

Задание 1. Исследование управляемости.

В соответствии с вашим вариантом по **Таблице 1** взять матрицы A и B и точку x_1 из **Таблицы 2**. Рассмотреть систему

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

и выполнить следующие шаги:

- Исследовать управляемость системы:
 - Найти матрицу управляемости системы, определить ее ранг, сделать вывод об управляемости системы в целом.
 - Найти собственные числа матрицы A , найти для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для управляемости), определить ранги матриц, сделать выводы об управляемости каждого собственного числа и системы в целом.
 - Найти Жорданову (или диагональную) форму системы и сделать выводы об управляемости каждого собственного числа и системы в целом.
- Найти Грамиан управляемости системы относительно времени $t_1 = 3$, вычислить его собственные числа. Проанализировать полученные собственные числа с точки зрения управляемости системы.
- Найти управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1 . Выполнить моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов.

Ожидаемые результаты:

- Матрица управляемости системы, ее ранг.
- Собственные числа системы, матрицы Хаутуса для каждого из них, их ранги.
- Представление системы в Жордановой (или диагональной) форме.
- Грамиан управляемости относительно времени $t_1 = 3$, его собственные числа.
- Управление, переводящее систему из $x(0) = 0$ в $x(t_1) = x_1$ за время t_1 .
- Результаты моделирования: график входа $u(t)$ и график вектора состояния $x(t)$. На графике $x(t)$ должно быть видно, что система достигает состояния x_1 в момент времени t_1 .
- Выводы.

Задание 2. Еще одно исследование управляемости.

В соответствии с вашим вариантом по **Таблице 1** взять матрицу A из **Таблицы 2** и матрицу B и точки x'_1 и x''_1 из **Таблицы 3**. Рассмотреть систему (1) и выполнить следующие шаги:

- Проверить обе точки x'_1 и x''_1 на принадлежность управляемому подпространству системы. Принять целевой точкой x_1 ту, что принадлежит.
- Выполните все шаги **Задания 1** для рассматриваемой системы и выбранной целевой точки x_1 . Допускается использовать результаты, полученные в **Задании 1**.

Ожидаемые результаты:

- Результаты проверки принадлежности точек x'_1 и x''_1 к управляемому подпространству системы.
- Ожидаемые результаты, перечисленные в **Задании 1**.

Задание 3. Исследование наблюдаемости.

В соответствии с вашим вариантом по **Таблице 1** взять матрицы A и C и сигнал $f(t)$ из **Таблицы 4**. Рассмотреть систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (2)$$

и выполнить следующие шаги:

- Исследовать наблюдаемость системы:
 - Найти матрицу наблюдаемости системы, определить ее ранг, сделать вывод об управляемости системы в целом.
 - Найти собственные числа матрицы A , найти для каждого из собственных чисел матрицу Хаутуса (для наблюдаемости), определить ранги матриц, сделать выводы об наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом.
 - Найти Жорданову (или диагональную) форму системы и сделать выводы об наблюдаемости каждого собственного числа и системы в целом.
- Найти Грамиан наблюдаемости системы относительно времени $t_1 = 3$, вычислить его собственные числа. Проанализировать полученные собственные числа с точки зрения наблюдаемости системы.

- Считая, что выход системы $y(t)$ подчиняется закону $y(t) = f(t)$ на временном интервале $t \in [0, t_1]$ определить начальные условия системы. Выполнить моделирование системы, демонстрирующее корректность выполненных расчетов.

Ожидаемые результаты:

- Матрица наблюдаемости системы, ее ранг.
- Собственные числа системы, матрицы Хаутуса для каждого из них, их ранги.
- Представление системы в Жордановой (или диагональной) форме.
- Грамиан наблюдаемости относительно времени $t_1 = 3$, его собственные числа.
- Вектор начальных условий, соответствующий выходу $y(t) = g(t)$.
- Результаты моделирования: график выхода системы $y(t)$ сопоставленный с сигналом $f(t)$. Для повышения наглядности рекомендуется строить данные графики на одной координатной плоскости или/и дополнительно построить график ошибки $e(t) = y(t) - f(t)$.
- Выводы.

Задание 4. Еще одно исследование наблюдаемости.

В соответствии с вашим вариантом по **Таблице 1** взять матрицу A и сигнал $f(t)$ из **Таблицы 4** и матрицу C из **Таблицы 5**. Рассмотреть систему (2) и выполнить следующие шаги:

- Выполните все шаги **Задания 3** для рассматриваемой системы. Допускается использовать результаты, полученные в **Задании 3**.
- Определить, мог ли выход вида $y(t) = f(t)$ быть порожден начальными условиями, отличными от найденных. Если да, то привести хотя бы три таких вектора начальных условий и выполнить для каждого из них (включая изначально найденный) моделирование, демонстрирующее корректность выполненных расчетов (одинаковые выходы при разном поведении векторов состояния систем).

Ожидаемые результаты:

- Ожидаемые результаты, перечисленные в **Задании 3**.
- Найденные альтернативные начальные условия.
- Результаты моделирования систем при различных начальных условиях: графики поведение векторов состояния систем $x(t)$, графики выходов системы $y(t)$, их сопоставление между собой. Для повышения наглядности рекомендуется строить графики $y(t)$ на одной координатной плоскости, а на графиках $x(t)$ должны быть видны начальные условия.

Задание 5. (Необязательное) Исследование управляемости по выходу.

В соответствии с вашим вариантом по **Таблице 1** взять матрицу A из **Таблицы 2** и матрицы B и C из **Таблицы 6**. Рассмотреть систему

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

и выполнить следующие шаги:

- Найти Жорданову (или диагональную) форму системы (допускается использовать результаты, полученные в предыдущих **Заданиях**).
- Определить управляемость и наблюдаемость каждого из собственных чисел и системы в целом любым удобным способом (допускается использовать результаты, полученные в предыдущих **Заданиях**).
- Найти матрицу управляемости системы по выходу при $D = \mathbf{0}_{2 \times 2}$, определить ее ранг, сделать вывод об управляемости системы по выходу.
- Проанализировав полученные результаты, попытаться сделать выводы о причинах управляемости или неуправляемости системы по выходу.
- Предложить такую матрицу связи D , которая могла бы обеспечить полную управляемость по выходу.

Ожидаемые результаты:

- Жорданова (или диагональная) форма системы.
- Матрица управляемости системы по выходу, ее ранг.
- Выводы.

Контрольные вопросы для подготовки к защите:

1. Что такое управляемое подпространство?
2. Что такое «полностью управляемая система»? Какие критерии управляемости вам известны?
3. Как можно интерпретировать управляемость собственных чисел?
4. В чем заключается идея программного управления?
5. Что такое ненаблюдаемое подпространство?
6. Что такое «полностью наблюдаемая система»? Какие критерии наблюдаемости вам известны?
7. Как определить полностью ли управляема система по выходу? Равносильны ли управляемость и управляемость по выходу?

Таблица 1: Распределение Заданий по Вариантам

Вариант	Задания		Вариант	Задания		Вариант	Задания	
	1, 2 и 5	3 и 4		1, 2 и 5	3 и 4		1, 2 и 5	3 и 4
1	№ 1	№ 6	11	№ 6	№ 11	21	№ 11	№ 1
2	№ 2	№ 7	12	№ 7	№ 12	22	№ 12	№ 2
3	№ 3	№ 8	14	№ 8	№ 13	24	№ 13	№ 3
4	№ 4	№ 9	14	№ 9	№ 14	24	№ 14	№ 4
5	№ 5	№ 10	15	№ 10	№ 15	25	№ 15	№ 5
6	№ 1	№ 11	16	№ 6	№ 1	26	№ 11	№ 6
7	№ 2	№ 12	17	№ 7	№ 2	27	№ 12	№ 7
8	№ 3	№ 13	18	№ 8	№ 3	28	№ 13	№ 8
9	№ 4	№ 14	19	№ 9	№ 4	29	№ 14	№ 9
10	№ 5	№ 15	20	№ 10	№ 5	30	№ 15	№ 10

Таблица 2: Исходные данные для Задания 1 и Задания 2

№	A	B	x_1	№	A	B	x_1
1	$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -4 & -8 & -4 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 8 \\ 4 & -4 & 4 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & -5 & -2 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -10 & -11 & -4 \\ 10 & 10 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 6 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix} 13 & -11 & 14 \\ 10 & -7 & 10 \\ -10 & 6 & -11 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -6 & -8 & -3 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -4 & -5 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
6	$\begin{bmatrix} 7 & -6 & 9 \\ 6 & -5 & 6 \\ -6 & 3 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 4 & -5 & 4 \\ -4 & 4 & -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
7	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -6 & -7 & -2 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$	15	$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 8 \\ 4 & -3 & 4 \\ -4 & 0 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$
8	$\begin{bmatrix} 7 & -7 & 8 \\ 6 & -5 & 6 \\ -6 & 4 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$				

Таблица 3: Исходные данные для Задания 2

№	B	x'_1	x''_1	№	B	x'_1	x''_1	№	B	x'_1	x''_1
1	$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix} 11 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	15	$\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Таблица 4: Исходные данные для Задания 3 и Задания 4 (номера 1-8)

№	A	C	$f(t)$
1	$\begin{bmatrix} -15 & -30 & 2 \\ 6 & 11 & -2 \\ -4 & -10 & -1 \end{bmatrix}$	$[2 \ 4 \ -1]$	$-6e^{-3t} \cos(2t) - 4e^{-3t} \sin(2t)$
2	$\begin{bmatrix} -9 & 0 & -10 \\ -4 & -1 & -6 \\ 6 & -2 & 5 \end{bmatrix}$	$[2 \ -1 \ 2]$	$-3e^{-3t} \cos(2t) - 2e^{-3t} \sin(2t)$
3	$\begin{bmatrix} -14 & -33 & -3 \\ 6 & 13 & 0 \\ -3 & -9 & -2 \end{bmatrix}$	$[1 \ 3 \ 0]$	$5e^{-2t} \cos(3t) + 2e^{-2t} \sin(3t)$
4	$\begin{bmatrix} -8 & -3 & -12 \\ -3 & -2 & -6 \\ 6 & 0 & 7 \end{bmatrix}$	$[1 \ 0 \ 2]$	$2e^{-2t} \cos(3t) + e^{-2t} \sin(3t)$
5	$\begin{bmatrix} -13 & -36 & -8 \\ 6 & 15 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \end{bmatrix}$	$[1 \ 4 \ 1]$	$1e^{-t} \cos(4t) + 3e^{-t} \sin(4t)$
6	$\begin{bmatrix} -7 & -6 & -14 \\ -2 & -3 & -6 \\ 6 & 2 & 9 \end{bmatrix}$	$[1 \ 1 \ 3]$	$4e^{-t} \cos(4t) + 6e^{-t} \sin(4t)$
7	$\begin{bmatrix} -16 & -27 & 7 \\ 6 & 9 & -4 \\ -5 & -11 & 0 \end{bmatrix}$	$[2 \ 7 \ 1]$	$-9e^{-4t} \cos(t) + 9e^{-4t} \sin(t)$
8	$\begin{bmatrix} -10 & 3 & -8 \\ -5 & 0 & -6 \\ 6 & -4 & 3 \end{bmatrix}$	$[2 \ 1 \ 5]$	$-3e^{-4t} \cos(t) + 3e^{-4t} \sin(t)$

Таблица 4: Исходные данные для Задания 3 и Задания 4 (номера 9-15)

№	A	C	$f(t)$
9	$\begin{bmatrix} -18 & -47 & -9 \\ 8 & 19 & 2 \\ -3 & -11 & -4 \end{bmatrix}$	$[2 \ 3 \ -3]$	$2e^{-2t} \cos(5t) - 4e^{-2t} \sin(5t)$
10	$\begin{bmatrix} -10 & -7 & -18 \\ -3 & -4 & -8 \\ 8 & 2 & 11 \end{bmatrix}$	$[2 \ -3 \ 1]$	$e^{-2t} \cos(5t) - 2e^{-2t} \sin(5t)$
11	$\begin{bmatrix} -21 & -38 & 6 \\ 8 & 13 & -4 \\ -6 & -14 & -1 \end{bmatrix}$	$[9 \ 18 \ -2]$	$3e^{-5t} \cos(2t) - 1e^{-5t} \sin(2t)$
12	$\begin{bmatrix} -13 & 2 & -12 \\ -6 & -1 & -8 \\ 8 & -4 & 5 \end{bmatrix}$	$[9 \ -2 \ 9]$	$21e^{-5t} \cos(2t) - 7e^{-5t} \sin(2t)$
13	$\begin{bmatrix} -10 & -6 & 16 \\ 3 & 0 & -7 \\ -5 & -8 & 3 \end{bmatrix}$	$[3 \ 6 \ -2]$	$-6e^{-4t} \cos(2t) + 4e^{-4t} \sin(2t)$
14	$\begin{bmatrix} -7 & 9 & 1 \\ -5 & 3 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{bmatrix}$	$[3 \ -2 \ 3]$	$-3e^{-4t} \cos(2t) + 2e^{-4t} \sin(2t)$
15	$\begin{bmatrix} -11 & -9 & -21 \\ -3 & -5 & -9 \\ 9 & 3 & 13 \end{bmatrix}$	$[2 \ 1 \ 2]$	$6e^{-2t} \cos(6t) + 9e^{-2t} \sin(6t)$

Таблица 5: Исходные данные для Задания 4

№	C	№	C	№	C
1	$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} 7 & 14 & 0 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} 0 & -5 & -5 \end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 0 & -7 & -7 \end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$	15	$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

Таблица 6: Исходные данные для Задания 5

№	B	C	№	B	C	№	B	C
1	$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$	11	$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix}$	12	$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 3 \end{bmatrix}$	13	$\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -5 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{bmatrix}$	9	$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$	14	$\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 0 & -8 & -6 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	10	$\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 0 & 15 & 9 \end{bmatrix}$	15	$\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 14 & 9 \end{bmatrix}$