

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Университет ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

ОТЧЁТ
по дисциплине
”Частотные методы”

по теме:
СВЯЗЬ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО

Студент:
Группа R3236

Поляков А.А.

Предподаватель:
к.т.н., доцент

Перегудин А.А.

Санкт-Петербург
2024

СОДЕРЖАНИЕ

1	ИСХОДНЫЙ КОД	3
2	НЕПРЕРЫВНОЕ И ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ....	4
2.1	Истинный Фурье-образ	4
2.2	Численное интегрирование	5
2.3	Использование DFT	9
2.4	Немного объяснений	9
2.5	Приближение непрерывного с помощью DFT	10
3	СЭМПЛИРОВАНИЕ	12
3.1	Сэмплирование синусов	12
3.2	Сэмплирование <i>sinus cardinalis</i>	15

1 ИСХОДНЫЙ КОД

Онлайн версию кода здесь нет, делал вычисления в live-script матлабовских, в [репозитории](#) можно найти исходники.

Основные фишки кода были помечены сразу там в комментариях и много красивого латеха, поэтому прошу всех желающих заглянуть под капот непосредственно...

2 НЕПРЕРЫВНОЕ И ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

2.1 Истинный Фурье-образ

Найдём аналитическое выражение для Фурье-Образа:

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}(\nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int_{-0.5}^{+0.5} 1 \cdot e^{-2\pi i \nu t} dt = \left. \frac{e^{-2\pi i \nu t}}{-2\pi i \nu} \right|_{-0.5}^{+0.5} = \\ &= \frac{1}{-2\pi i \nu} (e^{-\pi i \nu} - e^{\pi i \nu}) = \frac{\sin(\pi \nu)}{\pi \nu} = \text{sinc}(\pi \nu)\end{aligned}$$

Тогда графики $\Pi(t)$ и $\hat{\Pi}(\nu)$ будут выглядеть следующим образом:

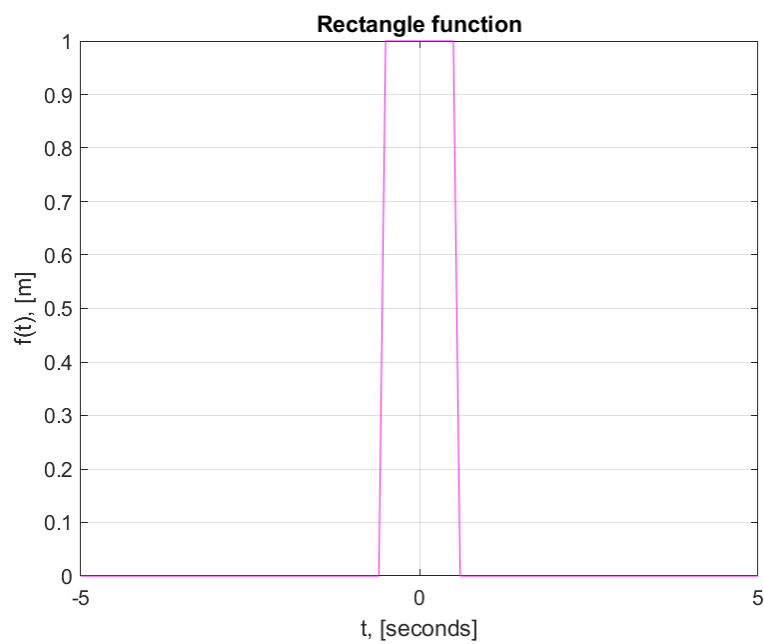


Рисунок 1 — Прямоугольная функция

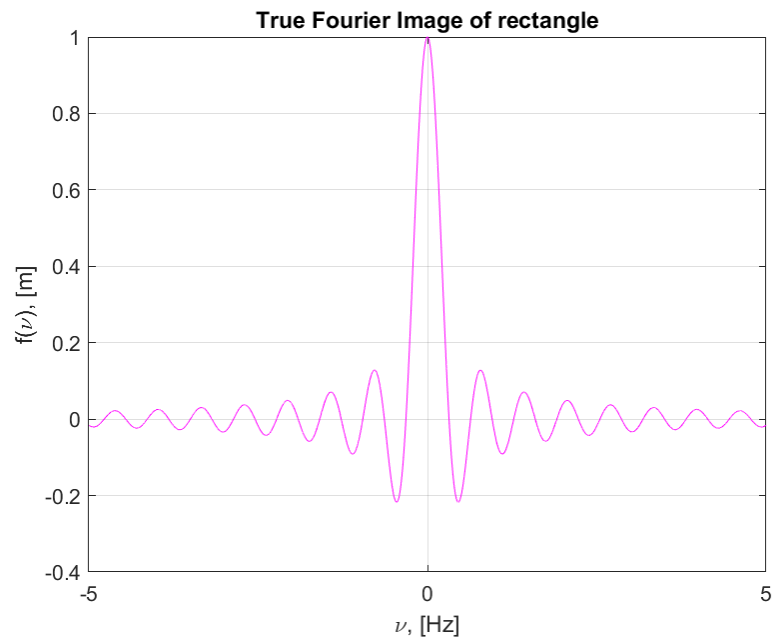


Рисунок 2 — Фурье-образ прямоугольной функции

2.2 Численное интегрирование

$$\Pi(t) \xrightarrow{\text{trapz}} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{\text{trapz}} \Pi(t)$$

Теперь будем строить при помощи функции `trapz` Фурье образы, и сравнивать на то, как они меняются в зависимости от величины шага интегрирования, размера промежутка:

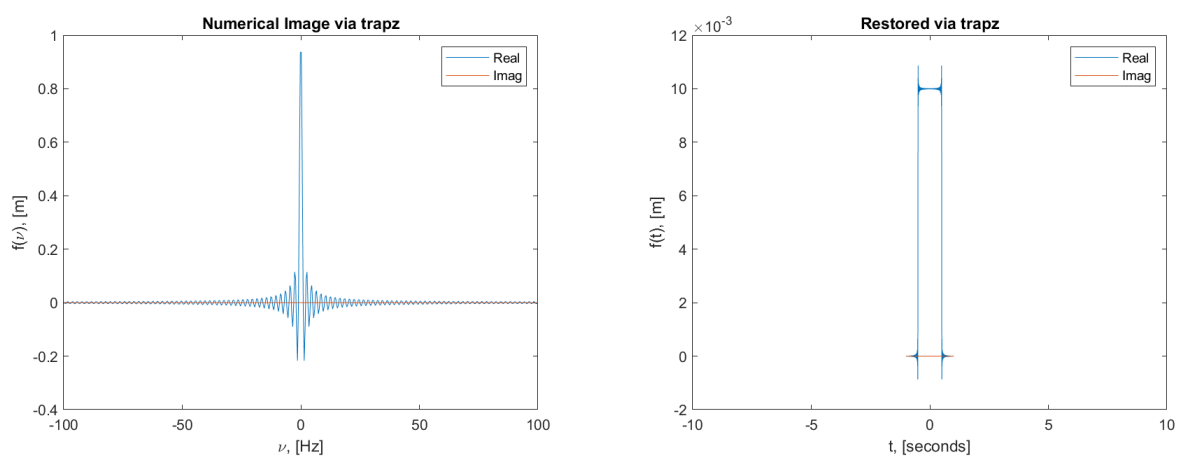


Рисунок 3 — Испытание - Фурье образ и восстановленная функция

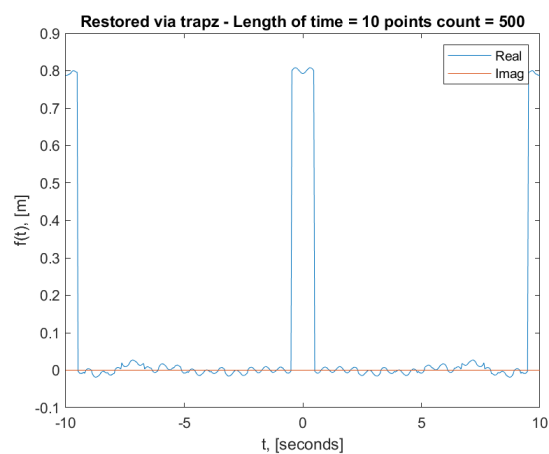
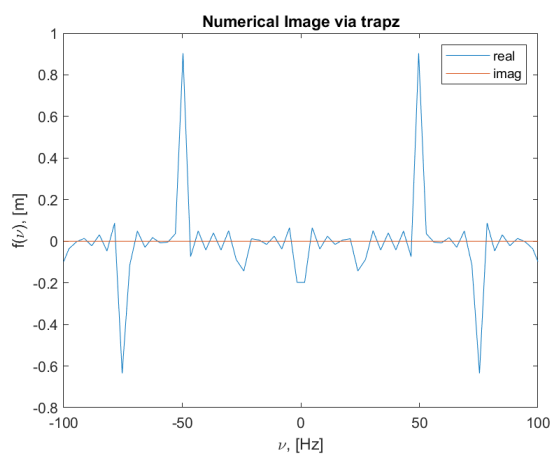


Рисунок 4 — Испытание - Фурье образ и восстановленная функция

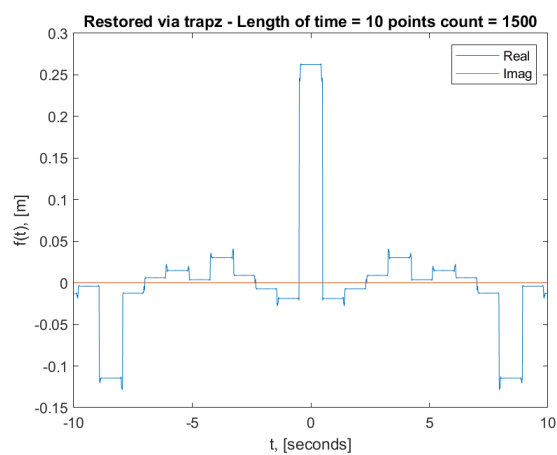
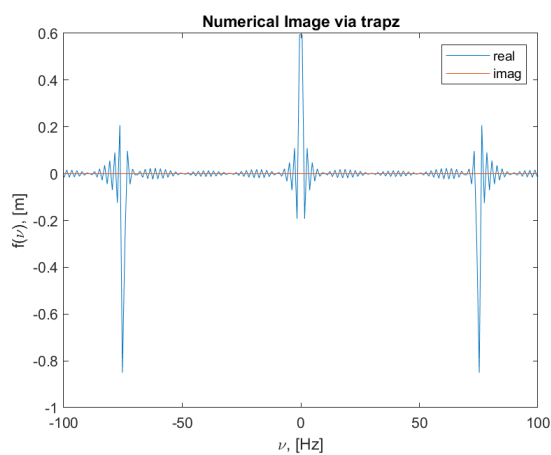


Рисунок 5 — Испытание - Фурье образ и восстановленная функция

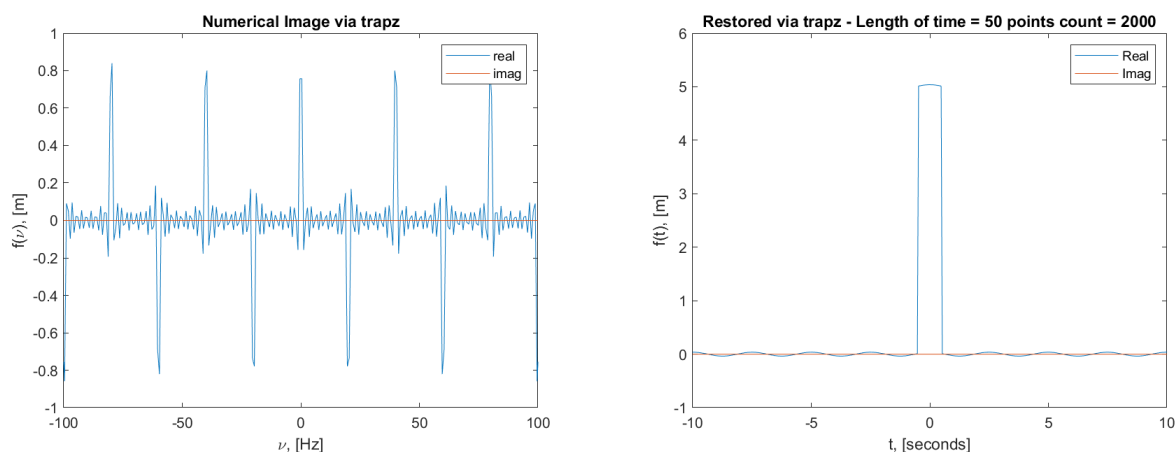


Рисунок 6 — Испытание - Фурье образ и восстановленная функция

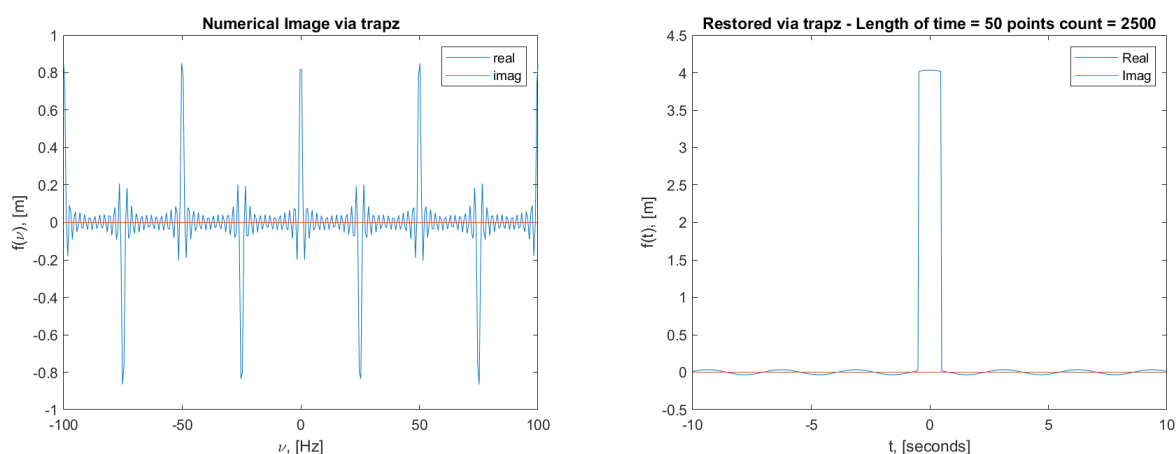


Рисунок 7 — Испытание - Фурье образ и восстановленная функция

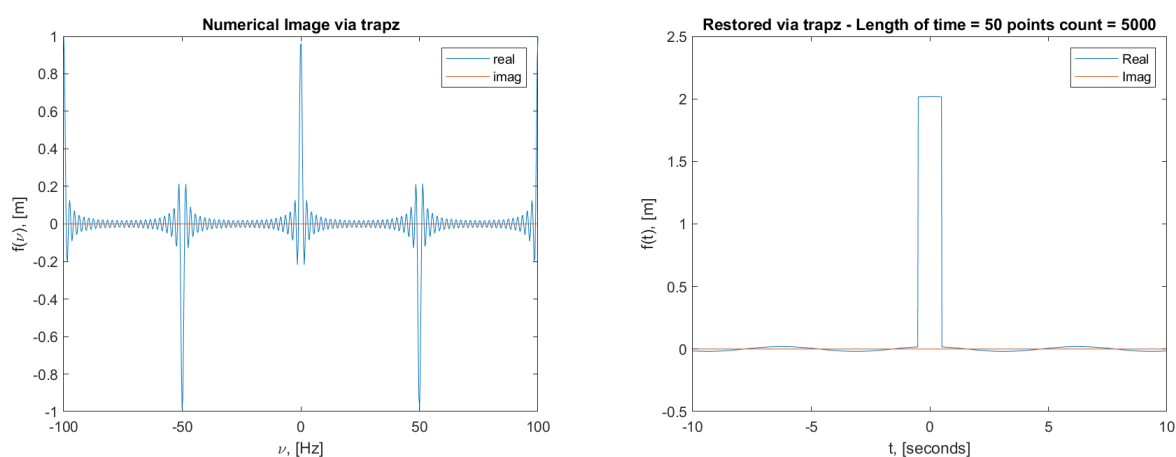


Рисунок 8 — Испытание - Фурье образ и восстановленная функция

В итоге мы понимаем, что этот метод уже начнёт нам показывать треугольник при 500+ точек, но мы должны учитывать, что это приближение численными гармониками, также что верхушка прямоугольной функции не

сразу станет приближаться к плоской. Поэтому нам удаётся победить периодичность лишь при большом количестве точек(5000+). В итоге - это **быстрый способ, но не точный.**

2.3 Использование DFT

Найдём Фурье-образ функции $\Pi(t)$ с помощью дискретного преобразования Фурье *в унитарной форме*, схематично мы делаем следующее:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\text{fftshift}(\text{fft}())} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{\text{ifft}(\text{ifftshift}())} \Pi(t)$$

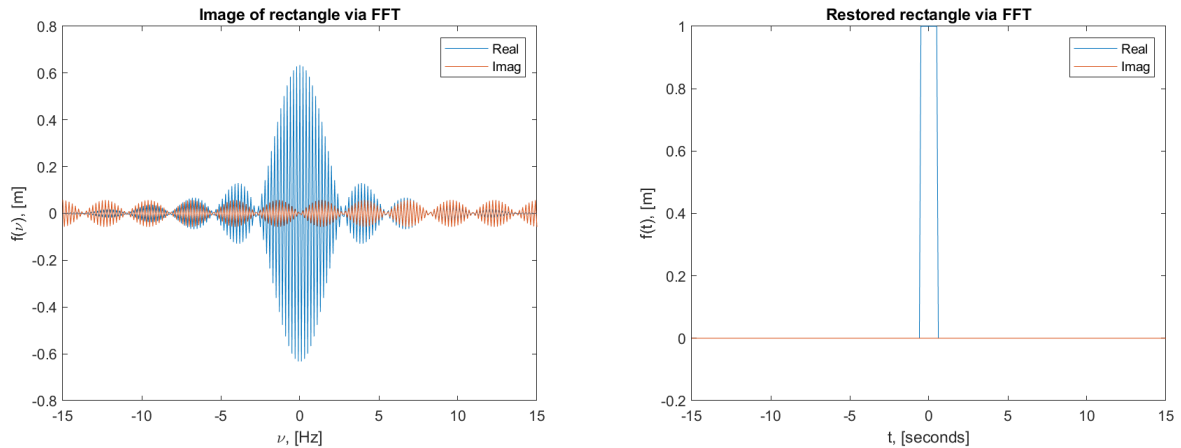


Рисунок 9 — Испытание - Фурье образ и восстановленная функция

В итоге мы получили, что восстановленный прямоугольник совпадает с оригинальной функцией (на глаз), но при этом Фурье-образ через `fft` очень странно выглядит, по крайней мере он не похож на другие образы, полученные выше, однако если взять от него модуль, то он уже будет более похож на модули образов выше. Думаю, это связано с тем, что такая функция считает образы *более оптимально*, поэтому там и появляются комплексные числа, которых, по идее, не должно быть.

2.4 Немного объяснений

В данном случае оценить скорость работы алгоритмов `trapz` и `fft` немного затруднительно, ведь вроде комп не лагал и там и там, а делать целые бенчмарк тесты по заданию вроде не просят. Но можно понять, что `trapz` - это всё-таки подобие преобразования Фурье, потому что мы пытаемся численно посчитать интеграл, а это операция более дорогостоящая, чем в случае `fft` оптимизировать матричное умножение. Я думаю, как следствие этого, только `trapz` позволяет нам увидеть адекватный Фурье образ. Касательно

обратного преобразования, я думаю здесь ситуация обратная - fft из-за достаточно потери информации благодаря дискретности позволил сделать восстановление идеальным и без эффекта Гиббса в случае trapz.

Основная идея тут: trapz - это всё-таки работа с интегралами, fft - это уже DFT, вектора.

2.5 Приближение непрерывного с помощью DFT

Попробуем исправить ситуацию и совместим достоинства обоих подходов: точность и быстродействие. В этом мне больше всего помогла эта [статья](#), если кратко, то мы просто вместо интеграла будем считать римановские суммы, а это уже DFT, которое мы посчитаем с помощью fft.

За основу возьмём формулу унитарного преобразования Фурье через частоты: $\hat{f}(\nu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt$. Для того, чтобы перейти в DFT, нам нужно дискретизировать эту формулу по временной и частотной оси, для этого введём следующее: $t_{disc} = t_0 + \alpha \cdot \Delta t$ и $\nu_{disc} = \beta \cdot \Delta \nu$, где $\alpha \in [0, \dots, N-1]$. Также подметим, что интеграл будет по левым суммам, и количество точек в исходной последовательности определяется следующим соотношением $\Delta \nu = \frac{1}{N \Delta t}$, где N - количество точек в исходной последовательности, тогда:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha=0}^{N-1} f(t_{disc}) e^{-2\pi i \nu t} \Delta t = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha=0}^{N-1} f(t_0 + \alpha \Delta t) e^{-2\pi i \nu (t_0 + \alpha \Delta t)} \Delta t = \\ &= \Delta t e^{-2\pi i \nu t_0} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha=0}^{N-1} f(t_0 + \alpha \Delta t) e^{-2\pi i \nu \alpha \Delta t} \end{aligned}$$

А теперь добавим дискретизированные частоты:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu_{disc}) &= \Delta t e^{-2\pi i \nu_{disc} t_0} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha=0}^{N-1} f(t_0 + \alpha \Delta t) e^{-2\pi i \Delta \nu \alpha \Delta t} = \\ &= \Delta t e^{-2\pi i \nu_{disc} t_0} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\alpha=0}^{N-1} f(t_0 + \alpha \Delta t) e^{-2\pi i \alpha / N} = \Delta t e^{-2\pi i \nu_{disc} t_0} \mathbb{F}\{f(t_{disc})\} \end{aligned}$$

В последнем равенстве мы заменили громоздкое суммирование на один единственный оператор - DFT. Получается, что мы можем получить образ Фурье из функции через DFT, если умножим его на *коэффициент*, похожий на сдвиг.

Для обратного преобразование проведём аналогичные рассуждения, для начала запишем:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$$

, из чего получим...

$$f(t_{disc}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\beta=0}^{N-1} \hat{f}(\nu_{disc}) e^{2\pi i \beta \Delta \nu \alpha \Delta t} \Delta \nu = \Delta \nu \mathbb{F}\{\hat{f}(\nu_{disc})\}$$

В итоге и обратное преобразование Фурье требует только домножения на коэффициент, в итоге вот так выглядит наш успех:

$$\Pi(t) \xrightarrow{Smart::FFT} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{Smart::iFFT} \Pi(t)$$

Где за t_0 мы просто берём начало вектора времени. Проверим на практике полученные формулы:

Почему-то мне так и не удалось получить красивые-верные практические результаты, я остановился примерно на этом:

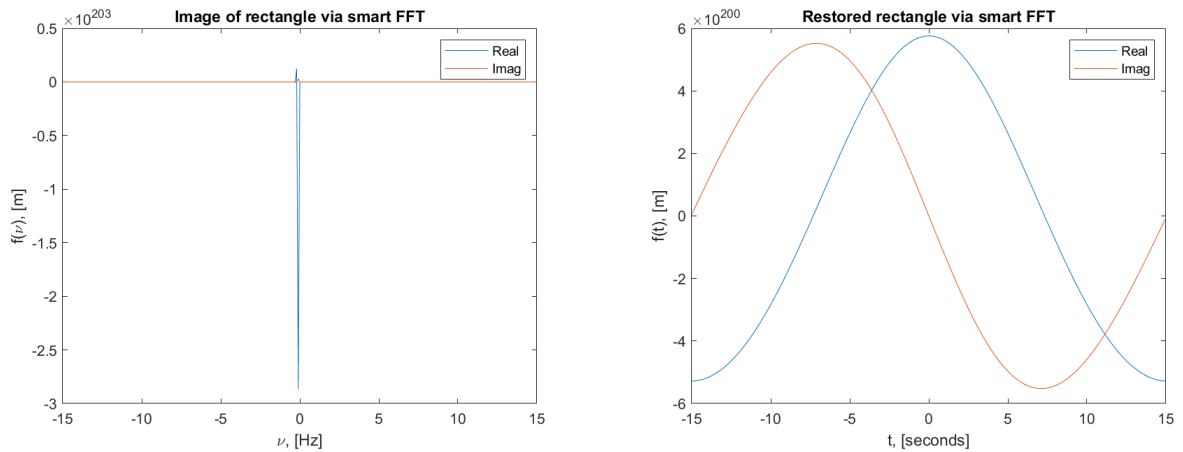


Рисунок 10 — Неудача при использовании Smart FFT

Грустно, но что поделать :(

3 СЭМПЛИРОВАНИЕ

В этом задании будем исследовать теорему Найквиста-Шеннона-Котельникова. Для этого нам также пригодится интерполяционный полином:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t_n) \cdot \text{sinc}(2B(t - t_n))$$

, где $t_n = \frac{n}{2B}$, по сути мы ставим шаг в $1/2B$

3.1 Сэмплирование синусов

Рассматриваем функцию с параметрами $a_1, a_2, \omega_1, \omega_2, \phi_1, \phi_2$:

$$y(t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

Теперь зададим два вектора - времени t и значений y . Вектор времени задаём с достаточно частым шагом, чтобы можно было имитировать непрерывную функцию. После задаём сэмплированный вариант, для этого нам нужно будет указать подшаг, с которым мы будем отбирать точки. В данном случае для сэмпла мы брали: 18000 точек \rightarrow 720 точек.

Для того, чтобы не вслепую определять B , посмотрим на его Фурье образ:

К этому сэмплу мы как раз будем применять интерполяционную формулу с разным шагом дискретизации:

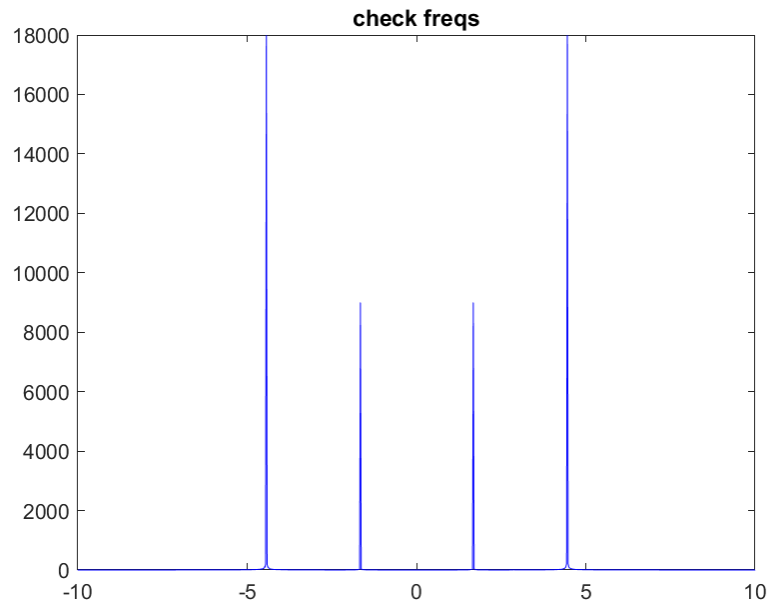


Рисунок 11 — Смотрим Фурье

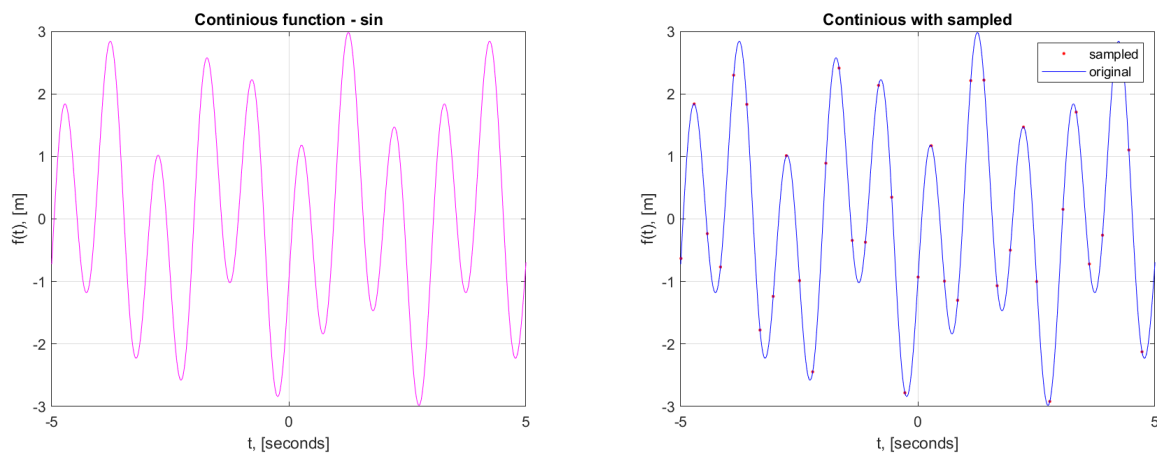


Рисунок 12 — Функция и её сэмплированный вариант

Все испытания проводились с целью проверить с обеих сторон неравенство из теоремы: $\Delta t < \frac{1}{2B}$, где Δt - дискретный шаг времени, а $[-B; B]$ - конечный отрезок, в котором лежим весь Фурье образ. В моём случае $B \approx 5$, но я брал и больше и меньше, сравнивал что будет с исходной функцией. Когда мы берём больше - то очевидно, что функция восстанавливается очень хорошо, но не всё так просто, когда мы уменьшаем B - там возникают аномалии, и функция может хорошо восстановиться, а может - нет, катавасия какая-то... Поэтому лучше брать B вперёд с запасом.

В итоге мы смогли подтвердить, что выполняя неравенство из теоремы Найквиста-Шеннона-Котельникова мы можем восстановить исходную функ-

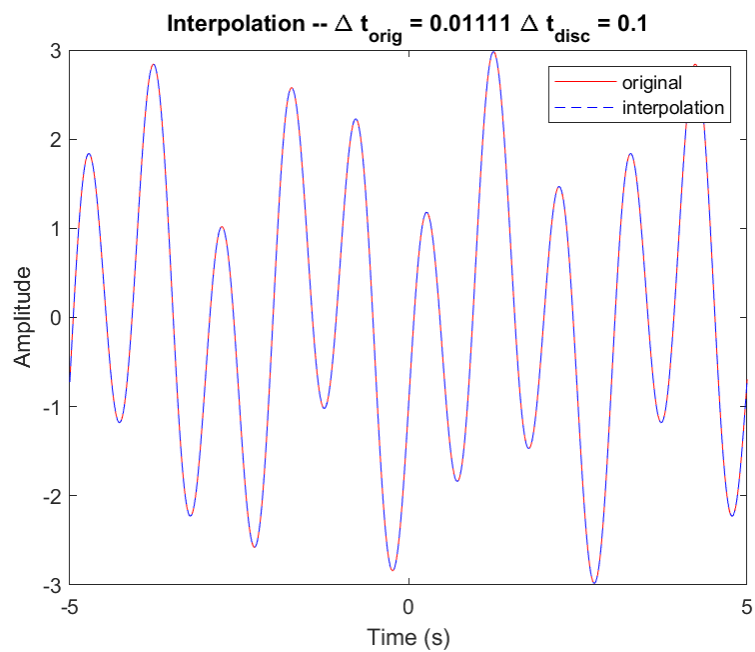


Рисунок 13 — Испытание 1 - $B = 5$

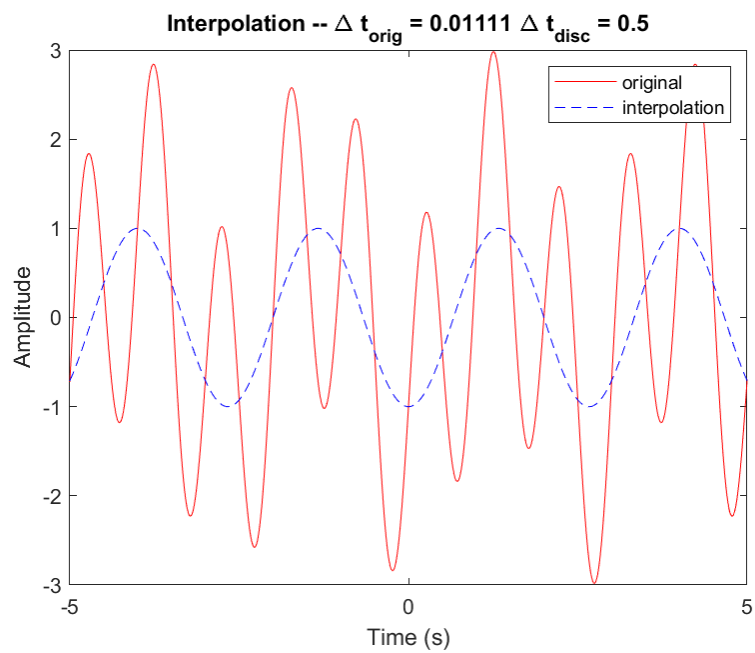


Рисунок 14 — Испытание 2 - $B = 1$

цию по конечному, дискретному набору её значений (с маленьким допущением - её Фурье-образ конечен).

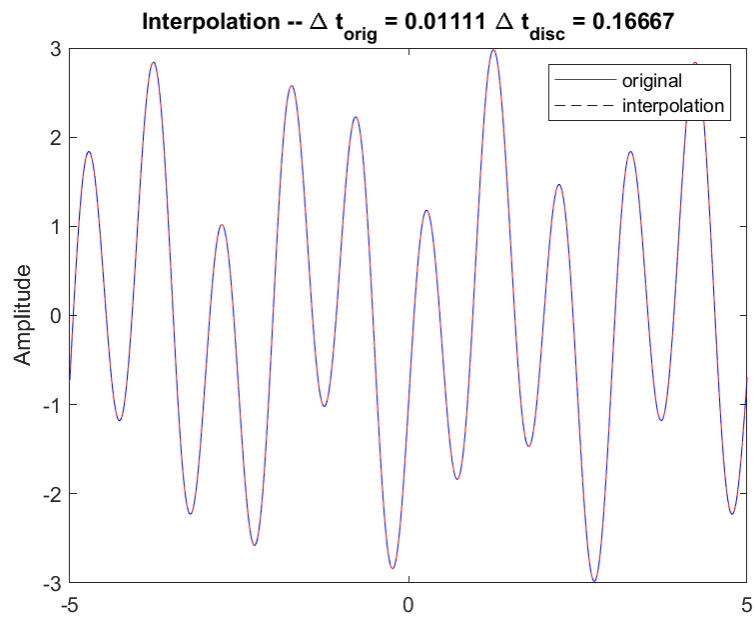


Рисунок 15 — Испытание 3 - $B = 3$

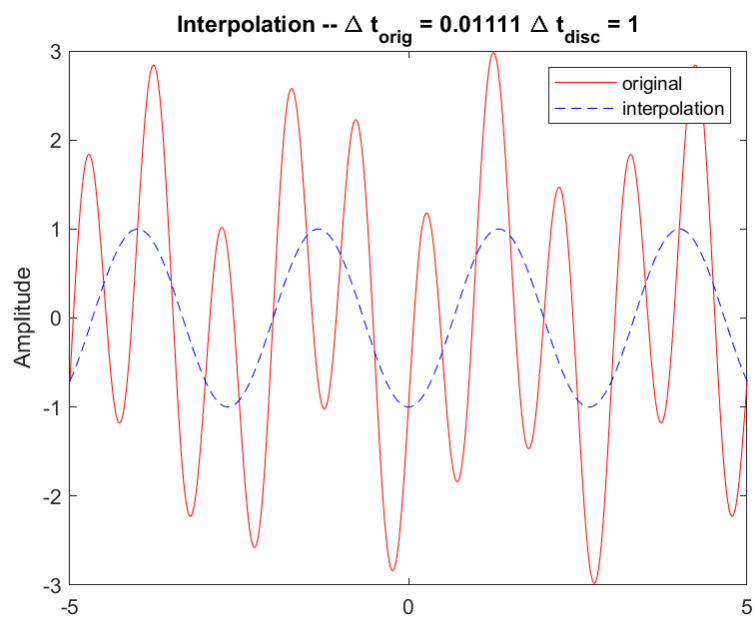


Рисунок 16 — Испытание 4 - $B = 0.5$

3.2 Сэмплирование *sinus cardinalis*

Рассматриваем функцию с параметром b , будьте осторожны - при $b > 5$ функция очень быстро улетает в бесконечность:

$$y(t) = \text{sinc}(bt)$$

Посмотрим на функцию и её сэмплированный вариант (8000 точек \rightarrow 6000 точек)

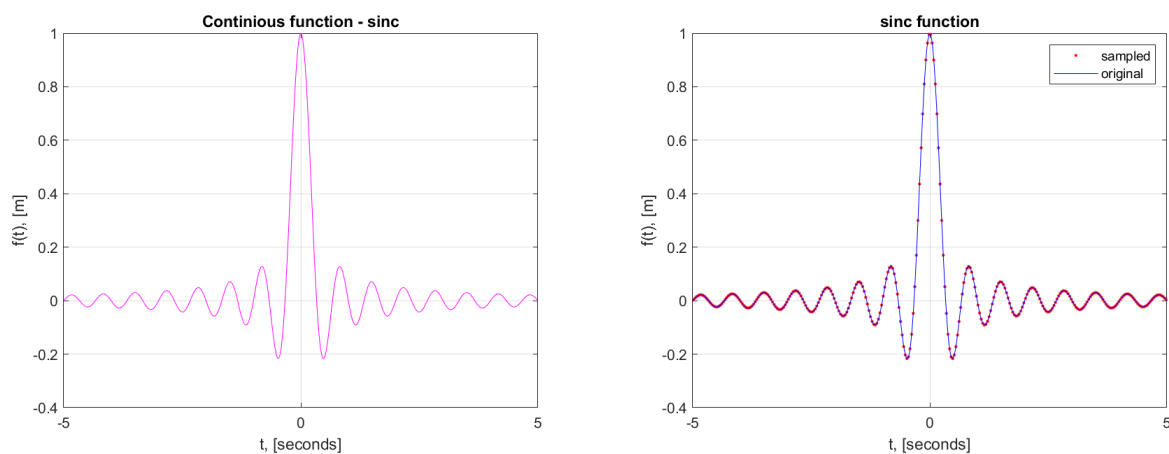


Рисунок 17 — Функция и её сэмплованный вариант

Теперь сравниваем как будут выглядеть образы оригинала и восстановленные, и то же самое с кардинальным синусом(оригинал и интерполированный), посмотрим как будет влиять шаг сэмпла на конечное восстановление функции

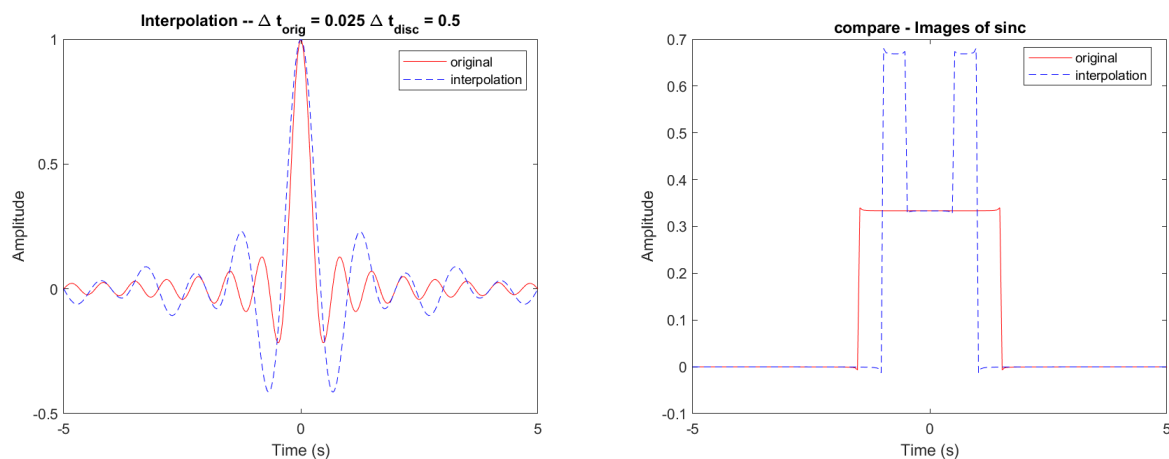


Рисунок 18 — Испытание - 1 - $B = 1$

Для того, чтобы подбирать B было удобнее - давайте посмотрим на Образ Фурье - здесь я его специально приблизил, но так то он периодический.

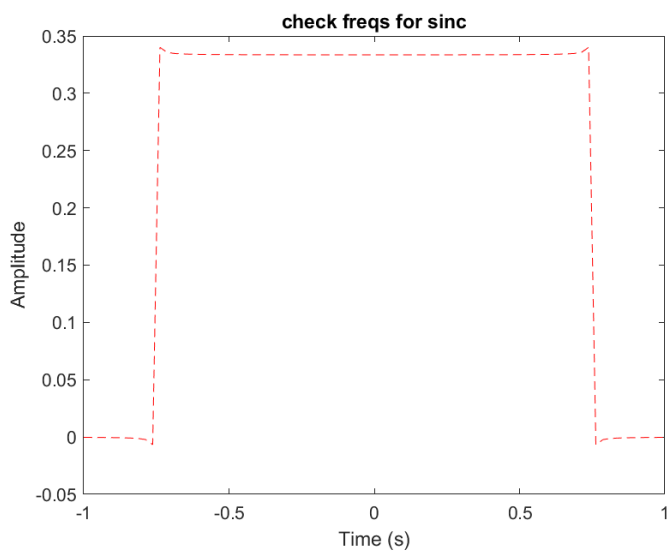


Рисунок 19 — Смотрим на образ

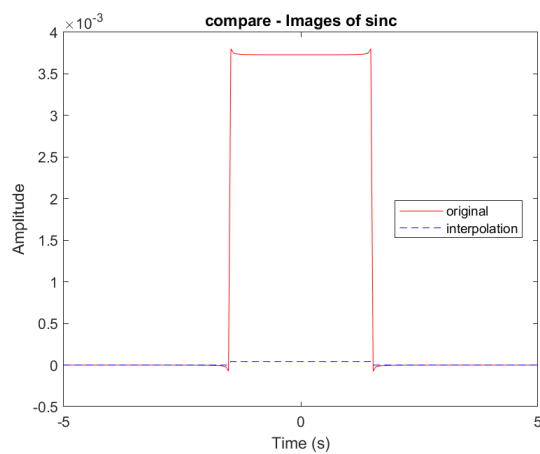
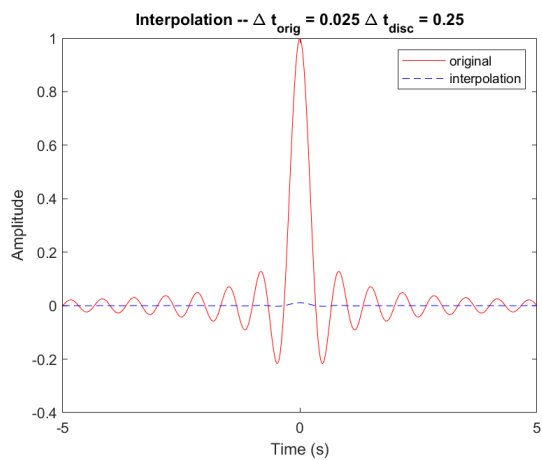


Рисунок 20 — Испытание - 2 - $B = 2$

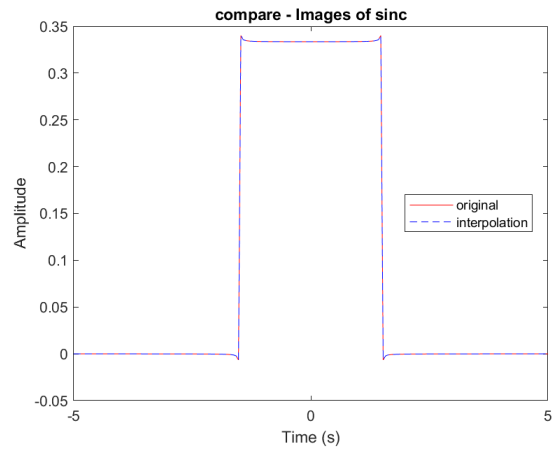
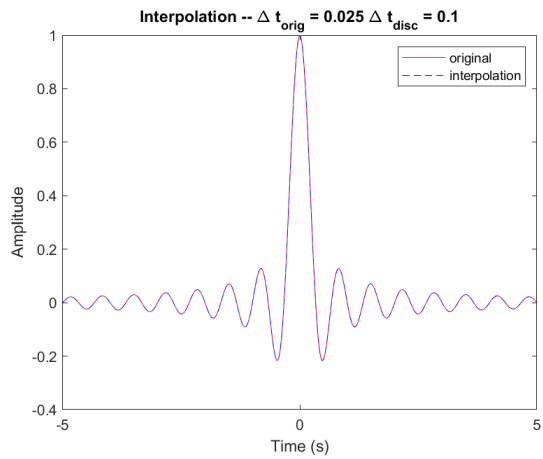


Рисунок 21 — Испытание - 3 - $B = 5$

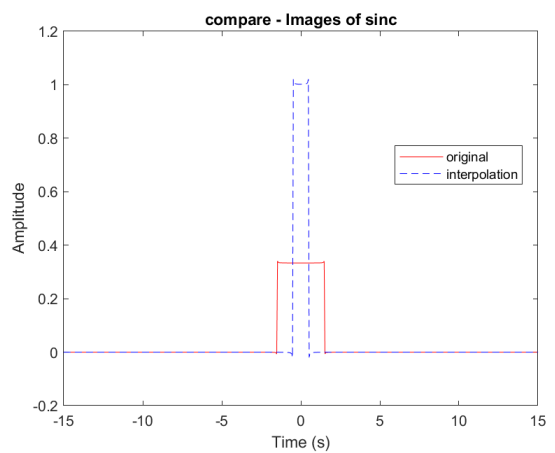
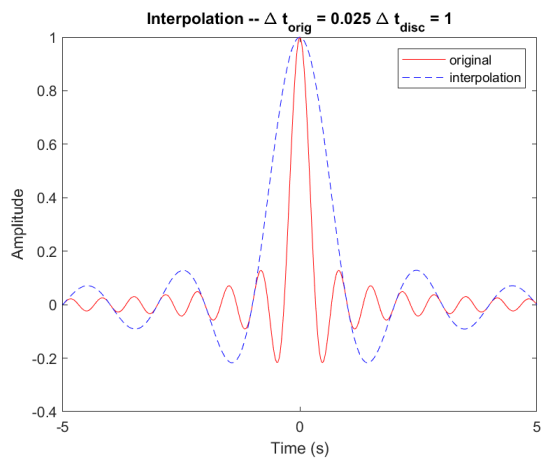


Рисунок 22 — Испытание - 4 - $B = 0.5$

Мы здесь также проверяли неравенство из теоремы: $\Delta t < \frac{1}{2B}$, где Δt - дискретный шаг времени, а $[-B; B]$ - конечный отрезок, в котором лежим весь Фурье образ. В моём случае мы начинали с $B = 1$, но я брал и больше и меньше, сравнивая. В случае уже этой функции, она вела себя весьма странно - не всегда уменьшение шага приводило к тому, что функция восстанавливалась адекватно, и я, честно, не до конца понимаю как можно такие результаты объяснить