Задание 1. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье. Рассмотрите прямоугольную функцию $\Pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \le 1/2, \\ 0, & |t| > 1/2. \end{cases}$$

Мы специально предлагаем вам рассмотреть уже знакомую функцию, чтобы на её примере сравнить результаты применения различных вариантов Фурье-преобразования.

- **Истинный Фурье-образ.** Найдите аналитическое выражение для Фурье-образа

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt.$$

  Постройте графики функций $\Pi(t)$ и $\hat{\Pi}(\nu)$.

- **Численное интегрирование.** Задайте функцию $\Pi(t)$ в `MATLAB`. Найдите её Фурье-образ с помощью численного интегрирования (функция `trapz`). Вновь используя численное интегрирование, выполните обратное преобразование Фурье от найденного Фурье-образа с целью восстановить исходную функцию. Схематично ваши действия можно представить так:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\texttt{trapz}} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{\texttt{trapz}} \Pi(t).$$

  Постройте график найденной функции $\hat{\Pi}(\nu)$ и *восстановленной* функции $\Pi(t)$. Сравните результат с истинной функцией и Фурье-образом. Исследуйте влияние величины шага интегрирования и размера промежутка, по которому вычисляется интеграл, на результат. Сделайте выводы о точности и быстродействии метода.

- **Использование DFT.** Найдите Фурье-образ функции $\Pi(t)$ с помощью дискретного преобразования Фурье (конструкция `fftshift(fft())`), используя его так, чтобы преобразование было *унитарным*. Выполните обратное преобразование от найденного Фурье-образа с помощью обратного дискретного преобразования (конструкция `ifft(ifftshift())`. Схематично ваши действия можно представить так:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\texttt{fftshift(fft())}} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{\texttt{ifft(ifftshift())}} \Pi(t).$$

  Постройте график найденной функции $\hat{\Pi}(\nu)$ и *восстановленной* функции $\Pi(t)$. Сравните результат с истинной функцией и Фурье-образом. Сделайте выводы.

- **Ваши объяснения.** Если вы правильно выполнили предыдущие пункты, то могли заметить, что функция `trapz` работает долго, а `fft` – быстро. Однако приблизиться к истинному Фурье-образу получилось только у одной из них. Почему так? И почему обратное преобразование в одном из случаев работает лучше? Дайте максимально подробное объяснение успехов и неудач каждого из методов.

- **Приближение непрерывного с помощью DFT.** Давайте исправим ситуацию и попробуем совместить достоинства обоих подходов: точность и быстродействие. Найдите способ получить правильный Фурье-образ, соответствующий непрерывному преобразованию Фурье, используя функцию `fft` и не прибегая к численному интегрированию. Найдите способ восстановить исходный сигнал по полученному Фурье-образу – тоже с помощью `fft`. Схема вашего успеха:

$$\Pi(t) \xrightarrow{\text{умное использование } \texttt{fft}} \hat{\Pi}(\nu) \xrightarrow{\text{умное использование } \texttt{ifft}} \Pi(t).$$

  Постройте график найденной функции $\hat{\Pi}(\nu)$ и *восстановленной* функции $\Pi(t)$. Сравните результат с истинной функцией и Фурье-образом. Дайте развёрнутое объяснение (с необходимыми формулами) того, как и почему ваш метод **работает**.

Задание 2. Сэмплирование. В этом задании вам предстоит исследовать теорему Найквиста-Шеннона-Котельникова на двух примерах. Чтобы результат численного моделирования был максимально близок к математическому, мы просим вас *задавать* рассматриваемые функции на как можно более *большом* промежутке. Однако, чтобы картинка получилось достаточно наглядной, мы рекомендуем *строить графики* полученных функций на относительно *маленьком* промежутке (оставляя часть заданной функции за пределами графического окна).

1. **Сэмплирование синусов.** Задайтесь параметрами $a_1, a_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2$ и рассмотрите функцию $y(t) = a_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$. Выполните следующие шаги:
   - Задайте в `MATLAB` соответствующие массивы времени `t` и значений `y`. Массив времени `t` должен быть задан с достаточно частым шагом – в данный момент мы имитируем непрерывную функцию. Постройте непрерывный график.
   - Теперь задайте сэмплированный вариант указанной функции: рассмотрите разреженный вариант массива времени и соответствующий ему массив значений. Постройте дискретный график поверх непрерывного.
   - Примените **интерполяционную формулу** из лекции к сэмплированным данным с целью восстановить непрерывную функцию. Должны получиться новые массивы времени и значений – той же размерности, что и исходные.
   - Постройте график восстановленной функции поверх исходной.
   - Исследуйте влияние шага дискретизации на вид восстановленной функции.
   - Соотнесите свои результаты с теоремой Найквиста-Шеннона-Котельникова.
2. **Сэмплирование sinus cardinalis.** Задайтесь параметром b и рассмотрите функцию $y(t) = \operatorname{sinc}(bt)$. Выполните все шаги из предыдущего пункта. Дополнительно, для каждой величины шага дискретизации постройте Фурье-образ исходного и восстановленного сигналов. Дайте объяснение увиденному, сделайте выводы.