消元法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

消元法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{$*$}$$

概念:方程组的系数,常数项,方程组的解,解集,同解方程组,方程组的初等变换(换法,倍法,消法), 同解变形,阶梯形方程组,一般解,自由未知量,特解,线性方程组的系数矩阵,增广矩阵

消元法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

概念:方程组的系数,常数项,方程组的解,解集,同解方程组,方程组的初等变换(换法,倍法,消法), 同解变形,阶梯形方程组,一般解,自由未知量,特解,线性方程组的系数矩阵,增广矩阵

注：(1)增广矩阵与线性方程组是一一对应的。增广矩阵中的每一行对应方程组中一个方程。

(2)线性方程组的初等变换对应于增广矩阵的初等行变换。

消元法

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{$*$}$$

概念:方程组的系数,常数项,方程组的解,解集,同解方程组,方程组的初等变换(换法,倍法,消法), 同解变形,阶梯形方程组,一般解,自由未知量,特解,线性方程组的系数矩阵,增广矩阵

注: (1)增广矩阵与线性方程组是一一对应的。增广矩阵中的每一行对应方程组中一个方程。

(2)线性方程组的初等变换对应于增广矩阵的初等行变换。

定理:线性方程组的初等变换是同解变形。 $(P107)$

解方程组

利用方程组初等变换化方程组(1)为**(简化)阶梯形方程组**：

$$\left\{\begin{aligned} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1r}x_r+\cdots+c_{1n}x_n&=d_1\\ c_{22}x_2+\cdots+c_{2r}x_r+\cdots+c_{2n}x_n&=d_2\\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\\ c_{rr}x_r+\cdots+c_{rn}x_n&=d_r\\ 0&=d_{r+1}\\ 0&=0\\ \cdots&\\ 0&=0 \end{aligned}\right.$$

解方程组

解的判别与求法:(1)方程组$(*)$无解当且仅当$d_{r+1} \neq 0$,即$r = r(A) < r(\widetilde{A})$，此时$r(\widetilde{A}) = r(A) + 1$;

解方程组

解的判别与求法:(1)方程组$(*)$无解当且仅当$d_{r+1} \neq 0$,即$r = r(A)$ $< r(\widetilde{A})$，此时$r(\widetilde{A}) = r(A) + 1$；

(2)方程组$(*)$有解当且仅当$d_{r+1} = 0$，即$r(A) = r(\widetilde{A}) = r$,

(i)$r = n$，有唯一解：Cramer法则或逐步回代求解；

(ii)$r < n$，有无穷多解：逐步回代将$x_1, \cdots, x_r$用自由未知量x_{r+1}, $\cdots, x_n$线性表出。

解方程组

解的判别与求法:(1)方程组$(*)$无解当且仅当$d_{r+1}\neq 0$,即$r=r(A)$
$<r(\widetilde{A})$，此时$r(\widetilde{A})=r(A)+1$；

(2)方程组$(*)$有解当且仅当$d_{r+1}=0$，即$r(A)=r(\widetilde{A})=r$,

(i)$r=n$，有唯一解：Cramer法则或逐步回代求解；

(ii)$r<n$，有无穷多解：逐步回代将$x_1,\cdots,x_r$用自由未知量x_{r+1},
$\cdots,x_n$线性表出。

定理1:齐次线性方程组$\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=0, 1\leq i\leq s$,当$s<n$时有非零解。

解方程组

解的判别与求法:(1)方程组$(*)$无解当且仅当$d_{r+1} \neq 0$,即$r = r(A) < r(\widetilde{A})$，此时$r(\widetilde{A}) = r(A) + 1$；

(2)方程组$(*)$有解当且仅当$d_{r+1} = 0$，即$r(A) = r(\widetilde{A}) = r$,

(i)$r = n$，有唯一解：Cramer法则或逐步回代求解；

(ii)$r < n$，有无穷多解：逐步回代将$x_1, \cdots, x_r$用自由未知量$x_{r+1}, \cdots, x_n$线性表出。

定理1:齐次线性方程组$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, 1 \leq i \leq s$,当$s < n$时有非零解。

注:(1)自由未知量的选取通常不唯一；

(2)对增广矩阵进行初等变换求解方程组时，一般只能进行行初等变换，列初等变换只能是换法变换。

n维向量

定义2:数域P中n个数组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{1}$$

称为数域P上的一个n**维向量**; a_i称为向量(1)的**分量**;n称为向量的维数;通常用小写希腊字母$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$表示向量。

n维向量

定义2:数域P中n个数组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{1}$$

称为数域P上的一个**n维向量**; a_i称为向量(1)的**分量**;n称为向量的维数;通常用小写希腊字母$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$表示向量。

注:行向量，列向量统称为向量。

n维向量

定义2:数域P中n个数组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \tag{1}$$

称为数域P上的一个**n维向量**; a_i称为向量(1)的**分量**;n称为向量的维数;通常用小写希腊字母$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$表示向量。

注:行向量，列向量统称为向量。

定义3:若n维向量$\alpha = (a_1, \cdots, a_n), \beta = (b_1, \cdots, b_n)$的对应分量都相等，即$a_i = b_i, 1 \leq i \leq n$,则称这两个**向量相等**，记作$\alpha = \beta$。

向量的运算

向量α, β的和:$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)^T$

向量的运算

向量α, β的和:$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n)^T$

向量$(0, 0, \cdots, 0)^T$称为**零向量**，简记为0。

向量的运算

向量α, β的和:$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T$

向量$(0,0,\cdots,0)^T$称为**零向量**，简记为0。

向量α的负向量：$-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)^T$

向量的运算

向量α,β的和:$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T$

向量$(0,0,\cdots,0)^T$称为**零向量**，简记为0。

向量α的负向量： $-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)^T$

向量α,β的差:$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)^T$

向量的运算

向量α,β的和:$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)^T$

向量$(0,0,\cdots,0)^T$称为**零向量**，简记为0。

向量α的负向量：$-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)^T$

向量α,β的差:$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)^T$

向量α与数k的数乘：$k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)^T$

向量的运算性质

设α, β, γ为任意n维向量，k, l为任意常数：

(1)加法交换律： $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2)加法结合律： $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3)$\alpha + 0 = \alpha$;　　**(4)**$\alpha + (-\alpha) = 0$.

向量的运算性质

设α, β, γ为任意n维向量，k, l为任意常数：

(1)加法交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2)加法结合律：$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3)$\alpha + 0 = \alpha$; **(4)**$\alpha + (-\alpha) = 0$.

(5)$1 \cdot \alpha = \alpha$; **(6)**$k(l\alpha) = (kl)\alpha$;

(7)$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$; **(8)**$(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$.

向量的运算性质

设α, β, γ为任意n维向量，k, l为任意常数：

(1)加法交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

(2)加法结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

(3)$\alpha+0=\alpha$;　　**(4)**$\alpha+(-\alpha)=0.$

(5)$1\cdot\alpha=\alpha$;　　**(6)**$k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7)$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;　　**(8)**$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha.$

(9)$0\alpha=0, (-1)\alpha=-\alpha, k0=0$

向量的运算性质

设α, β, γ为任意n维向量，k, l为任意常数：

(1)加法交换律：$\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2)加法结合律：$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3)$\alpha + 0 = \alpha$;

(4)$\alpha + (-\alpha) = 0.$

(5)$1 \cdot \alpha = \alpha$;

(6)$k(l\alpha) = (kl)\alpha$;

(7)$k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$;

(8)$(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha.$

(9)$0\alpha = 0, (-1)\alpha = -\alpha, k0 = 0$

(10)$k\alpha \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$且$\alpha \neq 0$

向量的运算性质

设α, β, γ为任意n维向量，k, l为任意常数：

(1)加法交换律： $\alpha + \beta = \beta + \alpha$

(2)加法结合律： $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$

(3) $\alpha + 0 = \alpha$; **(4)** $\alpha + (-\alpha) = 0.$

(5) $1 \cdot \alpha = \alpha$; **(6)** $k(l\alpha) = (kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$; **(8)** $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha.$

(9) $0\alpha = 0, (-1)\alpha = -\alpha, k0 = 0$

(10) $k\alpha \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 0$且$\alpha \neq 0$

定义8: 数域P上的全体n维向量的集合，其上定义了加法和数乘(统称为线性运算)，称此集合为数域P上的n**维向量空间**，记作P^n，即

$$P^n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) | a_i \in P, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

线性组合与线性表出(表示)

定义9: 设$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s, \alpha$都是$n$维向量,若$\exists k_1, k_2, \cdots, k_s \in P$，使

$$\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s \tag{2}$$

称向量α是向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$的一个**线性组合**，或称$\alpha$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$**线性表出(表示)**。

线性组合与线性表出(表示)

定义9: 设$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s, \alpha$都是$n$维向量,若$\exists k_1, k_2, \cdots, k_s \in P$，使

$$\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s \tag{2}$$

称向量α是向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$的一个**线性组合**，或称$\alpha$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$**线性表出(表示)**。

注:(1)α, β共线$\Leftrightarrow \alpha = k\beta; \alpha, \beta, \gamma$共面$\Leftrightarrow \exists k_1, k_2, \alpha = k_1\beta + k_2\gamma;$

线性组合与线性表出(表示)

定义9: 设$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s, \alpha$都是$n$维向量,若$\exists k_1, k_2, \cdots, k_s \in P$，使

$$\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s \tag{2}$$

称向量α是向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$的一个**线性组合**，或称$\alpha$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$**线性表出(表示)**。

注: (1)α, β共线$\Leftrightarrow \alpha = k\beta; \alpha, \beta, \gamma$共面$\Leftrightarrow \exists k_1, k_2, \alpha = k_1\beta + k_2\gamma;$

(2)若$\alpha = 0$，则(2)式对应一个n个方程的s元齐次线性方程组;

若$\alpha \neq 0$，则(2)式对应一个n个方程的s元非齐次线性方程组;

线性组合与线性表出(表示)

定义9: 设$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s, \alpha$都是$n$维向量,若$\exists k_1, k_2, \cdots, k_s \in P$，使

$$\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s \tag{2}$$

称向量α是向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$的一个**线性组合**，或称$\alpha$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$**线性表出(表示)**。

注:(1)α, β共线$\Leftrightarrow \alpha = k\beta; \alpha, \beta, \gamma$共面$\Leftrightarrow \exists k_1, k_2, \alpha = k_1\beta + k_2\gamma;$

(2)若$\alpha = 0$，则(2)式对应一个n个方程的s元齐次线性方程组;

若$\alpha \neq 0$，则(2)式对应一个n个方程的s元非齐次线性方程组;

(3)表法是否唯一，即对应的线性方程组是否唯一解;

线性组合与线性表出(表示)

定义9: 设$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s, \alpha$都是$n$维向量,若$\exists k_1, k_2, \cdots, k_s \in P$，使

$$\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s \tag{2}$$

称向量α是向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$的一个**线性组合**，或称$\alpha$可由向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$**线性表出(表示)**。

注: (1)α, β共线$\Leftrightarrow \alpha = k\beta; \alpha, \beta, \gamma$共面$\Leftrightarrow \exists k_1, k_2, \alpha = k_1\beta + k_2\gamma;$

(2)若$\alpha = 0$，则(2)式对应一个n个方程的s元齐次线性方程组;
若$\alpha \neq 0$，则(2)式对应一个n个方程的s元非齐次线性方程组;

(3)表法是否唯一，即对应的线性方程组是否唯一解;

(4)零向量是任一向量组的线性组合。

基本单位向量与向量组的等价

在n维向量空间中，向量

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

称为n维向量空间的**基本单位向量**。n维向量空间中任意向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$都可用这组向量线性表示：

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

基本单位向量与向量组的等价

在n维向量空间中，向量

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

称为n维向量空间的**基本单位向量**。n维向量空间中任意向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$都可用这组向量线性表示：

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

定义10:若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$中每一个向量都可以由向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，称**向量组$A$可以由向量组$B$线性表示**；若两个向量组可以相互线性表示，称它们相互**等价**，或称它们是**等价向量组**。

基本单位向量与向量组的等价

在n维向量空间中，向量

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

称为n维向量空间的**基本单位向量**。n维向量空间中任意向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$都可用这组向量线性表示：

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

定义10: 若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$中每一个向量都可以由向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，称**向量组$A$可以由向量组$B$线性表示**；若两个向量组可以相互线性表示，称它们相互**等价**，或称它们是**等价向量组**。

命题： 向量组A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组$B$：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示$\Leftrightarrow$存在$t\times s$矩阵$P$，使得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)P$$

基本单位向量与向量组的等价

在n维向量空间中，向量

$$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,0,1)$$

称为n维向量空间的**基本单位向量**。n维向量空间中任意向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$都可用这组向量线性表示：

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n$$

定义10:若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$中每一个向量都可以由向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表示，称**向量组$A$可以由向量组$B$线性表示**；若两个向量组可以相互线性表示，称它们相互**等价**，或称它们是**等价向量组**。

命题： 向量组A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由向量组$B$：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$线性表示$\Leftrightarrow$存在$t\times s$矩阵$P$，使得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)P$$

向量组等价的性质:反身性;对称性;传递性。

线性相关与线性无关

定义11: 若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$中有一个向量可由其余向量线性表出，则称向量组$A$**线性相关**；否则称为**线性无关**。

线性相关与线性无关

定义11:若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$中有一个向量可由其余向量线性表出，则称向量组$A$**线性相关**；否则称为**线性无关**。

定义11':向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 1)$,若存在数域$P$一组**不全为0**的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0 \tag{3}$$

称向量组A**线性相关**。若(3)式仅当$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$时成立，称向量组A**线性无关**。

线性相关与线性无关

定义11:若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$中有一个向量可由其余向量线性表出，则称向量组$A$**线性相关**；否则称为**线性无关**。

定义11':向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 1)$,若存在数域$P$一组**不全为0**的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0 \tag{3}$$

称向量组A**线性相关**。若(3)式仅当$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$时成立，称向量组A**线性无关**。

注：(1)对给定的向量组A，其或者线性相关，或者线性无关。

线性相关与线性无关

定义11:若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$中有一个向量可由其余向量线性表出，则称向量组$A$**线性相关**；否则称为**线性无关**。

定义11':向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 1)$,若存在数域$P$一组**不全为0**的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0 \tag{3}$$

称向量组A**线性相关**。若(3)式仅当$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$时成立，称向量组A**线性无关**。

注：(1)对给定的向量组A，其或者线性相关，或者线性无关。

(2)α_1,α_2线性相关$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2$共线;$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关$\Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$共面。

线性相关与线性无关

定义11:若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$中有一个向量可由其余向量线性表出，则称向量组$A$**线性相关**；否则称为**线性无关**。

定义11':向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 1)$,若存在数域$P$一组**不全为0**的数$k_1,k_2,\cdots,k_s$，使

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0 \tag{3}$$

称向量组A**线性相关**。若(3)式仅当$k_1=k_2=\cdots=k_s=0$时成立，称向量组A**线性无关**。

注：(1)对给定的向量组A，其或者线性相关，或者线性无关。

(2)α_1,α_2线性相关$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2$共线;$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性相关$\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$共面。

(3)含有零向量的向量组线性相关。

线性相关与线性无关

定义11: 若向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 2)$中有一个向量可由其余向量线性表出，则称向量组$A$**线性相关**；否则称为**线性无关**。

定义11': 向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s (s \geq 1)$,若存在数域$P$一组**不全为0**的数$k_1, k_2, \cdots, k_s$，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \tag{3}$$

称向量组A**线性相关**。若(3)式仅当$k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$时成立，称向量组$A$**线性无关**。

注： (1)对给定的向量组A，其或者线性相关，或者线性无关。

(2)α_1, α_2线性相关$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2$共线;$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性相关$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$共面。

(3)含有零向量的向量组线性相关。

(4)单位向量组$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$线性无关。

线性相关性

性质1:仅含一个向量α的向量组线性相关$\Leftrightarrow \alpha = 0$;仅含一个向量$\alpha$的向量组线性无关$\Leftrightarrow \alpha \neq 0$

线性相关性

性质1:仅含一个向量α的向量组线性相关$\Leftrightarrow \alpha = 0$;仅含一个向量$\alpha$的向量组线性无关$\Leftrightarrow \alpha \neq 0$

性质2:如果向量组的一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关；反之，若整个向量组线性无关，则其中任意部分向量组也线性无关。

线性相关性

性质1:仅含一个向量α的向量组线性相关$\Leftrightarrow \alpha = 0$;仅含一个向量$\alpha$的向量组线性无关$\Leftrightarrow \alpha \neq 0$

性质2:如果向量组的一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关；反之，若整个向量组线性无关，则其中任意部分向量组也线性无关。

性质3:向量组A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关当且仅当以$k_1, k_2, \cdots, k_s$为未知数的齐次线性方程组$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_s = 0$有非零解；向量组$A$线性无关当且仅当上述齐次线性方程组仅有零解。

性质1:仅含一个向量α的向量组线性相关$\Leftrightarrow \alpha=0$;仅含一个向量α的向量组线性无关$\Leftrightarrow \alpha\neq 0$

性质2:如果向量组的一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关；反之，若整个向量组线性无关，则其中任意部分向量组也线性无关。

性质3:向量组A：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关当且仅当以$k_1,k_2,\cdots,k_s$为未知数的齐次线性方程组$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_s=0$有非零解；向量组$A$线性无关当且仅当上述齐次线性方程组仅有零解。

推论1:若n维向量组$\alpha_1=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{n1}),\alpha_2=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{n2}),\cdots,\alpha_m=(a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{nm})$线性相关，则取这些向量的前$r$个分量($r<n$)组成的向量$\alpha_1'=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{r1}),\alpha_2'=(a_{12},a_{22},\cdots,a_{r2}),\cdots,\alpha_m'=(a_{1m},a_{2m},\cdots,a_{rm})$也是线性相关的向量组。

线性相关性

性质1:仅含一个向量α的向量组线性相关$\Leftrightarrow \alpha = 0$;仅含一个向量$\alpha$的向量组线性无关$\Leftrightarrow \alpha \neq 0$

性质2:如果向量组的一部分向量线性相关，则整个向量组也线性相关；反之，若整个向量组线性无关，则其中任意部分向量组也线性无关。

性质3:向量组A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性相关当且仅当以$k_1, k_2, \cdots, k_s$为未知数的齐次线性方程组$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_s = 0$有非零解；向量组$A$线性无关当且仅当上述齐次线性方程组仅有零解。

推论1:若n维向量组$\alpha_1 = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{n1}), \alpha_2 = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{n2}), \cdots, \alpha_m = (a_{1m}, a_{2m}, \cdots, a_{nm})$线性相关，则取这些向量的前$r$个分量$(r < n)$组成的向量$\alpha_1' = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{r1}), \alpha_2' = (a_{12}, a_{22}, \cdots, a_{r2}), \cdots, \alpha_m' = (a_{1m}, a_{2m}, \cdots, a_{rm})$也是线性相关的向量组。

推论2:若n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关，则把每个向量任意添加$s$个分量后，所得向量组$\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_m'$也线性无关。

线性相关性

定理2: 设$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$是两个向量组,若$A$可由$B$线性表出,且$r>s$,则向量组$A$ 线性相关。 $(P123)$

线性相关性

定理2:设$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$是两个向量组,若$A$可由$B$线性表出,且$r>s$,则向量组$A$ 线性相关。 $(P123)$

推论3:若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出,且$A$线性无关,则$r\leq s$。

线性相关性

定理2: 设$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$与$B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$是两个向量组,若$A$可由$B$线性表出,且$r > s$,则向量组$A$ 线性相关。 $(P123)$

推论3: 若向量组$A: \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$可由$B: \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$线性表出,且$A$线性无关,则$r \leq s$。

推论4: 当$m > n$时，任意n维向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$必线性相关;特别地，任意$n+1$个$n$维向量必线性相关。

线性相关性

定理2: 设$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$与$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$是两个向量组,若$A$可由$B$线性表出,且$r>s$,则向量组$A$ 线性相关。 $(P123)$

推论3: 若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$可由$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出,且$A$线性无关,则$r\leq s$。

推论4: 当$m>n$时，任意n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$必线性相关；特别地，任意$n+1$个$n$维向量必线性相关。

推论5: 两个线性无关的等价向量组必含有相同个数的向量。

极大线性无关组

定义13:设有n维向量组A，若它的一个部分组A_1线性无关，且从A中任意添加一个向量，所得的部分向量组都线性相关，则称A_1是A的一个**极大线性无关组**。

极大线性无关组

定义13:设有n维向量组A，若它的一个部分组A_1线性无关，且从A中任意添加一个向量，所得的部分向量组都线性相关，则称A_1是A的一个**极大线性无关组**。

注:(1)线性无关向量组的极大线性无关组就是这个向量组本身;

极大线性无关组

定义13:设有n维向量组A，若它的一个部分组A_1线性无关，且从A中任意添加一个向量，所得的部分向量组都线性相关，则称A_1是A的一个**极大线性无关组**。

注:(1)线性无关向量组的极大线性无关组就是这个向量组本身;

(2)极大线性无关组不一定唯一。

极大线性无关组

定义13:设有n维向量组A，若它的一个部分组A_1线性无关，且从A中任意添加一个向量，所得的部分向量组都线性相关，则称A_1是A的一个**极大线性无关组**。

注:(1)线性无关向量组的极大线性无关组就是这个向量组本身;

(2)极大线性无关组不一定唯一。

等价定义:向量组A的部分组A_1是A的极大线性无关组的充要条件有:

(1)A_1线性无关，且A中任意向量都是A_1的线性组合;

(2)A中任意向量可由A_1唯一地线性表示;

(3)A_1线性无关，且A_1与A等价。

极大线性无关组

定义13:设有n维向量组A，若它的一个部分组A_1线性无关，且从A中任意添加一个向量，所得的部分向量组都线性相关，则称A_1是A的一个**极大线性无关组**。

注:(1)线性无关向量组的极大线性无关组就是这个向量组本身;

(2)极大线性无关组不一定唯一。

等价定义:向量组A的部分组A_1是A的极大线性无关组的充要条件有:

(1)A_1线性无关，且A中任意向量都是A_1的线性组合；

(2)A中任意向量可由A_1唯一地线性表示；

(3)A_1线性无关，且A_1与A等价。

命题1：一向量组的任意两个极大线性无关组等价。

极大线性无关组

定义13:设有n维向量组A，若它的一个部分组A_1线性无关，且从A中任意添加一个向量，所得的部分向量组都线性相关，则称A_1是A的一个**极大线性无关组**。

注:(1)线性无关向量组的极大线性无关组就是这个向量组本身;

(2)极大线性无关组不一定唯一。

等价定义:向量组A的部分组A_1是A的极大线性无关组的充要条件有:

(1)A_1线性无关，且A中任意向量都是A_1的线性组合;

(2)A中任意向量可由A_1唯一地线性表示;

(3)A_1线性无关，且A_1与A等价。

命题1： 一向量组的任意两个极大线性无关组等价。

定理3： 一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量。

向量组的秩

定义14: 向量组$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的极大线性无关组所含向量的个数称为**向量组$A$的秩**,记为$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$或$\mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$或秩$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$,可简记为$r(A)$或$\mathrm{rank}(A)$或秩$(A)$。

向量组的秩

定义14:向量组$A: \alpha_1, \cdots, \alpha_s$的极大线性无关组所含向量的个数称为**向量组$A$的秩**,记为$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$或$\text{rank}(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$或**秩**$(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$,可简记为$r(A)$或$\text{rank}(A)$或**秩**$(A)$。

注：(1)对给定的向量组，其秩是唯一的;

(2)向量组的秩不超过向量组的向量个数;

(3)仅含零向量的向量组的秩约定为0。

向量组的秩

定义14: 向量组$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的极大线性无关组所含向量的个数称为**向量组$A$的秩**,记为$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$或$\mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$或秩$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$,可简记为$r(A)$或$\mathrm{rank}(A)$或秩$(A)$。

注: (1)对给定的向量组，其秩是唯一的;

(2)向量组的秩不超过向量组的向量个数;

(3)仅含零向量的向量组的秩约定为0。

定理: 向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的部分向量组$A_1:\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}(1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le m)$是$A$的极大线性无关组的充要条件是

$$r(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r})=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r$$

向量组的秩

定义14:向量组$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的极大线性无关组所含向量的个数称为**向量组$A$的秩**,记为$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$或$\mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$或**秩**$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$,可简记为$r(A)$或$\mathrm{rank}(A)$或**秩**$(A)$。

注: (1)对给定的向量组,其秩是唯一的;

(2)向量组的秩不超过向量组的向量个数;

(3)仅含零向量的向量组的秩约定为0。

定理:向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的部分向量组$A_1:\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}(1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq m)$是$A$的极大线性无关组的充要条件是

$$r(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r})=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r$$

推论6:向量组A线性无关的充要条件是A的秩与它所含向量的个数相同。

向量组的秩

定义14:向量组$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的极大线性无关组所含向量的个数称为**向量组$A$的秩**,记为$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$或$\mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$或**秩**$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$,可简记为$r(A)$或$\mathrm{rank}(A)$或**秩**$(A)$。

注：(1)对给定的向量组，其秩是唯一的;

(2)向量组的秩不超过向量组的向量个数;

(3)仅含零向量的向量组的秩约定为0。

定理:向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的部分向量组$A_1:\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}(1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le m)$是$A$的极大线性无关组的充要条件是

$$r(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r})=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r$$

推论6:向量组A线性无关的充要条件是A的秩与它所含向量的个数相同。

推论7:等价向量组必有相同的秩。

向量组的秩

定义14:向量组$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$的极大线性无关组所含向量的个数称为**向量组$A$的秩**,记为$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$或$\mathrm{rank}(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$或秩$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$,可简记为$r(A)$或$\mathrm{rank}(A)$或秩$(A)$。

注：(1)对给定的向量组，其秩是唯一的;

(2)向量组的秩不超过向量组的向量个数;

(3)仅含零向量的向量组的秩约定为0。

定理:向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的部分向量组$A_1:\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}(1\le i_1<i_2<\cdots<i_r\le m)$是$A$的极大线性无关组的充要条件是

$$r(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r})=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=r$$

推论6:向量组A线性无关的充要条件是A的秩与它所含向量的个数相同。

推论7:等价向量组必有相同的秩。

命题2:含有非零向量的向量组一定有极大线性无关组，且任一个线性无关的部分向量组都能扩充成一个极大线性无关组。 (P155,9)

向量组表示与等价的充要条件

定理:设有向量组A：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$和向量组$B$：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$，记$\mathbf{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$，$\mathbf{B} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s)$，

(1)B可由A线性表示的充要条件是r$(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ =r$(\mathbf{A})$。

(2)B与A等价的充要条件是r$(\mathbf{B})$=r$(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ =r$(\mathbf{A})$，特别地，等价的线性无关向量组含有相同个数的向量。

(3)若B可由A线性表示，则r$(\mathbf{B}) \leq$r$(\mathbf{A})$。

例1 判断对错：

(1)若$a_1,\cdots,a_r$线性无关,则其中每个向量都不是其余向量的线性组合; 若$a_1,\cdots,a_r$线性相关,则其中每个向量都是其余向量的线性组合。

例1 判断对错：

(1)若$a_1, \cdots, a_r$线性无关,则其中每个向量都不是其余向量的线性组合; 若$a_1, \cdots, a_r$线性相关,则其中每个向量都是其余向量的线性组合。

(2)若向量组$A: \alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性无关,则$\alpha_{r+1}$不能由$A$线性表出的充要条件是$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}$线性无关。

例1 判断对错：

(1)若$a_1,\cdots,a_r$线性无关,则其中每个向量都不是其余向量的线性组合; 若$a_1,\cdots,a_r$线性相关,则其中每个向量都是其余向量的线性组合。

(2)若向量组$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关,则$\alpha_{r+1}$不能由$A$线性表出的充要条件是$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$线性无关。

(3)若$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_r$中任一$\alpha_i$不能由$B:\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表出, B中任一β_j不能由A线性表出,则向量组$A\cup B$线性无关。

例1 判断对错：

(1)若$a_1,\cdots,a_r$线性无关,则其中每个向量都不是其余向量的线性组合; 若$a_1,\cdots,a_r$线性相关,则其中每个向量都是其余向量的线性组合。

(2)若向量组$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关,则$\alpha_{r+1}$不能由$A$线性表出的充要条件是$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$线性无关。

(3)若$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_r$中任一$\alpha_i$不能由$B:\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表出,$B$中任一$\beta_j$不能由$A$线性表出,则向量组$A\cup B$线性无关。

(4)若$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性相关,则存在不全为0的$k_1,\cdots,k_r$,使得$k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r=0$,对于某个$k_i\neq 0,\alpha_i$可由其余向量线性表出,而对于那些$k_j=0$,则$\alpha_j$不能由其余向量线性表出。

例2 (1)判断下列向量组是否线性相关?

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, -1), \alpha_2 = (2, 3, 01),$$

$$\alpha_3 = (4, 9, 0, 5), \alpha_4 = (3, 2, 1, 1)$$

(2)判断向量$\beta = (4, 4, 1, 2)$能否由上述向量组线性表示?若能表示,表示法是否唯一?

例2 (1)判断下列向量组是否线性相关？

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, -1), \alpha_2 = (2, 3, 01),$$

$$\alpha_3 = (4, 9, 0, 5), \alpha_4 = (3, 2, 1, 1)$$

(2)判断向量$\beta = (4, 4, 1, 2)$能否由上述向量组线性表示？若能表示，表示法是否唯一？

注： 向量组的线性相关性可归结为齐次线性方程组求解，而向量的线性表示则归结为一般线性方程组的求解。

例2 (1)判断下列向量组是否线性相关？

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, -1), \alpha_2 = (2, 3, 01),$$

$$\alpha_3 = (4, 9, 0, 5), \alpha_4 = (3, 2, 1, 1)$$

(2)判断向量$\beta = (4, 4, 1, 2)$能否由上述向量组线性表示？若能表示，表示法是否唯一？

注：向量组的线性相关性可归结为齐次线性方程组求解，而向量的线性表示则归结为一般线性方程组的求解。

例3 求下列向量组的一个极大线性无关组,并将其它向量由此极大线性无关组表示：

$$\alpha_1 = (1, 2, -1, 3), \alpha_2 = (-2, 1, 0, -1), \alpha_3 = (0, 5, -3, 5)$$

$$\alpha_4 = (-1, 3, -1, 2), \alpha_5 = (-4, -3, 2, -7)$$

例2 (1)判断下列向量组是否线性相关?

$$\alpha_1=(1,0,0,-1),\alpha_2=(2,3,01),$$

$$\alpha_3=(4,9,0,5),\alpha_4=(3,2,1,1)$$

(2)判断向量$\beta=(4,4,1,2)$能否由上述向量组线性表示？若能表示，表示法是否唯一?

注： 向量组的线性相关性可归结为齐次线性方程组求解，而向量的线性表示则归结为一般线性方程组的求解。

例3 求下列向量组的一个极大线性无关组,并将其它向量由此极大线性无关组表示:

$$\alpha_1=(1,2,-1,3),\alpha_2=(-2,1,0,-1),\alpha_3=(0,5,-3,5)$$

$$\alpha_4=(-1,3,-1,2),\alpha_5=(-4,-3,2,-7)$$

注： 确定极大线性无关组，可将各向量作为矩阵的各列构造一矩阵，借助于矩阵的初等行变换，将矩阵化为阶梯形矩阵后，由非零行的行数确定向量组的秩，并可通过观察选取极大线性无关组。

例4 证明下列两个向量组等价：

$$A:\alpha_1=(1,0,2,1),\alpha_2=(1,2,0,1),$$

$$\alpha_3=(2,1,3,0),\alpha_4=(2,5,-1,4);$$

$$B:\beta_1=(1,-1,3,1),\beta_2=(0,1,-1,3),\beta_3=(0,-1,1,4)$$

例4 证明下列两个向量组等价：

$$A: \alpha_1 = (1,0,2,1), \alpha_2 = (1,2,0,1),$$

$$\alpha_3 = (2,1,3,0), \alpha_4 = (2,5,-1,4);$$

$$B: \beta_1 = (1,-1,3,1), \beta_2 = (0,1,-1,3), \beta_3 = (0,-1,1,4)$$

注： 将各向量作为矩阵的各列构造一矩阵,利用矩阵的行初等变换求两个向量组及合并向量组的秩。

例5 向量β可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$唯一地线性表示的充要条件是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性无关，而$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta$线性相关。

$(P155, 3; P159, 1)$

例4 证明下列两个向量组等价：

$$A:\alpha_1=(1,0,2,1),\alpha_2=(1,2,0,1),$$

$$\alpha_3=(2,1,3,0),\alpha_4=(2,5,-1,4);$$

$$B:\beta_1=(1,-1,3,1),\beta_2=(0,1,-1,3),\beta_3=(0,-1,1,4)$$

注： 将各向量作为矩阵的各列构造一矩阵,利用矩阵的行初等变换求两个向量组及合并向量组的秩。

例5 向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$唯一地线性表示的充要条件是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关。

$(P155,3;P159,1)$

例6 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关,讨论$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 的线性相关性。

例4 证明下列两个向量组等价：

$$A:\alpha_1=(1,0,2,1),\alpha_2=(1,2,0,1),$$

$$\alpha_3=(2,1,3,0),\alpha_4=(2,5,-1,4);$$

$$B:\beta_1=(1,-1,3,1),\beta_2=(0,1,-1,3),\beta_3=(0,-1,1,4)$$

注： 将各向量作为矩阵的各列构造一矩阵,利用矩阵的行初等变换求两个向量组及合并向量组的秩。

例5 向量β可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$唯一地线性表示的充要条件是$\alpha_1$, $\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关。

$(P155,3;P159,1)$

例6 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性无关,讨论$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\cdots,\alpha_n+\alpha_1$ 的线性相关性。

例7 向量组$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关当且仅当存在$\beta$由$A$线性表出，且不能由其中少于$r$个向量线性表出。

例5 证明:$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$(其中$\alpha_1 \neq 0$)线性相关的充要条件是至少有一个$\alpha_i$

$(1 < i \leq s)$可被$\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}$线性表出。 $(P159, 3)$

例5 证明:$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$(其中$\alpha_1\neq 0$)线性相关的充要条件是至少有一个α_i
$(1<i\leq s)$可被$\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1}$线性表出。 $(P159,3)$

例5 证明:$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$(其中$\alpha_1 \neq 0$)线性相关的充要条件是至少有一个$\alpha_i$
$(1 < i \leq s)$可被$\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}$线性表出。 $(P159, 3)$

例5 证明:$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$(其中$\alpha_1 \neq 0$)线性相关的充要条件是至少有一个$\alpha_i$
$(1 < i \leq s)$可被$\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}$线性表出。 $(P159, 3)$

例5 证明:$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$(其中$\alpha_1 \neq 0$)线性相关的充要条件是至少有一个$\alpha_i$
$(1 < i \leq s)$可被$\alpha_1, \cdots, \alpha_{i-1}$线性表出。 $(P159, 3)$

例6 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m (m \geq 2)$中的$\alpha_m \neq 0$,证明:对任意的数$k_1,$
$\cdots, k_{m-1}$,向量组

$$\beta_1 = \alpha_1 + k_1\alpha_m, \beta_2 = \alpha_2 + k_2\alpha_m, \cdots, \beta_{m-1} = \alpha_{m-1} + k_{m-1}\alpha_m$$

线性无关当且仅当$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$线性无关。

例7 证明：向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$线性无关的充要条件是向量组$\alpha_1$, $\alpha_1+\alpha_2, \cdots, \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$线性无关。

例7 证明：向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$线性无关的充要条件是向量组$\alpha_1$, $\alpha_1+\alpha_2, \cdots, \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$线性无关。

例8(替换定理) 设向量组$A: \alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性无关,且可由向量组$B: \beta_1, \cdots, \beta_s$线性表示，则$r \leq s$,证明：$B$中存在$r$个向量用$A$中的某$r$个向量代替后得到的向量组与$B$等价。

例7 证明：向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关的充要条件是向量组α_1, $\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$线性无关。

例8(替换定理) 设向量组$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关,且可由向量组$B:\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表示，则$r\leq s$,证明：$B$中存在$r$个向量用$A$中的某$r$个向量代替后得到的向量组与$B$等价。

例9 已知两向量组有相同的秩，且其中之一可被另一个线性表出，证明：这两个向量组等价。 $(P159,4)$

例7 证明：向量组$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$线性无关的充要条件是向量组$\alpha_1$, $\alpha_1+\alpha_2, \cdots, \alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$线性无关。

例8(替换定理) 设向量组$A: \alpha_1, \cdots, \alpha_r$线性无关,且可由向量组$B: \beta_1, \cdots, \beta_s$线性表示，则$r \le s$,证明：$B$中存在$r$个向量用$A$中的某$r$个向量代替后得到的向量组与$B$等价。

例9 已知两向量组有相同的秩，且其中之一可被另一个线性表出，证明：这两个向量组等价。 $(P159, 4)$

例10 设$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = r$,在其中任取$m$个向量$\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_m}$,证明：

$$r(\alpha_{i_1}, \cdots, \alpha_{i_m}) \ge r+m-s \qquad (P159, 5)$$

例7 证明：向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关的充要条件是向量组α_1, $\alpha_1+\alpha_2,\cdots,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_m$线性无关。

例8(替换定理) 设向量组$A:\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关,且可由向量组$B:\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表示，则$r\le s$,证明：$B$中存在$r$个向量用$A$中的某$r$个向量代替后得到的向量组与$B$等价。

例9 已知两向量组有相同的秩，且其中之一可被另一个线性表出，证明：这两个向量组等价。 $(P159,4)$

例10 设$r(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=r$,在其中任取$m$个向量$\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m}$,证明：

$$r(\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_m})\ge r+m-s \qquad (P159,5)$$

例11 设向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_s;\beta_1,\cdots,\beta_t;\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$ 的秩分别为r_1,r_2,r_3,证明: $\max(r_1,r_2)\le r_3\le r_1+r_2$。 $(P159,6)$