МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ
по лабораторной работе №1, вариант - 24

Теория автоматического управления

по теме:
УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ

Студент:
Группа R3336 *Поляков А.А.*

Предподаватель:
к.т.н., доцент *Пашенко А.В.*

Санкт-Петербург
2025

СОДЕРЖАНИЕ

1 ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ

1.1 Условие задачи

Необходимо рассмотреть систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

и выполнить следующие шаги:

- Исследовать управляемость системы:
  - Найти матрицу управляемости системы, определить ее ранг, сделать вывод об управляемости системы в целом.
  - Найти собственные числа матрицы A, найти для каждого из собственных чи сел матрицу Хаутуса (для управляемости), определить ранги матриц, сделать выводы об управляемости каждого собственного числа и системы в целом.
  - Найти Жорданову (или диагональную) форму системы и сделать выводы об управляемости каждого собственного числа и системы в целом.
- Найти Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$, вычислить его собственные числа. Проанализировать полученные собственные числа с точки зрения управляемости системы.
- Найти управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1. Вы полнить моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов

1.2 Решение задачи

Параметры для объекта:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ -4 & 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.2.1 Исследование управляемости системы

Найдем матрицу управляемости системы:

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -17 & 83 \\ 3 & -15 & 51 \\ 1 & 11 & -47 \end{bmatrix}$$

$$rank(U) = 3$$

В таком случае по критерию Калмана, наша система полностью управляема по состоянию, так как ранк матрицы управляемости равен порядку системы.

Найдём собственные числа матрицы A:

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm 2i, \qquad \lambda_3 = -1$$

Вычислим матрицу Хаутуса для каждого собственного числа:

$$H_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-2i & -6 & 4 & -1 \\ 4 & -2-2i & 4 & 3 \\ -4 & 4 & -2-2i & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank(H_1) = 3$$

Значит собственное число λ_1 является управляемым, если ранг его матрицы Хаутуса равняется порядку системы.

$$H_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+2i & -6 & 4 & -1 \\ 4 & -2+2i & 4 & 3 \\ -4 & 4 & -2+2i & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank(H_2) = 3$$

Аналогично, собственное число λ_2 является управляемым.

$$H_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 & -1 \\ 4 & -4 & 4 & 3 \\ -4 & 4 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank(H_3) = 3$$

Аналогично, собственное число λ_3 является управляемым. В итоге, так как все собственные числа матрицы A - управляемые, значит и система полностью управляема.

Теперь найдём Жорданову форму системы, в общем виде она выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}\boldsymbol{A}P\hat{x} + P^{-1}\boldsymbol{B}u \\ y = CP\hat{x} \end{cases}$$

Система в жордановой форме полностью управляема тогда и только тогда, когда

- Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам
- Элементы матрицы входных воздействий, соответствующие …
  - $\mathbb{R}$ случай: последним строкам жордановых клеток, не равны нулю.
  - $\mathbb{C}$ и не кратные, случай: верхняя или нижняя строка жордановых клеток, не равны нулю.
  - $\mathbb{C}$ и кратные, случай: обе нижние строки жордановых клеток, не равны нулю.

В нашем случае жорданова клетка и входное воздействие таково:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}B = B^* = \begin{bmatrix} 4 \\ -1.5 + 1.5i \\ -1.5 - 1.5i \end{bmatrix}$$

Как можно заметить, оба собственных числа соответствуют различным жордановым клеткам, и для каждой из них строка матрицы входных воздействий не равна нулю. Значит эти три собственных числа управляемы, и как следствие - вся система полностью управляема.

1.2.2 Грамиан управляемости

Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$:

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt = \begin{bmatrix} 8.78 & -0.5 & -7.47 \\ -0.5 & 0.8 & 0.39 \\ -7.47 & 0.39 & 6.38 \end{bmatrix}$$

Его собственные числа:

$$p_1 = 0.01, \qquad p_2 = 0.78, \qquad p_3 = 15.18$$

Как можно заметить, они все положительные, а это значит, что она положительно определена. Также это значит, что её определитель положительный.

Грамиан управляемости должен быть невырожден во все моменты времени:

$$\forall t_1 > 0, \rightarrow det\left(\int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt\right) > 0$$

В нашем случае это тоже выполняется, тогда система полностью управляема.

1.2.3 Моделирование управления

Рассчитаем управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1:

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)}(P(t_1))^{-1} x_1 =$$

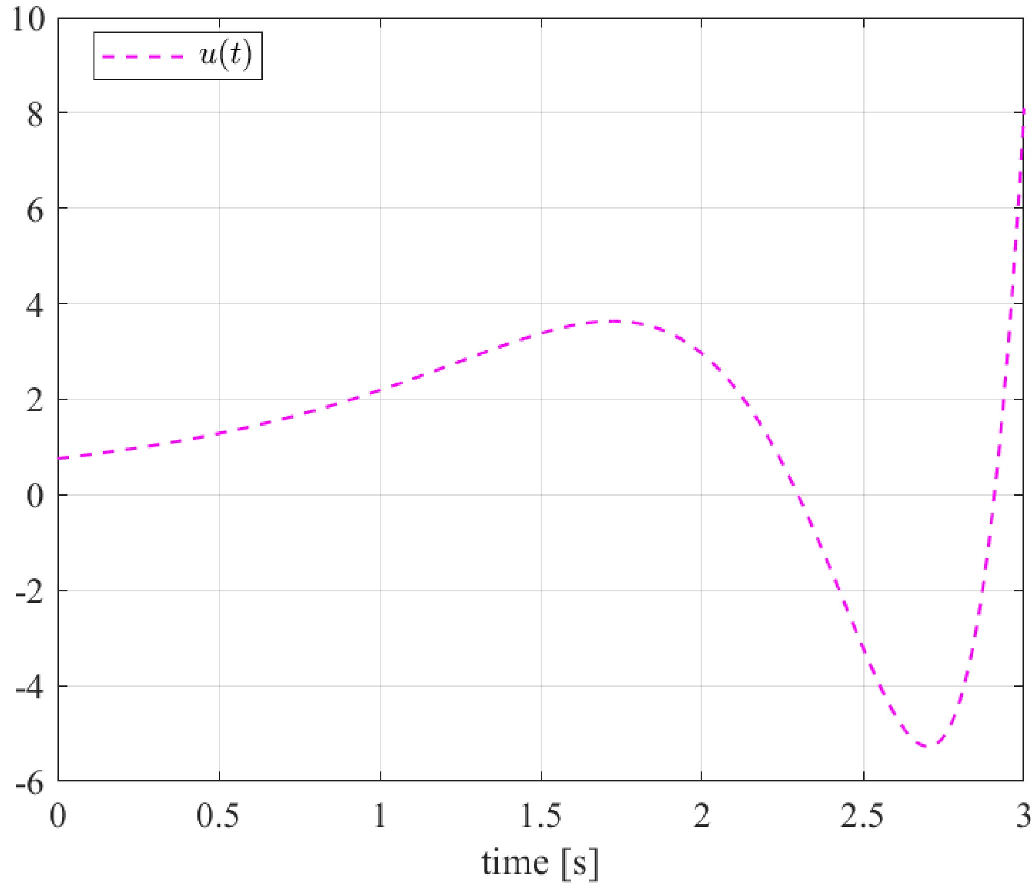

Рисунок 1 — Управляющий сигнал

Вектор состояний системы будет выглядеть следующим образом:

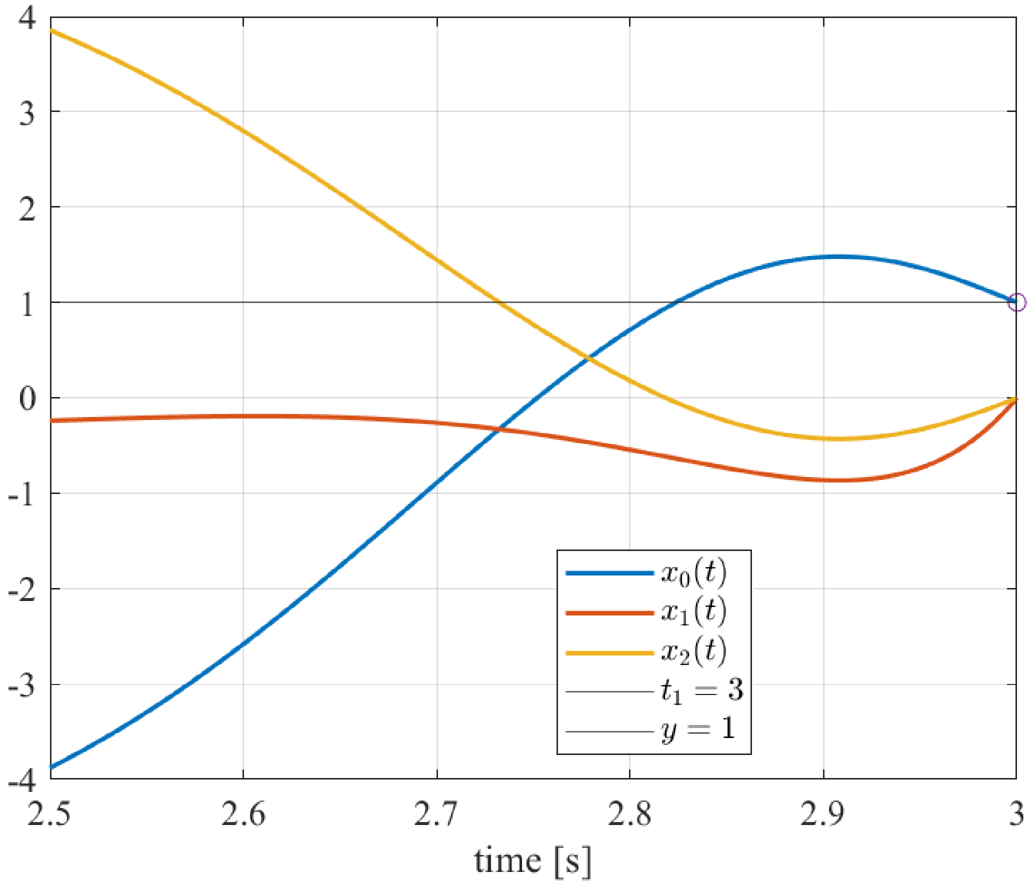

Рисунок 2 — Состояния системы

Видно, что система управляемая в соответствии с заданным управлением и переходит в заданное состояние в нужный момент времени.

1.2.4 Вывод

Исследование системы задания показало, что она является полностью управляемой. Это было продемонстрировано с помощью критерия Калмана, через управляемость всех собственных значений и жорданову форму системы. Ещё был найден грамиан управляемости и проверены его собственные числа. Проведено моделирование системы с управлением, которое переводит систему в заданное состояние. Результаты такого моделирования показали, что что система управляема и программное управление работает корректно.

2 ЕЩЕ ОДНО ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ

2.1 Условие задачи

Продолжаем рассматривать систему:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

и выполнить следующие шаги:

- Проверить обе точки x_1', x_1'' на принадлежность управляемому подпространству системы. Принять целевой точкой x1 ту, что принадлежит.
- Выполните все шаги Задания 1 для рассматриваемой системы и выбранной целевой точки x1.

2.2 Решение задачи

Параметры для объекта:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ -4 & 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad x_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_1'' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2.1 Принадлежность точек управляемому подпространству

Проверим принадлежность точек, для этого должно выполниться следующие условие для точки x:

$$rank(U) = rank([Ux])$$

Для начала найдём матрицу управляемости(склейка):

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -37 & 79 \\ 7 & -19 & 23 \\ -7 & 19 & -23 \end{bmatrix}$$

В нашем случае, для x_1':

$$rank(\begin{bmatrix} 11 & -37 & 79 \\ 7 & -19 & 23 \\ -7 & 19 & -23 \end{bmatrix}) = rank(\begin{bmatrix} 11 & -37 & 79 & 1 \\ 7 & -19 & 23 & 0 \\ -7 & 19 & -23 & 0 \end{bmatrix})$$

$$2 = 2$$

Нетрудно заметить, что в обеих сторонах равенства будет по одно паре линейно зависимых строк. Значит точка x_1' принадлежит управляемому подпространству. В нашем случае, для x_1':

$$rank(\begin{bmatrix} 11 & -37 & 79 \\ 7 & -19 & 23 \\ -7 & 19 & -23 \end{bmatrix}) = rank(\begin{bmatrix} 11 & -37 & 79 & 0 \\ 7 & -19 & 23 & 0 \\ -7 & 19 & -23 & 1 \end{bmatrix})$$

$$2 = 3$$

Ранги не равны, а значит точка x_1'' не будет принадлежать управляемому подпространству.

В итоге, $\mathbf{x_1'} = \mathbf{x_1}$, идём дальше и выполняем все проверки из задания 1.

2.2.2 Исследование управляемости системы

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -37 & 79 \\ 7 & -19 & 23 \\ -7 & 19 & -23 \end{bmatrix}$$

$$rank(U) = 2$$

По критерию Калмана, наша система не полностью управляема по состоянию, так как ранк матрицы управляемости не равен порядку системы.

Найдём собственные числа матрицы A:

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm 2i, \qquad \lambda_3 = -1$$

Вычислим матрицу Хаутуса для каждого собственного числа:

$$H_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 - 2i & -6 & 4 & 11 \\ 4 & -2 - 2i & 4 & 7 \\ -4 & 4 & -2 - 2i & -7 \end{bmatrix}$$

$$rank(H_1) = 3$$

Значит собственное число λ_1 является управляемым, если ранг его матрицы Хаутуса равняется порядку системы.

$$H_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+2i & -6 & 4 & 11 \\ 4 & -2+2i & 4 & 7 \\ -4 & 4 & -2+2i & -7 \end{bmatrix}$$

$$rank(H_2) = 3$$

Аналогично, собственное число λ_2 является управляемым.

$$H_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 4 & 11 \\ 4 & -4 & 4 & 7 \\ -4 & 4 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$rank(H_3) = 2$$

Здесь λ_3 не является управляемым. Как следствие - система не полностью управляема.

Теперь найдём Жорданову форму системы, в общем виде она выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}\boldsymbol{A}P\hat{x} + P^{-1}\boldsymbol{B}u \\ y = CP\hat{x} \end{cases}$$

В нашем случае жорданова клетка и входное воздействие таково:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}B = B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.5-0.5i \\ -3.5+0.5i \end{bmatrix}$$

Как можно заметить, оба собственных числа соответствуют различным жордановым клеткам, но для $\lambda_3 = -1$ строка матрицы входных воздействий равна нулю, поэтому система не полностью управляема.

2.2.3 Грамиан управляемости

Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$:

$$P(t_1) = \int_0^{t_1} e^{At} B B^T e^{A^T t} dt = \begin{bmatrix} 15.47 & 10.69 & -10.69 \\ 10.69 & 7.47 & -7.47 \\ -10.69 & -7.47 & 7.47 \end{bmatrix}$$

Его собственные числа:

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = 0.08, \qquad p_3 = 30.33$$

Получается, одно из собственных чисел равно нулю, а это значит, что матрица Грамиана является положительно полуопределённой, значит система не полностью управляема.

2.2.4 Моделирование управления

Рассчитаем управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1:

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1 - t)} (P(t_1))^{-1} x_1$$

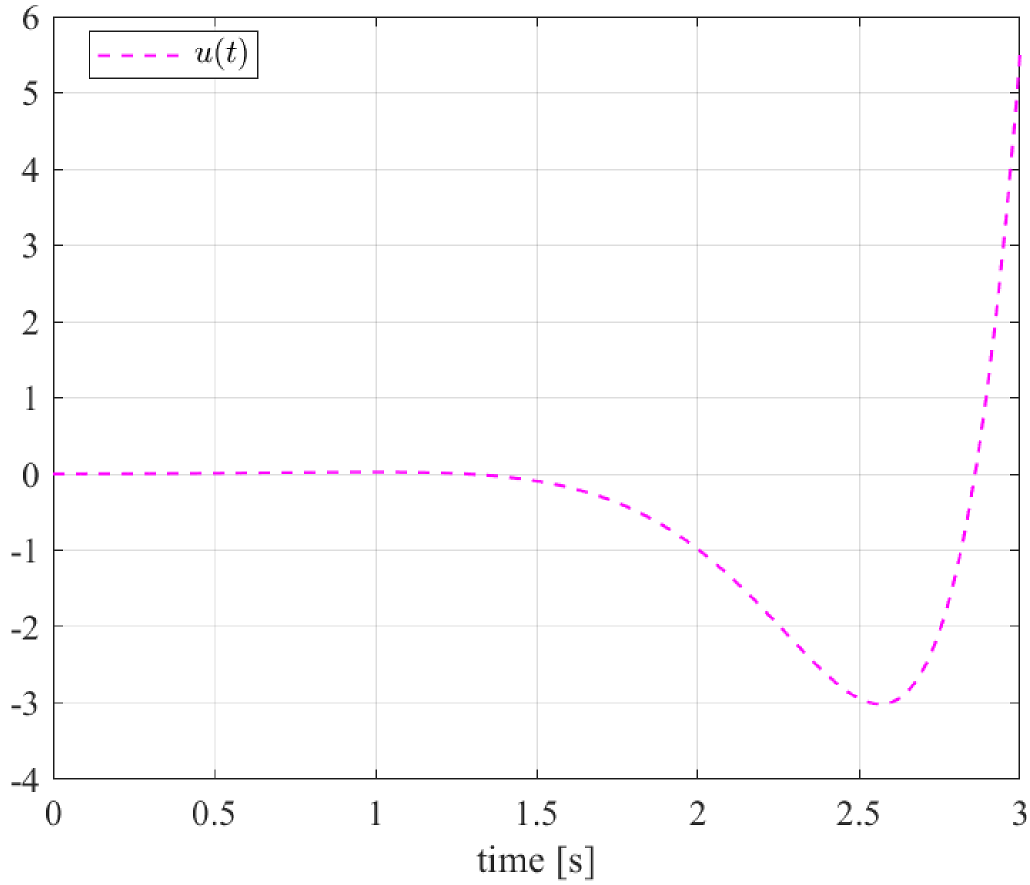

Рисунок 3 — Управляющий сигнал

Вектор состояний системы будет выглядеть следующим образом:

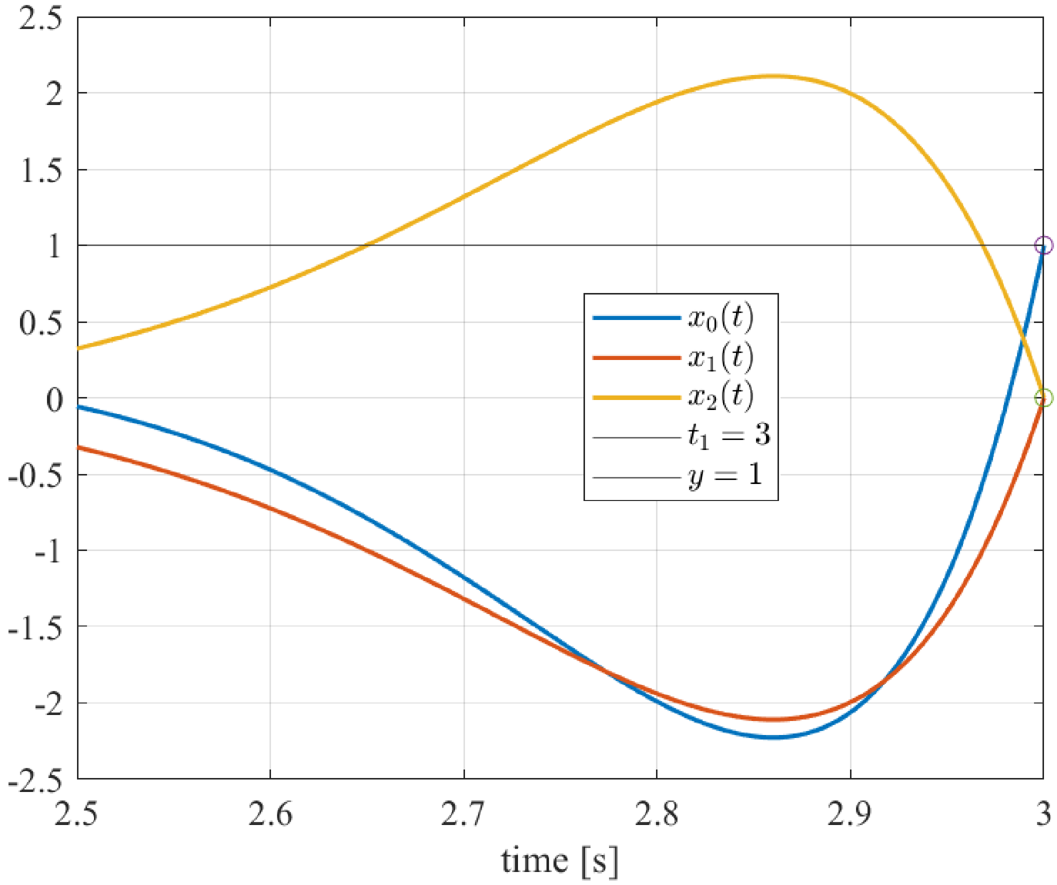

Рисунок 4 — Состояния системы

2.2.5 Вывод

Были рассмотрены две точки x_1', x_1'' и проверена их принадлежность управляемому подпространству. Первая точка - принадлежит, вторая - нет.

Исследование системы в этом задании показало, что она не является полностью управляемой. Это было показано с помощью критерия Калмана, через управляемость собственных значений и жорданову форму системы. При этом оказалось, что собственное число $\lambda_3 = -1$ не является управляемым. Также был найден грамиан управляемости и проверены его собственные числа. Было получено, что одно из собственных чисел равно нулю, что говорит - система не является полностью управляемой.

Проведено моделирование системы с управлением, которое переводит систему в заданное состояние. Результаты показали, что управление работает корректно.

3 ИССЛЕДОВАНИЕ НАБЛЮДАЕМОСТИ

3.1 Условие задачи

Рассматриваем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

и выполнить следующие шаги:

Исследовать наблюдаемость системы:

- Найти матрицу наблюдаемости системы, определить ее ранг, сделать вывод об наблюдаемости системы в целом.
- Найти собственные числа матрицы A, найти для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для наблюдаемости), определить ранги матриц, сделать выводы об наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом.
- Найти Жорданову (или диагональную) форму системы и сделать выводы об наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом.

Найти Грамиан наблюдаемости системы относительно времени $t_1 = 3$, вычислить его собственные числа. Проанализировать полученные собственные числа с точки зрения наблюдаемости системы.

Считая, что выход системы $y(t)$ подчиняется закону $y(t) = f(t)$ на временном интервале $t \in [0,t_1]$ определить начальные условия системы. Выполнить моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов.

3.2 Решение задачи

Параметры для объекта:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -12 \\ -3 & -2 & -6 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}^T \qquad f(t) = 2e^{-2t}cos(3t) + e^{-2t}sin(3t)$$

3.2.1 Исследование наблюдаемости системы

Для начала найдём матрицу наблюдаемости системы:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -11 & -6 & 16 \end{bmatrix}$$

$$rank(V) = 3$$

По критерию Калмана, наша система полностью наблюдаема , так как ранк матрицы наблюдаемости равен порядку системы.

Найдём собственные числа матрицы A:

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i, \qquad \lambda_3 = 1$$

Вычислим матрицу Хаутуса для каждого собственного числа:

$$H_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6-3i & -3 & -12 \\ -3 & -3i & -6 \\ 6 & 0 & 9-3i \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$rank(H_1) = 3$$

Значит собственное число λ_1 является наблюдаемым, если ранг его матрицы Хаутуса равняется порядку системы.

$$H_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+3i & -3 & -12 \\ -3 & +3i & -6 \\ 6 & 0 & 9+3i \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$rank(H_2) = 3$$

Аналогично, собственное число λ_2 является наблюдаемым.

$$H_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -3 & -12 \\ -3 & -3 & -6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$rank(H_3) = 3$$

Аналогично, собственное число λ_3 является наблюдаемым. Как следствие - система полностью наблюдаема.

Теперь найдём Жорданову форму системы, в общем виде она выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}\boldsymbol{A}P\hat{x} + P^{-1}\boldsymbol{B}u \\ y = CP\hat{x} \end{cases}$$

Система в жордановой форме полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда

– Все жордановы клетки относятся к различным собственным числам
– Элементы матрицы выходов, соответствующие первым столбцам жордановых клеток, не равны нулю.

В нашем случае жорданова клетка и выходное воздействие таково:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$CP = C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 - 0.5i & 0.5 + 0.5i \end{bmatrix}$$

Как можно заметить, оба собственных числа соответствуют различным жордановым клеткам, и для каждой из них первый столбец матрицы выходных воздействий не равен нулю, поэтому все собственные числа наблюдаемые и система полностью наблюдаема.

3.2.2 Грамиан наблюдаемости

Грамиан наблюдаемости системы относительно времени $t_1 = 3$:

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt = \begin{bmatrix} 201.92 & -201.35 & 202.09 \\ -201.35 & 201.15 & -201.30 \\ 202.09 & -201.30 & 202.42 \end{bmatrix}$$

Его собственные числа:

$$q_1 = 605.006, \qquad q_2 = 0.007, \qquad q_3 = 0.492$$

Получается, все собственные числа положительны, а это значит, что матрица Грамиана является положительно определённой, значит система полностью наблюдаема.

3.2.3 Определение начальных условий

Будем считать, что выход системы соответствует заранее заданной функции: $f(t) = y(t) = 2e^{-2t}cos(3t) + e^{-2t}sin(3t)$

Посчитаем вектор начальных условий:

$$x(0) = (Q(t1))^{-1}\int_0^{t_1} e^{A^T t}C^T y(t)dt = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Вектор состояний системы будет выглядеть следующим образом:

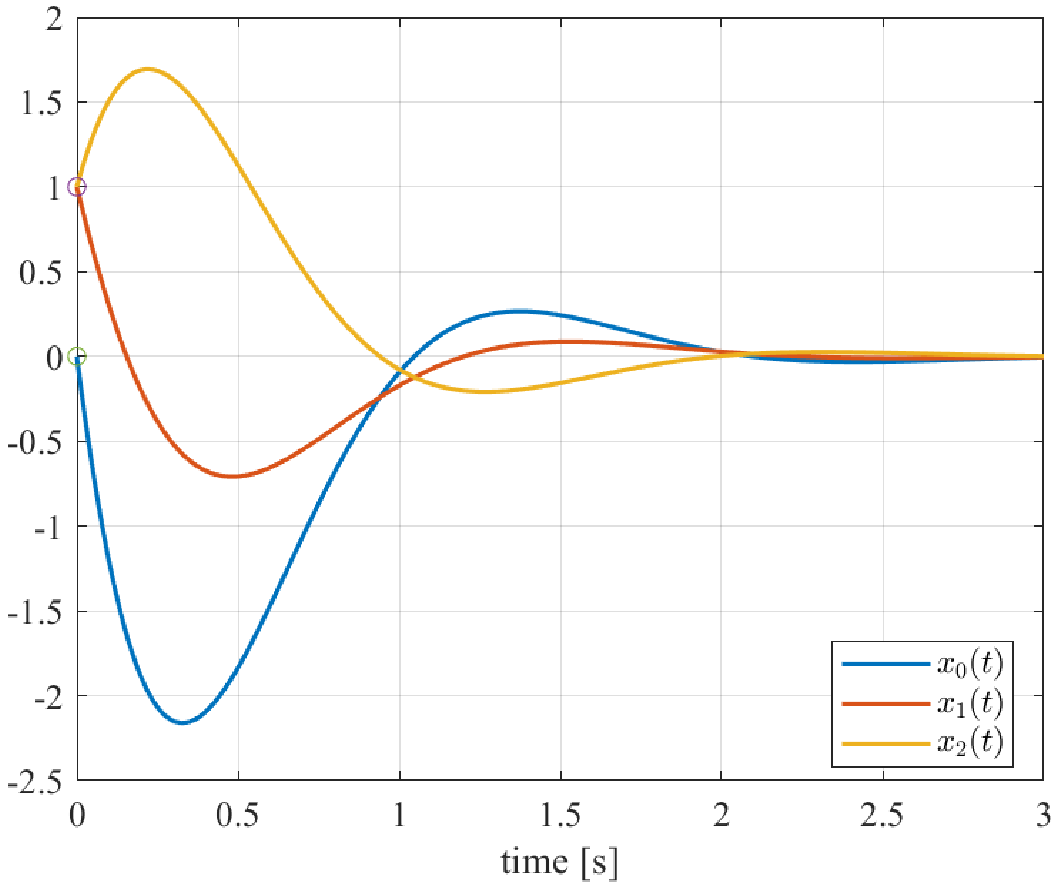

Рисунок 5 — Состояния системы

Как можно заметить, они совпадают с моделированием вектора состояний.

Теперь проведём моделирование с начальными условиями x(0), без управления: на рисунке ниже видно, что выход системы совпадает с функцией y(t) выше заданной. Ошибка наблюдения достаточно мала и не превышает 10^{-10}.

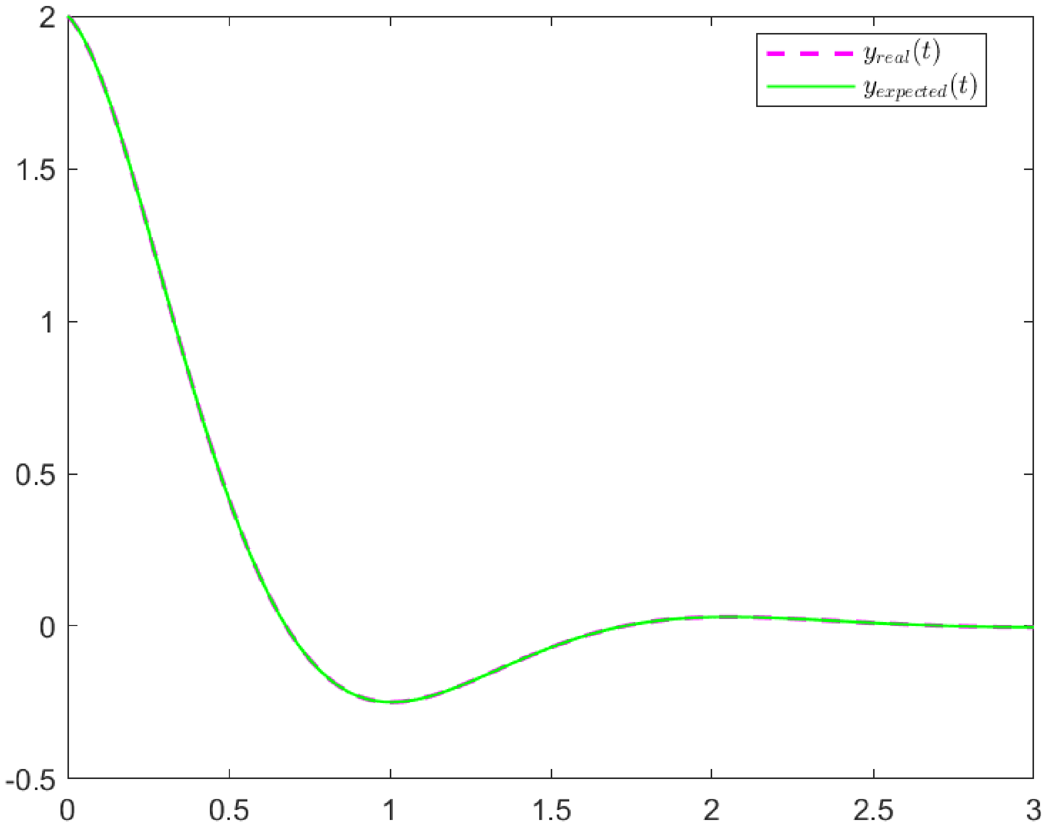

Рисунок 6 — Выход системы

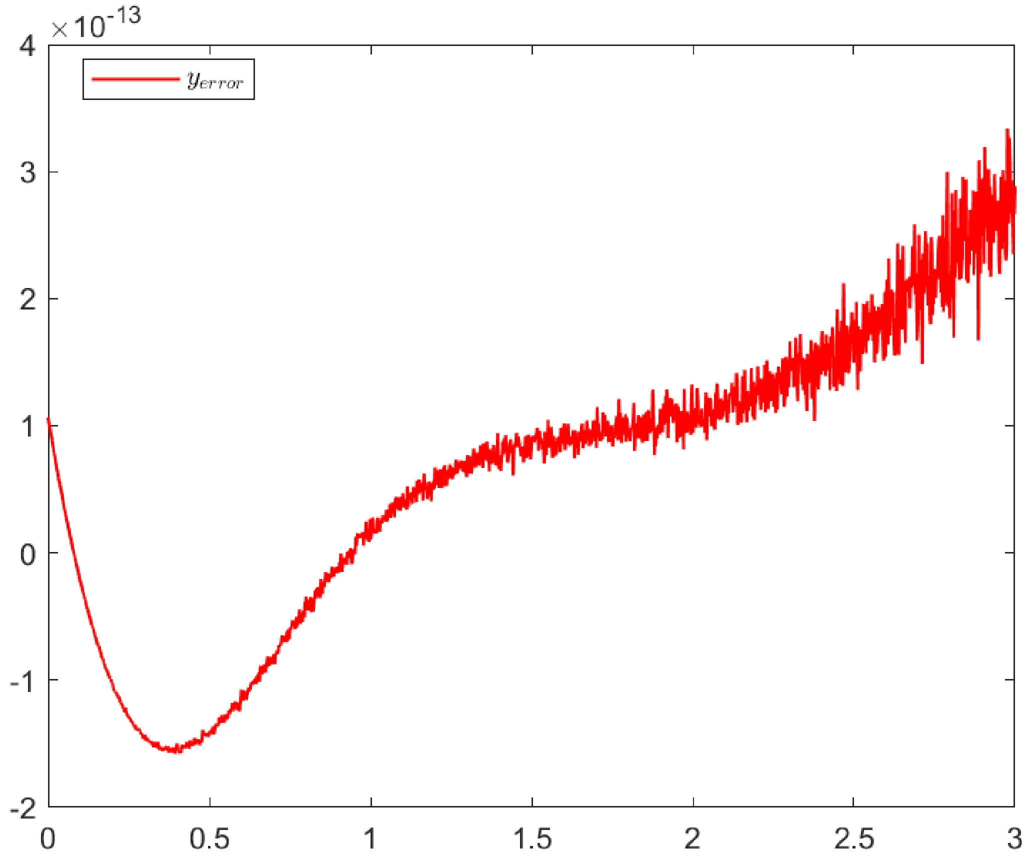

Рисунок 7 — Ошибка выхода системы

3.2.4 Вывод

В этом задании нам удалось показать, что система является полностью наблюдаемой. Это было показано с помощью матрицы наблюдаемости, через наблюдаемость собственных значений и жорданову форму системы. Также был найден грамиан наблюдаемости и проверены его собственные числа. Провели моделирование системы с начальными условиями, при которых выход системы совпадает с заданной функцией. Результаты моделирования показали, что система наблюдаема и наблюдение работает корректно.

4 ЕЩЕ ОДНО ИССЛЕДОВАНИЕ НАБЛЮДАЕМОСТИ

4.1 Условие задачи

Рассматриваем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases}$$

и выполнить следующие шаги:

- Исследовать наблюдаемость системы, как в третьем задании
- Определить, мог ли выход вида $y(t) = f(t)$ быть порожден начальными условиями, отличными от найденных. Если да, то привести хотя бы три таких вектора начальных условий и выполнить для каждого из них (включая изначально най денный) моделирование, демонстрирующее корректность выполненных расчетов (одинаковые выходы при разном поведении векторов состояния систем).

4.2 Решение задачи

Параметры для объекта:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -12 \\ -3 & -2 & -6 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \qquad f(t) = 2e^{-2t}cos(3t) + e^{-2t}sin(3t)$$

4.2.1 Исследование наблюдаемости системы

Для начала найдём матрицу наблюдаемости системы:

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ -12 & -5 & -17 \end{bmatrix}$$

$$rank(V) = 2$$

Как можно заметить, второй и третий столбец будут линейно зависимыми. А значит, по критерию Калмана, наша система не полностью наблюдаема , так как ранк матрицы наблюдаемости не равен порядку системы.

Найдём собственные числа матрицы A:

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm 3i, \qquad \lambda_3 = 1$$

Вычислим матрицу Хаутуса для каждого собственного числа:

$$H_1 = \begin{bmatrix} A - \lambda_1 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6-3i & -3 & -12 \\ -3 & -3i & -6 \\ 6 & 0 & 9-3i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank(H_1) = 3$$

Значит собственное число λ_1 является наблюдаемым, если ранг его матрицы Хаутуса равняется порядку системы.

$$H_2 = \begin{bmatrix} A - \lambda_2 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6+3i & -3 & -12 \\ -3 & +3i & -6 \\ 6 & 0 & 9+3i \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank(H_2) = 3$$

Аналогично, собственное число λ_2 является наблюдаемым.

$$H_3 = \begin{bmatrix} A - \lambda_3 I \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & -3 & -12 \\ -3 & -3 & -6 \\ 6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$rank(H_3) = 2$$

Однако, собственное число λ_3 не будет наблюдаемым. Как следствие - система не полностью наблюдаема по критерию Хаутуса.

Теперь найдём Жорданову форму системы, в общем виде она выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}\boldsymbol{A}P\hat{x} + P^{-1}\boldsymbol{B}u \\ y = CP\hat{x} \end{cases}$$

В нашем случае жорданова клетка и выходное воздействие таково:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$CP = C^* = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 - 0.5i & 0.5 + 0.5i \end{bmatrix}$$

Как можно заметить, оба собственных числа соответствуют различным жордановым клеткам, но для $\lambda_3 = 1$, первый столбец матрицы выходных воздействий равен нулю, поэтому наблюдаемыми будут лишь сопряженная пара комплексных чисел, но не все, а значит система не полностью наблюдаема.

4.2.2 Грамиан наблюдаемости

Грамиан наблюдаемости системы относительно времени $t_1 = 3$:

$$Q(t_1) = \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T C e^{At} dt = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.05 & 0.14 \\ 0.05 & 0.16 & 0.22 \\ 0.14 & 0.22 & 0.36 \end{bmatrix}$$

Его собственные числа:

$$q_1 = 0.55, \qquad q_2 = 0.05, \qquad q_3 = 0$$

Получается, одно из собственных чисел равно нулю и это значит, что матрица Грамиана является положительно полуопределённой - система не полностью наблюдаема.

4.2.3 Определение начальных условий

Будем считать, что выход системы соответствует заранее заданной функции: $f(t) = y(t) = 2e^{-2t}cos(3t) + e^{-2t}sin(3t)$

Посчитаем вектор начальных условий:

$$x(0) = (Q(t1))^{-1} \int_0^{t_1} e^{A^T t} C^T y(t) dt = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Вектор состояний системы будет выглядеть следующим образом:

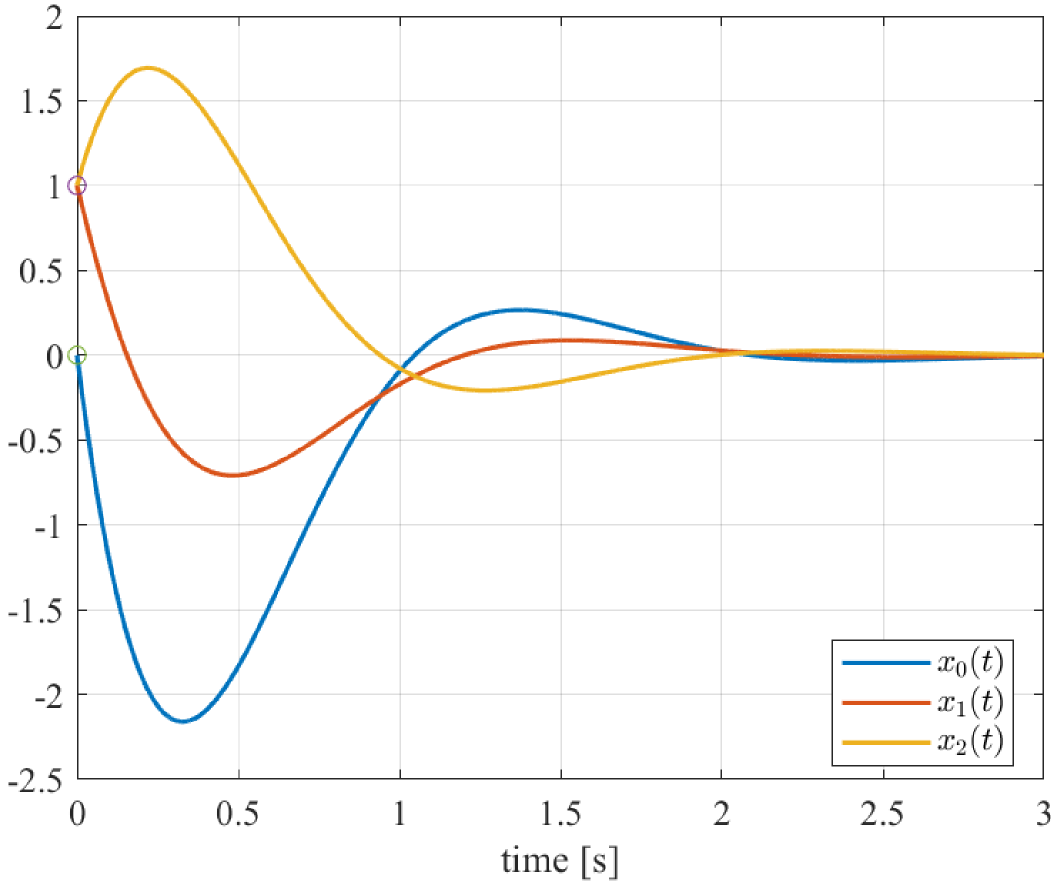

Рисунок 8 — Состояния системы

Как можно заметить, они совпадают с моделированием вектора состояний.

Теперь проведём моделирование с начальными условиями x(0), без управления: на рисунке ниже видно, что выход системы совпадает с функцией y(t) выше заданной. Ошибка наблюдения достаточно мала и не превышает 10^{-10}.

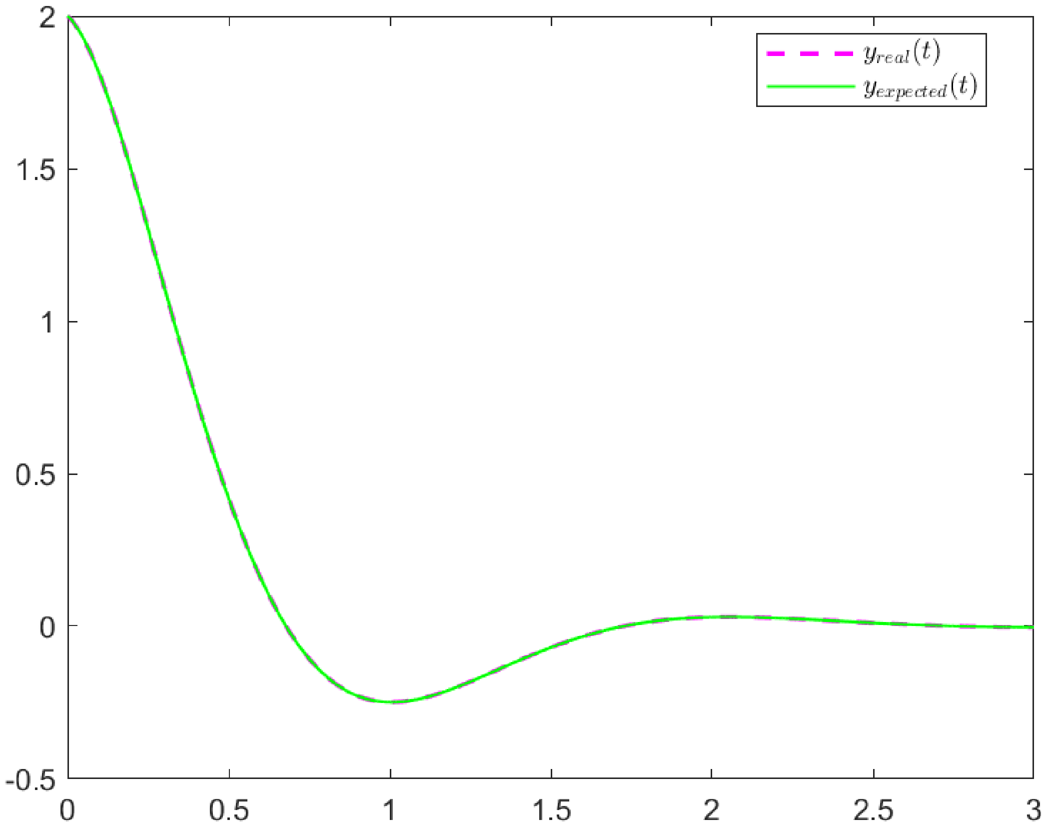

Рисунок 9 — Выход системы

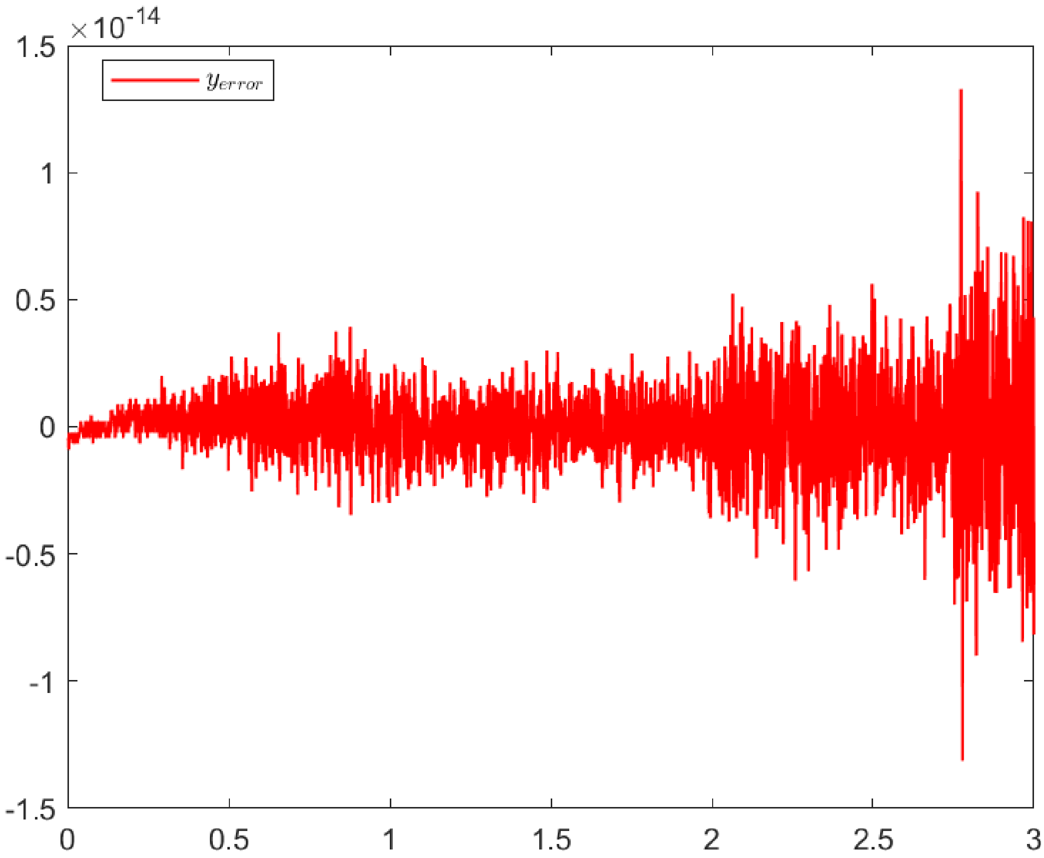

Рисунок 10 — Ошибка выхода системы

4.2.4 Альтернативные начальные условия

Так как система не является полностью наблюдаемой, то мы можем найти бесконечное количество начальных условий, при которых выход системой будет совпадать с исходной $y(t) = f(t)$. Чтобы найти это множество, нам нужно найти nullspace ядра матрицы наблюдаемости V:

$$\text{Nullspace}(V) = \left\{ \begin{bmatrix} -0.57 \\ -0.57 \\ 0.57 \end{bmatrix} \right\}$$

Тогда общее множества "ненаблюдаемых"начальных условий можно выразить как линейную комбинацию:

$$x^*(0) = x(0) + \beta \begin{bmatrix} -0.57 \\ -0.57 \\ 0.57 \end{bmatrix}$$

Выберем следующие значения коэффициента:

$$\beta_1 = 1, \qquad x_1^*(0) = \begin{bmatrix} -0.57 \\ 0.42 \\ 1.57 \end{bmatrix}$$

$$\beta_2 = 5, \qquad x_2^*(0) = \begin{bmatrix} -2.88 \\ -1.88 \\ 3.88 \end{bmatrix}$$

$$\beta_3 = 100, \qquad x_3^*(0) = \begin{bmatrix} -57.73 \\ -56.73 \\ 58.73 \end{bmatrix}$$

Теперь проведём моделирование с этими начальными условиями и убедимся в том, что выход у всех этих систем будет идентичный…

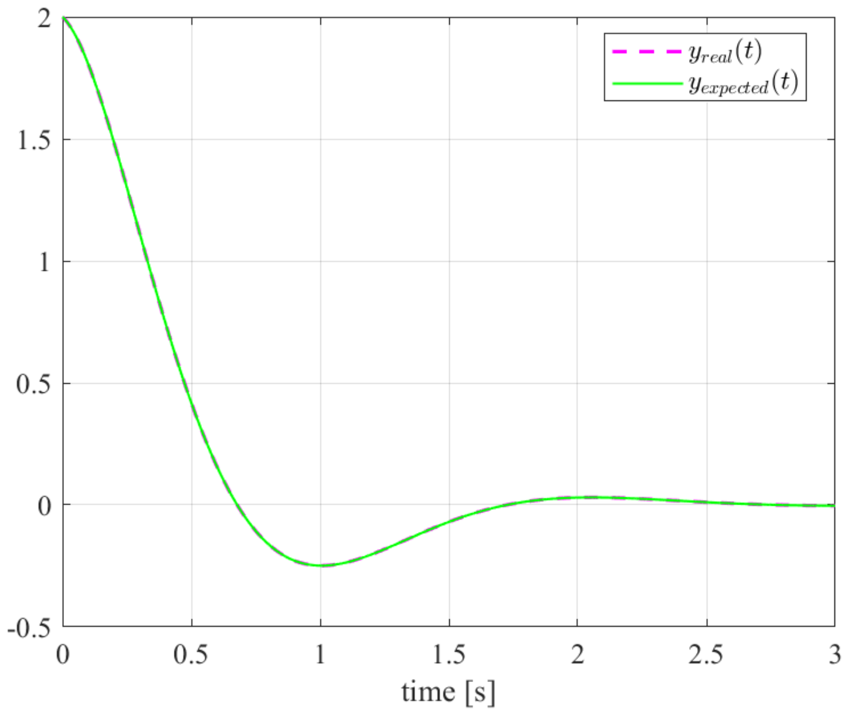

Рисунок 11 — Выход системы с начальными условиями $x_1^*(0)$

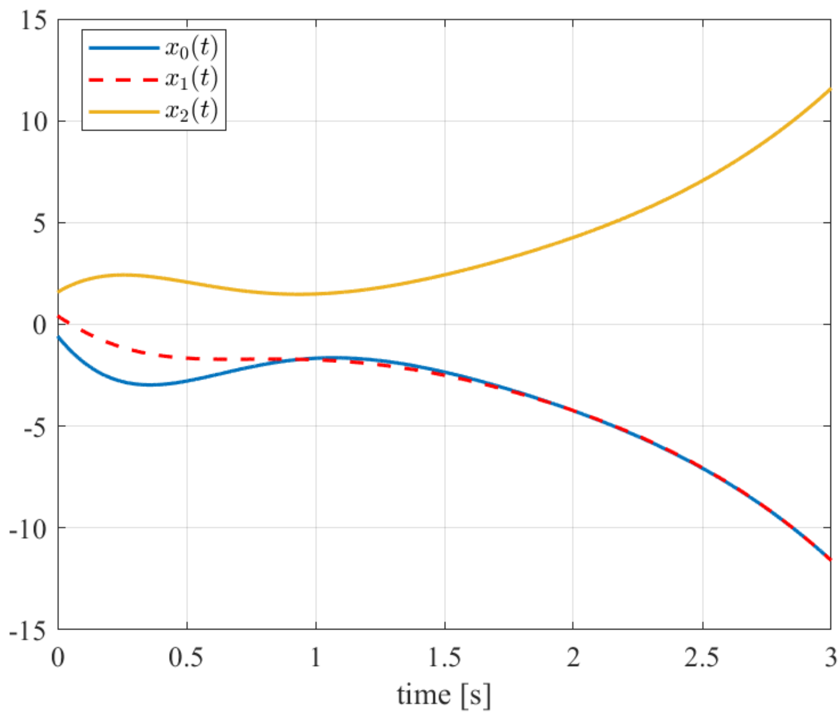

Рисунок 12 — Состояние системы с начальными условиями $x_1^*(0)$

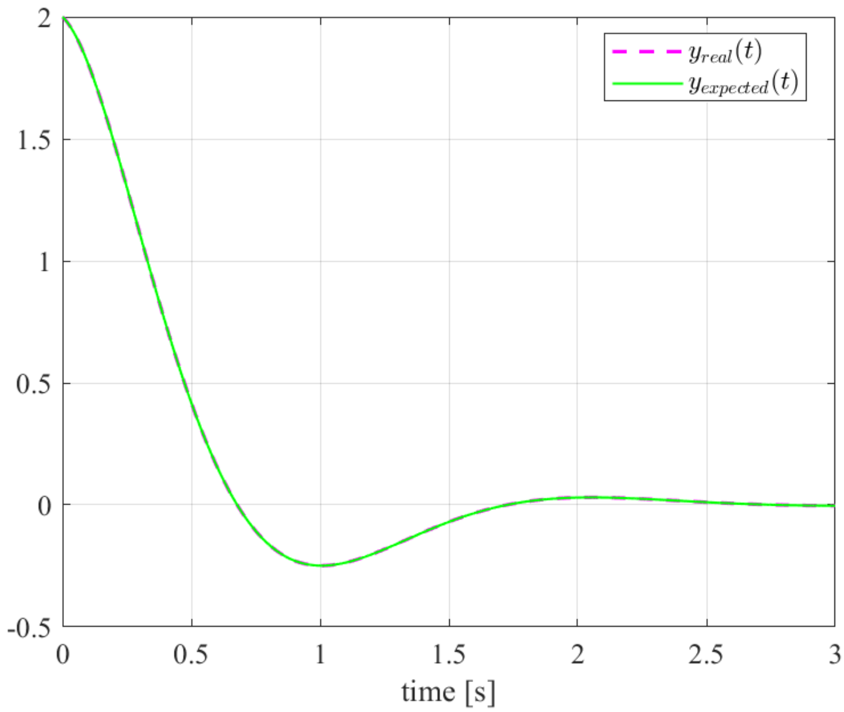

Рисунок 13 — Выход системы с начальными условиями $x_2^*(0)$

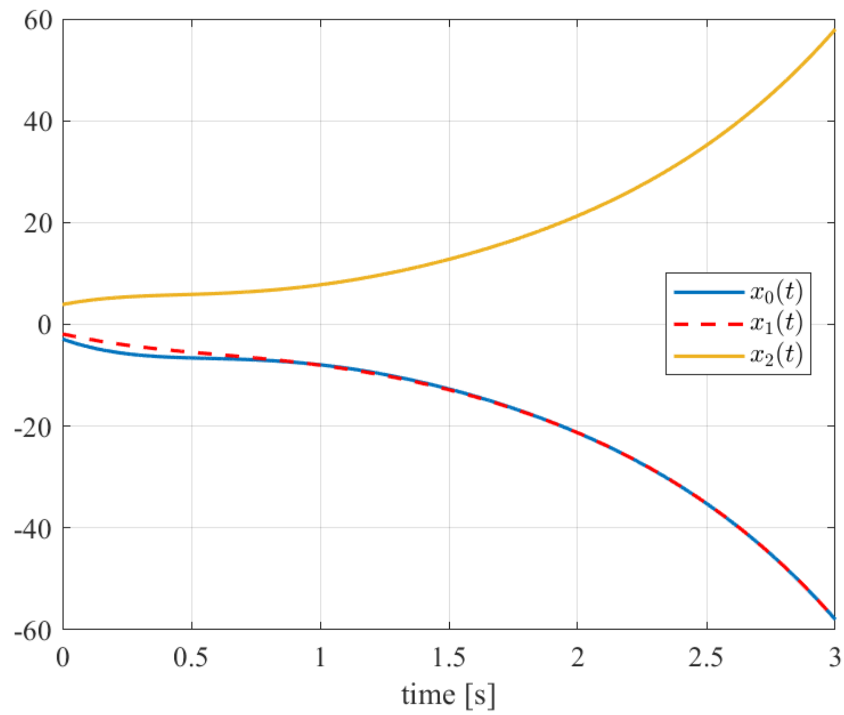

Рисунок 14 — Состояние системы с начальными условиями $x_2^*(0)$

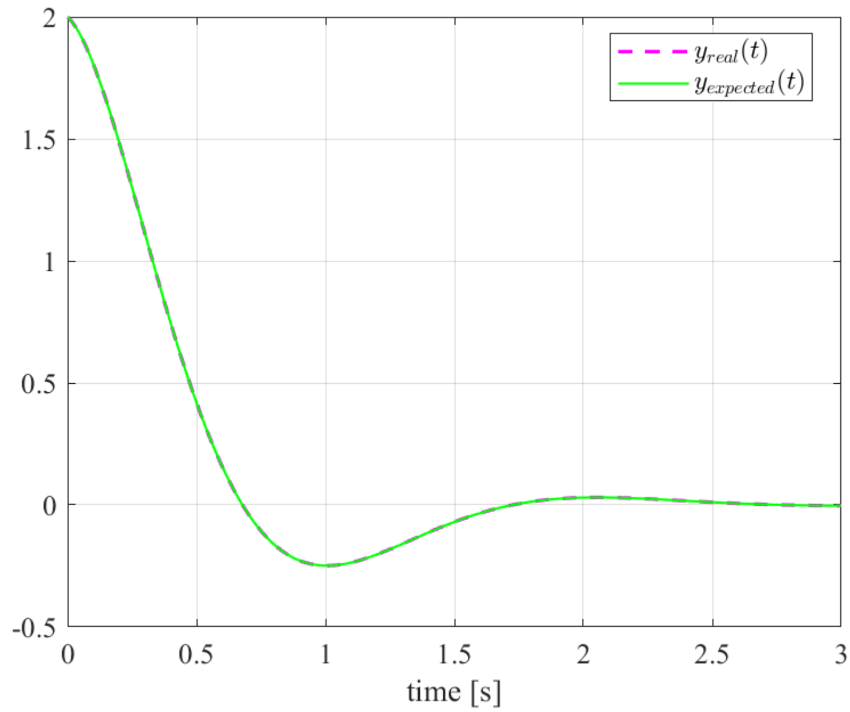

Рисунок 15 — Выход системы с начальными условиями $x_3^*(0)$

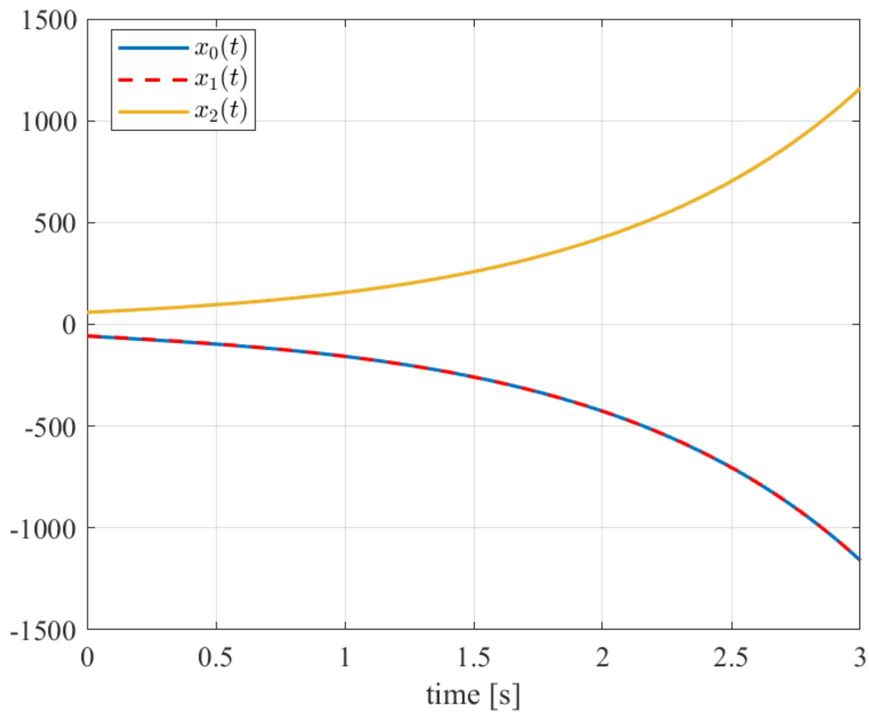

Рисунок 16 — Состояние системы с начальными условиями $x_3^*(0)$

4.2.5 Вывод

В этом задании мы исследовали не полностью наблюдаемую систему, это мы увидели с помощью матрицы наблюдаемости, критерия Калмана, через наблюдаемость собственных значений и жорданову форму системы. Также был найден грамиан наблюдаемости и проверены его собственные числа. Провели моделирование системы с начальными условиями, при которых выход системы совпадает с заданной функцией. Нам удалось показать, что для не полностью наблюдаемых систем есть пространство ”ненаблюдаемых”начальных условий, при которых выходы систем не будут отличаться друг от друга, и по траектории $y(t)$ в таком случае мы не сможем однозначно восстановить $x(0)$.

5 ИССЛЕДОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОСТИ ПО ВЫХОДУ

5.1 Условие задачи

Необходимо рассмотреть систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

и выполнить следующие шаги:

– Найти Жорданову (или диагональную) форму системы.
– Определить управляемость и наблюдаемость каждого из собственных чисел и системы в целом.
– Найти матрицу управляемости системы по выходу при $D = \mathbf{0}_{2\times2}$, определить её ранг, сделать вывод об управляемости системы по выходу.
– Проанализировав полученные результаты, попытаться сделать выводы о причинах управляемости или неуправляемости системы по выходу.
– Предложить такую матрицу связи D, которая могла бы обеспечить полную управляемость по выходу.

5.2 Решение задачи

Параметры для объекта:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ -4 & 4 & -5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix}$$

5.2.1 Исследование управляемости и наблюдаемости системы

Найдём Жорданову форму системы, в общем виде она выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = P^{-1}\boldsymbol{A}P\hat{x} + P^{-1}\boldsymbol{B}u \\ y = \boldsymbol{C}P\hat{x} + Du \end{cases}$$

В нашем случае жорданова клетка и входное/выходное воздействие таково:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}B = B^* = \begin{bmatrix} 4 \\ -1.5 + 1.5i \\ -1.5 - 1.5i \end{bmatrix}$$

$$CP = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Как можно заметить, три собственных числа соответствуют различным жордановым клеткам, и для каждой из них строка матрицы входных/выходных воздействий не равна нулю. Значит эти три собственных числа управляемы и наблюдаемы, и как следствие - вся система полностью управляема по состоянию и наблюдаема.

Найдем матрицу управляемости системы по выходу при $D = \mathbf{0}_{2\times2}$:

$$U_{out} = \begin{bmatrix} CU & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 27 & -63 & 0 & 0 \\ -30 & 54 & -126 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Нетрудно заметить, что…

$$rank(U_{out}) = 1$$

Ранг матрицы управляемости по выходу не равен размерности выхода, в таком случае наша система не управляема по выходу.

Это произошло из-за того, что матрица матрица наблюдения C содержит в себе два линейнозависимых вектора-строки, которые снижают ранг до 1. Также из-за этого мы теряем информацию по выходу $y(t)$, потому что обе компоненты вектора станет созависимыми и мы не сможем обеспечить все возможные выходы у системы.

Чтобы исправить это и сделать систему управляемой по выходу, необходимо подобрать такую матрицу D, которая сделает ранг $U_{out} = 2$. Например:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Тогда матрица управляемости по выходу будет равна:

$$U^*_{out} = \begin{bmatrix} CU & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 27 & -63 & 1 & 0 \\ -30 & 54 & -126 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и её ранг уже будет равен 2.

5.2.2 Вывод

В этом задании мы рассмтрели полная линейную систему. Мы нашли жорданову форму систему, по которой мы исследовали управляемость по состоянию и наблюдаемость, вышло, что система управляема по состоянию и наблюдаема. Однако при этом нулевая матрица связи $D_{2\times 2}$ не делала эту систему упроавляемой по выходу, но мы нашли подходящую.

6 ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

В ходе выполнения лабораторной работы была рассмотрена линейная система в полной и неполной форме. Для них мы исследовали характеристики управляемости и наблюдаемости ...

Использовал связку *Live-script* + *Matlab*, все исходные материалы, использованные в работе можно найти в репозитории.