2022.12.12 汇报

周添文

数学科学学院
北京师范大学

Radon 变换

在上周的文章中，作者对方程

$$\hat{\tilde{F}}_k(\mathbf{x}_{global}) = \tilde{G}_k(\mathbf{x}_{global}) - I(\mathbf{x}_{global}) \tag{1}$$

得到的 $\hat{\tilde{F}}_k(\mathbf{x}_{global})$，关于每一帧 k 进行 Radon 变换，下面我们探究 Radon 变换的方法和意义。

Radon 变换

在上周的文章中，作者对方程

$$\tilde{\hat{F}}_k(\mathbf{x}_{global}) = \tilde{G}_k(\mathbf{x}_{global}) - I(\mathbf{x}_{global}) \tag{1}$$

得到的 $\tilde{\hat{F}}_k(\mathbf{x}_{global})$，关于每一帧 k 进行 Radon 变换，下面我们探究 Radon 变换的方法和意义。
整体上来说，Radon 变换是用于进行直线探测的工具。具体而言，其本质是将原来的函数做了一个空间转换，即，将原来的 XY 平面内的点映射到 AB 平面上，那么原来在 XY 平面上的一条直线的所有的点在 AB 平面上都位于同一点。记录 AB 平面上的点的积累厚度，便可知 XY 平面上的**线的存在性**。

Radon 变换

在上周的文章中，作者对方程

$$\hat{\tilde{F}}_k(\mathbf{x}_{global}) = \tilde{G}_k(\mathbf{x}_{global}) - I(\mathbf{x}_{global}) \quad (1)$$

得到的 $\hat{\tilde{F}}_k(\mathbf{x}_{global})$，关于每一帧 k 进行 Radon 变换，下面我们探究 Radon 变换的方法和意义。
整体上来说，Radon 变换是用于进行直线探测的工具。具体而言，其本质是将原来的函数做了一个空间转换，即，将原来的 XY 平面内的点映射到 AB 平面上，那么原来在 XY 平面上的一条直线的所有的点在 AB 平面上都位于同一点。记录 AB 平面上的点的积累厚度，便可知 XY 平面上的**线的存在性**。

Radon 变换的操作

首先，对于平面中的任意一条直线，我们可以用如下的 ρ, θ 表示法进行表示：

$$L(\rho, \theta) = \{(x, y) : xcos\theta + ysin\theta = \rho\} \tag{2}$$

Radon 变换的操作

首先，对于平面中的任意一条直线，我们可以用如下的 ρ, θ 表示法进行表示：

$$L(\rho, \theta) = \{(x, y) : xcos\theta + ysin\theta = \rho\} \tag{2}$$

其几何意义见下图：

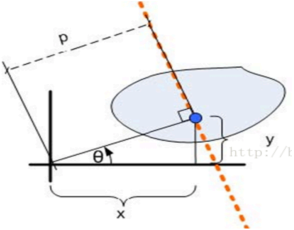

图: 直线参数式的几何意义

Radon 变换的操作

取 $f(x,y)$ 为图像的灰度（或辐照度）函数，则由曲线积分的物理意义

$$\int_L f(x,y)ds \tag{3}$$

表示沿图像上某一条直线 L 的灰度之和。对于不同的直线 L，这一积分的值越大，代表这一直线上的灰度越大，也就意味着在原始图像上，此处**更有可能是一条直线**。

Dirac 函数及其性质

下面，我们来看如何计算函数的 Radon 变换值。首先，我们引入 Dirac 函数

Dirac 函数及其性质

下面，我们来看如何计算函数的 Radon 变换值。首先，我们引入 Dirac 函数

我们知道，Dirac 函数是一个广义函数，其定义如下：

$$\delta(x) = 0, (x \neq 0) \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{5}$$

Dirac 函数及其性质

下面，我们来看如何计算函数的 Radon 变换值。首先，我们引入 Dirac 函数

我们知道，Dirac 函数是一个广义函数，其定义如下：

$$\delta(x) = 0, (x \neq 0) \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{5}$$

下面，我们给出 Dirac 函数的重要性质：

定理

若 $\phi(x)$ 为连续函数，且 $\phi(x)$ 仅有一阶零点 $x_k, k = 1, 2, ...$，则：

$$\delta[\phi(x)] = \Sigma_{k=1}^{N} \frac{\delta(x - x_k)}{|\phi'(x_k)|} \tag{6}$$

Dirac 函数及其性质

下面，我们来看如何计算函数的 Radon 变换值。首先，我们引入 Dirac 函数

我们知道，Dirac 函数是一个广义函数，其定义如下：

$$\delta(x) = 0, (x \neq 0) \tag{4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \tag{5}$$

下面，我们给出 Dirac 函数的重要性质：

定理

若 $\phi(x)$ 为连续函数，且 $\phi(x)$ 仅有一阶零点 $x_k, k = 1, 2, ...$，则：

$$\delta[\phi(x)] = \Sigma_{k=1}^{N} \frac{\delta(x - x_k)}{|\phi'(x_k)|} \tag{6}$$

因此，我们有如下公式：

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(f(x))dx = \Sigma_{k=1}^{N} \frac{g(x_i)}{|f'(x_i)|} \tag{7}$$

我们知道，曲线积分的计算方法如下：

$$\int_L f(\mathbf{x})ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y(s))\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx \tag{8}$$

我们知道，曲线积分的计算方法如下：

$$\int_L f(\mathbf{x})ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y(s))\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx \tag{8}$$

因此，Radon 变换可以改写为:

$$\int_L f(x, y)ds = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\delta(xcos\theta + ysin\theta - \rho)dxdy \tag{9}$$

由此可见，平面上的一条直线 $L(\rho,\theta)$ 唯一对应着一个积分值，对于不同的角度 θ 而言，其对应着一族直线 L。因此，各个角度下的不同直线的 Radon 变换值，构成了一幅 **Radon 变换图**。

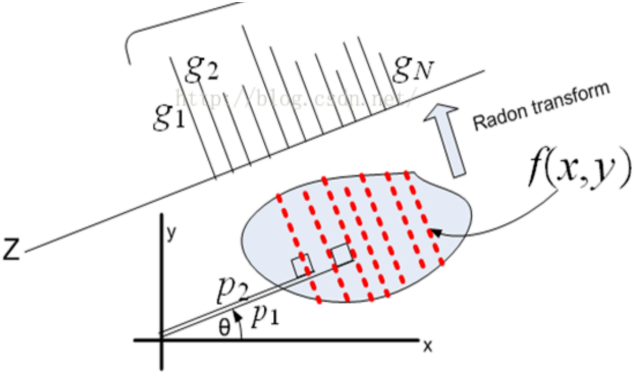

图: Radon 变换

文章中的操作

现在，我们回顾文章中的操作，其对耀斑估计的辐照度函数

$$\hat{\tilde{F}}_k(\mathbf{x}_{global}) \tag{10}$$

现在，我们回顾文章中的操作，其对耀斑估计的辐照度函数

$$\hat{\tilde{F}}_k(\mathbf{x}_{global}) \tag{10}$$

进行 Radon 变换，实际上就是求耀斑图像中的直线对应的线积分值，其形状约接近直线，Radon 变换的值也会越大。
而 Radon 变换图中某一点应的点的亮度则反映了直线 $L(\rho, \theta)$ 对应的积分值大小，积分值越大，该点的亮度也就越大，说明该点对应的直线 $L(\rho, \theta)$ 更有可能是原图像中的一条直线。

耀斑大小的确定

原文中并未提及如何确定直线附近耀斑的大小，其仅仅说在直线 I_k^{flare} 附近的一个条带（band）上进行操作，但并没有说如何确定条带的带宽。

图像配准的方法

关于图像配准（对齐）的方法，原文同样没有说明用的是哪种对其方法，但通过学习，我发现目前有许多成熟的图像对齐方法，也有可以直接操作的程序或软件可用。

图像配准的方法

关于图像配准（对齐）的方法，原文同样没有说明用的是哪种对其方法，但通过学习，我发现目前有许多成熟的图像对齐方法，也有可以直接操作的程序或软件可用。
其基本的目的是将一个场景的不同图片转换到相同的坐标系中。而其原则是将空间中同一位置的点一一对应起来，进行信息融合。

图像配准的方法

关于图像配准（对齐）的方法，原文同样没有说明用的是哪种对其方法，但通过学习，我发现目前有许多成熟的图像对齐方法，也有可以直接操作的程序或软件可用。
其基本的目的是将一个场景的不同图片转换到相同的坐标系中。而其原则是将空间中同一位置的点一一对应起来，进行信息融合。
其主要的步骤为：

- 特征检测
- 特征匹配
- 转换模型估计
- 图像重采样、图像转换

图像配准的方法

目前已有的成熟方法如下：

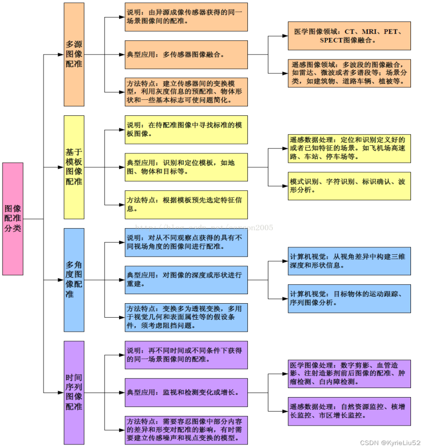

图: 图像配准方法