В заданиях 1 и 2 используйте унитарное преобразование Фурье к угловой частоте ω.

Задание 1. Вещественное. Рассмотрите следующие функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

1. Прямоугольная функция. $f(t) = \begin{cases} a, & |t| \le b, \\ 0, & |t| > b. \end{cases}$
2. Треугольная функция. $f(t) = \begin{cases} a - |at/b|, & |t| \le b, \\ 0, & |t| > b. \end{cases}$
3. Кардинальный синус. $f(t) = a\,\mathrm{sinc}(bt)$.
4. Функция Гаусса. $f(t) = ae^{-bt^2}$.
5. Двустороннее затухание. $f(t) = ae^{-b|t|}$.

Для каждой функции f:

- Приведите аналитическое выражение её Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$. Для функций 1, 2, 5 также приведите *вывод* соответствующего аналитического выражения. Для функций 3, 4 достаточно привести результат.
- Постройте графики функции $f(t)$ для нескольких значений параметров $a, b > 0$.
- Постройте графики Фурье-образа $\hat{f}(\omega)$ для тех же значений параметров.
- Проверьте выполнение равенства Парсеваля.
- Проанализируйте влияние параметров на вид исходной функции и Фурье-образа. В чём заключается принцип неопределённости, и как он проявляется в рассмотренных примерах? Какая из функций может оказаться в точности равна своему Фурье-образу? При каких значениях параметров a и b это равенство выполняется?

Задание 2. Комплексное. Выберите любую f из задания 1, зафиксируйте a и b. Рассмотрите сдвинутую функцию $g(t) = f(t + c)$ и выполните следующие шаги:

- Приведите аналитическое выражение для соответствующего Фурье-образа $\hat{g}(\omega)$.
- Постройте графики функции $g(t)$ для нескольких значений параметра c (можно взять как положительные, так и отрицательные значения).
- Постройте графики $\mathrm{Re}\,\hat{g}(\omega)$ и $\mathrm{Im}\,\hat{g}(\omega)$ вещественной и мнимой компоненты Фурье-образа, а также график $|\hat{g}(\omega)|$ модуля Фурье-образа для каждого случая.
- Проанализируйте влияние параметра c на саму функцию и её Фурье-образ.

В задании 3 используйте преобразование Фурье к обыкновенной частоте ν.

Задание 3. Музыкальное. Скачайте одну запись какого-нибудь музыкального аккорда с этого гугл-диска и выполните следующие шаги:

- Прослушайте запись.
- Преобразуйте запись в массив, соответствующий функции времени $f(t)$.
  - В `MATLAB` это можно сделать с помощью функции `audioread`.
  - Если функция возвращает два звуковых канала, выберите один.
- Постройте график $f(t)$.
- С помощью численного интегрирования найдите Фурье-образ $\hat{f}(\nu)$.
  - Для численного интегрирования используйте функцию `trapz`. Сделать это можно так (обратите внимание, что числовые переменные `V` и `dv`, а также массивы `t` и `y` в этом примере считаются уже заданными):

    ```
    v = -V : dv : V;       % Задаём набор интересных нам частот
    v = 0 : dv : V;        % Или так - если достаточно положительных
    for k = 1 : length(v)
        Y(k)=trapz(t,y.*exp(-1i*2*pi*v(k)*t)); % Преобразование Фурье
    end
    ```

  - В этом задании мы просим вас не использовать функцию `fft`, а воспользоваться методами численного интегрирования (например, функцией `trapz`). Позднее мы познакомимся с функцией `fft` и узнаем, в чём состоит разница между этими двумя подходами.
- Постройте график $|\hat{f}(\nu)|$.
- Проанализируйте график Фурье-образа. Найдите основные частоты, присутствующие в аккорде. Соотнесите частоты с музыкальными нотами (можно воспользоваться таблицами соответствия наподобие этой). Сделайте вывод о том, из каких нот составлен аккорд.
- *Необязательный пункт.* Если немного разбираетесь в музыке, то можете попробовать воспроизвести этот аккорд на любом музыкальном инструменте и сравнить звучание, а также определить его название.