Лабораторная работа №2 --- 2D-преобразования

Предмет: Практическая линейная алгебра

Автор: Made by Polyakov Anton, the part of R3236, suir family

Преподаватель: Алексей Алексеевич Перегудин

Source matlab code

Вступление

В этой лабораторной мы будем воспринимать любую матрицу 2 × 2 как линейное отображение, преобразующее точки плоскости по закону:

$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}} \\ y_{\text{new}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}} \\ y_{\text{old}} \end{bmatrix}$$

В дальнейшем, в графиках по цветам ориентируемся так:

- original или прообраз --> красный
- образ или image --> зеленый
- Вспомогательные прямые --> синий

- Собственные вектора --> пурпурный

<u>И да, здесь действительно миллионы строчек кода, спасибо графикам</u>

Содержательная часть

Выбираем четыре числа a, b, c и d таким образом, чтобы все они были различными и ни одно из них $\neq 0 \; и \; \pm 1$

```
a = 3/2;
b = 2;
c = 4;
d = 6;
```

Зададим многоугольник для наглядности линейный преобразований, давайте домик сделаем.

Универсальной фигурой я бы назвал сетку, например 3x3 = 9 точек, но ее проблематично было бы соединить непрерывной линией

```
house_coords = [1 1 2 3 3 1;
                1 2 3 2 1 1];
figure(111)
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'b', 'LineWidth', 2);
title('house! -> original')
hold on
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold off
```

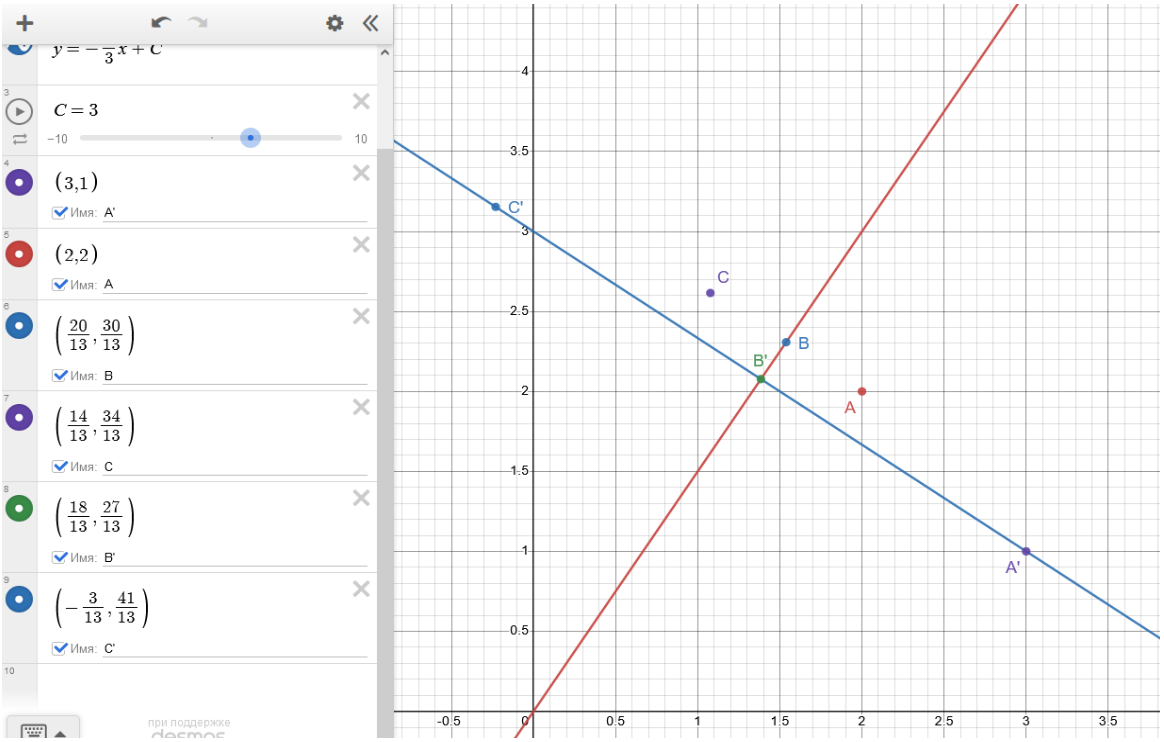
1. Отражение плоскости относительно прямой y=ax

Пользуемся формулой из вступления, и на черновике выбираем произвольную точку, отражаем ее относительно прямой, потом считаем новые координаты.

Но чтобы в формуле выше можно было найти обратную, нужно дописать по вектору справа, теперь можно выразить матрицу преобразования, примерно так:

$$\begin{bmatrix} x_{\text{new}1} & x_{\text{new}2} \\ y_{\text{new}1} & y_{\text{new}2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}1} & x_{\text{old}2} \\ y_{\text{old}1} & y_{\text{old}2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_{\text{new}1} & x_{\text{new}2} \\ y_{\text{new}1} & y_{\text{new}2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\text{old}1} & x_{\text{old}2} \\ y_{\text{old}1} & y_{\text{old}2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix}$$

Для первого и второго отображения сделал скриншот desmos проверки вручную посчитанных двух пар точек преобразований, на их основе уже собираются матрицы old, new и считаем итоговую матрицу преобразований



Небольшое спектральное исследование

```
new1 = [14/13 -3/13;
        34/13 41/13];
old1 = [2 3;
        2  1];
A1 = new1*old1^-1
```

```
A1 = 2×2
   -0.3846    0.9231
    0.9231    0.3846
```

```
% Матрица симметричная+ортогональная
detA1 = det(A1)
```

```
detA1 = -1
```

```
kernel1 = null(A1, 'r') % r = rational базис
```

```
kernel1 =

  2×0 empty double matrix
```

```
image1 = Image(A1) % см. вспомогательные функции, это вектора линейной оболочки
```

```
image1 = 2×2
   -0.3846    0.9231
    0.9231    0.3846
```

```
[V1,D1]=eig(A1)
```

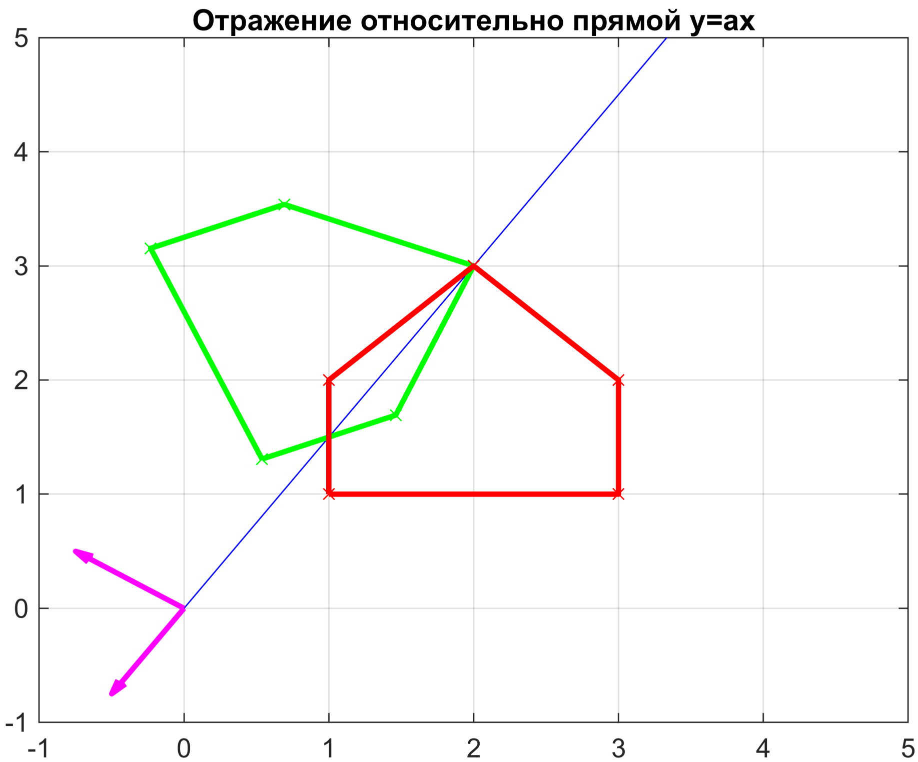
```
V1 = 2×2
   -0.8321   -0.5547
    0.5547   -0.8321
```

```
D1 = 2×2
   -1.0000         0
         0    1.0000
```

```
% где D - диагональная матрица айген_значения,
% V - айген_вектора, которые можно заметить на графике
```

Построение графика

```
x = linspace(0,10,100);
y = a*x;

house_image_coords = A1*house_coords;
figure(3)
plot(x,y, 'b');
title('Отражение относительно прямой y=ax')
xlim([-1 5])
ylim([-1 5])
hold on
grid on
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
hold on
% Собственные вектора из точки (0, 0)
quiver([0 0], [0 0], V1(1,:),V1(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```



2. Отображение всей плоскости в прямую y=bx

Спектральное исследование

```
new2 = [20/13 18/13;
        30/13 27/13];
old2 = [2 3;
       2 1];
A2 = new2*old2^-1
```

```
A2 = 2×2
    0.3077    0.4615
    0.4615    0.6923
```

```
detA2 = det(A2)
```

```
detA2 = -2.3058e-16
```

```
kernel2 = null(A2, 'r')
```

```
kernel2 = 2×1
   -1.5000
    1.0000
```

```
image2 = Image(A2)
```

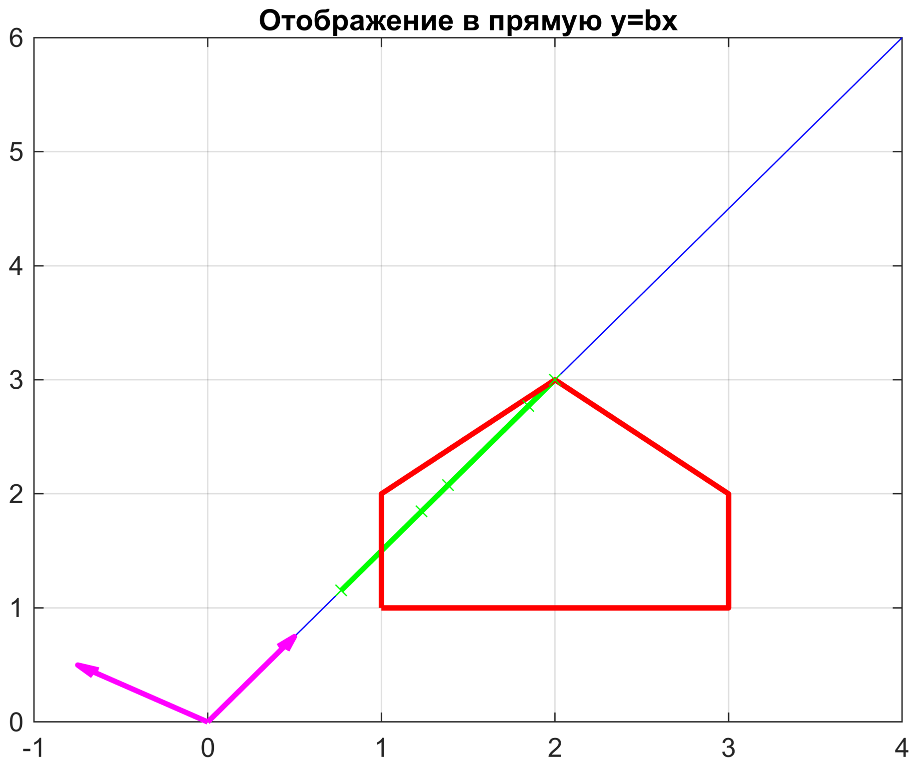
```
image2 = 2×1
    0.3077
    0.4615
```

```
[V2,D2]=eig(A2)
```

```
V2 = 2×2
   -0.8321    0.5547
    0.5547    0.8321
D2 = 2×2
   -0.0000         0
         0    1.0000
```

Построение графика

```
% Строим прямую y=ax
x = linspace(0,4,100);
y = a*x;

house_image_coords = A2*house_coords;

figure(4)
xlim([-1 6])
ylim([-1 6])
plot(x,y, 'b');
title('Отображение в прямую y=bx')
hold on
grid on
plot(x,y, 'b');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
hold on
quiver([0 0], [0 0], V2(1,:),V2(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```



3. Поворот плоскости на 10* против часовой стрелки

Воспользуемся классической матрицей: $R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

```
deg = 10
```

```
deg = 10
```

```
R = -1*[cosd(deg) -sind(deg);
     sind(deg) cos(deg)];

detR = det(R)
```

```
detR = -0.7962
```

```
kernel3 = null(R, 'r')
```

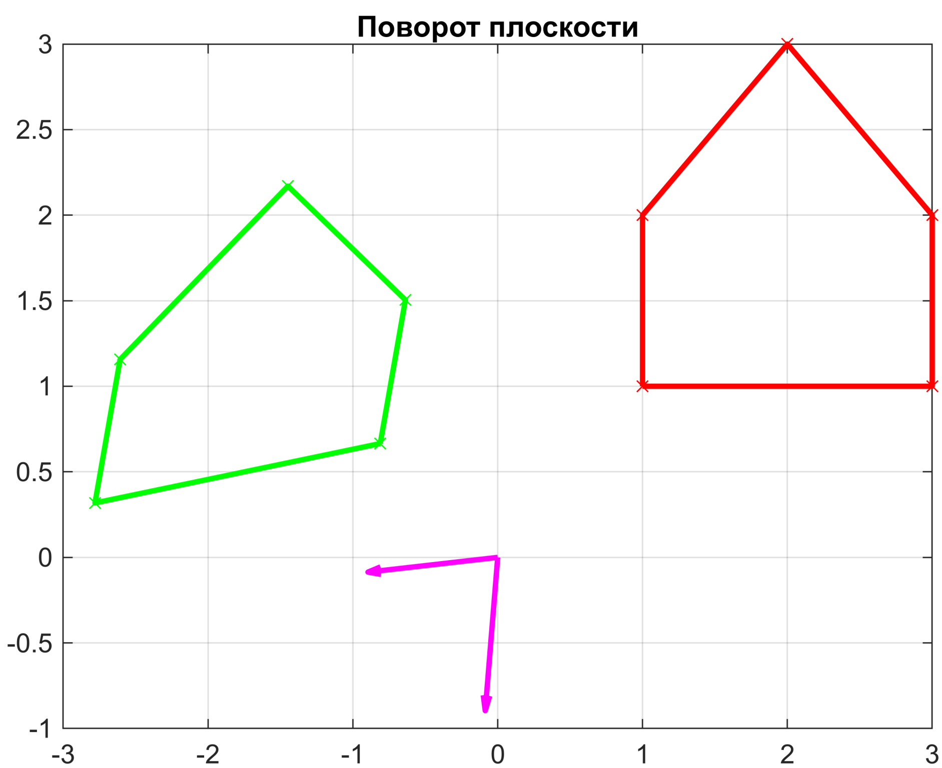
```
kernel3 =

  2×0 empty double matrix
```

```
[V3,D3]=eig(R)
```

```
V3 = 2×2
   -0.9954   -0.0956
   -0.0956   -0.9954
D3 = 2×2
   -0.9681         0
         0    0.8224
```

Построение графика

```
house_image_coords = R*house_coords;
figure(5)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Поворот плоскости')
hold on
grid on
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([0 0], [0 0], V3(1,:),V3(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```



4. Центральная симметрия плоскости относительно начала координат

Такое преобразование можно представить в виде инверсии знака у координат, то есть отрицательная единичная матрица:

```
E = -eye(2)
```

```
E = 2×2
    -1     0
```

```
     0    -1
```

```
detE = det(E)
```

```
detE = 1
```

```
kernel4 = null(E, 'r')
```

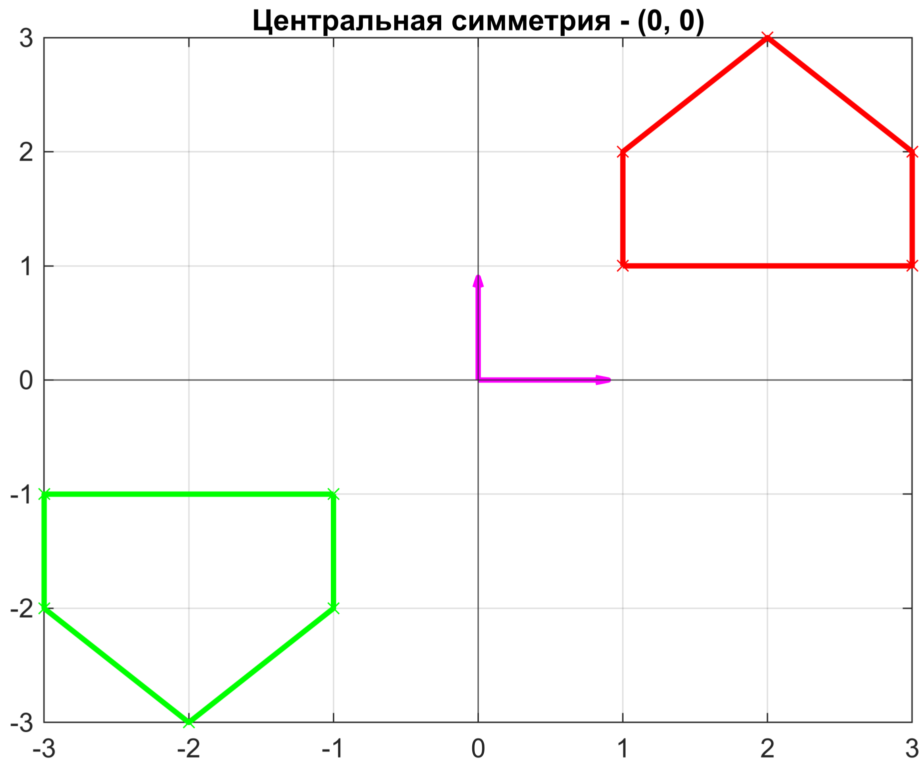
```
kernel4 =

  2×0 empty double matrix
```

```
[V4,D4]=eig(E)
```

```
V4 = 2×2
     1     0
     0     1
D4 = 2×2
    -1     0
     0    -1
```

Строим графики

```
house_image_coords = E*house_coords;
figure(6)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Центральная симметрия - (0, 0)')
xline(0)
yline(0)
hold on
grid on
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([0 0], [0 0], V4(1,:),V4(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```



5. Отражение относительно прямой y = ax, потом поворот на 10° градусов по часовой стрелке

Для этого нам понадобится применить два линейных отображения(в любом порядке), использованных до...

```
deg2 = -10
```

```
deg2 = -10
```

```
R2 = [cosd(deg2) -sind(deg2);
     sind(deg2) cos(deg2)];

det(A2*R2)
```

```
ans = 1.4846e-16
```

```
kernel5 = null(E, 'r')
```

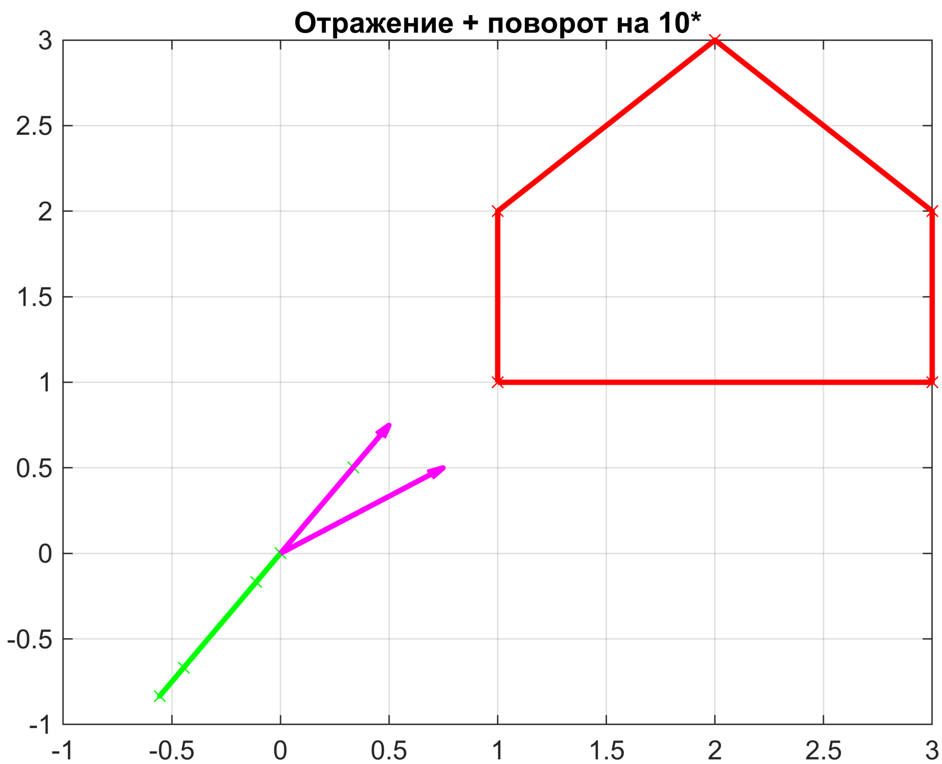
```
kernel5 =

  2×0 empty double matrix
```

```
[V5,D5]=eig(A2*R2)
```

```
V5 = 2×2
    0.8317    0.5547
    0.5552    0.8321
D5 = 2×2
   -0.0000         0
         0   -0.2779
```

Построение графиков

```
house_image_coords = A2*R2*house_coords;
figure(7)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Отражение + поворот на 10*')
hold on
grid on
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
quiver([0 0], [0 0], V5(1,:),V5(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```



6. Отображение, которое переводит прямую y=0 в y=ax и прямую x=0 в y=bx

Здесь уже два условия отображения, попробуем взять одну точку с соблюдением первого переноса, а вторую - со вторым условием:

(1,0) -> (1, 1.5)   и   (0,1) -> (0.5, 1), соберем на их основе матрицу

Важно, что точки, не лежащие на y=0 & x=0 перейдут куда-то, наше отображение это не контролирует

```
new6 = [1 1/2;
        3/2 1]
```

```
new6 = 2×2
    1.0000    0.5000
    1.5000    1.0000
```

```
old6 = [1 0;
        0 1]
```

```
old6 = 2×2
     1     0
     0     1
```

```
A6 = new6*old6^-1
```

```
A6 = 2×2
    1.0000    0.5000
    1.5000    1.0000
```

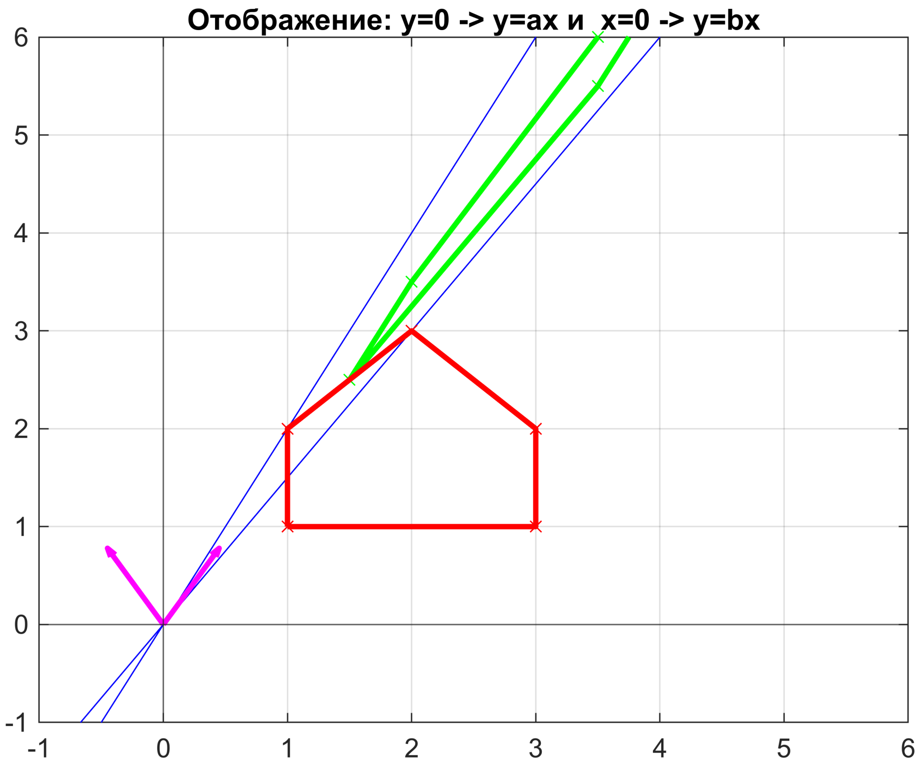
```
[V6,D6]=eig(A6)
```

```
V6 = 2×2
    0.5000   -0.5000
    0.8660    0.8660
D6 = 2×2
    1.8660         0
         0    0.1340
```

Строим графики

```
x = linspace(-1,10,100);
y1 = a*x;
y2 = b*x;

house_image_coords = A6*house_coords;
figure(8)
plot(x,y1, 'b');
title('Отображение: y=0 -> y=ax и  x=0 -> y=bx')
xline(0)
yline(0)
xlim([-1 6])
ylim([-1 6])
hold on
plot(x,y2, 'b');
hold on
grid on
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
hold on
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
```

```
quiver([0 0], [0 0], V6(1,:),V6(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```



7. Отображение, которое переводит прямую y=ax в y=0 и прямую y=bx в x=0

Обратное от предыдущего, проверил в Command Window на паре точек, чтобы проверить

```
new7 = [1 1/2;
        3/2 1]
```

```
new7 = 2×2
    1.0000    0.5000
    1.5000    1.0000
```

```
old7 = [1 0;
        0 1]
```

```
old7 = 2×2
     1     0
     0     1
```

```
A7 = A6^-1
```

```
A7 = 2×2
    4.0000   -2.0000
   -6.0000    4.0000
```

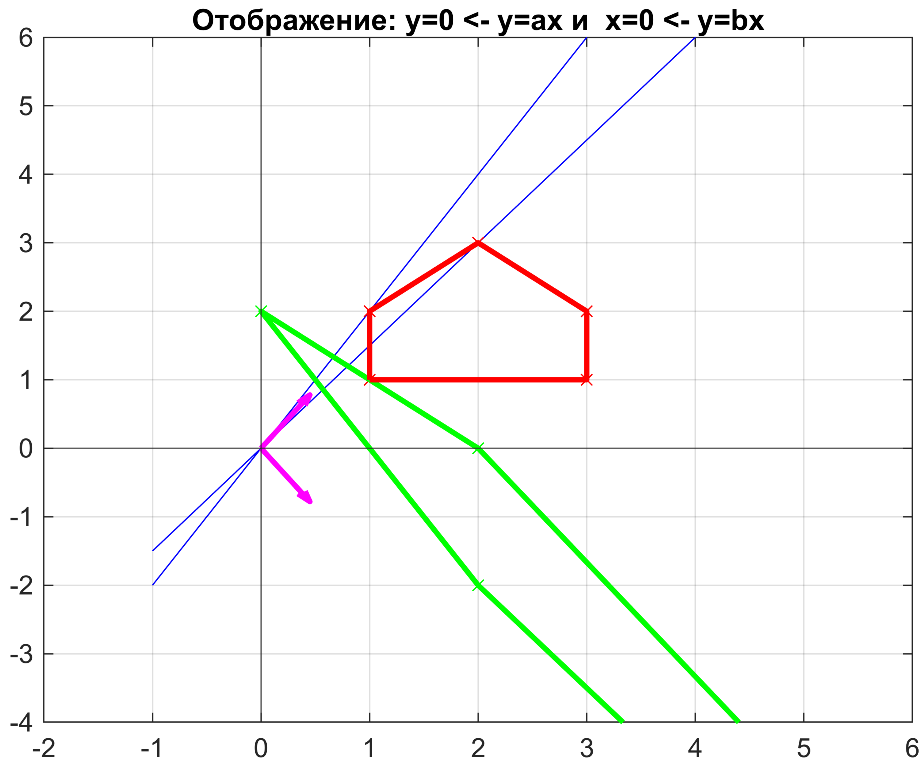
```
[V7,D7]=eig(A7)
```

```
V7 = 2×2
```

```
    0.5000    0.5000
   -0.8660    0.8660
D7 = 2×2
    7.4641         0
         0    0.5359
```

Строим графики

```
x = linspace(-1,10,100);
y1 = a*x;
y2 = b*x;

house_image_coords = A7*house_coords;
figure(9)
plot(x,y1, 'b');
title('Отображение: y=0 <- y=ax и  x=0 <- y=bx')
xline(0)
yline(0)
xlim([-2 6])
ylim([-4 6])
hold on
plot(x,y2, 'b');
hold on
grid on
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
hold on
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([0 0], [0 0], V7(1,:),V7(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```



8. Отображение, которое меняет местами прямые y=ax и y=bx

Возьмем по "хорошей" точке от двух прямых, тогда будем примерно следующая перестановка:

(1 3/2) -> (1 2) и (1 2) -> (1 3/2)

На графике хорошо можно заметить переход точек (2 3) -> (2 4) и (1 2) -> (1 3/2)

```
new8 = [1 1;
        3/2 2]
```

```
new8 = 2×2
    1.0000    1.0000
    1.5000    2.0000
```

```
old8 = [1 1;
        2 3/2]
```

```
old8 = 2×2
    1.0000    1.0000
    2.0000    1.5000
```

```
A8 = new8*old8^-1
```

```
A8 = 2×2
    1.0000         0
    3.5000   -1.0000
```

```
detA8 = det(A8)
```

```
detA8 = -1
```

```
kernel8 = null(A8, 'r')
```

```
kernel8 =

  2×0 empty double matrix
```

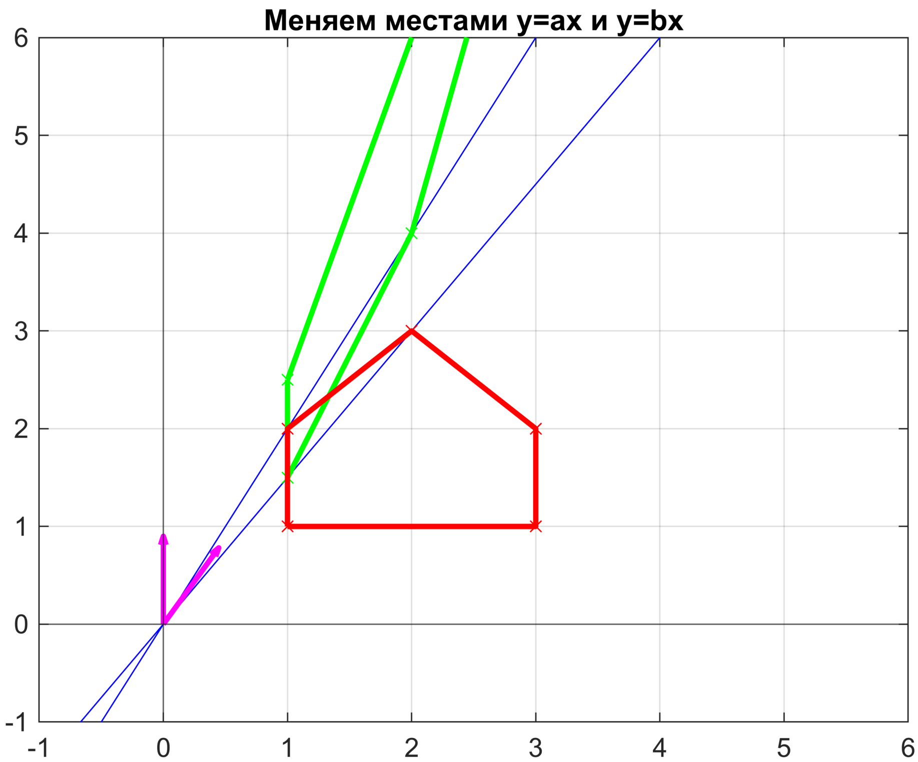
```
image8 = Image(A8)
```

```
image8 = 2×2
    1.0000         0
    3.5000   -1.0000
```

```
[V8,D8]=eig(A8)
```

```
V8 = 2×2
         0    0.4961
    1.0000    0.8682
D8 = 2×2
    -1     0
     0     1
```

```
x = linspace(-1,10,100);
y1 = a*x;
y2 = b*x;
house_image_coords = A8*house_coords;

figure(10)
plot(x,y1, 'b');
title('Меняем местами y=ax и y=bx')
grid on
xline(0)
yline(0)
xlim([-1 6])
ylim([-1 6])
hold on
plot(x,y2, 'b');
hold on
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
hold on
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([0 0], [0 0], V8(1,:),V8(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```



9. Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в круг площади с

Отображение, которое по сути растягивает пространство в "новый_радиус" раз

Возьмем вместо домика другую сетку -> круг радиуса 1 и пару случайных точек внутри него

```
% Посчитаем радиус нового круга
r = sqrt(c/(2*pi));
A10 = [r 0;
      0 r]
```

```
A10 = 2×2
    0.7979         0
         0    0.7979
```

```
% Создаем координаты круга и внутренностей
angles = linspace(0, 2*pi, 50); % 50 точек круга
circle_coords = [cos(angles); sin(angles)]
```

```
circle_coords = 2×50
    1.0000    0.9918    0.9673    0.9269    0.8713    0.8014    0.7183    0.6235 ⋯
         0    0.1279    0.2537    0.3753    0.4907    0.5981    0.6957    0.7818
```

```
n = 10 % количество рандомных точек внутри единичного круга
```

```
n = 10
```

```
t = 2*pi*rand(n,1);
r = sqrt(rand(n,1));
```

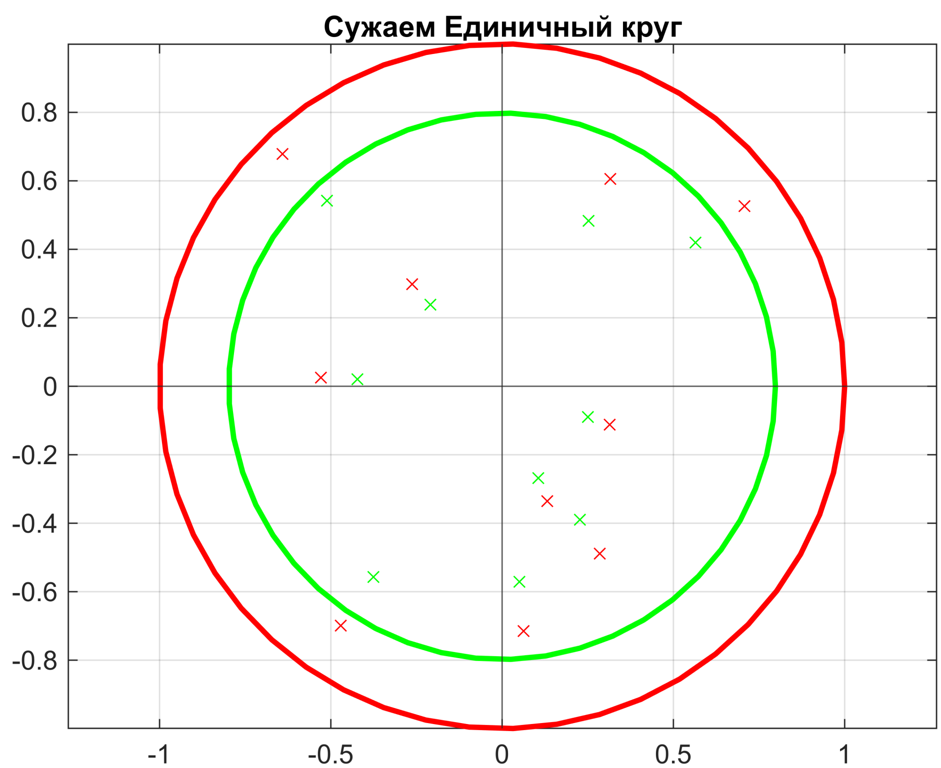
```
dots_coords = [transpose(r.*cos(t)); transpose(r.*sin(t))]
```

```
dots_coords = 2×10
    0.0628    0.3163    0.2852   -0.5290    0.7074   -0.2623    0.1319   -0.4712 ···
   -0.7151    0.6055   -0.4889    0.0256    0.5259    0.2986   -0.3358   -0.6986
```

```
circle_image_coords = A10*circle_coords;
dots_image_coords = A10*dots_coords;
```

Строим графики

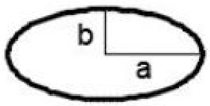
```
figure(11)
plot(dots_coords(1,:),dots_coords(2,:), 'xr');
title('Сужаем Единичный круг')
xline(0)
yline(0)
axis equal
grid on
hold on
plot(dots_image_coords(1,:),dots_image_coords(2,:), 'xg');
hold on
plot(circle_coords(1,:), circle_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(circle_image_coords(1,:), circle_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold off
```



10. Отображение, которое переводит круг единичной площади с центром в начале координат в некруг площади d

Пусть некругом станет эллипс площади d, вспомним формулу его площади

$S = \pi \mathrm{ab}$



Тогда пусть $a = 2$, тогда $b = \frac{S}{\pi * a} = \frac{d}{\pi * a}$ соответственно

Для построение матрицы отображения вспомним, что эллипс - по сути растянутый круг по Ox & Oy независимо на разный положительный коэффициент, воспользуемся этим, но с коэффициентами x, y ниже...

```
x = 2
```

```
x = 2
```

```
y = d/(pi*x)
```

```
y = 0.9549
```

```
A10 = [y 0;
       0  x]
```

```
A10 = 2×2
    0.9549         0
         0    2.0000
```

```
x = linspace(-1,10,100);
% Создаем координаты круга и внутренностей
angles = linspace(0, 2*pi, 50); % 50 точек круга
circle_coords = [cos(angles); sin(angles)]
```

```
circle_coords = 2×50
    1.0000    0.9918    0.9673    0.9269    0.8713    0.8014    0.7183    0.6235 ···
         0    0.1279    0.2537    0.3753    0.4907    0.5981    0.6957    0.7818
```

```
n = 10 % количество рандомных точек внутри единичного круга
```

```
n = 10
```

```
t = 2*pi*rand(n,1);
r = sqrt(rand(n,1));
dots_coords = [transpose(r.*cos(t)); transpose(r.*sin(t))]
```

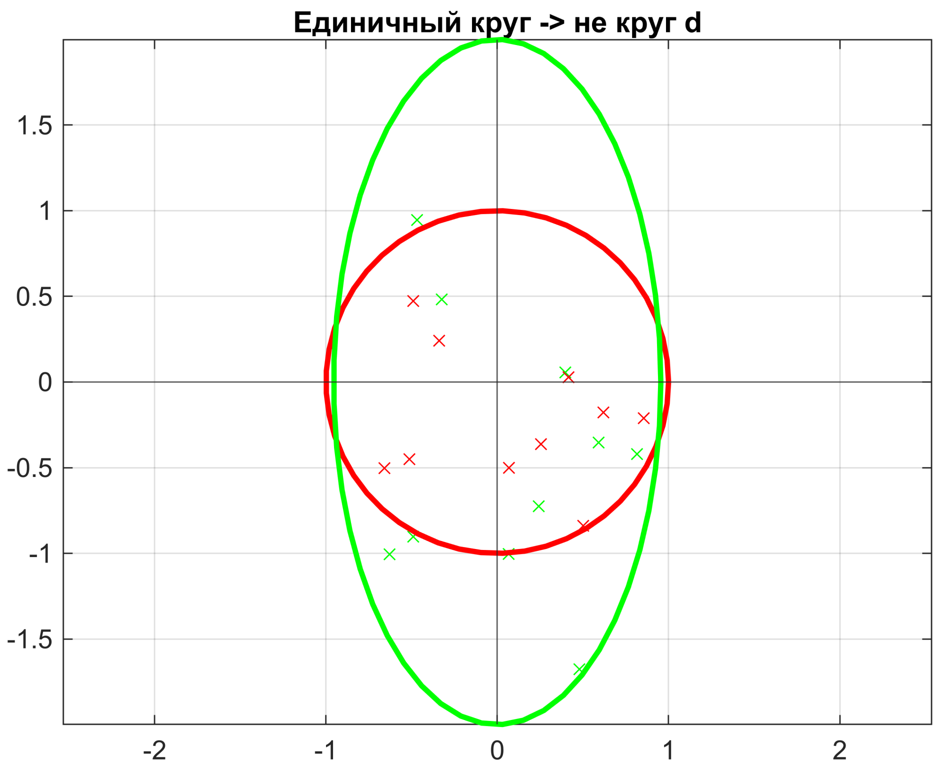
```
dots_coords = 2×10
    0.8547   -0.5131    0.2544   -0.6581   -0.3393    0.5022   -0.4900    0.6198 ···
   -0.2103   -0.4510   -0.3629   -0.5028    0.2409   -0.8383    0.4731   -0.1770
```

```

circle_image_coords = A10*circle_coords;
```

```
dots_image_coords = A10*dots_coords;
```

Строим графики

```
figure(12)
plot(dots_image_coords(1,:),dots_image_coords(2,:), 'xg');
title('Единичный круг -> не круг d')
axis equal
xline(0)
yline(0)
grid on
hold on
plot(dots_coords(1,:),dots_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(circle_coords(1,:), circle_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(circle_image_coords(1,:), circle_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold off
```



11. Отображение, у которого собственные вектора перпендикулярны, и ни один из них не лежит на прямой y=0 или y=x

У вещественных симметричных матриц собственные вектора перпендикулярны, воспользуемся этим свойством, подобрав коэффициенты под условие

```
A11 = [-5 2;
        2 -1]
```

```
A11 = 2×2
    -5     2
     2    -1
```

```
detA11 = det(A11)
```

```
detA11 = 1.0000
```

```
kernel11 = null(A11, 'r')
```

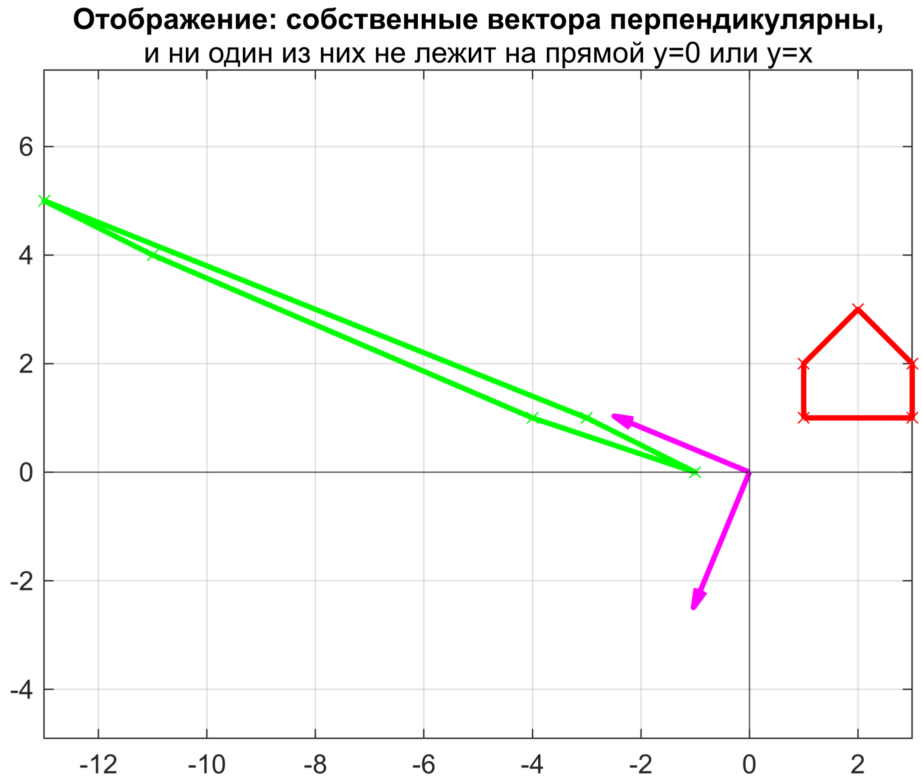
```
kernel11 =

  2×0 empty double matrix
```

```
[V11,D11]=eig(A11)
```

```
V11 = 2×2
   -0.9239   -0.3827
    0.3827   -0.9239
D11 = 2×2
   -5.8284         0
         0   -0.1716
```

Построение графика

```
house_image_coords = A11*house_coords;
figure(67)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Отображение: собственные вектора перпендикулярны,','и ни один из них не лежит на прямой
hold on
axis equal
grid on
xline(0)
yline(0)
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([0 0], [0 0], V11(1,:)*3,V11(2,:)*3,'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```



12. Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов.

Упрощяя условия, получаем, что нам нужно отображение, что два вектора должны быть коллинеарны здесь, но они тогда будут линейно зависимы, поэтому один из них обязан быть нулевым, а второй - произвольный

```
A12 = [-1 0;
    2 -1]
```

```
A12 = 2×2
    -1     0
     2    -1
```

```
detA12 = det(A12)
```

```
detA12 = 1
```

```
kernel12 = null(A12, 'r')
```

```
kernel12 =

  2×0 empty double matrix
```

```
[V12,D12]=eig(A12)
```

```
V12 = 2×2
         0    0.0000
    1.0000   -1.0000
D12 = 2×2
```

```
-1     0
 0    -1
```

Построение графика

```
house_image_coords = A12*house_coords;
figure(68)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Отображение, у которого нет двух неколлинеарных собственных векторов')
hold on
grid on
xline(0)
yline(0)
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([0 0], [0 0], V12(1,:),V12(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```

13. Отображение, у которого нет ни одного вещественного собственного вектора (но при этом само отображение задаётся вещественной матрицей).

Подойдет такая матрица поворота. Для разнообразия домножим на константу, чтобы еще и растянуть пространство бонусом

```
R13 = 0.4* [0 2;
           -1 0];
image13 = Image(R13)
```

```
image13 = 2×2
         0    0.8000
   -0.4000         0
```

```
detR13 = det(R13)
```

```
detR13 = 0.3200
```

```
kernel13 = null(R13, 'r')
```

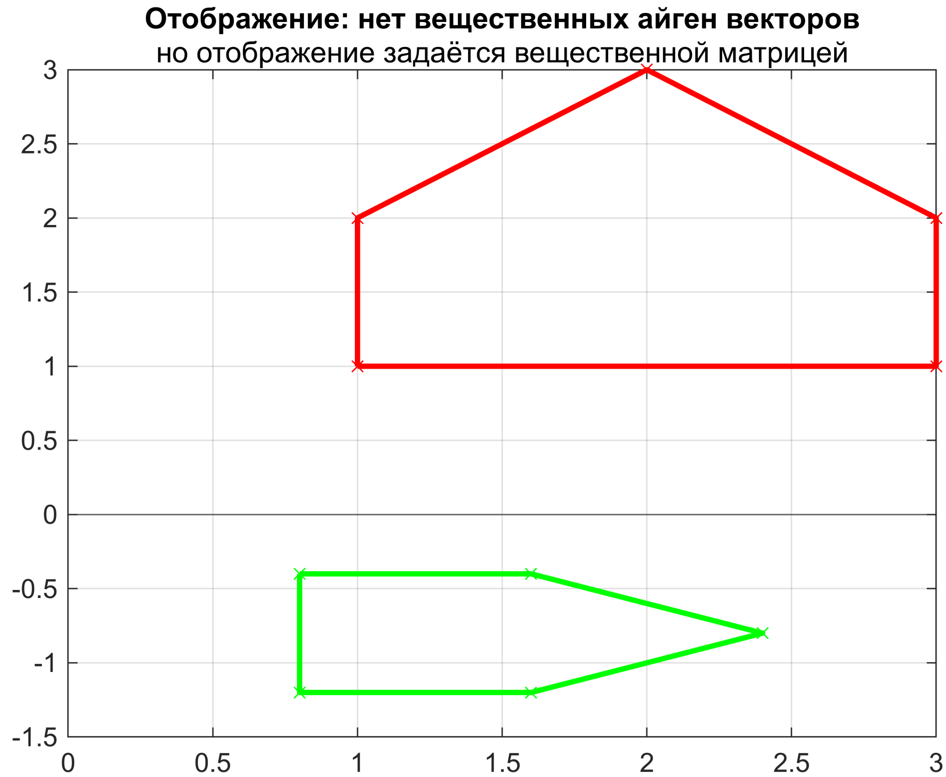
```
kernel13 =

  2×0 empty double matrix
```

```
[V13,D13]=eig(R13)
```

```
V13 = 2×2 complex
   0.8165 + 0.0000i   0.8165 + 0.0000i
   0.0000 + 0.5774i   0.0000 - 0.5774i
D13 = 2×2 complex
   0.0000 + 0.5657i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.5657i
```

Построение графика

```
house_image_coords = R13*house_coords;
figure(69)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Отображение: нет вещественных айген векторов','но отображение задаётся вещественной матр
hold on
grid on
xline(0)
yline(0)
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold off
```



14. Отображение, для которого любой ненулевой вектор является собственным

Логично предположить, что эта должна быть матрица, возвращающая тот же вектор, то есть единичная

```
k = 0.2
```

```
k = 0.2000
```

```
A14 = k*eye(2)
```

```
A14 = 2×2
    0.2000         0
         0    0.2000
```

```
detA14 = det(A14)
```

```
detA14 = 0.0400
```

```
image14 = Image(A14)
```

```
image14 = 2×2
    0.2000         0
         0    0.2000
```

```
kernel14 = null(A14, 'r')
```

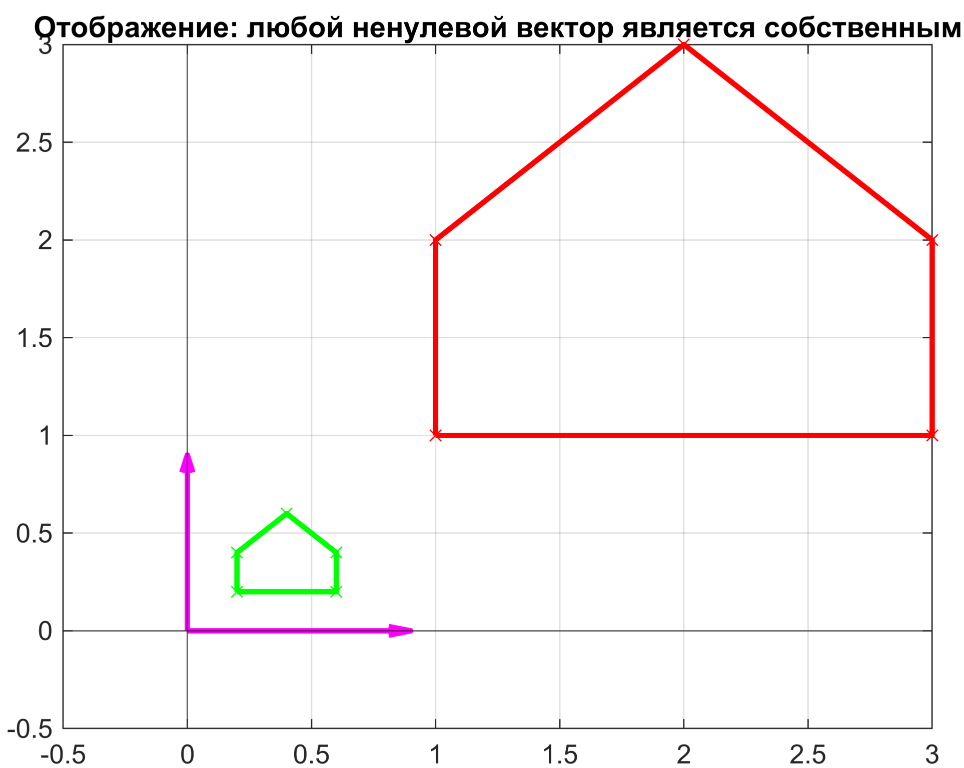
```
kernel14 =

  2×0 empty double matrix
```

```
[V14,D14]=eig(A14)
```

```
V14 = 2×2
     1     0
     0     1
D14 = 2×2
    0.2000         0
         0    0.2000
```

Построение графика

```
house_image_coords = A14*house_coords;
figure(70)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Отображение: любой ненулевой вектор является собственным')
hold on
grid on
xline(0)
yline(0)
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([0 0], [0 0], V14(1,:),V14(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```



15. Пару отображений, последовательное применение которых даёт различные результаты в зависимости от порядка: AB != BA

Так как матрицы в общем случае не коммутативные, то можем себе позволить взять произвольные A,B, предврательно перемножив их, чтобы навсякий проверить:

```
A15 = [3 -1; 1 0];
B15 = [0 2; 1 2];
A15*B15
```

```
ans = 2×2
    -1     4
     0     2
```

```
B15*A15
```

```
ans = 2×2
     2     0
     5    -1
```

```
[VA15,DA15]=eig(A15)
```

```
VA15 = 2×2
    0.9342    0.3568
    0.3568    0.9342
DA15 = 2×2
    2.6180         0
         0    0.3820
```

```
[VB15,DB15]=eig(B15)
```

```
VB15 = 2×2
   -0.9391   -0.5907
    0.3437   -0.8069
DB15 = 2×2
   -0.7321         0
         0    2.7321
```

```
[VAB15,DAB15]=eig(A15*B15)
```

```
VAB15 = 2×2
    1.0000    0.8000
         0    0.6000
DAB15 = 2×2
    -1     0
     0     2
```

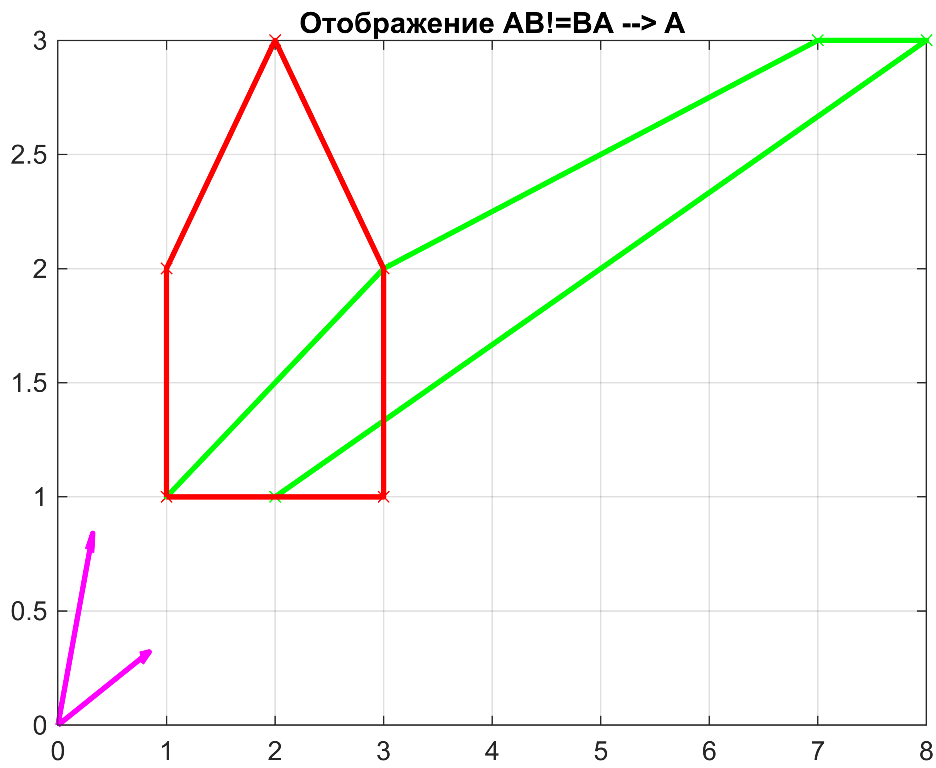
```
[VBA15,DBA15]=eig(B15*A15)
```

```
VBA15 = 2×2
         0    0.5145
    1.0000    0.8575
DBA15 = 2×2
    -1     0
     0     2
```

Построение графиков

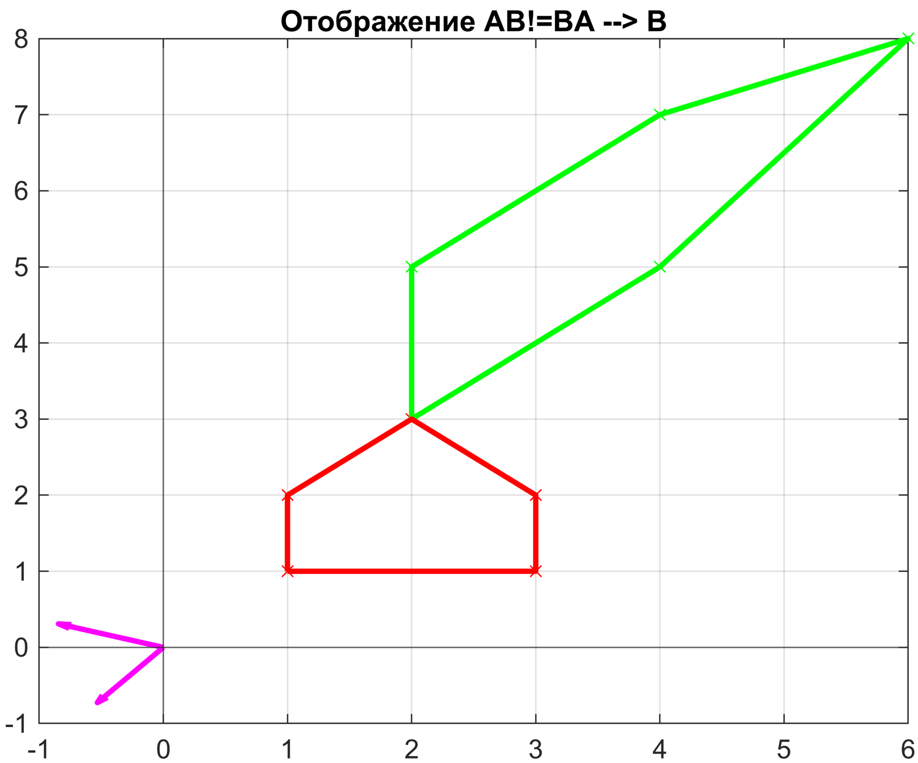
```
%--A--%
```

```
house_image_coords = A15*house_coords;
figure(71)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Отображение AB!=BA --> A')
hold on
grid on
xline(0)
yline(0)
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([0 0], [0 0], VA15(1,:),VA15(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```



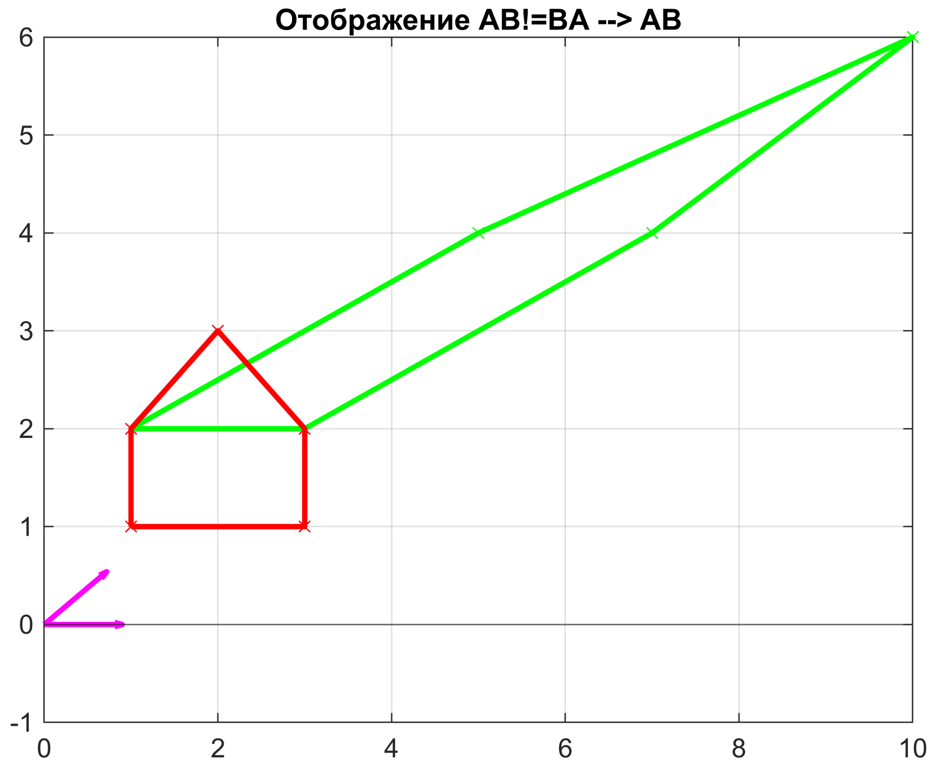

```
%--B--%
house_image_coords = B15*house_coords;
figure(72)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Отображение AB!=BA --> B')
hold on
grid on
xline(0)
yline(0)
```

```
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([0 0], [0 0], VB15(1,:),VB15(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```

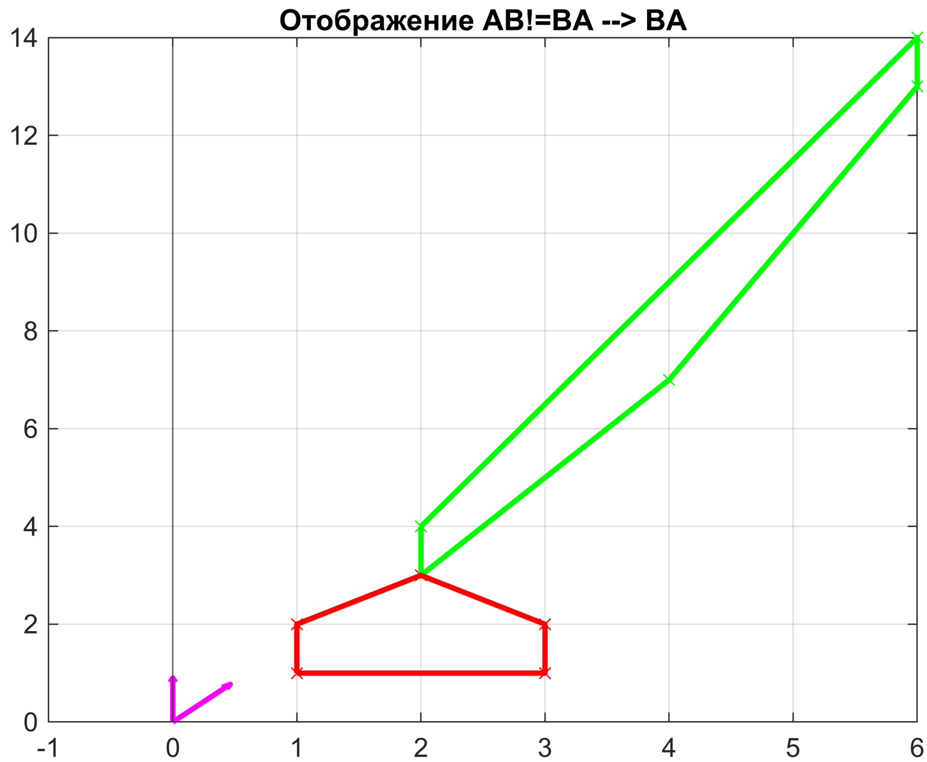



```
%--AB--%
house_image_coords = A15*B15*house_coords;
figure(73)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Отображение AB!=BA --> AB')
hold on
grid on
xline(0)
yline(0)
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([0 0], [0 0], VAB15(1,:),VAB15(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
```

```
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
```




```
%--BA--%
house_image_coords = B15*A15*house_coords;
figure(74)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Отображение AB!=BA --> BA')
hold on
grid on
xline(0)
yline(0)
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([0 0], [0 0], VBA15(1,:),VBA15(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
```



16. Пару отображений, последовательное применение которых даёт одинаковый результат независимо от порядка: AB=BA

Очевидным примером может послужить: поворот+расширение, но мы не ищем легких путей...

Поиграем с произвольностью операций, запишем умножение матриц в общем виде с двух сторон:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ae} + \mathrm{bg} & \mathrm{af} + \mathrm{bh} \\ \mathrm{ce} + \mathrm{dg} & \mathrm{cf} + \mathrm{dh} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{ae} + \mathrm{fc} & \mathrm{ae} + \mathrm{fb} \\ \mathrm{ga} + \mathrm{hc} & \mathrm{gb} + \mathrm{hd} \end{bmatrix}$$

Начав с равенства $\mathrm{ae} + \mathrm{bg} = \mathrm{ae} + \mathrm{fc}$ подставляем произвольные числа и молимся, чтобы все это сошлось на последней клетке.

Но давайте просто автоматизируем этот процесс :)

С помощью функции генерируем пары коммутирующих матриц, пока не выпадут максимально не похожие друг на друга пары, в моем случае это...

```
% [A16,B16] = generateCommutative()
A16 = [-2 3; 9 1];
B16 = [1 1; 3 2];
% проверяем, потому что матлаб может выдать странные пары
A16*B16
```

```
ans = 2×2
     7     4
```

```
    12    11
```

```
B16*A16
```

```
ans = 2×2
     7     4
    12    11
```

```
[VA16,DA16]=eig(A16)
```

```
VA16 = 2×2
   -0.6089   -0.3983
    0.7933   -0.9172
DA16 = 2×2
   -5.9083         0
         0    4.9083
```

```
[VB16,DB16]=eig(B16)
```

```
VB16 = 2×2
   -0.6089   -0.3983
    0.7933   -0.9172
DB16 = 2×2
   -0.3028         0
         0    3.3028
```

```
[VAB16,DAB16]=eig(A16*B16)
```

```
VAB16 = 2×2
   -0.6089   -0.3983
    0.7933   -0.9172
DAB16 = 2×2
    1.7889         0
         0   16.2111
```

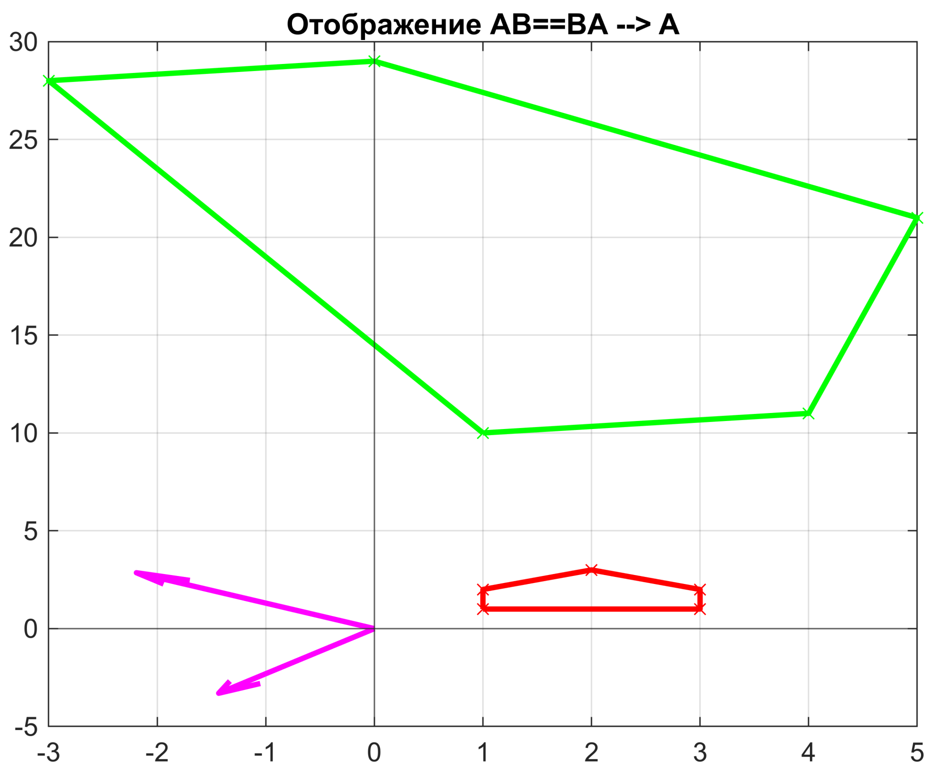
```
[VBA16,DBA16]=eig(B16*A16)
```

```
VBA16 = 2×2
   -0.6089   -0.3983
    0.7933   -0.9172
DBA16 = 2×2
    1.7889         0
         0   16.2111
```

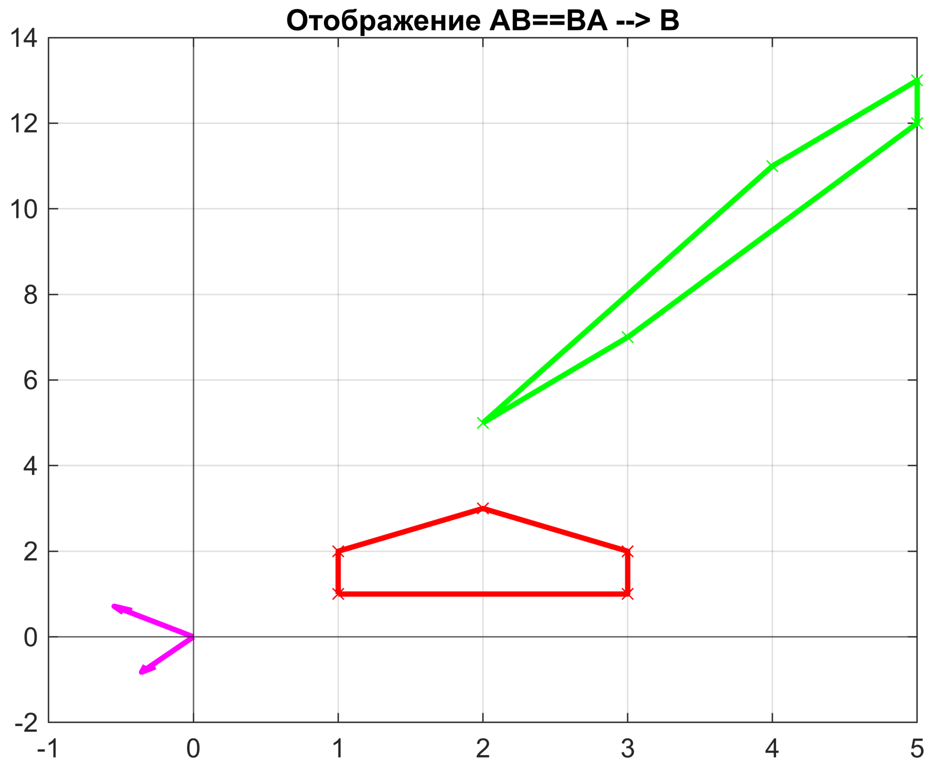
Построение графиков

```
%--A--%
house_image_coords = A16*house_coords;
figure(75)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Отображение AB==BA --> A')
hold on
grid on
xline(0)
yline(0)
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
```

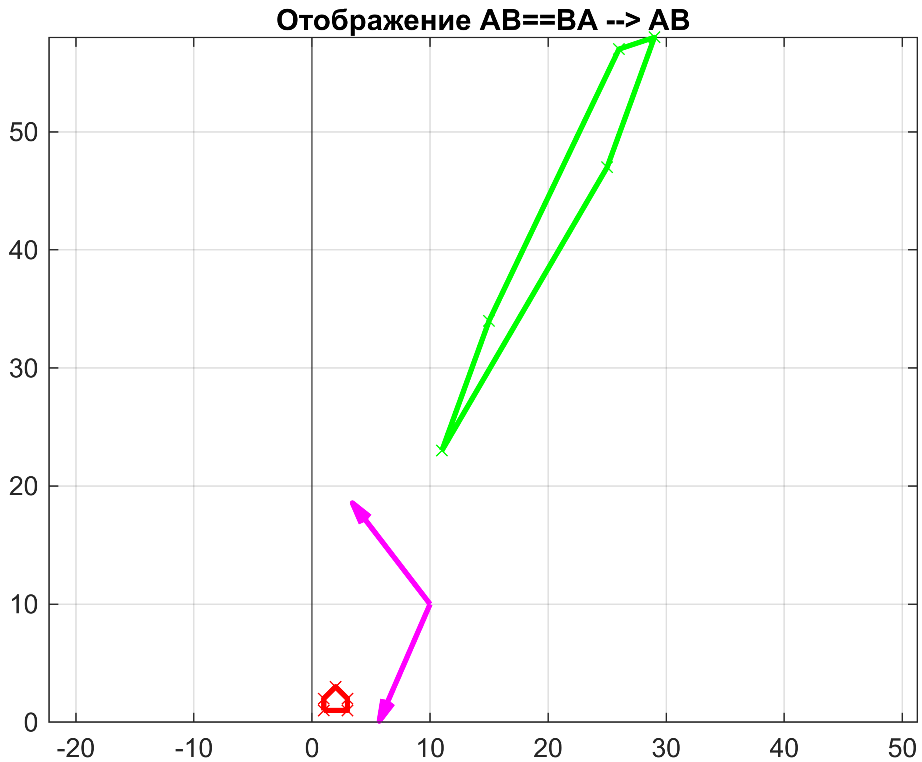
```
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([0 0], [0 0], VA16(1,:)*4,VA16(2,:)*4,'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```



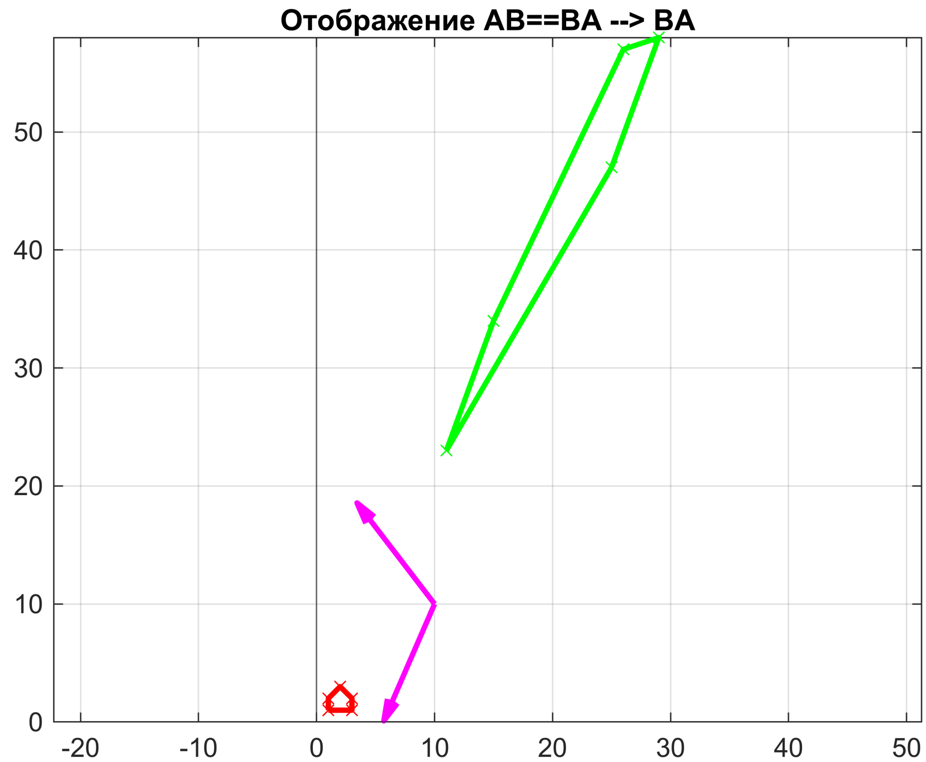

```
%--B--%
house_image_coords = B16*house_coords;
figure(76)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Отображение AB==BA --> B')
hold on
grid on
xline(0)
yline(0)
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([0 0], [0 0], VB16(1,:),VB16(2,:),'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
hold off
```



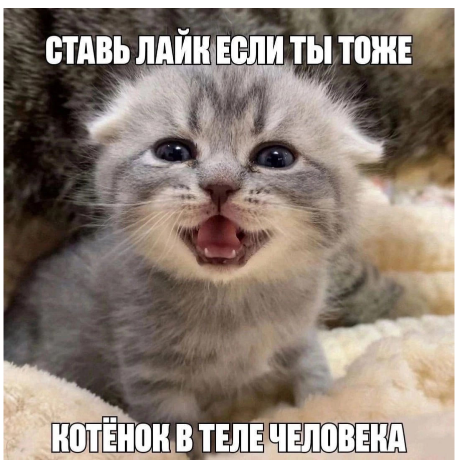

```
%--AB--%
house_image_coords = A16*B16*house_coords;
figure(77)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Отображение AB==BA --> AB')
axis equal
hold on
grid on
xline(0)
yline(0)
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([10 10], [10 10], VAB16(1,:)*12,VAB16(2,:)*12,'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
```




```
%--BA--%
house_image_coords = B16*A16*house_coords;
figure(78)
plot(house_image_coords(1,:),house_image_coords(2,:), 'xg');
title('Отображение AB==BA --> BA')
axis equal
hold on
grid on
xline(0)
yline(0)
plot(house_coords(1,:),house_coords(2,:), 'xr');
hold on
plot(house_image_coords(1,:), house_image_coords(2,:), 'g', 'LineWidth', 2);
hold on
plot(house_coords(1,:), house_coords(2,:), 'r', 'LineWidth', 2);
hold on
quiver([10 10], [10 10], VBA16(1,:)*12,VBA16(2,:)*12,'m','LineWidth', 2, 'MaxHeadSize', ...
    0.3,'MaxHeadSize', 0.3)
```



Поздравляю, вы выдержали небольшое испытание матлабом...



По поводу симметричных матриц в отображениях

Вспомним, что симметричные матрицы имеют следующие свойства:

1. Всегда имеют только вещественные айген значения.
2. Имеют ортогональные айген векторы, которые соответствуют различным айген значениям.3. Ортогональность: Если матрица преобразования является симметричной, то она описывает ортогональное преобразование. Это означает, что длина и углы между векторами сохраняются после преобразования.

3. Логично предположить, что симметричная матрица задает симметричное преобразование

Поэтому подойдут любые отображения со словом "симметрия" - это пункт 1,2,3(тригонометрическое),4

5-й пункт включает в себя композицию двух отображений - растяжение(который все портит) + поворот, *не подходит нам*

Отображение, задаваемыми диагональными матрицами -> 9,10 пункт, с кругами, тоже подойдут

<u>В последующих пунктах симметричная матрица не может быть в общем случае</u>

Вспомогательные функции и их описание

Поиск образа матрицы путем "приведенного ступенчатого вида"

Результат - является линейной оболочкой натянутой на базисные вектора ниже

```
function range = Image(A)
    range=[];
    r = rank(A);
    gaussian= rref(A);
    for i=1:2
        if all(gaussian(:,i) == 0 | gaussian(:,i) == 1)
            if size(range,2)<r
                range =[range A(:, i)];
            end
        end
    end
end
```

Генерируем коммутирующую матрицу к заданной

```
function [m1,m2] = generateCommutative()
    m1 = zeros([2,2]);
    m2 = zeros([2,2]);
    while true
        m1= randi([-10 10], 2, 2);
        m2= randi([-10 10], 2, 2);
        if isequal(m2*m1,m1*m2) && isreal(eig(m2)) && isreal(eig(m1))
            break
        end
    end
end
```