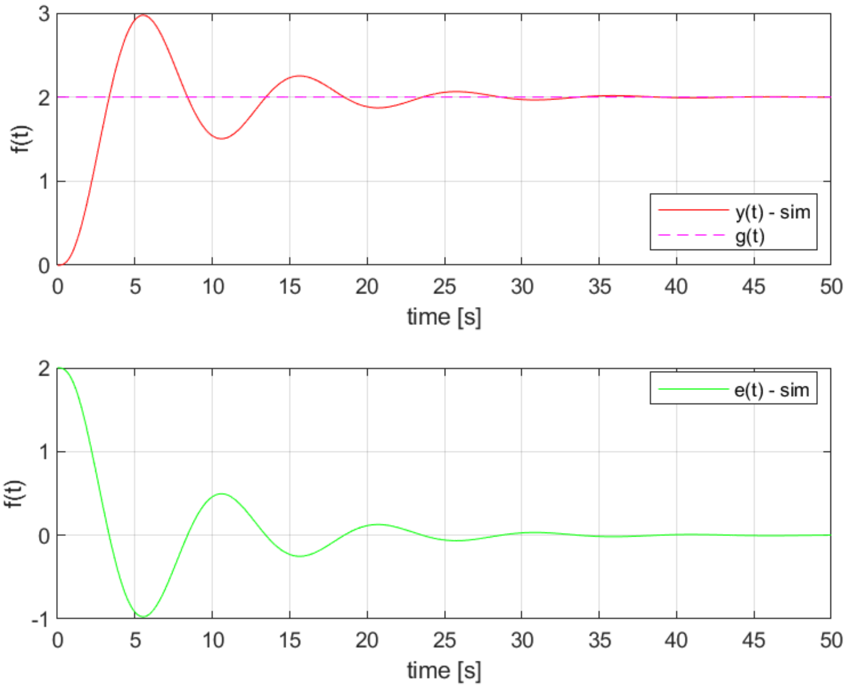

Рисунок 20 — Симуляция - стационарный, $k = 0.3$

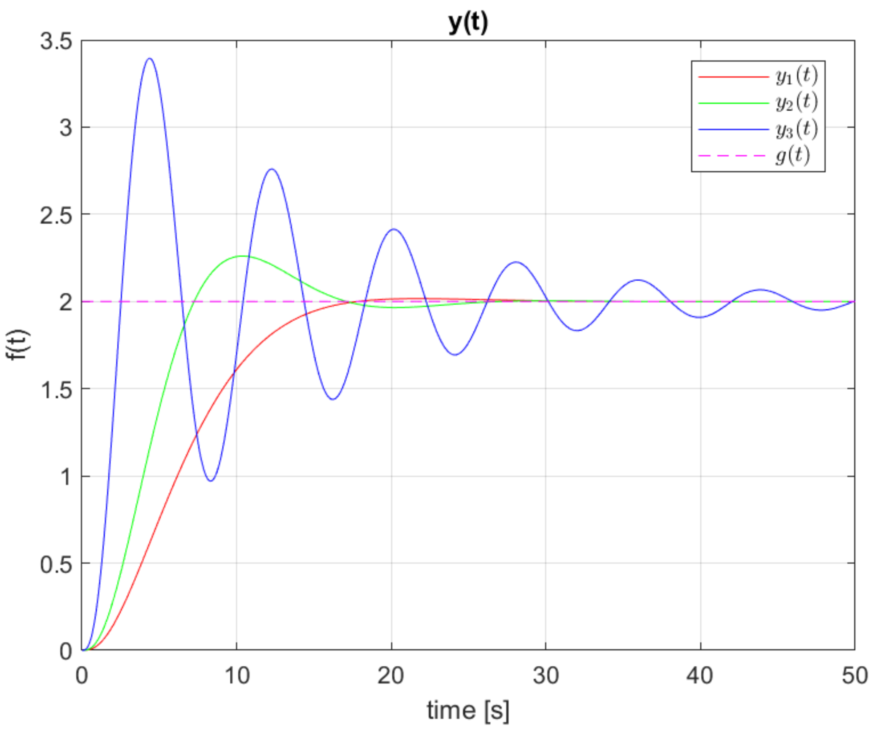

Рисунок 21 — Симуляция - стационарный, сравнение сигналов

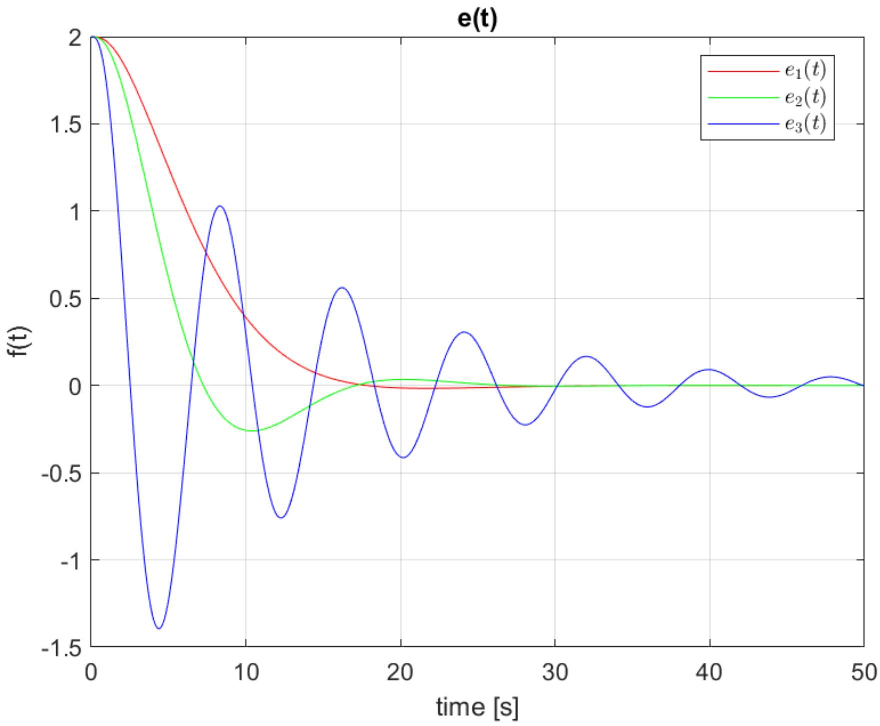

Рисунок 22 — Симуляция - стационарный, сравнение ошибок

Выводы: при увеличении k начальная амплитуда сигнала $y(t)$ будет больше, а также увеличится время переходного процесса, но рано или поздно мы придём(полностью совпадать) к $g(t)$. При небольших k мы приходим к цели быстрее и с мягкими колебаниями.

4.2 Движение с постоянной скоростью

Будем пытаться угнаться за сигналом $g(t) = Vt = 2t$ в случае моего варианта. Выберем следующие k:

$$k_1 = 0.5, k_2 = 0.05, k_3 = 0.1$$

Аналитически определим e_{final} пользуясь теоремой о предельном значении:

$$W_{g \to e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k}$$

$$G(s) = \frac{V}{s^2}$$

Образ ошибки слежения:

$$E(s) = \frac{Vs(s^2 + 2.5s + 1)}{s^2(s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k)}$$

В итоге:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{Vs^2(s^2+2.5s+1)}{s^2(s(s^2+2.5s+1)+3k)} =$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{V(s^2+2.5s+1)}{s(s^2+2.5s+1)+3k)} = \frac{V}{3k} = \frac{2}{3k}$$

Посчитаем ошибки для каждого k:

$$e_1 = 4/3$$

$$e_2 = 40/3$$

$$e_3 = 20/3$$

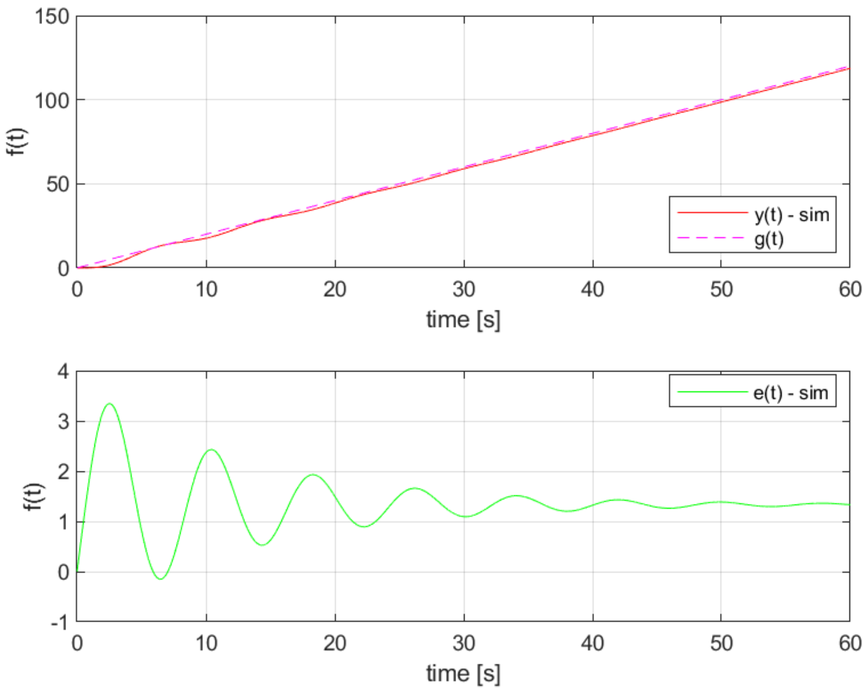

Рисунок 23 — Симуляция - постоянная скорость, $k = 0.5$

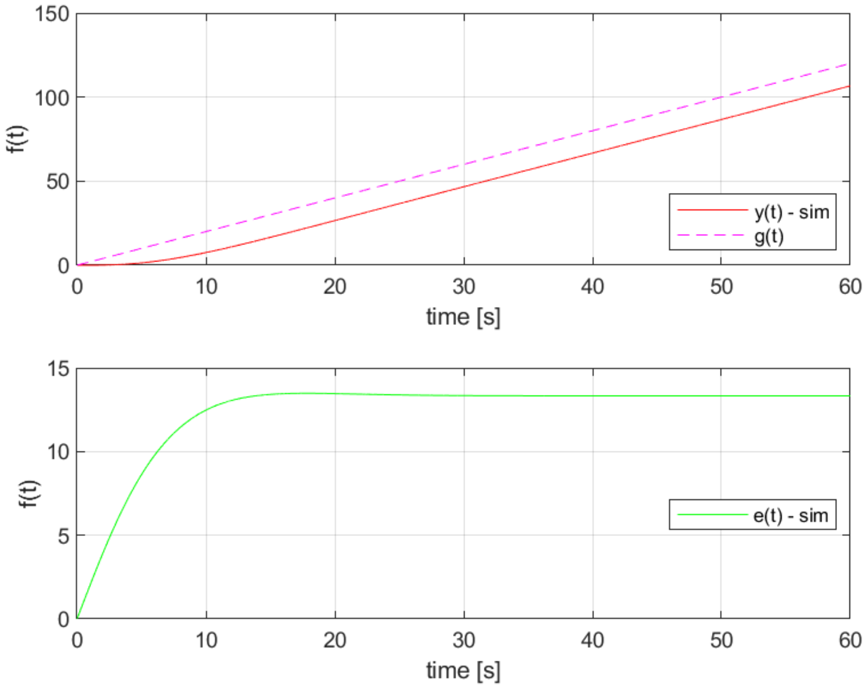

Рисунок 24 — Симуляция - постоянная скорость, $k = 0.05$

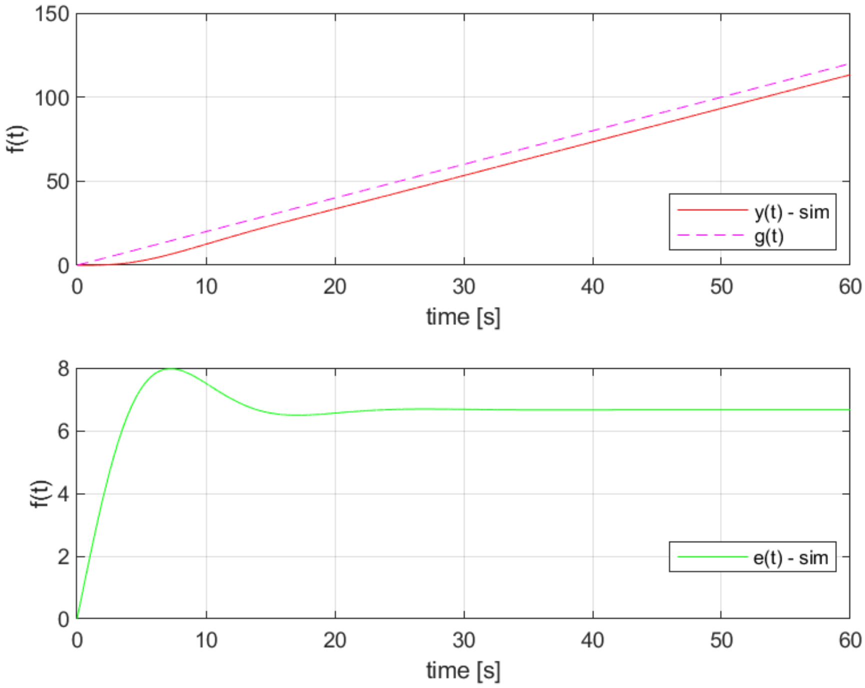

Рисунок 25 — Симуляция - постоянная скорость, $k = 0.1$

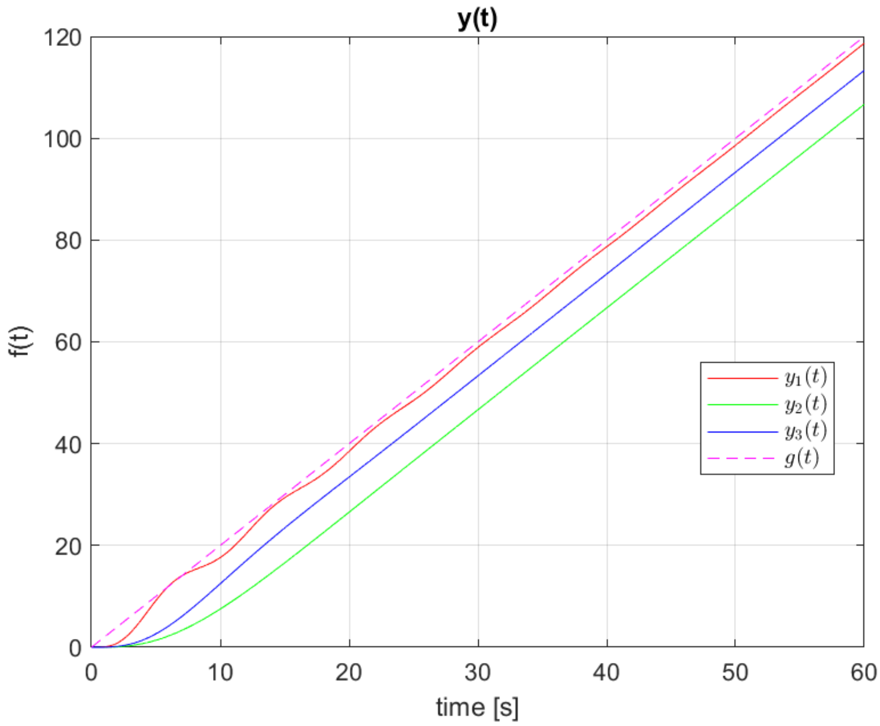

Рисунок 26 — Симуляция - постоянная скорость, сравнение сигналов

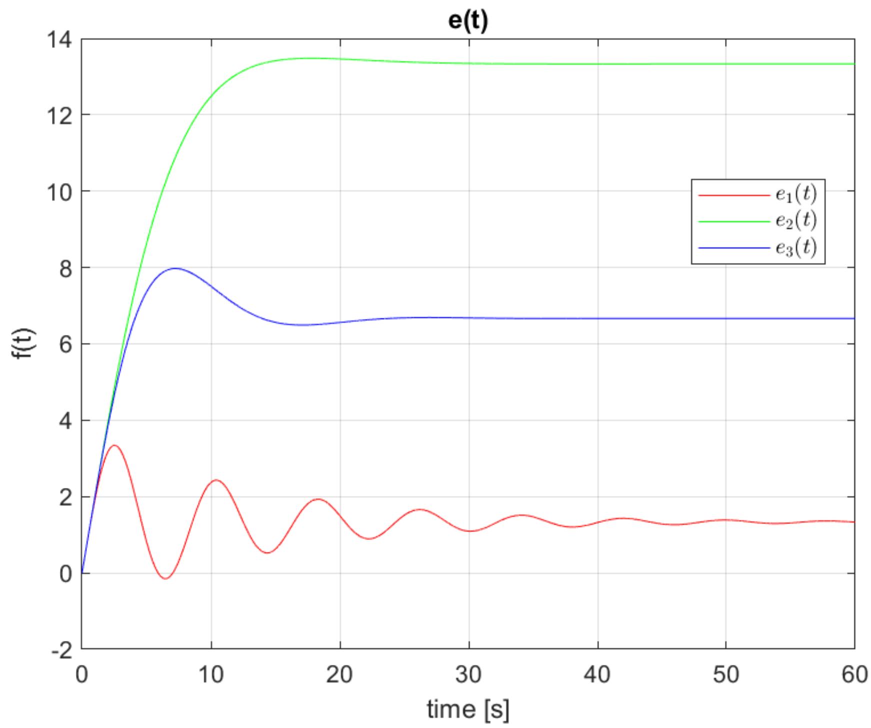

Рисунок 27 — Симуляция - постоянная скорость, сравнение ошибок

Выводы: Так как система имеет у нас астатизм первого порядка, то и линейный сигнал она должна "почти"догонять, с точностью до установившейся ошибки, что тоже неплохо, в нашем случае $e_{final} = \frac{2}{3k}$.

Как можно заметить по общему графику ошибок - чем больше k, тем $y(t)$ ближе к $g(t)$, и также больше колебаний. И наоборот - чем меньше k, тем мы дальше будет от $g(t)$, но с куда меньшими колебаниями.

4.3 Движение с постоянным ускорением

Будем пытаться угнаться за сигналом $g(t) = \frac{at^2}{2} = 0.5t^2 = Bt^2$ в случае моего варианта.

Выберем следующие k:

$$k_1 = 0.05, k_2 = 0.1, k_3 = 0.5$$

Определим установившуюся ошибку, пользуясь теоремой о предельном значении:

$$W_{g\to e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k}$$

$$G(s) = \frac{2B}{s^3}$$

Образ ошибки слежения:

$$E(s) = \frac{2Bs(s^2 + 2.5s + 1)}{s^2(s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k)}$$

В итоге:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\frac{2Bs^2(s^2 + 2.5s + 1)}{s^3(s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k)} =$$
$$= \lim_{s\to 0} s\frac{2B(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s(s^2 + 2.5s + 1) + 3k))} = \frac{2B}{0} = \infty$$

А значит при любом k ошибка будет улетать в бесконечность.. сигналы $y(t)$ и $g(t)$ будут расходиться

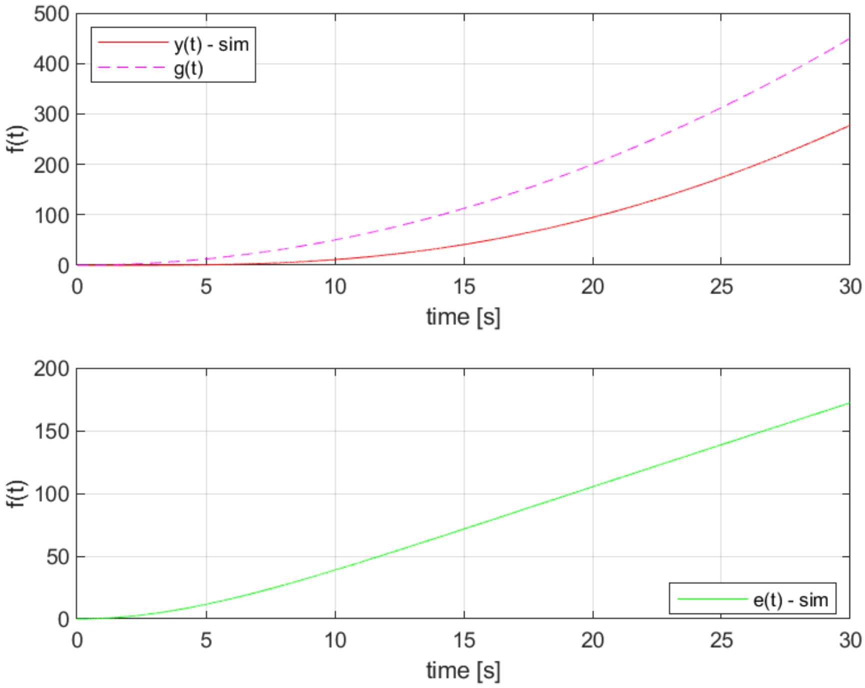

Рисунок 28 — Симуляция - постоянное ускорение, $k = 0.05$

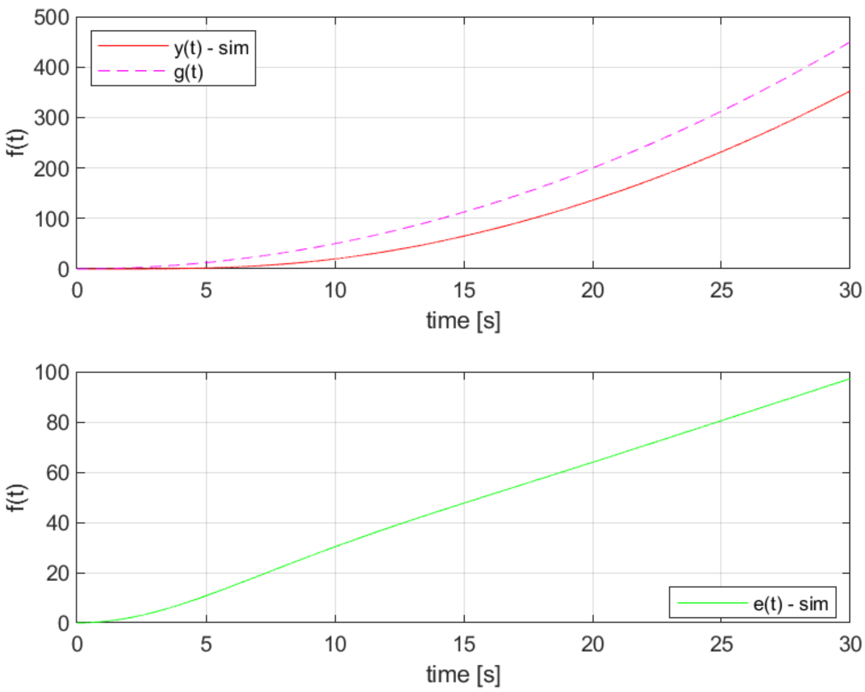

Рисунок 29 — Симуляция - постоянное ускорение, $k = 0.1$

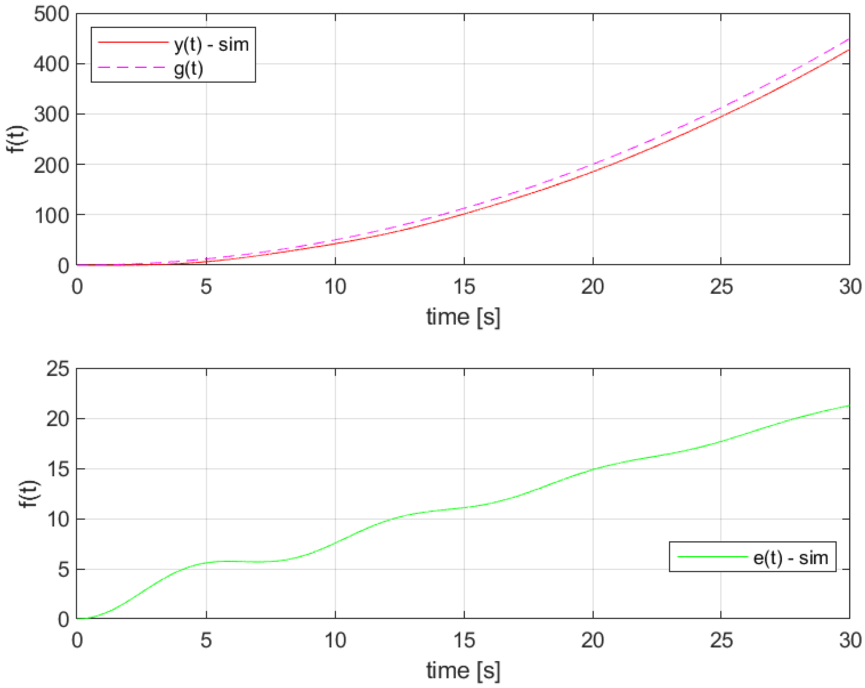

Рисунок 30 — Симуляция - постоянное ускорение, $k = 0.5$

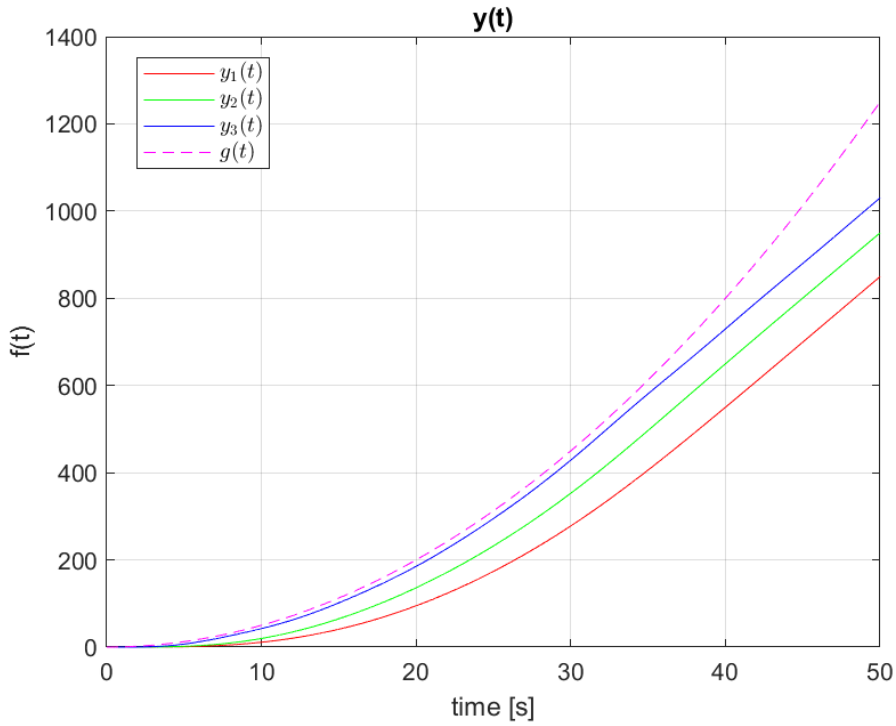

Рисунок 31 — Симуляция - постоянное ускорение, сравнение сигналов

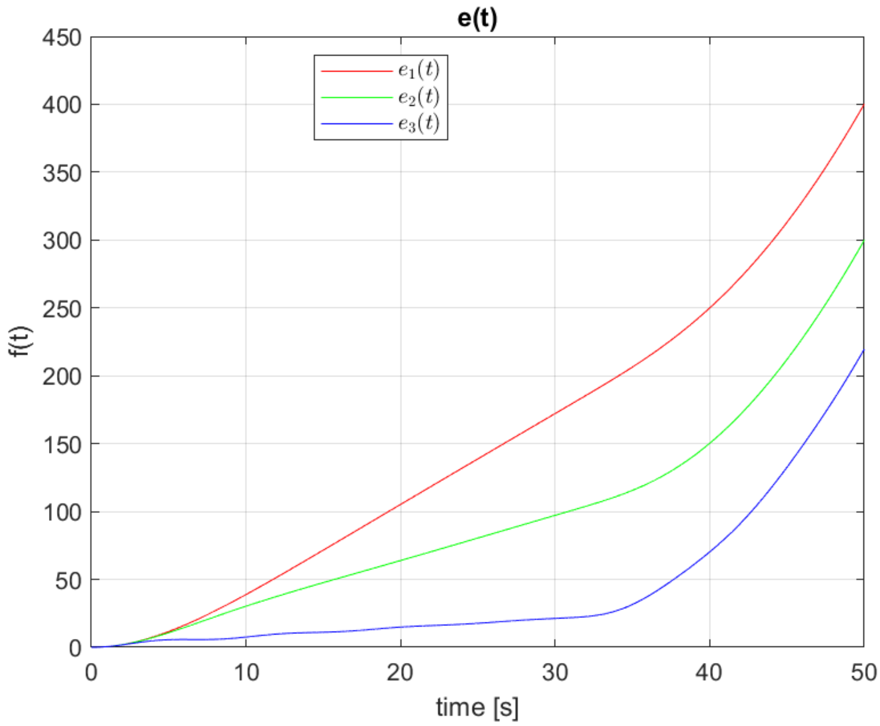

Рисунок 32 — Симуляция - постоянное ускорение, сравнение ошибок

Выводы: сигналы будут расходиться, но при этом график ошибки возрастает линейно, и чем больше у нас k, тем плавнее и дольше будет происходить отдаление на бесконечность (и наоборот).

5 СЛЕЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ С АСТАТИЗМОМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА (ПИ-РЕГУЛЯТОР)

Рассмотрим ПИ-регулятор следующего вида:

$$H(s) = \frac{k_i}{s} + k_p$$

5.1 Движение с постоянной скоростью

Будем пытаться угнаться за сигналом $g(t) = Vt = 2t$. Выберем следующие пары коэффициентов k:

k_i	1	2	3
k_p	4	5	6

Определим установившуюся ошибку, пользуясь теоремой о предельном значении:

$$W_{g \to e} = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s^3 + 2.5s^2 + s}{s^3 + 2.5s^2 + (1 + 3k_p)s + 3k_i}$$

$$G(s) = \frac{V}{s^2}$$

Образ ошибки слежения:

$$E(s) = \frac{V(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^3 + 2.5s^2 + (1 + 3k_p)s + 3k_i)}$$

В итоге:

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s \frac{V(s^2 + 2.5s + 1)}{s(s^3 + 2.5s^2 + (1 + 3k_p)s + 3k_i)} =$$

$$\lim_{s \to 0} \frac{V(s^2 + 2.5s + 1)}{s^3 + 2.5s^2 + (1 + 3k_p)s + 3k_i} = \ldots$$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \frac{V}{3k_i} = \frac{2}{3k_i}$$

Мы справились со слежением с точностью до установившейся ошибки, тоже неплохо.

Из таблицы выше мы получим следующие девять экспериментов:

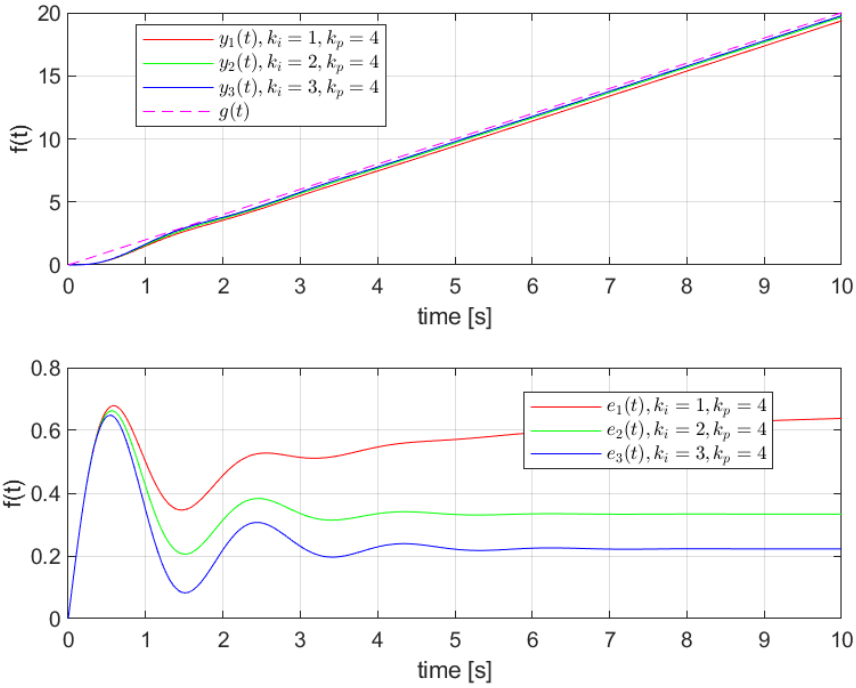

Рисунок 33 — Симуляция - движение с постоянной скоростью

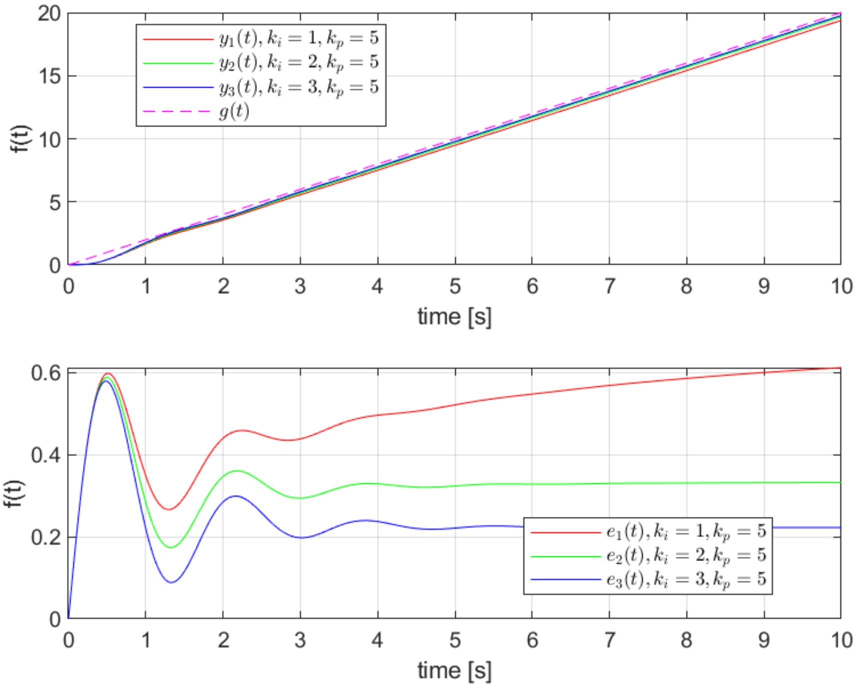

Рисунок 34 — Симуляция - движение с постоянной скоростью

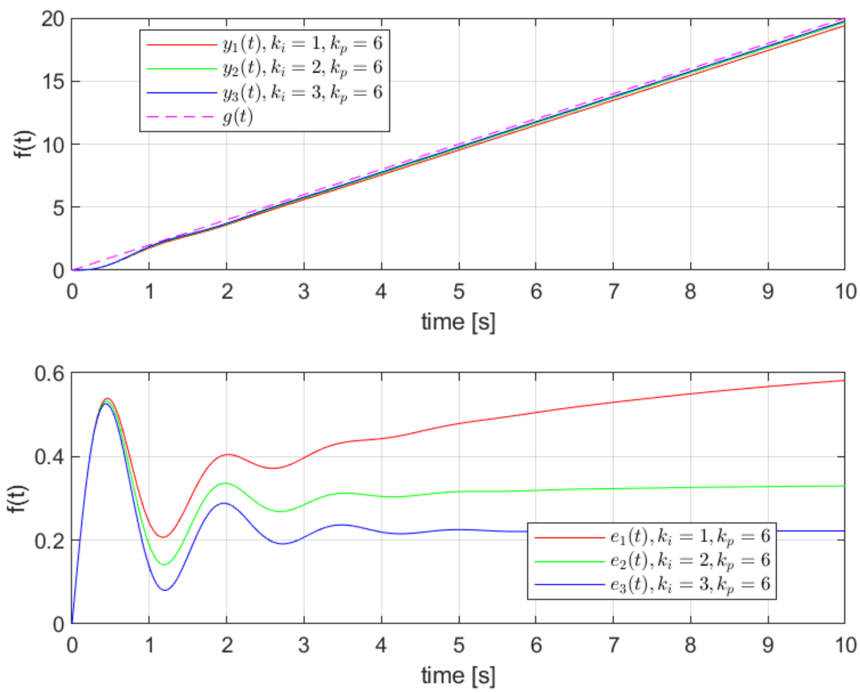

Рисунок 35 — Симуляция - движение с постоянной скоростью

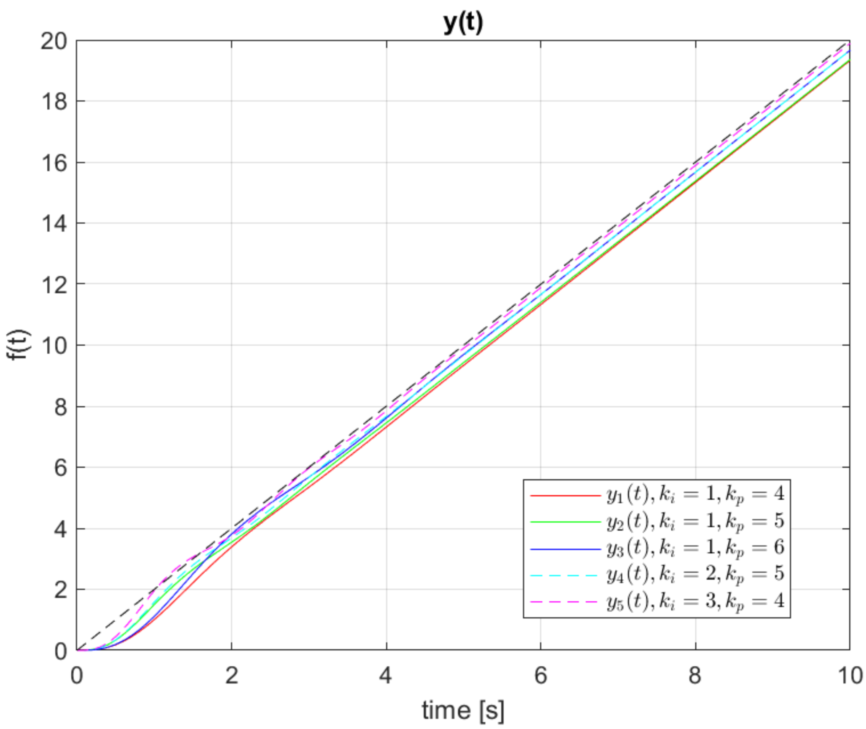

Рисунок 36 — Симуляция - движение с постоянной скоростью, сопоставление сигналов

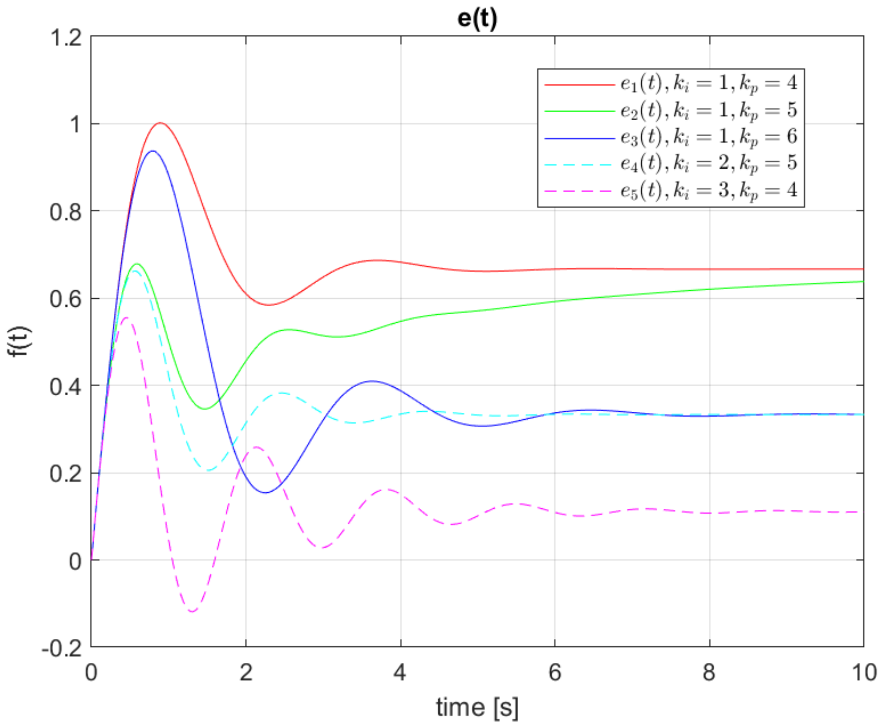

Рисунок 37 — Симуляция - движение с постоянной скоростью, сопоставление ошибок

Выводы: При фиксированном k_i уменьшение k_p уменьшает время установления системы. Интегральный коэффициент, чем больше, тем больше амплитуда колебаний и меньше время установления. Для астатизма первого порядка выход системы y(t) совпадает с g(t) по наклону, но находится ниже на расстоянии установившейся ошибки. По графикам "слежения"можно подумать, что $y(t)$ и $g(t)$ совпадают, но это не так с точностью до установившейся ошибки, которая уменьшается обратно пропорционально k_i.

5.2 Движение за гармоническим сигналом

Будем пытаться угнаться за сигналом $g(t) = asin(\omega t) = 2sin(0.5t)$ в случае моего варианта. Выберем следующие пары коэффициентов k:

k_i	1	2	3
k_p	4	5	6

Определим установившуюся ошибку, пользуясь теоремой о предельном значении:

$$W_{g\to e} = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{s^3+2.5s^2+s}{s^3+2.5s^2+(1+3k_p)s+3k_i}$$

$$G(s) = \frac{a\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{1}{s^2+0.25}$$

Образ ошибки слежения:

$$E(s) = \frac{s^3+2.5s^2+s}{(s^2+0.25)(s^3+2.5s^2+(1+3k_p)s+3k_i)}$$

По виду знаменателя (критерий Декарта) можно понять, что он будет содержать хотя бы один положительный корень, поэтому применить здесь предельную теорему не выйдет, мы не знаем что будет за ошибка, или $+\infty$ она.

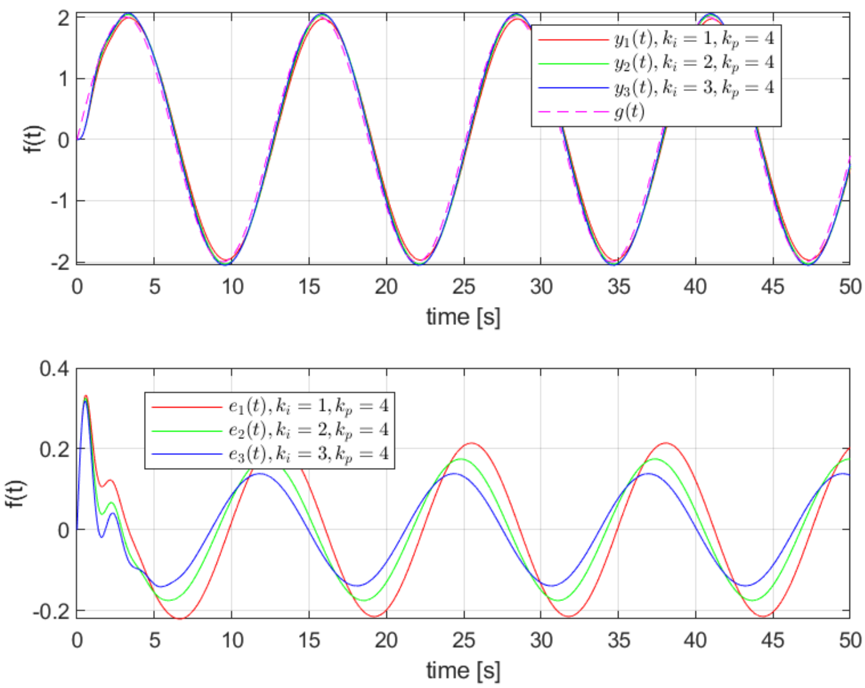

Рисунок 38 — Симуляция - гармоническое движение

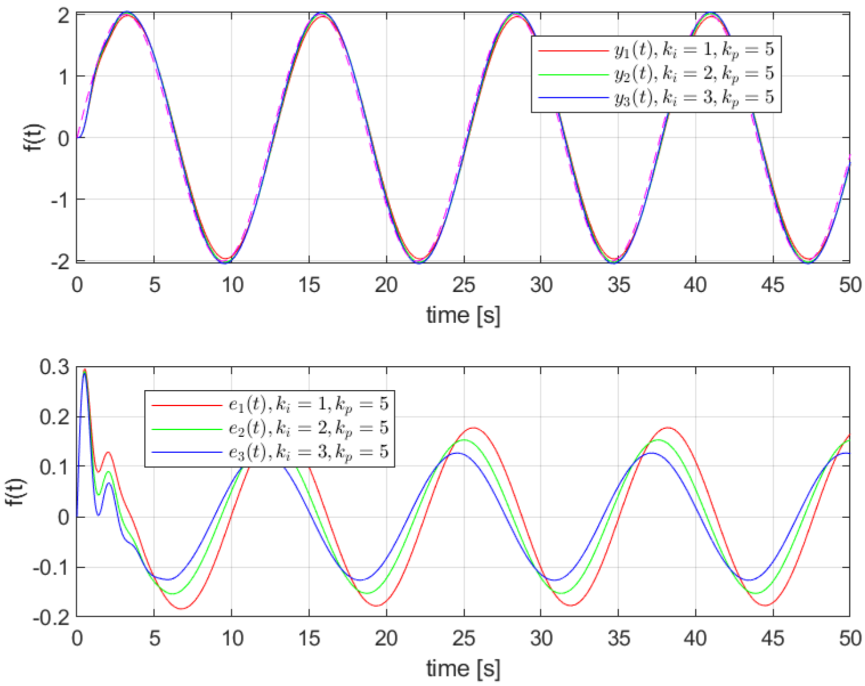

Рисунок 39 — Симуляция - гармоническое движение

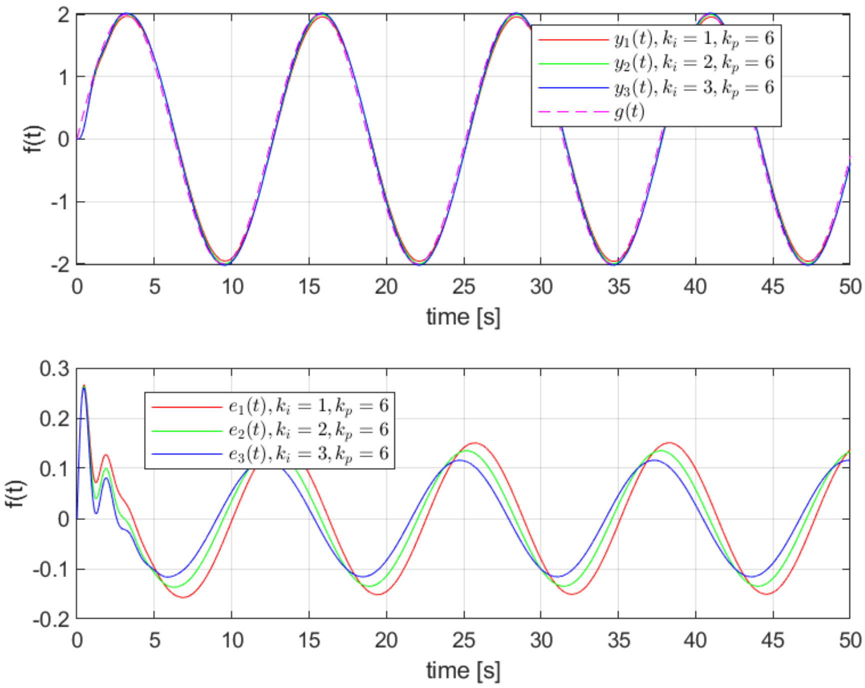

Рисунок 40 — Симуляция - гармоническое движение

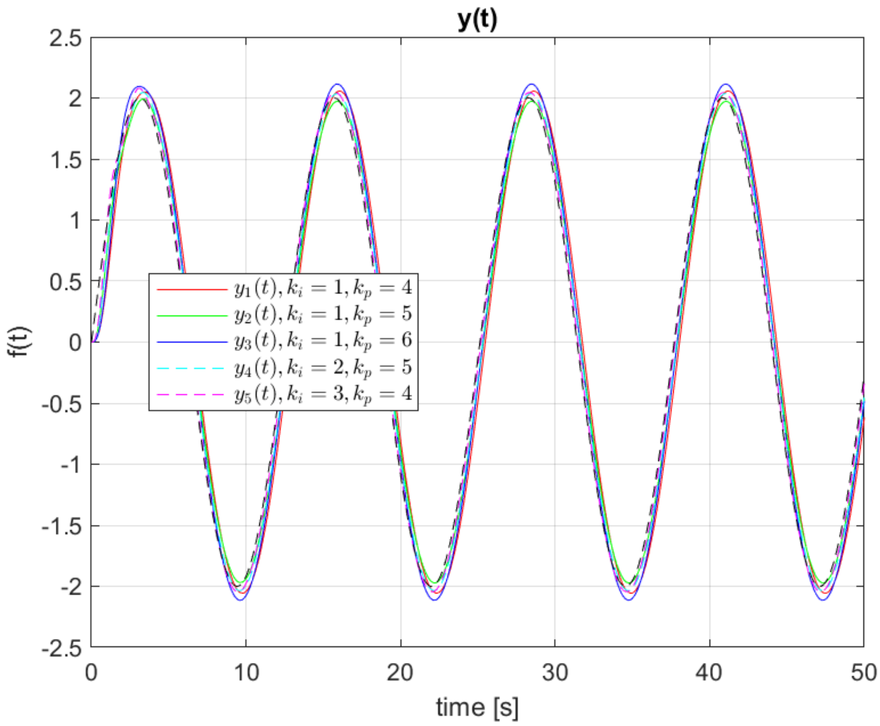

Рисунок 41 — Симуляция - гармоническое движение, сопоставление сигналов

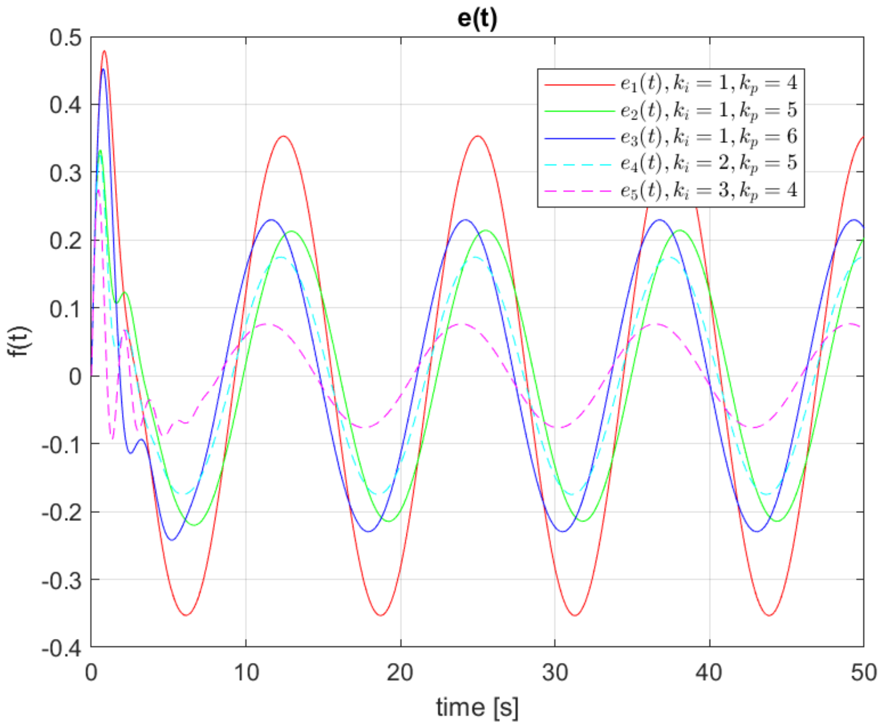

Рисунок 42 — Симуляция - гармоническое движение, сопоставление ошибок

Выводы: Увеличение k_i уменьшает время установки системы и немного сглаживает колебания ошибки в начале(и наоборот). Чем больше k_p, тем выше пик у ошибки в начале и тем больше будет максимальная ошибка дальше(и наоборот).

6 СЛЕЖЕНИЕ ЗА ГАРМОНИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ (РЕГУЛЯТОР ОБЩЕГО ВИДА)

Рассмотрим регулятор общего вида:

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{m}(b_k s^k)}{\sum_{k=0}^{m}(a_k s^k)}$$

Нам нужно определить необходимый порядок m, выбрать конкретные параметры a_k, b_k, чтобы синтезировать физически реализуемый регулятор, для следующего задающего сигнала:

$$g(t) = 2sin(0.5t)$$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.25}$$

Пользуясь принципом внутренней модели из лекции напишем предполагаемый регулятор в общем виде, сразу с учётом того, что он должен быть физически реализуем($n \geq m$):

$$W_{reg}(s) = \frac{k_2 s^2 + k_1 s + k_0}{s^2 + 0.25}$$

Как можно заметить, знаменатель мы выбрали таким, что загасить влияние сигнала $g(t)$, который в прошлом задании не давал нам использовать предельную теорему. Мы это увидим далее…

$$W_{g\to e}(s) = \frac{1}{1+W} = \frac{1}{1 + \frac{3(k_2 s^2 + k_1 s + k_0)}{(s^2+0.25)(s^2+2.5s+1)}}$$

$$W_{g\to e}(s) = \frac{(s^2+0.25)(s^2+2.5s+1)}{(s^2+0.25)(s^2+2.5s+1) + 3(k_2 s^2 + k_1 s + k_0)}$$

Тогда ошибка слежения будет такова:

$$E(s) = \frac{(s^2+2.5s+1)}{(s^2+0.25)(s^2+2.5s+1) + 3(k_2 s^2 + k_1 s + k_0)}$$

Тогда предельная теорема:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{(s^3+2.5s^2+s)}{(s^2+0.25)(s^2+2.5s+1) + 3(k_2 s^2 + k_1 s + k_0)} = 0$$

Нам удаётся свести установившуюся ошибку в ноль, но при этом теперь нам нужно подобрать такие коэффициенты регулятора, чтобы у нас были только отрицательные полюса, для этого мы раскроем скобки у знаменателя и применим критерий Гурвица:

$$s^4 + 2.5s^3 + (1.25 + 3k_2)s^2 + (3k_1 + 0.625)s + k_0 + 0.25$$

Для удобства примем $k_0 = -0.25$, чтобы упростить грядущие равества:

$$\begin{aligned} a_4 &= 1, \\ a_3 &= 2.5, \\ a_2 &= 1.25 + 3k_2, \\ a_1 &= 3k_1 + 0.625, \\ a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Составим матрицу Гурвица 4-го порядка, а после выпишем с неё угловые миноры…

$$\begin{cases} a_1 > 0, \\ a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 > 0 a_4 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 > 0, \\ a_2 > 0, \\ a_2 a_3 - a_1 > 0 \end{cases}$$

Последнее неравенство решим отдельно:

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}(\frac{5}{4} + 3k_2) > 3k_1 + 0.625 \\ \dots \\ k_1 < \frac{5}{6}(k_2 + 1) \end{aligned}$$

Проведём несколько опытов:

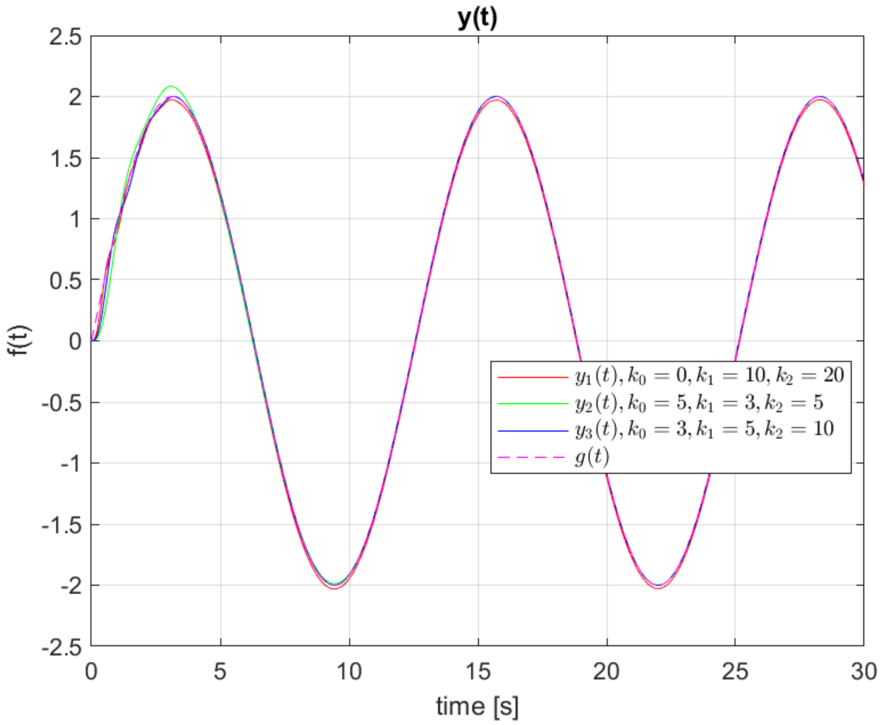

Рисунок 43 — Симуляция - гармоническое движение

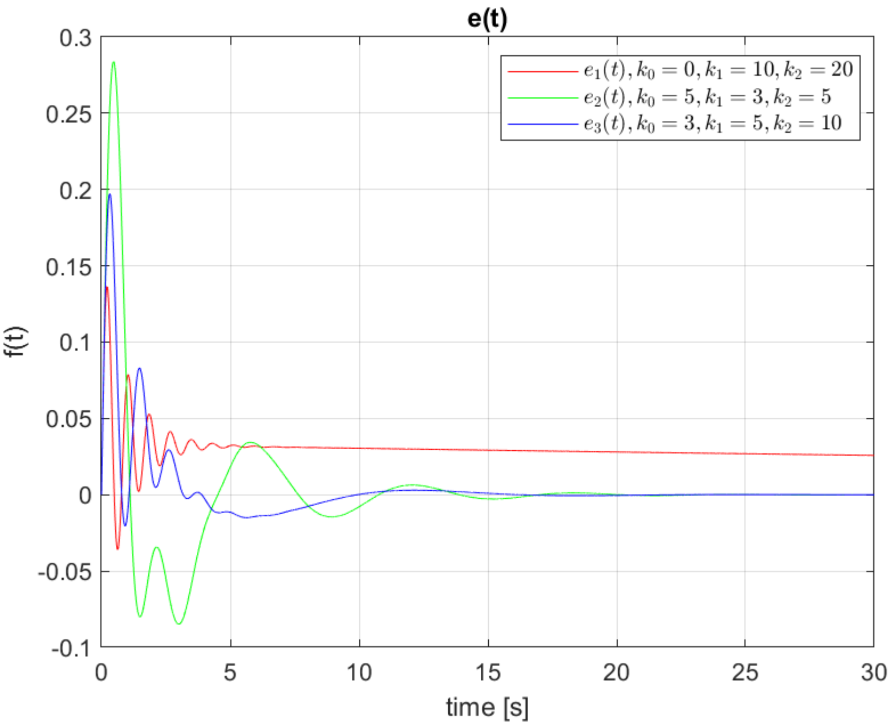

Рисунок 44 — Симуляция - гармоническое движение

Выводы: Ошибка системы стремится к нулю, хоть и неохотно(красный график ошибки), на графиках я взял относительно небольшой временной промежуток, чтобы можно было начальные переходные процессы сравнить, далее они все монотонно стремятся к нулю, с разной скоростью.

Как можно заметить, в моём случае третий параметр k_0 довольно сильно доводит переходный процесс до конца, то есть уводит ошибку максимально к нулю.

Мы смогли посчитать установившейся ошибку только из-за того, что построили регулятор таким образом, чтобы сократить мнимый корень из гармонического сигнала знаменателя.

7 ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

В этой работе были рассмотрены задачи стабилизации и слежения. Стабилизация была воспроизведена для идеального и реального дифференцирующего звена. Также мы посмотрели на задачу слежения для систем с различным порядком астатизма и используемым регулятором(П,И,ПИ).

Использовал связку *Live-script* + *Simulink*, там же можно взглянуть на графики и код, в репозитории можно найти исходники.