第四章 坐标变换与矩阵

第四章 坐标变换与矩阵

这一章默认数域均为$\mathbb{R}$

第四章 坐标变换与矩阵

这一章默认数域均为$\mathbb{R}$

更高层次的一章。

一些疑云

一些疑云

一至三章的内容已经很系统了，建立好坐标系后几何问题就可以转化为代数问题。

一些疑云

一至三章的内容已经很系统了，建立好坐标系后几何问题就可以转化为代数问题。但也有不少若隐若现的问题偶尔会困扰我们。

一些疑云

一至三章的内容已经很系统了，建立好坐标系后几何问题就可以转化为代数问题。但也有不少若隐若现的问题偶尔会困扰我们。

1. P82,9(4) 求$x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$绕$\frac{x}{2}=y=\frac{z}{-2}$旋转所得曲面方程。

一些疑云

一至三章的内容已经很系统了，建立好坐标系后几何问题就可以转化为代数问题。但也有不少若隐若现的问题偶尔会困扰我们。

1. P82,9(4) 求$x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$绕$\frac{x}{2}=y=\frac{z}{-2}$旋转所得曲面方程。
2. 用任意平面截椭球面所得的交线的属性。

一些疑云

一至三章的内容已经很系统了，建立好坐标系后几何问题就可以转化为代数问题。但也有不少若隐若现的问题偶尔会困扰我们。

1. P82,9(4) 求$x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$绕$\frac{x}{2}=y=\frac{z}{-2}$旋转所得曲面方程。
2. 用任意平面截椭球面所得的交线的属性。
3. 空间中二次曲面的分类，17种只有标准形式，任给

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz \\ +2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0.$$

   属于哪种类型？

一些疑云

一至三章的内容已经很系统了，建立好坐标系后几何问题就可以转化为代数问题。但也有不少若隐若现的问题偶尔会困扰我们。

1. P82,9(4) 求$x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$绕$\frac{x}{2}=y=\frac{z}{-2}$旋转所得曲面方程。
2. 用任意平面截椭球面所得的交线的属性。
3. 空间中二次曲面的分类，17种只有标准形式，任给

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz$$
$$+2b_1x+2b_2y+2b_3z+c=0.$$

   属于哪种类型？

要用目前的知识解决这些问题似乎很棘手。

寻找原因

寻找原因

解析几何的核心是通过坐标系把几何问题转化为代数问题。

寻找原因

解析几何的核心是通过坐标系把几何问题转化为代数问题。

上述几个问题并不是不能把几何问题转化为代数问题，

寻找原因

解析几何的核心是通过坐标系把几何问题转化为代数问题。

上述几个问题并不是不能把几何问题转化为代数问题，而是转化以后所得的代数方程太复杂了，解决起来很困难。

寻找原因

解析几何的核心是通过坐标系把几何问题转化为代数问题。

上述几个问题并不是不能把几何问题转化为代数问题，而是转化以后所得的代数方程太复杂了，解决起来很困难。

原因何在？

寻找原因

解析几何的核心是通过坐标系把几何问题转化为代数问题。

上述几个问题并不是不能把几何问题转化为代数问题，而是转化以后所得的代数方程太复杂了，解决起来很困难。

原因何在？

比如第一个问题，一开始是取定了一个坐标架，

寻找原因

解析几何的核心是通过坐标系把几何问题转化为代数问题。

上述几个问题并不是不能把几何问题转化为代数问题，而是转化以后所得的代数方程太复杂了，解决起来很困难。

原因何在？

比如第一个问题，一开始是取定了一个坐标架，但是空间中只要三个两两垂直的单位向量就能构成直角标架，没有理由必须选其中一个而不能选另外一个。

寻找原因

解析几何的核心是通过坐标系把几何问题转化为代数问题。

上述几个问题并不是不能把几何问题转化为代数问题，而是转化以后所得的代数方程太复杂了，解决起来很困难。

原因何在?

比如第一个问题，一开始是取定了一个坐标架，但是空间中只要三个两两垂直的单位向量就能构成直角标架，没有理由必须选其中一个而不能选另外一个。他们本质上地位是相同的，只是提供给我们不同的视角。

寻找原因

解析几何的核心是通过坐标系把几何问题转化为代数问题。

上述几个问题并不是不能把几何问题转化为代数问题，而是转化以后所得的代数方程太复杂了，解决起来很困难。

原因何在?

比如第一个问题，一开始是取定了一个坐标架，但是空间中只要三个两两垂直的单位向量就能构成直角标架，没有理由必须选其中一个而不能选另外一个。他们本质上地位是相同的，只是提供给我们不同的视角。

在解析几何中，我们不但要选定某个标架，更要选一个最有利于我们研究的标架。

寻找原因

解析几何的核心是通过坐标系把几何问题转化为代数问题。

上述几个问题并不是不能把几何问题转化为代数问题，而是转化以后所得的代数方程太复杂了，解决起来很困难。

原因何在?

比如第一个问题，一开始是取定了一个坐标架，但是空间中只要三个两两垂直的单位向量就能构成直角标架，没有理由必须选其中一个而不能选另外一个。他们本质上地位是相同的，只是提供给我们不同的视角。

在解析几何中，我们不但要选定某个标架，更要选一个最有利于我们研究的标架。

这就需要我们研究不同标架之间的关系，即不同标架下坐标的变换，

寻找原因

解析几何的核心是通过坐标系把几何问题转化为代数问题。

上述几个问题并不是不能把几何问题转化为代数问题，而是转化以后所得的代数方程太复杂了，解决起来很困难。

原因何在?

比如第一个问题，一开始是取定了一个坐标架，但是空间中只要三个两两垂直的单位向量就能构成直角标架，没有理由必须选其中一个而不能选另外一个。他们本质上地位是相同的，只是提供给我们不同的视角。

在解析几何中，我们不但要选定某个标架，更要选一个最有利于我们研究的标架。

这就需要我们研究不同标架之间的关系，即不同标架下坐标的变换，既包括仿射标架之间的关系，也包括直角标架之间的关系。

寻找原因

解析几何的核心是通过坐标系把几何问题转化为代数问题。

上述几个问题并不是不能把几何问题转化为代数问题，而是转化以后所得的代数方程太复杂了，解决起来很困难。

原因何在？

比如第一个问题，一开始是取定了一个坐标架，但是空间中只要三个两两垂直的单位向量就能构成直角标架，没有理由必须选其中一个而不能选另外一个。他们本质上地位是相同的，只是提供给我们不同的视角。

在解析几何中，我们不但要选定某个标架，更要选一个最有利于我们研究的标架。

这就需要我们研究不同标架之间的关系，即不同标架下坐标的变换，既包括仿射标架之间的关系，也包括直角标架之间的关系。

研究不同标架之间关系主要使用的代数工具为矩阵。

一些说明

作为空间解析几何，本来应该研究三维空间中的坐标变换，

一些说明

作为空间解析几何，本来应该研究三维空间中的坐标变换，但是因为大家还没有全面地学过矩阵，退而求其次。

一些说明

作为空间解析几何，本来应该研究三维空间中的坐标变换，但是因为大家还没有全面地学过矩阵，退而求其次。

我们主要研究二维平面中的坐标变换，并在下一章应用到平面曲线的研究。

一些说明

作为空间解析几何，本来应该研究三维空间中的坐标变换，但是因为大家还没有全面地学过矩阵，退而求其次。

我们主要研究二维平面中的坐标变换，并在下一章应用到平面曲线的研究。

三维的坐标变换原理和二维完全一致，等大家高代学过矩阵后可水到渠成，无师自通。

平面的仿射坐标变换

平面的仿射坐标变换

平面上给定两个仿射坐标系：$\mathrm{I}:[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}]$和$\mathrm{I}':[O';\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2']$。

向量的仿射坐标变换公式

向量的仿射坐标变换公式

来看平面上向量$\vec{m}$的I坐标（旧坐标）(u, v)和I$'$坐标（新坐标）(u', v')之间的关系。

向量的仿射坐标变换公式

来看平面上向量$\vec{m}$的I坐标（旧坐标）(u, v)和I$'$坐标（新坐标）(u', v')之间的关系。

显然，这是由I和I$'$之间的位置关系决定的。

向量的仿射坐标变换公式

来看平面上向量$\vec{m}$的I坐标（旧坐标）(u,v)和I$'$坐标（新坐标）(u',v')之间的关系。

显然，这是由I和I$'$之间的位置关系决定的。

设$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$在I标架下的坐标为：$(a_{11}, a_{21})$，$(a_{12}, a_{22})$，即：

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

向量的仿射坐标变换公式

来看平面上向量$\vec{m}$的I坐标（旧坐标）(u, v)和I$'$坐标（新坐标）(u', v')之间的关系。

显然，这是由I和I$'$之间的位置关系决定的。

设$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$在I标架下的坐标为：$(a_{11}, a_{21})$，$(a_{12}, a_{22})$，即：

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

根据坐标的定义：

$$\begin{aligned} \vec{m} =& u'\mathbf{e}_1' + v'\mathbf{e}_2' \\ =& u'(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2) + v'(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) \\ =& (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{e}_1 + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

向量的仿射坐标变换公式

来看平面上向量$\vec{m}$的I坐标（旧坐标）(u,v)和I′坐标（新坐标）(u',v')之间的关系。

显然，这是由I和I′之间的位置关系决定的。

设$\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2'$在I标架下的坐标为：$(a_{11},a_{21})$，$(a_{12},a_{22})$，即：

$$\begin{cases}\mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2\end{cases}$$

根据坐标的定义：

$$\begin{aligned}\vec{m} =& u'\mathbf{e}_1' + v'\mathbf{e}_2'\\ =& u'(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2) + v'(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2)\\ =& (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{e}_1 + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

由坐标的唯一性：

$$\begin{cases}u = a_{11}u' + a_{12}v'\\ v = a_{21}u' + a_{22}v'\end{cases}$$

向量的仿射坐标变换公式

来看平面上向量$\vec{m}$的I坐标（旧坐标）(u, v)和I$'$坐标（新坐标）(u', v')之间的关系。

显然，这是由I和I$'$之间的位置关系决定的。

设$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$在I标架下的坐标为：$(a_{11}, a_{21})$，$(a_{12}, a_{22})$，即：

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

根据坐标的定义：

$$\begin{aligned} \vec{m} =& u'\mathbf{e}_1' + v'\mathbf{e}_2' \\ =& u'(a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2) + v'(a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2) \\ =& (a_{11}u' + a_{12}v')\mathbf{e}_1 + (a_{21}u' + a_{22}v')\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

由坐标的唯一性：

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

称为平面上I到I$'$的向量的仿射坐标变换公式。

注意比较：

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}, \begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

注意比较：

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}, \begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

I′的基底被I的基底表出，

注意比较：

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}, \begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

I′的基底被I的基底表出，但却是I的坐标被I′ 的坐标表出。

I′到I的坐标变换公式

I'到I的坐标变换公式

注意到$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$不共线，

I'到I的坐标变换公式

注意到$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$不共线，且

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

I′到I的坐标变换公式

注意到$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$不共线，且

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

故$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$。

I'到I的坐标变换公式

注意到$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$不共线，且

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

故$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$。若

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

中(u, v)已知，

I'到I的坐标变换公式

注意到$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$不共线，且

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

故$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$。若

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

中(u, v)已知，则可改写为关于(u', v')的方程：

$$\begin{cases} a_{11}u' + a_{12}v' = u \\ a_{21}u' + a_{22}v' = v \end{cases}$$

I'到I的坐标变换公式

注意到$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$不共线，且

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}'_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

故$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$。若

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

中(u, v)已知，则可改写为关于(u', v')的方程：

$$\begin{cases} a_{11}u' + a_{12}v' = u \\ a_{21}u' + a_{22}v' = v \end{cases}$$

此时$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

I'到I的坐标变换公式

注意到$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$不共线，且

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 \end{cases}$$

故$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$。若

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

中(u, v)已知，则可改写为关于(u', v')的方程：

$$\begin{cases} a_{11}u' + a_{12}v' = u \\ a_{21}u' + a_{22}v' = v \end{cases}$$

此时$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$

可解得:

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} u & a_{12} \\ v & a_{22} \end{vmatrix} = \dfrac{a_{22}u - a_{12}v}{d} \\ \\ v' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{11} & u \\ a_{21} & v \end{vmatrix} = \dfrac{-a_{21}u + a_{11}v}{d} \end{cases}$$

可解得：

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} u & a_{12} \\ v & a_{22} \end{vmatrix} = \dfrac{a_{22}u - a_{12}v}{d} \\ \\ v' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{11} & u \\ a_{21} & v \end{vmatrix} = \dfrac{-a_{21}u + a_{11}v}{d} \end{cases}$$

称为I'到I的仿射坐标变换公式。

可解得：

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} u & a_{12} \\ v & a_{22} \end{vmatrix} = \dfrac{a_{22}u - a_{12}v}{d} \\ \\ v' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{11} & u \\ a_{21} & v \end{vmatrix} = \dfrac{-a_{21}u + a_{11}v}{d} \end{cases}$$

称为I'到I的仿射坐标变换公式。

例： I的基向量$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$在$\mathrm{I}'$下的坐标是什么？

可解得：

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} u & a_{12} \\ v & a_{22} \end{vmatrix} = \dfrac{a_{22}u - a_{12}v}{d} \\ \\ v' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{11} & u \\ a_{21} & v \end{vmatrix} = \dfrac{-a_{21}u + a_{11}v}{d} \end{cases}$$

称为I'到I的仿射坐标变换公式。

例：I的基向量$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$在$\mathrm{I}'$下的坐标是什么？
解：$\mathbf{e_1}$在I下的坐标为$(1, 0)$,

可解得：

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} u & a_{12} \\ v & a_{22} \end{vmatrix} = \dfrac{a_{22}u - a_{12}v}{d} \\ \\ v' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{11} & u \\ a_{21} & v \end{vmatrix} = \dfrac{-a_{21}u + a_{11}v}{d} \end{cases}$$

称为I′到I的仿射坐标变换公式。

例：I的基向量$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$在I′下的坐标是什么？
解：$\mathbf{e_1}$在I下的坐标为$(1, 0)$，代入上述公式，得I′ 下的坐标为：

$$(\frac{a_{22}}{d}, -\frac{a_{21}}{d})$$

可解得：

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} u & a_{12} \\ v & a_{22} \end{vmatrix} = \dfrac{a_{22}u - a_{12}v}{d} \\ \\ v' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{11} & u \\ a_{21} & v \end{vmatrix} = \dfrac{-a_{21}u + a_{11}v}{d} \end{cases}$$

称为I′到I的仿射坐标变换公式。

例：I的基向量$\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$在I′下的坐标是什么？

解：$\mathbf{e_1}$在I下的坐标为$(1,0)$，代入上述公式，得I′ 下的坐标为：

$$(\frac{a_{22}}{d}, -\frac{a_{21}}{d})$$

同理，$\mathbf{e_2}$在I′下的坐标为：

$$(-\frac{a_{12}}{d}, \frac{a_{11}}{d})$$

点的仿射坐标变换公式

点的仿射坐标变换公式

来看平面上点M的I坐标（旧坐标）(x, y)和I$'$坐标（新坐标）(x', y')之间的关系。

点的仿射坐标变换公式

来看平面上点M的I坐标（旧坐标）(x, y)和I′坐标（新坐标）(x', y')之间的关系。
设I′的原点O'在I中的坐标为(x_0, y_0).

点的仿射坐标变换公式

来看平面上点M的I坐标（旧坐标）(x, y)和I$'$坐标（新坐标）(x', y')之间的关系。
设I$'$的原点O'在I中的坐标为(x_0, y_0).
点M的坐标由其定位向量决定：

点的仿射坐标变换公式

来看平面上点M的I坐标（旧坐标）(x, y)和I′坐标（新坐标）(x', y')之间的关系。
设I′的原点O'在I中的坐标为(x_0, y_0).
点M的坐标由其定位向量决定：

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

点的仿射坐标变换公式

来看平面上点M的I坐标（旧坐标）(x, y)和I′坐标（新坐标）(x', y')之间的关系。
设I′的原点O'在I中的坐标为(x_0, y_0).
点M的坐标由其定位向量决定：

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \\
&= (x_0\mathbf{e_1} + y_0\mathbf{e_2}) + (x'\mathbf{e}'_\mathbf{1} + y'\mathbf{e}'_\mathbf{2}) \\
&= (x_0\mathbf{e_1} + y_0\mathbf{e_2}) + (x'(a_{11}\mathbf{e_1} + a_{21}\mathbf{e_2}) + y'(a_{12}\mathbf{e_1} + a_{22}\mathbf{e_2})) \\
&= (a_{11}x' + a_{12}y' + x_0)\mathbf{e_1} + (a_{21}x' + a_{22}y' + y_0)\mathbf{e_2}
\end{aligned}$$

点的仿射坐标变换公式

来看平面上点M的I坐标（旧坐标）(x,y)和I$'$坐标（新坐标）(x',y')之间的关系。
设I$'$的原点O'在I中的坐标为(x_0,y_0).
点M的坐标由其定位向量决定：

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} =& \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \\
=&(x_0\mathbf{e_1} + y_0\mathbf{e_2}) + (x'\mathbf{e}_1' + y'\mathbf{e}_2') \\
=&(x_0\mathbf{e_1} + y_0\mathbf{e_2}) + (x'(a_{11}\mathbf{e_1} + a_{21}\mathbf{e_2}) + y'(a_{12}\mathbf{e_1} + a_{22}\mathbf{e_2})) \\
=&(a_{11}x' + a_{12}y' + x_0)\mathbf{e_1} + (a_{21}x' + a_{22}y' + y_0)\mathbf{e_2}
\end{aligned}$$

由坐标的唯一性，点M在I中的坐标满足：

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{cases}$$

点的仿射坐标变换公式

来看平面上点M的I坐标（旧坐标）(x,y)和I$'$坐标（新坐标）(x',y')之间的关系。
设I$'$的原点O'在I中的坐标为(x_0,y_0).
点M的坐标由其定位向量决定：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} =&\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\\ =&(x_0\mathbf{e_1} + y_0\mathbf{e_2}) + (x'\mathbf{e}_1' + y'\mathbf{e}_2')\\ =&(x_0\mathbf{e_1} + y_0\mathbf{e_2}) + (x'(a_{11}\mathbf{e_1} + a_{21}\mathbf{e_2}) + y'(a_{12}\mathbf{e_1} + a_{22}\mathbf{e_2}))\\ =&(a_{11}x' + a_{12}y' + x_0)\mathbf{e_1} + (a_{21}x' + a_{22}y' + y_0)\mathbf{e_2}\end{aligned}$$

由坐标的唯一性，点M在I中的坐标满足：

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0\\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0\end{cases}$$

称为平面上I到I$'$的点的仿射坐标变换公式。

I'到I的坐标变换公式

I'到I的坐标变换公式

若

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{cases}$$

中(x, y)已知，

I′到I的坐标变换公式

若

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{cases}$$

中(x, y)已知，则可改写为关于(x', y')的方程：

$$\begin{cases} a_{11}x' + a_{12}y' = x - x_0 \\ a_{21}x' + a_{22}y' = y - y_0 \end{cases}$$

I′到I的坐标变换公式

若

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{cases}$$

中(x, y)已知，则可改写为关于(x', y')的方程：

$$\begin{cases} a_{11}x' + a_{12}y' = x - x_0 \\ a_{21}x' + a_{22}y' = y - y_0 \end{cases}$$

此时$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$,

I'到I的坐标变换公式

若

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{cases}$$

中(x, y)已知，则可改写为关于(x', y')的方程：

$$\begin{cases} a_{11}x' + a_{12}y' = x - x_0 \\ a_{21}x' + a_{22}y' = y - y_0 \end{cases}$$

此时$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$，可解得：

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} x - x_0 & a_{12} \\ y - y_0 & a_{22} \end{vmatrix} = \dfrac{a_{22}x - a_{12}y - a_{22}x_0 + a_{12}y_0}{d} \\ \\ y' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{11} & x - x_0 \\ a_{21} & y - y_0 \end{vmatrix} = \dfrac{-a_{21}x + a_{11}y + a_{21}x_0 - a_{11}y_0}{d} \end{cases}$$

I′到I的坐标变换公式

若

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{cases}$$

中(x, y)已知，则可改写为关于(x', y')的方程：

$$\begin{cases} a_{11}x' + a_{12}y' = x - x_0 \\ a_{21}x' + a_{22}y' = y - y_0 \end{cases}$$

此时$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$，可解得：

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} x - x_0 & a_{12} \\ y - y_0 & a_{22} \end{vmatrix} = \dfrac{a_{22}x - a_{12}y - a_{22}x_0 + a_{12}y_0}{d} \\ \\ y' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{11} & x - x_0 \\ a_{21} & y - y_0 \end{vmatrix} = \dfrac{-a_{21}x + a_{11}y + a_{21}x_0 - a_{11}y_0}{d} \end{cases}$$

称为I′到I的仿射坐标变换公式。

例： I的原点O在I$'$下的坐标是什么？

例： I的原点O在I$'$下的坐标是什么？

解：O在I下的坐标为$(0,0)$,

例：I的原点O在I′下的坐标是什么？

解：O在I下的坐标为$(0,0)$，代入上述公式，得I′下的坐标为：

$$\left(\frac{-a_{22}x_0+a_{12}y_0}{d},\frac{a_{21}x_0-a_{21}y_0}{d}\right)$$

向量和点的坐标变换的区别

向量没有常数项，而点有常数项。

P120,3

例： 设仿射坐标I到I$'$ 的点的坐标变换公式为：

$$\begin{cases} x = -y' + 3 \\ y = x' - 2 \end{cases}$$

1. 求I$'$的原点O'的I坐标，I$'$的基向量$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$的I坐标；求I的原点$O$的I$'$坐标，I的基向量$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$的I$'$坐标；
2. 求直线$l_1 : 2x - y + 1 = 0$在坐标系I$'$中的方程；
3. 求直线$l_2 : 3x' + 2y' - 5 = 0$在坐标系I中的方程；

P120,3

例： 设仿射坐标I到I$'$ 的点的坐标变换公式为：

$$\begin{cases} x = -y' + 3 \\ y = x' - 2 \end{cases}$$

1. 求I$'$的原点O'的I坐标，I$'$的基向量$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$的I坐标；求I的原点$O$的I$'$坐标，I的基向量$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$的I$'$坐标；
2. 求直线$l_1 : 2x - y + 1 = 0$在坐标系I$'$中的方程；
3. 求直线$l_2 : 3x' + 2y' - 5 = 0$在坐标系I中的方程；

解：

P120,3

例: 设仿射坐标I到I′ 的点的坐标变换公式为:

$$\begin{cases} x = -y' + 3 \\ y = x' - 2 \end{cases}$$

1. 求I′的原点O'的I坐标，I′的基向量$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$的I坐标；求I的原点$O$的I′坐标，I的基向量$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$的I′坐标;
2. 求直线$l_1 : 2x - y + 1 = 0$在坐标系I′中的方程;
3. 求直线$l_2 : 3x' + 2y' - 5 = 0$在坐标系I中的方程;

解:

1.

P120,3

例： 设仿射坐标I到I′ 的点的坐标变换公式为：

$$\begin{cases} x = -y' + 3 \\ y = x' - 2 \end{cases}$$

1. 求I′的原点O'的I坐标，I′的基向量$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$的I坐标；求I的原点$O$的I′坐标，I的基向量$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$的I′坐标；
2. 求直线$l_1 : 2x - y + 1 = 0$在坐标系I′中的方程；
3. 求直线$l_2 : 3x' + 2y' - 5 = 0$在坐标系I中的方程；

解：

1.
2. l_1是平面上固定的一条直线，

P120,3

例： 设仿射坐标I到I′ 的点的坐标变换公式为：

$$\begin{cases} x = -y' + 3 \\ y = x' - 2 \end{cases}$$

1. 求I′的原点O'的I坐标，I′的基向量$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$的I坐标；求I的原点$O$的I′坐标，I的基向量$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$的I′坐标；
2. 求直线$l_1 : 2x - y + 1 = 0$在坐标系I′中的方程；
3. 求直线$l_2 : 3x' + 2y' - 5 = 0$在坐标系I中的方程；

解：

1.
2. l_1是平面上固定的一条直线，任意一点M落在直线上，其在I下的坐标(x, y)满足的关系称为直线在I下的方程的方程。

P120,3

例: 设仿射坐标I到I′ 的点的坐标变换公式为:

$$\begin{cases} x = -y' + 3 \\ y = x' - 2 \end{cases}$$

1. 求I′的原点O'的I坐标，I′的基向量$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$的I坐标；求I的原点$O$的I′坐标，I的基向量$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$的I′坐标；
2. 求直线$l_1 : 2x - y + 1 = 0$在坐标系I′中的方程；
3. 求直线$l_2 : 3x' + 2y' - 5 = 0$在坐标系I中的方程；

解:

1.
2. l_1是平面上固定的一条直线，任意一点M落在直线上，其在I下的坐标(x, y)满足的关系称为直线在I下的方程的方程。同样考虑落在直线上的点M，在坐标系I′，有坐标(x', y')，应满足怎样的关系？

P120,3

例： 设仿射坐标I到I′ 的点的坐标变换公式为：

$$\begin{cases} x = -y' + 3 \\ y = x' - 2 \end{cases}$$

1. 求I′的原点O'的I坐标，I′的基向量$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$的I坐标；求I的原点$O$的I′坐标，I的基向量$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$的I′坐标；
2. 求直线$l_1 : 2x - y + 1 = 0$在坐标系I′中的方程；
3. 求直线$l_2 : 3x' + 2y' - 5 = 0$在坐标系I中的方程；

解：

1.
2. l_1是平面上固定的一条直线，任意一点M落在直线上，其在I下的坐标(x, y)满足的关系称为直线在I下的方程的方程。同样考虑落在直线上的点M，在坐标系I′，有坐标(x', y')，应满足怎样的关系？
3.

启示

有可能选用“较好”的坐标系使得方程的形式简化。

每次都写坐标变换公式是非常繁琐的一件事，为此我们需要引入新的数学概念和记号，来简化计算和证明。

矩阵及其运算

用矩阵运算表示坐标变换

用矩阵运算表示坐标变换

向量的坐标变换公式：

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

用矩阵运算表示坐标变换

向量的坐标变换公式：

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

将u, v组成列向量：$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，将$u', v'$组成列向量：$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$

用矩阵运算表示坐标变换

向量的坐标变换公式：

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

将u, v组成列向量：$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，将$u', v'$组成列向量：$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$

记矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为坐标系$\mathrm{I}$ 到I'的过渡矩阵，

用矩阵运算表示坐标变换

向量的坐标变换公式：

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

将u, v组成列向量：$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，将$u', v'$组成列向量：$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$

记矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为坐标系I 到I′的过渡矩阵，根据矩阵乘法有：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} =$$

用矩阵运算表示坐标变换

向量的坐标变换公式：

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

将u, v组成列向量：$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，将$u', v'$组成列向量：$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$

记矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为坐标系I 到I′的过渡矩阵，根据矩阵乘法有：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u' + a_{12}v' \\ a_{21}u' + a_{22}v' \end{pmatrix}$$

用矩阵运算表示坐标变换

向量的坐标变换公式：

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

将u, v组成列向量：$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$，将$u', v'$组成列向量：$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$

记矩阵$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为坐标系I 到I′的过渡矩阵，根据矩阵乘法有：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u' + a_{12}v' \\ a_{21}u' + a_{22}v' \end{pmatrix}$$

根据矩阵相等的定义，坐标变换公式可改写为：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

再来看点的坐标变换公式:

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{cases}$$

再来看点的坐标变换公式：

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{cases}$$

再利用矩阵加法，可改写为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

再来看点的坐标变换公式：

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{cases}$$

再利用矩阵加法，可改写为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

为了进一步简化记号，令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \gamma' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \alpha' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \alpha_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

再来看点的坐标变换公式：

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{cases}$$

再利用矩阵加法，可改写为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

为了进一步简化记号，令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \gamma' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \alpha' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \alpha_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

则向量和点的坐标变换公式可写为：

$$\gamma = A\gamma', \quad \alpha = A\alpha' + \alpha_0$$

再来看点的坐标变换公式：

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{cases}$$

再利用矩阵加法，可改写为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

为了进一步简化记号，令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \gamma' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \alpha' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \alpha_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

则向量和点的坐标变换公式可写为：

$$\gamma = A\gamma', \quad \alpha = A\alpha' + \alpha_0$$

引入矩阵的最直接的好处：

再来看点的坐标变换公式：

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{cases}$$

再利用矩阵加法，可改写为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

为了进一步简化记号，令

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \gamma' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \alpha' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \alpha_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

则向量和点的坐标变换公式可写为：

$$\gamma = A\gamma', \quad \alpha = A\alpha' + \alpha_0$$

引入矩阵的最直接的好处：记法简洁了。

矩阵的转置

矩阵的转置

定义： 将矩阵$A_{m\times n}$的行列互换得到的矩阵称为A 的转置矩阵，记作A^t. 即设 $A=(a_{ij})_{mn}$,则

$$A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ji})_{nm}.$$

矩阵的转置

定义： 将矩阵$A_{m\times n}$的行列互换得到的矩阵称为A 的转置矩阵，记作A^t. 即设 $A=(a_{ij})_{mn}$,则

$$A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ji})_{nm}.$$

例： 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

矩阵的转置

定义： 将矩阵$A_{m\times n}$的行列互换得到的矩阵称为A 的转置矩阵，记作A^t. 即设 $A=(a_{ij})_{mn}$,则

$$A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ji})_{nm}.$$

例： 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$A^t=$$

矩阵的转置

定义： 将矩阵$A_{m\times n}$的行列互换得到的矩阵称为A 的转置矩阵，记作A^t. 即设 $A=(a_{ij})_{mn}$,则

$$A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=(a_{ji})_{nm}.$$

例： 设

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

则

$$A^t=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

矩阵的转置有下列性质:

- $(A^t)^t = A$;
- $(A+B)^t = A^t + B^t$;
- $(kA)^t = kA^t$;
- $(AB)^t = B^t A^t$.

矩阵的转置有下列性质:

- $(A^t)^t = A$;
- $(A+B)^t = A^t + B^t$;
- $(kA)^t = kA^t$;
- $(AB)^t = B^tA^t$.

定义: 当$A = A^t$ 时，我们称A为对称矩阵。

矩阵的转置有下列性质:

- $(A^t)^t = A$;
- $(A+B)^t = A^t + B^t$;
- $(kA)^t = kA^t$;
- $(AB)^t = B^t A^t$.

定义: 当$A = A^t$ 时，我们称A为对称矩阵。

注解:

- 对称矩阵一定为方阵;
- $a_{ij} = a_{ji}$

方阵的行列式

可以对方阵A取行列式，记为$|A|$。

方阵的行列式

可以对方阵A取行列式，记为$|A|$。

定理：若A, B均是n级方阵，则有：$|AB| = |A||B|$

方阵的行列式

可以对方阵A取行列式，记为$|A|$。

定理： 若A, B均是n级方阵，则有：$|AB| = |A||B|$

证明： 只证$n = 2$的情形。

可逆矩阵

可逆矩阵

定义： 设$A = (a_{ij})$是一个$n \times n$ 的矩阵,如果存在矩阵B使得

$$AB = BA = E,$$

则称A是可逆矩阵，B是A的逆矩阵。

可逆矩阵

定义：设$A=(a_{ij})$是一个$n\times n$ 的矩阵,如果存在矩阵B使得

$$AB=BA=E,$$

则称A是可逆矩阵，B是A的逆矩阵。
矩阵B是唯一的，记作A^{-1}。

可逆矩阵

定义： 设$A=(a_{ij})$是一个$n\times n$ 的矩阵,如果存在矩阵B使得

$$AB=BA=E,$$

则称A是可逆矩阵，B是A的逆矩阵。
矩阵B是唯一的，记作A^{-1}。
矩阵的逆有以下性质:

- A可逆时，A^{-1}也可逆,且$(A^{-1})^{-1}=A$.
- A,B可逆时，AB也可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
- A可逆时，其转置A^t也可逆，并且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

可逆矩阵

定义：设$A=(a_{ij})$是一个$n\times n$ 的矩阵,如果存在矩阵B使得

$$AB=BA=E,$$

则称A是可逆矩阵，B是A的逆矩阵。
矩阵B是唯一的，记作A^{-1}。
矩阵的逆有以下性质:

- A可逆时，A^{-1}也可逆,且$(A^{-1})^{-1}=A$.
- A,B可逆时，AB也可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
- A可逆时，其转置A^t也可逆，并且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

定理：方阵A可逆的充分必要条件是$|A|\neq 0$.

可逆矩阵

定义： 设$A=(a_{ij})$是一个$n\times n$ 的矩阵,如果存在矩阵B使得

$$AB=BA=E,$$

则称A是可逆矩阵，B是A的逆矩阵。
矩阵B是唯一的，记作A^{-1}。
矩阵的逆有以下性质:

- A可逆时，A^{-1}也可逆,且$(A^{-1})^{-1}=A.$
- A,B可逆时，AB也可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$
- A可逆时，其转置A^t也可逆，并且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t.$

定理： 方阵A可逆的充分必要条件是$|A|\neq 0.$

证明： 只证$n=2$的情形。

可逆矩阵

定义：设$A=(a_{ij})$是一个$n\times n$ 的矩阵,如果存在矩阵B使得

$$AB=BA=E,$$

则称A是可逆矩阵，B是A的逆矩阵。
矩阵B是唯一的，记作A^{-1}。
矩阵的逆有以下性质:

- A可逆时，A^{-1}也可逆,且$(A^{-1})^{-1}=A$.
- A,B可逆时，AB也可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.
- A可逆时，其转置A^t也可逆，并且$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

定理：方阵A可逆的充分必要条件是$|A|\neq 0$.

证明：只证$n=2$的情形。令$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

必要性。

必要性。若A可逆，则有$AA^{-1} = E$。

必要性。若A可逆，则有$AA^{-1}=E$。两边取行列式，
有$|A||A^{-1}|=1$，故$|A|\neq 0$。

必要性。若A可逆，则有$AA^{-1}=E$。两边取行列式，
有$|A||A^{-1}|=1$，故$|A|\neq 0$。
充分性。

必要性。若A可逆，则有$AA^{-1}=E$。两边取行列式，
有$|A||A^{-1}|=1$，故$|A|\neq 0$。
充分性。设$|A|\neq 0$,

必要性。若A可逆，则有$AA^{-1} = E$。两边取行列式，
有$|A||A^{-1}| = 1$，故$|A| \neq 0$。
充分性。设$|A| \neq 0$，最直接的方法是？

必要性。若A可逆，则有$AA^{-1}=E$。两边取行列式，
有$|A||A^{-1}|=1$，故$|A|\neq 0$。
充分性。设$|A|\neq 0$，最直接的方法是？
若有矩阵$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$，使得$AB=BA=E$，可以将$B$通过解方程求出。

必要性。若A可逆，则有$AA^{-1} = E$。两边取行列式，
有$|A||A^{-1}| = 1$，故$|A| \neq 0$。
充分性。设$|A| \neq 0$，最直接的方法是？
若有矩阵$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$，使得$AB = BA = E$，可以将$B$通过解方程求出。
事实上可以直接找到，而不需解方程。

必要性。若A可逆，则有$AA^{-1}=E$。两边取行列式，
有$|A||A^{-1}|=1$，故$|A|\neq 0$。
充分性。设$|A|\neq 0$，最直接的方法是？
若有矩阵$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$，使得$AB=BA=E$，可以将$B$通过解方程求出。
事实上可以直接找到，而不需解方程。

若$|A|\neq 0$，则$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，其中

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

必要性。若A可逆，则有$AA^{-1}=E$。两边取行列式，
有$|A||A^{-1}|=1$，故$|A|\neq 0$。
充分性。设$|A|\neq 0$，最直接的方法是？
若有矩阵$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$，使得$AB=BA=E$，可以将$B$通过解方程求出。
事实上可以直接找到，而不需解方程。

若$|A|\neq 0$，则$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，其中

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

推论：对于方阵A，若存在方阵B，使得$AB=E$，则A可逆，且$A^{-1}=B$。

逆矩阵的应用

逆矩阵的应用

若已经知道I到I′的仿射坐标变换公式为:

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

则我们可以求出I′到I的仿射坐标变换公式为:

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} u & a_{21} \\ v & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{a_{22}u - a_{12}v}{d} \\ \\ v' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{11} & u \\ a_{21} & v \end{vmatrix} = \frac{-a_{21}u + a_{11}v}{d} \end{cases}$$

逆矩阵的应用

若已经知道I到I′的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{cases} u = a_{11}u' + a_{12}v' \\ v = a_{21}u' + a_{22}v' \end{cases}$$

则我们可以求出I′到I的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} u & a_{21} \\ v & a_{22} \end{vmatrix} = \frac{a_{22}u - a_{12}v}{d} \\ \\ v' = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{11} & u \\ a_{21} & v \end{vmatrix} = \frac{-a_{21}u + a_{11}v}{d} \end{cases}$$

从矩阵的角度看，已知：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$$

简写为$\gamma = A\gamma'$,

简写为$\gamma = A\gamma'$，由于$|A| \neq 0$，A可逆。

简写为$\gamma = A\gamma'$，由于$|A| \neq 0$，A可逆。等式两端同时左乘A^{-1}，有$\gamma' = A^{-1}\gamma$，

简写为$\gamma = A\gamma'$，由于$|A| \neq 0$，A可逆。等式两端同时左乘A^{-1}，有$\gamma' = A^{-1}\gamma$，具体写出：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

简写为$\gamma = A\gamma'$，由于$|A| \neq 0$，A可逆。等式两端同时左乘A^{-1}，有$\gamma' = A^{-1}\gamma$，具体写出：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

与之前的结果相吻合。

简写为$\gamma = A\gamma'$，由于$|A| \neq 0$，A可逆。等式两端同时左乘A^{-1}，有$\gamma' = A^{-1}\gamma$，具体写出：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

与之前的结果相吻合。

同理，根据I到I′点的仿射坐标变换公式：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

简写为$\gamma = A\gamma'$，由于$|A| \neq 0$，A可逆。等式两端同时左乘A^{-1}，有$\gamma' = A^{-1}\gamma$，具体写出：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

与之前的结果相吻合。
同理，根据I到I$'$点的仿射坐标变换公式：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

有I$'$到I的点仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

简写为$\gamma = A\gamma'$，由于$|A| \neq 0$，A可逆。等式两端同时左乘A^{-1}，有$\gamma' = A^{-1}\gamma$，具体写出：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

与之前的结果相吻合。
同理，根据I到I$'$点的仿射坐标变换公式：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

有I$'$到I的点仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

可见引入矩阵后不仅能使记号简洁，更可以直接利用矩阵的运算，来表达坐标之间的关系。

正交矩阵

定义： 若一个n级矩阵A满足：$AA^t = E$，则称A是正交矩阵。

正交矩阵

定义： 若一个n级矩阵A满足：$AA^t = E$，则称A是正交矩阵。

例： $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$都是正交矩阵。

正交矩阵

定义： 若一个n级矩阵A满足：$AA^t = E$，则称A是正交矩阵。

例： $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$都是正交矩阵。

命题： A是正交阵的充要条件为$A^{-1} = A^t$.

正交矩阵

定义： 若一个n级矩阵A满足：$AA^t = E$，则称A是正交矩阵。

例： $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$都是正交矩阵。

命题： A是正交阵的充要条件为$A^{-1} = A^t$.

推论： 若n级矩阵A满足：$AA^t = E$，则同时也有：$A^tA = E$

正交矩阵

定义： 若一个n级矩阵A满足：$AA^t = E$，则称A是正交矩阵。

例： $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$都是正交矩阵。

命题： A是正交阵的充要条件为$A^{-1} = A^t$.

推论： 若n级矩阵A满足：$AA^t = E$，则同时也有：$A^tA = E$

正交矩阵还有下列性质:若A, B都是n级正交阵

- AB也是正交阵。
- A^{-1}, A^t也是正交矩阵;
- $|A| = \pm 1$;

根据$AA^t = E$，有：

命题：A是正交矩阵的充要条件为：A的每一行元素的平方和等于1，每两行对应元素的乘积之和等于零，即：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n;$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = 0, \quad i \neq j.$$

根据$AA^t=E$，有：

命题：A是正交矩阵的充要条件为：A的每一行元素的平方和等于1，每两行对应元素的乘积之和等于零，即：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n;$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = 0, \quad i \neq j.$$

又根据$A^tA=E$，类似有：

命题：A是正交矩阵的充要条件为：A的每一列元素的平方和等于1，每两列对应元素的乘积之和等于零，即：

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n;$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = 0, \quad i \neq j.$$

作业

习题4.1，P119

作业

习题4.1，P119

1

作业

习题4.1，P119

1

习题4.2，P132

作业

习题4.1，P119

1

习题4.2，P132

2(3)(4),3(1),5

为何最后要讲正交矩阵？

平面的直角坐标变换

直角坐标变换公式

平面上给定两个直角坐标系：$\mathrm{I}:[O,\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}]$和$\mathrm{I}':[O,\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2]$，考虑相应的坐标变换。

直角坐标变换公式

平面上给定两个直角坐标系：$\mathrm{I}:[O,\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}]$和$\mathrm{I}':[O,\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2']$，考虑相应的坐标变换。之前关于仿射坐标变换的一般结论和方法对于直角坐标变换也都成立。

直角坐标变换公式

平面上给定两个直角坐标系：$\mathrm{I} : [O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}]$和$\mathrm{I}' : [O, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2]$，考虑相应的坐标变换。之前关于仿射坐标变换的一般结论和方法对于直角坐标变换也都成立。

本节进一步研究直角坐标变换的特殊性。

设$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$在I标架下的坐标为：$(a_{11}, a_{21})$，$(a_{12}, a_{22})$，即：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

设$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$在I标架下的坐标为：$(a_{11}, a_{21})$，$(a_{12}, a_{22})$，即：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

此时$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为I到I$'$的过渡矩阵。

设$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$在$\mathrm{I}$标架下的坐标为：$(a_{11}, a_{21})$，$(a_{12}, a_{22})$，即：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

此时$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为$\mathrm{I}$到$\mathrm{I}'$的过渡矩阵。

定理： 设I, I'都是直角坐标系，则I到I'的过渡矩阵A为正交阵；并且有I'到I的过渡矩阵为A^t。

设$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$在I标架下的坐标为：$(a_{11}, a_{21})$，$(a_{12}, a_{22})$，即：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

此时$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为I到I$'$的过渡矩阵。

定理： 设I, I$'$都是直角坐标系，则I到I$'$的过渡矩阵A为正交阵；并且有I$'$到I的过渡矩阵为A^t。

证明： I$'$是直角坐标系，故$|\mathbf{e}_1'| = 1, |\mathbf{e}_2'| = 1, \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2' = 0$。

设$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$在I标架下的坐标为：$(a_{11}, a_{21})$，$(a_{12}, a_{22})$，即：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

此时$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为I到I$'$的过渡矩阵。

定理： 设I, I$'$都是直角坐标系，则I到I$'$的过渡矩阵A为正交阵；并且有I$'$到I的过渡矩阵为A^t。

证明： I$'$是直角坐标系，故$|\mathbf{e}_1'| = 1, |\mathbf{e}_2'| = 1, \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2' = 0$。I也是直角坐标系，有：

设$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$在I标架下的坐标为：$(a_{11}, a_{21})$，$(a_{12}, a_{22})$，即：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

此时$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为I到I$'$的过渡矩阵。

定理： 设I, I$'$都是直角坐标系，则I到I$'$的过渡矩阵A为正交阵；并且有I$'$到I的过渡矩阵为A^t。

证明： I$'$是直角坐标系，故$|\mathbf{e}_1'| = 1, |\mathbf{e}_2'| = 1, \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2' = 0$。I也是直角坐标系，有：

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

设$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$在I标架下的坐标为：$(a_{11}, a_{21})$，$(a_{12}, a_{22})$，即：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

此时$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为I到I$'$的过渡矩阵。

定理： 设I, I$'$都是直角坐标系，则I到I$'$的过渡矩阵A为正交阵；并且有I$'$到I的过渡矩阵为A^t。

证明： I$'$是直角坐标系，故$|\mathbf{e}_1'| = 1$,$|\mathbf{e}_2'| = 1$,$\mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2' = 0$。I也是直角坐标系，有：

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

故A为正交矩阵。

设$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$在I标架下的坐标为：$(a_{11}, a_{21})$，$(a_{12}, a_{22})$，即：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1' \\ \mathbf{e}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

此时$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为I到I$'$的过渡矩阵。

定理： 设I, I$'$都是直角坐标系，则I到I$'$的过渡矩阵A为正交阵；并且有I$'$到I的过渡矩阵为A^t。

证明： I$'$是直角坐标系，故$|\mathbf{e}_1'| = 1, |\mathbf{e}_2'| = 1, \mathbf{e}_1' \cdot \mathbf{e}_2' = 0$。I也是直角坐标系，有：

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

故A为正交矩阵。

注意： 必须I, I$'$都是直角坐标系才必有A为正交矩阵。

回忆：

I′到I的向量的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

I′到I的点的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

回忆：

I'到I的向量的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

I'到I的点的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

但是在直角标架下过渡矩阵A为正交阵，

回忆：

I'到I的向量的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

I'到I的点的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

但是在直角标架下过渡矩阵A为正交阵，从而$A^{-1} = A^t$,

回忆：

I′到I的向量的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

I′到I的点的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

但是在直角标架下过渡矩阵A为正交阵，从而$A^{-1} = A^t$，故有：

I′到I的向量的直角坐标变换公式为：

回忆：
I′到I的向量的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

I′到I的点的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

但是在直角标架下过渡矩阵A为正交阵，从而$A^{-1} = A^t$，故有：
I′到I的向量的直角坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

回忆：

I'到I的向量的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

I'到I的点的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

但是在直角标架下过渡矩阵A为正交阵，从而$A^{-1} = A^t$，故有：

I'到I的向量的直角坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

I'到I的点的直角坐标变换公式为：

回忆：
I′到I的向量的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

I′到I的点的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

但是在直角标架下过渡矩阵A为正交阵，从而$A^{-1} = A^t$，故有：
I′到I的向量的直角坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

I′到I的点的直角坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

回忆：

I'到I的向量的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

I'到I的点的仿射坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

但是在直角标架下过渡矩阵A为正交阵，从而$A^{-1} = A^t$，故有：

I'到I的向量的直角坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

I'到I的点的直角坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

在直角标架的计算很简洁，省去了求逆的过程。

直角坐标变换中的过渡矩阵

设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为直角坐标系$\mathrm{I}$到$\mathrm{I}'$的过渡矩阵。

直角坐标变换中的过渡矩阵

设$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为直角坐标系I到I′的过渡矩阵。
虽然有四个元素，但是正交阵，满足如下限制条件：

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$$

或等价的：

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

直角坐标变换中的过渡矩阵

设$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为直角坐标系I到I′的过渡矩阵。
虽然有四个元素，但是正交阵，满足如下限制条件：

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$$

或等价的：

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

满足三个方程，故只有一个自由度。

直角坐标变换中的过渡矩阵

设$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为直角坐标系I到I′的过渡矩阵。

虽然有四个元素，但是正交阵，满足如下限制条件：

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$$

或等价的：

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

满足三个方程，故只有一个自由度。具体来看：

根据$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$，可令$a_{11} = \cos\theta, a_{21} = \sin\theta$。

直角坐标变换中的过渡矩阵

设$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为直角坐标系I到I′的过渡矩阵。
虽然有四个元素，但是正交阵，满足如下限制条件：

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$$

或等价的：

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

满足三个方程，故只有一个自由度。具体来看：

根据$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$，可令$a_{11} = \cos\theta, a_{21} = \sin\theta$。
再根据$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$，可令$a_{12} = \cos\phi, a_{22} = \sin\phi$。

直角坐标变换中的过渡矩阵

设$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为直角坐标系I到I′的过渡矩阵。
虽然有四个元素，但是正交阵，满足如下限制条件：

$$a_{11}^2+a_{12}^2=1, \quad a_{21}^2+a_{22}^2=1, \quad a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=0$$

或等价的：

$$a_{11}^2+a_{21}^2=1, \quad a_{12}^2+a_{22}^2=1, \quad a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$$

满足三个方程，故只有一个自由度。具体来看：

根据$a_{11}^2+a_{21}^2=1$，可令$a_{11}=\cos\theta, a_{21}=\sin\theta$。
再根据$a_{12}^2+a_{22}^2=1$，可令$a_{12}=\cos\phi, a_{22}=\sin\phi$。
由$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}=0$，

直角坐标变换中的过渡矩阵

设$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$为直角坐标系I到I′的过渡矩阵。
虽然有四个元素，但是正交阵，满足如下限制条件：

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1, \quad a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = 0$$

或等价的：

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \quad a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \quad a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$$

满足三个方程，故只有一个自由度。具体来看：

根据$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1$，可令$a_{11} = \cos\theta, a_{21} = \sin\theta$。
再根据$a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1$，可令$a_{12} = \cos\phi, a_{22} = \sin\phi$。
由$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0$，有$\cos(\theta - \phi) = 0$，故$\phi = \theta \pm \frac{\pi}{2}$。

当$\phi=\theta+\frac{\pi}{2}$时，有$a_{12}=\cos\phi=-\sin\theta, a_{22}=\sin\phi=\cos\theta$
即
$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

当$\phi = \theta + \frac{\pi}{2}$时，有$a_{12} = \cos\phi = -\sin\theta, a_{22} = \sin\phi = \cos\theta$
即

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

当$\phi = \theta - \frac{\pi}{2}$时，有$a_{12} = \cos\phi = \sin\theta, a_{22} = \sin\phi = -\cos\theta$
即

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

当$\phi=\theta+\frac{\pi}{2}$时，有$a_{12}=\cos\phi=-\sin\theta, a_{22}=\sin\phi=\cos\theta$
即

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

当$\phi=\theta-\frac{\pi}{2}$时，有$a_{12}=\cos\phi=\sin\theta, a_{22}=\sin\phi=-\cos\theta$
即

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

过渡矩阵只有这两种形式。

当$\phi = \theta + \frac{\pi}{2}$时，有$a_{12} = \cos\phi = -\sin\theta, a_{22} = \sin\phi = \cos\theta$
即

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

当$\phi = \theta - \frac{\pi}{2}$时，有$a_{12} = \cos\phi = \sin\theta, a_{22} = \sin\phi = -\cos\theta$
即

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

过渡矩阵只有这两种形式。其中的θ有什么几何意义？

当$\phi=\theta+\frac{\pi}{2}$时，有$a_{12}=\cos\phi=-\sin\theta, a_{22}=\sin\phi=\cos\theta$
即
$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$
当$\phi=\theta-\frac{\pi}{2}$时，有$a_{12}=\cos\phi=\sin\theta, a_{22}=\sin\phi=-\cos\theta$
即
$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$
过渡矩阵只有这两种形式。其中的θ有什么几何意义？

定义：平面上的直角坐标系$[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}]$称为右手系，若$\mathbf{e_1}$逆时针旋转$90^\circ$与$\mathbf{e_2}$重合。反之，若$\mathbf{e_1}$顺时针旋转$90^\circ$ 与$\mathbf{e_2}$ 重合，则称为左手系。

当$\phi=\theta+\frac{\pi}{2}$时，有$a_{12}=\cos\phi=-\sin\theta, a_{22}=\sin\phi=\cos\theta$
即

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

当$\phi=\theta-\frac{\pi}{2}$时，有$a_{12}=\cos\phi=\sin\theta, a_{22}=\sin\phi=-\cos\theta$
即

$$A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$$

过渡矩阵只有这两种形式。其中的θ有什么几何意义？

定义： 平面上的直角坐标系$[O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]$称为右手系，若$\mathbf{e}_1$逆时针旋转$90^\circ$与$\mathbf{e}_2$重合。反之，若$\mathbf{e}_1$顺时针旋转$90^\circ$与$\mathbf{e}_2$重合，则称为左手系。

注解：

- 为何叫“右手”“左手”？
- 平面仿射坐标系也有右手系和左手系的区别。

设$\mathrm{I}, [O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}]$，$\mathrm{I}', [O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2]$都是右手直角坐标系。

设$\mathrm{I}, [O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}]$，$\mathrm{I}', [O'; \mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}]$都是右手直角坐标系。则

$$\mathbf{e_1'} = \cos\theta \mathbf{e_1} + \sin\theta \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{e_2'} = -\sin\theta \mathbf{e_1} + \cos\theta \mathbf{e_2}$$

设$\mathrm{I}, [O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}]$，$\mathrm{I}', [O'; \mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}]$都是右手直角坐标系。则

$$\mathbf{e_1'} = \cos\theta \mathbf{e_1} + \sin\theta \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{e_2'} = -\sin\theta \mathbf{e_1} + \cos\theta \mathbf{e_2}$$

即过渡矩阵可写为:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

设$\mathrm{I}, [O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}]$，$\mathrm{I}', [O'; \mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}]$都是右手直角坐标系。则

$$\mathbf{e_1'} = \cos\theta \mathbf{e_1} + \sin\theta \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{e_2'} = -\sin\theta \mathbf{e_1} + \cos\theta \mathbf{e_2}$$

即过渡矩阵可写为：

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

I, I'都是左手直角坐标系时

$$\mathbf{e_1'} = \cos\theta \mathbf{e_1} - \sin\theta \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{e_2'} = \sin\theta \mathbf{e_1} + \cos\theta \mathbf{e_2}$$

设$\mathrm{I}, [O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}]$，$\mathrm{I}', [O'; \mathbf{e_1'}, \mathbf{e_2'}]$都是右手直角坐标系。则

$$\mathbf{e_1'} = \cos\theta \mathbf{e_1} + \sin\theta \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{e_2'} = -\sin\theta \mathbf{e_1} + \cos\theta \mathbf{e_2}$$

即过渡矩阵可写为:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

I, I'都是左手直角坐标系时

$$\mathbf{e_1'} = \cos\theta \mathbf{e_1} - \sin\theta \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{e_2'} = \sin\theta \mathbf{e_1} + \cos\theta \mathbf{e_2}$$

过渡矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

设$\mathrm{I}, [O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}]$，$\mathrm{I}', [O'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2']$都是右手直角坐标系。则

$$\mathbf{e}_1' = \cos\theta \mathbf{e_1} + \sin\theta \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{e}_2' = -\sin\theta \mathbf{e_1} + \cos\theta \mathbf{e_2}$$

即过渡矩阵可写为:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

I, I'都是左手直角坐标系时

$$\mathbf{e}_1' = \cos\theta \mathbf{e_1} - \sin\theta \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{e}_2' = \sin\theta \mathbf{e_1} + \cos\theta \mathbf{e_2}$$

过渡矩阵为:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

设I为右手直角坐标系，I′为左手直角坐标系。

设I为右手直角坐标系，I′为左手直角坐标系。则

$$\mathbf{e}_1' = \cos\theta \mathbf{e_1} + \sin\theta \mathbf{e_2}$$

$$\mathbf{e}_2' = \sin\theta \mathbf{e_1} - \cos\theta \mathbf{e_2}$$

设I为右手直角坐标系，I′为左手直角坐标系。则

$$\mathbf{e}_1' = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2' = \sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2$$

即过渡矩阵可写为：

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

设I为右手直角坐标系，I′为左手直角坐标系。则

$$\mathbf{e}_1' = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2' = \sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2$$

即过渡矩阵可写为：

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

I为左手直角坐标系,I′ 为右手直角坐标系时

$$\mathbf{e}_1' = \cos\theta\mathbf{e}_1 - \sin\theta\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2' = -\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2$$

设I为右手直角坐标系，I′为左手直角坐标系。则

$$\mathbf{e}_1' = \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2' = \sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2$$

即过渡矩阵可写为：

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

I为左手直角坐标系,I′ 为右手直角坐标系时

$$\mathbf{e}_1' = \cos\theta\mathbf{e}_1 - \sin\theta\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2' = -\sin\theta\mathbf{e}_1 - \cos\theta\mathbf{e}_2$$

过渡矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

设I为右手直角坐标系，I′为左手直角坐标系。则

$$\mathbf{e}_1' = \cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2' = \sin\theta \mathbf{e}_1 - \cos\theta \mathbf{e}_2$$

即过渡矩阵可写为：

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

I为左手直角坐标系,I′ 为右手直角坐标系时

$$\mathbf{e}_1' = \cos\theta \mathbf{e}_1 - \sin\theta \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{e}_2' = -\sin\theta \mathbf{e}_1 - \cos\theta \mathbf{e}_2$$

过渡矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & -\cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

为了更好地描述坐标系之间的变换，引入如下概念：

为了更好地描述坐标系之间的变换，引入如下概念：

定义：平面的两个坐标系，如果它们都是右手系，或者它们都是左手系，则称它们是**同定向的**；如果一个是右手系，一个是左手系，则称它们是**反定向的**；

为了更好地描述坐标系之间的变换，引入如下概念：
定义：平面的两个坐标系，如果它们都是右手系，或者它们都是左手系，则称它们是同定向的；如果一个是右手系，一个是左手系，则称它们是反定向的；

命题：设I，I'都为平面的直角坐标系，I到I'的过渡矩阵为A，则I和I' 同定向的充要条件为$|A| = 1$，反定向的充要条件为$|A| = -1$。

为了更好地描述坐标系之间的变换，引入如下概念：

定义： 平面的两个坐标系，如果它们都是右手系，或者它们都是左手系，则称它们是同定向的；如果一个是右手系，一个是左手系，则称它们是反定向的；

命题： 设I，I'都为平面的直角坐标系，I到I'的过渡矩阵为A，则I和I' 同定向的充要条件为$|A| = 1$，反定向的充要条件为$|A| = -1$。

不特别说明，今后直角坐标系指右手直角坐标系。

移轴公式和转轴公式

现在重点考察点的坐标变换公式。

移轴公式和转轴公式

现在重点考察点的坐标变换公式。设$\mathrm{I}[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}]$，$\mathrm{I}'[O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2]$都是右手直角坐标系，$O'$在的I下的坐标为$(x_0,y_0)$，$\mathbf{e_1}$ 到$\mathbf{e}'_1$的转角为θ，则有：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

移轴公式和转轴公式

现在重点考察点的坐标变换公式。设$\mathrm{I}[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}]$，$\mathrm{I}'[O';\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2]$都是右手直角坐标系，$O'$在的$\mathrm{I}$下的坐标为$(x_0,y_0)$，$\mathbf{e_1}$ 到$\mathbf{e}'_1$的转角为θ，则有：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

考虑两种特殊情况，

移轴公式和转轴公式

现在重点考察点的坐标变换公式。设I$[O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]$，I$'[O';\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2']$都是右手直角坐标系，$O'$在的I下的坐标为$(x_0,y_0)$，$\mathbf{e}_1$ 到$\mathbf{e}_1'$的转角为θ，则有：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

考虑两种特殊情况，首先，若$\theta = 0$，有：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

称为移轴公式。

移轴公式和转轴公式

现在重点考察点的坐标变换公式。设$\mathrm{I}[O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]$，$\mathrm{I}'[O';\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2']$都是右手直角坐标系，$O'$在的$\mathrm{I}$下的坐标为$(x_0,y_0)$，$\mathbf{e}_1$ 到$\mathbf{e}_1'$的转角为θ，则有：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

考虑两种特殊情况，首先，若$\theta = 0$，有：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

称为移轴公式。

其次，若O'与O重合，有：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

称为转轴公式。

平面上任一右手直角坐标变换可以经过移轴和转轴得到。

$$[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2}] \xrightarrow{\text{转轴}} [O;\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2'] \xrightarrow{\text{移轴}} [O';\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2']$$

平面上任一右手直角坐标变换可以经过移轴和转轴得到。

$$[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] \xrightarrow{\text{转轴}} [O; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'] \xrightarrow{\text{移轴}} [O'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2']$$

或

$$[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] \xrightarrow{\text{移轴}} [O'; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] \xrightarrow{\text{转轴}} [O'; \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2']$$

平面上任一右手直角坐标变换可以经过移轴和转轴得到。

$$[O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]\xrightarrow{\text{转轴}}[O;\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2']\xrightarrow{\text{移轴}}[O';\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2']$$

或

$$[O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]\xrightarrow{\text{移轴}}[O';\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]\xrightarrow{\text{转轴}}[O';\mathbf{e}_1',\mathbf{e}_2']$$

这样的观点在今后我们化简方程当中起着至关重要的作用。

例： 平面上，设x', y'轴在原坐标系中的方程分别为：

$$3x-4y+1=0, \quad 4x+3y-7=0,$$

且新旧坐标系都是右手直角坐标系。求：

1. I到I$'$的点的坐标变换公式；
2. 直线$l_1: 2x-y+3=0$在新坐标系中的方程；
3. 直线$l_2: x'+2y'-1=0$在旧坐标系中的方程。

例： 平面上，设x', y'轴在原坐标系中的方程分别为：

$$3x - 4y + 1 = 0, \quad 4x + 3y - 7 = 0,$$

且新旧坐标系都是右手直角坐标系。求：

1. I到I$'$的点的坐标变换公式；
2. 直线$l_1 : 2x - y + 3 = 0$在新坐标系中的方程；
3. 直线$l_2 : x' + 2y' - 1 = 0$在旧坐标系中的方程。

解：

例： 平面上，设x', y'轴在原坐标系中的方程分别为：

$$3x - 4y + 1 = 0, \quad 4x + 3y - 7 = 0,$$

且新旧坐标系都是右手直角坐标系。求：

1. I到I′的点的坐标变换公式；
2. 直线$l_1 : 2x - y + 3 = 0$在新坐标系中的方程；
3. 直线$l_2 : x' + 2y' - 1 = 0$在旧坐标系中的方程。

解： I到I′的点的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

例： 平面上，设x', y'轴在原坐标系中的方程分别为：

$$3x-4y+1=0, \quad 4x+3y-7=0,$$

且新旧坐标系都是右手直角坐标系。求：

1. I到I′的点的坐标变换公式；
2. 直线$l_1 : 2x-y+3=0$在新坐标系中的方程；
3. 直线$l_2 : x'+2y'-1=0$在旧坐标系中的方程。

解： I到I′的点的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I′到I的点的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

我们之前接触的问题都是已知坐标变换，求不同方程在坐标变换下新的表达式。

我们之前接触的问题都是已知坐标变换，求不同方程在坐标变换下新的表达式。但实际中更常见的问题是不知道具体的坐标变换，需要根据需求找到合适的坐标变换，化简方程。

我们之前接触的问题都是已知坐标变换，求不同方程在坐标变换下新的表达式。但实际中更常见的问题是不知道具体的坐标变换，需要根据需求找到合适的坐标变换，化简方程。

例： 在平面右手直角坐标系中，求分式线性函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad \neq bc, c \neq 0$$

的图像。

我们之前接触的问题都是已知坐标变换，求不同方程在坐标变换下新的表达式。但实际中更常见的问题是不知道具体的坐标变换，需要根据需求找到合适的坐标变换，化简方程。

例：在平面右手直角坐标系中，求分式线性函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad \neq bc, c \neq 0$$

的图像。

解：

我们之前接触的问题都是已知坐标变换，求不同方程在坐标变换下新的表达式。但实际中更常见的问题是不知道具体的坐标变换，需要根据需求找到合适的坐标变换，化简方程。

例： 在平面右手直角坐标系中，求分式线性函数

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad ad \neq bc, c \neq 0$$

的图像。

解：

$$x'y' = \frac{bc - ad}{c^2}$$

我们之前接触的问题都是已知坐标变换，求不同方程在坐标变换下新的表达式。但实际中更常见的问题是不知道具体的坐标变换，需要根据需求找到合适的坐标变换，化简方程。

例： 在平面右手直角坐标系中，求分式线性函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad \neq bc, c \neq 0$$

的图像。

解：

$$x'y' = \frac{bc-ad}{c^2}$$

要知道曲线的类型该怎样处理？

习题4.3： P140,9 在右手直角坐标系Oxy中，设一抛物线的顶点是$(4,2)$，焦点是$(2,0)$，求它的方程。

习题4.3：P140,9 在右手直角坐标系Oxy中，设一抛物线的顶点是$(4,2)$，焦点是$(2,0)$，求它的方程。

回忆：抛物线的标准方程为：$x^2 = 2py$时，焦点坐标为$(0, \frac{p}{2})$

作业

习题4.3，P139

作业

习题4.3，P139

1,2,4,6(1),7,12

总结

总结

- 仿射标架之间的坐标变换对应可逆矩阵;

总结

- 仿射标架之间的坐标变换对应可逆矩阵；
- 直角标架之间的坐标变换对应正交矩阵。

总结

- 仿射标架之间的坐标变换对应可逆矩阵;
- 直角标架之间的坐标变换对应正交矩阵。

我们重点考察直角标架之间的坐标变换。