

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ
по дисциплине
”Частотные методы”

по теме:
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Студент:
Группа R3236

Поляков А.А.

Предподаватель:
к.т.н., доцент

Перегудин А.А.

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1	ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И БИБЛИОТЕКИ	3
1.1	Задание 1	3
1.2	Задание 2	4
1.3	Задание 3	4
2	ЗАДАНИЕ 1. ВЕЩЕСТВЕННОЕ	6
2.1	Прямоугольная функция	6
2.1.1	Фурье-Образ.....	6
2.1.2	Графики функции и Фурье-образа	6
2.1.3	Равенство Парсеваля	8
2.1.4	Анализ ситуации.....	9
2.2	Треугольная функция.....	10
2.2.1	Фурье-Образ.....	10
2.2.2	Графики функции и Фурье-образа	11
2.2.3	Равенство Парсеваля	12
2.2.4	Анализ ситуации.....	13
2.3	Кардинальный синус	13
2.3.1	Фурье-Образ.....	13
2.3.2	Графики функции и Фурье-образа	13
2.3.3	Равенство Парсеваля	13
2.3.4	Анализ ситуации.....	14
2.4	Функция Гаусса	15
2.4.1	Фурье-Образ.....	15
2.4.2	Графики функции и Фурье-образа	17
2.4.3	Равенство Парсеваля	18
2.4.4	Анализ ситуации.....	18
2.5	Двустороннее затухание	19
2.5.1	Фурье-Образ.....	19
2.5.2	Графики функции и Фурье-образа	19
2.5.3	Равенство Парсеваля	20
2.5.4	Анализ ситуации.....	21

3	ЗАДАНИЕ 2. КОМПЛЕКСНОЕ	22
3.1	Фурье-образ	22
3.2	Графики функции, компонент $f(t)$, а также её модуля	22
3.3	Анализ степени сдвига на функцию и Фурье-образ	29
3.4	Равенство Парсеваля	29
4	ЗАДАНИЕ 3. МУЗЫКАЛЬНОЕ	30
4.1	Построить график ноты	30
4.2	Найти численно Фурье-образ	31
4.3	Анализ Фурье-образа	32

1 ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И БИБЛИОТЕКИ

Онлайн версию кода в colab можно глянуть [здесь](#). Учтите, что аккорды не загружены, поэтому конвертировать и загружать их придётся самостоятельно :(

1.1 Задание 1

Были использованы следующие библиотеки:

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 import pandas as pd
4 import scipy.integrate as spi
```

Кусочно-заданные функции реализовывал через функционал `numpy`, на примере первой функции прямоугольника:

```
1 def f1(t):
2     if abs(t) <= b:
3         return a
4     elif abs(t) > b:
5         return 0
6
7 vec_f1 = np.vectorize(f1)
```

Пример кода для построения графиков в `matplotlib`, больше можно увидеть в онлайн-блокноте:

```
1 def plot_original_and_image(x, f, f_image):
2     figure, axis = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 6))
3
4     axis[0].plot(x, [f(t) for t in x])
5     axis[0].set_title(f"Original func with (a, b) = ({a}, {b})")
6     axis[0].set_xlabel('t')
7     axis[0].set_ylabel('y(t)')
8
9     axis[1].plot(x, [f_image(t) for t in x])
10    axis[1].set_title(f"Fourier image with (a, b) = ({a}, {b})")
11    axis[1].set_xlabel('t')
12    axis[1].set_ylabel('y(t)')
13
14    plt.show()
```

Реализовывал проверку равенства Парсеваля через интегрирование на Scipy, которое не всегда хорошо работает, это стоит учитывать:

```
1 def check_parseval(f, f_image):
2     INT1, err1 = spi.quad(lambda t: abs(f(t))**2, -10**7, 10**7)
3     INT2, err2 = spi.quad(lambda omega: abs(f_image(omega))**2, -10**7,
4                             10**7)
5     print(f"integrals: {INT1} {INT2}")
6     print(f"errors: {err1} {err2}")
7     print(f"delta: {abs(INT1-INT2):.5f}")
8
9 check_parseval(vec_f1, f1_image)
```

1.2 Задание 2

Проверка равенства Парсеваля осталась та же, как в первом задании.

Функция сдвинутого треугольника была реализована по аналогии с прошлым заданием:

```
1 def f6(t):
2     T = t+c
3     if abs(T) <= b:
4         return a - abs(a*T/b)
5     elif abs(T) > b:
6         return 0
7
8 vec_f6 = np.vectorize(f6)
9
10 def f6_image(omega):
11     return f2_image(omega) * np.exp(1j*omega*c)
```

1.3 Задание 3

Для чтения звуковой волны с файла .mp3 с помощью библиотеки librosa:

```
1 data, sample_rate = librosa.load('accord7.mp3')
2 sound_from_time = np.vectorize(lambda t: data[int(t * sample_rate)])
3 # remove some time to avoid problem with indexing
4 length = len(data) / sample_rate - 0.005
5 print(length)
```

Для построения графика волны выше:

```

1 def plot_sound(wave, time, caption = '', ):
2     # remove some time to avoid problem with indexing
3     t = np.linspace(0, time - 2, 10000)
4     plt.figure(figsize=(8, 5))
5
6     plt.plot(t, wave(t))
7     plt.xlabel('t')
8     plt.ylabel('f(t)')
9     plt.legend(['sound'], loc='lower right')
10    plt.title(caption)
11    plt.grid()
12
13 plot_sound(sound_from_time, length, caption='Waveform of accord7.mp3',)

```

Дополнительные функции для численного интегрирования ”ручками” образа Фурье для волны:

```

1 def dot_prod(f, g, a, b):
2     x = np.linspace(a, b, 1000)
3     dx = x[1] - x[0]
4     return np.dot(f(x), g(x)) * dx
5
6 def wave_fourier_image(func, a, b):
7     image = lambda v: dot_prod(func, lambda t: np.e ** (-2 * np.pi * 1j
8     * v * t), a, b)
9     return np.vectorize(image)
10
11 # TRANSFORM
12 wave_image = wave_fourier_image(sound_from_time, 0, 0.09)
13 wave_image_abs = lambda t: abs(wave_image(t))
14 plot_wave_image(wave_image_abs, 0, 4000, caption='Accord7 freqs image')

```

2 ЗАДАНИЕ 1. ВЕЩЕСТВЕННОЕ

NB. - В этом задании мы используем унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω , оно будет выглядеть следующим образом:

– Исходная функция

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

– Фурье-образ

$$c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Теперь рассмотрим следующие функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

2.1 Прямоугольная функция

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

2.1.1 Фурье-Образ

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\dots) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{-b} 0 dt + \int_{-b}^b a e^{-i\omega t} dt + \int_b^{+\infty} 0 dt \right] = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{-i\omega\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \Big|_{-b}^b = \frac{2a}{-2i\omega\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega b} - e^{i\omega b}) = \frac{2ab}{2ib\omega\sqrt{2\pi}} (e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}) = \\ &= \frac{2ab}{b\omega\sqrt{2\pi}} \sin(\omega b) = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}} \cdot \text{sinc}(\omega b) \end{aligned}$$

2.1.2 Графики функции и Фурье-образа

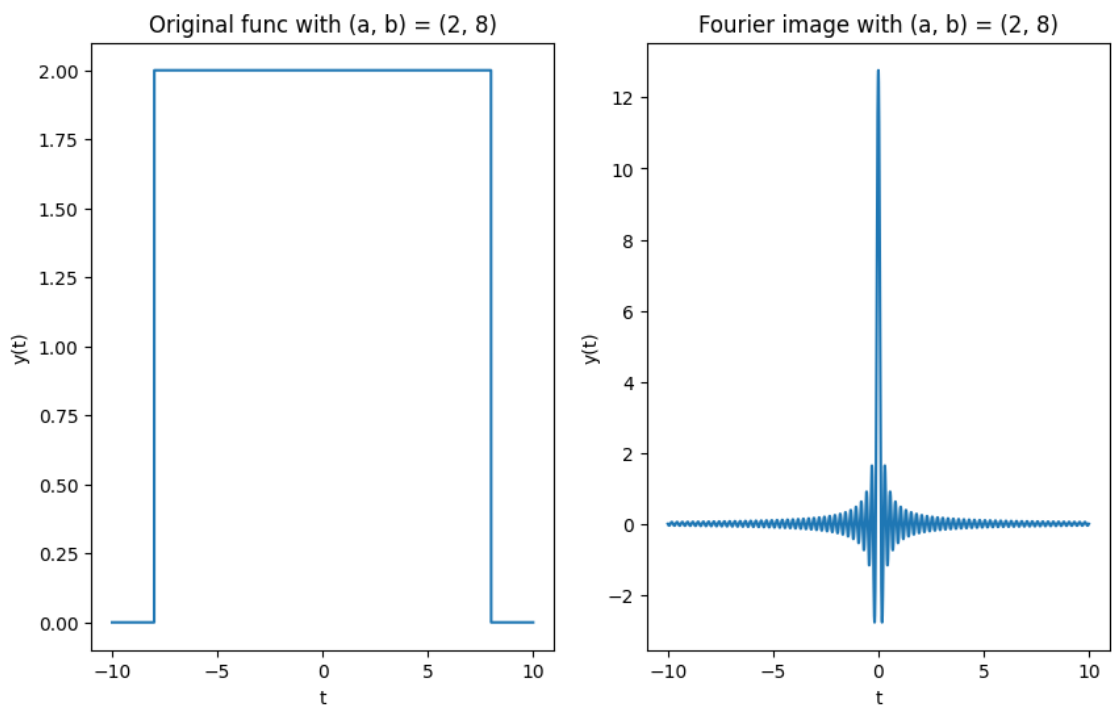


Рисунок 1 — График и образ прямоугольной функции

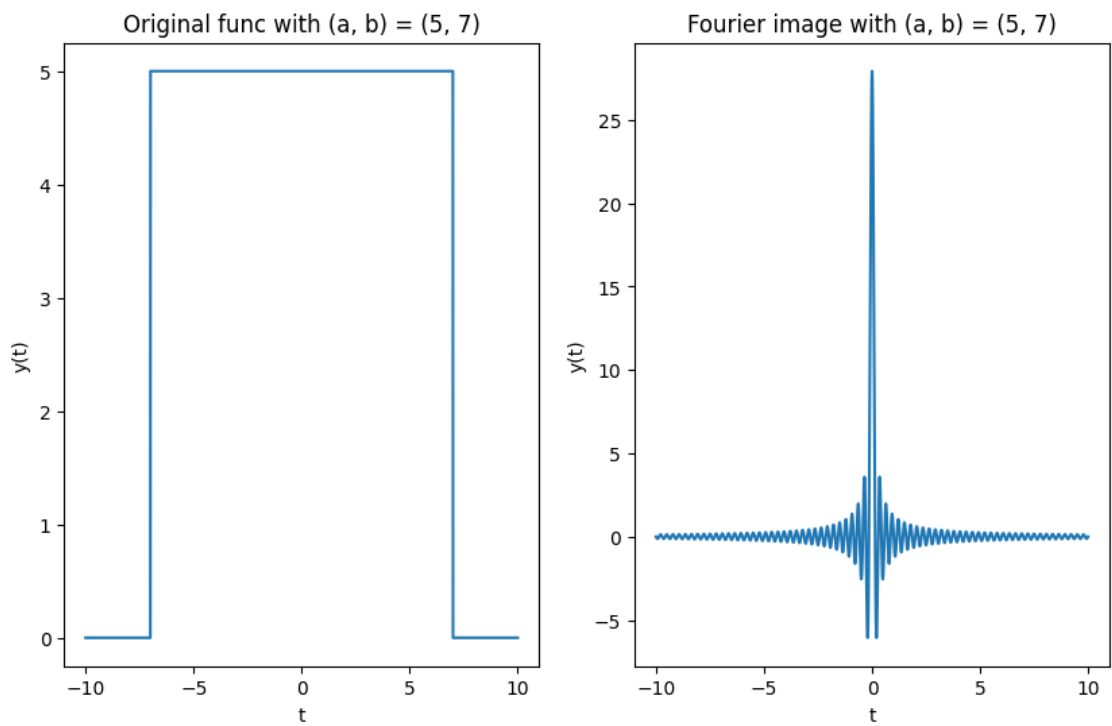


Рисунок 2 — График и образ прямоугольной функции

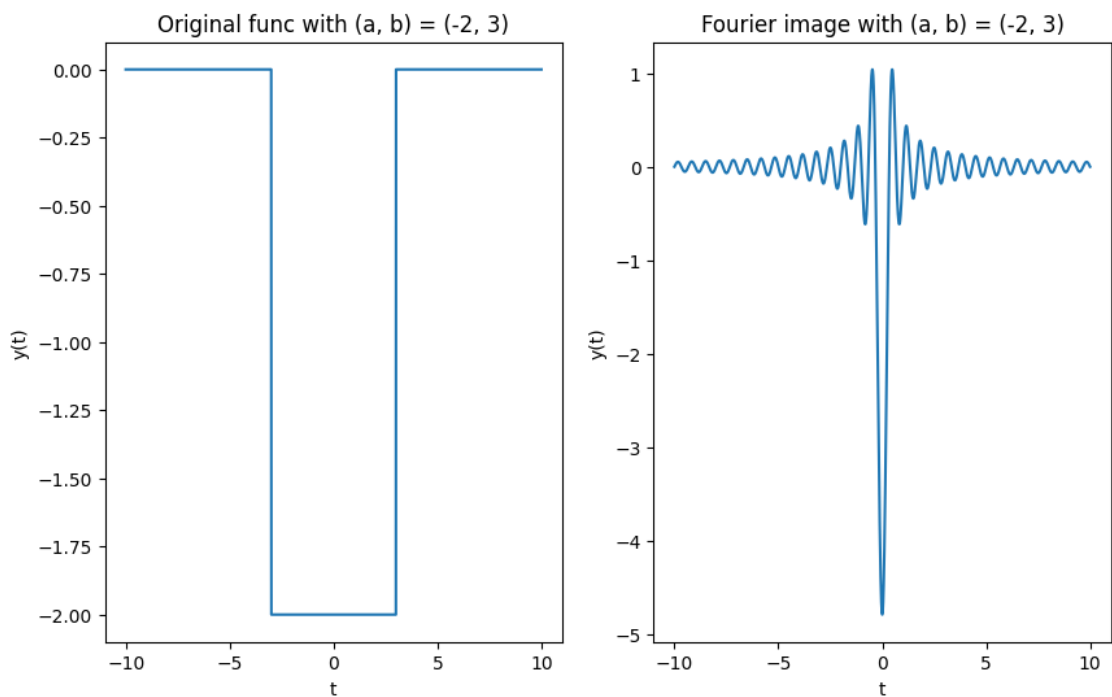


Рисунок 3 — График и образ прямоугольной функции

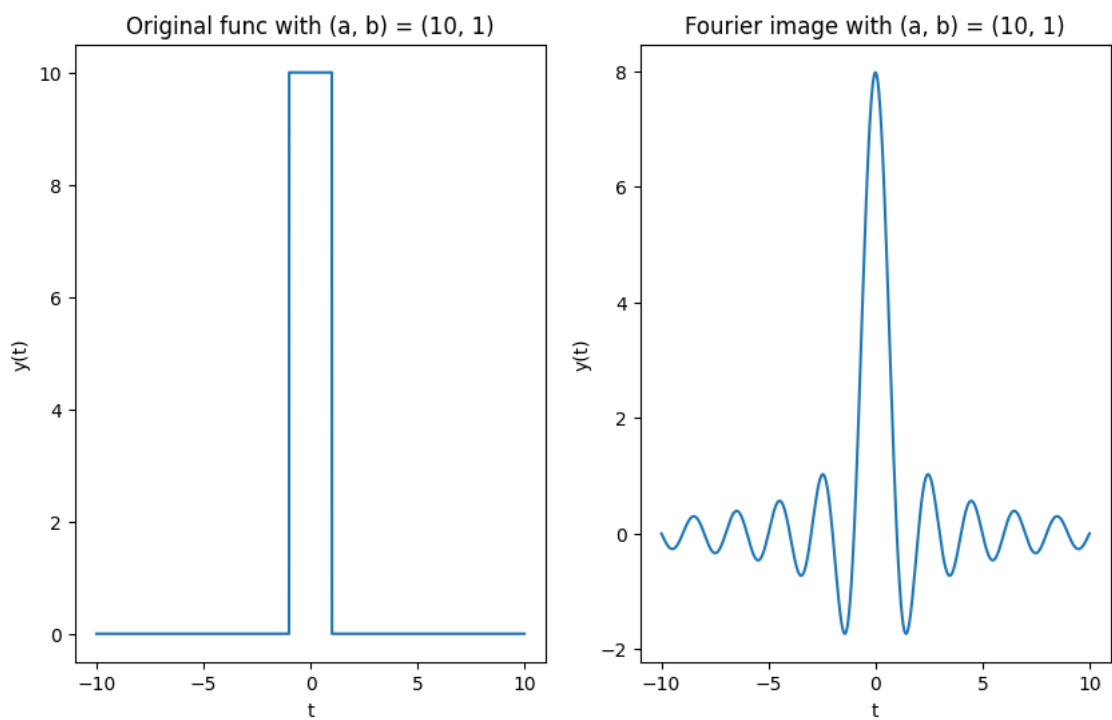


Рисунок 4 — График и образ прямоугольной функции

2.1.3 Равенство Парсеваля

Проверим равенство Парсеваля, в нашем случае оно будет выглядеть следующим образом

$$||f||_2 = ||\mathbb{F}f||_2$$

, где \mathbb{F} - оператор Фурье, а норму вектора определим как корень из суммы квадратов всех его компонент.

Также вспомним про то, что применение оператора Фурье на функцию равняется её фурье образу, поэтому

$$\mathbb{F}f = \hat{f}$$

А значит можно записать равенство Парсеваля в более приближенной форме для численных приближений

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$
$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt - \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \right) \rightarrow 0$$

Удобно отслеживать не равенство левой и правой части, а стремление их разности к нулю, так и поступим.

Полезно также знать, что оно имеет физическое значение: *равенство энергии сигнала во временной области и энергетического спектра в частотной области*. Правда, так как я не физик, то чёткого значения этих слов я не понимаю...

Второе полезное замечание: по неизвестной мне причине, привычное `scipy` интегрирование не очень хорошо работало на первую функцию, возможно из-за её бесконечной периодичности интеграл расходился, но когда вместо границ `[-np.inf; +np.inf]` я поставил просто большие числа, например, `[-107; 107]`, то результаты уже стали человечнее...

Получил в нашем случае `delta: 0.01363`, подробности вычислений смотрите в используемых функциях или в онлайн-блокноте

2.1.4 Анализ ситуации

В данном случае заметная следующая тенденция - при увеличении ширины волны, частота Фурье образа возрастает, он становится "сжатым"...

Принцип неопределённости можно привязать здесь следующим образом - чем более концентрированной является функция $f(t)$, тем более разнесенным должно быть её преобразование Фурье $\hat{f}(\omega)$. В частности, такое свойство можно рассматривать как утверждение: если мы сжимаем функцию

в t раз, то её преобразование Фурье растягивается на ω . **Невозможно** произвольно сконцентрировать как функцию, так и её преобразование Фурье.

Спасибо за это силе википедии, [Принцип неопределённости](#), [Преобразование Фурье](#)

2.2 Треугольная функция

$$f(t) = \begin{cases} a - |at/b|, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b \end{cases}$$

2.2.1 Фурье-Образ

Внутри нам встретятся до жути уже знакомые интегралы или интегрирование по частям, поэтому я их пропускал, чтобы слишком подробно не расписывать, также воспользуемся старым приёмом: разделяем на два интеграла, раскрывая модуль, решаем каждый по отдельности:

$$\hat{f}_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a - |at/b|) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{-b} 0 dt + \int_{-b}^0 (a + \frac{at}{b}) e^{-i\omega t} dt + \int_0^b (a - \frac{at}{b}) e^{-i\omega t} dt + \int_b^{+\infty} 0 dt \right] =$$

Воспользуемся линейностью интегралов и перегруппируем слагаемые:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a(ib\omega - e^{ib\omega} + 1)}{b\omega^2} + \frac{a(-ib\omega - e^{-ib\omega} + 1)}{b\omega^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a(-e^{-ib\omega} - e^{ib\omega} + 2)}{b\omega^2} \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{4a \sin^2(b\omega/2)}{b\omega^2} \right) = \frac{4a \sin^2(b\omega/2)}{\sqrt{2\pi} b\omega^2} = \frac{ab}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}^2\left(\frac{b\omega}{2}\right)$$

2.2.2 Графики функции и Фурье-образа

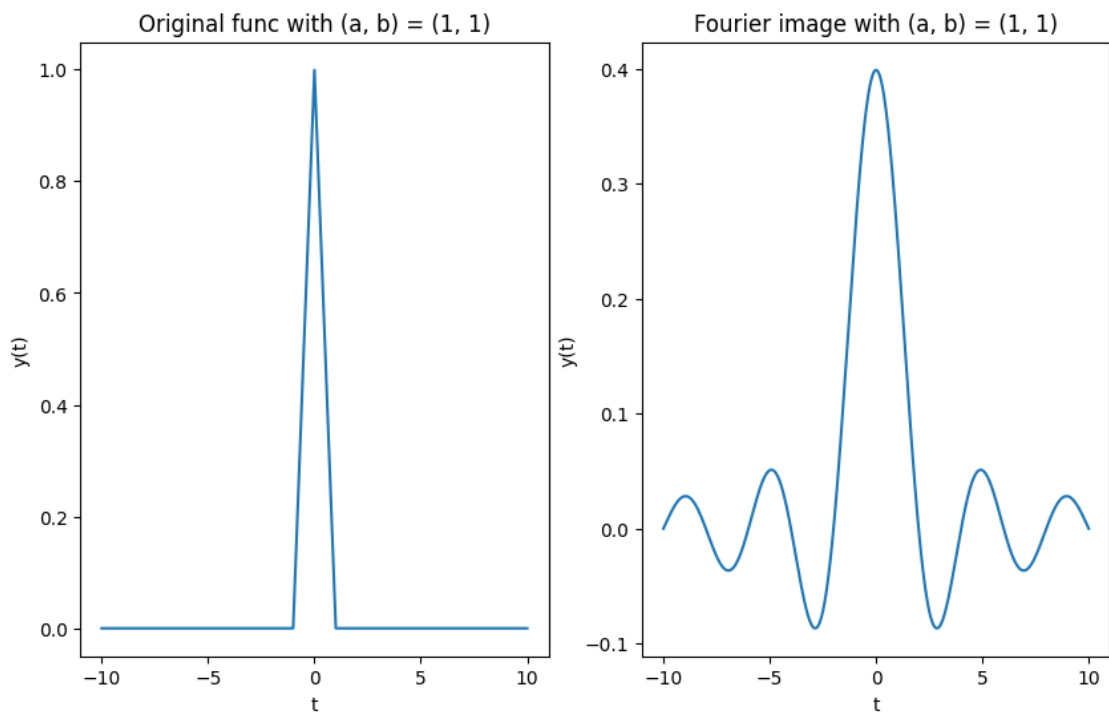


Рисунок 5 — График и образ треугольной функции

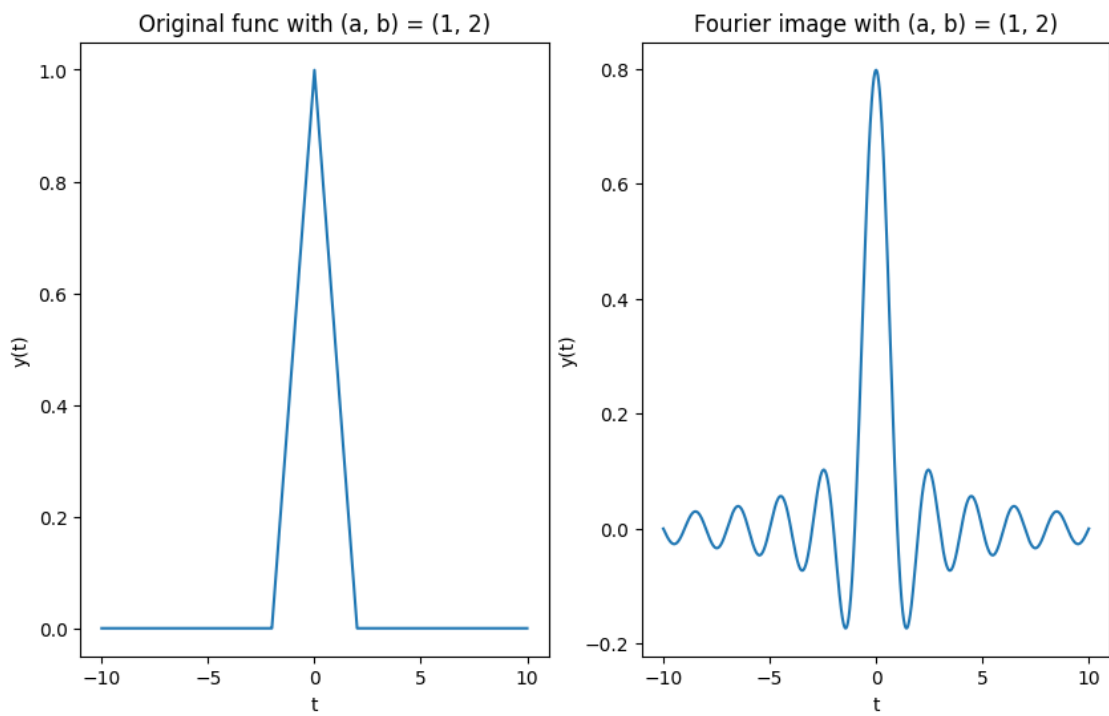


Рисунок 6 — График и образ треугольной функции

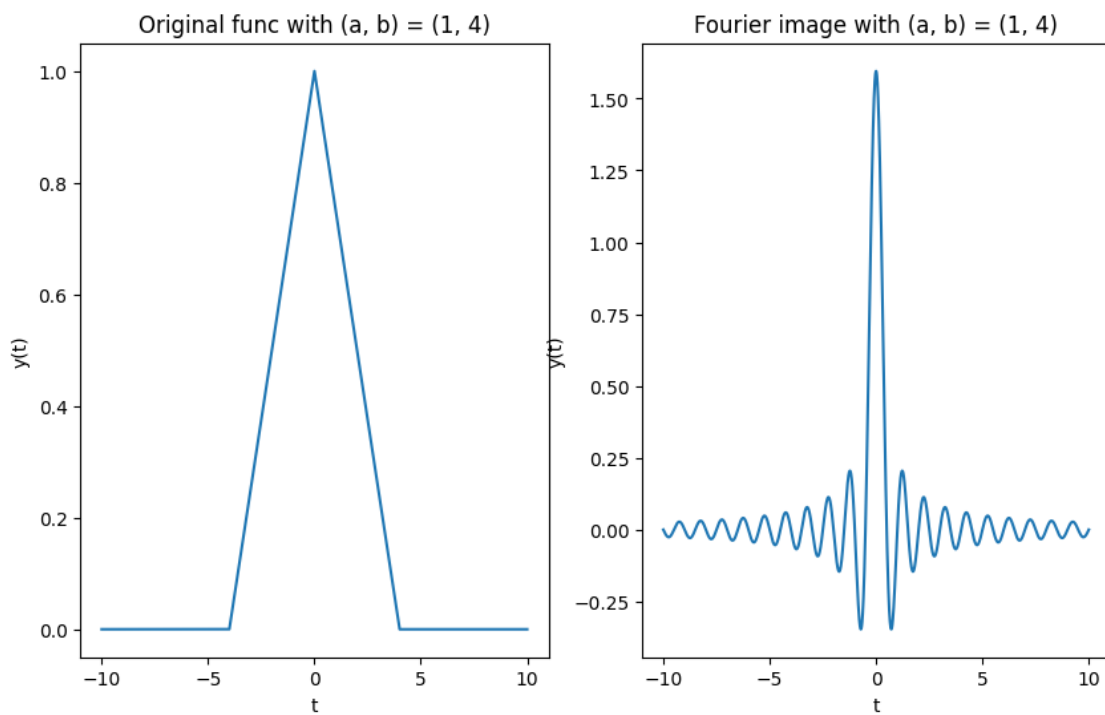


Рисунок 7 — График и образ треугольной функции

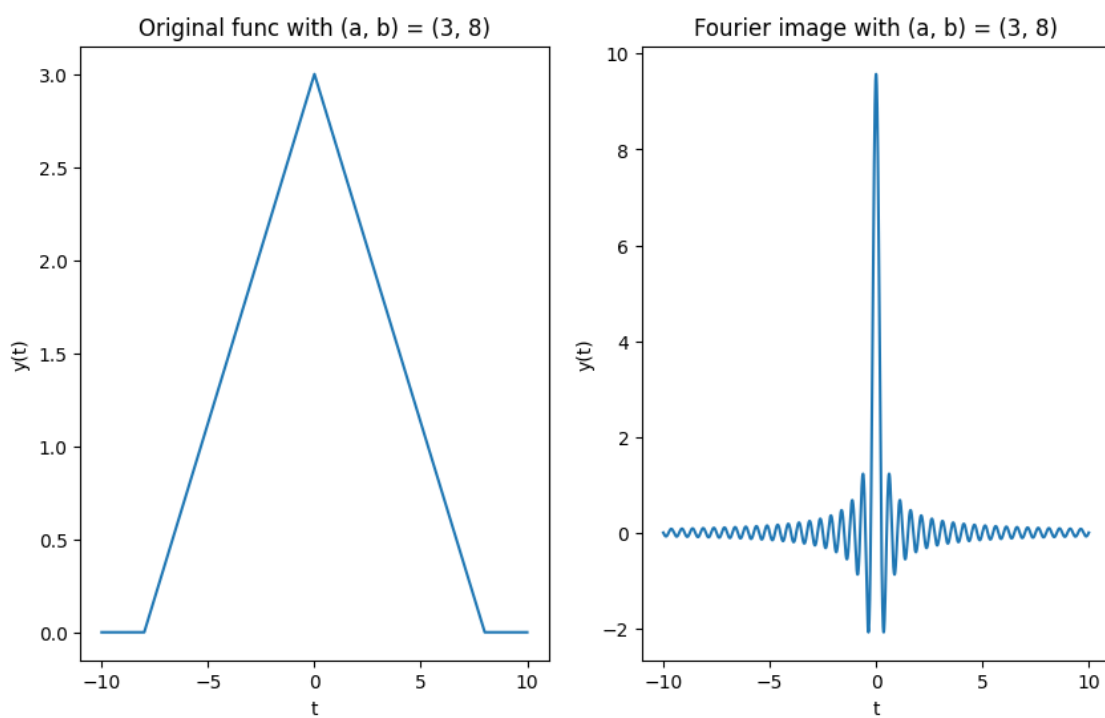


Рисунок 8 — График и образ треугольной функции

2.2.3 Равенство Парсеваля

Получил delta: 0.22765

2.2.4 Анализ ситуации

Влияние параметров a и b на исходную функцию и образ можно увидеть из того, как они заданы. Параметр a определяет высоту треугольной функции, a параметр — ”ширину основания”. В образе функции видно, что при увеличении параметра a амплитуда образа увеличивается, а при увеличении параметров a и b амплитуда увеличивается, при увеличении параметра b увеличивается частота.

Принцип неопределенности, как и в прошлом случае, можно увидеть как уменьшение ширины образа при увеличении основания треугольника.

2.3 Кардинальный синус

$$f(t) = a \operatorname{sinc}(bt)$$

2.3.1 Фурье-Образ

Из-за свойств оператора Фурье нетрудно понять, что Фурье-образ будет прямоугольник из первого пункта, но нужно точно понимать в каком виде он там будет представлен. Для этого всё же интеграл придётся взять, но без силы интернета я не смог справиться, **например**, этот источник предлагает свести его к двойному и с помощью теоремы Фубини разругнуть ситуацию...поверим ему и воспользуемся готовеньким:

$$\hat{f}_3(\omega) = \frac{a\pi}{2\sqrt{2\pi}} [\operatorname{sign}(\omega + b) - \operatorname{sign}(\omega - b)]$$

2.3.2 Графики функции и Фурье-образа

2.3.3 Равенство Парсеваля

Получил δ : 0.01842, что довольно неплохое приближение, учитывая, что равенство выполняется лишь на бесконечности

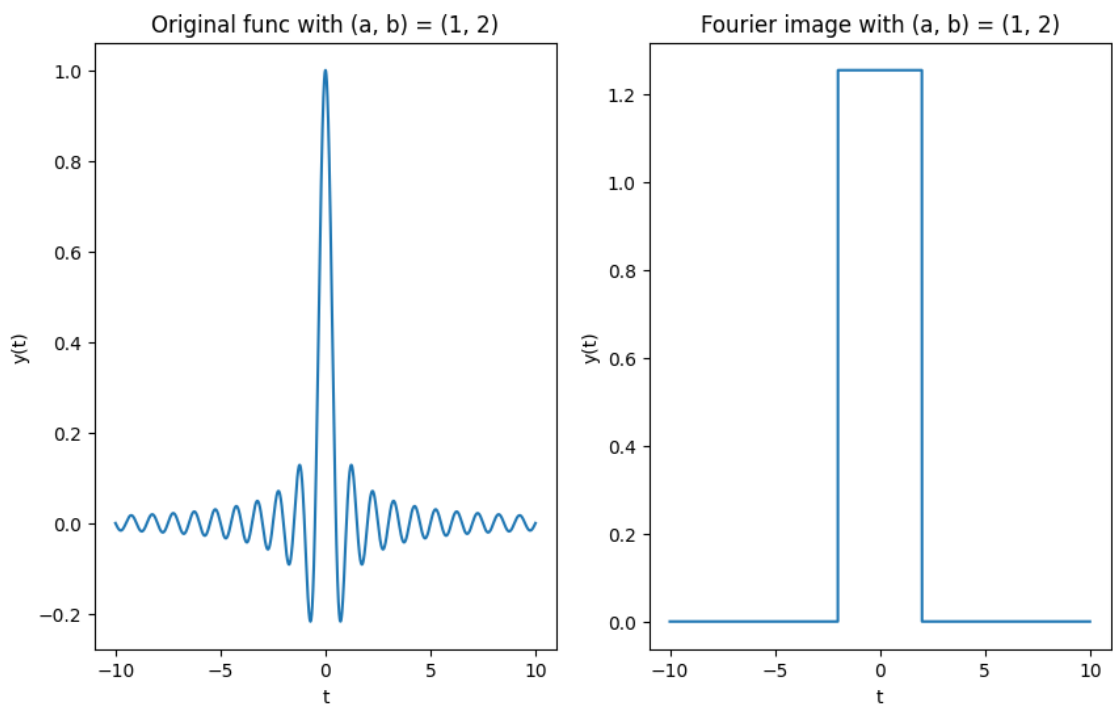


Рисунок 9 — График и образ кардинального синуса

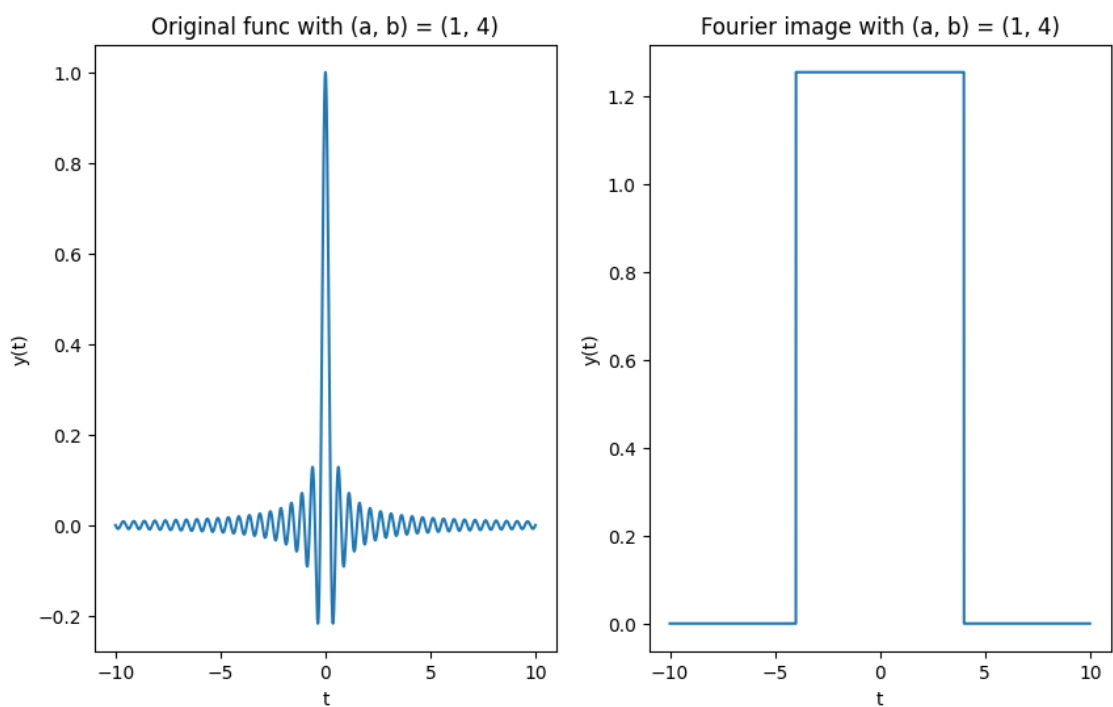


Рисунок 10 — График и образ кардинального синуса

2.3.4 Анализ ситуации

Получается, что параметр a отвечает за длину прямоугольника изображения, а значит и главный горбик функции, параметр b - за растяжение/сжа-

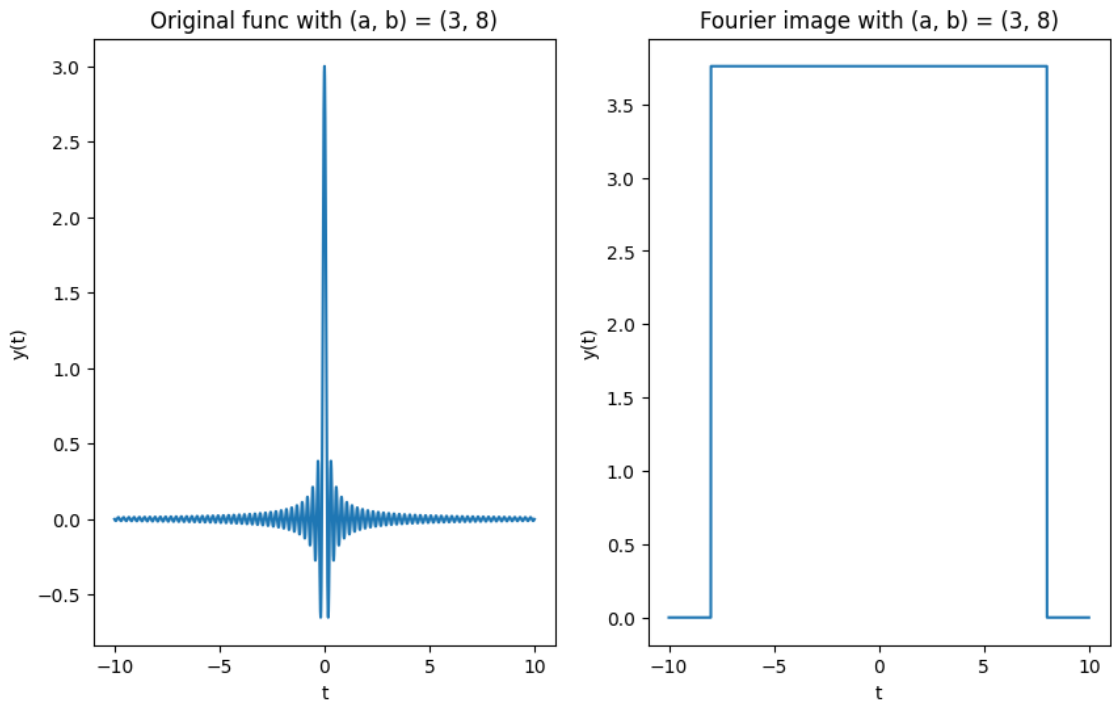


Рисунок 11 — График и образ кардинального синуса

тие прямоугольника, и следовательно, за сжатие/растяжение исходной функции...

Принцип неопределенности проявляется ровно также, как и в первой функции: при уменьшении ширины кардинального синуса увеличивается ширина его образа.

2.4 Функция Гаусса

$$f(t) = ae^{-bt^2}$$

2.4.1 Фурье-Образ

Воспользуемся известным фактом из [википедии](#) об Гауссовом интеграле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(Ax^2+Bx+C)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{\frac{B^2}{4A}-C}$$

Тогда вычисления значительно упростятся...

$$\hat{f}_4(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bt^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(bt^2+i\omega t)} dt$$

, где $A = b$, $B = i\omega$, $C = 0$, тогда...

$$\hat{f}_4(\omega) = a\sqrt{\frac{\pi}{2\pi b}}e^{\frac{(i\omega)^2}{4b}} = \frac{a}{\sqrt{2b}}e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

2.4.2 Графики функции и Фурье-образа

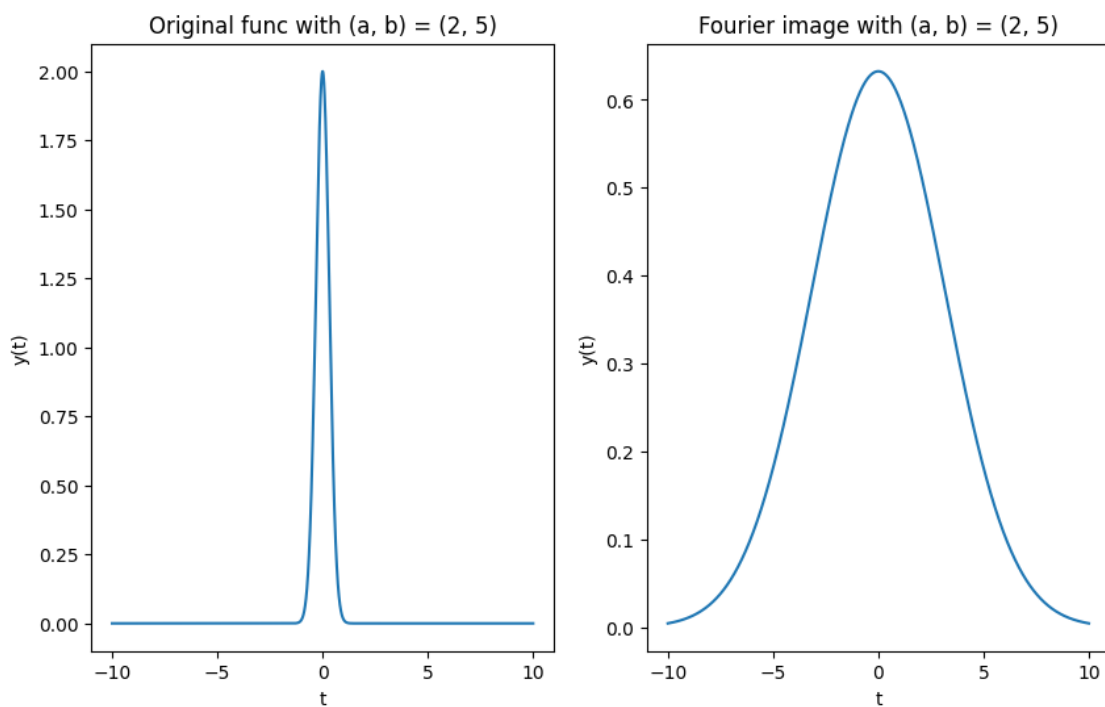


Рисунок 12 — График и образ функции Гаусса

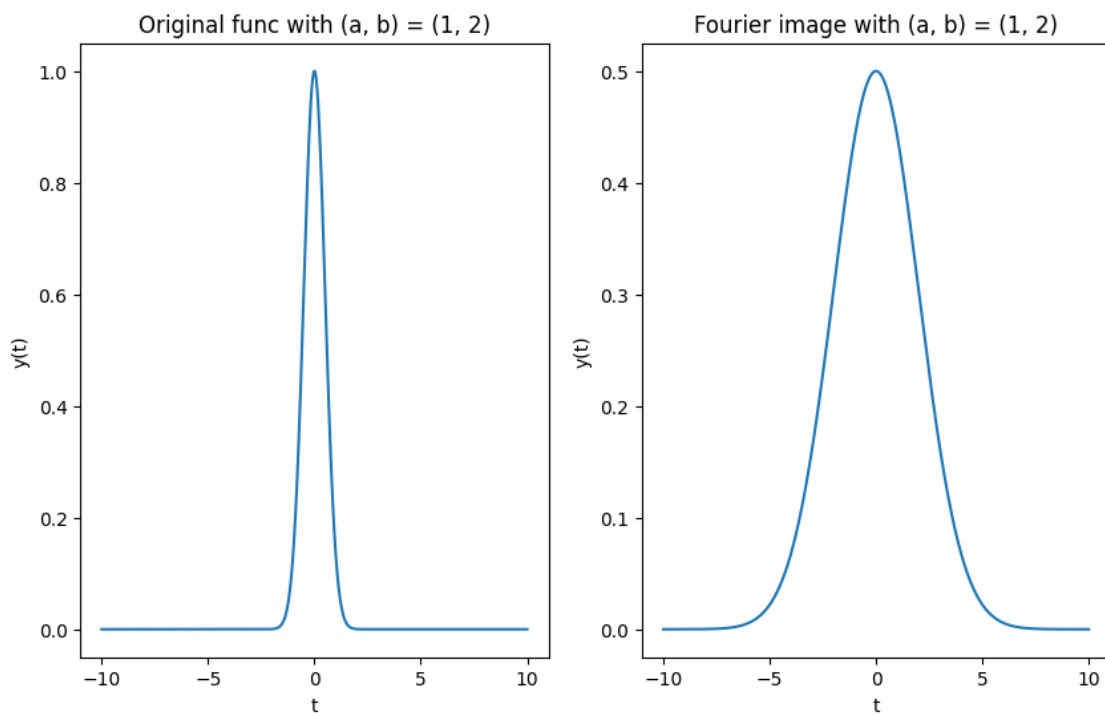


Рисунок 13 — График и образ функции Гаусса

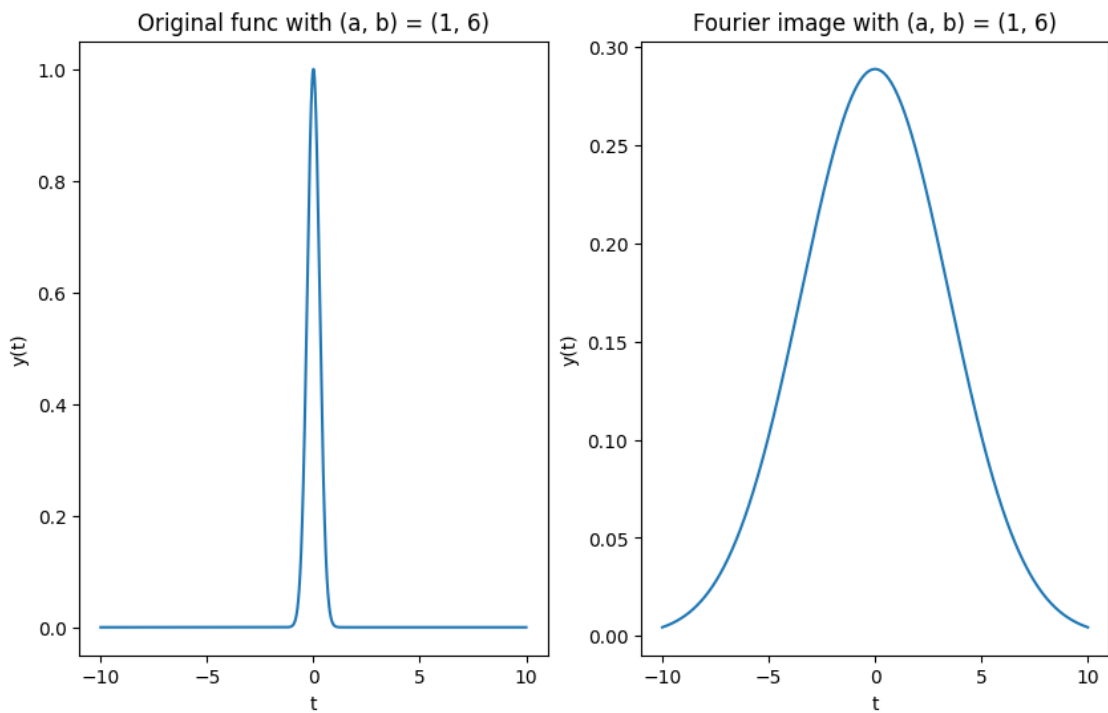


Рисунок 14 — График и образ функции Гаусса

2.4.3 Равенство Парсеваля

Получил delta: 0.00000, странно, что оба интеграла зануляются при любых a, b , поэтому их разность всегда нулевая...ещё предстоит разобраться.

2.4.4 Анализ ситуации

Влияние параметров a и b на функцию Гаусса можно понять по формулам образа и исходной функции. Параметр a отвечает за амплитуду функции, а параметр b за ширину исходной функции. то есть, при увеличении a амплитуда функции увеличивается, при увеличении b функция становится уже, это можно заметить, исходя из графиков выше.

Также по графикам можно *заметить*, что при некотором значении параметра a и b - функция и образ будут равны. Можно вывести эти параметры исходя из равенства двух функций, а можно методом пристального взгляда на такое равенство увидеть, что сразу $a = 1$, а потом $b = 1/2$ аккуратно причёсывает функции:

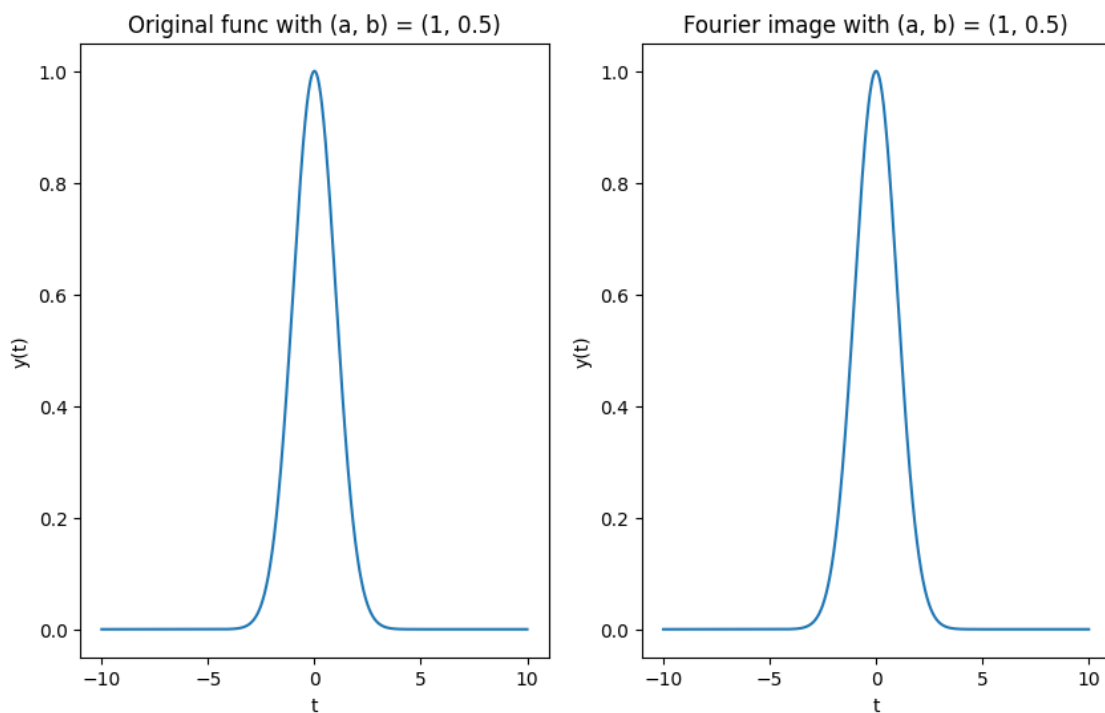


Рисунок 15 — Равенство образа и функции функции Гаусса

2.5 Двустороннее затухание

$$f(t) = ae^{-b|t|}$$

2.5.1 Фурье-Образ

$$\begin{aligned} \hat{f}_5(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-b|t|} \cdot e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{bt} e^{-i\omega t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-bt} e^{-i\omega t} dt \right] = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{t(b-i\omega)} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t(b+i\omega)} dt \right] = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{t(b-i\omega)}}{b-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-t(b+i\omega)}}{b+i\omega} \Big|_0^{+\infty} \right] = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right) = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(\omega^2+b^2)} \end{aligned}$$

2.5.2 Графики функции и Фурье-образа

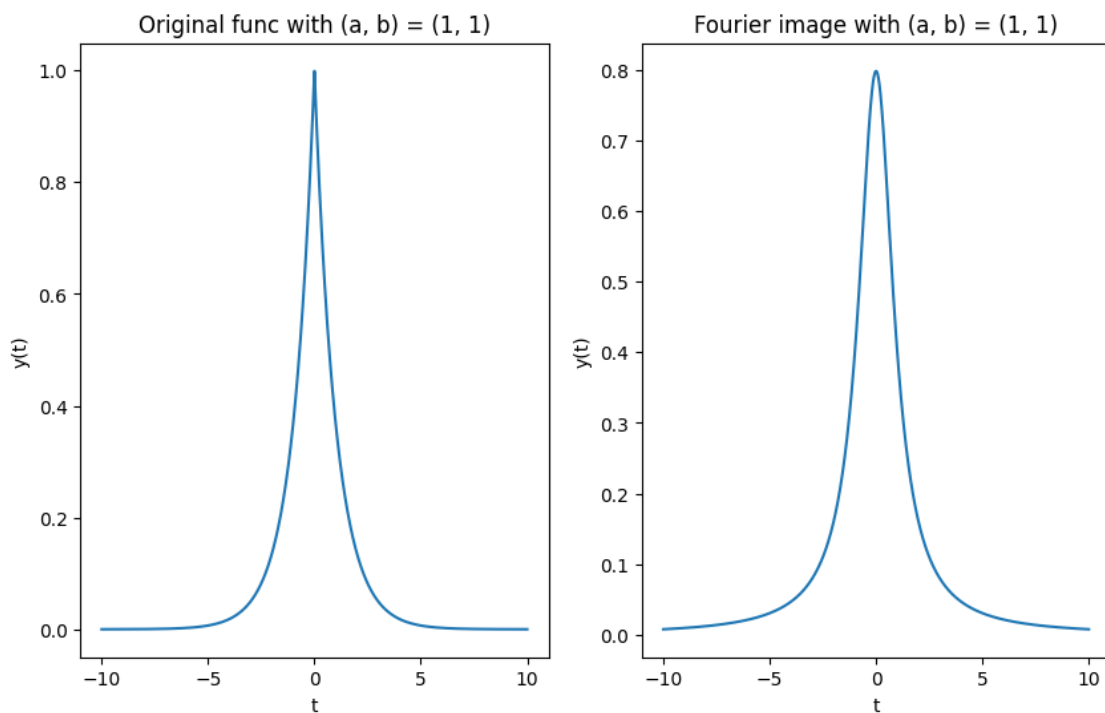


Рисунок 16 — График и образ двустороннего затухания

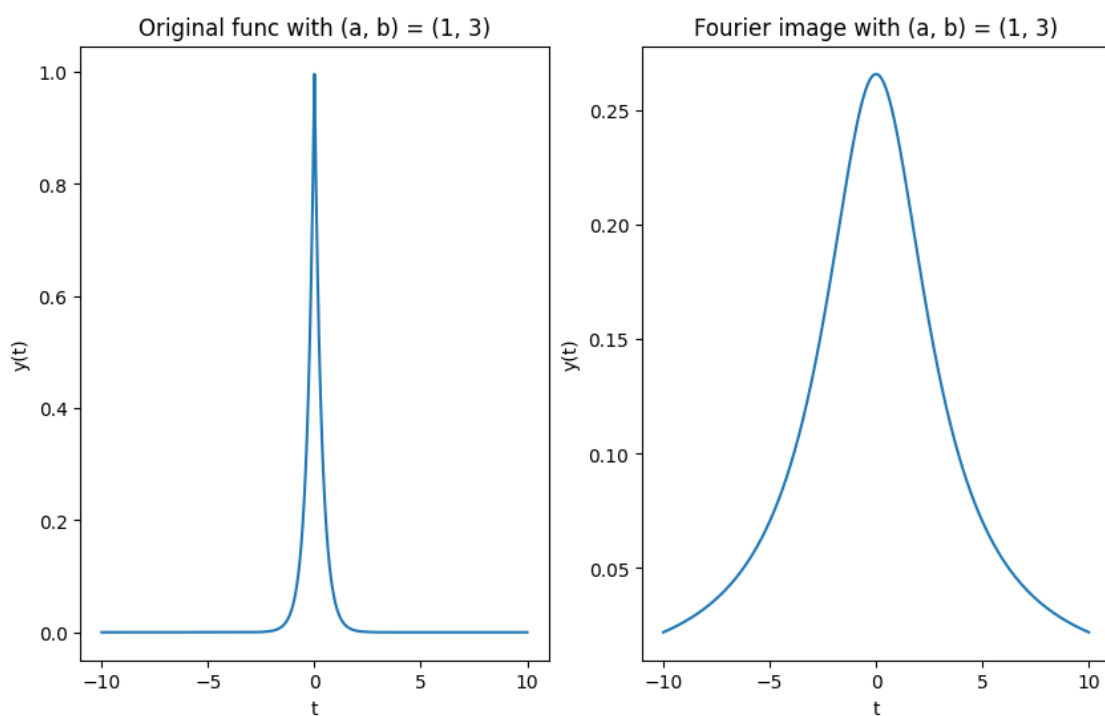


Рисунок 17 — График и образ двустороннего затухания

2.5.3 Равенство Парсеваля

Получил delta: 0.00000, а здесь уже только первый интеграл всегда равен нулю(надо разобраться), а второй - слишком малого порядка, поэтому их разность нулевая.

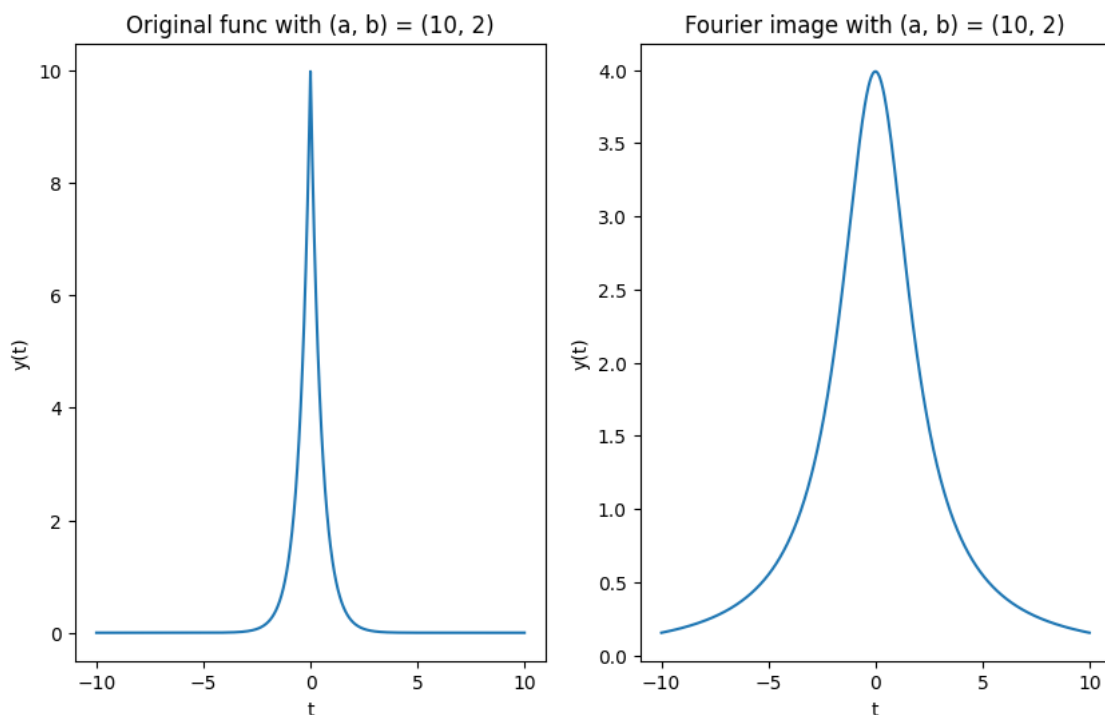


Рисунок 18 — График и образ двустороннего затухания

2.5.4 Анализ ситуации

Здесь влияние параметров a и b на графики функции возможно не заметно с первого взгляда, но если посмотреть на формулы исходной функции и образа, то всё станет понятнее:

a отвечает за амплитуду функции, b - за скорость затухания. При увеличении a - амплитуда функции увеличивается, а при увеличении b функция затухает быстрее.

3 ЗАДАНИЕ 2. КОМПЛЕКСНОЕ

NB. - В этом задании мы используем унитарное преобразование Фурье к обычной частоте ν , оно будет выглядеть следующим образом:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$$
$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

Выберем треугольную функцию и зафиксируем для неё a, b . После рассмотрим её сдвиг $g(t) = f(t + c)$.

3.1 Фурье-образ

Воспользуемся хитростью, а именно свойством Фурье-оператора:

$$\mathbb{F}\{f(t + \tau)\} = e^{i\omega\tau} \mathbb{F}\{f(t)\}$$

, где τ - наш сдвиг.

В нашем случае его можно трактовать как *поворот* образа в комплексной плоскости... Поэтому образ и приобретёт комплексную гармонику.

Образ Фурье будет выглядеть так:

$$\hat{g}(\nu) = \frac{ab}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}^2\left(\frac{b\nu}{2}\right) e^{i\omega\tau}$$

3.2 Графики функции, компонент $f(t)$, а также её модуля

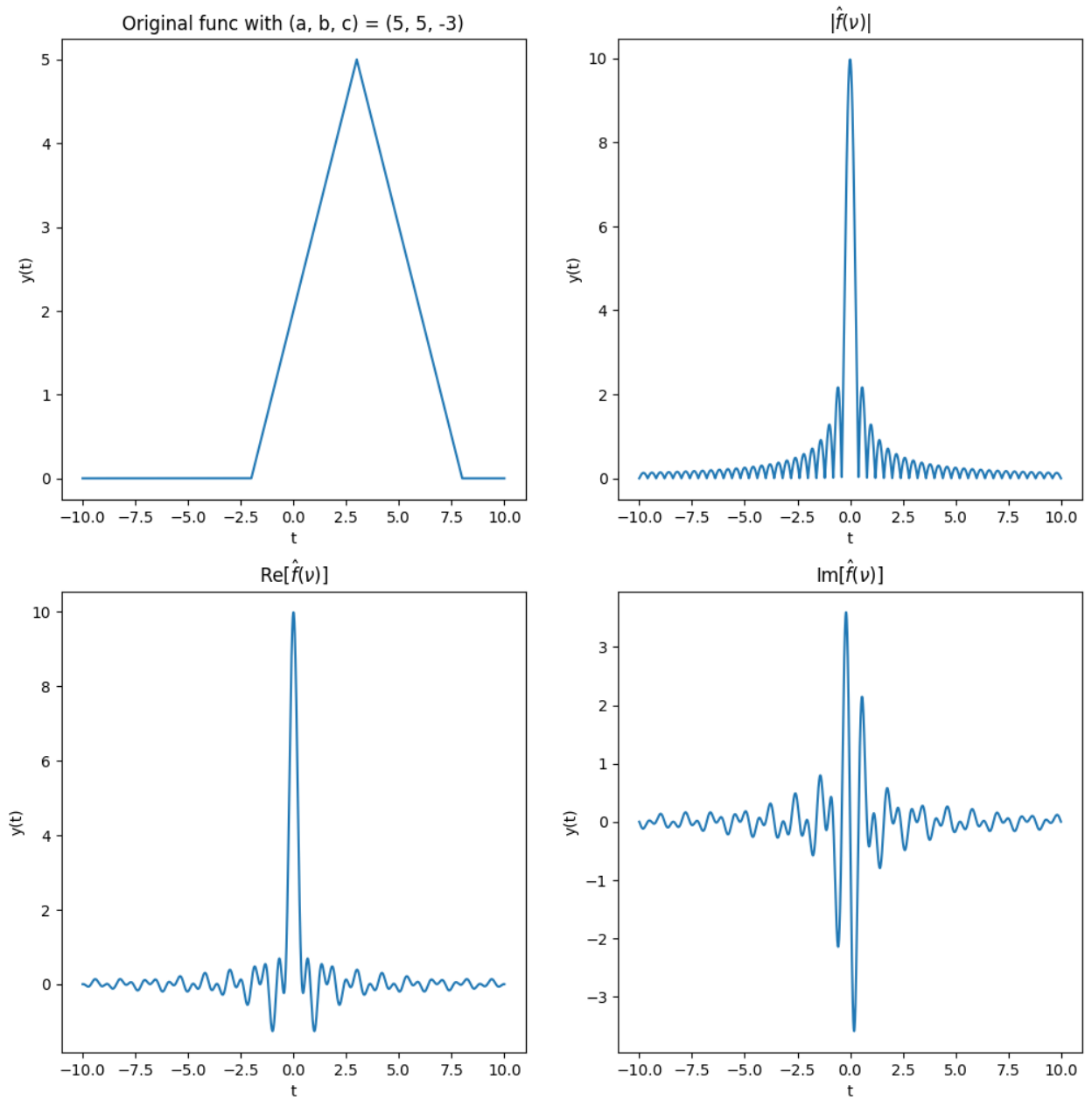


Рисунок 19 — Общий план для комплексной функции

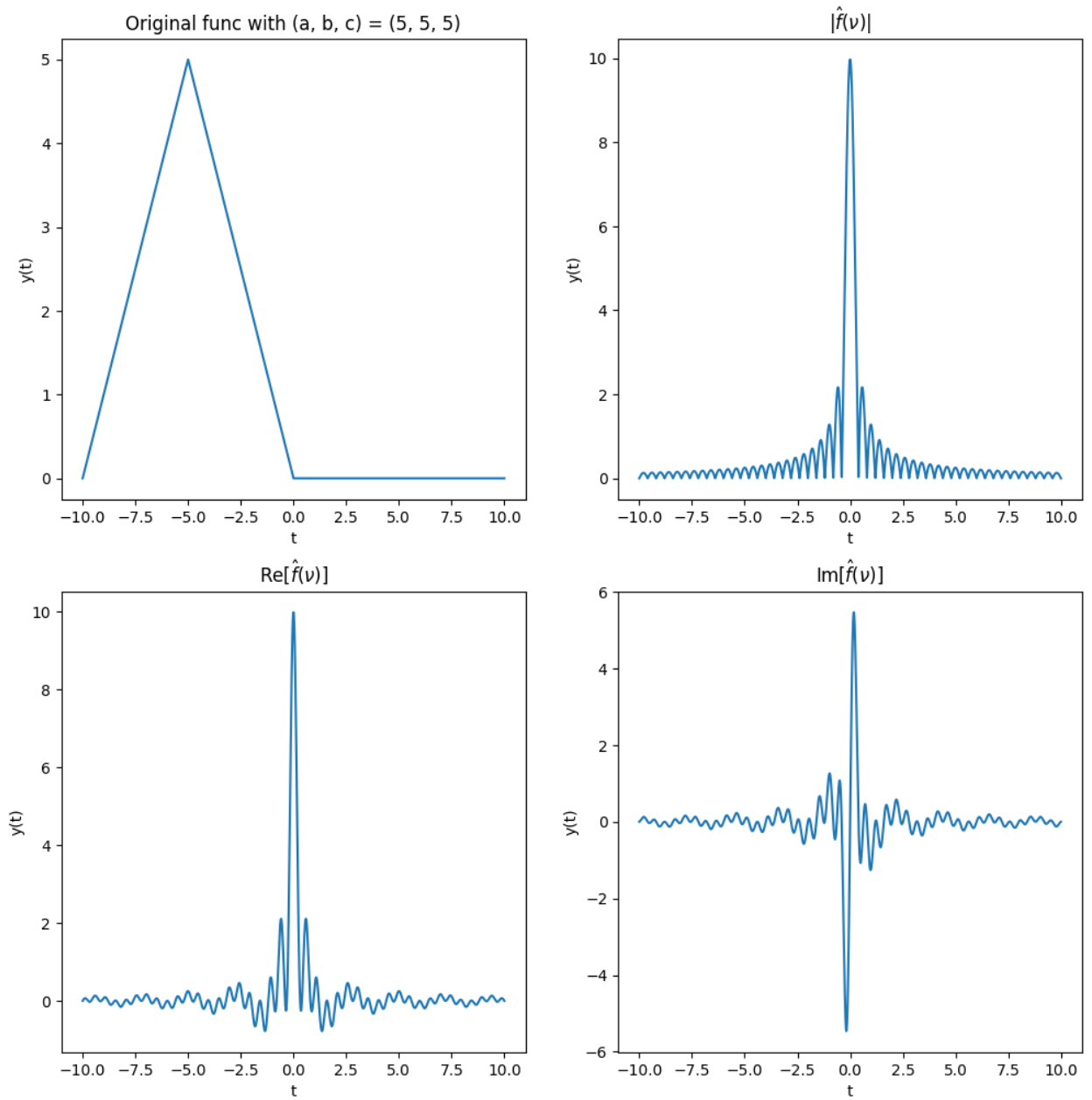


Рисунок 20 — Общий план для комплексной функции

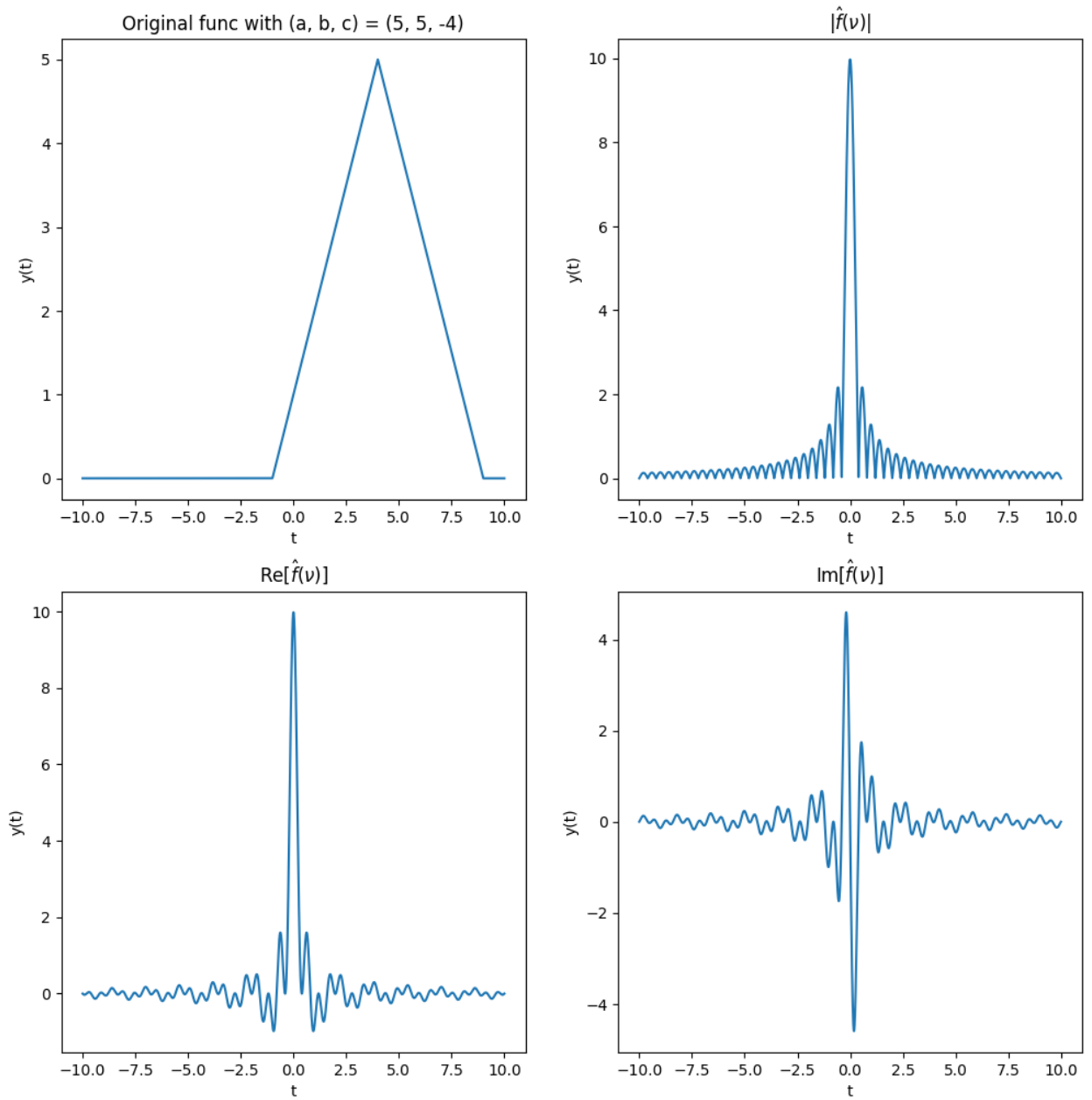


Рисунок 21 — Общий план для комплексной функции

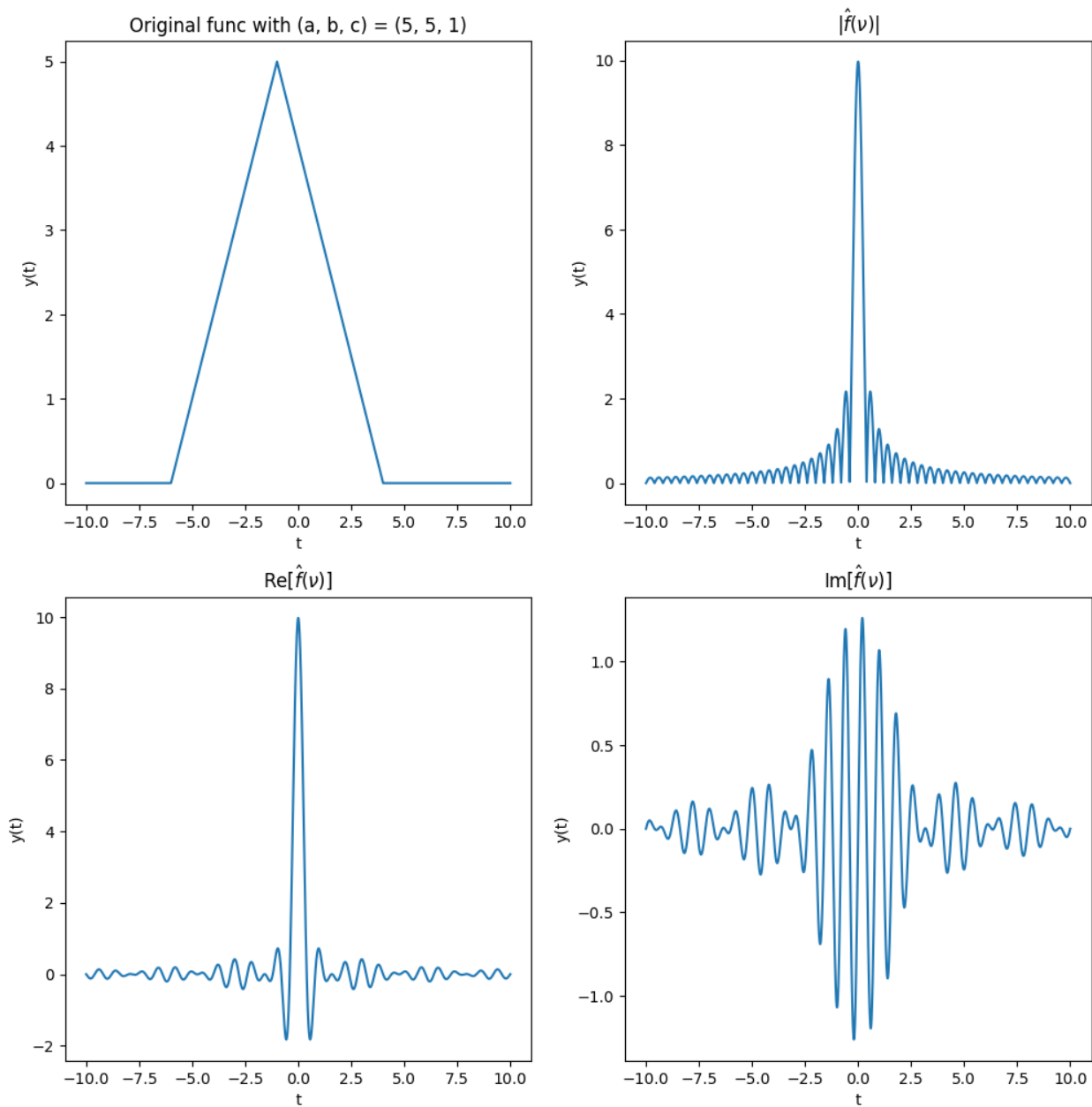


Рисунок 22 — Общий план для комплексной функции

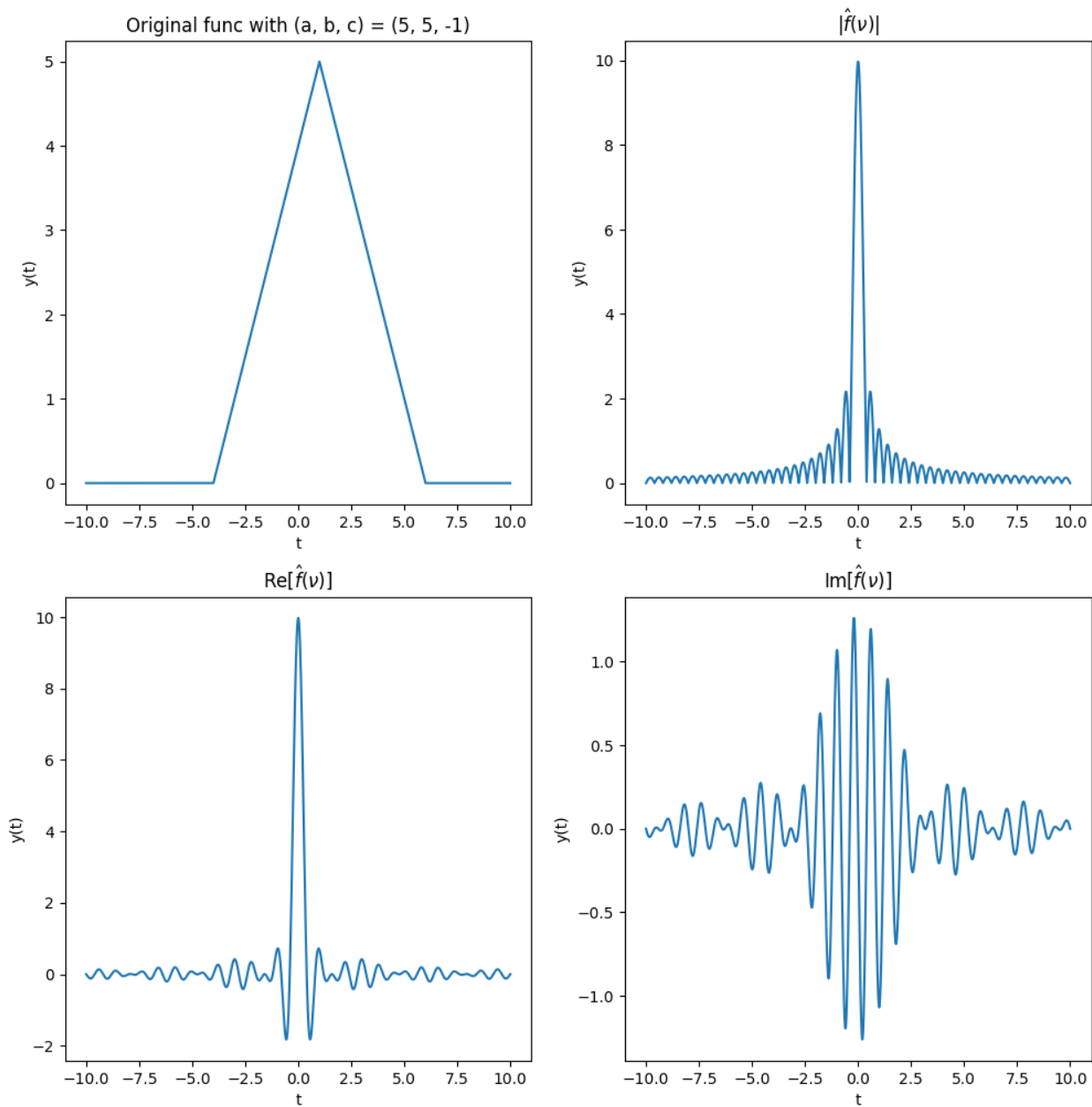


Рисунок 23 — Общий план для комплексной функции

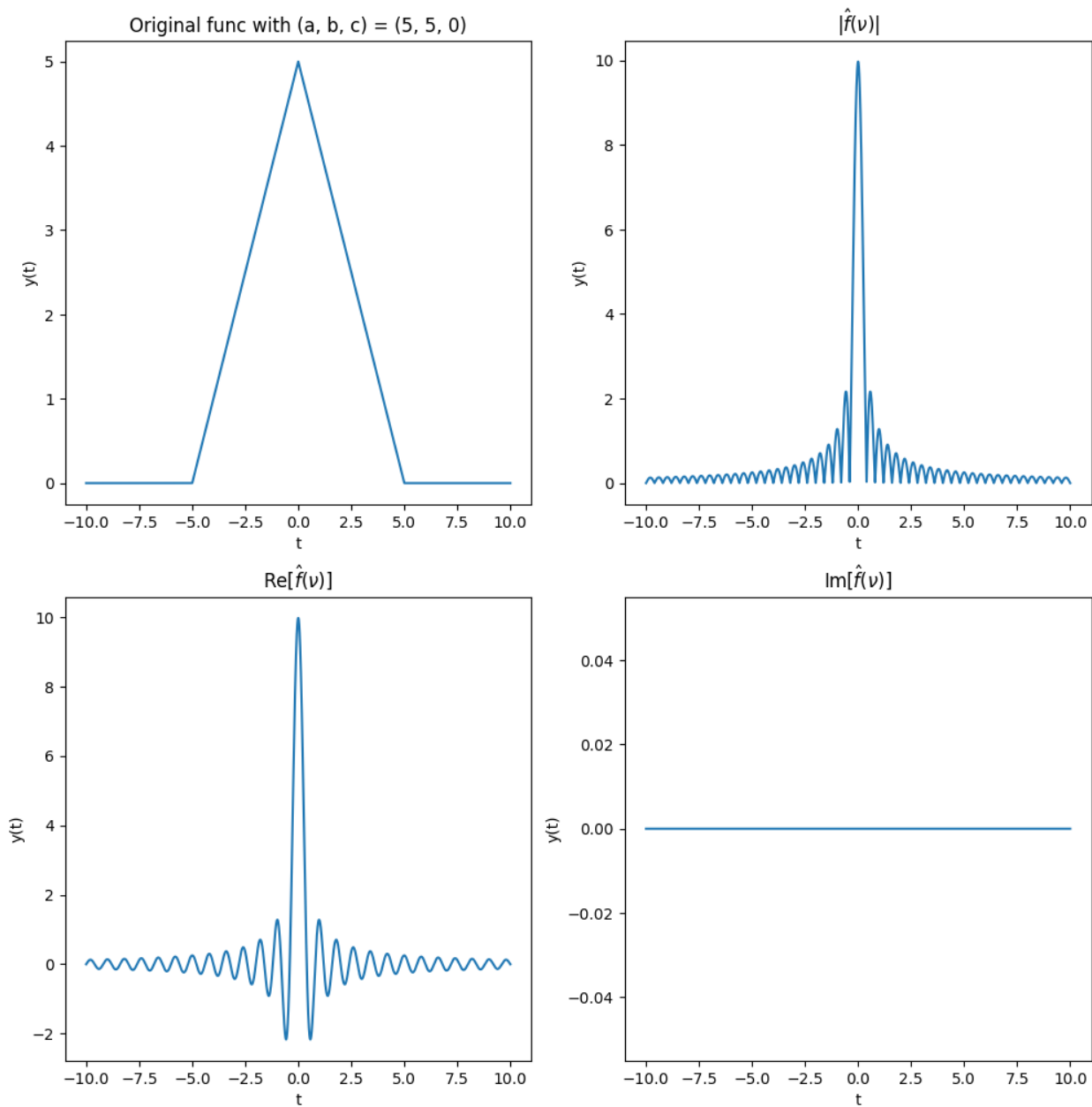


Рисунок 24 — Общий план для комплексной функции

3.3 Анализ степени сдвига на функцию и Фурье-образ

Первое за что цепляется глаз - график модуля во всех случаях при фиксированных a, b остаётся одним и тем же, после - сдвиг вправо или влево влияет только на направление гармоник, по модулю они остаются такими же (вещественна и комплексная). Поэтому при увеличении c в какую-либо сторону заметна общая тенденция - обе гармоники сжимаются, но при этом график модуля по прежнему остаётся тем же.

Как бонус, проверили на последнем графике, что при $c = 0$ мы возвращаемся в задание номер один, потому что комплексная компонента зануляется.

3.4 Равенство Парсеваля

Получил δ : 0.00468, довольно неплохое приближение, очевидно, что оно останется таким же и для других коэффициентов сдвига, было проверено для $c = \{1, 5, -3\}$

4 ЗАДАНИЕ 3. МУЗЫКАЛЬНОЕ

4.1 Построить график ноты

С этого [гугл-диска](#) скачиваем два произвольных аккорда, мой выбор пал на 7-й. Также я перевёл их из mp3 в wav(онлайн конвертер), чтобы можно было их прочитать с помощью SciPy, или можно воспользоваться librosa и открыть сразу.

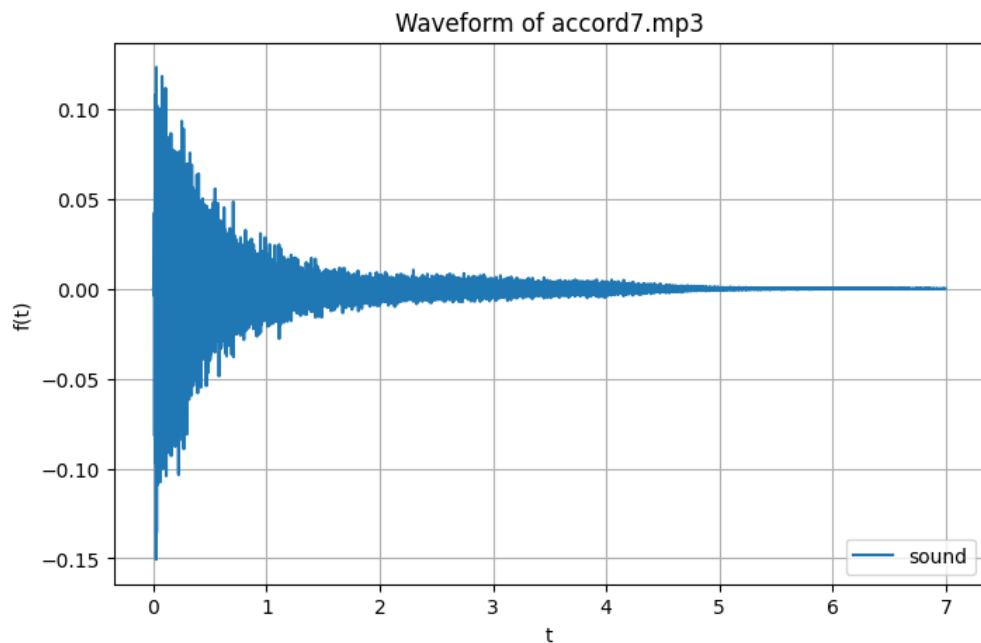


Рисунок 25 — График амплитуды от времени звука

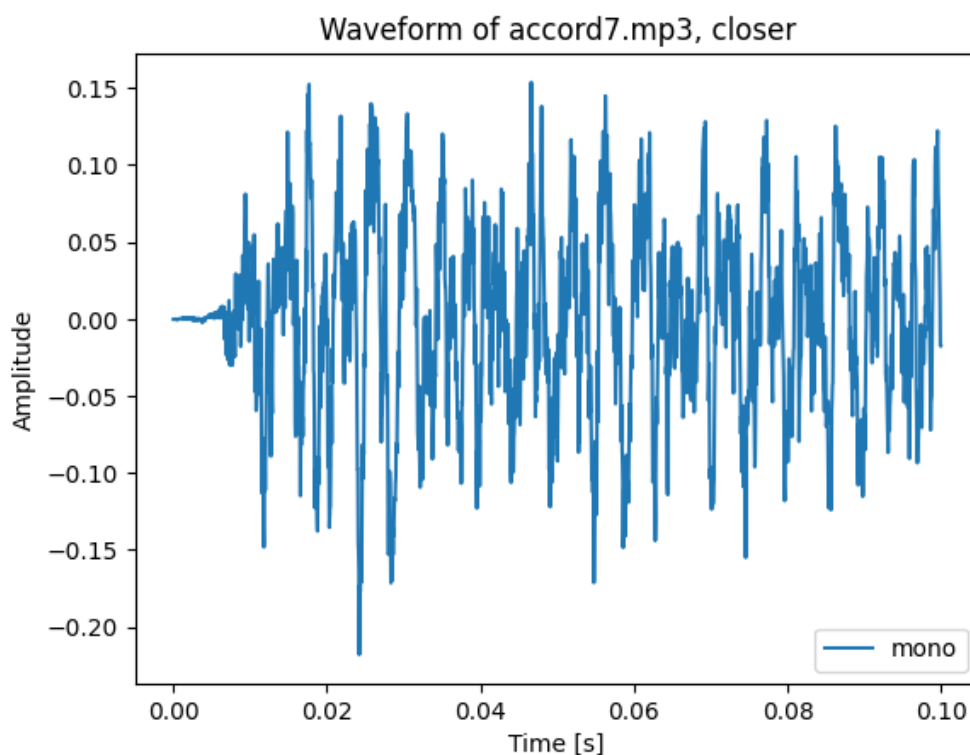


Рисунок 26 — График амплитуды от времени звука, приблизили

4.2 Найти численно Фурье-образ

Из-за того, что интегрирование через Scipy давало странные результаты, пришлось для этого задания ручками написать пару функций, но в итоге удалось всё красиво сделать, модуль образа выглядит корректно, а значит и обычный образ был посчитан правильно.

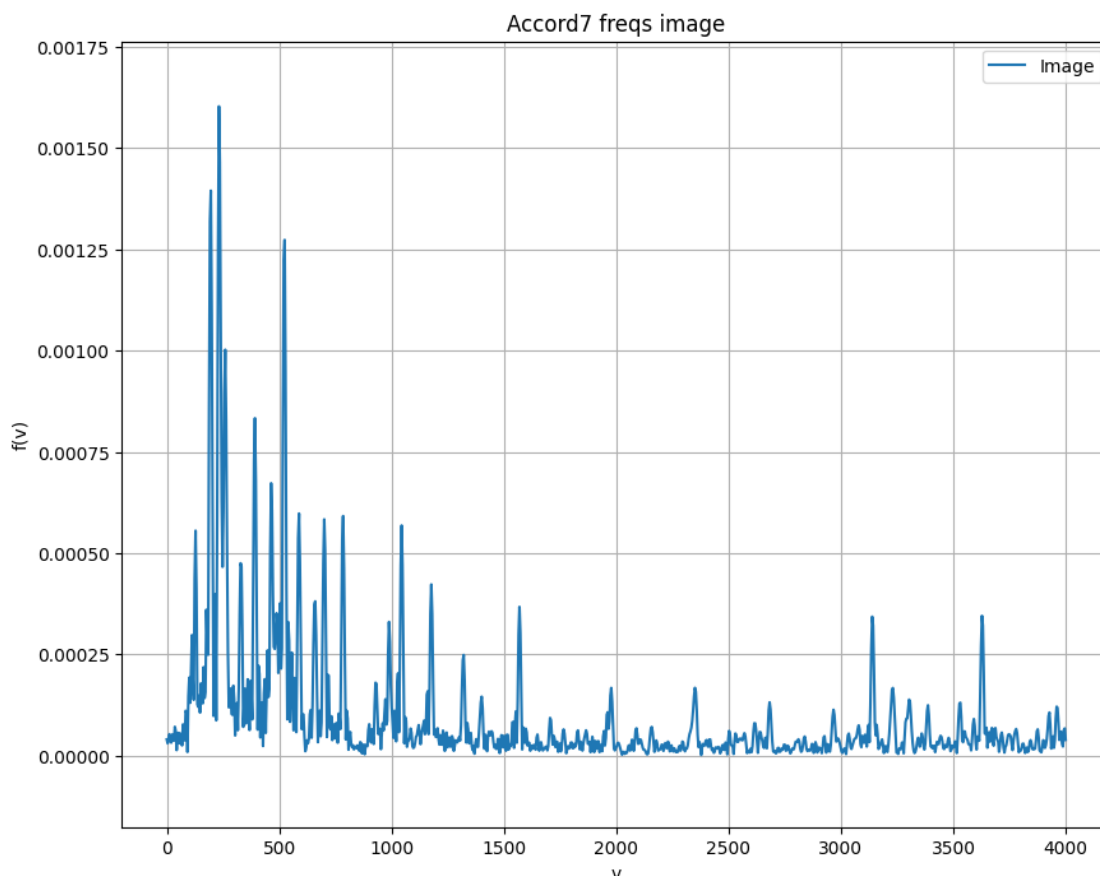


Рисунок 27 — Модуль Фурье-образа звука

4.3 Анализ Фурье-образа

В моём случае колаб показал, что максимальные амплитуды соответствуют следующим частотам $\in \{232, 236, 196, 192, 524, 228\} Hz$. Возьмём основные - 524, 236, 196. Найдём одну из многочисленных таблиц в интернете, **например**, и посмотрим на какие ноты это может быть похоже...

Таким частотам соответствуют ноты - C, A#, G. Интернет мне подсказал, что из таких нот можно составить аккорд Си минор (Cm) или Gm7(септим), первая версия мне знакома больше, поэтому выбираю её.