2022.11.14 汇报

周添文

数学科学学院
北京师范大学

基于 Lossy Source Coding 和 Sparse Transform Matrix 的杂散光抑制方法

- 杂散光的 Point Spread Function(PSF)
- 有损编码 (Lossy Source Coding)
- 稀疏矩阵变换 (STM)

杂散光的 Point Spread Function

迭代法描述图像还原过程

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + y - A\hat{x}_t \tag{1}$$

杂散光的 Point Spread Function

迭代法描述图像还原过程

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + y - A\hat{x}_t \tag{1}$$

其中，y 是观察到的图像，$\hat{x}_t$ 是第 t 次迭代后的估计图像，而

$$A = ((1-\beta)G_{DA} + \beta S_{STR}) \tag{2}$$

描述的是杂散光对图像的影响作用

杂散光的 Point Spread Function

迭代法描述图像还原过程

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + y - A\hat{x}_t \tag{1}$$

其中，y 是观察到的图像，$\hat{x}_t$ 是第 t 次迭代后的估计图像，而

$$A = ((1-\beta)G_{DA} + \beta S_{STR}) \tag{2}$$

描述的是杂散光对图像的影响作用
S_{STR} 是占比为 $0 < \beta < 1$ 的纯杂散光部分，G_{DA} 是**衍射** (Diffraction) 和 **像差** (Aberration) 部分。

杂散光的 Point Spread Function

在这当中，我们可以写出上述衍射和像差部分在像素 (i_p, j_p) 处的值是

$$G_{DA}(i_q, j_q, i_p, j_p; \sigma) = \frac{K}{\sigma^2} \exp(-\frac{(i_q - i_p)^2 + (j_q - j_p)^2}{2\sigma^2}) \tag{3}$$

其中，K 是正规化参数

杂散光的 Point Spread Function

在这当中，我们可以写出上述衍射和像差部分在像素 (i_p, j_p) 处的值是

$$G_{DA}(i_q, j_q, i_p, j_p; \sigma) = \frac{K}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(i_q - i_p)^2 + (j_q - j_p)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{3}$$

其中，K 是正规化参数
由此可得，纯杂散光部分的表达式是

$$S_{STR}(i_q, j_q, i_p, j_p; a, b, c, \alpha) = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{i_p^2 + j_p^2}\left(\frac{(i_q i_p + j_q j_p - i_p^2 - j_p^2)^2}{(c + a(i_p^2 + j_p^2))^2} + \frac{(-i_q i_p + j_q j_p)^2}{(c + b(i_p^2 + j_p^2))^2}\right)\right.$$

杂散光的 Point Spread Function

其中 a, b, c, z, α 均为正规化参数，其存在如下关系：

$$z = \frac{\pi}{\alpha - 1}(c + a(i_p^2 + j_p^2)(c + b(i_q^2 + j_q^2)) \tag{4}$$

使得上式满足

$$\int_{i_q}\int_{j_q} S_{i_q, j_p} di_q dj_q = 1 \tag{5}$$

杂散光的 Point Spread Function

其中 a, b, c, z, α 均为正规化参数，其存在如下关系：

$$z = \frac{\pi}{\alpha - 1}(c + a(i_p^2 + j_p^2)(c + b(i_q^2 + j_q^2)) \tag{4}$$

使得上式满足

$$\int_{i_q}\int_{j_q} S_{i_q, j_p} di_q dj_q = 1 \tag{5}$$

由文献 [2] 中的**余弦四次方定律** (cosine fourth law)，我们知道模型整体需要乘上 $cos^2\gamma = \frac{D^2}{i_p^2+j_p^2+D^2}$，D 为出瞳位置到图像平面的距离，$\gamma$ 表示图像系统的光轴和光所成的角度

杂散光的 Point Spread Function

综上，杂散光的 PSF 模型总体可描述为：

$$S = \frac{D^2}{i_p^2 + j_p^2 + D^2}((1-\beta)G_{DA} + \beta S_{STR}) \tag{6}$$

杂散光的 Point Spread Function

综上，杂散光的 PSF 模型总体可描述为：

$$S = \frac{D^2}{i_p^2 + j_p^2 + D^2}((1-\beta)G_{DA} + \beta S_{STR}) \tag{6}$$

因此，我们得到了图像还原的简化过程：

$$\hat{x} = 2y - (1-\beta)y - \beta S y \tag{7}$$

杂散光的 Point Spread Function

综上，杂散光的 PSF 模型总体可描述为：

$$S = \frac{D^2}{i_p^2 + j_p^2 + D^2}((1-\beta)G_{DA} + \beta S_{STR}) \tag{6}$$

因此，我们得到了图像还原的简化过程：

$$\hat{x} = 2y - (1-\beta)y - \beta Sy \tag{7}$$

在这当中，Sy 是与空间位置（像素位置）有关系的量，因此在面对真实图片时，其计算量很大，故而我们需要引入**有损编码** (Lossy Source Coding) 进行计算的简化。

有损编码 (Lossy Source Coding)

这一技术的目的是将图片的信息集中，以此简化计算
这一部分运算比较复杂，细节没有完全理解，其整体分为如下几步：

有损编码 (Lossy Source Coding)

这一技术的目的是将图片的信息集中，以此简化计算
这一部分运算比较复杂，细节没有完全理解，其整体分为如下几步：

- 测量白化 (Measurement Whitening)
- 将矩阵 S 的列向量去相关化
- 小波变换 (wavelet transform)
- 离散化

稀疏矩阵变换 (Sparse Matrix Transform)

稀疏矩阵变换是将一个矩阵 T 分解成一系列稀疏矩阵（含有大量 0 元素）的乘积的过程，即

$$T = \prod_{k=K-1}^{0} T_k = T_{k-1} T_{k-2} \cdots T_0 \tag{8}$$

稀疏矩阵变换 (Sparse Matrix Transform)

稀疏矩阵变换是将一个矩阵 T 分解成一系列稀疏矩阵（含有大量 0 元素）的乘积的过程，即

$$T = \prod_{k=K-1}^{0} T_k = T_{k-1} T_{k-2} \cdots T_0 \tag{8}$$

而每一个稀疏矩阵 T_k 都可以分解为 $T_k = B_k \Lambda_k A_k$，其中 A_k, B_k 为旋转矩阵，Λ_k 是单位矩阵

算法展示

输入： 观察到的图像 y
输出： 修正后的图像 $\hat{x}$
初始化： 设置参数 $a, b, c, \alpha, \beta, D$ 的值

算法展示

输入： 观察到的图像 y
输出： 修正后的图像 $\hat{x}$
初始化： 设置参数 $a, b, c, \alpha, \beta, D$ 的值

- 对原始图像应用 PSF 模型

$$S = \frac{D^2}{i_p^2 + j_p^2 + D^2}((1-\beta)G_{DA} + \beta S_{STR}) \tag{9}$$

算法展示

输入：观察到的图像 y
输出：修正后的图像 $\hat{x}$
初始化：设置参数 $a, b, c, \alpha, \beta, D$ 的值

- 对原始图像应用 PSF 模型

$$S = \frac{D^2}{i_p^2 + j_p^2 + D^2}((1-\beta)G_{DA} + \beta S_{STR}) \tag{9}$$

- 应用 Lossy source coding，将矩阵 S 转化为易分解为稀疏矩阵的形式

算法展示

输入：观察到的图像 y
输出：修正后的图像 $\hat{x}$
初始化：设置参数 $a, b, c, \alpha, \beta, D$ 的值

- 对原始图像应用 PSF 模型

$$S = \frac{D^2}{i_p^2 + j_p^2 + D^2}((1-\beta)G_{DA} + \beta S_{STR}) \tag{9}$$

- 应用 Lossy source coding，将矩阵 S 转化为易分解为稀疏矩阵的形式
- 应用稀疏矩阵变换

算法展示

输入：观察到的图像 y
输出：修正后的图像 $\hat{x}$
初始化：设置参数 $a, b, c, \alpha, \beta, D$ 的值

- 对原始图像应用 PSF 模型

$$S = \frac{D^2}{i_p^2 + j_p^2 + D^2}((1-\beta)G_{DA} + \beta S_{STR}) \tag{9}$$

- 应用 Lossy source coding，将矩阵 S 转化为易分解为稀疏矩阵的形式
- 应用稀疏矩阵变换
- 得到 $X = Sy$ 的表达式，带入原方程

$$\hat{x} = 2y - (1-\beta)y - \beta X \tag{10}$$

基于稀疏约束和多尺度的杂散光抑制方法

该方法主要采用求解偏微分方程的方法，细节较为复杂，还没有阅读完成，其总体思路如下：
将观察到的退化图像 Z 分解为目标图像 I 和杂散光图像 B，其关系为

$$Z_i = I_i + B_i + n, 1 \leq i \leq n_p \tag{11}$$

基于稀疏约束和多尺度的杂散光抑制方法

该方法主要采用求解偏微分方程的方法，细节较为复杂，还没有阅读完成，其总体思路如下：
将观察到的退化图像 Z 分解为目标图像 I 和杂散光图像 B，其关系为

$$Z_i = I_i + B_i + n, 1 \leq i \leq n_p \tag{11}$$

其中，n_p 是图像中像素个数，i 为像素的序号，n 是噪声的影响。而整个杂散光抑制的过程则是**在给定的退化图像 Z 的基础上，估计式子中杂散光图像 B，进而估计 I。**

我们对杂散光图像 B 和目标图像 I 添加正则约束 $C_I(I), C_B(B)$，则杂散光抑制问题转化了如下的能量函数最小值问题：

$$F(\hat{I}, \hat{B}) = \arg\min \frac{1}{2}||Z - I - B||_2^2 + \alpha C_B(B) + \beta C_I(I) \tag{12}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$ 是平衡约束项的参数

基于稀疏约束和多尺度的杂散光抑制方法

我们对杂散光图像 B 和目标图像 I 添加正则约束 $C_I(I), C_B(B)$，则杂散光抑制问题转化了如下的能量函数最小值问题:

$$F(\hat{I}, \hat{B}) = \arg\min \frac{1}{2}||Z - I - B||_2^2 + \alpha C_B(B) + \beta C_I(I) \tag{12}$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0$ 是平衡约束项的参数
最后，我们只需要用 **Euler-Lagrange 法**求解上述泛函的极值即可。

参考文献

P.A. Jansson, Deconvolution of Images and Spectra, Springer, New York, 1996.

W.J. Smith, Modern Optical Engineering: The Design of Optical Systems, McGraw Hill, New York, 2000.

李思圆. 基于稀疏约束的杂散光抑制算法 [D]. 华中科技大学,2016.

Fan Y H, Qin S Y. A fast algorithm for stray light correction based on lossy source coding and SMT[J]. Optik, 2013, 124(14): 1677-1682.