

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ

по лабораторной работе №3, вариант - 24

Теория автоматического управления

по теме:

РЕГУЛЯТОРЫ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ

Студент:

Группа R3336

Поляков А.А.

Предподаватель:

к.т.н., доцент

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2025

СОДЕРЖАНИЕ

1	СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ.....	3
1.1	Условие задачи	3
1.2	Решение задачи	5
1.2.1	Исследование управляемости системы	5
1.2.2	Желаемая степень устойчивости	5
1.2.3	Первая желаемая степень устойчивости	5
1.2.4	Вторая желаемая степень устойчивости	12
1.2.5	Вывод	17
2	УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ.....	18
2.1	Условие задачи	18
2.2	Решение задачи	20
2.2.1	Исследование наблюдаемости и управляемости системы	20
2.2.2	Желаемая степень сходимости и устойчивости	21
2.2.3	Наблюдатель и регулятор равны	21
2.2.4	Регулятор сильнее	30
2.2.5	Наблюдатель сильнее.....	34
2.2.6	Вывод	37
3	РЕГУЛЯТОР С КАЧЕСТВЕННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ	38
3.1	Условие задачи	38
3.2	Решение задачи	39
3.2.1	Исследование управляемости системы	39
3.2.2	Первый набор Q и R	40
3.2.3	Второй набор Q и R	42
3.2.4	Третий набор Q и R.....	44
3.2.5	Четвертый набор Q и R	46
3.2.6	Вывод	49
4	ОБЩИЕ ВЫВОДЫ	50

1 СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ

1.1 Условие задачи

Рассмотреть систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

и выполнить следующие шаги:

- Найти собственные числа матрицы A и определить управляемость каждого из них. Сделать вывод об управляемости и стабилизируемости системы.
- Определить, любой ли желаемой степени устойчивости вы можете добиться от данной системы при помощи регулятора вида $u = Kx$. Объяснить, почему, и, если не любой, то определить максимальную возможную.
- Построить схему моделирования системы замкнутой регулятором $u = Kx$.
- Задаться не менее, чем парой значений желаемой степени устойчивости $\alpha > 0$. Если существуют ограничения на достижимые степени устойчивости, то одна из выбранных α должна быть максимально возможной, а другие достижимыми. По старайтесь взять достаточно отличающиеся значения α .
- Для каждого из выбранных значений α синтезировать регулятор, обеспечивающий заданную степень устойчивости, при помощи матричного неравенства типа Ляпунова.
 - Найти соответствующую матрицу регулятора K_1 , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α **без ограничений на управление**.
 - Найти соответствующую матрицу регулятора K_2 , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α **совместно с решением задачи минимизации управления**.

- Определить собственные числа матриц замкнутых систем $(A + BK_1)$ и $(A + BK_2)$ и сравнить с желаемой степенью устойчивости в подтверждение корректности синтеза регуляторов и между собой. Сделать выводы.
- Выполнить компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Построить графики состояния системы $x(t)$ и управления $u(t)$. Сопоставить результаты.
- Для каждого из выбранных значений α синтезировать регулятор, обеспечивающий заданную степень устойчивости, при помощи матричного уравнения типа Риккати при $\nu = 2$ и $R = 1$.
 - Найти соответствующую матрицу регулятора K_3 , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α при $Q = I$.
 - Найти соответствующую матрицу регулятора K_4 , обеспечивающую желаемую степень устойчивости α при $Q = 0$.
 - Определить собственные числа матриц замкнутых систем $(A + BK_3)$ и $(A + BK_4)$ и сравнить с желаемой степенью устойчивости в подтверждение корректности синтеза регуляторов, между собой и с полученными для регуляторов с матрицами K_1 и K_2 . Сделать выводы.
 - Выполнить компьютерное моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Построить графики состояния системы $x(t)$ и управления $u(t)$. Сопоставить результаты с полученными для замкнутых систем с матрицами регуляторов K_1 и K_2 .

1.2 Решение задачи

Параметры для объекта:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 14 \\ 6 & 0 & 6 \\ -6 & -2 & -8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

1.2.1 Исследование управляемости системы

Найдём собственные числа матрицы A :

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 3i, \quad \lambda_3 = -2$$

Воспользуемся результатами из прошлой работы. Система будет не полностью управляемой, но стабилизируемой, всю малину испортит неуправляемое собственное число $\lambda_3 = -2$, но оно устойчивое.

1.2.2 Желаемая степень устойчивости

В нашем случае система не устойчивая, поскольку есть моды с положительной вещественной частью. Однако, модальным регулятором, мы можем сдвинуть все моды, кроме λ_3 , поэтому если одна из сдвинутых мод будет меньше λ_3 , то они и станут степенью устойчивости, в противном случае степень устойчивости после замыкания регулятором станет $\lambda_3 = -2$.

1.2.3 Первая желаемая степень устойчивости

$$\alpha_1 = 2$$

Для такой степени устойчивости (максимальной) синтезируем регулятор при помощи **матричного неравенства Ляпунова**:

$$PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T \preceq 0, \quad P \succ 0, \quad K = YP^{-1}$$

Решим уравнения и получим K_1 , обеспечивающую заданную степень устойчивости **без ограничений на управление**:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 10.06 & -8.83 & 9.25 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \sigma(A + BK_1) = \{-4.94 \pm 7.77i, -2\}$$

Чтобы получить вторую матрицу регулятора K_2 , которая ещё и решает задачу минимизации управления, нам потребуется указать дополнительные условия к уравнению выше:

$$\begin{bmatrix} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{bmatrix} \succ 0, \quad \begin{bmatrix} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \rightarrow \quad K_2 = \begin{bmatrix} 4 & -4.17 & 3.65 \end{bmatrix}$$

Тогда регулятор $K = YP^{-1}$ будет гарантировать $\|u(t)\| \leq \mu$ при $x(0) = x_0$. Собственные числа в таком случае:

$$\sigma(A + BK_2) = \{-2.37 \pm 5.25i, -2\}$$

Как можно заметить, управляемые собственные числа в обоих случаях у синтезированного регулятор не превышают заданное α_1 по модулю, а также в случае с ограниченным управлением стали несколько меньше, что говорит о том, что ограничение на управление подействовало на моды напрямую, синтез корректен и мы продемонстрируем это моделированием:

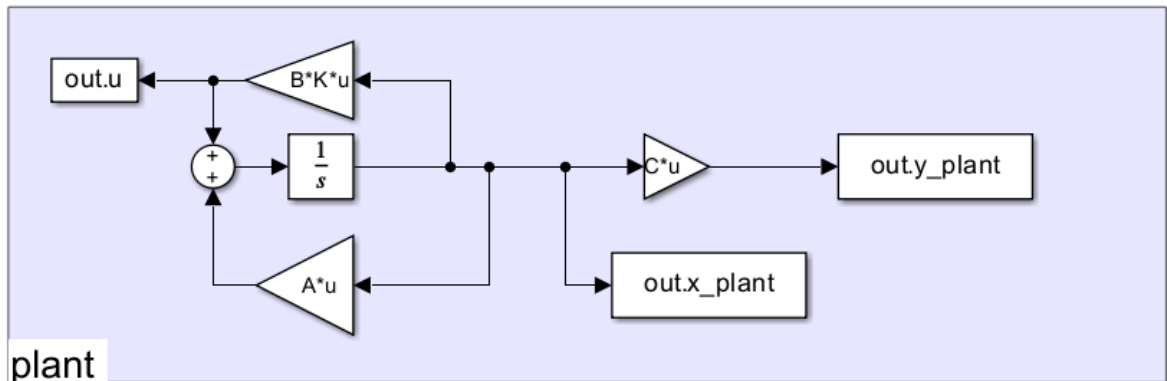


Рисунок 1 — Модель с модальным регулятором

С помощью неё построим графики управления $u(t)$ от регулятора и вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$:

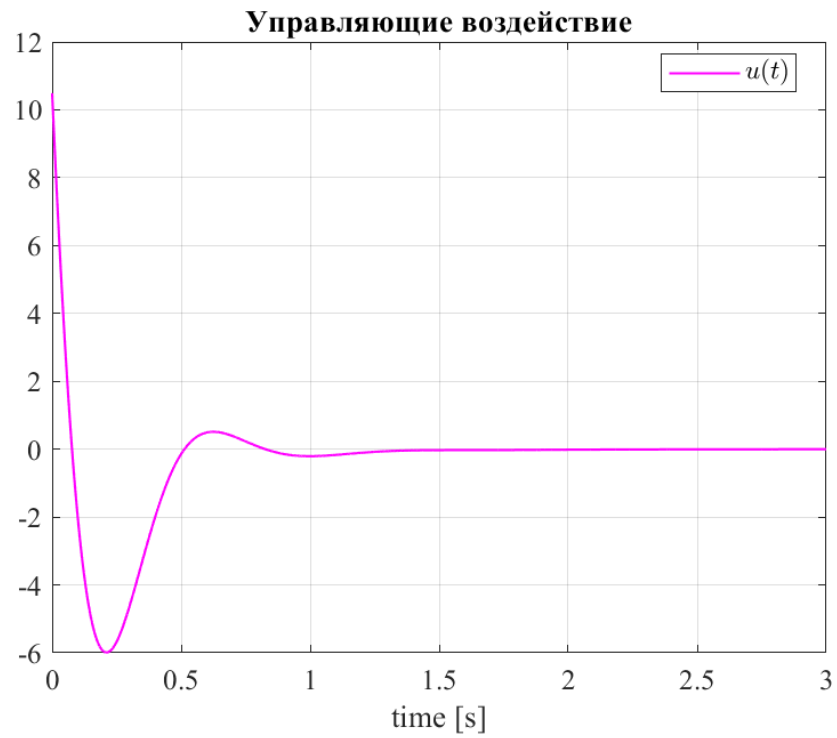


Рисунок 2 — Сигнал управления, регулятор K_1

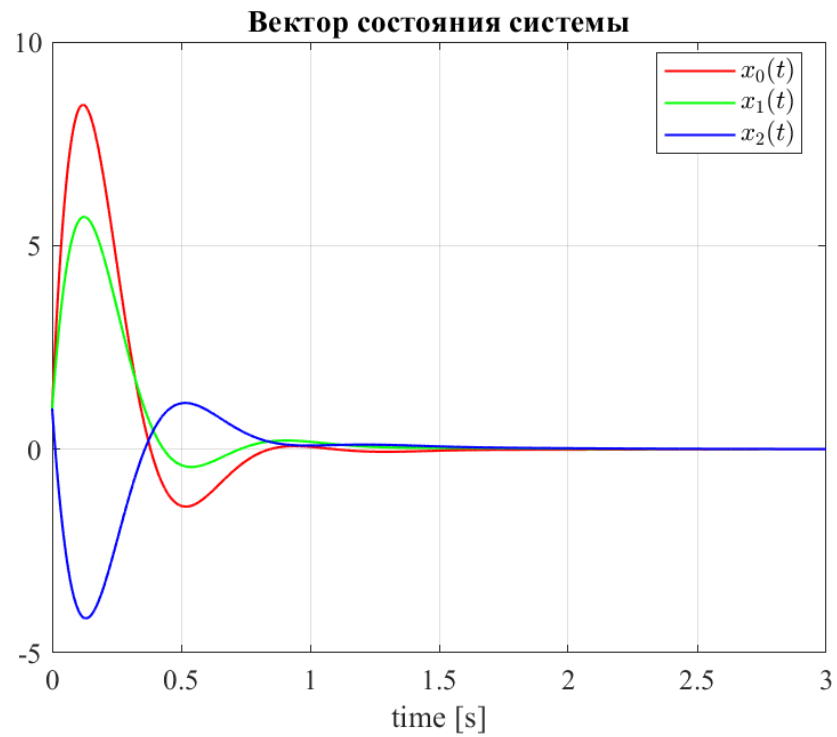


Рисунок 3 — Состояние системы, регулятор K_1

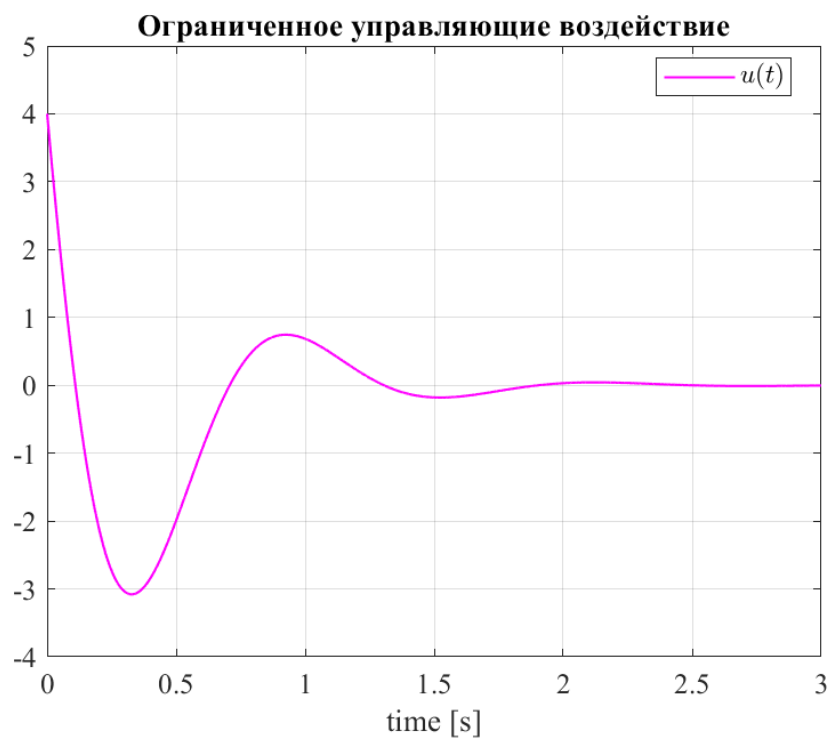


Рисунок 4 — Сигнал управления, ограниченный регулятор K_2

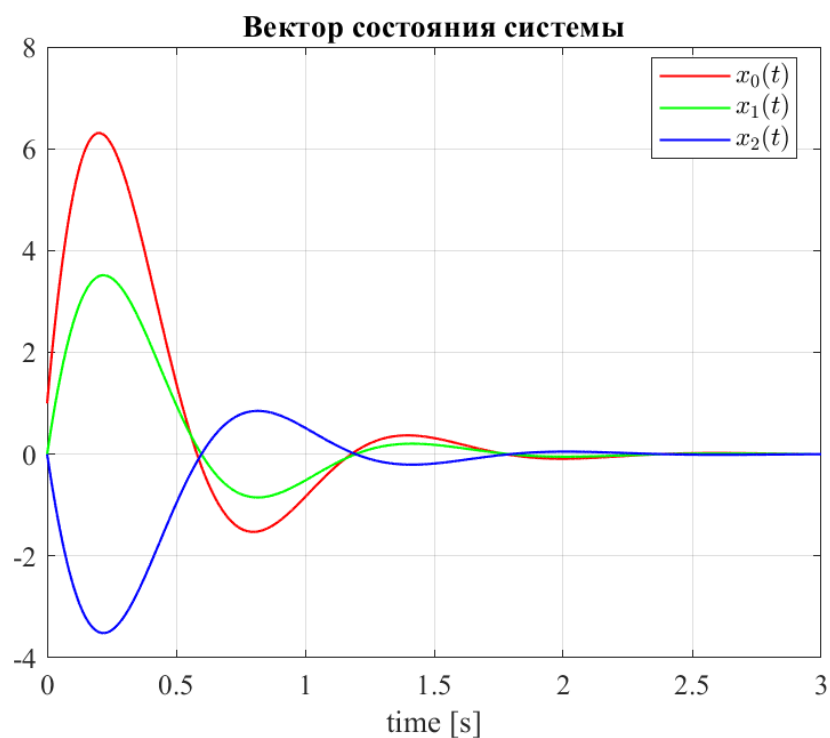


Рисунок 5 — Состояние системы, ограниченный регулятор K_2

Как можно заметить - ограничением управления немного увеличили время переходного процесса и перерегулирование, но взамен мы возможно не перегрели обмотки двигателя.

Дополнительно синтезируем регулятор другим методом, при помощи **матричного уравнения типа Риккати** при $\nu = 2, R = 1$:

$$A^T P + P A + Q - \nu P B R^{-1} B^T P + 2\alpha P = 0, \quad P \succ 0, \quad K = -R^{-1} B^T P$$

Найдём матрицы регуляторов K_3, K_4 при $Q = I, Q = 0$:

$$K_3 = \begin{bmatrix} 7.18 & -5.98 & 7.1 \end{bmatrix}, \quad K_4 = \begin{bmatrix} 4.26 & -3.86 & 4.26 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A + B K_3) = \{-3.58 \pm 6.94i, -2\}, \quad \sigma(A + B K_4) = \{-2 \pm 5.83i, -2\}$$

Матричное уравнение Риккати, - частный случай *LMI* Ляпунова, поэтому это уравнение лишь даёт одно конкретное решение из области неравенства, поэтому в целом K_1, K_2 и K_3, K_4 матрицы схожи, и поведение системы также. Однако бОльшие различия можно заметить, сравнив K_3, K_4 между собой: при нулевой Q мы позволяем вектору состояния иметь больших размах, перерегулирование, потому что убираем "штраф на вектор состояния". Это можно заметить на графиках моделирования:

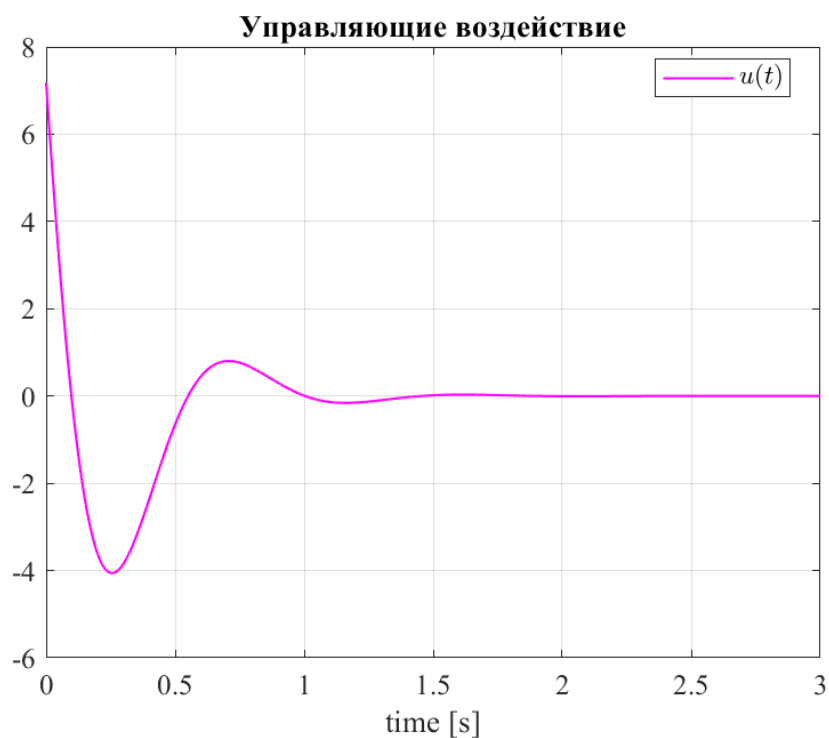


Рисунок 6 — Сигнал управления, $Q = I$

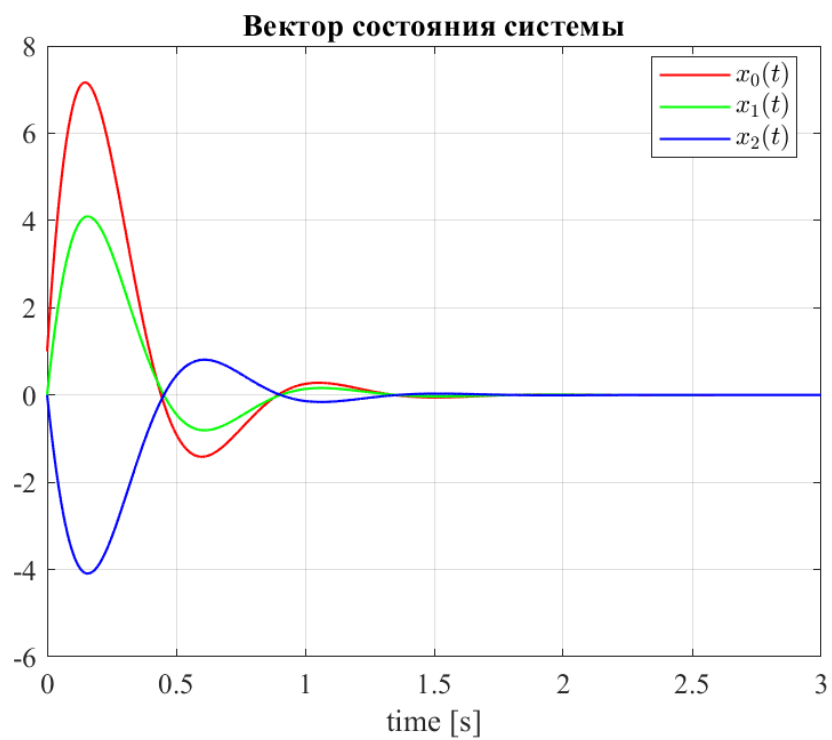


Рисунок 7 — Состояние системы, $Q = I$

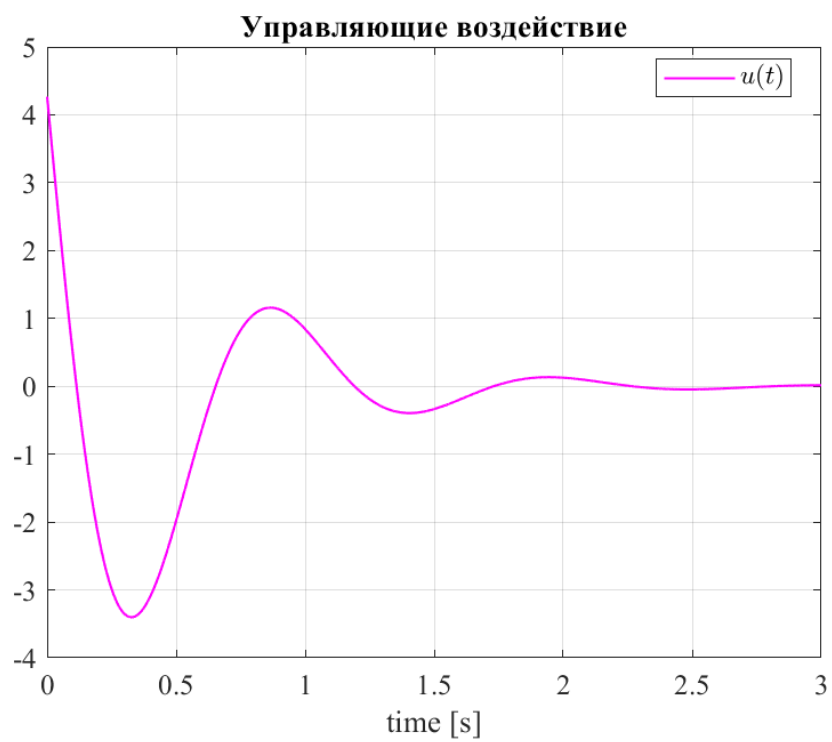


Рисунок 8 — Сигнал управления, $Q = 0$

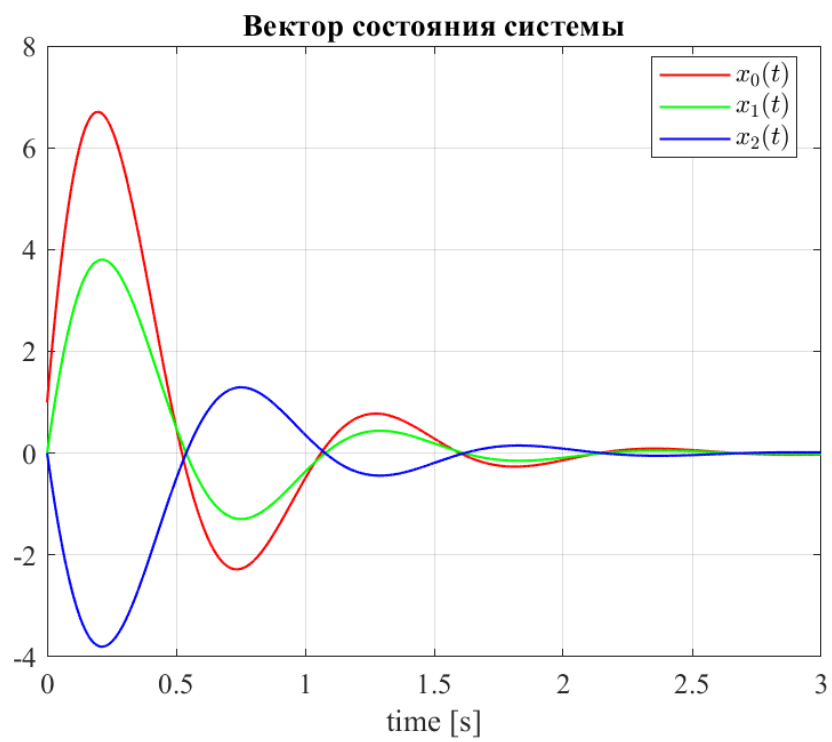


Рисунок 9 — Состояние системы, $Q = 0$

1.2.4 Вторая желаемая степень устойчивости

$$\alpha_2 = 0.5$$

Синтезируем регулятор при помощи **матричного неравенства Ляпунова**, без ограничений на управление и с ним:

$$K_1 = \begin{bmatrix} 6.64 & -6.31 & 6.27 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 1.75 & -2.38 & 1.51 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A + BK_1) = \{-4.5 \pm 5.5i, -2\}, \quad \sigma(A + BK_2) = \{-1.03 \pm 3.86i, -2\}$$

Как можно заметить, управляемые собственные числа в обоих случаях у регулятора не превышают заданное α_2 по модулю, а также в случае с ограниченным управлением стали несколько меньше, что говорит о том, что ограничение на управление подействовало на моды напрямую, синтез корректен и мы продемонстрируем это моделированием:

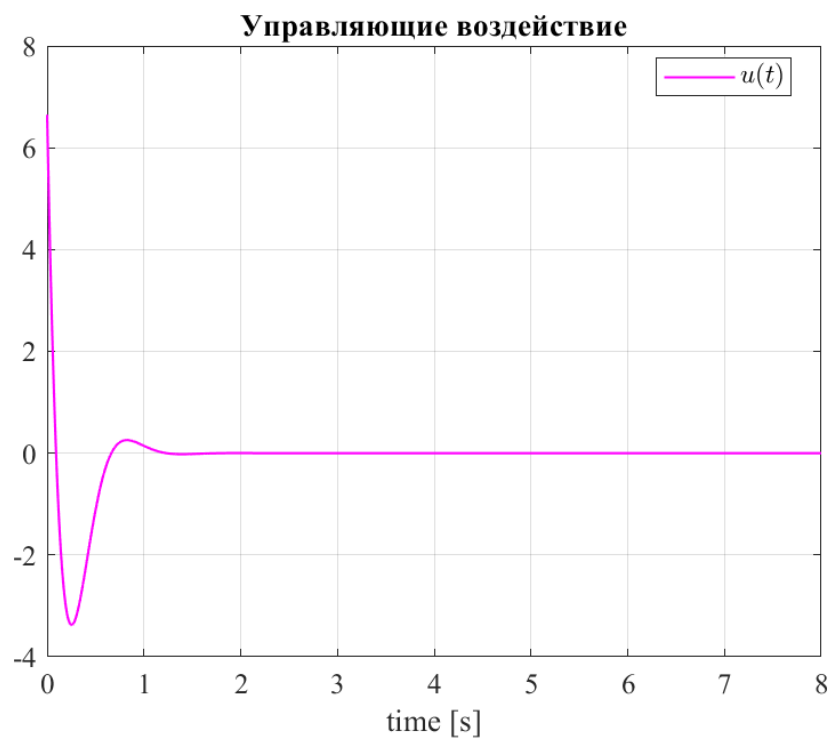


Рисунок 10 — Сигнал управления, регулятор K_1

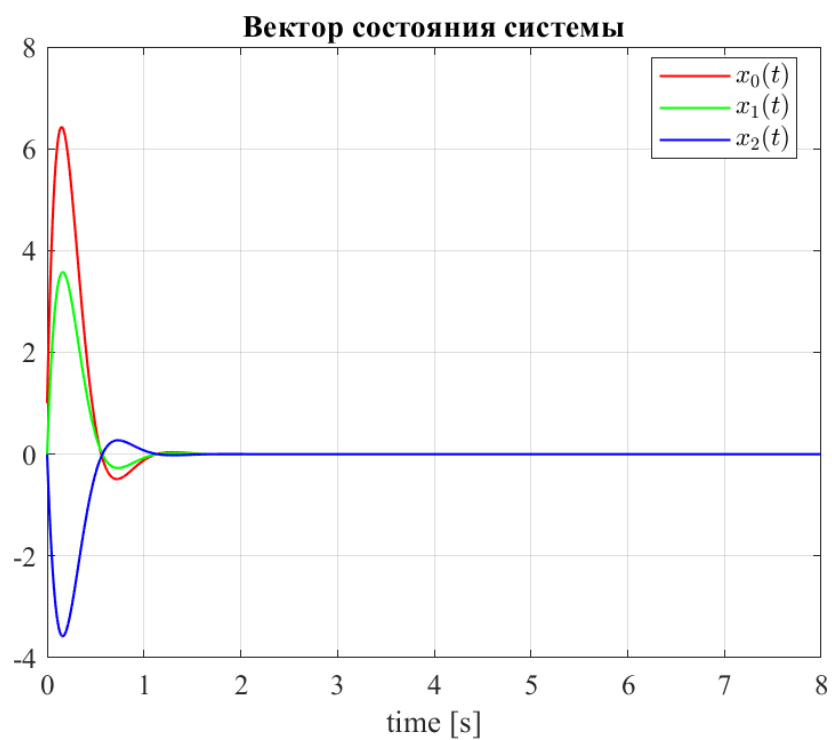


Рисунок 11 — Состояние системы, регулятор K_1

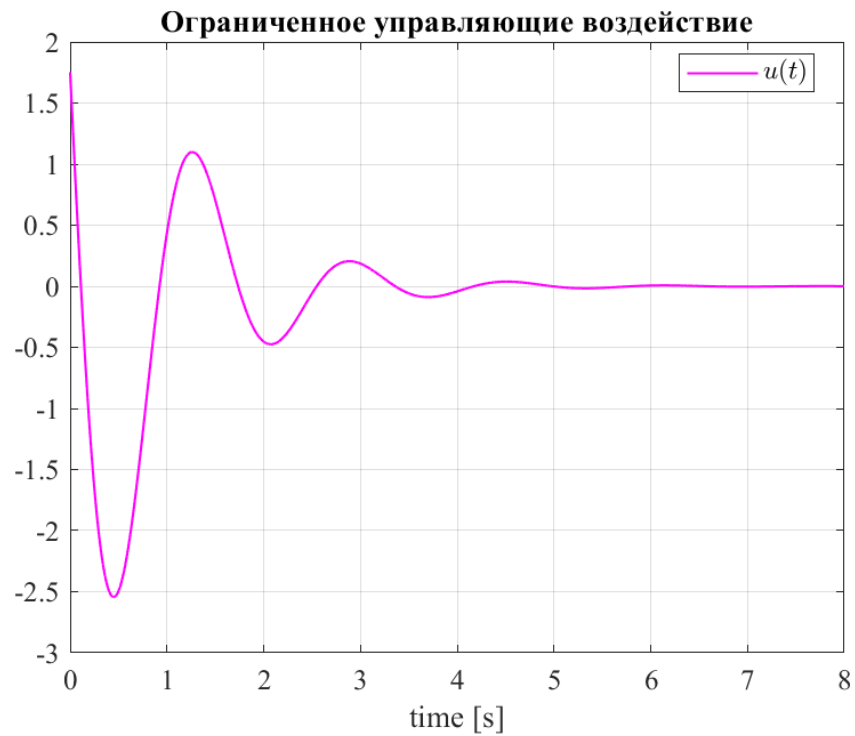


Рисунок 12 — Сигнал управления, ограниченный регулятор K_2

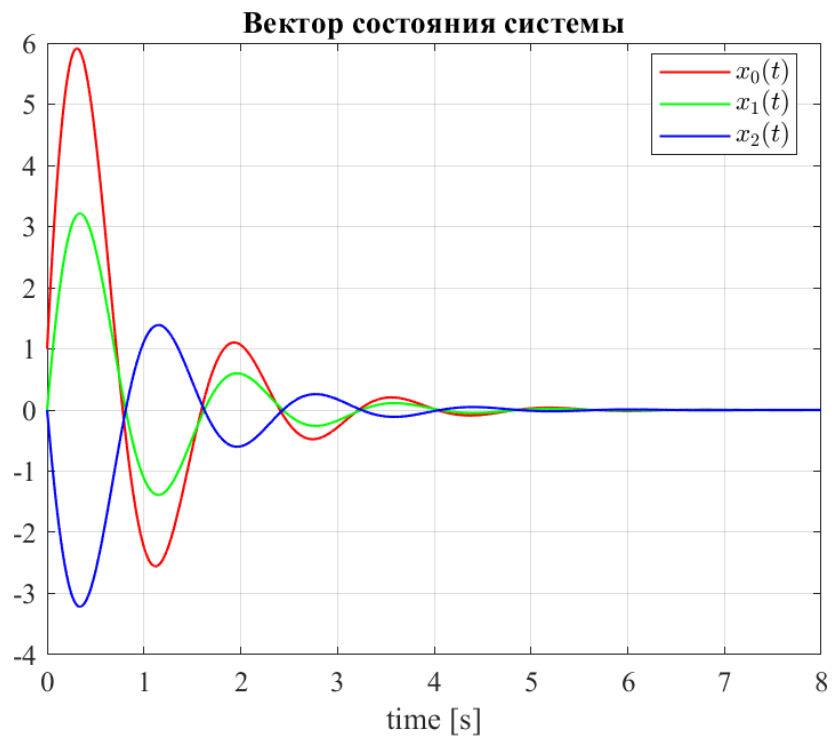


Рисунок 13 — Состояние системы, ограниченный регулятор K_2

Как и с прошлым параметром α - ограничением управления немного увеличили время переходного процесса и перерегулирование, однако сейчас мы значительно увеличили время переходного процесса, потому что взяли $\alpha_2 < \alpha_1$.

Дополнительно синтезируем регулятор другим методом, при помощи **матричного уравнения типа Риккати** при $\nu = 2, R = 1$:

Найдём матрицы регуляторов K_3, K_4 при $Q = I, Q = 0$:

$$K_3 = \begin{bmatrix} 4.44 & -4.07 & 4.44 \end{bmatrix}, \quad K_4 = \begin{bmatrix} 2.0 & -2.14 & 2.0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma(A + BK_3) = \{-2.35 \pm 5.7i, -2\}, \quad \sigma(A + BK_4) = \{-0.5 \pm 4.6i, -2\}$$

Матричное уравнение Риккати, - частный случай *LMI* Ляпунова, поэтому это уравнение лишь даёт одно конкретное решение из области неравенства, поэтому в целом K_1, K_2 и K_3, K_4 матрицы схожи, и поведение системы также.

Здесь различия в отсутствии/наличии штрафа на вектор состояния в виде Q также ещё проще заметить, ведь мы выбрали скорость сходимости значительно меньше, поэтому при отсутствии штрафа система позволила вектору состояния большее перерегулирование, это заметно на графиках моделирования:

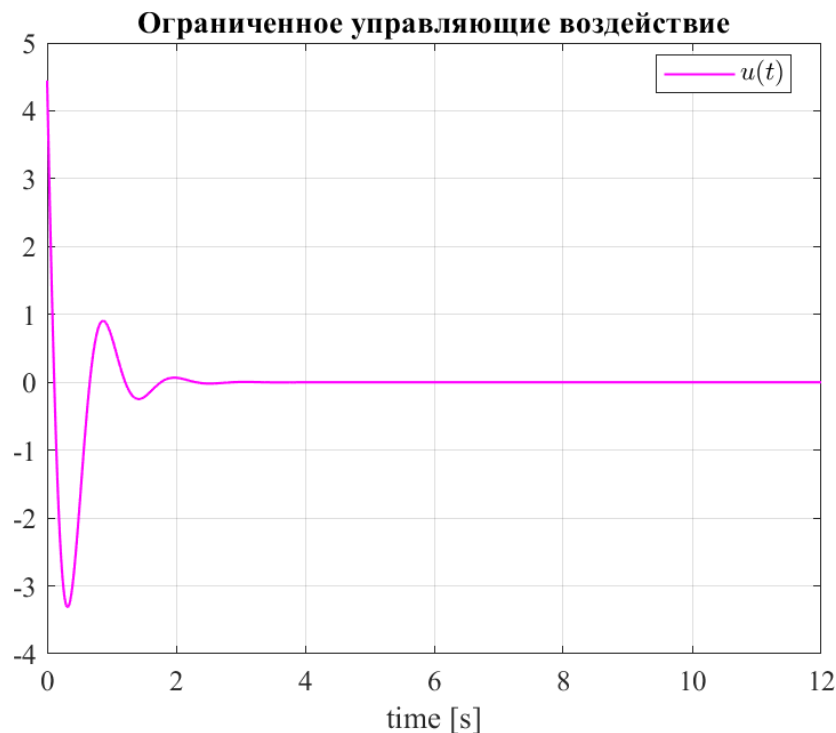


Рисунок 14 — Сигнал управления, $Q = I$

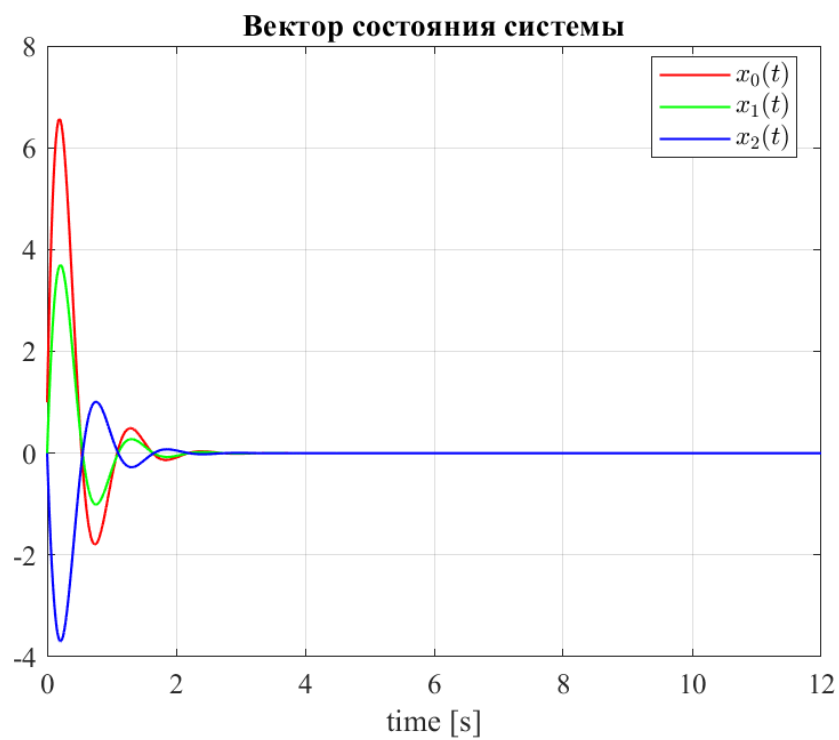


Рисунок 15 — Состояние системы, $Q = I$

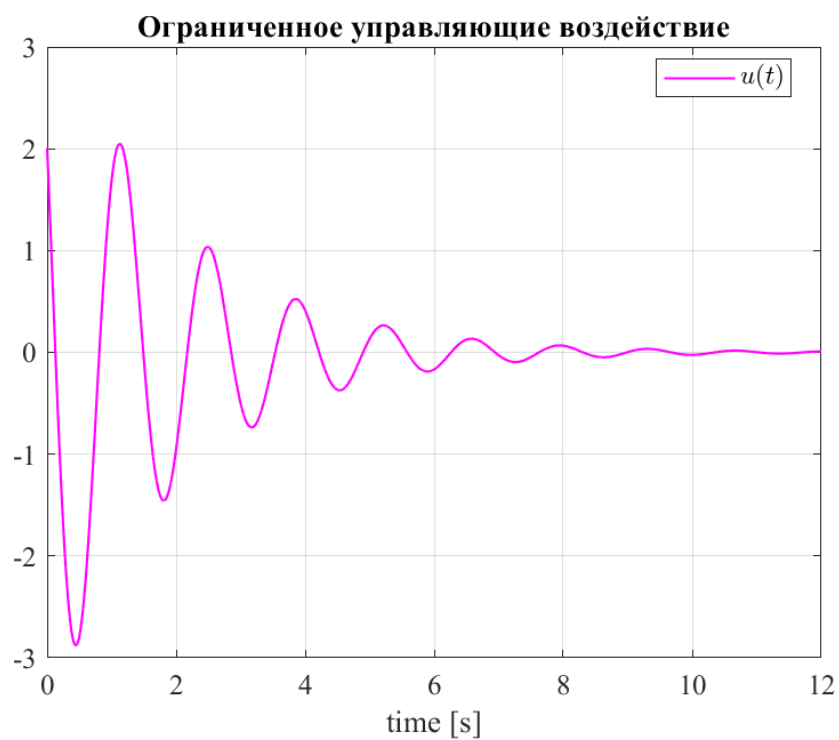


Рисунок 16 — Сигнал управления, $Q = 0$

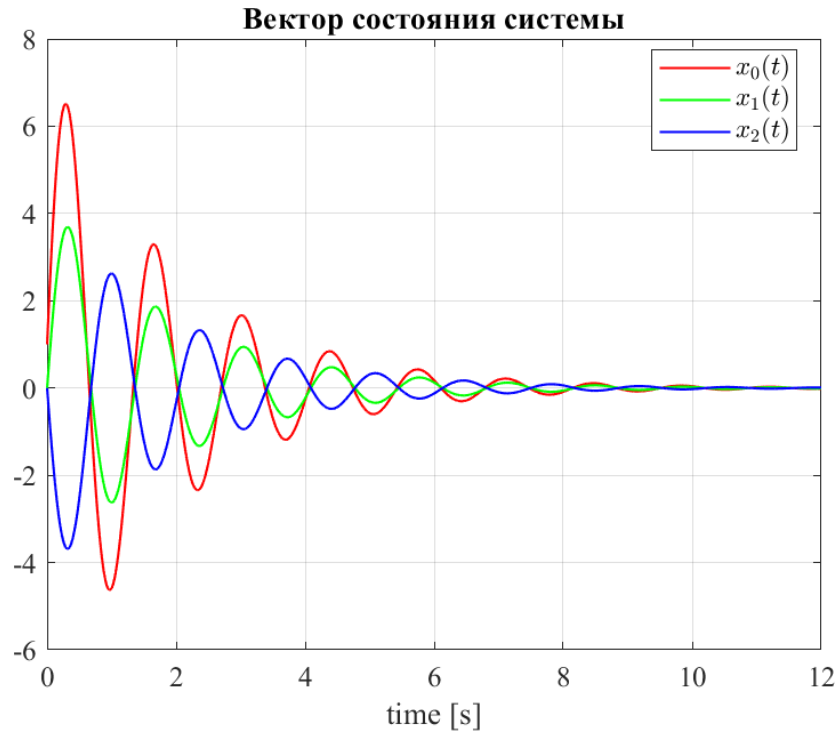


Рисунок 17 — Состояние системы, $Q = 0$

1.2.5 Вывод

В этом задании мы синтезировали регулятор с заданной степенью устойчивости для стабилизируемой системы, для этого пришлось применить метод усечения, чтобы работать только с управляемой частью. Для вычисления матриц коэффициентов мы воспользовались двумя способами - решением матричного неравенства типа Ляпунова, а также матричным уравнением Риккати. Оба способа показали спектры матрицы $(A + BK)$ не меньше чем заданный параметр α (скорость сходимости), что свидетельствует о корректном синтезе.

2 УПРАВЛЕНИЕ ПО ВЫХОДУ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕНЬЮ УСТОЙЧИВОСТИ

2.1 Условие задачи

Рассмотреть систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

и выполнить следующие шаги:

- Найти собственные числа матрицы A и определить наблюдаемость каждого из них. Сделать вывод об наблюдаемости и обнаруживаемости системы.
- Определить, любой ли желаемой степени устойчивости вы можете добиться от данной системы при помощи регулятора вида $u = Kx$. Объяснить, почему, и, если не любой, то определить максимальную возможную.
- Определить, любой ли желаемой степени сходимости вы можете добиться от наблюдателя полной размерности для данной системы. Объяснить, почему, и, если не любой, то определить максимальную возможную.
- Построить схему моделирования системы замкнутой регулятором $u = Kx$ с наблюдателем $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(C\hat{x} - y)$
- Задаться не менее чем парой значений $\alpha > 0$, все из которых могли бы быть использованы в качестве желаемой степени устойчивости для регулятора и желаемой степени сходимости для наблюдателя. Если существуют ограничения на достижимые степени устойчивости или сходимости, то одна из выбранных α должна быть максимально возможной, а другие достижимыми. Постарайтесь взять достаточно отличающиеся значения α .
- Используя выбранные значения α , составить не менее чем 3 набора значений желаемой степени устойчивости α_K и желаемой степени сходимости α_L , среди которых должны быть случаи равенства, и неравенства в обе стороны.

Для каждого из выбранных наборов:

- Найти соответствующую матрицу регулятора K , обеспечивающую желаемую α_K . Отклонения фактических собственных чисел спектра замкнутой системы от желаемой степени устойчивости должны быть **минимизированы**.
- Определить собственные числа матриц замкнутых систем $(A + BK)$ и сравнить с желаемой степенью устойчивости в подтверждение корректности синтеза регулятора.
- Найти соответствующую матрицу наблюдателя L , обеспечивающую желаемую степень сходимости α_L . Отклонения фактических собственных чисел спектра наблюдателя от желаемой степени сходимости должны быть **минимизированы**.
- Определить собственные числа матриц замкнутых систем $(A + LC)$ и сравнить с желаемой степенью устойчивости в подтверждение корректности синтеза наблюдателя.
- Выполнить моделирование с начальными условиями системы $x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и наблюдателя $\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Построить сравнительные графики $x(t)$ и $\hat{x}(t)$, график управления $u(t)$ и ошибки наблюдателя $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.
- Сравнить полученные результаты для различных наборов α_K и α_L сделать выводы о взаимном влиянии степени устойчивости регулятора и степени сходимости наблюдателя при управлении по выходу.

2.2 Решение задачи

Параметры для объекта:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ -7 & 5 & -1 & 5 \\ -5 & -1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 1 \\ 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

2.2.1 Исследование наблюдаемости и управляемости системы

Найдём собственные числа матрицы A :

$$\sigma(A) = \{-8, 4, 8, 16\}$$

Обратимся к исследованию в моей прошлой работе - система будет полностью наблюдаема и управляема, а значит все собственные числа этой системы будут тоже наблюдаемы и управляемы.

В таком случае мы сможем добиться любой степени устойчивости/сходимости, поскольку мы вправе сдвигать все собственные числа для синтеза регулятора/наблюдателя, а значит степень устойчивости будет зависеть от нашего выбора α .

Построим аналогичную схему с предыдущей работы:

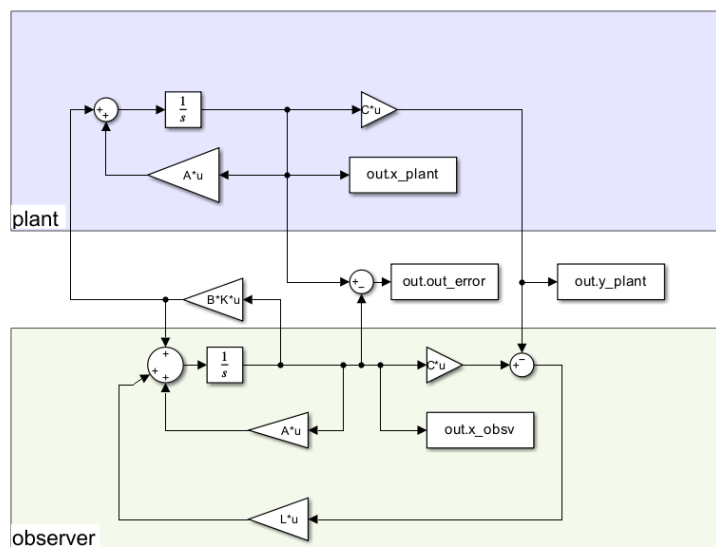


Рисунок 18 — Модель с модальным регулятором и наблюдателем

2.2.2 Желаемая степень сходимости и устойчивости

При нашей конфигурации системы мы можем добиться любой степени сходимости и устойчивости, поскольку система неустойчива изначально, но полностью управляема/наблюдаема, поэтому регулятор может вольно перенести собственные числа в соответствии с выбранным α . Выберем пару значений коэффициентов сходимости α :

$$\alpha_{1,2} = \{3, 11\}$$

Составим наборы значений параметров α и проведём исследование.

2.2.3 Наблюдатель и регулятор равны

$$\alpha_K = \alpha_L = 3$$

Найдём матрицу регулятора K методом **матричных неравенств Ляпунова**, минимизацию отклонения фактических собственных чисел замкнутой системы от заданного параметра добьёмся минимизацией, которую обеспечат два дополнительных матричных неравенства отдельной задачей по минимизации управления:

Для такой степени устойчивости синтезируем регулятор при помощи **матричного уравнения Риккати**:

$$\left\{ \begin{array}{l} PA^T + AP + 2\alpha P + Y^T B^T \preceq 0, \quad P \succ 0 \\ K = Y P^{-1} \\ \left[\begin{array}{cc} P & x_0 \\ x_0^T & 1 \end{array} \right] \succ 0, \quad \rightarrow \quad \mu = 26 \\ \left[\begin{array}{cc} P & Y^T \\ Y & \mu^2 I \end{array} \right] \succ 0, \quad \rightarrow \quad K_1 = \begin{bmatrix} 17.32 & -19.84 & 3.84 & 1.28 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Регулятор даст следующий спектр, у нас сейчас $\alpha_K = 3$:

$$\sigma(A + BK_1) = \{-4.83 \pm 23.74i, -4.84, -7.97\}$$

Судя по спектру, регулятор синтезирован корректно.

Теперь синтезируем наблюдателя при помощи **матричного уравнения Риккати**, уравнения и неравенства будут выглядеть лишь чуть по-другому:

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T Q + Q A + 2\alpha Q + C^T Y^T + Y C \preceq 0 \\ L = Q^{-1} Y \\ \begin{bmatrix} Q & e_0 \\ e_0^T & I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \rightarrow \quad \mu = 15 \\ \begin{bmatrix} Q & Y \\ Y^T & \mu^2 I \end{bmatrix} \succ 0, \quad \rightarrow \quad L_1 = \begin{bmatrix} 18.43 & -7.06 \\ -21.39 & 0.08 \\ -4.43 & 7.19 \\ -7.39 & 0.20 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

Где $e_0 = x_0 - \hat{x}_0$ - отклонение 'начальных' условий. Наблюдатель даст следующий спектр, у нас сейчас $\alpha_L = 3$:

$$\sigma(A + L_1 C) = \{-3.18 \pm 14.68i, -8, -3.1\}$$

Судя по спектру, наблюдатель синтезирован корректно, так как он не превышает заданной α .

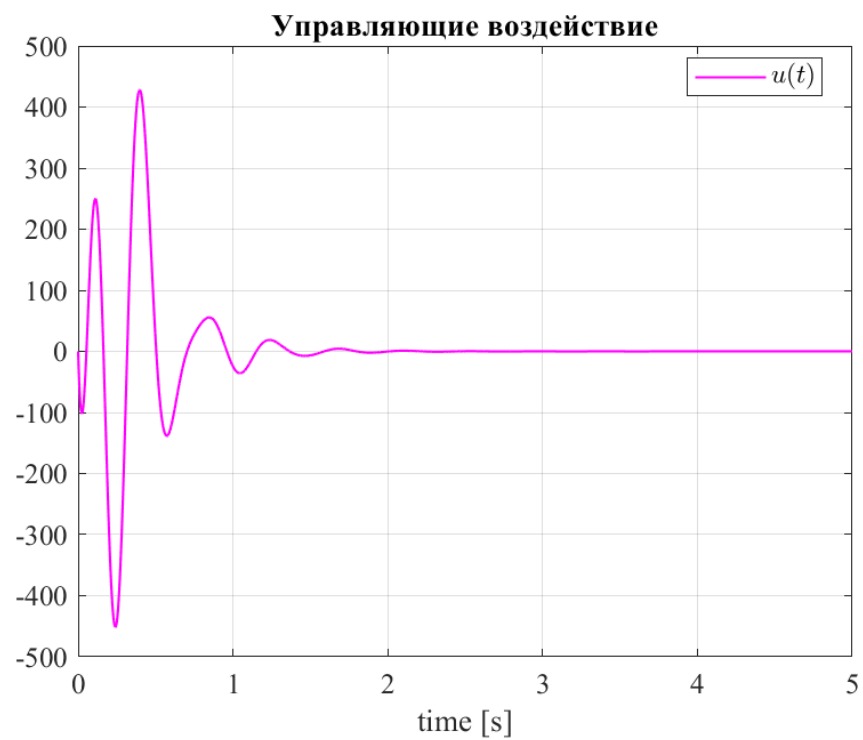


Рисунок 19 — Сигнал управления и регулятор

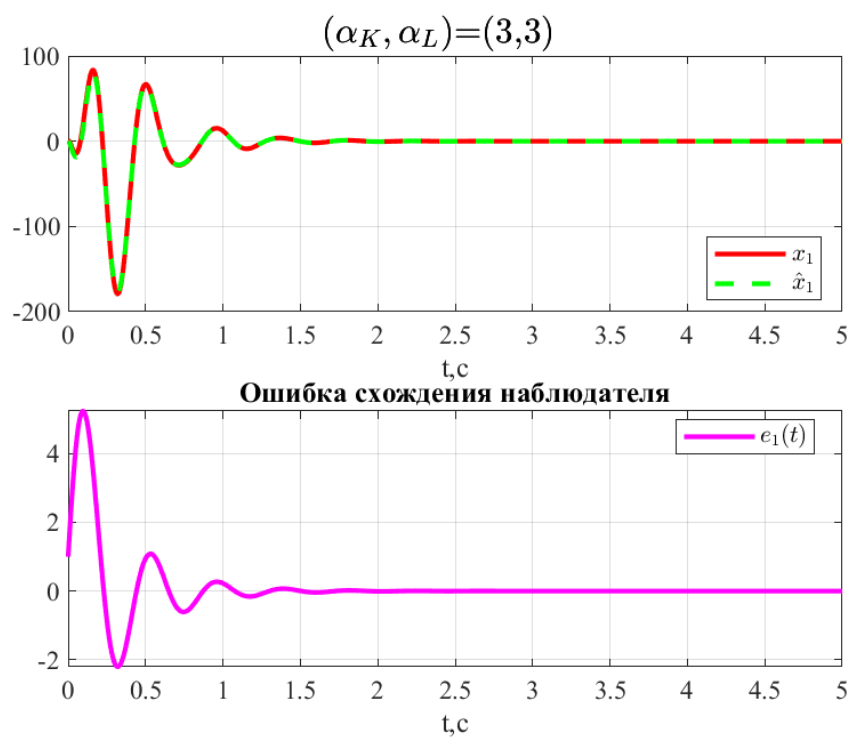


Рисунок 20 — Состояние системы и наблюдатель

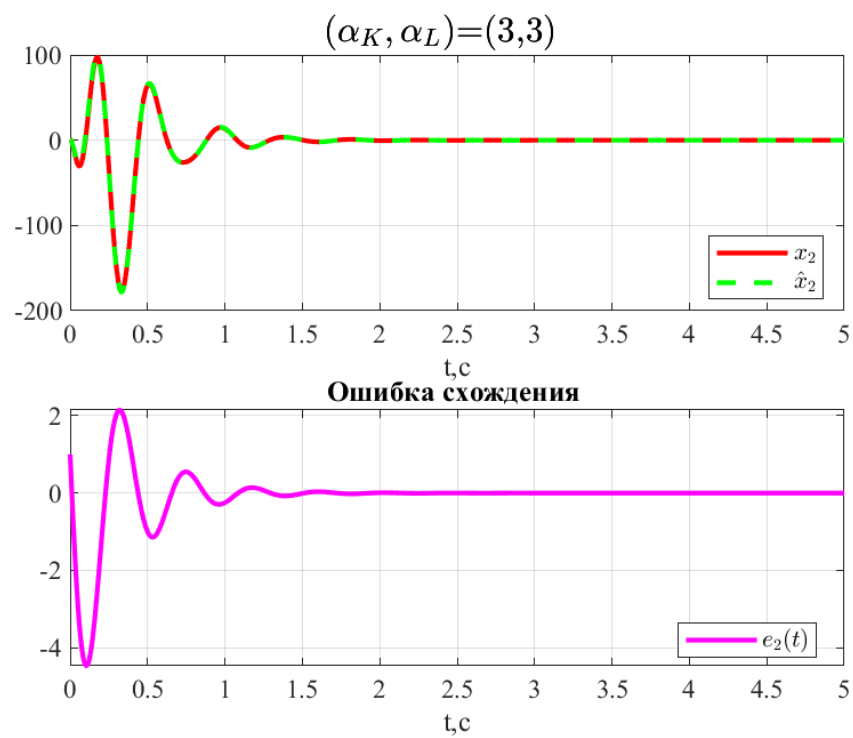


Рисунок 21 — Состояние системы и наблюдатель

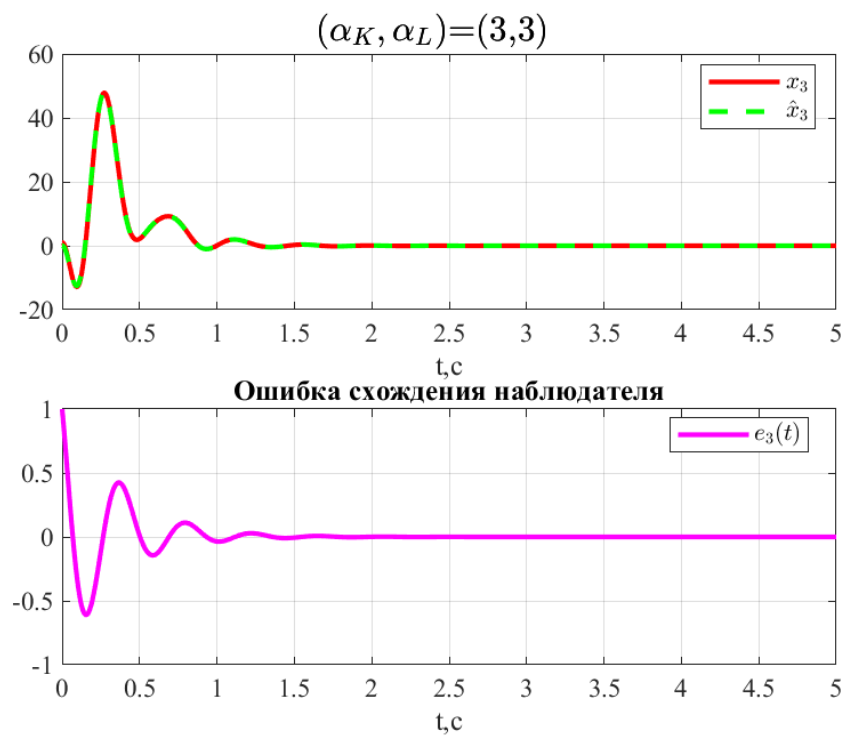


Рисунок 22 — Состояние системы и наблюдатель

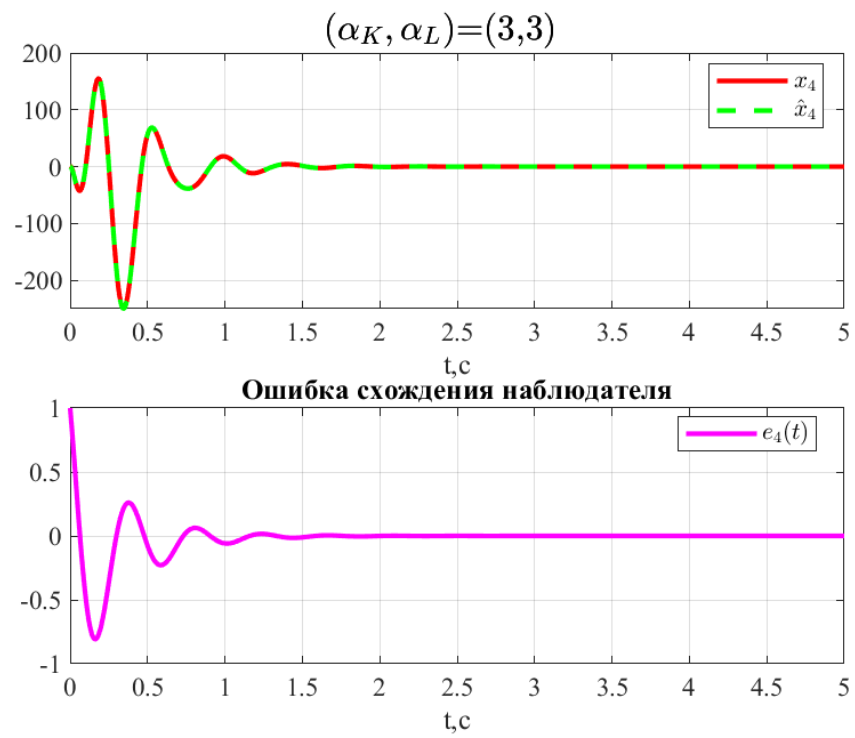


Рисунок 23 — Состояние системы и наблюдатель

В дальнейшем формулы останутся теми же, поэтому исследования будут сжаты...

$$\alpha_K = \alpha_L = 11$$

Синтезируем регулятор при помощи **матричного уравнения Риккати**:

$$\mu = 226, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 103.28 & -134.43 & 66.44 & 32.68 \end{bmatrix}$$

Регулятор даст следующий спектр, у нас сейчас $\alpha_K = 11$:

$$\sigma(A + BK_2) = \{-11 \pm 23.74i, -11 \pm 3.47i\}$$

Судя по спектру, регулятор синтезирован корректно.

Теперь синтезируем наблюдателя при помощи **матричного уравнения Риккати**:

$$\mu = 29, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 32.43 & -20.55 \\ -41.75 & 3.67 \\ -1.57 & 16.34 \\ -17.27 & -6.93 \end{bmatrix}$$

Наблюдатель даст следующий спектр, у нас сейчас $\alpha_L = 11$:

$$\sigma(A + L_2C) = \{-11 \pm 12.95i, -11 \pm 0.18i\}$$

Судя по спектру, наблюдатель синтезирован корректно, так как он не превышает заданной α .

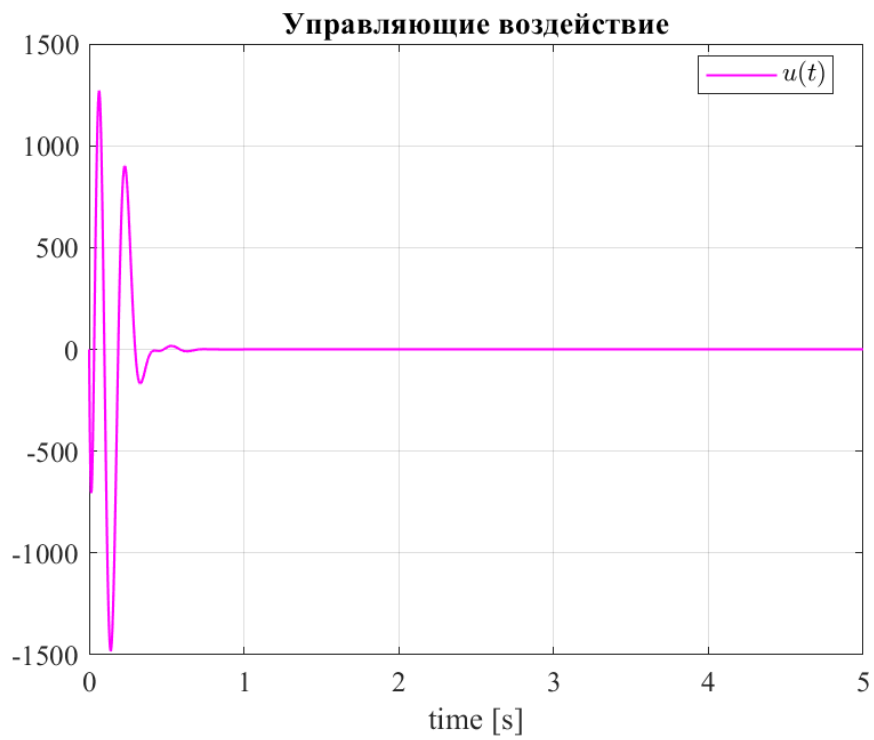


Рисунок 24 — Сигнал управления

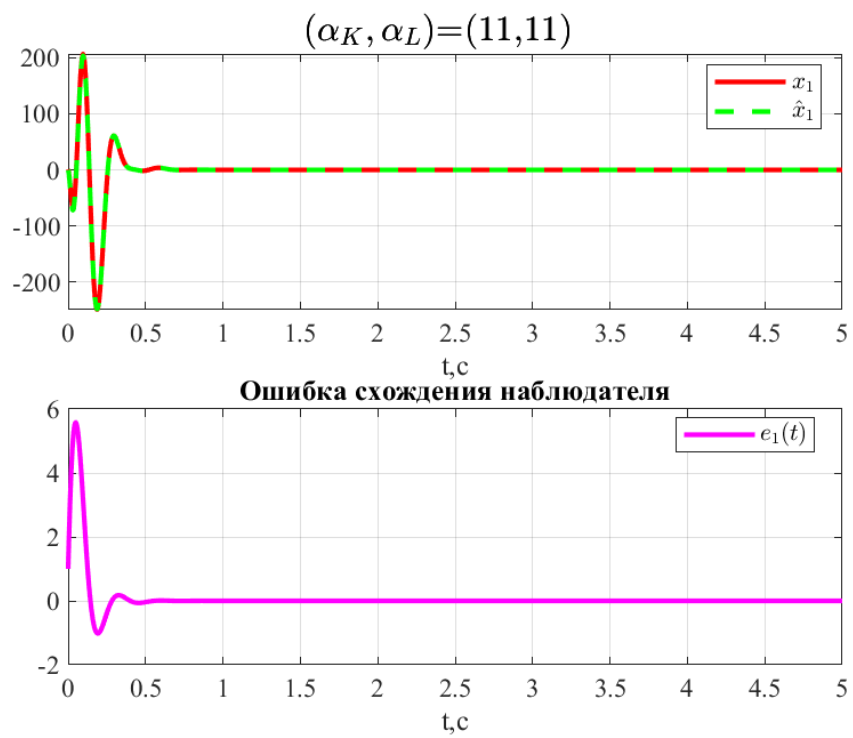


Рисунок 25 — Состояние системы и наблюдатель

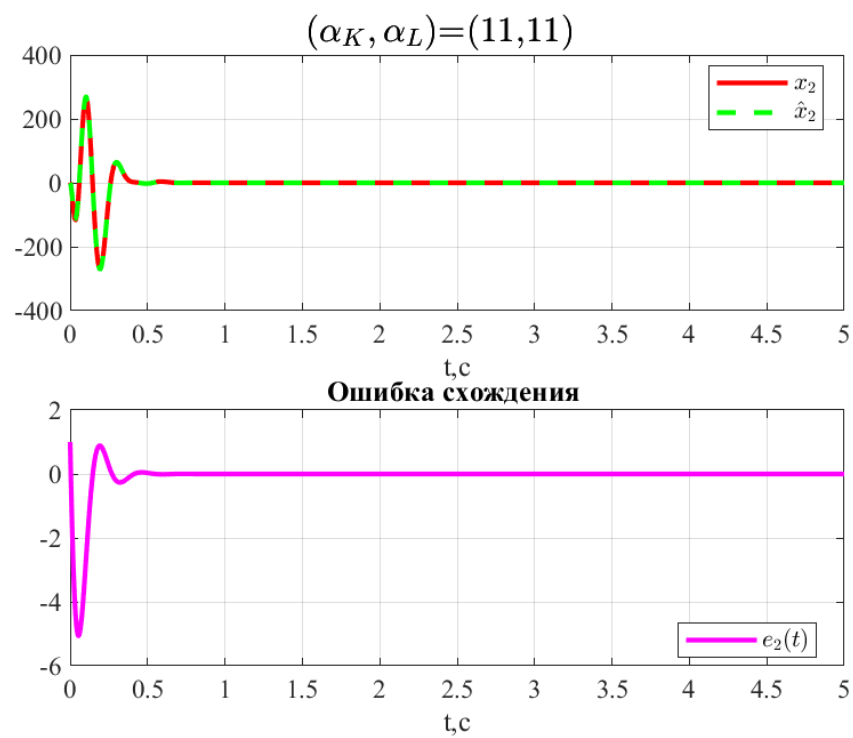


Рисунок 26 — Состояние системы и наблюдатель

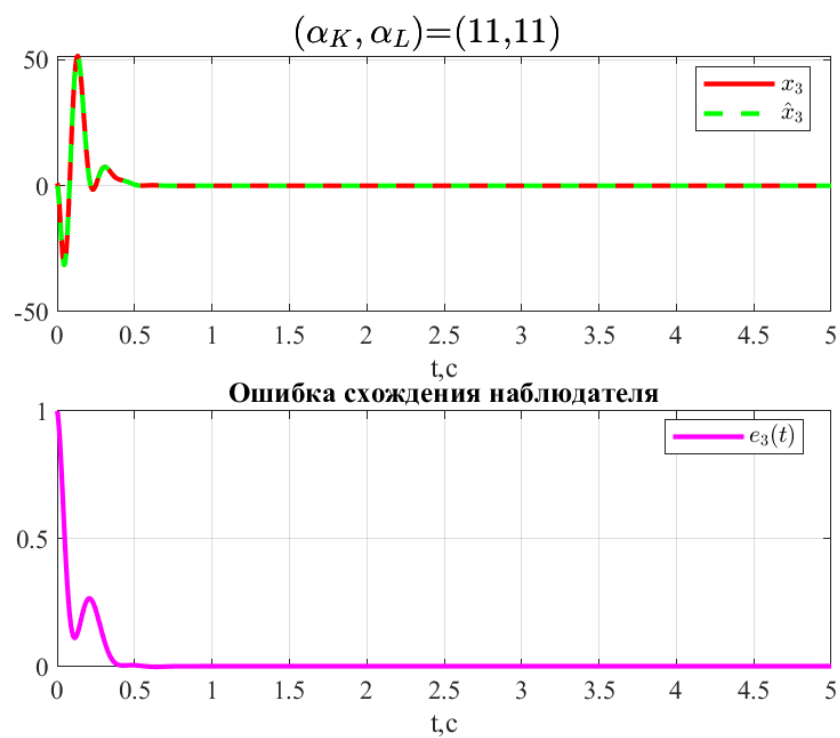


Рисунок 27 — Состояние системы и наблюдатель

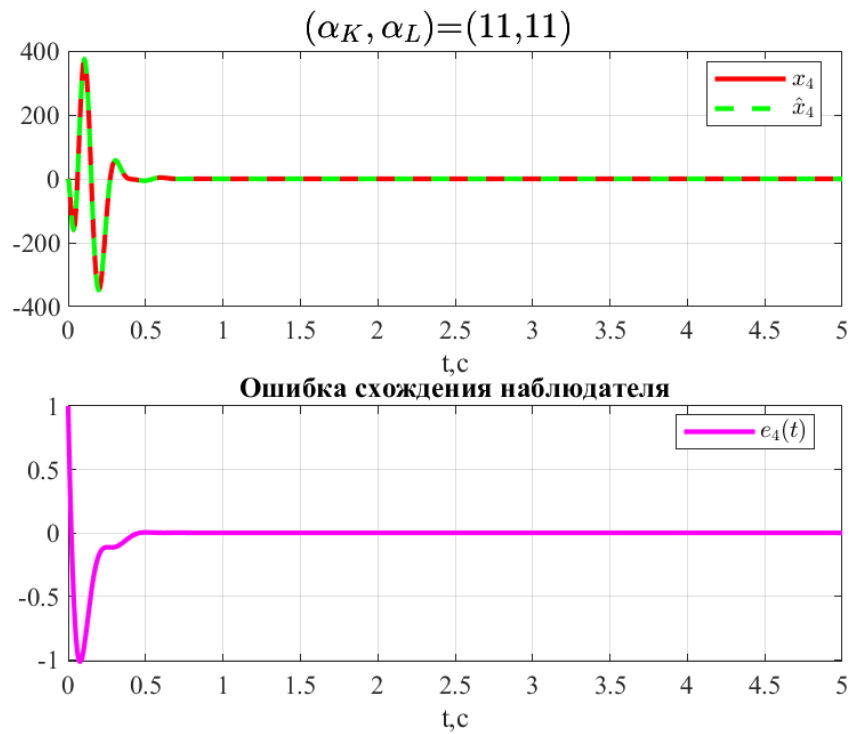


Рисунок 28 — Состояние системы и наблюдатель

Можно заметить, что при увеличении параметра $\alpha : 3 \rightarrow 11$ мы значительно сократили перерегулирование и время переходного процесса, но взамен получили довольно резкое перерегулирование у контроллера во втором случае, поскольку на него возлагалась более быстрая задача стабилизации сигнала. Примерно то же поведение можно наблюдать и у схождения наблюдателя к истинным компонентам вектора, всё-таки параметр α здесь равный и агрессивный.

2.2.4 Регулятор сильнее

$$\alpha_K = 11, \quad \alpha_L = 3$$

Синтезируем регулятор при помощи **матричного уравнения Риккати**:

$$\mu = 226, \quad K_3 = \begin{bmatrix} 225.14 & -304.37 & 175.49 & 84.6 \end{bmatrix}$$

Регулятор даст следующий спектр, у нас сейчас $\alpha_K = 11$:

$$\sigma(A + BK_3) = \{-12.14 \pm 39i, -11 \pm 4i\}$$

Судя по спектру, регулятор синтезирован корректно.

Теперь синтезируем наблюдателя при помощи **матричного уравнения Риккати**:

$$\mu = 29, \quad L_3 = \begin{bmatrix} 20.47 & -17.44 \\ -23.72 & 10.17 \\ -4.74 & 6.02 \\ -8.01 & -1.28 \end{bmatrix}$$

Наблюдатель даст следующий спектр, у нас сейчас $\alpha_L = 3$:

$$\sigma(A + L_3C) = \{-3 \pm 14.68i, -3, -8\}$$

Судя по спектру, наблюдатель синтезирован корректно, так как он не превышает заданной α .

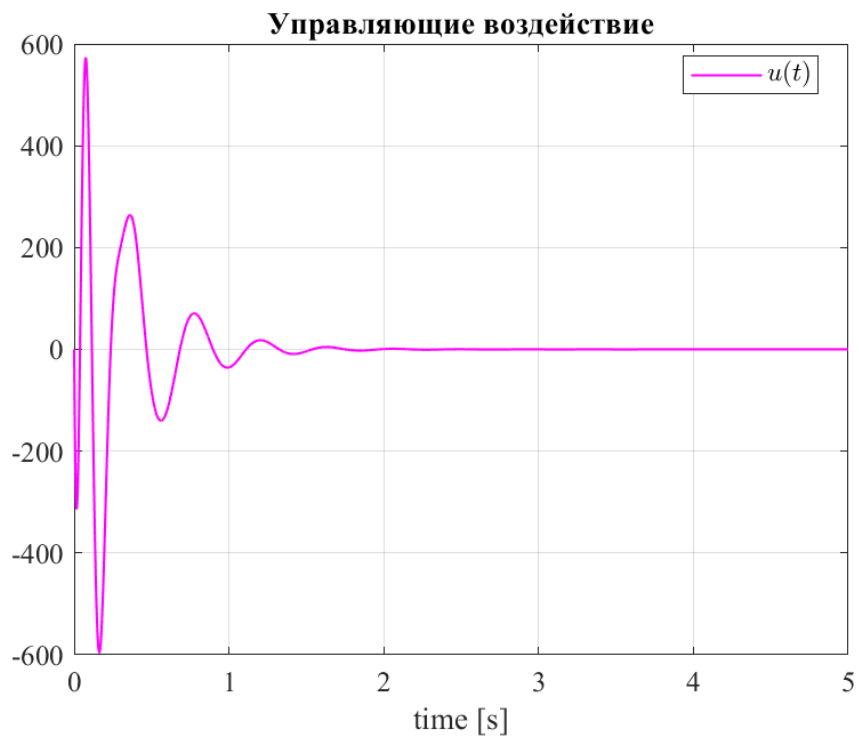


Рисунок 29 — Сигнал управления

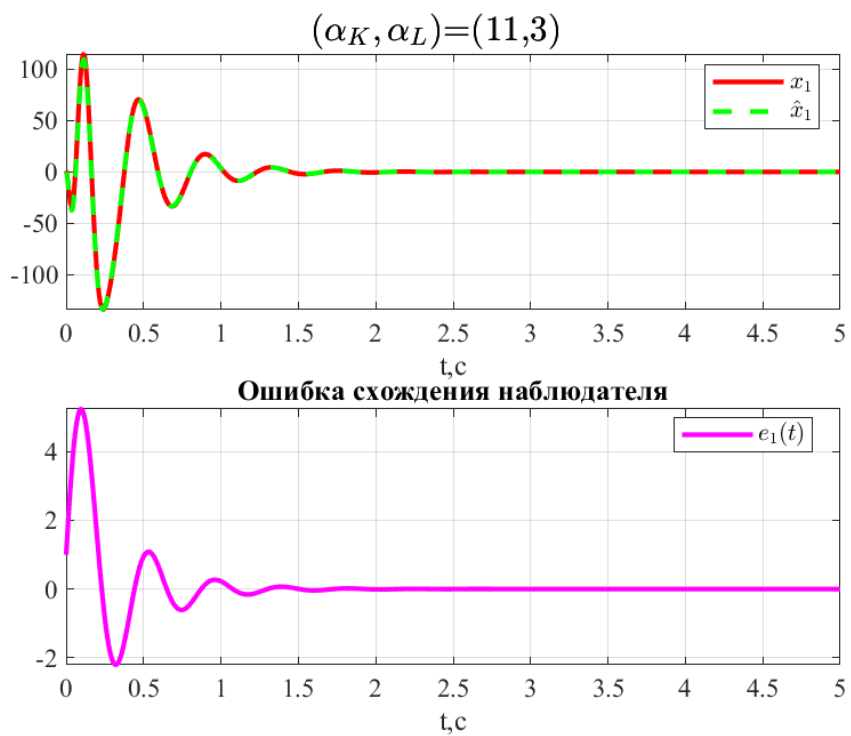


Рисунок 30 — Состояние системы и наблюдатель

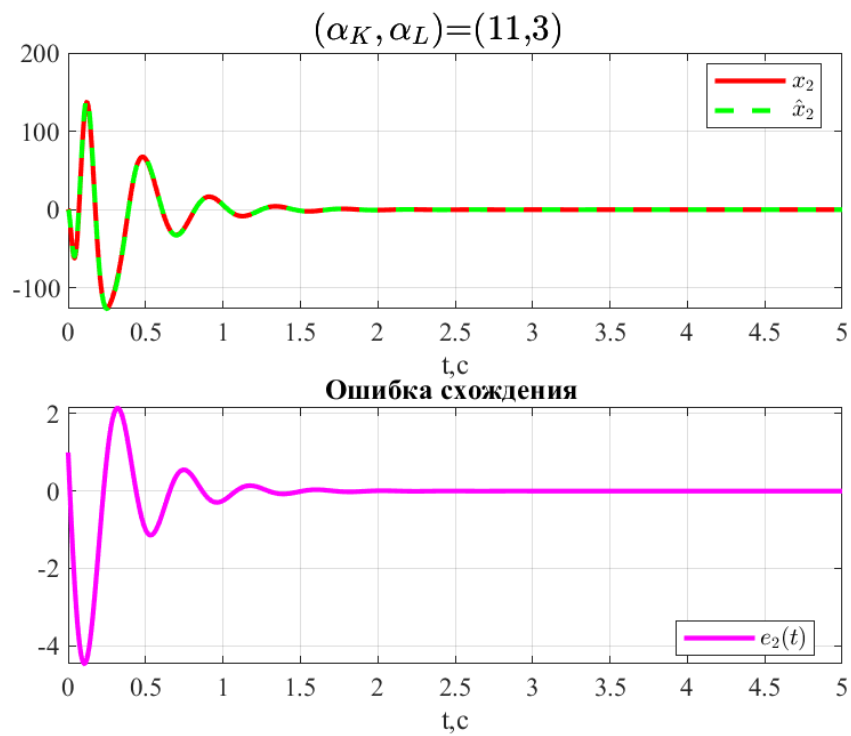


Рисунок 31 — Состояние системы и наблюдатель

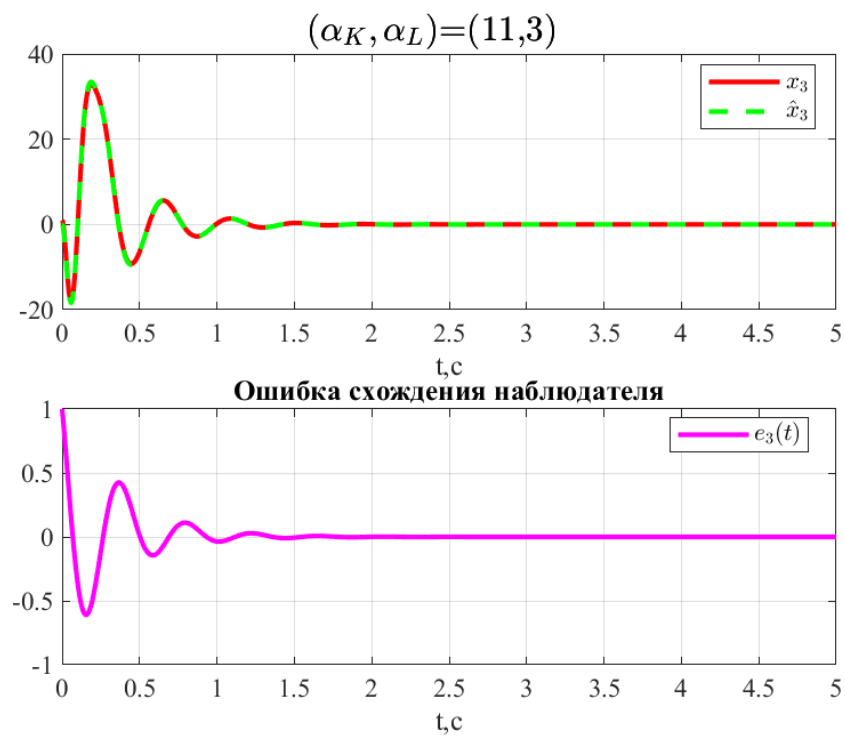


Рисунок 32 — Состояние системы и наблюдатель

Сейчас можно заметить другую тенденцию - мы оставили регулятор агрессивное поведение, поэтому получили резкое перерегулирование, но время переходного процесса увеличилось по сравнению с прошлым набором

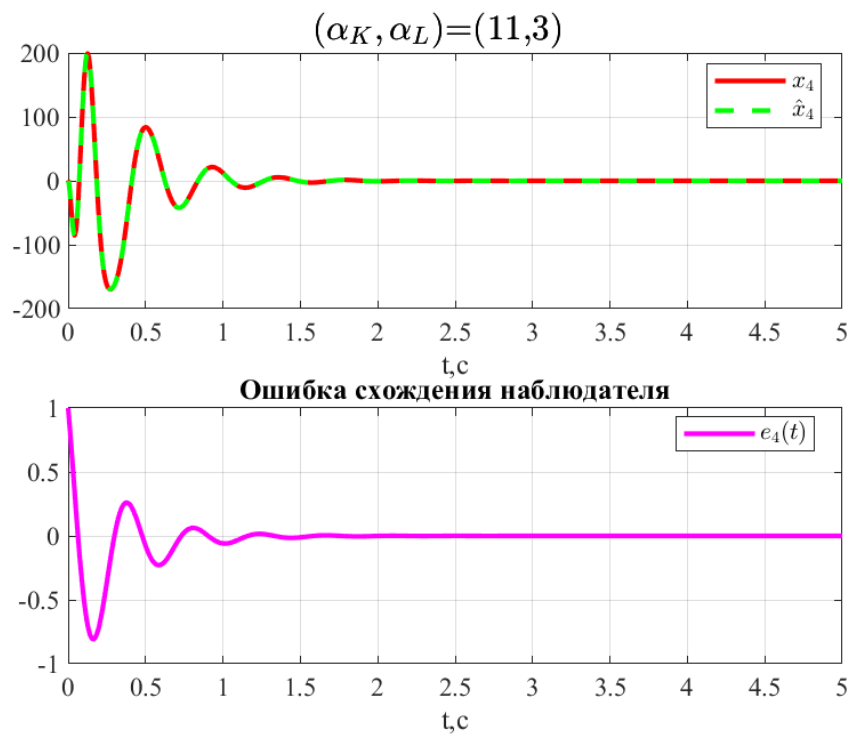


Рисунок 33 — Состояние системы и наблюдатель

$(\alpha_K, \alpha_L) = (11, 11)$, поэтому уже как минимум ясно, что выбор коррелирует. Сходимость наблюдателя осталась же примерно такой же, как и в случае $(\alpha_K, \alpha_L) = (3, 3)$, поэтому такой сменой приоритетов в коэффициентах мы повлияли лишь на регулятор.

2.2.5 Наблюдатель сильнее

$$\alpha_K = 3, \quad \alpha_L = 11$$

Синтезируем регулятор при помощи **матричного уравнения Риккати**:

$$\mu = 26, \quad K_4 = \begin{bmatrix} 48.64 & -60.44 & 24.37 & 12.56 \end{bmatrix}$$

Регулятор даст следующий спектр, у нас сейчас $\alpha_K = 3$:

$$\sigma(A + BK_4) = \{-4.8 \pm 23.74i, -4.8, -7.97\}$$

Судя по спектру, регулятор синтезирован корректно.

Теперь синтезируем наблюдателя при помощи **матричного уравнения Риккати**:

$$\mu = 29, \quad L_4 = \begin{bmatrix} 50.52 & -35.89 \\ -60.2 & 18.51 \\ -1.94 & 14.8 \\ -18.81 & -9.26 \end{bmatrix}$$

Наблюдатель даст следующий спектр, у нас сейчас $\alpha_L = 11$:

$$\sigma(A + L_4C) = \{-11 \pm 23.20i, -11 \pm 6.27i\}$$

Судя по спектру, наблюдатель синтезирован корректно, так как он не превышает заданной α .

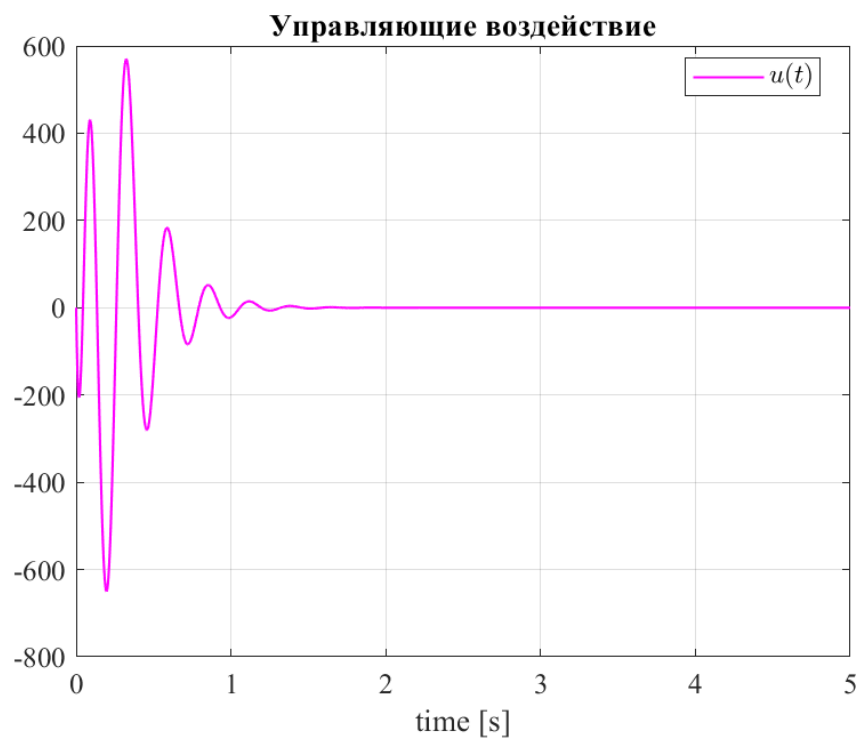


Рисунок 34 — Сигнал управления

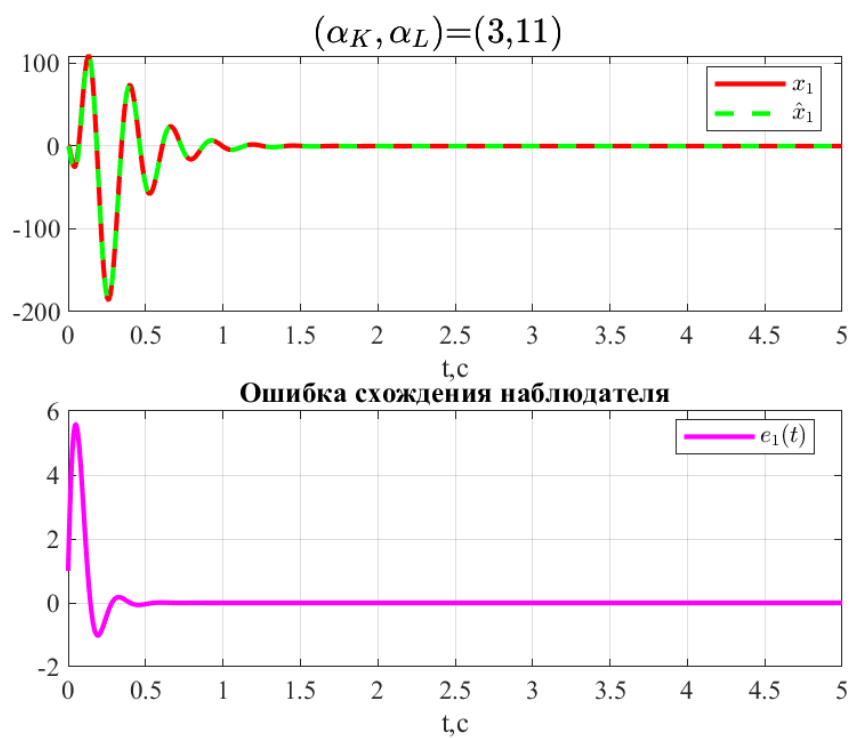


Рисунок 35 — Состояние системы и наблюдатель

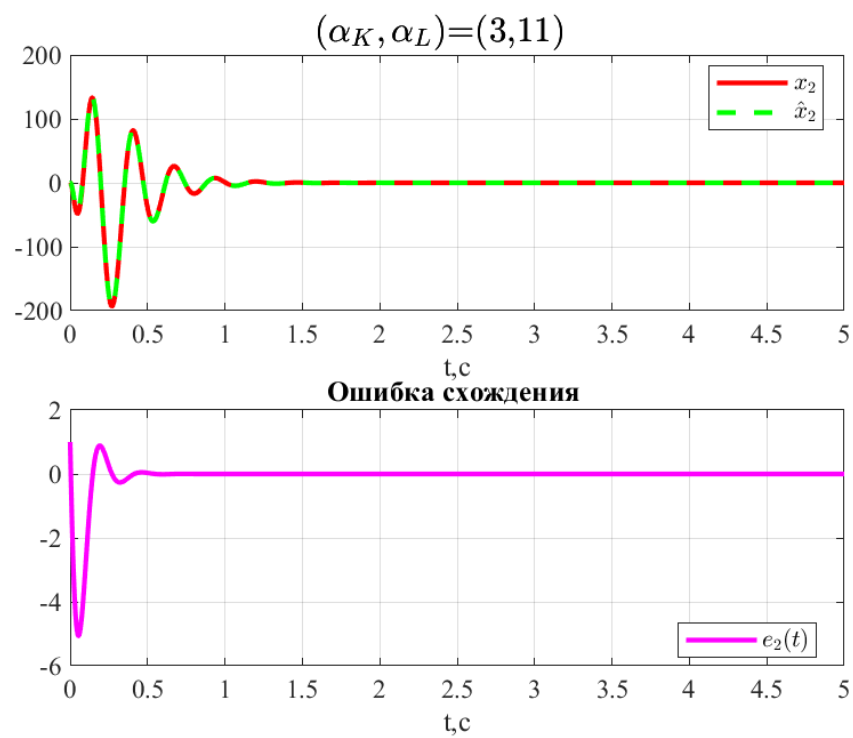


Рисунок 36 — Состояние системы и наблюдатель

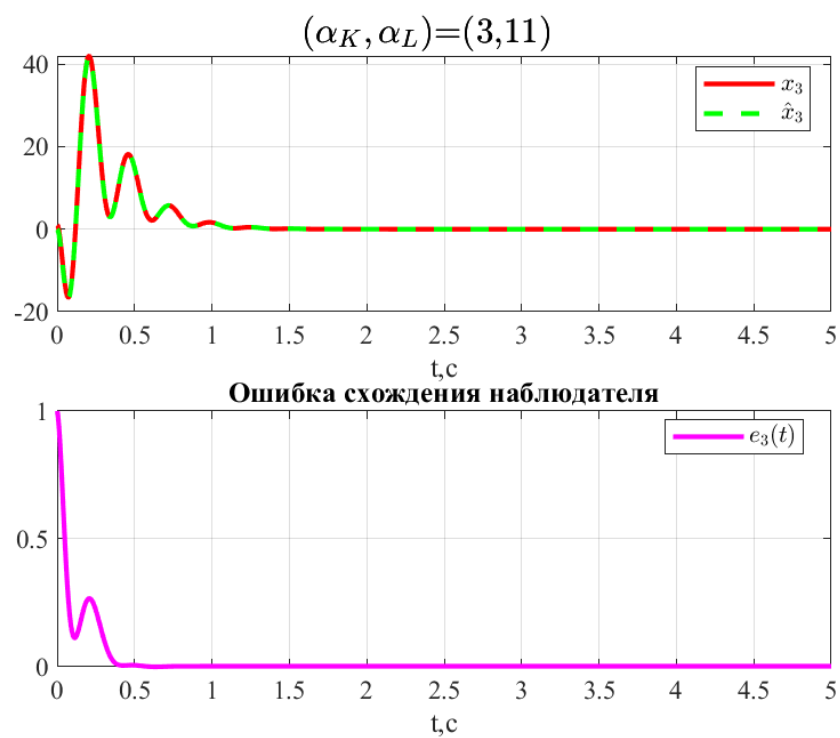


Рисунок 37 — Состояние системы и наблюдатель

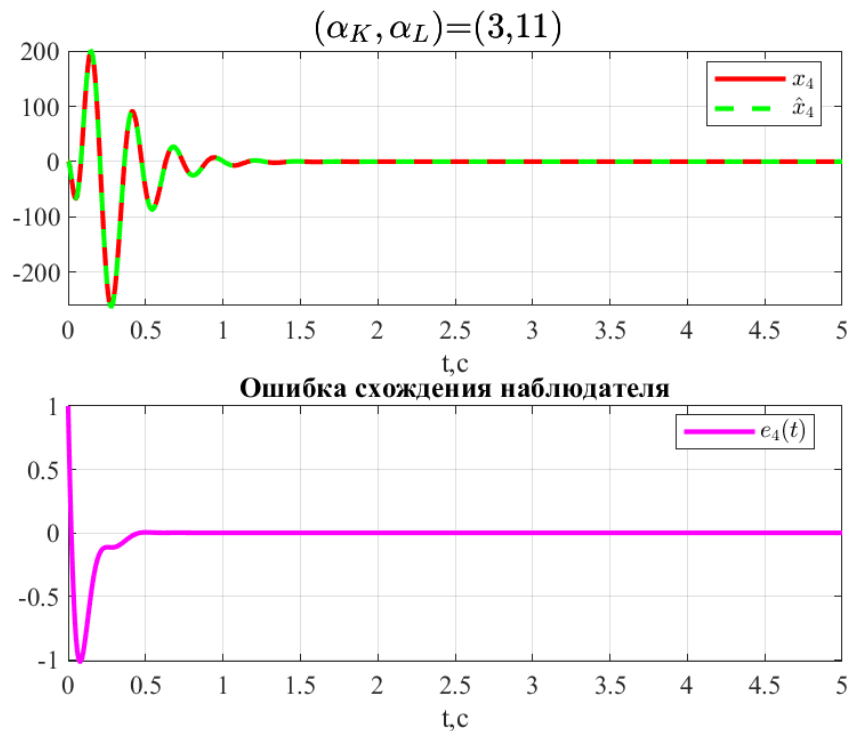


Рисунок 38 — Состояние системы и наблюдатель

В данном случае тенденция перевернулась - мы дали наблюдателю агрессивное поведение, и его сходимость стала аналогичной набору $(\alpha_K, \alpha_L) = (11, 11)$. Однако теперь корреляция сработала по-другому. Сигнал управления немного растянул своё ‘перерегулирование’, то есть время переходного процесса снова увеличилось.

2.2.6 Вывод

В этом задании мы работали с полностью наблюдаемой/управляемой системой, для неё мы синтезировали наблюдателя и регулятора с заданной степенью устойчивости, регулируемой выбором коэффициента α .

Мы сравнили разные конфигурации выбора α , которые показали нам, что выбор агрессивной политики у наблюдателя и регулятора (большие α) показывают ожидаемые результаты - мы получаем быструю и качественную сходимость.

При выборе же разных коэффициентов α , при выборе приоритета, то есть дать большую сходимость регулятору или наблюдателю - мы видим их некоторую взаимосвязь. Она проявляется в том, что более сильная компонента ухудшает точностные свойства слабой.

3 РЕГУЛЯТОР С КАЧЕСТВЕННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ

3.1 Условие задачи

Рассмотреть систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

и выполнить следующие шаги:

- Найти собственные числа матрицы A и определить управляемость каждого из них. Сделать вывод об управляемости и стабилизируемости системы.
- Задаться значениями параметра $\beta < 0$ и $r > 0$.
- Задаться четырьмя наборами параметров Q, R :
 - $Q = I$ и $R = 1$.
 - $Q = I$ и $R = 0$.
 - $Q = 0$ и $R = 1$.
 - $Q = 0$ и $R = 0$.
- Для каждого из наборов параметров R, Q синтезировать регулятор, обеспечивающий качественную экспоненциальную устойчивость при помощи **матричного уравнения типа Риккати**.
- Найти соответствующую матрицу K регулятора $u = Kx$.
- Определить собственные числа матрицы замкнутой системы $(A + BK)$ и проверить корректность синтеза нахождением всех собственных чисел внутри окружности
- Выполнить моделирование замкнутой системы и построить графики формируемого регулятором управления $u(t)$ и вектора состояния замкнутой системы $x(t)$ при начальных условиях $x(0) = 1 \ 1 \ 1 \ 1^T$.

3.2 Решение задачи

Параметры для объекта:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -1 & 14 \\ 6 & 0 & 6 \\ -6 & -2 & -8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$$

3.2.1 Исследование управляемости системы

Найдём собственные числа матрицы A :

$$\sigma(A) = \{-8, 4, 8, 16\}$$

Воспользуемся результатами первого пункта данной работы - система будет не полностью управляемой, но стабилизируемой, всё портит неуправляемое собственное число $\lambda_3 = -2$, но оно устойчивое.

Теперь зададимся параметрами для регулятора. Среднее значения поведения траектории (средняя степень устойчивости) задаёт $|\beta|$, а $r > 0$ - разброс поведения траектоий относительно β . Дополнительные условия-рекомендации:

$$\beta + r < 0, \quad r = \frac{|\beta|}{k}, \quad \frac{3}{2} \leq k \leq 4$$

Если система имеет неуправляемые собственные числа, они должны находиться на комплексной плоскости в пределах круга с центром в точке $(-\beta; 0)$ и радиусом r . Я выбрал следующие значения с учётом неуправляемой λ_3 :

$$\beta = -\frac{5}{2}, \quad k = 2, \quad r = \frac{5}{4}$$

3.2.2 Первый набор Q и R

$$Q = I, \quad R = 1$$

Решим матричное уравнения типа Риккати:

$$\begin{cases} (A + BK - \beta I)^T P (A + BK - \beta I) - r^2 P + Q = 0 \\ K = -(R + B^T P B)^{-1} B^T P (A - \beta I) \\ u = Kx \end{cases}$$

, где P – искомая симметричная квадратная матрица; $Q, R \succeq 0$ ещё они симметричные.

В нашем случае пришлось воспользоваться методом 'усечения', чтобы можно было успешно решить уравнение с помощью функции `vpasolve(...)`. Для этого мы использовали Жорданову форму, после вычеркнули Жорданову клетку, соответствующую неуправляемому собственному числу, и дальше работали только с управляемой подсистемой.

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1.37 & -2.30 & 1.37 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \sigma(A + BK_1) = \{-2.31 \pm 0.29i, -2\}$$

Как можно заметить, спектр довольно близок к неуправляемой λ_3 , словно мы взяли регулятор из первого задания с большим α , но здесь мы ведь настраиваем совсем другие коэффициенты.

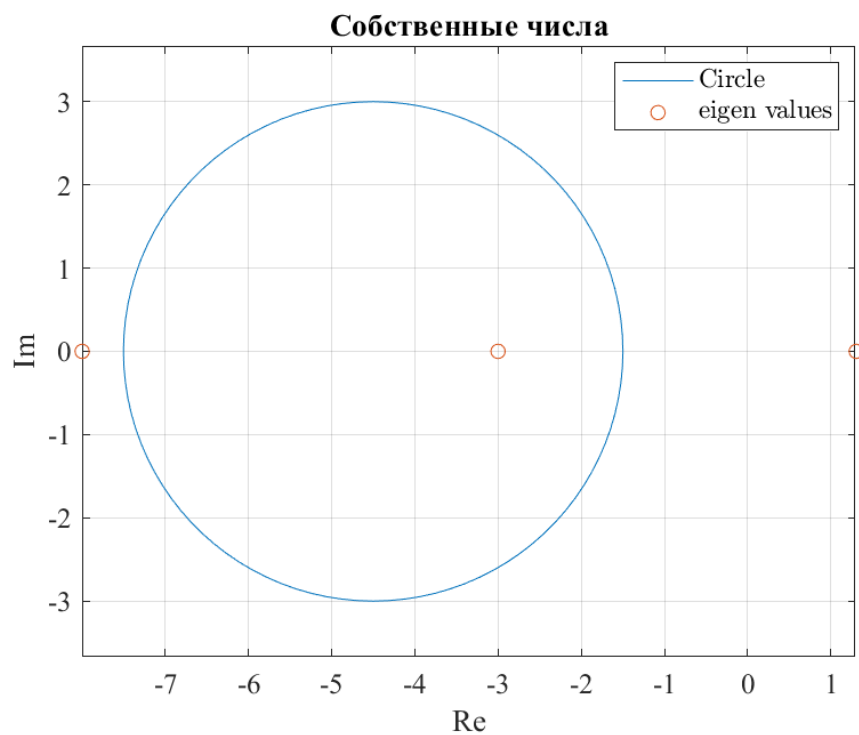


Рисунок 39 — Проверка нахождения собственных чисел в пределах круга

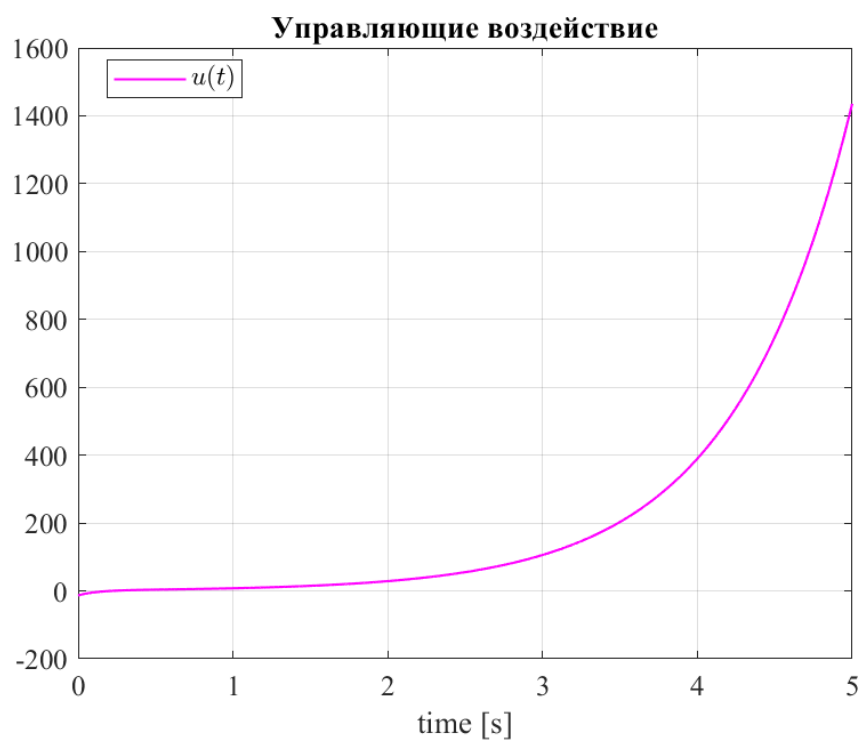


Рисунок 40 — Моделирование - сигнал управления

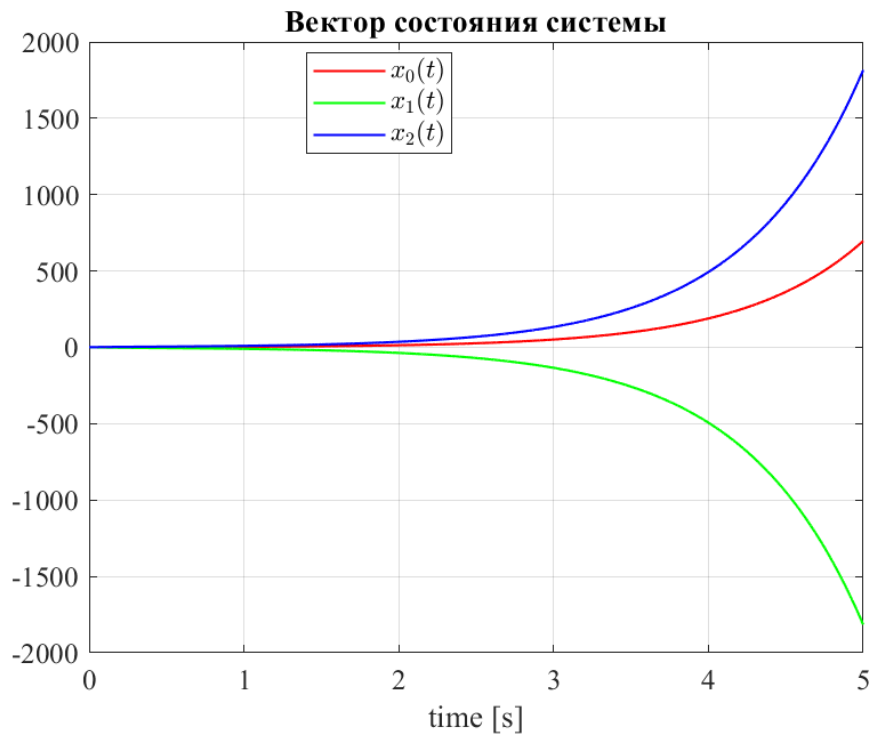


Рисунок 41 — Моделирование - состояние системы

3.2.3 Второй набор Q и R

$$Q = I, \quad R = 0$$

Решим матричное уравнения типа Риккати:

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1.38 & -2.31 & 1.38 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \sigma(A + BK_2) = \{-2.15, -2.49, -2\}$$

Можно заметить, что при таком наборе собственные числа находятся близко к λ_3 .

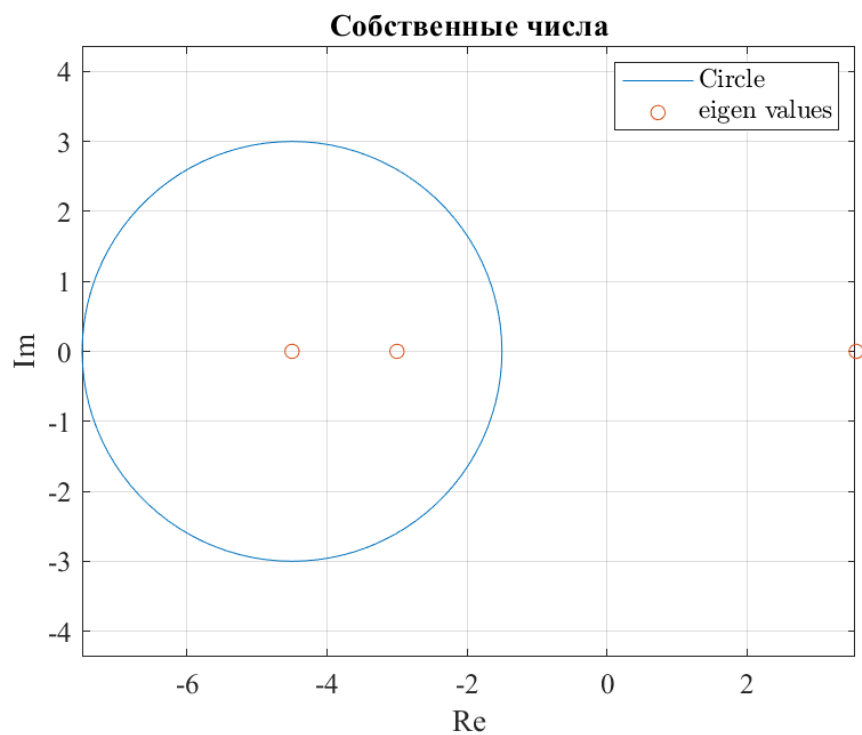


Рисунок 42 — Проверка нахождения собственных чисел в пределах круга

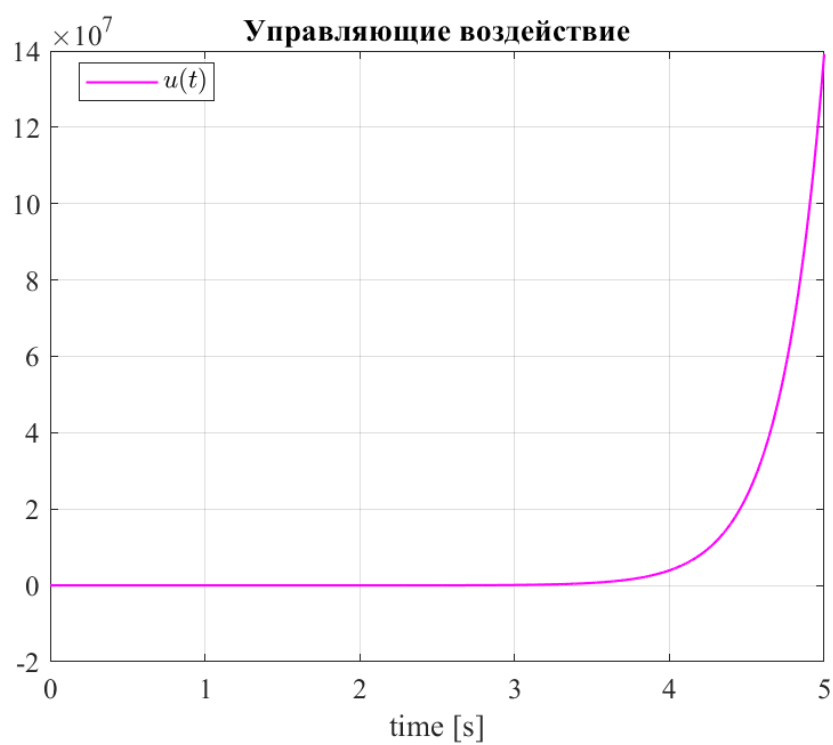


Рисунок 43 — Моделирование - сигнал управления

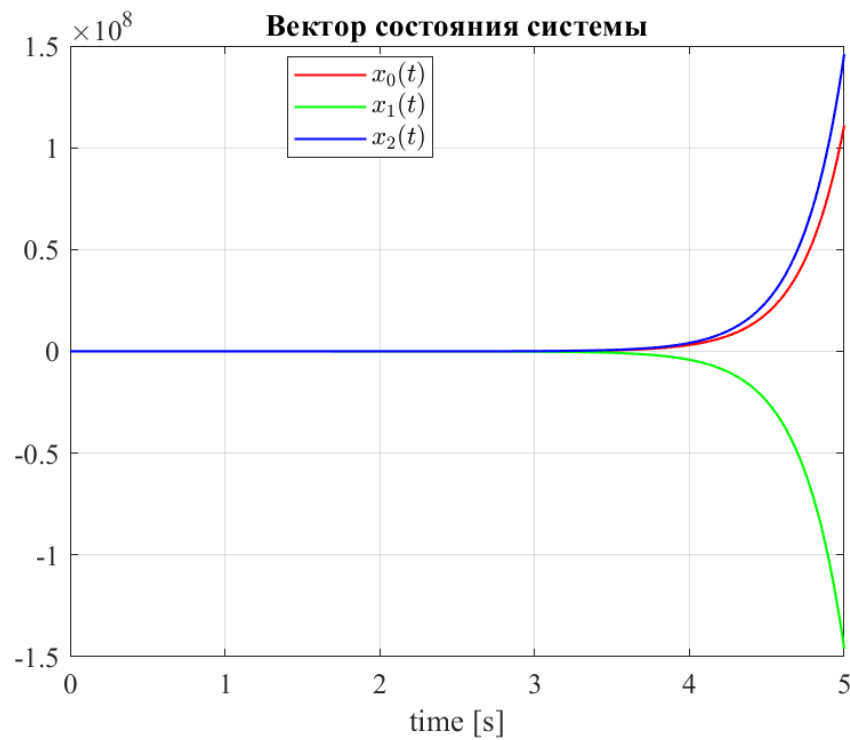


Рисунок 44 — Моделирование - состояние системы

3.2.4 Третий набор Q и R

$$Q = 0, \quad R = 1$$

Решим матричное уравнения типа Риккати:

$$K_3 = \begin{bmatrix} 1.39 & -3.75 & 1.39 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \sigma(A + BK_3) = \{-1.25, -3.75, -2\}$$

Можно заметить, мы получили вырожденный случай, два собственных числа лежат на окраине круга включительно:

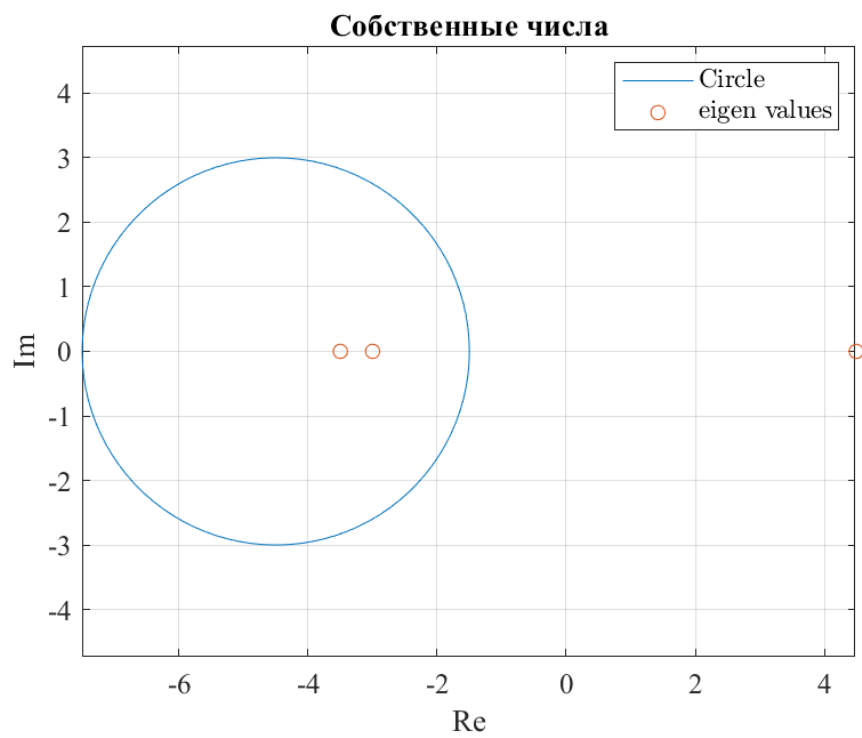


Рисунок 45 — Проверка нахождения собственных чисел в пределах круга

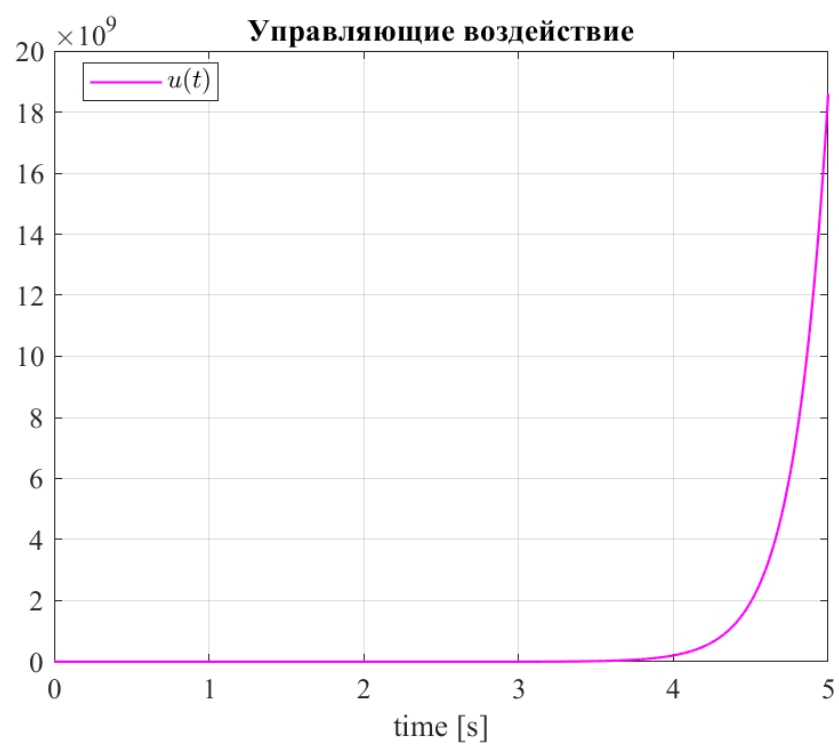


Рисунок 46 — Моделирование - сигнал управления

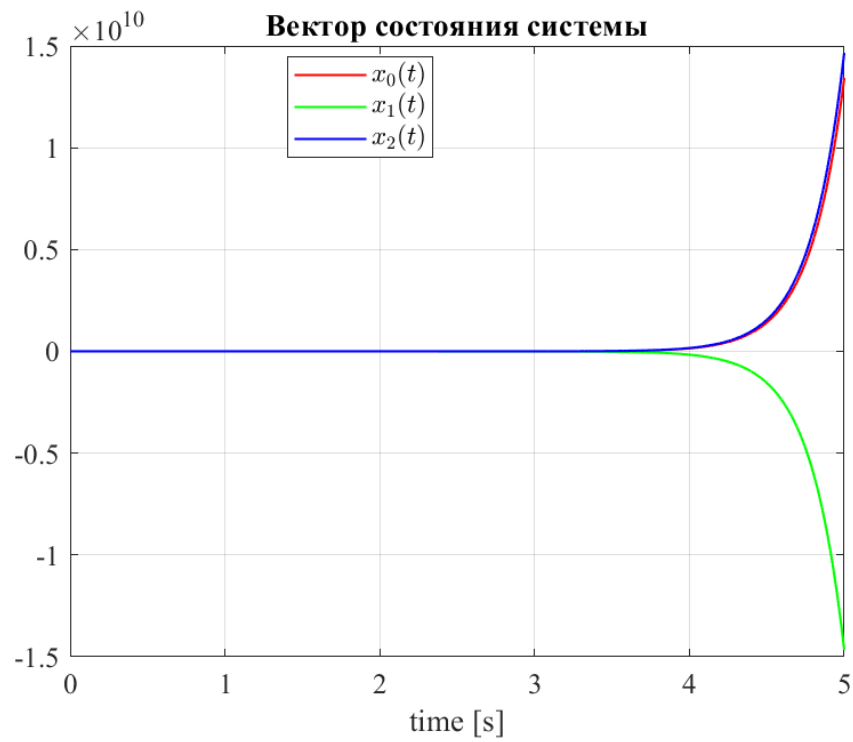


Рисунок 47 — Моделирование - состояние системы

3.2.5 Четвертый набор Q и R

$$Q = 0, \quad R = 0$$

Решим матричное уравнения типа Риккати:

$$K_4 = \begin{bmatrix} 1.1 & -2.07 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad \rightarrow \quad \sigma(A + BK_4) = \{-1.58, -2.5, -2\}$$

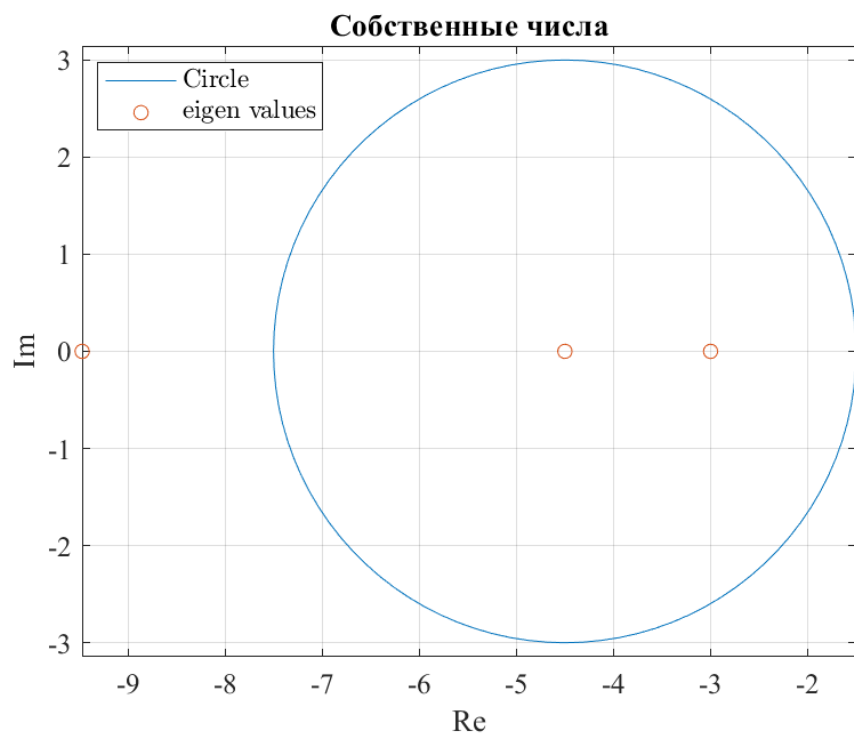


Рисунок 48 — Проверка нахождения собственных чисел в пределах круга

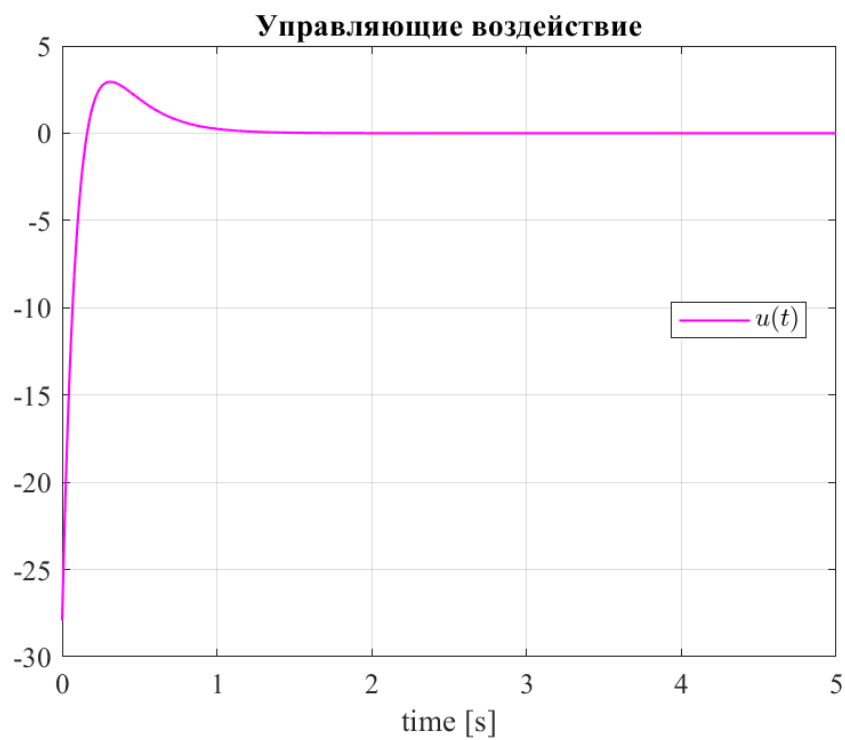


Рисунок 49 — Моделирование - сигнал управления

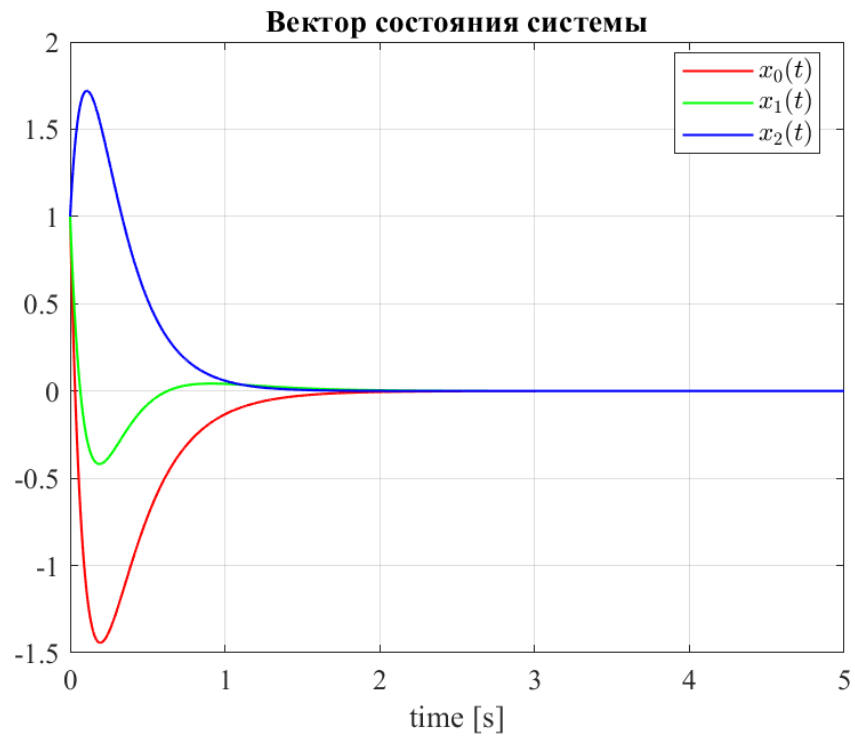


Рисунок 50 — Моделирование - состояние системы

Итоговые графики для сравнения:

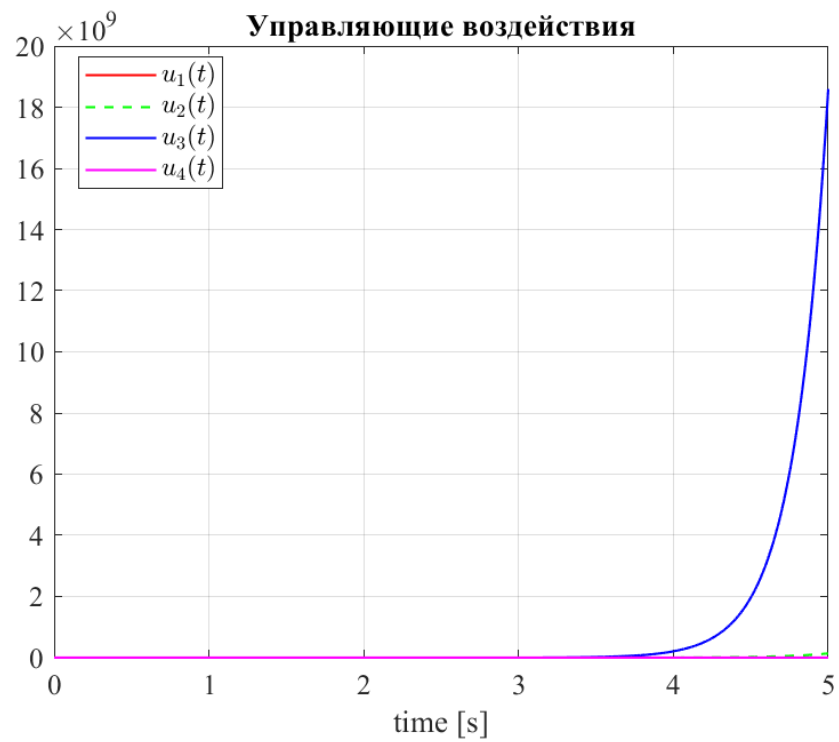


Рисунок 51 — Моделирование - сигналы управления

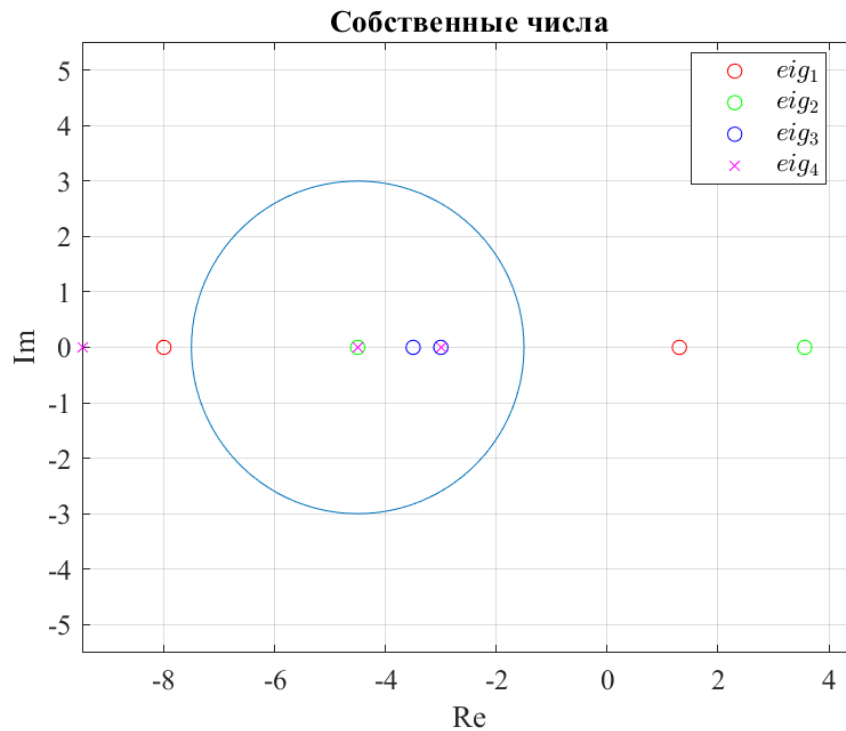


Рисунок 52 — Моделирование - все наборы собственных чисел

Получается, что настройка набором Q, R давало довольно тонкие различия в управлении, поэтому в целом все четыре моделирования были почти идентичны.

3.2.6 Вывод

В этом задании мы синтезировали регулятор с качественной экспоненциальной устойчивостью для стабилизируемой системы. При его настройки мы задавали средне желаемые значения устойчивости и возможные отклонения от неё, степень сходимости уже определял сам регулятор, с чем он успешно справился - при разных сочетаниях наборов Q, R мы в среднем получили идентичный результат, регулятор отлично отработал.

4 ОБЩИЕ ВЫВООДЫ

В ходе выполнения лабораторной работы был рассмотрен синтез регулятора с заданной степенью устойчивости путём задания этой степени коэффициентом α и решения линейных матричных уравнений типа Ляпунова или методом решения матричного уравнения Риккати. Для более плавного и оптимального управления был также опробован регулятор с качественной экспоненциальной устойчивостью, который показал ожидаемые результаты. Также был синтезирован наблюдатель с заданной степени сходимости, алгоритм вычисления сводился к тем же численным методам, были рассмотрены различные коэффициенты α его сходимости.

Синтезированные компоненты системы проверялись при помощи компьютерного моделирования, наблюдатель успешно сходил к истинной системе, а регулятор успешно приводил в положение равновесия во всех случаях с разной степенью энергозатрат и оптимальности в виде сочетания перерегулирования между временем переходного процесса.

Использовал связку *Live-script* + *Matlab*, все исходные материалы, использованные в работе можно найти в [репозитории](#).

Здесь также активно начинаем использовать внешнюю библиотеку для матлаба - CVX, которая помогает при решении LMI и многих других проблем.