习题 2.1 部分参考答案

4.(1) $y = \sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$，则最小正周期为 π。

4.(3) $y = |\sin x| + |\cos x| = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + |\sin 2x|}$，则最小正周期为 $\frac{\pi}{4}$。

5.(2) $y = \dfrac{1}{x^2}$ 为无界函数。

5.(4) $y = x \sin \dfrac{1}{x}$ 是有界函数，一个上界是 4，一个下界是 -4。

5.(6) $y = \arctan x$ 是有界函数，一个上界是 1，一个下界是 -1。

8.(1) $y = \sqrt{x}, \quad x \in [0, +\infty)$。

8.(2) $y = \sqrt[3]{x}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$。

习题 1.1 部分参考答案

2. 证明：

反证法：假设数集 E 下确界为 α, β，不妨设 $\alpha > \beta$。
由 β 是下确界，取 $\epsilon_0 = \frac{\alpha-\beta}{2}$，则存在 $x_0 \in E, x_0 < \beta - \epsilon_0 = \frac{\alpha+\beta}{2} < \alpha$。
又由 α 是下确界，则有 $x_0 \geq \alpha$，矛盾。所以假设错误原命题得证。

3. 证明：

(1) 设数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a。
取 $\epsilon = 1, \exists N > 0, n > N$ 有 $|x_n - a| < 1$，即 $a - 1 < x_n < a + 1$。
取 $m = \min\{x_1, \cdots, x_N\}, M = \max\{x_1, \cdots, x_N\}$，
则有 $|x_n| < |a| + 1 + |m| + |M|$。所以数列 $\{x_n\}$ 有界，则有上下确界。

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 趋于 $+\infty$。
取 $G = 1, \exists N > 0, n > N$ 有 $x_n > 1$。
取 $m = \min\{x_1, \cdots, x_n\}$，则有 $x_n > -|m| + 1$。
所以数列 $\{x_n\}$ 有下界，则有下确界。

(3) 设数列 $\{x_n\}$ 趋于 $-\infty$。
取 $G = 1, \exists N > 0, n > N$ 有 $x_n < -1$。
取 $m = \max\{x_1, \cdots, x_n\}$，则有 $x_n < |m|$。
所以数列 $\{x_n\}$ 有上界，则有上确界。

4.(1)$x_n=2-\dfrac{1}{n}$ 为单调上升数列，则 $x_n\geq x_1=1$。
又由 $x_n\leq 2$，且 $\forall\epsilon>0$，取 $n=[\frac{1}{\epsilon}]+1$，则有 $x_n>2-\epsilon$。
数列的上确界为 2，下确界为 1。

4.(2)$x_{2k}=\dfrac{1}{k}, x_{2k-1}=4+\dfrac{1}{k}$ 分别关于 k 单调下降。
$0<x_{2k}\leq x_2=1$，同时有 $4<x_{2k-1}\leq x_1=5$。
由 $x_{2k}>0$，且 $\forall\epsilon>0$，取 $k=[\frac{1}{\epsilon}]+1$，则有 $x_{2k}<\epsilon$。

5.(1) 证明：
$\forall\epsilon>0$，考虑 $\left|\dfrac{n-1}{n+1}-1\right|=\dfrac{2}{n+1}<\dfrac{2}{n}<\epsilon$，得 $n>\dfrac{2}{\epsilon}$。
取 $N=[\frac{2}{\epsilon}]+1$，则有 $n>N$ 时 $\left|\dfrac{n-1}{n+1}-1\right|<\epsilon$，证毕。

5.(2) 证明：
$\forall\epsilon>0$，考虑 $\left|\dfrac{3n^2+n}{4n^2-1}-\dfrac{3}{4}\right|=\left|\dfrac{4n+3}{4(4n^2-1)}\right|<\dfrac{8n}{4n^2}=\dfrac{2}{n}<\epsilon$，得 $n>\dfrac{2}{\epsilon}$。
取 $N=[\frac{2}{\epsilon}]+1$，则有 $n>N$ 时 $\left|\dfrac{3n^2+n}{4n^2-1}-\dfrac{3}{4}\right|<\epsilon$，证毕。

5.(3) 证明：
$\forall\epsilon>0$，考虑 $\left|\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right|<\epsilon$，得 $n>\dfrac{1}{\epsilon^4}$。
取 $N=[\frac{1}{\epsilon^4}]+1$，则有 $n>N$ 时 $\left|\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right|<\epsilon$，证毕。

5.(4) 证明：
$\forall\epsilon>0$，考虑 $\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}\right|\leq\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{n}<\epsilon$，得 $n>\dfrac{1}{\epsilon}$。
取 $N=[\frac{1}{\epsilon}]+1$，则有 $n>N$ 时 $\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n+1}\right|<\epsilon$，证毕。

5.(5) 证明：
$\forall\epsilon>0$，考虑 $\left|\dfrac{n+1}{a^n}\right|<\dfrac{2n}{\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2}<\dfrac{4}{(n-1)(a-1)^2}<\epsilon$，
得 $n>\dfrac{4}{\epsilon(a-1)^2}+1$。
取 $N=[\frac{4}{\epsilon(a-1)^2}]+2$，则有 $n>N$ 时 $\left|\dfrac{n+1}{a^n}\right|<\epsilon$，证毕。

6.(1) 反例：数列 $\{-n\}$

6.(2) 反例：数列 $\{1+(-1)^n\}$

7. 证明：

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 即 $\forall\epsilon>0, \exists N>0$, 使得 $n>N, |x_n-a|<\epsilon$。
对于任意自然数 k，显然有 $n>N$ 时 $n+k>N$，则 $|x_{n+k}-a|<\epsilon$, 证毕。

习题 1.2 部分参考答案

1. 证明利用性质 1.8 和极限四则运算。

2. 利用极限的定义，取 $\epsilon=\frac{a}{2}$。

3. 两边夹原理，$\sqrt[n]{\dfrac{9^n}{n}} < x_n < \sqrt[n]{\dfrac{3*9^n}{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{9^n}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9}{\sqrt[n]{n}} = 9$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{3*9^n}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9*\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n}} = 9$。

4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+10^9}{an-10^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{10^9}{n}}{a-\frac{10^2}{n}} = \dfrac{1}{a}$,

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-10^8}{bn+10^4} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{10^8}{n}}{b+\frac{10^4}{n}} = \dfrac{1}{b} > \dfrac{1}{a}$，由性质 1.1 得证。

5.(1) $\dfrac{3}{5}$；(2) 0；(3) $\dfrac{1}{4}$；