МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ
по дисциплине
”Частотные методы”

по теме:
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Студент:
Группа R3236 *Поляков А.А.*

Предподаватель:
к.т.н., доцент *Перегудин А.А.*

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И БИБЛИОТЕКИ

Онлайн версию кода в colab можно глянуть здесь. Учтите, что аккорды не загружены, поэтому конвертировать и загружать их придётся самостоятельно :(

1.1 Задание 1

Были использованы следующие библиотеки:

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
import scipy.integrate as spi
```

Кусочно-заданные функции реализовывал через функционал numpy, на примере первой функции прямоугольника:

```python
def f1(t):
    if abs(t) <= b:
        return a
    elif abs(t) > b:
        return 0

vec_f1 = np.vectorize(f1)
```

Пример кода для построения графиков в matplotlib, больше можно увидеть в онлайн-блокноте:

```python
def plot_original_and_image(x, f, f_image):
  figure, axis = plt.subplots(1, 2, figsize=(10, 6))

  axis[0].plot(x, [f(t) for t in x])
  axis[0].set_title(f"Original func with (a, b) = ({a}, {b})")
  axis[0].set_xlabel('t')
  axis[0].set_ylabel('y(t)')

  axis[1].plot(x, [f_image(t) for t in x])
  axis[1].set_title(f"Fourier image with (a, b) = ({a}, {b})")
  axis[1].set_xlabel('t')
  axis[1].set_ylabel('y(t)')

  plt.show()
```

Реализовывал проверку равенства Парсеваля через интегрирование на Scipy, которое не всегда хорошо работает, это стоит учитывать:

```
def check_parseval(f, f_image):
  INT1, err1 = spi.quad(lambda t: abs(f(t))**2, -10**7, 10**7)
  INT2, err2 = spi.quad(lambda omega: abs(f_image(omega))**2, -10**7,
   10**7)
  print(f"integrals: {INT1}  {INT2}")
  print(f"errors: {err1}  {err2}")
  print(f"delta: {abs(INT1-INT2):.5f}")

check_parseval(vec_f1, f1_image)
```

1.2 Задание 2

Проверка равенства Парсеваля осталась та же, как в первом задании.

Функция сдвинутого треугольника была реализована по аналогии с прошлым заданием:

```
def f6(t):
  T = t+c
  if abs(T) <= b:
    return a - abs(a*T/b)
  elif abs(T) > b:
    return 0

vec_f6 = np.vectorize(f6)

def f6_image(omega):
  return f2_image(omega) * np.exp(1j*omega*c)
```

1.3 Задание 3

Для чтения звуковой волны с файла .mp3 с помощью библиотеки librosa:

```
data, sample_rate = librosa.load('accord7.mp3')
sound_from_time = np.vectorize(lambda t: data[int(t * sample_rate)])
# remove some time to aboid problem with indexing
length = len(data) / sample_rate - 0.005
print(length)
```

Для построения графика волны выше:

```python
def plot_sound(wave, time, caption = '', ):
    #              ,
    t = np.linspace(0, time - 2, 10000)
    plt.figure(figsize=(8, 5))

    plt.plot(t, wave(t))
    plt.xlabel('t')
    plt.ylabel('f(t)')
    plt.legend(['sound'], loc='lower right')
    plt.title(caption)
    plt.grid()

plot_sound(sound_from_time, length, caption='Waveform of accord7.mp3',)
```

Дополнительные функции для численного интегрирования ”ручками”образа Фурье для волны:

```python
def dot_prod(f, g, a, b):
    x = np.linspace(a, b, 1000)
    dx = x[1] - x[0]
    return np.dot(f(x), g(x)) * dx

def wave_fourier_image(func, a, b):
    image = lambda v: dot_prod(func, lambda t: np.e ** (-2 * np.pi * 1j
    * v * t), a, b)
    return np.vectorize(image)

# TRANSFORM
wave_image = wave_fourier_image(sound_from_time, 0, 0.09)
wave_image_abs = lambda t: abs(wave_image(t))
plot_wave_image(wave_image_abs, 0, 4000, caption='Accord7 freqs image')
```

2 ЗАДАНИЕ 1. ВЕЩЕСТВЕННОЕ

NB. - В этом задании мы используем унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω, оно будет выглядеть следующим образом:

– Исходная функция

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

– Фурье-образ

$$c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Теперь рассмотрим следующие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

2.1 Прямоугольная функция

$$f(t) = \begin{cases} a, |t| \leq b, \\ 0, |t| > b \end{cases}$$

2.1.1 Фурье-Образ

$\hat{f}_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\dots) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{-b} 0dt + \int_{-b}^{b} ae^{-i\omega t} dt + \int_{b}^{+\infty} 0dt \right] = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{-i\omega\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t} \Big|_{-b}^{b} = \frac{2a}{-2i\omega\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega b} - e^{i\omega b}) = \frac{2ab}{2ib\omega\sqrt{2\pi}} (e^{i\omega b} - e^{-i\omega b}) = \frac{2ab}{b\omega\sqrt{2\pi}} sin(\omega b) = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}} \cdot sinc(\omega b)$

2.1.2 Графики функции и Фурье-образа

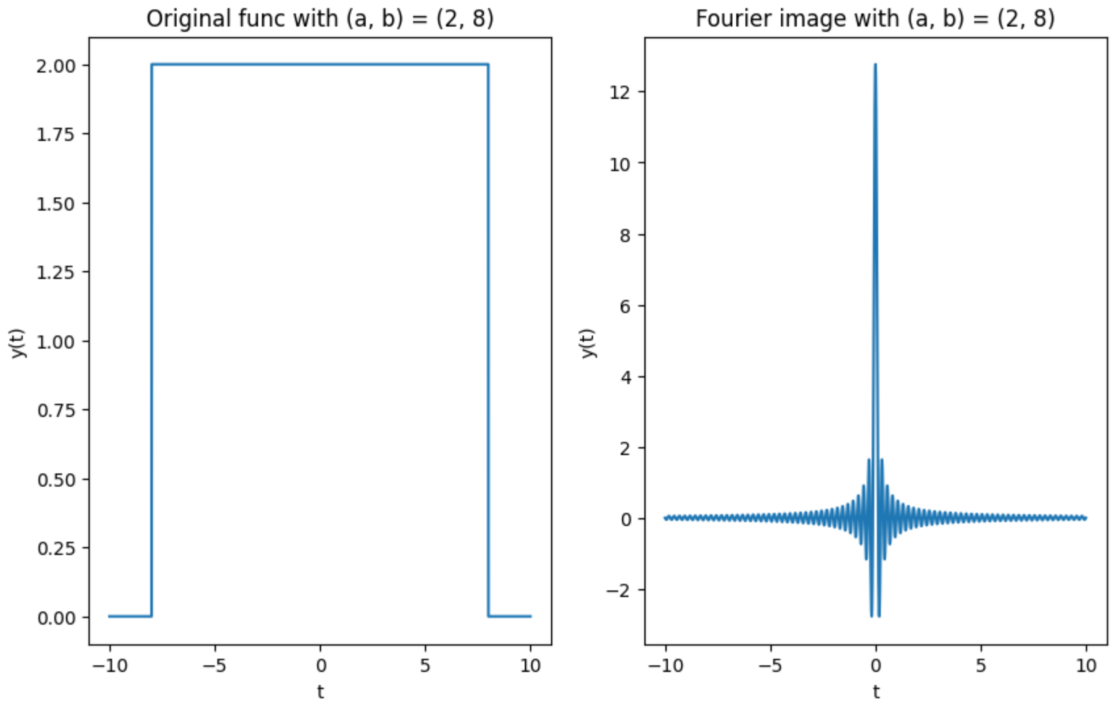

Рисунок 1 — График и образ прямоугольной функции

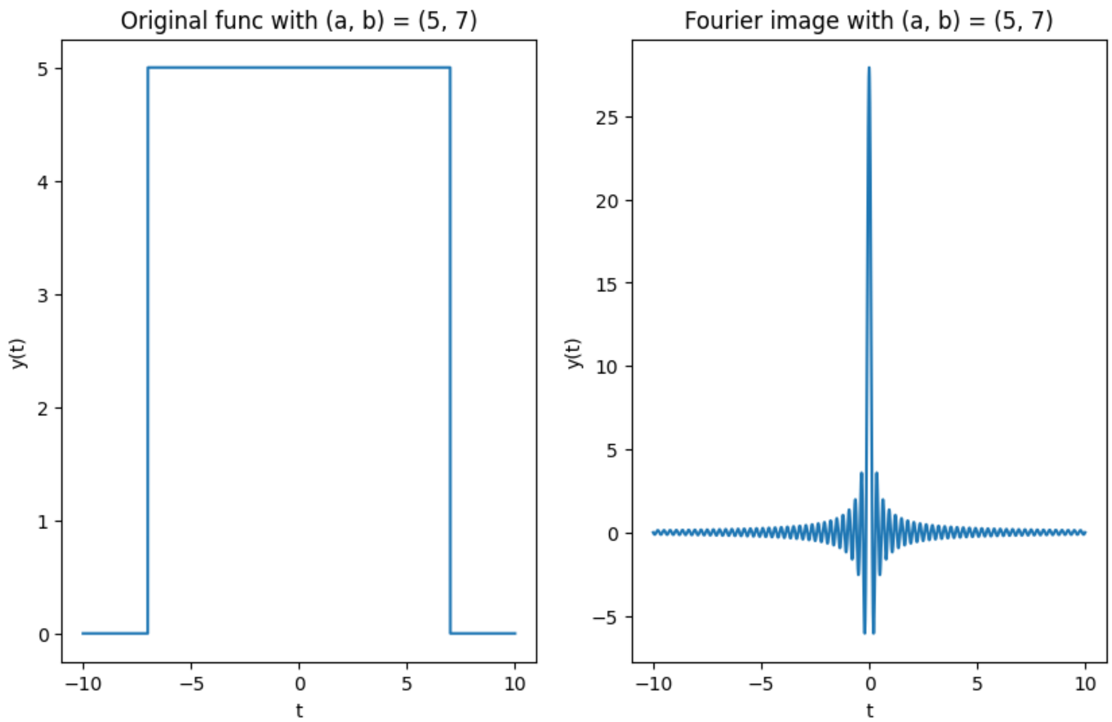

Рисунок 2 — График и образ прямоугольной функции

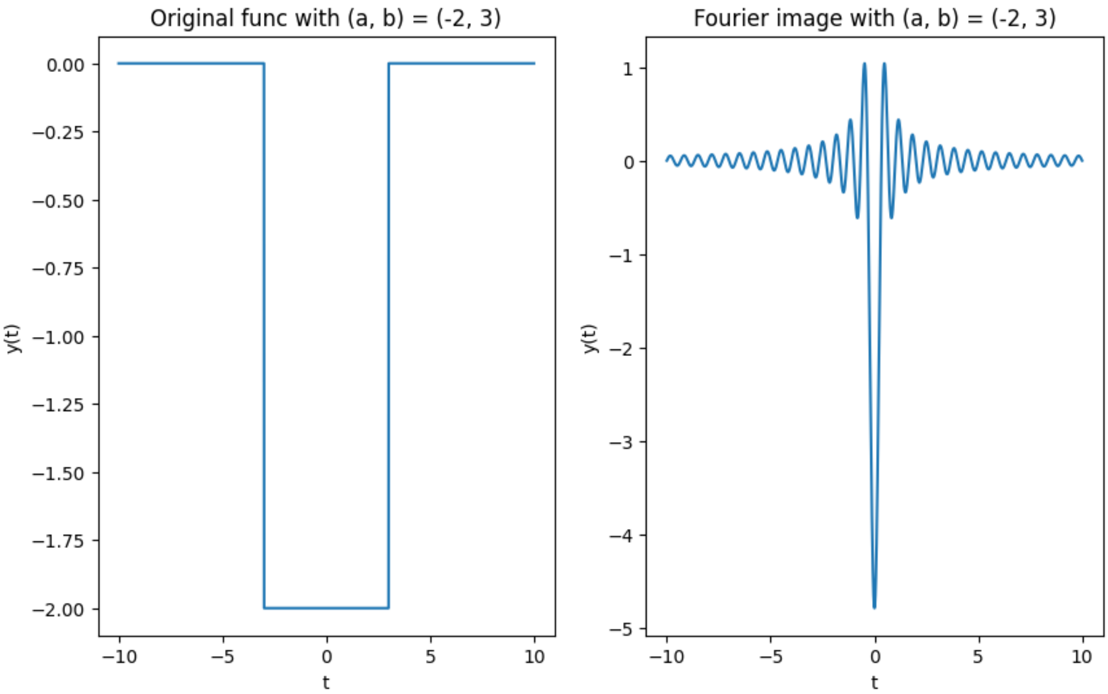

Рисунок 3 — График и образ прямоугольной функции

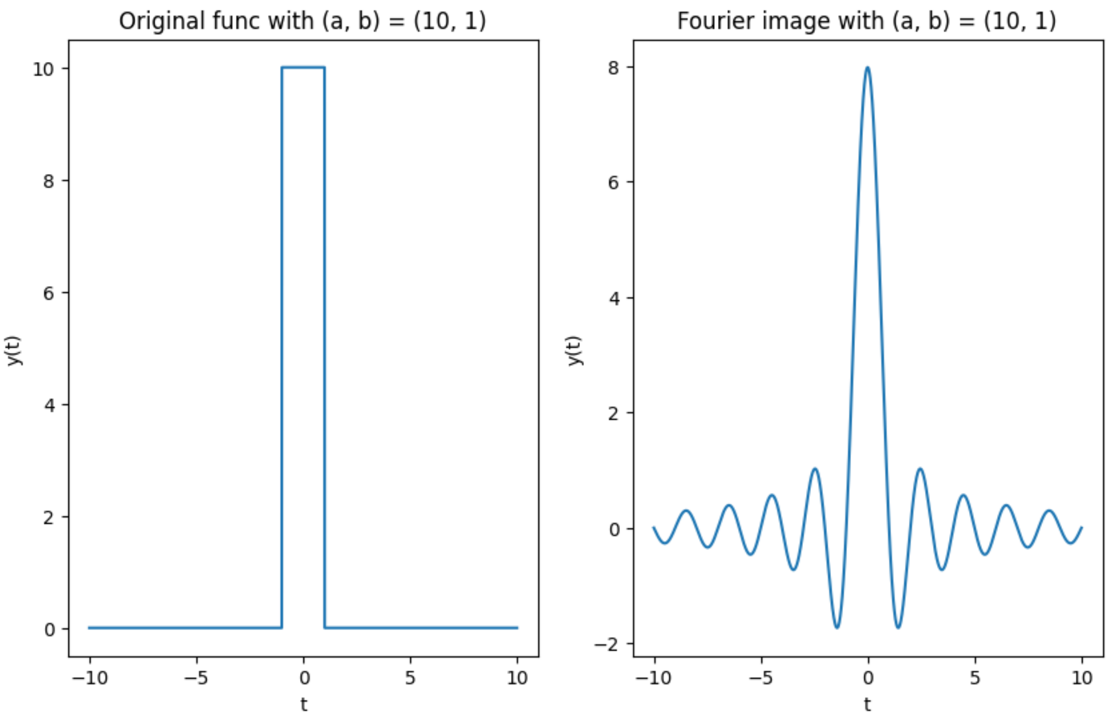

Рисунок 4 — График и образ прямоугольной функции

2.1.3 Равенство Парсеваля

Проверим равенство Парсеваля, в нашем случае оно будет выглядеть следующим образом

$$||f||_2 = ||\mathbb{F}f||_2$$

, где $\mathbb{F}$ - оператор Фурье, а норму вектора определим как корень из суммы квадратов всех его компонент.

Также вспомним про то, что применение оператора Фурье на функцию равняется её фурье образу, поэтому

$$\mathbb{F}f = \hat{f}$$

А значит можно записать равенство Парсеваля в более приближенной форме для численных приближений

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 dt$$
$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt - \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 dt \right) \to 0$$

Удобно отслеживать не равенство левой и правой части, а стремление их разности к нулю, так и поступим.

Полезно также знать, что оно имеет физическое значение: *равенство энергии сигнала во временной области и энергетического спектра в частотной области*. Правда, так как я не физик, то чёткого значения этих слов я не понимаю...

Второе полезное замечание: по неизвестной мне причине, привычное scipy интегрирование не очень хорошо работало на первую функцию, возможно из-за её бесконечной переодичности интеграл расходился, но когда вместо границ [-np.inf ; +np.inf] я поставил просто большие числа, например, $[-10^7; 10^7]$, то результаты уже стали человечнее...

Получил в нашем случае `delta: 0.01363`, подробности вычислений смотрите в используемых функциях или в онлайн-блокноте

2.1.4 Анализ ситуации

В данном случае заметная следующая тенденция - при увеличении ширины волны, частота Фурье образа взрастает, он становится "сжатым"...

Принцип неопределённости можно привязать здесь следующим образом - чем более концентрированной является функция $f(t)$, тем более разнесенным должно быть её преобразование Фурье $\hat{f}(\omega)$. В частности, такое свойство можно рассматривать как утверждение: если мы сжимаем функцию в t раз, то её преобразование Фурье растягивается на ω. **Невозможно** произвольно сконцентрировать как функцию, так и её преобразование Фурье.

Спасибо за это силе википедии, Принцип неопределённости, Преобразование Фурье

2.2 Треугольная функция

$$f(t) = \begin{cases} a - |at/b|, |t| \le b, \\ 0, |t| > b \end{cases}$$

2.2.1 Фурье-Образ

Внутри нам встрется до жути уже знакомые интегралы или интегрирование по частям, поэтому я их пропускал, чтобы слишком подробно не расписывать, также воспользуемся старым приёмом: разделяем на два интеграла, раскрывая модуль, решаем каждый по отдельности:

$$\hat{f}_2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a - |at/b|) \cdot e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{-b} 0 dt + \int_{-b}^{0} (a + \frac{at}{b}) e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{b} (a - \frac{at}{b}) e^{-i\omega t} dt + \int_{b}^{+\infty} 0 dt \right] =$$

Воспользуемся линейностью интегралов и перегруппируем слагаемые: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a(ib\omega - e^{ib\omega} + 1)}{b\omega^2} + \frac{a(-ib\omega - e^{-ib\omega} + 1)}{b\omega^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a(-e^{-ib\omega} - e^{ib\omega} + 2)}{b\omega^2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{4a \sin^2(b\omega/2)}{b\omega^2} \right) = \frac{4a \sin^2(b\omega/2)}{\sqrt{2\pi} b\omega^2} = \frac{ab}{\sqrt{2\pi}} sinc^2(\frac{b\omega}{2})$

2.2.2 Графики функции и Фурье-образа

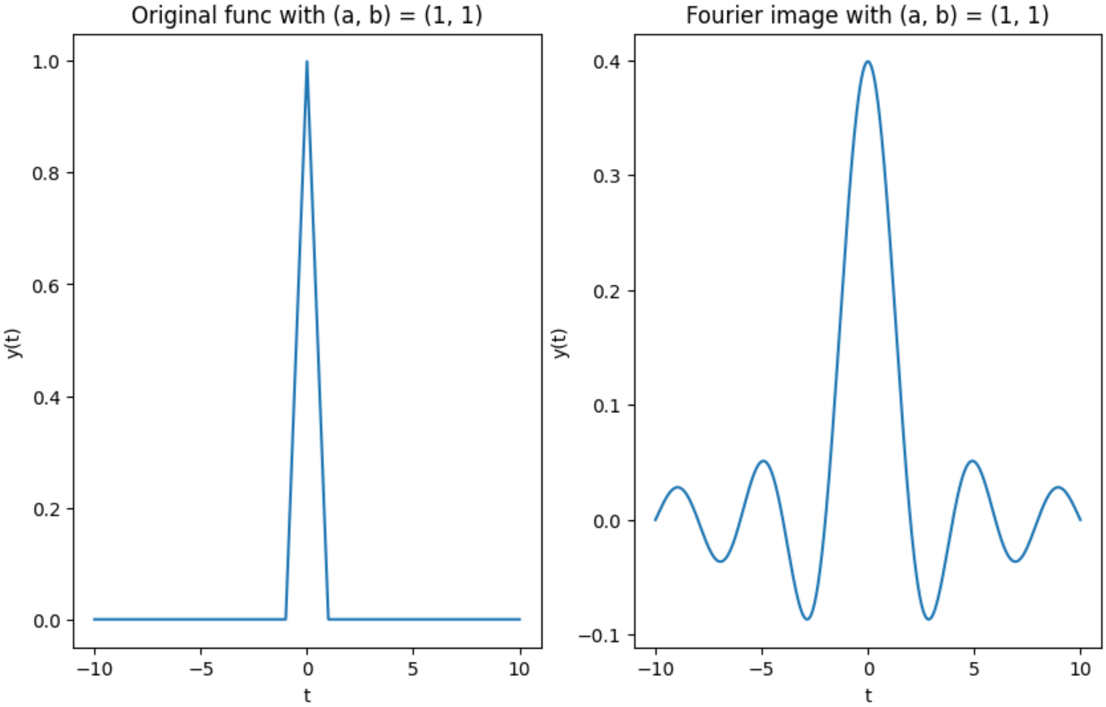

Рисунок 5 — График и образ треугольной функции

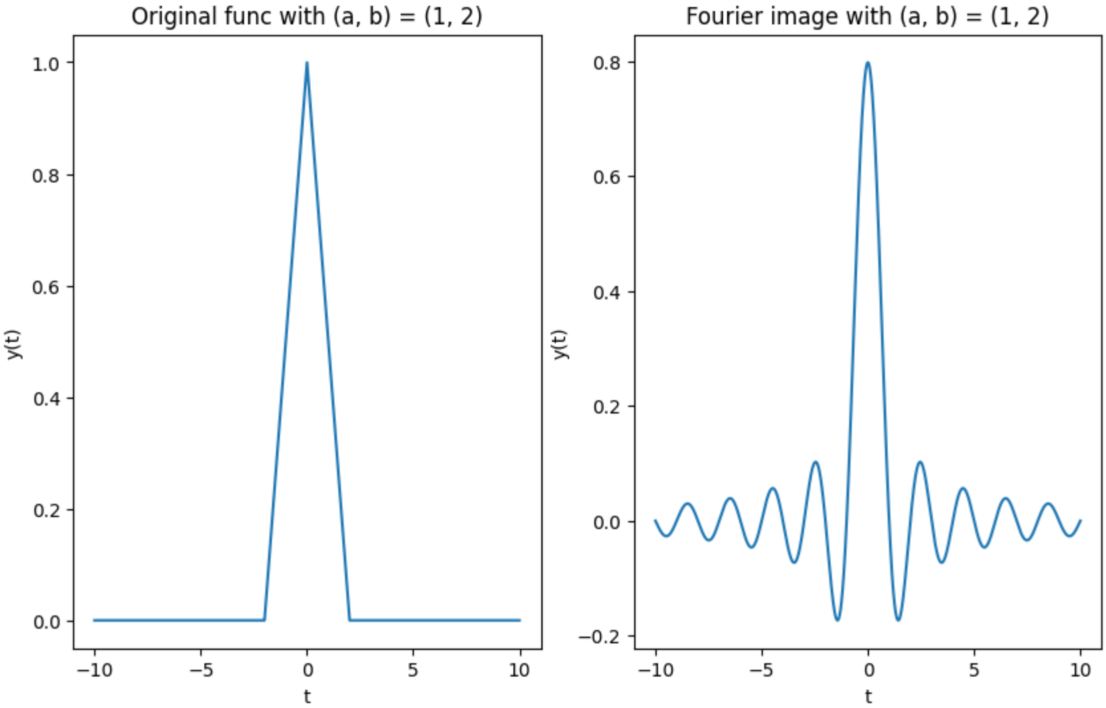

Рисунок 6 — График и образ треугольной функции

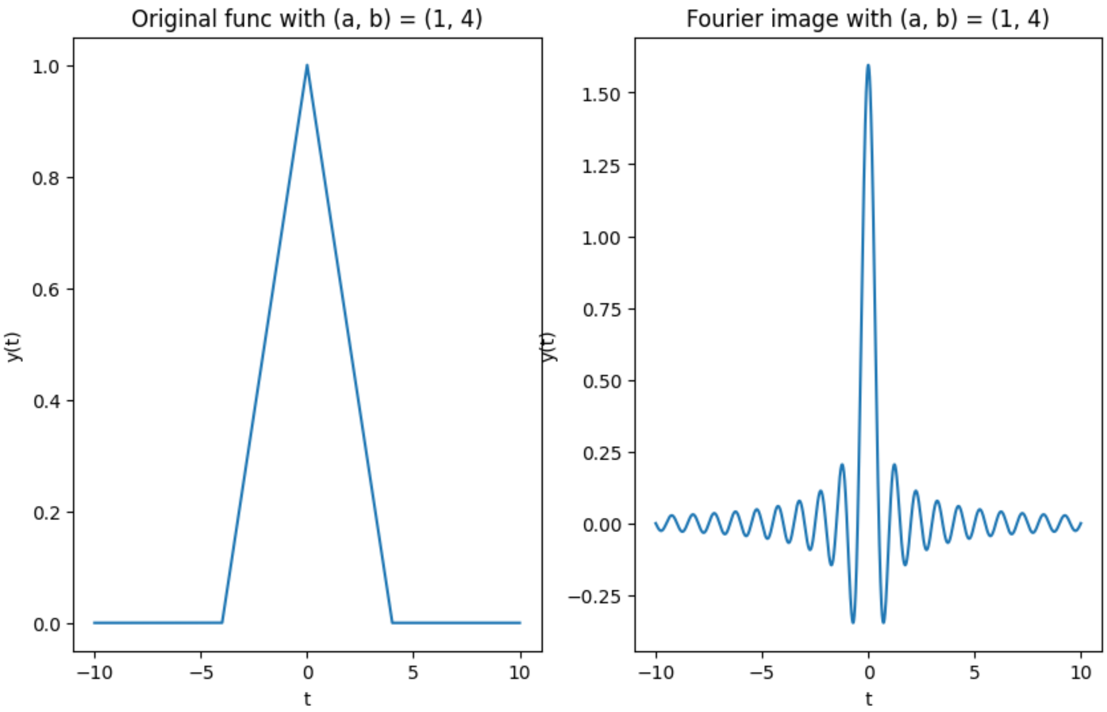

Рисунок 7 — График и образ треугольной функции

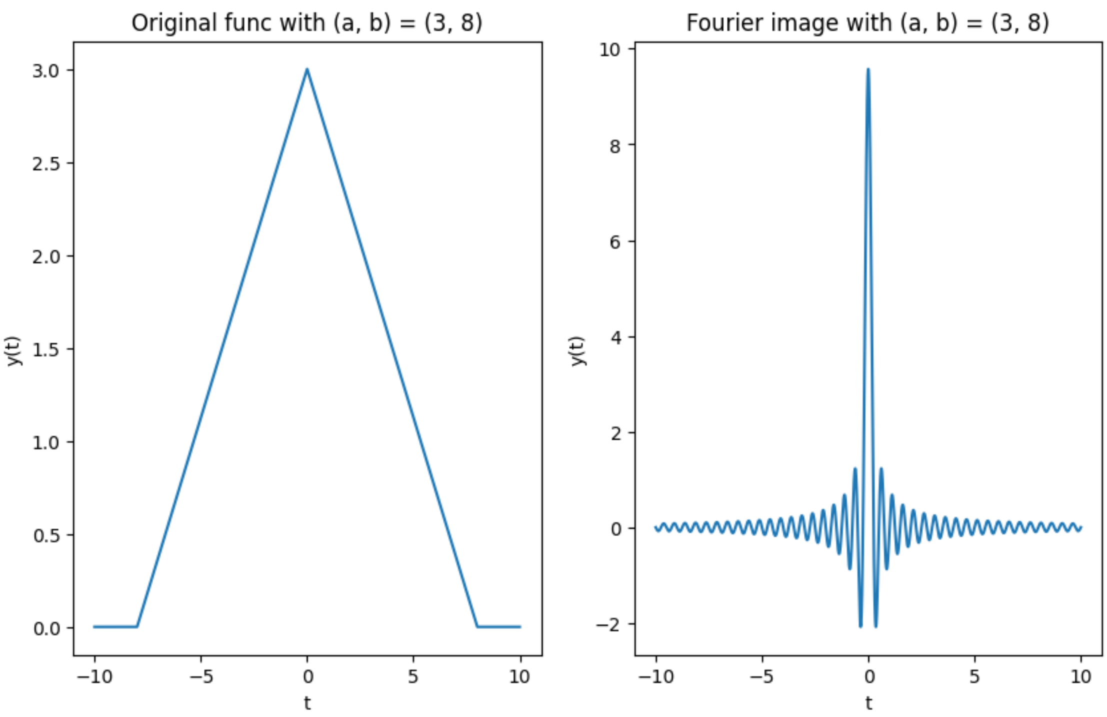

Рисунок 8 — График и образ треугольной функции

2.2.3 Равенство Парсеваля

Получил `delta: 0.22765`

2.2.4 Анализ ситуации

Влияние параметров a и b на исходную функцию и образ можно увидеть из того, как они заданы. Параметр a определяет высоту треугольной функции, a параметр — "ширину основания". В образе функции видно, что при увеличении параметра a амплитуда образа увеличивается, а при увеличении параметров a и b амплитуда увеличивается, при увеличении параметра b увеличивается частота.

Принцип неопределенности, как и в прошлом случае, можно увидеть как уменьшение ширины образа при увеличении основания треугольника.

2.3 Кардинальный синус

$$f(t) = asinc(bt)$$

2.3.1 Фурье-Образ

Из-за свойств оператора Фурье нетрудно понять, что Фурье-образ будет прямоугольник из первого пункта, но нужно точно понимать в каком виде он там будет представлен. Для этого всё же интеграл придётся взять, но без силы интернета я не смог справится, например, этот источник предлагает свести его к двойному и с помощью теоремы Фубини разрулить ситуацию...поверим ему и воспользуемся готовеньким:

$$\hat{f}_3(\omega) = \frac{a\pi}{2\sqrt{2\pi}}[sign(\omega + b) - sign(\omega - b)]$$

2.3.2 Графики функции и Фурье-образа

2.3.3 Равенство Парсеваля

Получил `delta: 0.01842`, что довольно неплохое приближение, учитывая, что равенство выполняется лишь на бесконечности

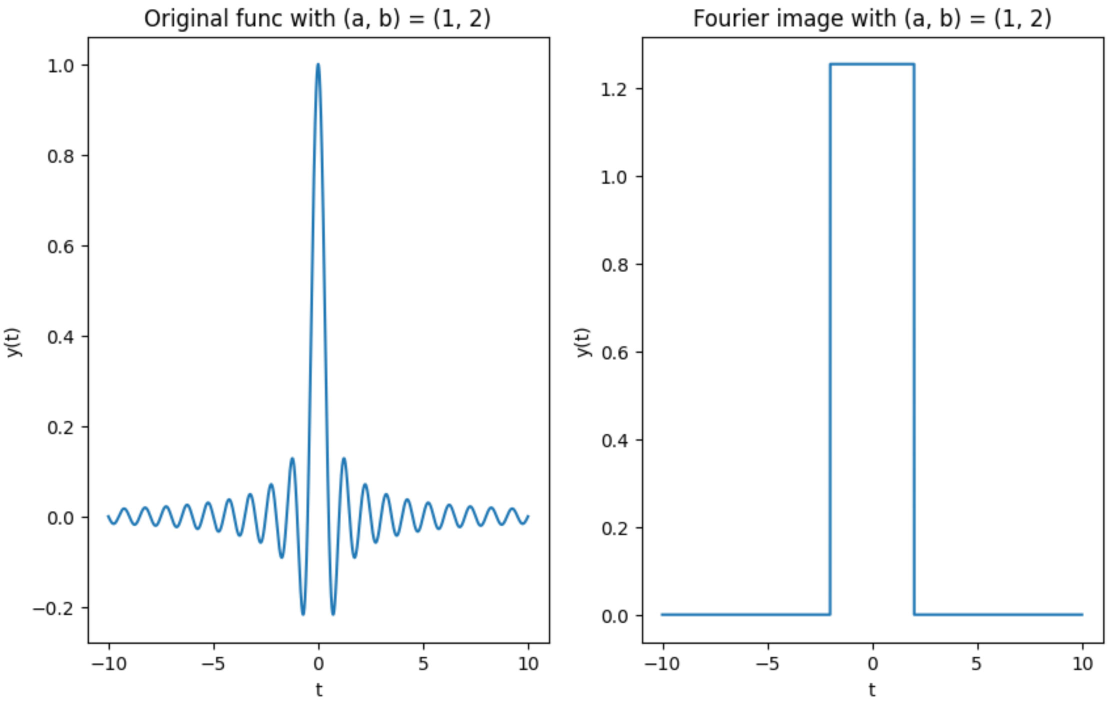

Рисунок 9 — График и образ кардинального синуса

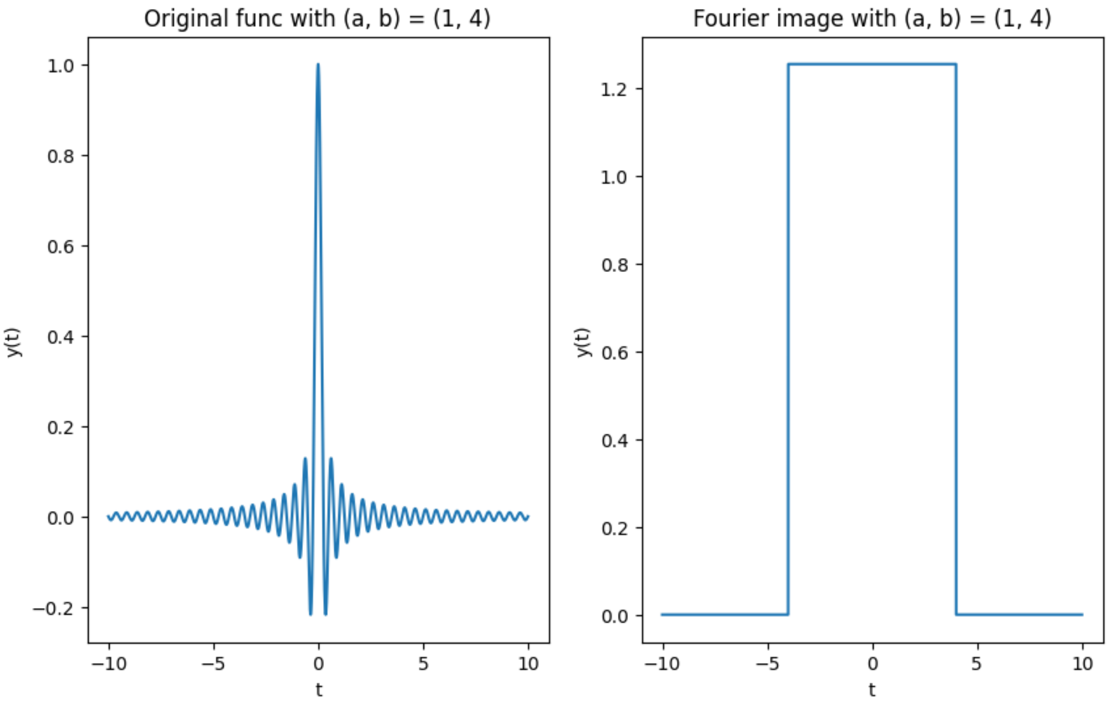

Рисунок 10 — График и образ кардинального синуса

2.3.4 Анализ ситуации

Получается, что параметр a отвечает за длину прямоугольника изображения, а значит и главный горбик функции, параметр b - за растяжение/сжа-

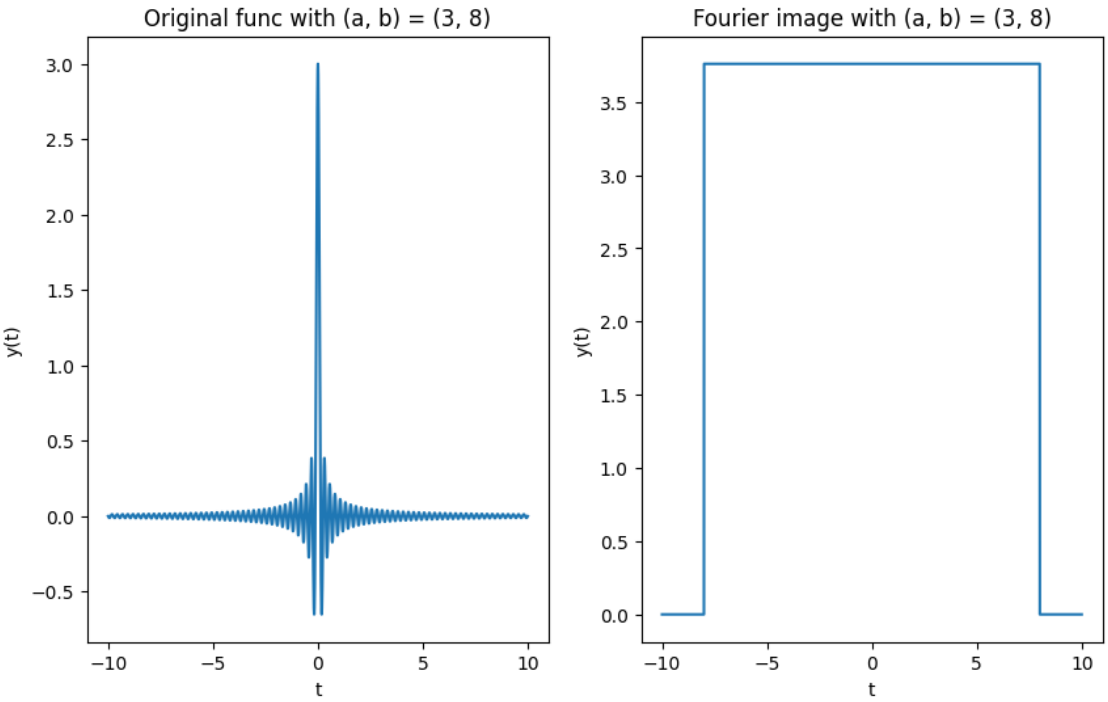

Рисунок 11 — График и образ кардинального синуса

тие прямоугольника, и следовательно, за сжатие/растяжение исходной функции...

Принцип неопределенности проявляется ровно также, как и в первой функции: при уменьшении ширины кардинального синуса увеличивается ширина его образа.

2.4 Функция Гаусса

$$f(t) = ae^{-bt^2}$$

2.4.1 Фурье-Образ

Воспользуемся известным фактом из википедии об Гауссовом интеграле:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(Ax^2+Bx+C)}dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}}e^{\frac{B^2}{4A}-C}$$

Тогда вычисления значительно упростятся...

$$\hat{f}_4(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bt^2}e^{-i\omega t} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(bt^2+i\omega t)}dx$$

, где $A = b$, $B = i\omega$, $C = 0$, тогда…

$$\hat{f}_4(\omega) = a\sqrt{\frac{\pi}{2\pi b}}e^{\frac{(i\omega)^2}{4b}} = \frac{a}{\sqrt{2b}}e^{-\frac{\omega^2}{4b}}$$

2.4.2 Графики функции и Фурье-образа

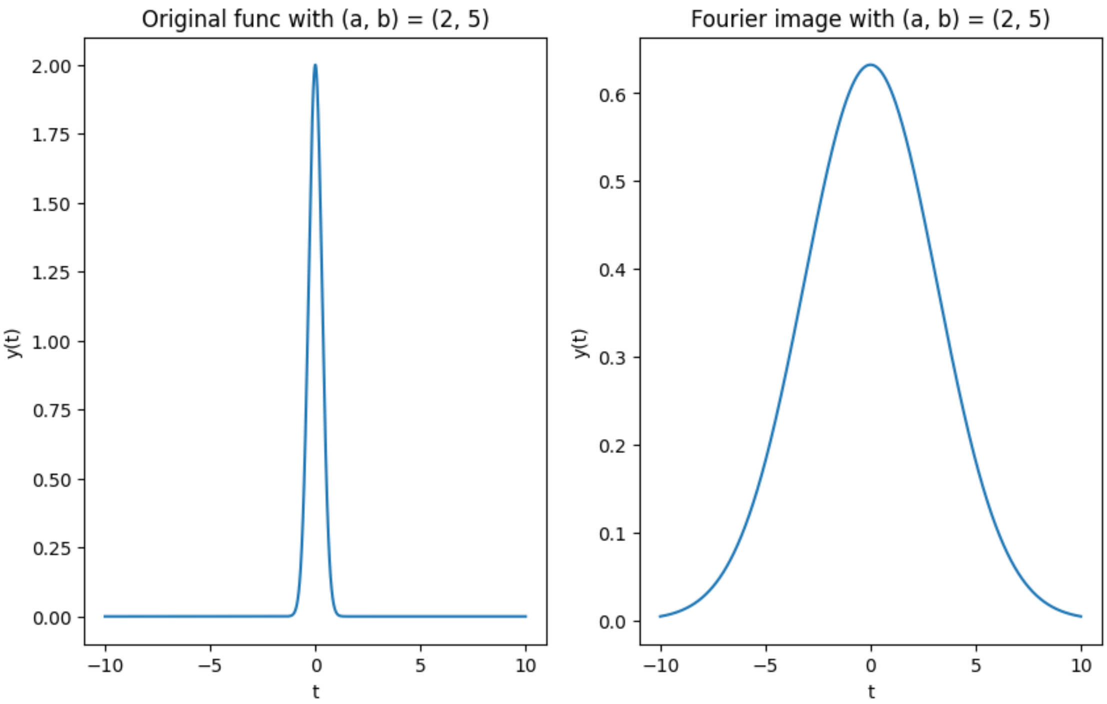

Рисунок 12 — График и образ функции Гаусса

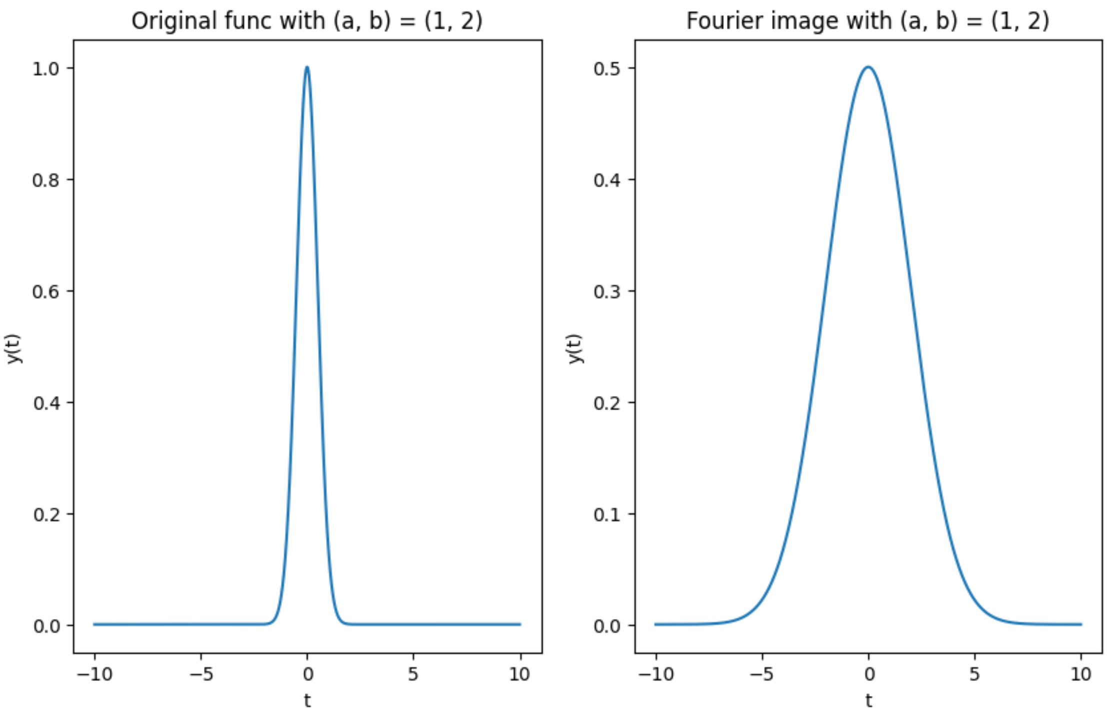

Рисунок 13 — График и образ функции Гаусса

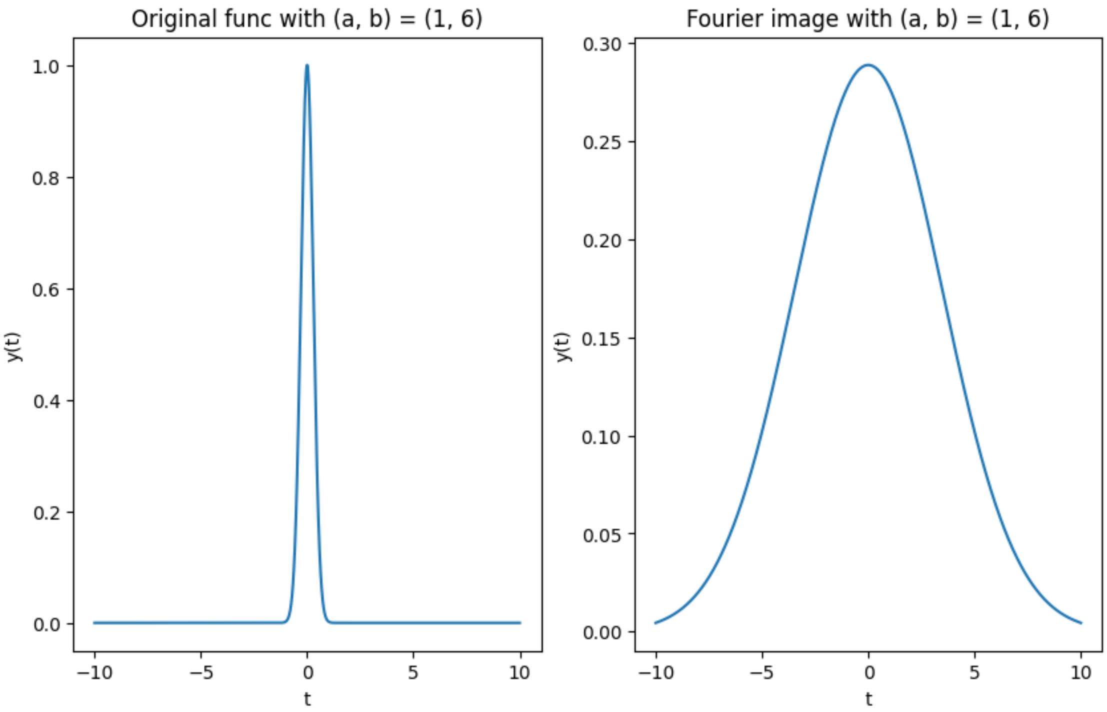

Рисунок 14 — График и образ функции Гаусса

2.4.3 Равенство Парсеваля

Получил `delta: 0.00000`, странно, что оба интеграла зануляются при любых a,b, поэтому их разность всегда нулевая…ещё предстоит разобраться.

2.4.4 Анализ ситуации

Влияние параметров a и b на функцию Гаусса можно понять по формулам образа и исходной функции. Параметр a отвечает за амплитуду функции, а параметр b за ширину исходной функция. то есть, при увеличении a амплитуда функции увеличивается, при увеличении b функция становится уже, это можно заметить, исходя из графиков выше.

Также по графикам можно *заметить*, что при некотором значении параматера a и b - функция и образ будут равны. Можно вывести эти параметры исходя из равентсва двух функций, а можно методом пристального взгляда на такое равенство увидеть, что сразу $a = 1$, а потом $b = 1/2$ аккуратно причёсывает функции:

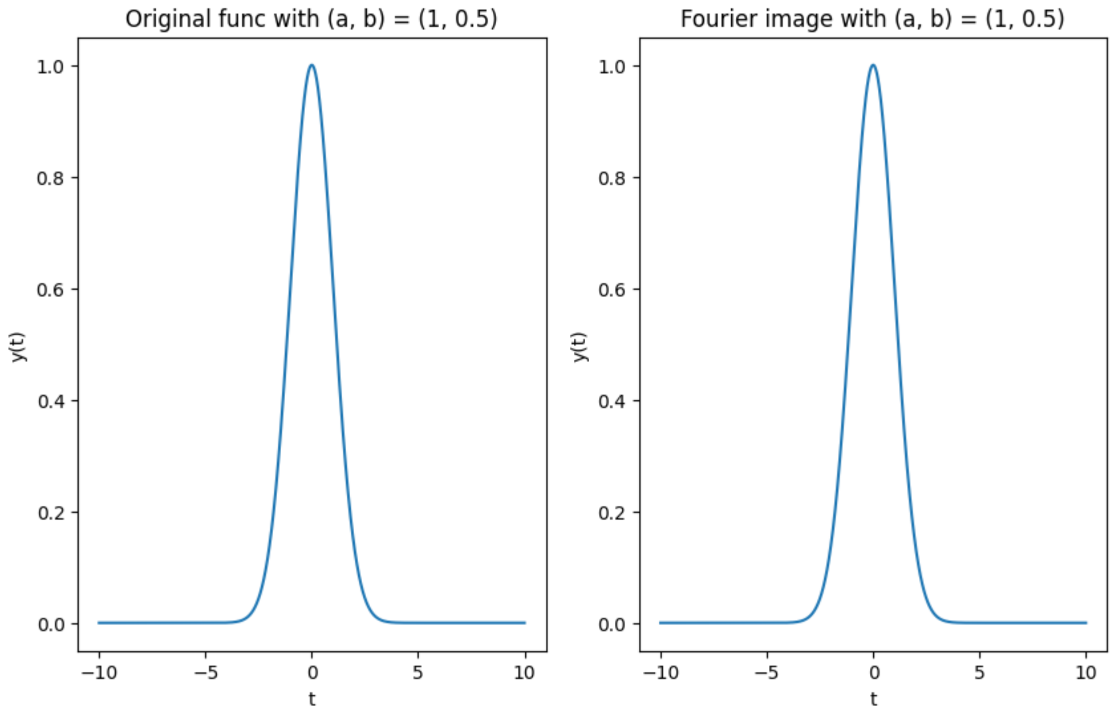

Рисунок 15 — Равенство образа и функции функции Гаусса

2.5 Двустороннее затухание

$$f(t) = ae^{-b|t|}$$

2.5.1 Фурье-Образ

$$\hat{f}_5(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ae^{-b|t|} \cdot e^{-i\omega t} dt$$
$$= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{bt} e^{-i\omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-bt} e^{-i\omega t} dt \right] = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{0} e^{t(b-i\omega)} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t(b+i\omega)} dt \right] = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{e^{t(b-i\omega)}}{b-i\omega} \Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{-t(b+i\omega)}}{b+i\omega} \Big|_{0}^{+\infty} \right] = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right) = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(\omega^2+b^2)}$$

2.5.2 Графики функции и Фурье-образа

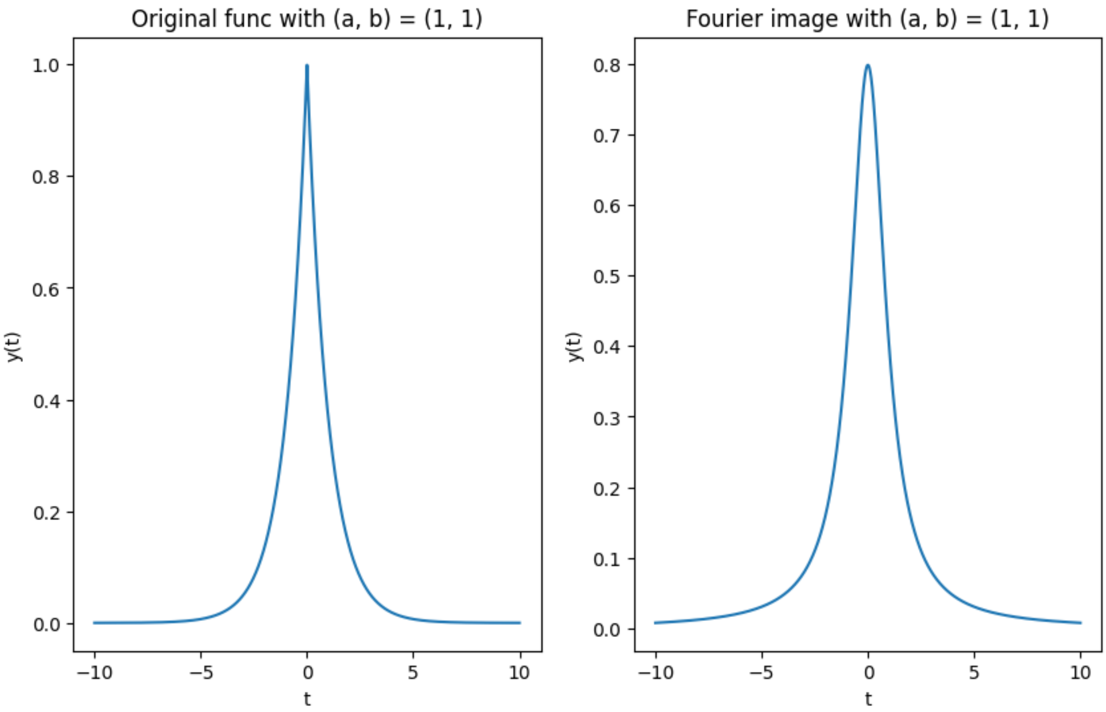

Рисунок 16 — График и образ двустороннего затухания

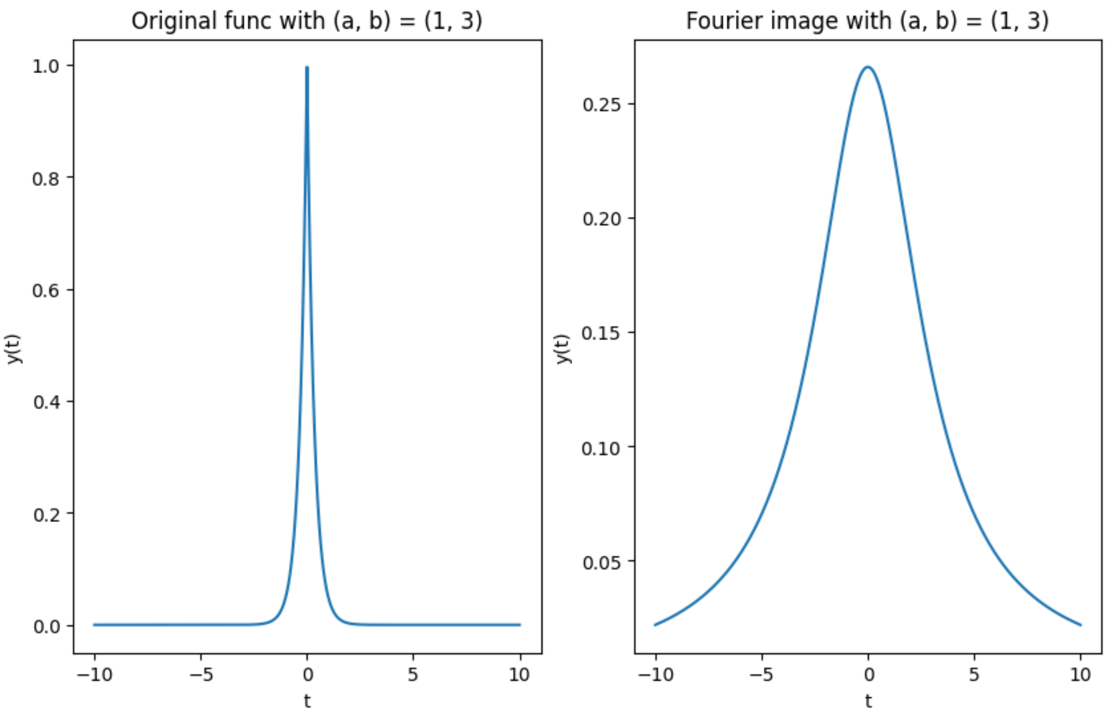

Рисунок 17 — График и образ двустороннего затухания

2.5.3 Равенство Парсеваля

Получил `delta: 0.00000`, а здесь уже только первый интеграл всегда равен нулю(надо разобраться), а второй - слишком малого порядка, поэтому их разность нулевая.

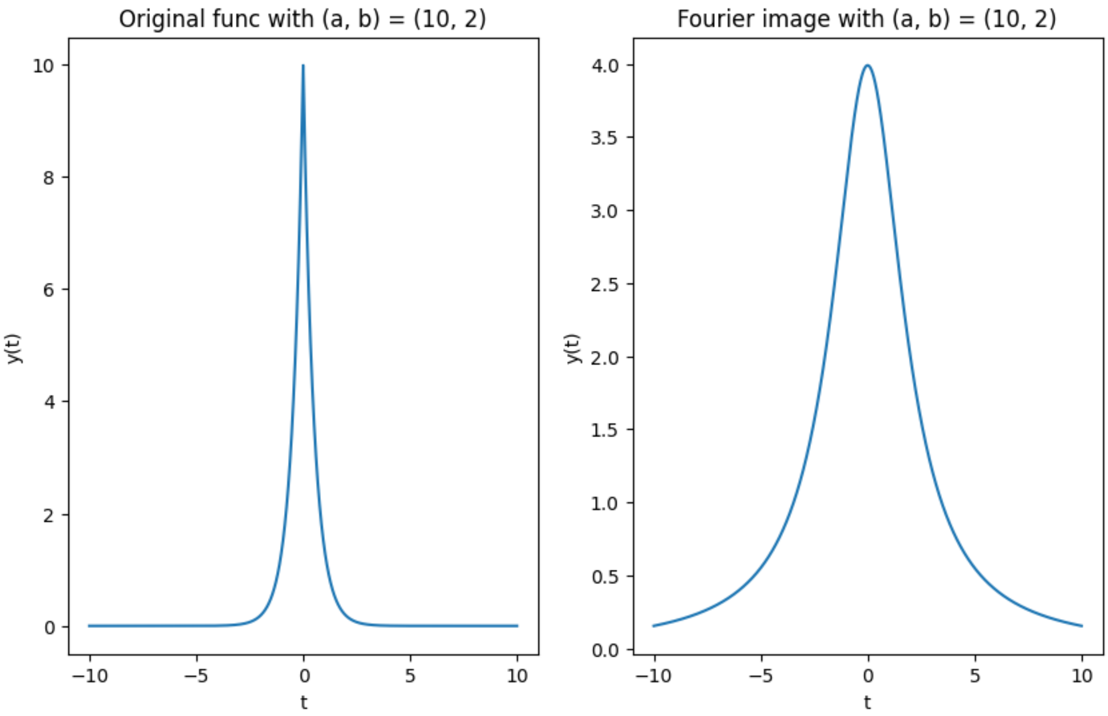

Рисунок 18 — График и образ двустороннего затухания

2.5.4 Анализ ситуации

Здесь влияние параметров a и b на графики функции возможно не заметно с первого взгляда, но если посмотреть на формулы исходной функции и образа, то всё станет понятнее:

a отвечает за амплитуду функции, b - за скорость затухания. При увеличении a - амплитуда функции увеличивается, а при увеличении b функция затухает быстрее.

3 ЗАДАНИЕ 2. КОМПЛЕКСНОЕ

NB. - В этом задании мы используем унитарное преобразование Фурье к обычной частоте ν, оно будет выглядеть следующим образом:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t} dt$$
$$\hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$$

Выберем треугольную функцию и зафиксируем для неё a, b. После рассмотрим её сдвиг $g(t) = f(t + c)$.

3.1 Фурье-образ

Воспользуемся хитростью, а именно свойством Фурье-оператора:

$$\mathbb{F}\{f(t+\tau)\} = e^{i\omega\tau}\mathbb{F}\{f(t)\}$$

, где τ- наш сдвиг.

В нашем случае его можно трактовать как *поворот* образа в комплексной плоскости... Поэтому образ и приобретёт комплексную гармонику.

Образ Фурье будет выглядеть так:

$$\hat{g}(\nu) = \frac{ab}{\sqrt{2\pi}} sinc^2(\frac{b\omega}{2}) e^{i\omega\tau}$$

3.2 Графики функции, компонент f(t), а также её модуля

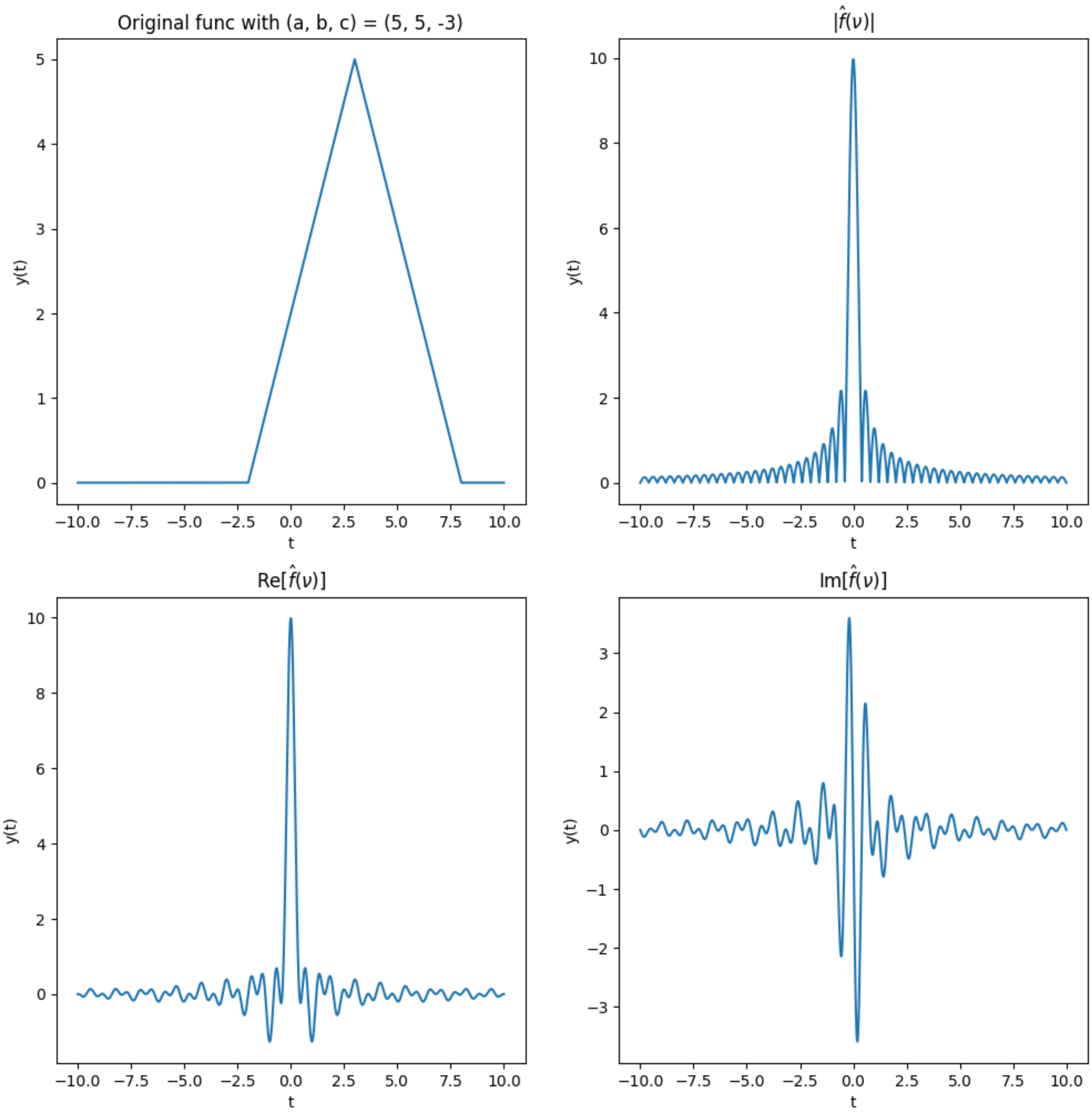

Рисунок 19 — Общий план для комплексной функции

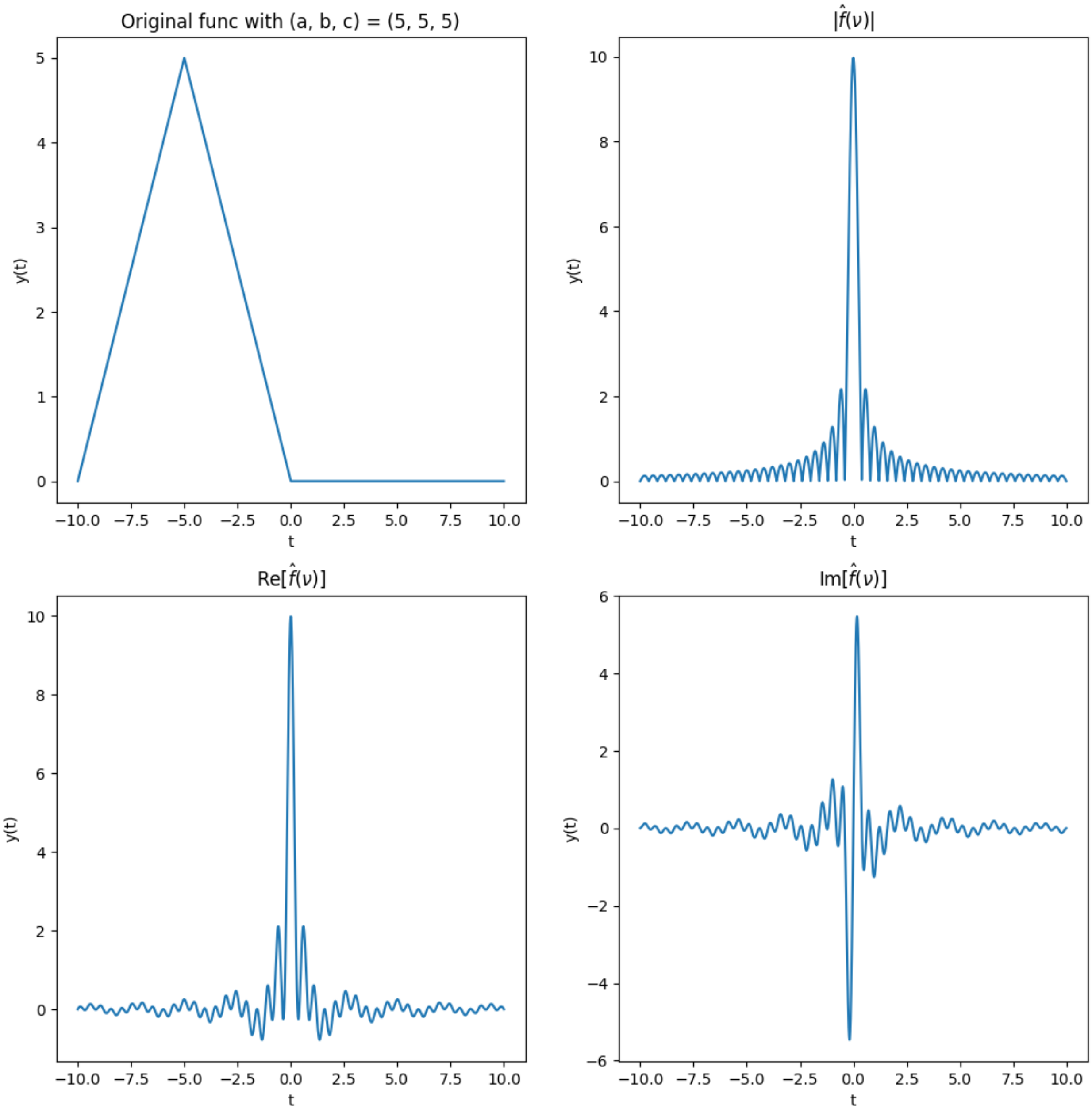

Рисунок 20 — Общий план для комплексной функции

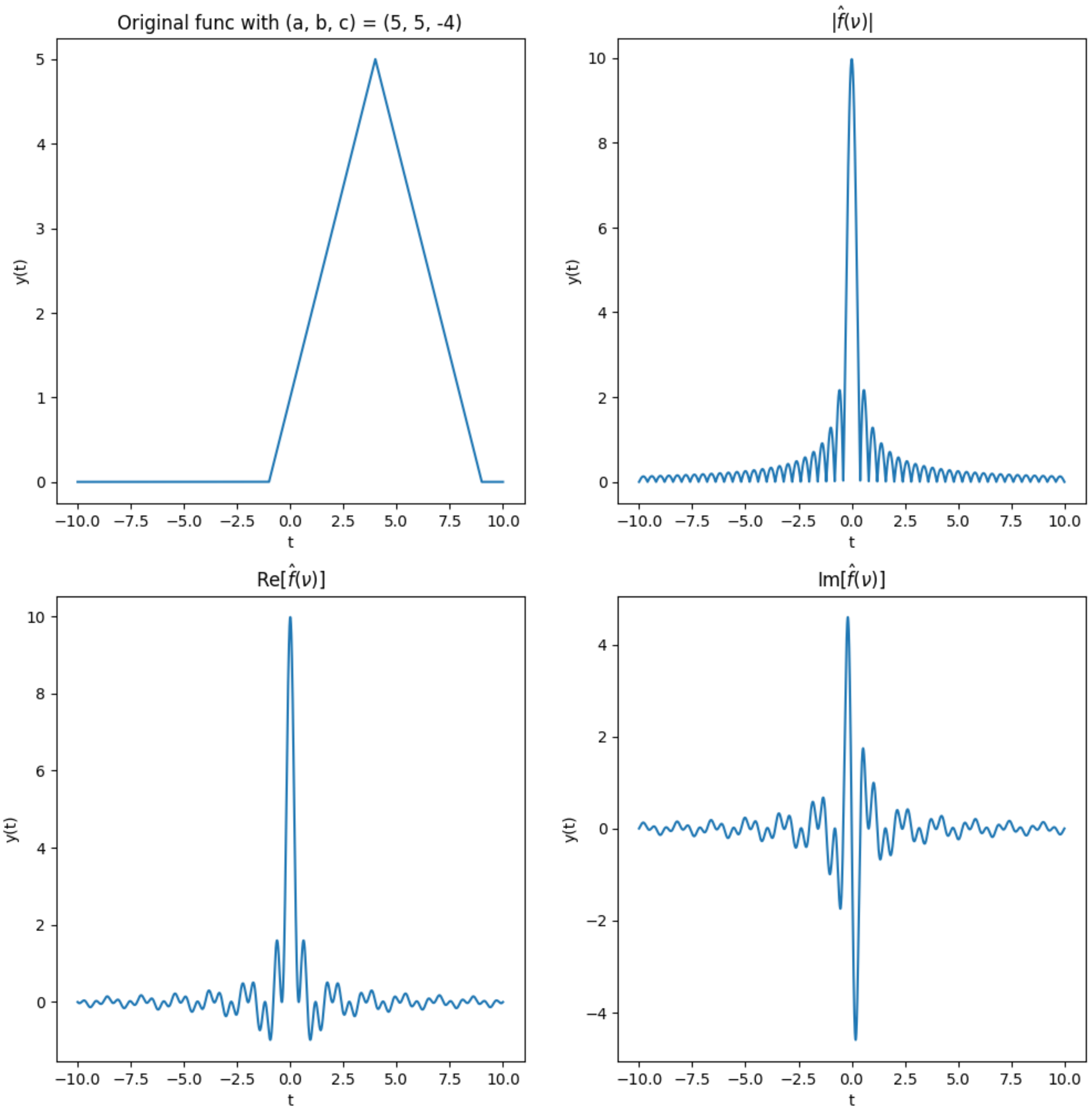

Рисунок 21 — Общий план для комплексной функции

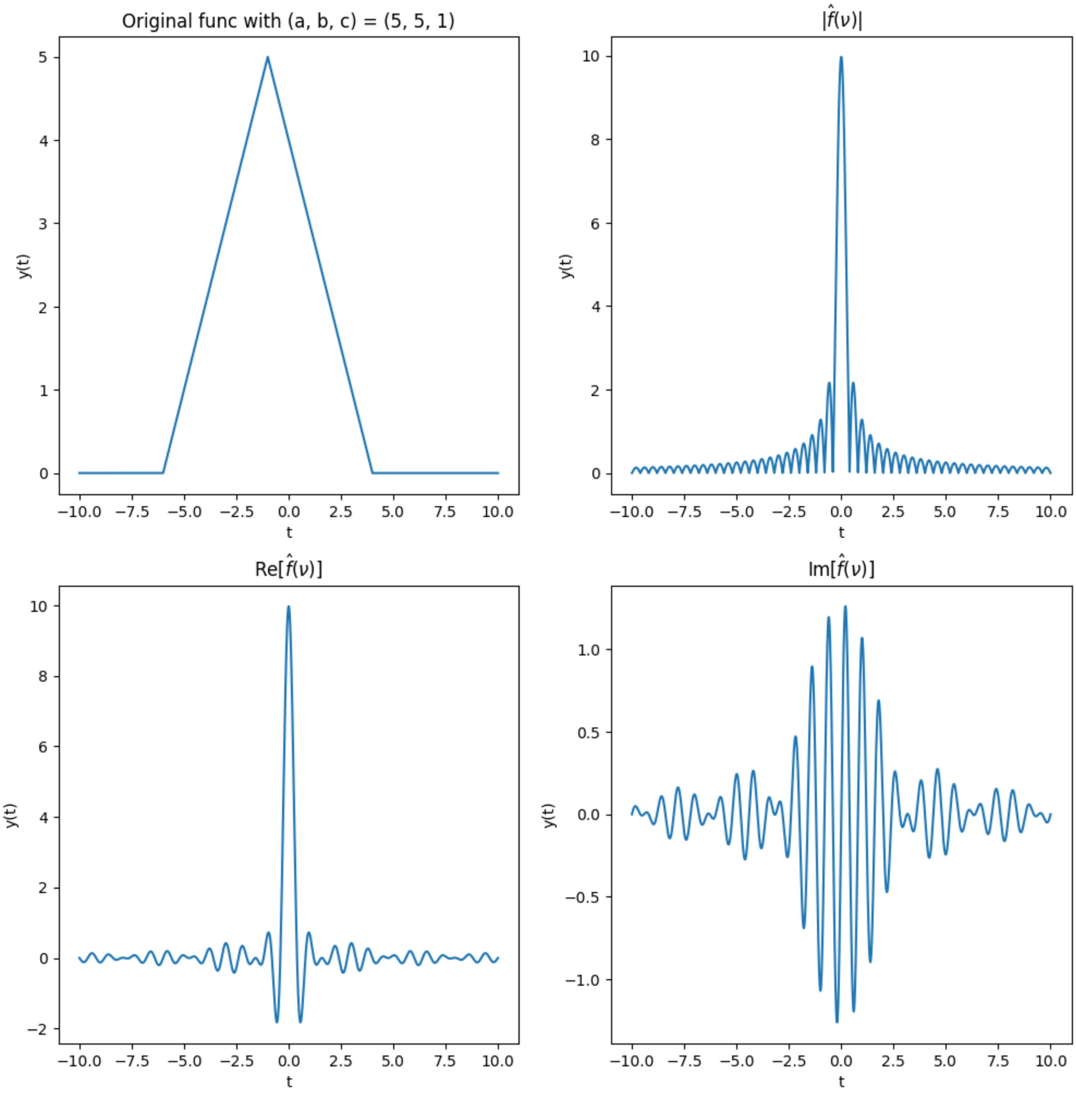

Рисунок 22 — Общий план для комплексной функции

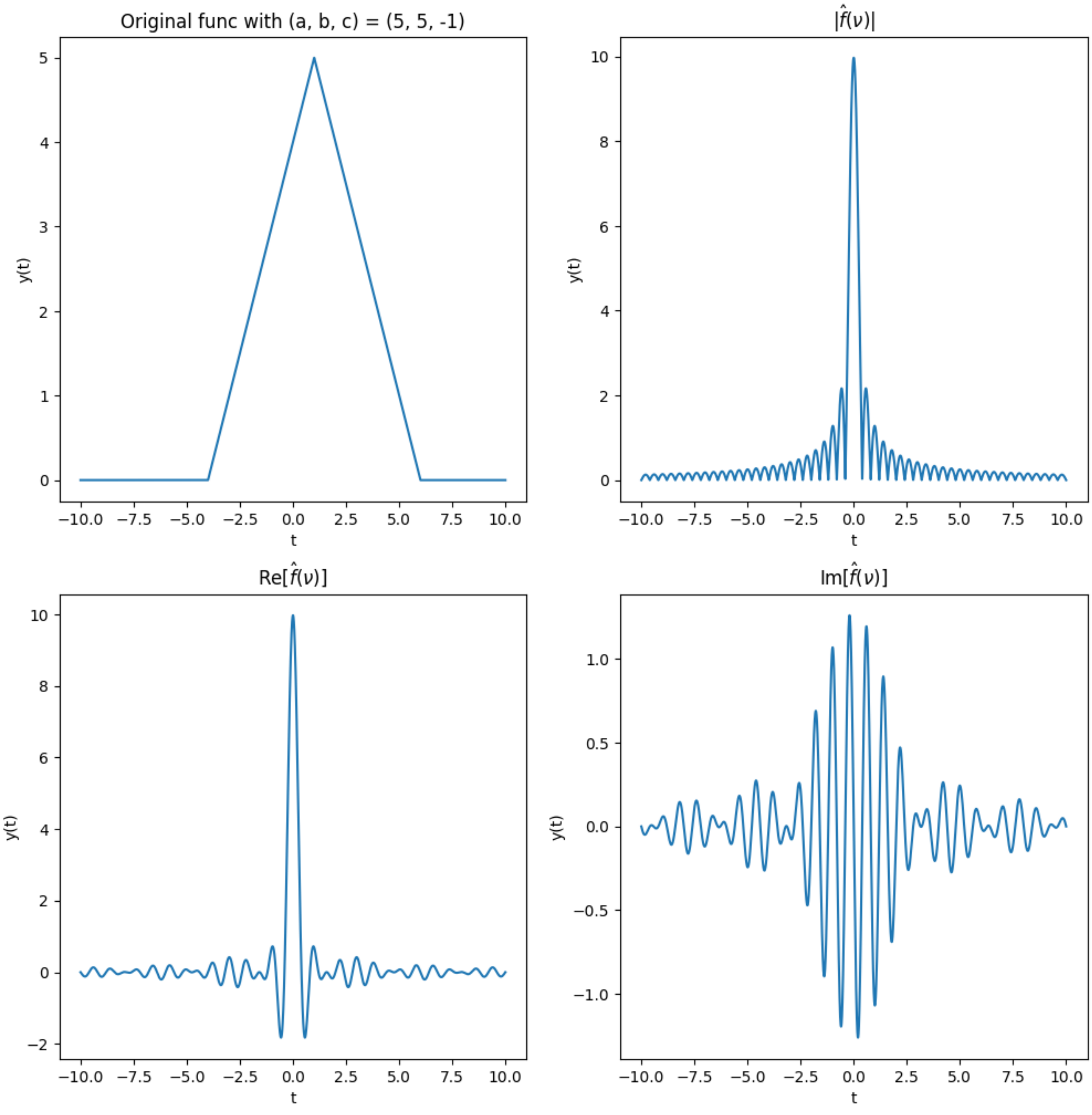

Рисунок 23 — Общий план для комплексной функции

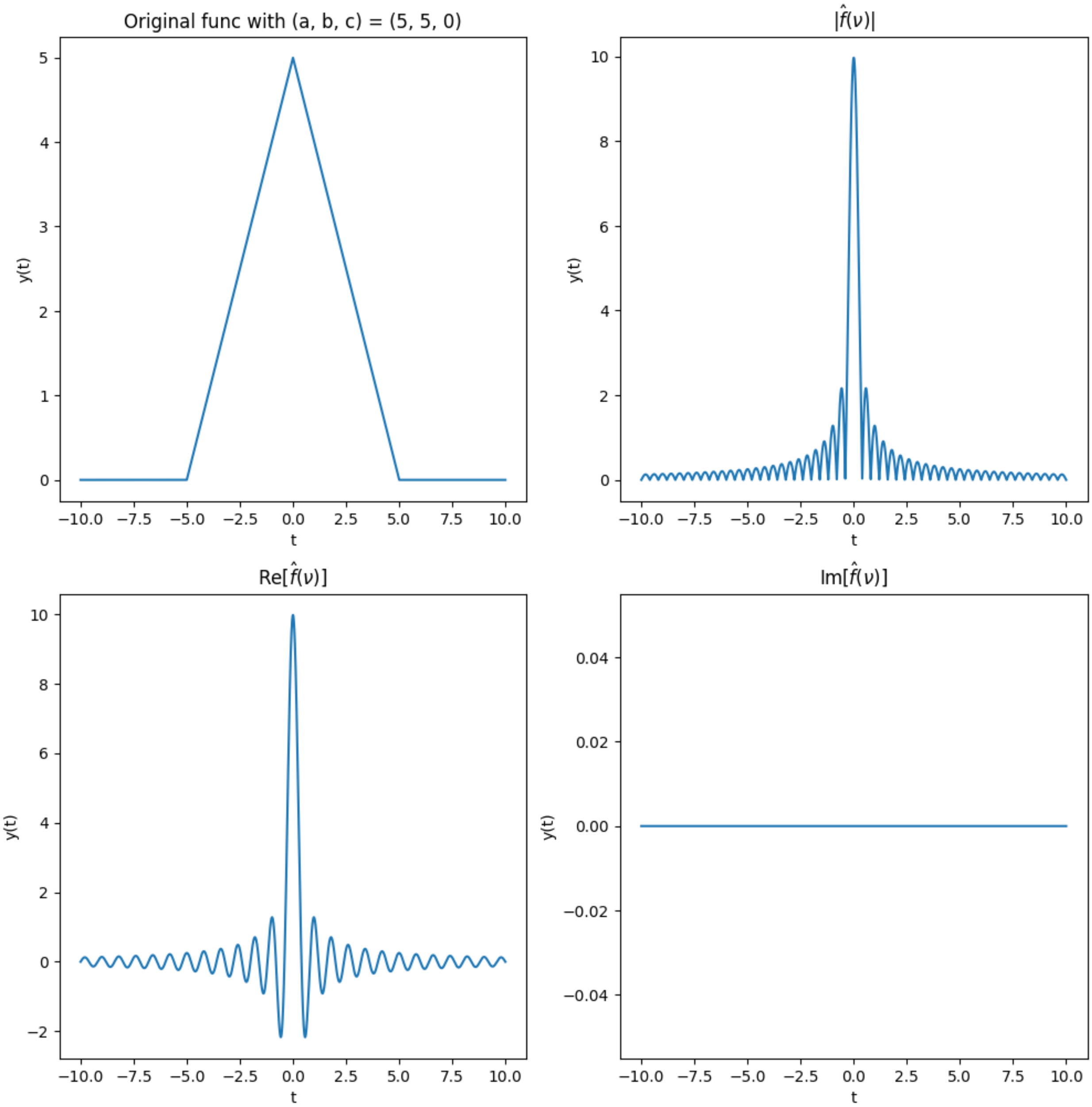

Рисунок 24 — Общий план для комплексной функции

3.3 Анализ степени сдвига на функцию и Фурье-образ

Первое за что цепляется глаз - график модуля во всех случаях при фиксированных a,b остаётся одним и тем же, после - сдвиг вправо или влево влияет только на направление гармоник, по модулю они остаются такими же (вещественна и комплексная). Поэтому при увеличении c в какую-либо сторону заметна общая тенденция - обе гармоники сжимаются, но при этом график модуля по прежнему остаётся тем же.

Как бонус, проверили на последнем графике, что при $c = 0$ мы возвращаемся в задание номер один, потому что комплексная компонента зануляется.

3.4 Равенство Парсеваля

Получил `delta: 0.00468`, довольно неплохое приближение, очевидно, что оно останется таким же и для других коэффициентов сдвига, было проверено для $c = \{1{,}5, -3\}$

4 ЗАДАНИЕ 3. МУЗЫКАЛЬНОЕ

4.1 Построить график ноты

С этого гугл-диска скачиваем два произвольных аккорда, мой выбор пал на 7-й. Также я перевёл их из mp3 в wav(онлайн конвертер), чтобы можно было их прочитать с помощью SciPy, или можно воспользоваться librosa и открыть сразу.

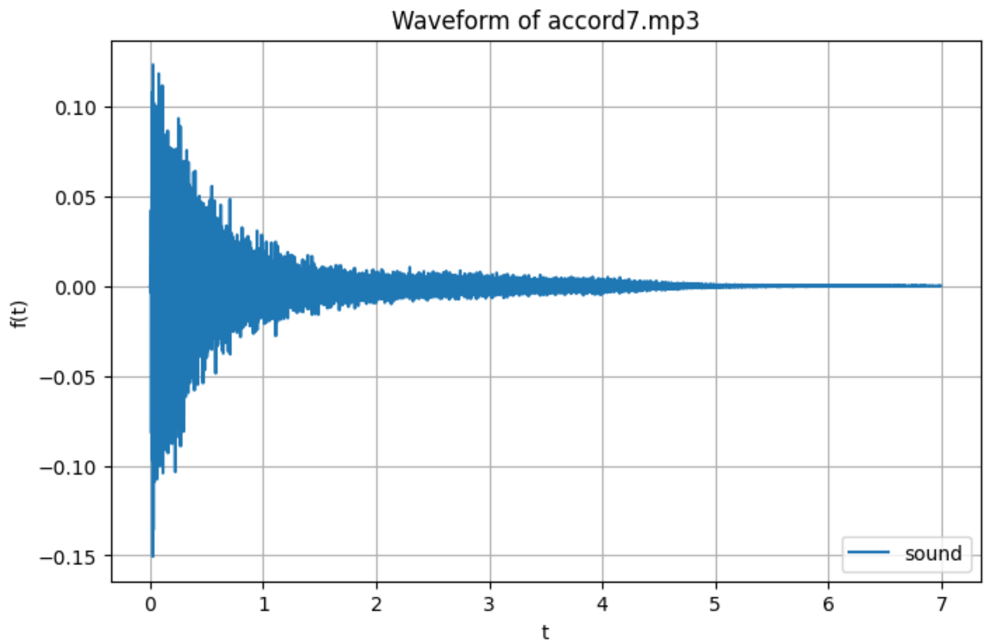

Рисунок 25 — График амплитуды от времени звука

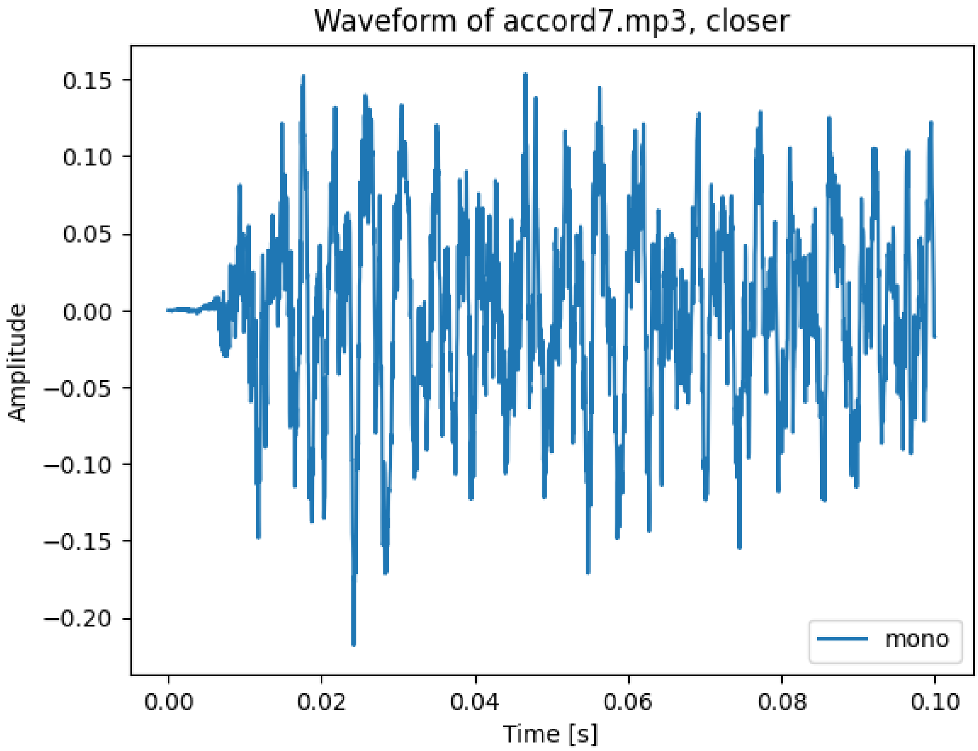

Рисунок 26 — График амплитуды от времени звука, приблизили

4.2 Найти численно Фурье-образ

Из-за того, что интегрирование через Scipy давало странные результаты, пришлось для этого задания ручками написать пару функций, но в итоге удалось всё красиво сделать, модуль образа выглядит корректно, а значит и обычный образ был посчитан правильно.

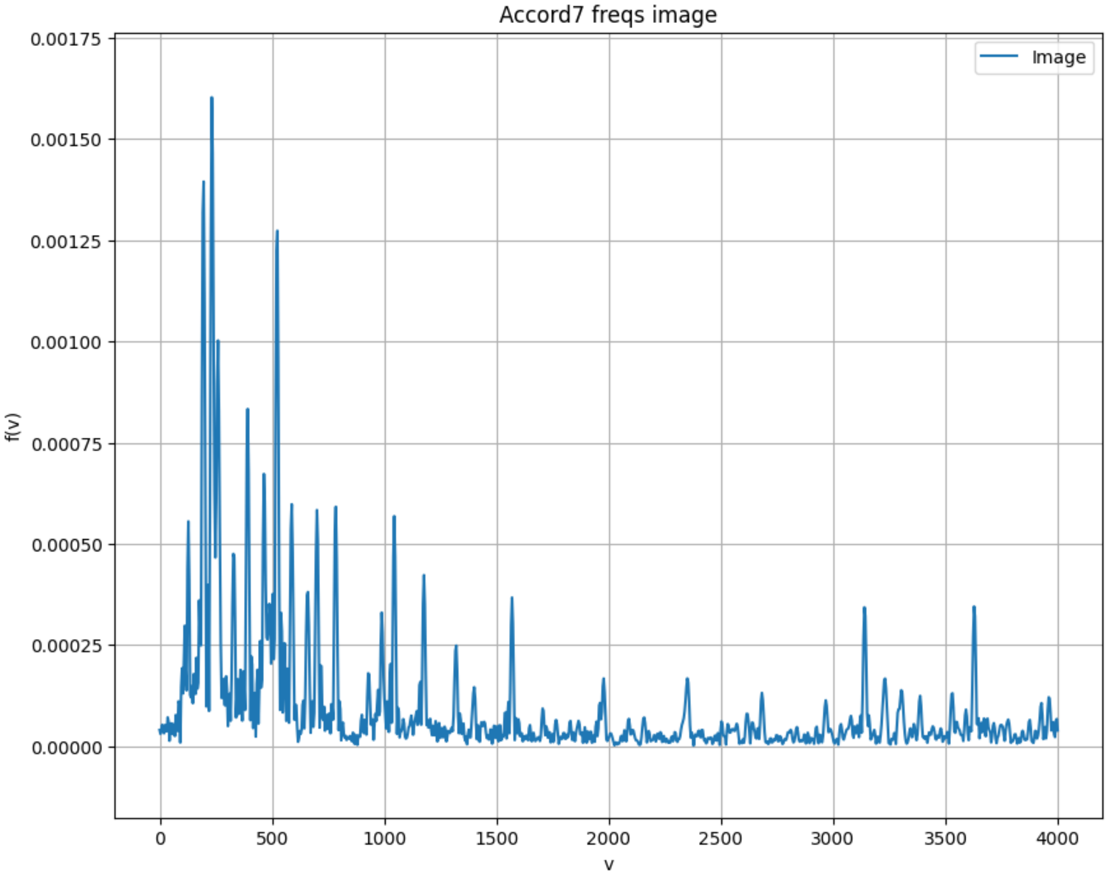

Рисунок 27 — Модуль Фурье-образа звука

4.3 Анализ Фурье-образа

В моём случае колаб показал, что максимальные амплитуды соответствуют следующим частотам $\in \{232, 236, 196, 192, 524, 228\} Hz$. Возьмём основные - 524, 236, 196. Найдём одну из многочисленных таблиц в интернете, например, и посмотрим на какие ноты это может быть похоже…

Таким частотам соответствуют ноты - C, A#, G. Интернет мне подсказал, что из таких нот можно составить аккорд Си минор (Cm) или Gm7(септим), первая версия мне знакома больше, поэтому выбираю её.