一元多项式

定义： 设P是数域，n是非负整数，形式表达式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \qquad (2-1),$$

其中$a_i \in P(0 \le i \le n)$，称为系数在数域P的一元多项式，简称为数域P上的一元多项式。

一元多项式

定义： 设P是数域，n是非负整数，形式表达式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \qquad (2-1),$$

其中$a_i \in P(0 \leq i \leq n)$，称为**系数在数域$P$的一元多项式**，简称为**数域$P$上的一元多项式**。

在多项式(2-1)中，a_ix^i称为*i次项*，a_i称为*i次项的系数*，用$f(x)$，$g(x)$，f，g等表示多项式。

一元多项式的相等

定义： 若在多项式$f(x)$与$g(x)$中，除去系数为零的项外，同次项的系数都相等，则称$f(x)$与$g(x)$相等，记为

$$f(x) = g(x)$$

系数全为零的多项式称为零多项式，记为0。

一元多项式的相等

定义： 若在多项式$f(x)$与$g(x)$中，除去系数为零的项外，同次项的系数都相等，则称$f(x)$**与**$g(x)$**相等**，记为

$$f(x)=g(x)$$

系数全为零的多项式称为**零多项式**，记为0。

注： 在一个多项式中，可以任意添上或去掉一些系数为零的项；若某个i次项的系数是1，则这个系数可以省略不写。

一元多项式的次数

定义： 在多项式(2-1)中，若$a_n \neq 0$，则称$a_n x^n$为多项式(2-1)的**首项**或**最高次项**，a_n称为**首项系数**或**最高次项系数**，n称为**多项式(2-1)的次数**，记作

$$\partial(f(x)) = n \text{或} \deg(f(x)) = n$$

一元多项式的次数

定义： 在多项式(2-1)中，若$a_n \neq 0$，则称$a_n x^n$为多项式(2-1)的**首项**或**最高次项**，a_n称为**首项系数**或**最高次项系数**，n称为**多项式(2-1)的次数**，记作

$$\partial(f(x)) = n \text{或} \deg(f(x)) = n$$

注： (1)零多项式是唯一不定义次数的多项式或定义为负无穷大;

一元多项式的次数

定义： 在多项式(2-1)中，若$a_n \neq 0$，则称$a_n x^n$为多项式(2-1)的**首项**或**最高次项**，a_n称为**首项系数**或**最高次项系数**，n称为**多项式(2-1)的次数**，记作

$$\partial(f(x)) = n \text{或} \deg(f(x)) = n$$

注： (1)零多项式是唯一不定义次数的多项式或定义为负无穷大;

(2)零次多项式为非零常数，即

$$f(x) = a(a \in P^*) \Leftrightarrow \partial(f(x)) = 0$$

一元多项式的运算

设$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i, g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_jx^j$，不妨设$n\geq m$，则

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$$

一元多项式的运算

设$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i, g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$，不妨设$n\geq m$，则

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$$

注： 当$n>m$时，$b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$。

一元多项式的运算

设$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i, g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j$，不妨设$n \geq m$，则

$$f(x) \pm g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$$

注： 当$n>m$时，$b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$。

$$f(x)g(x)=\sum_{s=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=s} a_i b_j\right)x^s$$

一元多项式的运算

设$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i, g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_jx^j$，不妨设$n\geq m$，则

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$$

注： 当$n>m$时，$b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$。

$$f(x)g(x)=\sum_{s=0}^{m+n}(\sum_{i+j=s}a_ib_j)x^s$$

注:(1)对某个s，当$n+1\leq i\leq s, m+1\leq j\leq s$时，$a_i=b_j=0$。

一元多项式的运算

设$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i, g(x)=\sum\limits_{j=0}^{m}b_jx^j$，不妨设$n\geq m$，则

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$$

注： 当$n>m$时，$b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$。

$$f(x)g(x)=\sum_{s=0}^{m+n}(\sum_{i+j=s}a_ib_j)x^s$$

注:(1)对某个s，当$n+1\leq i\leq s, m+1\leq j\leq s$时，$a_i=b_j=0$。

(2)乘方:$f^k(x)=f^{k-1}(x)f(x)$，约定$f^0(x)=1,f^1(x)=f(x)$。

一元多项式的运算

设$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i, g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$，不妨设$n\geq m$，则

$$f(x)\pm g(x)=\sum_{i=0}^{n}(a_i+b_i)x^i$$

注： 当$n>m$时，$b_{m+1}=b_{m+2}=\cdots=b_n=0$。

$$f(x)g(x)=\sum_{s=0}^{m+n}(\sum_{i+j=s}a_ib_j)x^s$$

注:(1)对某个s，当$n+1\leq i\leq s, m+1\leq j\leq s$时，$a_i=b_j=0$。

(2)乘方:$f^k(x)=f^{k-1}(x)f(x)$，约定$f^0(x)=1$,$f^1(x)=f(x)$。

定义： 所有系数在数域P中的一元多项式的全体，称为**数域P上的一元多项式环**，记作$P[x]$，P称为$P[x]$的**系数域**。

一元多项式的运算性质

一元多项式的运算性质

交换律： $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$,$f(x)g(x)=g(x)f(x)$

一元多项式的运算性质

交换律： $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$, $f(x)g(x)=g(x)f(x)$

结合律： $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$,

$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$

一元多项式的运算性质

交换律： $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$,$f(x)g(x)=g(x)f(x)$

结合律： $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$,

$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$

分配律： $f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$,

$(f(x)+(g(x))h(x)=f(x)h(x)+g(x)h(x)$

一元多项式的运算性质

交换律： $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$,$f(x)g(x)=g(x)f(x)$

结合律： $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$,

$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$

分配律： $f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$,

$(f(x)+(g(x))h(x)=f(x)h(x)+g(x)h(x)$

乘法消去律： $f(x)g(x)=f(x)h(x)$且$f(x)\neq 0\Rightarrow g(x)=h(x)$

$g(x)f(x)=h(x)f(x)$且$f(x)\neq 0\Rightarrow g(x)=h(x)$

一元多项式的运算性质

交换律： $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$, $f(x)g(x)=g(x)f(x)$

结合律： $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$,

$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$

分配律： $f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$,

$(f(x)+(g(x))h(x)=f(x)h(x)+g(x)h(x)$

乘法消去律： $f(x)g(x)=f(x)h(x)$且$f(x)\neq 0\Rightarrow g(x)=h(x)$

$g(x)f(x)=h(x)f(x)$且$f(x)\neq 0\Rightarrow g(x)=h(x)$

次数性质： $\partial(f(x)\pm g(x))\leq \max(\partial(f(x)),\partial(g(x)))$,

$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$

一元多项式的运算性质

交换律： $f(x)+g(x)=g(x)+f(x), f(x)g(x)=g(x)f(x)$

结合律： $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$,

$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$

分配律： $f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$,

$(f(x)+(g(x))h(x)=f(x)h(x)+g(x)h(x)$

乘法消去律： $f(x)g(x)=f(x)h(x)$且$f(x)\neq 0\Rightarrow g(x)=h(x)$

$g(x)f(x)=h(x)f(x)$且$f(x)\neq 0\Rightarrow g(x)=h(x)$

次数性质： $\partial(f(x)\pm g(x))\leq \max(\partial(f(x)),\partial(g(x))$,

$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$

推论1： 多项式乘积的首项系数等于因子首项系数的乘积。

一元多项式的运算性质

交换律： $f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$, $f(x)g(x)=g(x)f(x)$

结合律： $(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$,

$(f(x)g(x))h(x)=f(x)(g(x)h(x))$

分配律： $f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$,

$(f(x)+(g(x))h(x)=f(x)h(x)+g(x)h(x)$

乘法消去律： $f(x)g(x)=f(x)h(x)$且$f(x)\neq 0\Rightarrow g(x)=h(x)$

$g(x)f(x)=h(x)f(x)$且$f(x)\neq 0\Rightarrow g(x)=h(x)$

次数性质： $\partial(f(x)\pm g(x))\leq \max(\partial(f(x)),\partial(g(x))$,

$\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$

推论1： 多项式乘积的首项系数等于因子首项系数的乘积。

推论2： $f(x)g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0$或$g(x)=0$。

整除的概念

定义： 设$f(x), g(x) \in P[x]$，若存在$h(x) \in P[x]$，使得$f(x) = g(x)h(x)$，则称$g(x)$**整除**$f(x)$，或称$f(x)$**能被**$g(x)$**整除**，记为$g(x)|f(x)$；否则称$g(x)$**不整除**$f(x)$，或称$f(x)$**不能被**$g(x)$**整除**，记作$g(x) \nmid f(x)$。

当$g(x)|f(x)$时，称$g(x)$为$f(x)$的**因式**，$f(x)$为$g(x)$的**倍式**。

整除的概念

定义： 设$f(x), g(x) \in P[x]$，若存在$h(x) \in P[x]$，使得$f(x) = g(x)h(x)$，则称$g(x)$**整除**$f(x)$，或称$f(x)$**能被**$g(x)$**整除**，记为$g(x)|f(x)$；否则称$g(x)$**不整除**$f(x)$，或称$f(x)$**不能被**$g(x)$**整除**，记作$g(x) \nmid f(x)$。

当$g(x)|f(x)$时，称$g(x)$为$f(x)$的**因式**，$f(x)$为$g(x)$的**倍式**。

注： (1)除法不是多项式的运算，整除性只是$P[x]$元素间的一种关系；

整除的概念

定义： 设$f(x), g(x) \in P[x]$，若存在$h(x) \in P[x]$，使得$f(x) = g(x)h(x)$，则称$g(x)$**整除**$f(x)$，或称$f(x)$**能被**$g(x)$**整除**，记为$g(x)|f(x)$；否则称$g(x)$**不整除**$f(x)$，或称$f(x)$**不能被**$g(x)$**整除**，记作$g(x) \nmid f(x)$。

当$g(x)|f(x)$时，称$g(x)$为$f(x)$的**因式**，$f(x)$为$g(x)$的**倍式**。

注： (1)除法不是多项式的运算，整除性只是$P[x]$元素间的一种关系；

(2)若$g(x) \nmid f(x)$，则对任意$h(x) \in P[x]$，$f(x) \neq g(x)h(x)$。

整除的概念

定义： 设$f(x), g(x) \in P[x]$，若存在$h(x) \in P[x]$，使得$f(x) = g(x)h(x)$，则称$g(x)$**整除**$f(x)$，或称$f(x)$**能被**$g(x)$**整除**，记为$g(x)|f(x)$；否则称$g(x)$**不整除**$f(x)$，或称$f(x)$**不能被**$g(x)$**整除**，记作$g(x) \nmid f(x)$。

当$g(x)|f(x)$时，称$g(x)$为$f(x)$的**因式**，$f(x)$为$g(x)$的**倍式**。

注： (1)除法不是多项式的运算，整除性只是$P[x]$元素间的一种关系；

(2)若$g(x) \nmid f(x)$，则对任意$h(x) \in P[x]$，$f(x) \neq g(x)h(x)$。

(3)$\forall f(x) \in P[x]$，$\forall c \in P^*$，总有$c|f(x)$，$cf(x)|f(x)$，称它们为$f(x)$的**平凡因式**。特别地，$f(x)$整除本身。

整除的概念

定义： 设$f(x), g(x) \in P[x]$，若存在$h(x) \in P[x]$，使得$f(x) = g(x)h(x)$，则称$g(x)$**整除**$f(x)$，或称$f(x)$**能被**$g(x)$**整除**，记为$g(x)|f(x)$；否则称$g(x)$**不整除**$f(x)$，或称$f(x)$**不能被**$g(x)$**整除**，记作$g(x) \nmid f(x)$。

当$g(x)|f(x)$时，称$g(x)$为$f(x)$的**因式**，$f(x)$为$g(x)$的**倍式**。

注： (1)除法不是多项式的运算，整除性只是$P[x]$元素间的一种关系；

(2)若$g(x) \nmid f(x)$，则对任意$h(x) \in P[x]$，$f(x) \neq g(x)h(x)$。

(3)$\forall f(x) \in P[x]$，$\forall c \in P^*$，总有$c|f(x)$，$cf(x)|f(x)$，称它们为$f(x)$的**平凡因式**。特别地，$f(x)$整除本身。

(4)$f(x)$与$cf(x)(c \neq 0)$有相同的因式和倍式。

整除的概念

定义：设$f(x), g(x) \in P[x]$，若存在$h(x) \in P[x]$，使得$f(x) = g(x)h(x)$，则称$g(x)$**整除**$f(x)$，或称$f(x)$**能被**$g(x)$**整除**，记为$g(x)|f(x)$；否则称$g(x)$**不整除**$f(x)$，或称$f(x)$**不能被**$g(x)$**整除**，记作$g(x) \nmid f(x)$。

当$g(x)|f(x)$时，称$g(x)$为$f(x)$的**因式**，$f(x)$为$g(x)$的**倍式**。

注：(1)除法不是多项式的运算，整除性只是$P[x]$元素间的一种关系；

(2)若$g(x) \nmid f(x)$，则对任意$h(x) \in P[x]$，$f(x) \neq g(x)h(x)$。

(3)$\forall f(x) \in P[x]$，$\forall c \in P^*$，总有$c|f(x)$，$cf(x)|f(x)$，称它们为$f(x)$的**平凡因式**。特别地，$f(x)$整除本身。

(4)$f(x)$与$cf(x)(c \neq 0)$有相同的因式和倍式。

(5)若$g(x)|f(x)$，$f(x) \neq 0$，则$\partial(g(x)) \leq \partial(f(x))$。

结论：在$P[x]$中，零多项式只整除零多项式；任意多项式整除零多项式；零次多项式整除任意多项式；零次多项式只能被零次多项式整除。

带余除法

带余除法： 设$f(x), g(x) \in P[x]$，$g(x) \neq 0$，则存在$q(x), r(x) \in P[x]$，使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

其中$\partial(r(x)) < \partial(g(x))$或$r(x) = 0$，且这样的$q(x)$和$r(x)$是由$f(x)$,$g(x)$**唯一确定**的。

上述$q(x)$和$r(x)$分别称为$g(x)$除$f(x)$(或$f(x)$除以$g(x)$)的商式和余式。

带余除法

带余除法： 设$f(x), g(x) \in P[x]$，$g(x) \neq 0$，则存在$q(x), r(x) \in P[x]$，使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

其中$\partial(r(x)) < \partial(g(x))$或$r(x) = 0$，且这样的$q(x)$和$r(x)$是由$f(x)$,$g(x)$**唯一确定**的。

上述$q(x)$和$r(x)$分别称为$g(x)$除$f(x)$(或$f(x)$除以$g(x)$)的商式和余式。

定理证明思路： 存在性通过对多项式的次数作第二数学归纳法证明，唯一性利用反证法。

带余除法

带余除法： 设$f(x), g(x) \in P[x]$，$g(x) \neq 0$，则存在$q(x), r(x) \in P[x]$，使得

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x)$$

其中$\partial(r(x)) < \partial(g(x))$或$r(x) = 0$，且这样的$q(x)$和$r(x)$是由$f(x)$,$g(x)$**唯一确定**的。

上述$q(x)$和$r(x)$分别称为$g(x)$除$f(x)$(或$f(x)$除以$g(x)$)的商式和余式。

定理证明思路： 存在性通过对多项式的次数作第二数学归纳法证明，唯一性利用反证法。

定理: 设$f(x), g(x) \in P[x]$，

(1)若$g(x) = 0$，则$g(x)|f(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$;

(2)若$g(x) \neq 0$，则$g(x)|f(x) \Leftrightarrow g(x)$除$f(x)$的余式为0。

整除的性质

性质1: 若$f(x)|g(x)$,$g(x)|f(x)$,则$f(x)=cg(x)$,其中c为非零常数。

整除的性质

性质1: 若$f(x)|g(x)$,$g(x)|f(x)$,则$f(x)=cg(x)$,其中c为非零常数。

性质2(传递性): 若$f(x)|g(x)$，$g(x)|h(x)$，则$f(x)|h(x)$。

整除的性质

性质1: 若$f(x)|g(x)$,$g(x)|f(x)$,则$f(x)=cg(x)$,其中c为非零常数。

性质2(传递性): 若$f(x)|g(x)$，$g(x)|h(x)$，则$f(x)|h(x)$。

性质3:若$f(x)|g_i(x)$，$i=1,2,\cdots,r$，则$f(x)|\sum_{i=1}^{r}u_i(x)g_i(x)$。

整除的性质

性质1: 若$f(x)|g(x)$,$g(x)|f(x)$,则$f(x)=cg(x)$,其中c为非零常数。

性质2(传递性): 若$f(x)|g(x)$，$g(x)|h(x)$，则$f(x)|h(x)$。

性质3:若$f(x)|g_i(x)$，$i=1,2,\cdots,r$，则$f(x)|\sum_{i=1}^{r}u_i(x)g_i(x)$。

性质4:多项式的整除性与数域的扩大无关,即若$P\subseteq\overline{P}$,在$P[x]$中,
$g(x)|f(x)\Leftrightarrow$在$\overline{P}[x]$中，$g(x)|f(x)$。

综合除法

设$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，则$x-c$除$f(x)$所得的商$q(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}b_ix^i$和余式$r(x)$可按如下计算格式求得：

c	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
		cb_{n-1}	cb_{n-2}	$\cdots$	cb_1	cb_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	r

其中$b_{n-1}=a_n, b_i=a_{i+1}+cb_{i+1}(0\le i\le n-2), r=a_0+cb_0$。

综合除法

设$f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$，则$x-c$除$f(x)$所得的商$q(x)=\sum_{i=0}^{n-1}b_ix^i$和余式$r(x)$可按如下计算格式求得：

c	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
		cb_{n-1}	cb_{n-2}	$\cdots$	cb_1	cb_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_0	r

其中$b_{n-1}=a_n, b_i=a_{i+1}+cb_{i+1}(0\le i\le n-2), r=a_0+cb_0$。

应用:(1)将$f(x)$表示成$x-c$的幂的和的形式，即

$$f(x)=c_n(x-c)^n+c_{n-1}(x-c)^{n-1}+\cdots+c_1(x-c)+c_0$$

综合除法

设$f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，则$x-c$除$f(x)$所得的商$q(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}b_ix^i$和余式$r(x)$可按如下计算格式求得：

$$\begin{array}{c|cccccc} c & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & cb_{n-1} & cb_{n-2} & \cdots & cb_1 & cb_0 \\ \hline & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & r \end{array}$$

其中$b_{n-1}=a_n, b_i=a_{i+1}+cb_{i+1}(0\le i\le n-2), r=a_0+cb_0$。

应用:(1)将$f(x)$表示成$x-c$的幂的和的形式，即

$$f(x)=c_n(x-c)^n+c_{n-1}(x-c)^{n-1}+\cdots+c_1(x-c)+c_0$$

(2)求多项式的值。

综合除法

定理:任一多项式$f(x)$可唯一地表为$x-x_0$的多项式，即存在唯一的多项式$g(y)$，使得$f(x)=g(x-x_0)$。(杨子胥,P31,37)

综合除法

定理:任一多项式$f(x)$可唯一地表为$x-x_0$的多项式，即存在唯一的多项式$g(y)$，使得$f(x)=g(x-x_0)$。(杨子胥,P31,37)

注： 将$x-x_0$换成任一次数不小于1的多项式，可得类似的结论。

综合除法

定理:任一多项式$f(x)$可唯一地表为$x-x_0$的多项式，即存在唯一的多项式$g(y)$，使得$f(x)=g(x-x_0)$。(杨子胥,P31,37)

注： 将$x-x_0$换成任一次数不小于1的多项式，可得类似的结论。

例1 设$f(x)=x^5$，(1)求$f(x)$被$x-1$除的商与余式；(2)将$f(x)$表示成$x-1$的多项式。$(P44,4(1))$

综合除法

定理:任一多项式$f(x)$可唯一地表为$x-x_0$的多项式，即存在唯一的多项式$g(y)$，使得$f(x)=g(x-x_0)$。(杨子胥,P31,37)

注： 将$x-x_0$换成任一次数不小于1的多项式，可得类似的结论。

例1 设$f(x)=x^5$，(1)求$f(x)$被$x-1$除的商与余式；(2)将$f(x)$表示成$x-1$的多项式。$(P44,4(1))$

例2 设$f(x)=2x^5-29x^4-226x^2+20x-76$，求$f(15)$。

例3 判断正误：

(1)$f(x)\neq 0, g(x)\neq 0 \Rightarrow \partial(f(x)+g(x)) \leq \max(\partial(f(x)), \partial(g(x)))$

(2)$f(x)|g(x)h(x) \Rightarrow f(x)|g(x)$或$f(x)|h(x)$

(3)$f_1(x)|g(x), f_2(x)|g(x) \Rightarrow f_1(x)f_2(x)|g(x)$

(4)$f(x)g(x) = f(x)h(x) \Rightarrow g(x) = h(x)$

(5)$\frac{x}{x+1}, \frac{x^2-1}{x-1}$是否有意义？

(6)$2|1$?

例4 设$f(x)=3x^4-4x^3+5x-1$,$g(x)=x^2-x+1$，求$g(x)$除$f(x)$的商与余式。

例4 设$f(x)=3x^4-4x^3+5x-1, g(x)=x^2-x+1$，求$g(x)$除$f(x)$的商与余式。

注：利用带余除法或待定系数法。

例4 设$f(x)=3x^4-4x^3+5x-1, g(x)=x^2-x+1$，求$g(x)$除$f(x)$的商与余式。

注：利用带余除法或待定系数法。

例5 a,p,q适合什么条件时，有$x^2+2ax+a^2|x^3-3px+2q$。

例4 设$f(x)=3x^4-4x^3+5x-1, g(x)=x^2-x+1$，求$g(x)$除$f(x)$的商与余式。

注：利用带余除法或待定系数法。

例5 a,p,q适合什么条件时，有$x^2+2ax+a^2|x^3-3px+2q$。

例6 a,b为何值时，$(x^2-1)|x^4-3x^3+6x^2+ax+b$。

例4 设$f(x)=3x^4-4x^3+5x-1, g(x)=x^2-x+1$，求$g(x)$除$f(x)$的商与余式。

注：利用带余除法或待定系数法。

例5 a,p,q适合什么条件时，有$x^2+2ax+a^2|x^3-3px+2q$。

例6 a,b为何值时，$(x^2-1)|x^4-3x^3+6x^2+ax+b$。

注：将除式分解为一次因式的乘积后，可利用综合除法。

例4 设$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 5x - 1, g(x) = x^2 - x + 1$，求$g(x)$除$f(x)$的商与余式。

注：利用带余除法或待定系数法。

例5 a, p, q适合什么条件时，有$x^2 + 2ax + a^2 | x^3 - 3px + 2q$。

例6 a, b为何值时，$(x^2 - 1) | x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$。

注：将除式分解为一次因式的乘积后，可利用综合除法。

例7 $f(x), g(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$,若$f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x)$,证明：$f(x) = g(x) = h(x) = 0$。举例说明在$\mathbb{C}[x]$上不成立。

例4 设$f(x)=3x^4-4x^3+5x-1$,$g(x)=x^2-x+1$，求$g(x)$除$f(x)$的商与余式。

注：利用带余除法或待定系数法。

例5 a,p,q适合什么条件时，有$x^2+2ax+a^2|x^3-3px+2q$。

例6 a,b为何值时，$(x^2-1)|x^4-3x^3+6x^2+ax+b$。

注：将除式分解为一次因式的乘积后，可利用综合除法。

例7 $f(x),g(x),h(x)\in\mathbb{R}[x]$,若$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$,证明：$f(x)=g(x)=h(x)=0$。举例说明在$\mathbb{C}[x]$上不成立。

例8 设$h(x)\neq 0,k(x)\neq 0,f(x)=ah(x)+(x-a)k(x)$,$g(x)=(x-a)^m h(x)$，且$m\geq 1$,$\partial f(x)<\partial g(x)$,$a\neq 0$,证明：

$$\partial k(x)<\partial h(x)+m-1$$

例9 设$k \in \mathbb{Z}^+$，证明：$x|f^k(x) \Leftrightarrow x|f(x)$。

例9 设$k \in \mathbb{Z}^+$，证明：$x|f^k(x) \Leftrightarrow x|f(x)$。

例10 设$f_i(x) \in P[x], i = 0, 1, \cdots, n-1$,$a \in P^*$, 若

$$x^n - a | \sum_{i=0}^{n-1} f_i(x^n) x^i,$$

则$x - a | f_i(x), i = 0, 1, \cdots, n-1$。

例9 设$k \in \mathbb{Z}^+$，证明：$x|f^k(x) \Leftrightarrow x|f(x)$。

例10 设$f_i(x) \in P[x], i = 0, 1, \cdots, n-1$,$a \in P^*$, 若

$$x^n - a| \sum_{i=0}^{n-1} f_i(x^n)x^i,$$

则$x - a|f_i(x), i = 0, 1, \cdots, n-1$。

例11 $x^d - 1|x^n - 1 \Leftrightarrow d|n$。

例9 设$k \in \mathbb{Z}^+$，证明：$x|f^k(x) \Leftrightarrow x|f(x)$。

例10 设$f_i(x) \in P[x], i = 0, 1, \cdots, n-1$,$a \in P^*$, 若

$$x^n - a| \sum_{i=0}^{n-1} f_i(x^n)x^i,$$

则$x - a|f_i(x), i = 0, 1, \cdots, n-1$。

例11 $x^d - 1|x^n - 1 \Leftrightarrow d|n$。

例12 设$f(x) = (x+1)^{k+n} + (2x)(x+1)^{k+n-1} + \cdots + (2x)^k(x+1)^n$，证明:$x^{k+1}|(x-1)f(x) + (x+1)^{k+n+1}$。

例9 设$k \in \mathbb{Z}^+$，证明：$x|f^k(x) \Leftrightarrow x|f(x)$。

例10 设$f_i(x) \in P[x], i = 0, 1, \cdots, n-1, a \in P^*$, 若

$$x^n - a|\sum_{i=0}^{n-1} f_i(x^n)x^i,$$

则$x-a|f_i(x), i = 0, 1, \cdots, n-1$。

例11 $x^d - 1|x^n - 1 \Leftrightarrow d|n$。

例12 设$f(x) = (x+1)^{k+n} + (2x)(x+1)^{k+n-1} + \cdots + (2x)^k(x+1)^n$,
证明:$x^{k+1}|(x-1)f(x) + (x+1)^{k+n+1}$。

例13 证明:对任意非负整数n,均有$x^2+x+1|x^{n+2}+(x+1)^{2n+1}$。

例9 设$k \in \mathbb{Z}^+$，证明：$x|f^k(x) \Leftrightarrow x|f(x)$。

例10 设$f_i(x) \in P[x], i = 0, 1, \cdots, n-1$,$a \in P^*$, 若

$$x^n - a|\sum_{i=0}^{n-1} f_i(x^n)x^i,$$

则$x - a|f_i(x), i = 0, 1, \cdots, n-1$。

例11 $x^d - 1|x^n - 1 \Leftrightarrow d|n$。

例12 设$f(x) = (x+1)^{k+n} + (2x)(x+1)^{k+n-1} + \cdots + (2x)^k(x+1)^n$, 证明:$x^{k+1}|(x-1)f(x) + (x+1)^{k+n+1}$。

例13 证明:对任意非负整数n,均有$x^2 + x + 1|x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}$。

例14 设$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$,$g(x) = (f(x) + x^n)^2 - x^n$,证明:$f(x)|g(x)$。

例9 设$k \in \mathbb{Z}^+$，证明：$x|f^k(x) \Leftrightarrow x|f(x)$。

例10 设$f_i(x) \in P[x], i = 0, 1, \cdots, n-1$,$a \in P^*$, 若

$$x^n - a|\sum_{i=0}^{n-1} f_i(x^n)x^i,$$

则$x - a|f_i(x), i = 0, 1, \cdots, n-1$。

例11 $x^d - 1|x^n - 1 \Leftrightarrow d|n$。

例12 设$f(x) = (x+1)^{k+n} + (2x)(x+1)^{k+n-1} + \cdots + (2x)^k(x+1)^n$,
证明:$x^{k+1}|(x-1)f(x) + (x+1)^{k+n+1}$。

例13 证明:对任意非负整数n,均有$x^2 + x + 1|x^{n+2} + (x+1)^{2n+1}$。

例14 设$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^i$,$g(x) = (f(x) + x^n)^2 - x^n$,证明:$f(x)|g(x)$。

整除性的判定方法：定义，带余除法，验根法。