公因式

定义： 若$f(x), g(x), h(x) \in P[x]$，使得$h(x)|f(x)$且$h(x)|g(x)$，则称$h(x)$为$f(x), g(x)$的一个**公因式**。

公因式

定义： 若$f(x), g(x), h(x) \in P[x]$，使得$h(x)|f(x)$且$h(x)|g(x)$，则称$h(x)$为$f(x), g(x)$的一个**公因式**。

注： (1)任意两个多项式都有公因式——零次多项式;

(2)两个零多项式的公因式可以是任一多项式；

(3)零多项式一定不是两个非零多项式的公因式；

(4)若$h(x)$为$f(x), g(x)$的公因式,则对$\forall c \in P^*$,$ch(x)$也是$f(x)$, $g(x)$的公因式；

(5)公因式与数域有关。如在实数域上，$\sqrt{2}x$是x, x^2的公因式，但在有理数域上不是。

最大公因式

定义： 设$f(x), g(x), d(x) \in P[x]$，若$d(x)$满足如下两个条件：

(1)$d(x)|f(x), d(x)|g(x)$；

(2)对$h(x) \in P[x]$，若$h(x)|f(x), h(x)|g(x)$，则$h(x)|d(x)$，

则称$d(x)$为$f(x), g(x)$的一个**最大公因式**。

最大公因式

定义： 设$f(x), g(x), d(x) \in P[x]$，若$d(x)$满足如下两个条件：

(1)$d(x)|f(x), d(x)|g(x)$；

(2)对$h(x) \in P[x]$，若$h(x)|f(x), h(x)|g(x)$，则$h(x)|d(x)$，

则称$d(x)$为$f(x), g(x)$的一个**最大公因式**。

注： (1)$f(x)$为$f(x)$与0的最大公因式；

(2)两个零多项式的最大公因式是0；

(3)两个不全为零的多项式的最大公因式是非零的；

(4)两个零次多项式的最大公因式为任一零次多项式；

最大公因式

f(x)	g(x)	最大公因式
0	$\neq 0$	g(x)
0	0	0
$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
零次	零次	零次

最大性:最大公因式是公因式中次数最大的，反之，公因式中次数最大的必为最大公因式。

最大公因式

f(x)	g(x)	最大公因式
0	≠0	g(x)
0	0	0
≠0	≠0	≠0
零次	零次	零次

最大性: 最大公因式是公因式中次数最大的，反之，公因式中次数最大的必为最大公因式。

唯一性: $f(x)=g(x)=0$,则$d(x)=0$;$f(x),g(x)$不全为0,则$d(x)\neq 0$,

$$\{cd(x)|c\in P^*\}$$

为全部最大公因式，其中**首项系数为1**的最大公因式是唯一的，记为$(f(x),g(x))$。

最大公因式

f(x)	g(x)	最大公因式
0	≠0	g(x)
0	0	0
≠0	≠0	≠0
零次	零次	零次

最大性:最大公因式是公因式中次数最大的，反之，公因式中次数最大的必为最大公因式。

唯一性:$f(x)=g(x)=0$,则$d(x)=0$;$f(x),g(x)$不全为0,则$d(x)\neq 0$,

$$\{cd(x)|c\in P^*\}$$

为全部最大公因式，其中**首项系数为1**的最大公因式是唯一的，记为$(f(x),g(x))$。

注: 两个多项式的最大公因式在相差一个常数意义下是唯一的。

最大公因式的存在性(辗转相除法)

引理： 若$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，则$f(x),g(x)$和$g(x),r(x)$有相同的公因式，特别地，$(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$。

最大公因式的存在性(辗转相除法)

引理： 若$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，则$f(x),g(x)$和$g(x),r(x)$有相同的公因式，特别地，$(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$。

定理2: $\forall f(x),g(x)\in P[x]$,则$f(x),g(x)$的最大公因式$d(x)$存在,且存在$u(x),v(x)\in P[x]$，使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x) \tag{2}$$

最大公因式的存在性(辗转相除法)

引理： 若$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$，则$f(x),g(x)$和$g(x),r(x)$有相同的公因式，特别地，$(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$。

定理2: $\forall f(x),g(x)\in P[x]$,则$f(x),g(x)$的最大公因式$d(x)$存在,且存在$u(x),v(x)\in P[x]$，使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x) \tag{2}$$

注:(1)若仅求$(f(x),g(x))$，为避免辗转相除时出现分数运算，可用一个数乘以除式或被除式；

(2)定理中的$u(x),v(x)$不唯一；

(3)定理的逆命题不成立，即(2)式是$d(x)$为最大公因式的必要条件而非充分条件。若使逆命题成立还需附加什么条件？ (P45,8)

(4)最大公因式的存在性与数域扩大无关。

多项式的互素

定义: 设$f(x), g(x) \in P[x]$,若$(f(x), g(x)) = 1$,则称$f(x), g(x)$互素。

多项式的互素

定义: 设$f(x), g(x) \in P[x]$,若$(f(x), g(x)) = 1$,则称$f(x), g(x)$互素。

注:(1)两个零多项式不互素;

(2)两个多项式互素当且仅当它们的公因式只有零次多项式;

(3)互素与数域扩大无关。

多项式的互素

定义: 设$f(x), g(x) \in P[x]$,若$(f(x), g(x)) = 1$,则称$f(x), g(x)$互素。

注:(1)两个零多项式不互素;

(2)两个多项式互素当且仅当它们的公因式只有零次多项式;

(3)互素与数域扩大无关。

定理3: 设$f(x), g(x) \in P[x]$,$(f(x), g(x)) = 1$的**充要条件**是存在$u(x), v(x) \in P[x]$,使

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$$

多项式互素的性质

定理4： $(f(x), g(x)) = 1$且$f(x)|g(x)h(x)$，则

$$f(x)|h(x)$$

多项式互素的性质

定理4： $(f(x), g(x)) = 1$且$f(x)|g(x)h(x)$，则

$$f(x)|h(x)$$

推论： $f_1(x)|g(x), f_2|g(x)$,且$(f_1(x), f_2(x)) = 1$,则

$$f_1(x)f_2(x)|g(x)$$

多项式互素的性质

定理4： $(f(x), g(x)) = 1$且$f(x)|g(x)h(x)$，则

$$f(x)|h(x)$$

推论： $f_1(x)|g(x), f_2|g(x)$,且$(f_1(x), f_2(x)) = 1$,则

$$f_1(x)f_2(x)|g(x)$$

性质1:$(f(x), g(x)) = 1$,且$(f(x), h(x)) = 1 \Leftrightarrow (f(x), g(x)h(x)) = 1.$

$(P45, 12)$

多项式互素的性质

定理4： $(f(x),g(x))=1$且$f(x)|g(x)h(x)$，则

$$f(x)|h(x)$$

推论： $f_1(x)|g(x), f_2|g(x)$,且$(f_1(x),f_2(x))=1$,则

$$f_1(x)f_2(x)|g(x)$$

性质1:$(f(x),g(x))=1$,且$(f(x),h(x))=1 \Leftrightarrow (f(x),g(x)h(x))=1.$

$(P45,12)$

性质2： $f(x),g(x)$不全为0, $(f(x),g(x))=d(x)$,则

$$\left(\frac{f(x)}{d(x)},\frac{g(x)}{d(x)}\right)=1 \qquad (P45,10)$$

多项式互素的性质

定理4： $(f(x),g(x))=1$且$f(x)|g(x)h(x)$，则

$$f(x)|h(x)$$

推论： $f_1(x)|g(x),f_2|g(x)$,且$(f_1(x),f_2(x))=1$,则

$$f_1(x)f_2(x)|g(x)$$

性质1:$(f(x),g(x))=1$,且$(f(x),h(x))=1\Leftrightarrow(f(x),g(x)h(x))=1.$

$$(P45,12)$$

性质2： $f(x),g(x)$不全为0,$(f(x),g(x))=d(x)$,则

$$(\frac{f(x)}{d(x)},\frac{g(x)}{d(x)})=1 \qquad (P45,10)$$

结论： P45，13，14(可改为充要条件)

任意个多项式的情形

(1)$f_1(x),\cdots,f_s(x)$的公因式,最大公因式,首1的记为

$$(f_1(x),\cdots,f_s(x))$$

任意个多项式的情形

(1)$f_1(x),\cdots,f_s(x)$的公因式,最大公因式,首1的记为

$$(f_1(x),\cdots,f_s(x))$$

(2)$(f_1(x),\cdots,f_s(x))=((f_1(x),\cdots,f_{s-1}(x)),f_s(x))=$
$((f_1(x),\cdots,f_k(x)),(f_{k+1}(x),\cdots,f_s(x)))$ $(P47,4)$

任意个多项式的情形

(1)$f_1(x),\cdots,f_s(x)$的公因式,最大公因式,首1的记为

$$(f_1(x),\cdots,f_s(x))$$

(2)$(f_1(x),\cdots,f_s(x))=((f_1(x),\cdots,f_{s-1}(x)),f_s(x))=$
$((f_1(x),\cdots,f_k(x)),(f_{k+1}(x),\cdots,f_s(x)))$ $(P47,4)$

(3)$\exists u_i(x)$,使得$(f_1(x),\cdots,f_s(x))=\sum_{i=1}^{s}u_i(x)f_i(x)$ $(P47,4)$

任意个多项式的情形

(1)$f_1(x),\cdots,f_s(x)$的公因式,最大公因式,首1的记为

$$(f_1(x),\cdots,f_s(x))$$

(2)$(f_1(x),\cdots,f_s(x))=((f_1(x),\cdots,f_{s-1}(x)),f_s(x))=$
$$((f_1(x),\cdots,f_k(x)),(f_{k+1}(x),\cdots,f_s(x))) \qquad (P47,4)$$

(3)$\exists u_i(x)$,使得$(f_1(x),\cdots,f_s(x))=\sum\limits_{i=1}^{s}u_i(x)f_i(x) \qquad (P47,4)$

(4) $(f_1(x),\cdots,f_s(x))=1$，则称$f_1(x),\cdots,f_s(x)$互素，此时未必两个互素；但两两互素必整体互素。

任意个多项式的情形

(1)$f_1(x),\cdots,f_s(x)$的公因式,最大公因式,首1的记为

$$(f_1(x),\cdots,f_s(x))$$

(2)$(f_1(x),\cdots,f_s(x))=((f_1(x),\cdots,f_{s-1}(x)),f_s(x))=((f_1(x),\cdots,f_k(x)),(f_{k+1}(x),\cdots,f_s(x)))$ $(P47,4)$

(3)$\exists u_i(x)$,使得$(f_1(x),\cdots,f_s(x))=\sum_{i=1}^{s}u_i(x)f_i(x)$ $(P47,4)$

(4) $(f_1(x),\cdots,f_s(x))=1$，则称$f_1(x),\cdots,f_s(x)$互素，此时未必两个互素；但两两互素必整体互素。

(5)$(f_1(x),\cdots,f_s(x))=1\Leftrightarrow\exists u_i(x)\in P[x]$, 使得$\sum_{i=1}^{s}u_i(x)f_i(x)=1$

最小公倍式

定义: 设$f(x), g(x), c(x) \in P[x]$,且$c(x)$的首项系数为$1, c(x)$称为$f(x), g(x)$的最小公倍式，如果

1) $f(x)|c(x)$,且$g(x)|c(x)$;

2) 若$f(x)|h(x), g(x)|h(x)$,则$c(x)|h(x)$。

记为$c(x) = [f(x), g(x)]$。

例1 设$f(x), g(x)$不全为0, $d(x) = u(x)f(x) + v(x)g(x)$为$f(x), g(x)$的一个最大公因式，则$u(x), v(x)$具有什么性质?还可以选择哪些$u_1(x), v_1(x)$,使得$u_1(x)f(x) + v_1(x)g(x) = d(x)$? $(P45, 11)$

例1 设$f(x),g(x)$不全为0, $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$为$f(x),g(x)$的一个最大公因式，则$u(x),v(x)$具有什么性质?还可以选择哪些$u_1(x),v_1(x)$,使得$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=d(x)$? $(P45,11)$

例2 设$(f(x),g(x))=d(x), f(x)=d(x)f_1(x), g(x)=d(x)g_1(x)$，证明：当$\partial f_1(x)>0, \partial g_1(x)>0$时，可唯一选取$u(x),v(x)$使得$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x), \partial u(x)<\partial g_1(x), \partial v(x)<\partial f_1(x)$。$(P47,2)$

例1 设$f(x),g(x)$不全为0, $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$为$f(x),g(x)$的一个最大公因式，则$u(x),v(x)$具有什么性质?还可以选择哪些$u_1(x),v_1(x)$,使得$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=d(x)$? $(P45,11)$

例2 设$(f(x),g(x))=d(x), f(x)=d(x)f_1(x), g(x)=d(x)g_1(x)$，证明：当$\partial f_1(x)>0, \partial g_1(x)>0$时，可唯一选取$u(x),v(x)$使得$d(x) = u(x)f(x)+v(x)g(x), \partial u(x)<\partial g_1(x), \partial v(x)<\partial f_1(x)$。$(P47,2)$

例3 设$f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$,令

$$S(x)=\{u(x)f(x)+v(x)g(x)|u(x),v(x)\in P[x]\}$$

则$S(x)$中非零多项式中次数最小的即为$f(x),g(x)$的最大公因式。

例1 设$f(x),g(x)$不全为0, $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$为$f(x),g(x)$的一个最大公因式，则$u(x),v(x)$具有什么性质?还可以选择哪些$u_1(x),v_1(x)$,使得$u_1(x)f(x)+v_1(x)g(x)=d(x)$? $(P45,11)$

例2 设$(f(x),g(x))=d(x),f(x)=d(x)f_1(x),g(x)=d(x)g_1(x)$，证明：当$\partial f_1(x)>0,\partial g_1(x)>0$时，可唯一选取$u(x),v(x)$使得$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x),\partial u(x)<\partial g_1(x),\partial v(x)<\partial f_1(x)$。$(P47,2)$

例3 设$f(x)\neq 0,g(x)\neq 0$,令

$$S(x)=\{u(x)f(x)+v(x)g(x)|u(x),v(x)\in P[x]\}$$

则$S(x)$中非零多项式中次数最小的即为$f(x),g(x)$的最大公因式。

注： $S(x)=\{(f(x),g(x))h(x)|h(x)\in P[x]\}$。

例4 设$g(x) \neq 0, h(x)$为任意多项式，证明：

$$(f(x), g(x)) = (f(x) - h(x)g(x), g(x))$$

例4 设$g(x) \neq 0, h(x)$为任意多项式，证明：

$$(f(x), g(x)) = (f(x) - h(x)g(x), g(x))$$

例5 设$f_1(x) = af(x)+bg(x), g_1(x) = cf(x)+dg(x)$,且$ad-bc \neq 0$,证明：

$$(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x)) \qquad (P47, \text{补}1)$$

例4 设$g(x)\neq 0, h(x)$为任意多项式，证明：

$$(f(x), g(x)) = (f(x) - h(x)g(x), g(x))$$

例5 设$f_1(x) = af(x)+bg(x), g_1(x) = cf(x)+dg(x)$,且$ad-bc\neq 0$,证明：

$$(f(x), g(x)) = (f_1(x), g_1(x)) \qquad (P47, \text{补}1)$$

例6 设$(f(x), g(x)) = d(x)$,证明：对$\forall n\in\mathbb{Z}^+$,都有

$$(f^n, f^{n-1}g, \cdots, fg^{n-1}, g^n) = d^n$$

例4 设$g(x)\neq 0, h(x)$为任意多项式，证明：

$$(f(x),g(x))=(f(x)-h(x)g(x),g(x))$$

例5 设$f_1(x)=af(x)+bg(x), g_1(x)=cf(x)+dg(x)$,且$ad-bc\neq 0$,证明：

$$(f(x),g(x))=(f_1(x),g_1(x)) \qquad (P47, 补1)$$

例6 设$(f(x),g(x))=d(x)$,证明：对$\forall n\in\mathbb{Z}^+$,都有

$$(f^n,f^{n-1}g,\cdots,fg^{n-1},g^n)=d^n$$

证明最大公因式的方法：定义，相互整除，P45习题8

例7 证明:若$(f(x), g(x)) = 1$,则对$\forall n \in \mathbb{Z}^+$,都有$(f(x^n), g(x^n)) = 1$.

例7 证明:若$(f(x),g(x))=1$,则对$\forall n\in\mathbb{Z}^+$,都有$(f(x^n),g(x^n))=1$.

例8 设$f_1(x),f_2(x)\in P[x]$,证明：$(f_1(x),f_2(x))=1$的充要条件是对$\forall r_1(x),r_2(x)\in P[x]$,存在$q_1(x),q_2(x)\in P[x]$,使得

$$q_1(x)f_1(x)+r_1(x)=q_2(x)f_2(x)+r_2(x)$$

例7 证明:若$(f(x),g(x))=1$,则对$\forall n\in\mathbb{Z}^+$,都有$(f(x^n),g(x^n))=1$.

例8 设$f_1(x),f_2(x)\in P[x]$,证明：$(f_1(x),f_2(x))=1$的充要条件是对$\forall r_1(x),r_2(x)\in P[x]$,存在$q_1(x),q_2(x)\in P[x]$,使得

$$q_1(x)f_1(x)+r_1(x)=q_2(x)f_2(x)+r_2(x)$$

例9 证明:若$(f(x),g(x))=1$,则

$$(f(x)g(x)(f(x)+g(x)),f(x)+f(x)g(x)+g(x))=1$$

例7 证明:若$(f(x),g(x))=1$,则对$\forall n\in\mathbb{Z}^+$,都有$(f(x^n),g(x^n))=1$.

例8 设$f_1(x),f_2(x)\in P[x]$,证明：$(f_1(x),f_2(x))=1$的充要条件是对$\forall r_1(x),r_2(x)\in P[x]$,存在$q_1(x),q_2(x)\in P[x]$,使得

$$q_1(x)f_1(x)+r_1(x)=q_2(x)f_2(x)+r_2(x)$$

例9 证明:若$(f(x),g(x))=1$,则

$$(f(x)g(x)(f(x)+g(x)),f(x)+f(x)g(x)+g(x))=1$$

证明互素的方法：定义，充要条件，性质或结论