Fachhochschule Kiel
Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Fachbereich Maschinenwesen

Maschinenbau

Bericht

"Titel der Arbeit"

---

vorgelegt von

Daniel Mansfeldt, XXXXXXXX

Kiel, den 15. Juni 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Stabwerk

In dieser Arbeit soll das ebene Stabwerk, dargestellt in Abb. 1.1, analysiert und optimiert werden.

Dabei wird angenommen, dass die Stäbe aus homogenem Material bestehen. Der E-Modul des Materials beträgt $210 \cdot 10^9\,\mathrm{N\,m^{-2}}$. Alle Stäbe haben zunächst die gleiche Querschnittsfläche von $50\,\mathrm{mm}^2$. Die Längen der Stäbe werden durch das Grundmaß $a = 1\,\mathrm{m}$ gegeben. Damit haben die horizontalen Stäbe eine Länge von $l_1 = 2\,\mathrm{m}$, während die schräg liegenden $l_2 = \sqrt{2}a^2 \approx 1{,}414\,\mathrm{m}$ lang sind.

Die Belastungen der Knoten, sowie Art und Position der Lagerung sind der Abbildung Abb. 1.1 zu entnehmen. Mit Ausnahme der Randbedingungen durch die Lager, werden dem Stabwerk keine Knotenverschiebungen aufgezwungen.

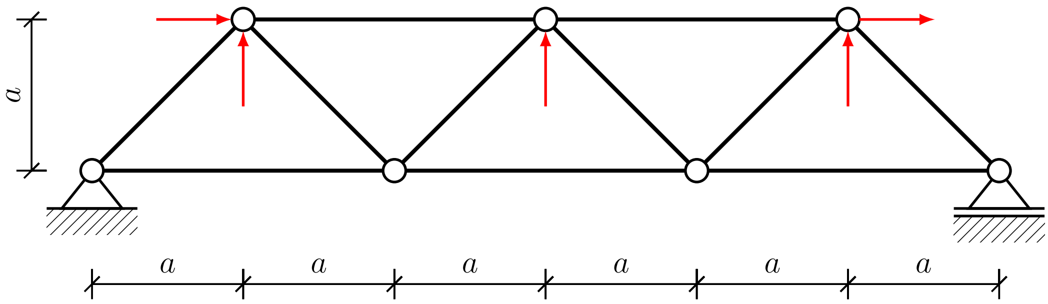

Abb. 1.1: Stabwerk

1.2 Aufgabenstellung

Das Stabwerk aus Abb. 1.1 soll hinsichtlich drei Aufgabenteilen untersucht und angepasst werden.

- Bestimmung der Knotenverschiebung für gegebene Belastung
- Bestimmung eines konservativen Werts der Materialdichte aus Messdaten
- Gewichtsoptimierung durch Variation der Stab-Querschnitte

Die Aufgabenteile sollen, sofern sinnvoll, mithilfe numerischer Methoden gelöst werden. Dazu nötiger Code wird in einem Jupyter-Notebook abgelegt. Als Programmiersprache dient Python 3. Das Jupyter-Notebook liegt dem Anhang bei.

Um eine konsistente Programmierung zu erleichtern, werden sämtliche Werte in SI-kohärenten Einheiten verarbeitet.

1.3 Modellierung eines Stabwerks in Python

Um die Berechnung des Stabwerks durch Programmierung numerischer Methoden zu ermöglichen, wird das Stabwerk, im Sinne einer objekt-orientierten Programmierung, in Python-Code umgesetzt. Dies bietet die Möglichkeit dem Stabwerk bzw. den Stäbe entsprechende Eigenschaften zuzuordnen, die es jeweils beschreiben. Außerdem kann die Umsetzung der Lösungsverfahren mit Instanz-Methoden umgesetzt werden. Beides erleichtert die Programmierung und fördert die Leserlichkeit des Codes.

Zwei Klassen von Objekte sind also nötig. Eine für die Stäbe und eine für Das Stabwerk selbst. Die Stab-Objekte sind dabei von Eigenschaften des Stabwerks abhängig und umgekehrt. Aus diesem Grund werden den Instanzen gewisse Eigenschaften erst nach ihrer Instanzierung zugewiesen.

Im Nachfolgenden werden die beiden Klassen beschrieben.

1.3.1 Stabwerk-Klasse

Die Klasse [Stabwerk] umfasst alle Attribute und Methoden, die das gesamte Stabwerk als solches betreffen. Detailtiere Beschreibungen zu den einzelnen Attributen und Methoden finden sie in den Kapitel der Teilaufgaben. An dieser Stelle soll lediglich eine Übersicht gegeben werden.

Attribute

Ein Stabwerk zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus:

- Anzahl der Knoten
- Anzahl der Stäbe
- Art und Position der Lagerung
- Belastung
- aufgeprägte Verschiebungen

Aus diesem Eigenschaften lassen sich die folgenden Attribute der Stabwerks-Klasse ableiten.

Stäbe Jede Instanz eines Stabwerks besitzt eine Liste an Stab-Instanzen, die es bilden.

Masse Ein Stabwerk besitzt eine Masse, welche die Summe aller Stab-Massen ist.

Lastvektor Der Lastvektor enthält alle Kräfte, die an den Knoten angreifen. Dieser beinhaltet nicht die unbekannten Lagerkräfte, da diese für die Berechnung der Verschiebungen aufgrund der Verschiebungsbedingungen durch die Lagerung nicht benötigt werden. (s.!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!! **??**

Steifigkeitsmatrix Einer Stabwerk-Instanz wird erst nach der Erzeugung der Stab-Objekte ihre Steifigkeitsmatrix zugewiesen. Diese ist nämlich von den Element-Steifigkeitsmatrizen der Stäbe abhängig, die wiederum nur anhand der Knotenverteilung (I_raw und lokaler Knoten) des Stabwerks erzeugt werden können.

Rohe Koinzidenzmatrix Die rohe Koinzidenmatrix (I_raw) bildet die Vorlage zur Erzeugung der Koinzidenzmatrizen der einzelnen Stäbe (s. Abschnitt 1.3.2). $\underline{I}_{raw}$ ist nur von der Anzahl der Knoten abhängig. Sie hat die Form

$$I_{raw} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & \dots \end{pmatrix}$$

.

Die Nummern stehen dabei Stellvertretend für die globalen Knoten.

Indizes der Verschiebungs-Randbedingungen Aufgrund der Lagerung entfallen gewissen Zeilen und Spalten aus der Steifigkeitsmatrix (s. Abschnitt 2.1). Entsprechend wurden bereits für die Definition des Kraftvektors, die Lagerkräfte weggelassen. Mit einer Liste werden für dieses Attribute jetzt, die Indizes der Spalten und Zeilen des Matrizen-Gleichungssystems definiert, die nicht zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungen dienen. So bleibt ein Gleichungssystem übrig das nur die unbekannten Verschiebungen liefert. Das Attribute findet in der Methode *reduce*$\underline{K}$ Anwendung.

Methoden

Instanzen der Klasse Stabwerk besitzen folgende Methoden:

calc_K Diese Methode stellt anhand der Elementsteifigkeits-Matrizen und Koinzidenzmatrizen der Stäbe (s. VERWEISE AUF KLASSSE STAB) die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$ des Stabwerks auf und weißt sie dem entsprechenden Attribut zu.

reduce_K Mit der Methode „reduce_K“ werden aus der Steifigkeitsmatrix anhand der angegebenen Indizes (s. oben) die Spalten und Zeilen entfernt, die wegen der bekannten Verschiebungen durch die Lagerung zu Null-Spalten werden oder nicht Teil des Gleichungssystems zur Bestimmung der Knotenverschiebungen sind.

calc_masse Diese Methode berechnet die Masse des Stabwerks und weißt sie dem Attribut [masse] zu. Dazu werden die Massen-Werte aller Stäbe aufsummiert. Knoten werden als masselos betrachtet.

1.3.2 Stab-Klasse

Attribute

Ein Stab in einem Stabwerk zeichnet sich durch folgende Eigenschaften aus:

- Neigungswinkel
- Länge
- Querschnittsfläche
- zwei lokalen Stabknoten
- Lage im Stabwerk

Aus diesem Eigenschaften lassen sich die folgenden Attribute der Stab-Klasse ableiten.

Neigungswinkel α Der Neigungswinkel α beschreibt die Orientierung des Stabs im globalen Koordinatensystem des Stabwerks. α ist der Winkel zwischen der Horizontalen und dem Stab. Er liegt am lokalen Knoten 1 und wird entgegen des Uhrzeigersinnes gemessen.

Länge Jeder Stab besitzt eine Länge, die sich aus der Geometrie des Stabwerks ergibt (s. Abb. 1.1).

Querschnittfläche Um das Volumen jedes Stabs bestimmen zu können, wird neben der Länge auch die Querschnittfläche benötigt.

Lokale Knoten Jeder Stab verbindet zwei Knoten mit einander. Betrachtet man den Stab und diese beiden Knoten isoliert, so spricht man von [lokalen] Knoten. Diese können in beliebiger Reihenfolge nummeriert werden. Um die Position eines Stabes im Stabwerk zu beschreiben, wird neben dem Neigungswinkel α noch eine Zuordnung der lokalen Knoten zu globalen Knoten, also denen des Stabwerks, benötigt. In der Stab-Klasse wird dies erreicht indem den Attributen für die lokalen Knoten die entsprechenden Nummern der globalen Knoten zugewiesen werden. [1]

Dichte Die Dichte des Materials wird benötigt, um die Masse der Stäbe bestimmen zu können.

Steifigkeitsmatrix Für die einzelnen Stäbe lassen sich die Elementsteifigkeits-Matrizen in globalen Koordinaten aufstellen, sofern deren Neigungswinkel, Querschnittfläche, Länge und E-Modul bekannt sind. Allgemein gilt [1]

$$\underline{K}_{Stab} = \frac{EA}{l} \cdot \begin{pmatrix} cos(\alpha)^2 & sin(\alpha)cos(\alpha) & -cos(\alpha)^2 & -sin(\alpha)cos(\alpha) \\ sin(\alpha)cos(\alpha) & sin(\alpha)^2 & -sin(\alpha)cos(\alpha) & -sin(\alpha)^2 \\ -cos(\alpha)^2 & -sin(\alpha)cos(\alpha) & cos(\alpha)^2 & sin(\alpha)cos(\alpha) \\ -sin(\alpha)cos(\alpha) & -sin(\alpha)^2 & sin(\alpha)cos(\alpha) & sin(\alpha)^2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

In ihr ist vermerkt welche Verschiebungen der lokalen Stabknoten mit welchen globalen Stabwerks-Knoten übereinstimmen.

1.4 Instanzierung

Ehe die Instanzen der Stäbe und des Stabwerks erzeugt werden können, sind folgende Variablen zu definieren.

- Kraftvektor des Stabwerks (ohne Auflagerkräfte)
- Längen der Stäbe
- Querschnittsfläche der Stäbe

Anschließend wird die Instanz des Stabwerks erzeugt. An den Konstruktor sind die Anzahl der Knoten, die Indizes der durch Randbedingungen (Lagerungen) definierten Verschiebungen und der Kraftvektor $\vec{F}$. Da die Auflagerkräfte unbekannt sind und ohnehin für die Bestimmung der Verschiebungen nicht relevant sind, werden diese bei der Instanzierung von $\vec{F}$ direkt weggelassen.

Stab
- Winkel α am lokalen Knoten 1 : float - Querschnittsfläche : float - Länge : float - lokale Steifigkeitsmatrx : 2d-array - Koinzidenzmatrix : 2d-array - lokaler Knoten 1 : Knoten_Global - lokaler Knoten 2 : Knoten_Global - alle globalen Knoten : dictionary

Abb. 1.2: Klassendiagramme

Um die Stäbe zu erzeugen wird den Konstruktor je Stab sein Stellungswinkel, seine Länge in Metern, seine Querschnittsfläche in m², die Nummern der globalen Knoten, die den lokalen Knoten entsprechen und die Koinzidenmatrizen-Vorlage „I_raw" des Stabwerks, aus der die Koinzidenzmatrix jedes jeweiligen Stabs abgeleitet wird.

Nach dem alle Stab-Objekte erstellt worden sind, werden sie in einer Liste gesammelt, welche wiederum dem Attribut „staebe" des Stabwerks zugewiesen wird. Da die Anzahl der Knoten Eigenschaft des Stabwerks ist und sich erst mit deren Hilfe die Koinzidenzmatrizen der Stäbe bestimmen lassen, vereinfacht dieses Vorgehen die Programmierung.

Die Abbildung Abb. 1.2 stellt das Klassendiagramm der Stäbe dar. Das Klassendiagramm der Knoten ist nicht dargestellt, da sie keine Attribute oder Methoden definiert. Es wird lediglich ein Standart-Konstruktor definiert, um Objekte erzeugen zu können. Die Klasse dient nur dazu um einfach Knoten erzeugen zu können mit deren Hilfe die Koinzidenzmatrix der Stäbe aufgestellt werden kann.

Die Attribute der Klasse „Stab" beschreiben einen Stab vollständig, für ein gegebenes Stabwerk. Um die entsprechenden Stäbe erzeugen zu können sind folgende Parameter an den Konstruktor zu übergeben:

Paramter	**Beschreibung**
Winkel α	Winkel um lokalen Knoten 1 zwischen Stab und Horizontalen im Uhrzeigensinn
Länge	Länge des unbelasteten Stabs
Querschnittsfläche A	Querschnittfläche des unbelasteten Stabs
globaler Knoten 1	Knoten-Objekt, das dem lokalen Knoten 1 entspricht
globaler Knoten 2	Knoten-Objekt, das dem lokalen Knoten 2 entspricht

Innerhalb des Konstruktors wird die allgemeine Steifigkeitsmatrix [1] eines Stabs in globalen Koordinaten definiert. Mit dem Winkel α kann so die Steifigkeitsmatrix für jeden Stab bestimmt werden. Für diese Arbeit wird in dem Konstruktor eine zu dem Stabwerk passender Koinzidenzmatrix definiert. Da der Code aktuell die Variable verändert und sie damit unbrauchbar für die Erzeugung weiterer Stab-Objekte macht, wurde sich zu diesem Schritt entschieden, auch wenn die erstellte Klasse damit nur für dieses eine Stabwerk zu verwenden ist. Mit entsprechenden Anpassungen lässt sich die Klasse jedoch voraussichtlich auch für beliebige andere Stabwerke verwenden.

Die Knoten- und Stab-Objekte werden in je einem Dictionary gesammelt. Als Keys werden die Knoten- bzw. Stabnummern verwendet. So kann in unmissverständlicher und leserlicher Form auf einzelne Objekte referenziert werden. Außerdem stehen so Objekte (die Dictionaries) zur Verfügung, um über alle Stäbe bzw. Knoten iterieren zu können.

2 Knotenverschiebung

Zunächst soll bestimmt werden, welche Knotenverschiebungen die Belastungen hervorrufen.

2.1 Grundlagen

Für Stabwerke gilt der folgende Zusammenhang [1].

$$K\vec{u} = \vec{F} \tag{2.1}$$

Es liegt also ein Gleichungsystem in Matrixschreibweise vor, welches die Belastung der Knoten eines Stabwerks mit den Verschiebungen der Knoten in Zusammenhang stellt. Ausgedrückt wird dieser Zusammenhang durch die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$. In 2.1 ist $\vec{F}$ der Kraftvektor und $\vec{u}$ der Verschiebungsvektor.

Der Kraftvektor $\vec{F}$ enthält alle Kräfte, die je Knoten in Richtung der Abzisse bzw. der Ordinate verlaufen. Die ersten beiden Komponenten von $\vec{F}$ sind also die Kräfte am Knoten 1 (erste Komponente in x-Richtung, zweite in y-Richtung). Entsprechend aufgebaut ist auch der Verschiebungsvektor $\vec{u}$. Allgemein haben $\vec{F}$ und $\vec{u}$ also folgende Formen:

$$\begin{pmatrix} \text{Knoten } 1_x \\ \text{Knoten } 1_y \\ \text{Knoten } 2_x \\ \text{Knoten } 2_y \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Die Indizes stehen dabei für die Knotennummer bzw. die Koordinatenrichtung. Im Verschiebungsvektor werden Verschiebungen in x-Richtung mit „u“ und solche in y-Richtung mit „v“ abgekürzt.

Damit $\vec{u}$ bestimmt werden kann, sind also zunächst $\underline{K}$ und $\vec{F}$ zu bestimmen.

Sind alle Element-Steifigkeitsmatrizen der Stäbe (in globalen Koordinaten) und deren Koinzidenzmatrizen bekannt, kann die Gesamtsteifigkeitsmatrix des Stabwerks bestimmt werden. Sie bildet die

Summe aller Element-Steifigkeitsmatrizen multipliziert mit den Koinzidenzmatrizen des Stabs und deren Transponierten [1].

$$\underline{K} = \sum_i \underline{I}_i^T \underline{K}_i \underline{I}_i \tag{2.2}$$

Da das Stabwerk gelagert ist, unterliegt es Randbedingung bezüglich der Verschiebungen. So sind $u_1 = v_1 = v_4 = 0$, da sich am Knoten 1 ein Festlager befindet und an Knoten 4 ein Loslager befindet. Um die Randbedingungen zu berücksichtigen wird das Gleichungssystem aus 2.1 reduziert. D.h. es werden, entsprechend der Positionen der Randbedingungen, Zeilen und Spalten aus dem Gleichungssystem gestrichen. Erst das reduzierte Gleichungssystem kann mittel dem Lösungsverfahren nach *Gauß-Jordan* gelöst werden, da die noch unbekannten Lagerkräfte nur in je einer Gleichung auftauchen. Sie können also nicht durch das Eliminationsverfahren behandelt werden. Folglich kann nur das reduzierte Gleichungssystem in die „Reduced Row Ecolon"-Form gebracht werden, was die Voraussetzung zur Lösung nach *Gauß-Jordan* darstellt.

2.2 Umsetzung in Python

2.2.1 Gesamtsteifigkeitsmatrix

Um die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$ zu bestimmen und diese der Stabwerks-Instanz als Attribut zuzuweisen, wird die Methode „calc_K" in der Klasse „Stabwerk" definiert. Darin wird mittels einer *for*-Schleife wird über alle Objekte im Attribut „Staebe" iteriert. So können die Attribute $\underline{K}_{Stab}$ und $\underline{I}_{Stab}$ aller Stab-Objekte abgerufen werden und nach 2.2 zur Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{K}$ aufsummiert werden. Durch eine weitere Methode wird $\underline{K}$, den Randbedingungen entsprechend, reduziert.

2.2.2 Berechnung der Verschiebungen

Wie in Kapitel **??** beschrieben werden nur die unbekannten Knotenverschiebungen berechnet. Nach Gauß-Jordan löst die Inverse der reduzierten Steifigkeitsmatrix $\underline{K}$, multipliziert mit dem Kraftvektor, das Gleichungssystem 2.1 für die gesuchten Verschiebungen auf.

Um den vollständigen Verschiebungsvektor ausgeben zu können, werden die Verschiebungen als den Lagerbedingungen jetzt in den Ergebnissvektor eingesetzt. Der vollständige Verschiebungsvektor lautet

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

2.2.3 Ergebnisse

Mit 2.1 bleibt damit ein Gleichungsystem für die unbekannten verschiebungen übrig. Dieses wird nach *Gauß-Jordan* gelöst. Die Verschiebungen liegen alle im Bereich einstelliger Millimeterwerte. Für ein reales Stabwerk, dieser Größenordnung sind dies plausible Ergebnisse.

3 Teil 2: Dichte

3.1 Klärung der Aufgabenstellung

Um die Masse des Stabwerks bestimmen zu können, muss zunächst die Dichte des verwendeten Werkstoffs festliegen. Es wird davon ausgegangen, dass alle Stäbe aus dem gleichen homogenen Material bestehen.

Da nach einer *konservativen* Dichte gefragt ist, muss zunächst definiert werden was in diesem Fall unter dem Begriff zu verstehen ist. Dann kann eine entsprechende Herleitung erfolgen.

Im Ingenieurwesen beschreibt der Begriff „konservativ" häufig eine Annahme auf der sicheren Seite. Dies ist in der Regel sinnvoll, da exakte, in Realität zutreffende Werte lediglich näherungsweise bestimmt werden können. Um Unsicherheiten dieser Art zu begegnen, wird im Sinne einer konservativen Betrachtung immer vom ungünstigsten denkbaren Fall ausgegangen.

3.2 Theorie zur Bestimmung der konservativen Dichte

Idealerweise würde man den wahren Mittelwert der Dichte eines homogenen Materials wählen. Mit diesem könnte die Masse eines unendlich großen Volumens exakt bestimmen werden, da dann alle möglichen Schwankungen mit dem wahren Mittelwert beschrieben werden könnten und auch sicher gestellt ist das alle möglichen Schwankungen auch auftreten.

Da aus einer realen Menge an Werten nicht der wahr Mittelwert, bestimmt werden kann, dienen sog. Konfidenzintervalle dazu den Bereich einzugrenzen in dem der wahre Mittelwert mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit liegt. Für den Bereich $\pm 2 \cdot SE$ (Standarderror) um den Mittelwert $\hat{\mu}$ der Daten, beträgt die Aufenthaltswahrscheinlichkeit für den wahren Mittelwert μ ca. 95%. Diese Wahrscheinlichkeit wird als ausreichend hoch angesehen. Als Annahme auf der sicheren Seite (im Sinne konservativer Berechnung) wird als Dichte derjenige Wert gewählt, der dem oberen Rand des Konfidenzintervalls entspricht. Die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Mittelwert niedriger ist als dieser beträgt 97,5%. Diese Wahrscheinlichkeit wird als ausreichend groß erachtet. So kann eine Unterschätzung des Mittelwerts als unwahrscheinlich gewertet werden. Das setzt selbstverständlich zuverlässige Messwerte voraus.

Der Standart-Error berechnet sich nach

Dabei ist σ^2 die Varianz der Daten innerhalb einer Stichprobe und n die Stichprobengröße. Der Standartfehler ist also die Varianz auf die Stichprobengröße normiert. Für unterschiedlich große Stichproben ist keine kontinuirliche Änderung der Varianz zu erwarten. Mit steigender Stichprobengröße sinkt jedoch der Standart-Fehler. D.h das Konfidenzintevall wird schmaler. Je größer die Stichprobe ist desto näher liegen die Intervallsgrenzen also an dem wahren Mittelwert der betrachteten Größe.

Es stehen 1000 Messwerte der Materialdichte zur Verfügung. Bei dieser Menge an Daten wird angenommen, dass sie gut die tatsächlichen Dichtewerte im realen Stab abbilden. Die Annahme vom homogenen Material verträgt sich daher mit der Festlegung eines konservativen Dichtewertes.

In der Praxis stehen nur endlich viele Messwerte zur Verfügung und auch die betrachteten Volumen sind endlich. Die verbleibende Unsicherheit bei der Bestimmung der Masse ist über entsprechenden Eigenschaften des gewählten Wertes zu begegnen.

Für eine beliegige Stichprobengröße kann der Mittelwert $\hat{\mu}$, dieser Stichprobe berechnet werden. Mit einem Abstand von dem zweifachen des Standardfehler um diesem Mittelwert, lässt sich ein Bereich definieren in dem der wahre Mittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% liegt. Diesen Bereich nennt man Konfidenzintervall.

Das Konfidenzintervall wird um so schmaler je größer die zugrundeliegende Stichprobe ist. Der Standardfehler, der die Größe des Konfidenzintervall definiert, ist nämlich von der Standartabweichung und der Anzahl der Werte in der Stichprobe abhängig. Dabei ist der Standartfehler um so kleiner je kleiner die Streung und je größer die Anzahl der Werte ist. Dann konzentrien sich die Werte nämlich in einem schmalen Bereich um den deren Mittelwert.

Der wahre Mittelwert könnte aber nur aus unendlich vielen Messwerten bestimmt werden. Mit einer endlichen Anzahl an Messwerten kann der wahre Mittelwert allerdings nicht bestimmt werden.

Literatur

[1] Patrick Moldenhauer. *Vorlesung FEM*. Fachhochschule Kiel, 2018.

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis