第五章　二次曲线方程的化简及其性质

第五章　二次曲线方程的化简及其性质

可以视为第四章的应用，

第五章　二次曲线方程的化简及其性质

可以视为第四章的应用，只讲前两节

二次曲线方程的化简

在右手直角坐标系中，二次曲线的一般方程为：

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

在右手直角坐标系中，二次曲线的一般方程为：

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

太复杂，看不出任何性质。

在右手直角坐标系中，二次曲线的一般方程为：

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

太复杂，看不出任何性质。

通过选取合适的新的坐标系，使曲线在新的坐标系下的方程简单(9种标准方程)。

在右手直角坐标系中，二次曲线的一般方程为：

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

太复杂，看不出任何性质。

通过选取合适的新的坐标系，使曲线在新的坐标系下的方程简单(9种标准方程)。
如何选取？

在右手直角坐标系中，二次曲线的一般方程为：

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

太复杂，看不出任何性质。

通过选取合适的新的坐标系，使曲线在新的坐标系下的方程简单(9种标准方程)。
如何选取？通过转轴和移轴。

在右手直角坐标系中，二次曲线的一般方程为：

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

太复杂，看不出任何性质。

通过选取合适的新的坐标系，使曲线在新的坐标系下的方程简单(9种标准方程)。
如何选取？通过转轴和移轴。

最核心的问题：处理交叉项$2a_{12}$，

在右手直角坐标系中，二次曲线的一般方程为：

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

太复杂，看不出任何性质。

通过选取合适的新的坐标系，使曲线在新的坐标系下的方程简单(9种标准方程)。
如何选取？通过转轴和移轴。

最核心的问题：处理交叉项$2a_{12}$，需要利用转轴变换。

做转轴消去交叉项

做转轴消去交叉项

记$T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，考虑转轴变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

做转轴消去交叉项

记 $T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，考虑转轴变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

代入二次曲线方程，有何最显著的特点？

做转轴消去交叉项

记$T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，考虑转轴变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

代入二次曲线方程，有何最显著的特点？

保持次数不变，二次项仍为二次项，一次项仍为一次项。

做转轴消去交叉项

记$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$，考虑转轴变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

代入二次曲线方程，有何最显著的特点？

保持次数不变，二次项仍为二次项，一次项仍为一次项。

因此，要处理交叉项，只要限制在二次项中考虑即可。

做转轴消去交叉项

记$T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，考虑转轴变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

代入二次曲线方程，有何最显著的特点?

保持次数不变，二次项仍为二次项，一次项仍为一次项。

因此，要处理交叉项，只要限制在二次项中考虑即可。

令$\varphi(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$，其中$a_{12}\neq 0$

做转轴消去交叉项

记$T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$，考虑转轴变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

代入二次曲线方程，有何最显著的特点?

保持次数不变，二次项仍为二次项，一次项仍为一次项。

因此，要处理交叉项，只要限制在二次项中考虑即可。

令$\varphi(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$，其中$a_{12}\neq 0$

做转轴变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

代入二次项有：

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y) = \quad & a_{11}(\cos\theta x' - \sin\theta y')^2 \\
& + 2a_{12}(\cos\theta x' - \sin\theta y')(\sin\theta x' + \cos\theta y') \\
& + a_{22}(\sin\theta x' + \cos\theta y')^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y) = \quad & a_{11}(\cos\theta x' - \sin\theta y')^2 \\
& +2a_{12}(\cos\theta x' - \sin\theta y')(\sin\theta x' + \cos\theta y') \\
& +a_{22}(\sin\theta x' + \cos\theta y')^2 \\
= \quad & (a_{11}\cos^2\theta + a_{12} sin2\theta + a_{22}\sin^2\theta){x'}^2 \\
& +(a_{11}\sin^2\theta - a_{12} sin2\theta + a_{22}\cos^2\theta){y'}^2 \\
& +[(a_{22} - a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta]x'y'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y) = \quad & a_{11}(\cos\theta x' - \sin\theta y')^2 \\
& + 2a_{12}(\cos\theta x' - \sin\theta y')(\sin\theta x' + \cos\theta y') \\
& + a_{22}(\sin\theta x' + \cos\theta y')^2 \\
= \quad & (a_{11}\cos^2\theta + a_{12} sin2\theta + a_{22}\sin^2\theta){x'}^2 \\
& + (a_{11}\sin^2\theta - a_{12} sin2\theta + a_{22}\cos^2\theta){y'}^2 \\
& + [(a_{22} - a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta]x'y'
\end{aligned}
$$

令$(a_{22} - a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta = 0$，

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y) = \quad & a_{11}(\cos\theta x' - \sin\theta y')^2 \\
& +2a_{12}(\cos\theta x' - \sin\theta y')(\sin\theta x' + \cos\theta y') \\
& +a_{22}(\sin\theta x' + \cos\theta y')^2 \\
= \quad & (a_{11}\cos^2\theta + a_{12} sin2\theta + a_{22}\sin^2\theta){x'}^2 \\
& +(a_{11}\sin^2\theta - a_{12} sin2\theta + a_{22}\cos^2\theta){y'}^2 \\
& +[(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta]x'y'
\end{aligned}
$$

令$(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta = 0$，即

$$
\mathrm{ctg}2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y) = \quad & a_{11}(\cos\theta x' - \sin\theta y')^2 \\
& +2a_{12}(\cos\theta x' - \sin\theta y')(\sin\theta x' + \cos\theta y') \\
& +a_{22}(\sin\theta x' + \cos\theta y')^2 \\
= \quad & (a_{11}\cos^2\theta + a_{12} sin2\theta + a_{22}\sin^2\theta){x'}^2 \\
& +(a_{11}\sin^2\theta - a_{12} sin2\theta + a_{22}\cos^2\theta){y'}^2 \\
& +[(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta]x'y'
\end{aligned}
$$

令$(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta = 0$，即

$$
\mathrm{ctg} 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}
$$

此时，有

$$
a'_{11} =
$$

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) = &\quad a_{11}(\cos\theta x' - \sin\theta y')^2 \\ &+2a_{12}(\cos\theta x' - \sin\theta y')(\sin\theta x' + \cos\theta y') \\ &+a_{22}(\sin\theta x' + \cos\theta y')^2 \\ = &\quad (a_{11}\cos^2\theta + a_{12}sin2\theta + a_{22}\sin^2\theta){x'}^2 \\ &+(a_{11}\sin^2\theta - a_{12}sin2\theta + a_{22}\cos^2\theta){y'}^2 \\ &+[(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta]x'y'\end{aligned}$$

令$(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta = 0$，即

$$\mathrm{ctg}2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}$$

此时，有

$$a'_{11} = a_{11} + a_{12}\mathrm{tg}\theta$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y) = \quad & a_{11}(\cos\theta x' - \sin\theta y')^2 \\
& +2a_{12}(\cos\theta x' - \sin\theta y')(\sin\theta x' + \cos\theta y') \\
& +a_{22}(\sin\theta x' + \cos\theta y')^2 \\
= \quad & (a_{11}\cos^2\theta + a_{12} sin 2\theta + a_{22}\sin^2\theta){x'}^2 \\
& +(a_{11}\sin^2\theta - a_{12} sin 2\theta + a_{22}\cos^2\theta){y'}^2 \\
& +[(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta]x'y'
\end{aligned}
$$

令$(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta = 0$，即

$$
\mathrm{ctg} 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}
$$

此时，有

$$
a'_{11} = a_{11} + a_{12}\mathrm{tg}\theta
$$

同理，可得

$$
a'_{22} =
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi(x,y) = \quad & a_{11}(\cos\theta x' - \sin\theta y')^2 \\
& +2a_{12}(\cos\theta x' - \sin\theta y')(\sin\theta x' + \cos\theta y') \\
& +a_{22}(\sin\theta x' + \cos\theta y')^2 \\
= \quad & (a_{11}\cos^2\theta + a_{12}sin2\theta + a_{22}\sin^2\theta){x'}^2 \\
& +(a_{11}\sin^2\theta - a_{12}sin2\theta + a_{22}\cos^2\theta){y'}^2 \\
& +[(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta]x'y'
\end{aligned}
$$

令$(a_{22}-a_{11})\sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta = 0$，即

$$
\mathrm{ctg}2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{12}}
$$

此时，有

$$
a'_{11} = a_{11} + a_{12}\mathrm{tg}\theta
$$

同理，可得

$$
a'_{22} = a_{22} - a_{12}\mathrm{tg}\theta
$$

再来看转轴变换后的一次项：

$$2b_1x + 2b_2y$$

再来看转轴变换后的一次项：

$$2b_1x + 2b_2y = 2b_1(\cos\theta x' - \sin\theta y') + 2b_2(\sin\theta x' + \cos\theta y')$$

再来看转轴变换后的一次项:

$$\begin{aligned}2b_1x+2b_2y=&2b_1(\cos\theta x'-\sin\theta y')+2b_2(\sin\theta x'+\cos\theta y')\\=&2(b_1\cos\theta+b_2\sin\theta)x'+2(-b_1\sin\theta+b_2\cos\theta)y'\end{aligned}$$

再来看转轴变换后的一次项：

$$\begin{aligned}2b_1x+2b_2y=&2b_1(\cos\theta x'-\sin\theta y')+2b_2(\sin\theta x'+\cos\theta y')\\=&2(b_1\cos\theta+b_2\sin\theta)x'+2(-b_1\sin\theta+b_2\cos\theta)y'\end{aligned}$$

即：

$$\begin{aligned}b_1'&=b_1\cos\theta+b_2\sin\theta\\b_2'&=-b_1\sin\theta+b_2\cos\theta\end{aligned}$$

再来看转轴变换后的一次项：

$$\begin{aligned}2b_1x+2b_2y=&2b_1(\cos\theta x'-\sin\theta y')+2b_2(\sin\theta x'+\cos\theta y')\\=&2(b_1\cos\theta+b_2\sin\theta)x'+2(-b_1\sin\theta+b_2\cos\theta)y'\end{aligned}$$

即：

$$\begin{aligned}b_1'&=b_1\cos\theta+b_2\sin\theta\\b_2'&=-b_1\sin\theta+b_2\cos\theta\end{aligned}$$

改写为矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}b_1'\\b_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

再来看转轴变换后的一次项：

$$\begin{aligned} 2b_1x + 2b_2y =& 2b_1(\cos\theta x' - \sin\theta y') + 2b_2(\sin\theta x' + \cos\theta y') \\ =& 2(b_1\cos\theta + b_2\sin\theta)x' + 2(-b_1\sin\theta + b_2\cos\theta)y' \end{aligned}$$

即：

$$\begin{aligned} b_1' &= b_1\cos\theta + b_2\sin\theta \\ b_2' &= -b_1\sin\theta + b_2\cos\theta \end{aligned}$$

改写为矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

注意此时矩阵为 T^t

常数项不变，

常数项不变，转轴后最终在I'中的方程变为：

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0$$

常数项不变，转轴后最终在I'中的方程变为：

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0$$

注意到标准方程中至多只有一个一次项，还需要进一步化简，约去多余的一次项。

作移轴进一步化简方程

作移轴进一步化简方程

分情况讨论：

作移轴进一步化简方程

分情况讨论：

(1)$a'_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0,$

作移轴进一步化简方程

分情况讨论:

(1)$a'_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0$,配方有:

$$a'_{11}(x' + \frac{b'_1}{a'_{11}})^2 + a'_{22}(y' + \frac{b'_2}{a'_{22}})^2 - \frac{b'^2_1}{a'_{11}} - \frac{b'^2_2}{a'_{22}} + c = 0$$

作移轴进一步化简方程

分情况讨论：

(1)$a'_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0$,配方有：

$$a'_{11}(x' + \frac{b'_1}{a'_{11}})^2 + a'_{22}(y' + \frac{b'_2}{a'_{22}})^2 - \frac{b'^2_1}{a'_{11}} - \frac{b'^2_2}{a'_{22}} + c = 0$$

作移轴：

$$\begin{cases} x' = x^* - \frac{b'_1}{a'_{11}} \\ y' = y^* - \frac{b'_2}{a'_{22}} \end{cases}$$

作移轴进一步化简方程

分情况讨论:

(1)$a'_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0$,配方有:

$$a'_{11}(x' + \frac{b'_1}{a'_{11}})^2 + a'_{22}(y' + \frac{b'_2}{a'_{22}})^2 - \frac{b'^2_1}{a'_{11}} - \frac{b'^2_2}{a'_{22}} + c = 0$$

作移轴:

$$\begin{cases} x' = x^* - \frac{b'_1}{a'_{11}} \\ y' = y^* - \frac{b'_2}{a'_{22}} \end{cases}$$

在I^*中的方程为:

$$a'_{11}x^{*2} + a'_{22}y^{*2} - \frac{b'^2_1}{a'_{11}} - \frac{b'^2_2}{a'_{22}} + c = 0$$

作移轴进一步化简方程

分情况讨论：

(1)$a'_{11} \neq 0, a'_{22} \neq 0$,配方有：

$$a'_{11}(x' + \frac{b'_1}{a'_{11}})^2 + a'_{22}(y' + \frac{b'_2}{a'_{22}})^2 - \frac{b'^2_1}{a'_{11}} - \frac{b'^2_2}{a'_{22}} + c = 0$$

作移轴：

$$\begin{cases} x' = x^* - \frac{b'_1}{a'_{11}} \\ y' = y^* - \frac{b'_2}{a'_{22}} \end{cases}$$

在I^*中的方程为：

$$a'_{11}x^{*2} + a'_{22}y^{*2} - \frac{b'^2_1}{a'_{11}} - \frac{b'^2_2}{a'_{22}} + c = 0$$

根据a'_{11}，a'_{22}的正负，常数项$-\frac{b'^2_1}{a'_{11}} - \frac{b'^2_2}{a'_{22}} + c$ 情况再分类化简。

(2) a'_{11}, a'_{22}一个为零，一个不为零。

(2)a'_{11}, a'_{22}一个为零，一个不为零。不妨设$a'_{11} \neq 0, a'_{22} = 0$，即方程为

$$a'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0$$

(2)a'_{11},a'_{22}一个为零，一个不为零。不妨设$a'_{11}\neq 0,a'_{22}=0$，即方程为

$$a'_{11}x'^2+2b'_1x'+2b'_2y'+c=0$$

配方得

$$a'_{11}(x'+\frac{b'_1}{a'_{11}})^2+2b'_2y'-\frac{b'^2_1}{a'_{11}}+c=0$$

(2)a'_{11}, a'_{22}一个为零，一个不为零。不妨设$a'_{11} \neq 0, a'_{22} = 0$，即方程为

$$a'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0$$

配方得

$$a'_{11}(x' + \frac{b'_1}{a'_{11}})^2 + 2b'_2y' - \frac{b'^2_1}{a'_{11}} + c = 0$$

再分两种情况讨论：

(2)a'_{11}, a'_{22}一个为零，一个不为零。不妨设$a'_{11} \neq 0, a'_{22} = 0$，即方程为

$$a'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0$$

配方得

$$a'_{11}(x' + \frac{b'_1}{a'_{11}})^2 + 2b'_2y' - \frac{b'^2_1}{a'_{11}} + c = 0$$

再分两种情况讨论：

若$b'_2 \neq 0$，

(2)a'_{11}, a'_{22}一个为零，一个不为零。不妨设$a'_{11} \neq 0, a'_{22} = 0$，即方程为

$$a'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0$$

配方得

$$a'_{11}(x' + \frac{b'_1}{a'_{11}})^2 + 2b'_2y' - \frac{b'^2_1}{a'_{11}} + c = 0$$

再分两种情况讨论：

若$b'_2 \neq 0$，则作移轴：$\begin{cases} x' = x^* - \frac{b'_1}{a'_{11}} \\ y' = y^* + \frac{b'^2_1}{2a'_{11}b'_2} - \frac{c}{2b'_2} \end{cases}$

(2)a'_{11}, a'_{22}一个为零，一个不为零。不妨设$a'_{11} \neq 0, a'_{22} = 0$，即方程为

$$a'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0$$

配方得

$$a'_{11}(x' + \frac{b'_1}{a'_{11}})^2 + 2b'_2y' - \frac{b'^2_1}{a'_{11}} + c = 0$$

再分两种情况讨论：

若$b'_2 \neq 0$，则作移轴：$\begin{cases} x' = x^* - \frac{b'_1}{a'_{11}} \\ y' = y^* + \frac{b'^2_1}{2a'_{11}b'_2} - \frac{c}{2b'_2} \end{cases}$

有：$a'_{11}x^{*2} + 2b'_2y^* = 0$，

(2)a'_{11},a'_{22}一个为零，一个不为零。不妨设$a'_{11}\neq 0,a'_{22}=0$，即方程为

$$a'_{11}x'^2+2b'_1x'+2b'_2y'+c=0$$

配方得

$$a'_{11}(x'+\frac{b'_1}{a'_{11}})^2+2b'_2y'-\frac{b'^2_1}{a'_{11}}+c=0$$

再分两种情况讨论：

若$b'_2\neq 0$，则作移轴：$\begin{cases} x'=x^*-\frac{b'_1}{a'_{11}} \\ y'=y^*+\frac{b'^2_1}{2a'_{11}b'_2}-\frac{c}{2b'_2} \end{cases}$

有：$a'_{11}x^{*2}+2b'_2y^*=0$，最终可化为标准方程：

$$x^{*2}=2py^*$$

(2)a'_{11},a'_{22}一个为零，一个不为零。不妨设$a'_{11}\neq 0, a'_{22}=0$，即方程为

$$a'_{11}x'^2+2b'_1x'+2b'_2y'+c=0$$

配方得

$$a'_{11}(x'+\frac{b'_1}{a'_{11}})^2+2b'_2y'-\frac{b'^2_1}{a'_{11}}+c=0$$

再分两种情况讨论：

若$b'_2\neq 0$，则作移轴：$\begin{cases} x'=x^*-\frac{b'_1}{a'_{11}} \\ y'=y^*+\frac{b'^2_1}{2a'_{11}b'_2}-\frac{c}{2b'_2} \end{cases}$

有：$a'_{11}x^{*2}+2b'_2y^*=0$，最终可化为标准方程：

$$x^{*2}=2py^*$$

若$b'_2=0$，

(2)a'_{11}, a'_{22}一个为零，一个不为零。不妨设$a'_{11} \neq 0, a'_{22} = 0$，即方程为

$$a'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0$$

配方得

$$a'_{11}(x' + \frac{b'_1}{a'_{11}})^2 + 2b'_2y' - \frac{b'^2_1}{a'_{11}} + c = 0$$

再分两种情况讨论：

若$b'_2 \neq 0$，则作移轴：$\begin{cases} x' = x^* - \frac{b'_1}{a'_{11}} \\ y' = y^* + \frac{b'^2_1}{2a'_{11}b'_2} - \frac{c}{2b'_2} \end{cases}$

有：$a'_{11}x^{*2} + 2b'_2y^* = 0$，最终可化为标准方程：

$$x^{*2} = 2py^*$$

若$b'_2 = 0$，则作移轴：$\begin{cases} x' = x^* - \frac{b'_1}{a'_{11}} \\ y' = y^* \end{cases}$

(2)a'_{11}, a'_{22}一个为零，一个不为零。不妨设$a'_{11} \neq 0, a'_{22} = 0$，即方程为

$$a'_{11}x'^2 + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c = 0$$

配方得

$$a'_{11}(x' + \frac{b'_1}{a'_{11}})^2 + 2b'_2y' - \frac{b'^2_1}{a'_{11}} + c = 0$$

再分两种情况讨论：

若$b'_2 \neq 0$，则作移轴：$\begin{cases} x' = x^* - \frac{b'_1}{a'_{11}} \\ y' = y^* + \frac{b'^2_1}{2a'_{11}b'_2} - \frac{c}{2b'_2} \end{cases}$

有：$a'_{11}x^{*2} + 2b'_2y^* = 0$，最终可化为标准方程：

$$x^{*2} = 2py^*$$

若$b'_2 = 0$，则作移轴：$\begin{cases} x' = x^* - \frac{b'_1}{a'_{11}} \\ y' = y^* \end{cases}$

有：$a'_{11}x^{*2} - \frac{b'^2_1}{a'_{11}} + c = 0$，

(2)a'_{11},a'_{22}一个为零，一个不为零。不妨设$a'_{11}\neq 0,a'_{22}=0$，即方程为

$$a'_{11}x'^2+2b'_1x'+2b'_2y'+c=0$$

配方得

$$a'_{11}(x'+\frac{b'_1}{a'_{11}})^2+2b'_2y'-\frac{b'^2_1}{a'_{11}}+c=0$$

再分两种情况讨论：

若$b'_2\neq 0$，则作移轴：$\begin{cases}x'=x^*-\frac{b'_1}{a'_{11}}\\ y'=y^*+\frac{b'^2_1}{2a'_{11}b'_2}-\frac{c}{2b'_2}\end{cases}$

有：$a'_{11}x^{*2}+2b'_2y^*=0$，最终可化为标准方程：

$$x^{*2}=2py^*$$

若$b'_2=0$，则作移轴：$\begin{cases}x'=x^*-\frac{b'_1}{a'_{11}}\\ y'=y^*\end{cases}$

有：$a'_{11}x^{*2}-\frac{b'^2_1}{a'_{11}}+c=0$，最终可化为标准方程：

$$x^{*2}=d$$

先转轴，再移轴，可以得到所有二次曲线的标准型，共九种。

先转轴，再移轴，可以得到所有二次曲线的标准型，共九种。

注意：次序必须是先作转轴，再作移轴。

先转轴，再移轴，可以得到所有二次曲线的标准型，共九种。

注意：次序必须是先作转轴，再作移轴。

例：确定下列二次曲线的类型，并在原坐标系中画出曲线的图像。

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0$$

先转轴，再移轴，可以得到所有二次曲线的标准型，共九种。

注意： 次序必须是先作转轴，再作移轴。

例： 确定下列二次曲线的类型，并在原坐标系中画出曲线的图像。

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0$$

例： 确定曲线类型

$$4x^2 + 8xy + 4y^2 + 13x + 3y + 4 = 0$$

先转轴，再移轴，可以得到所有二次曲线的标准型，共九种。

注意：次序必须是先作转轴，再作移轴。

例：确定下列二次曲线的类型，并在原坐标系中画出曲线的图像。

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0$$

例：确定曲线类型

$$4x^2 + 8xy + 4y^2 + 13x + 3y + 4 = 0$$

注意：初学时务必将转轴和移轴变换具体写出来。

移轴还算简单，但转轴太复杂了，而且写法还特别复杂，

移轴还算简单，但转轴太复杂了，而且写法还特别复杂，有何办法解决？

移轴还算简单，但转轴太复杂了，而且写法还特别复杂，有何办法解决？

可以用高等代数中的二次型来化简记法。

二次型

二次型

定义： 二次项$\varphi(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ 称为一个二次型。

二次型

定义： 二次项$\varphi(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ 称为一个二次型。

引入矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$,

二次型

定义： 二次项$\varphi(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ 称为一个二次型。

引入矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$，则有：

$$\varphi(x,y)=(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

二次型

定义： 二次项$\varphi(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ 称为一个二次型。

引入矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$，则有：

$$\varphi(x,y)=(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

实对称矩阵A称为二次型所对应的矩阵。

二次型

定义： 二次项$\varphi(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2$ 称为一个二次型。

引入矩阵$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$，则有：

$$\varphi(x,y)=(x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

实对称矩阵A称为二次型所对应的矩阵。

可见，若实对称矩阵A为对角阵，则对应的二次型没有交叉项。

来看坐标变化后二次型的变化：

来看坐标变化后二次型的变化：

令$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$为转轴坐标变换，则有：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (x, y) = (x', y') T^t$$

来看坐标变化后二次型的变化：

令$T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$为转轴坐标变换，则有：

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix},\quad (x,y)=(x',y')T^t$$

此时：

$$\varphi(x,y)=(x',y')T^tAT\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\varphi'(x',y')$$

来看坐标变化后二次型的变化：

令$T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$为转轴坐标变换，则有：

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix},\quad (x,y)=(x',y')T^t$$

此时：

$$\varphi(x,y)=(x',y')T^tAT\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\varphi'(x',y')$$

即新的二次型$\varphi'(x',y')$所对应的矩阵为$A'=T^tAT$

来看坐标变化后二次型的变化：

令$T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$为转轴坐标变换，则有：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad (x, y) = (x', y') T^t$$

此时：

$$\varphi(x, y) = (x', y') T^t A T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \varphi'(x', y')$$

即新的二次型$\varphi'(x', y')$所对应的矩阵为$A' = T^t A T$

若要消去二次型$\varphi(x, y)$中的交叉项，等价于找到正交矩阵T，使得$A' = T^t A T$变为对角阵。

来看坐标变化后二次型的变化：
令$T=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$为转轴坐标变换，则有：

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix},\quad (x,y)=(x',y')T^t$$

此时：

$$\varphi(x,y)=(x',y')T^tAT\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\varphi'(x',y')$$

即新的二次型$\varphi'(x',y')$所对应的矩阵为$A'=T^tAT$

若要消去二次型$\varphi(x,y)$中的交叉项，等价于找到正交矩阵T，使得$A'=T^tAT$变为对角阵。

这个问题称为二次型的标准化，或者是实对称矩阵的对角化问题。

不妨设正交矩阵T可以找到，再来看一次项：

$$\frac{1}{2}\psi(x,y) = b_1x + b_2y = (x,y)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

不妨设正交矩阵T可以找到，再来看一次项：

$$\frac{1}{2}\psi(x,y) = b_1x + b_2y = (x,y)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

因为有：$(x,y) = (x',y')T^t$

不妨设正交矩阵T可以找到，再来看一次项：

$$\frac{1}{2}\psi(x,y) = b_1 x + b_2 y = (x,y)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

因为有：$(x,y) = (x',y')T^t$

$$\frac{1}{2}\psi(x,y) = (x',y')T^t\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\psi'(x',y') = (x',y')\begin{pmatrix} b_1' \\ b_2' \end{pmatrix}$$

不妨设正交矩阵T可以找到，再来看一次项：

$$\frac{1}{2}\psi(x,y)=b_1x+b_2y=(x,y)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

因为有：$(x,y)=(x',y')T^t$

$$\frac{1}{2}\psi(x,y)=(x',y')T^t\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\psi'(x',y')=(x',y')\begin{pmatrix}b_1'\\b_2'\end{pmatrix}$$

即有：

$$\begin{pmatrix}b_1'\\b_2'\end{pmatrix}=T^t\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$

补充说明

事实上我们可以将一次项，常数项和二次项放在一起同时考虑：

补充说明

事实上我们可以将一次项，常数项和二次项放在一起同时考虑：

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c$$

补充说明

事实上我们可以将一次项，常数项和二次项放在一起同时考虑：

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c$$

记$P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$

补充说明

事实上我们可以将一次项，常数项和二次项放在一起同时考虑：

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c$$

记$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$

有：

$$F(x,y) = (x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

补充说明

事实上我们可以将一次项，常数项和二次项放在一起同时考虑：

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c$$

记$P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}$

有：

$$F(x,y)=(x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

有类似的变换关系，但是涉及到分块矩阵。

作业

习题5.1，P160
1(2),(8)