1.5 行列式按一行展开及克莱姆法则

问题的引出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

问题的引出

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
=&a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
=&a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{21}a_{31})
\end{aligned}
$$

问题的引出

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
=&a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
=&a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{21}a_{31}) \\
=&a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

问题的引出

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{21}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

三阶行列式由三个二阶行列式表示了出来，并且其系数全部来自于原行列式的第一行。

问题的引出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{21}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

三阶行列式由三个二阶行列式表示了出来，并且其系数全部来自于原行列式的第一行。

也可以选取其他的公因子，有类似的表达式。

问题的引出

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{21}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

三阶行列式由三个二阶行列式表示了出来，并且其系数全部来自于原行列式的第一行。

也可以选取其他的公因子，有类似的表达式。

问题： 这是一个偶然对三阶行列式成立的现象，还是在任意n阶行列式中都存在的一般现象？

问题的引出

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{21}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

三阶行列式由三个二阶行列式表示了出来，并且其系数全部来自于原行列式的第一行。

也可以选取其他的公因子，有类似的表达式。

问题： 这是一个偶然对三阶行列式成立的现象，还是在任意n阶行列式中都存在的一般现象？

如果真的对一般的n阶行列式都成立，那么将会给我们提供另外一种化简行列式运算的思路，就是将高阶的行列式表达为若干个低阶行列式。

行列式按一行展开

余子式和代数余子式的定义

为了系统研究这一问题，我们先引入一些概念。

余子式和代数余子式的定义

为了系统研究这一问题，我们先引入一些概念。

定义： 在n阶行列式D中,考虑元素a_{ij},

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

去掉元素a_{ij}所在的第i行、第j列所剩下的$n-1$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素a_{ij}的余子式, 通常记作M_{ij}.

去掉元素a_{ij}所在的第i行、第j列所剩下的$n-1$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素a_{ij}的余子式, 通常记作M_{ij}.

余子式M_{ij}与符号项$(-1)^{i+j}$的乘积$(-1)^{i+j}M_{ij}$, 叫做元素a_{ij}的代数余子式, 通常记作A_{ij}。

去掉元素a_{ij}所在的第i行、第j列所剩下的$n-1$阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为元素a_{ij}的余子式，通常记作M_{ij}.

余子式M_{ij}与符号项$(-1)^{i+j}$的乘积$(-1)^{i+j}M_{ij}$，叫做元素a_{ij}的代数余子式，通常记作A_{ij}。

特别地，规定$n=1$时，$M_{11}=A_{11}=1$.

利用代数余子式的记法，我们有：

利用代数余子式的记法，我们有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

利用代数余子式的记法，我们有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

利用代数余子式的记法，我们有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

利用代数余子式的记法，我们有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

又如：

$$A_{21} =$$

$$A_{22} =$$

$$A_{23} =$$

利用代数余子式的记法，我们有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

又如：

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

利用代数余子式的记法，我们有：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

又如：

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

不难验证

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \quad i = 1, 2, 3$$

行列式按一行展开

定理： n阶行列式$D = |a_{ij}|$等于它的任意一行的所有元素与各自的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

行列式按一行展开

定理： n阶行列式$D = |a_{ij}|$等于它的任意一行的所有元素与各自的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

证明：

行列式按一行展开

定理：n阶行列式$D=|a_{ij}|$等于它的任意一行的所有元素与各自的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

证明：(1)考虑最简单的情形，设首行只有第一个元素不为零，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式按一行展开

定理：n阶行列式$D=|a_{ij}|$等于它的任意一行的所有元素与各自的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\qquad(i=1,2,\cdots,n).$$

证明：(1)考虑最简单的情形，设首行只有第一个元素不为零，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由于$a_{1j}=0(j=2,3,\cdots,n)$，结合行列式的定义知

行列式按一行展开

定理： n阶行列式$D=|a_{ij}|$等于它的任意一行的所有元素与各自的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (i=1,2,\cdots,n).$$

证明： (1)考虑最简单的情形，设首行只有第一个元素不为零，

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

由于$a_{1j}=0(j=2,3,\cdots,n)$，结合行列式的定义知

$$D=\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2j_3\cdots j_n)}a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$=a_{11}\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2j_3\cdots j_n)}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

令$b_{ij} = a_{i+1,j+1}$,有

$$D = a_{11} \sum_{j_2 j_3 \cdots j_n} (-1)^{\tau(1 j_2 j_3 \cdots j_n)} b_{1,j_2-1} \cdots b_{n-1,j_n-1}.$$

令$b_{ij} = a_{i+1,j+1}$,有

$$D = a_{11} \sum_{j_2 j_3 \cdots j_n} (-1)^{\tau(1 j_2 j_3 \cdots j_n)} b_{1,j_2-1} \cdots b_{n-1,j_n-1}.$$

注意到:

$$\tau(1 j_2 \cdots j_n) = \tau(j_2 - 1, j_3 - 1 \cdots j_n - 1)$$

令$b_{ij} = a_{i+1,j+1}$,有

$$D = a_{11} \sum_{j_2 j_3 \cdots j_n} (-1)^{\tau(1 j_2 j_3 \cdots j_n)} b_{1,j_2-1} \cdots b_{n-1,j_n-1}.$$

注意到:

$$\tau(1 j_2 \cdots j_n) = \tau(j_2 - 1, j_3 - 1 \cdots j_n - 1)$$

$$D = a_{11} \sum_{j_2-1, j_3-1 \cdots j_n-1} (-1)^{\tau(j_2-1, j_3-1 \cdots j_n-1)} b_{1,j_2-1} \cdots b_{n-1,j_n-1}$$

令$b_{ij}=a_{i+1,j+1}$,有

$$D=a_{11}\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2j_3\cdots j_n)}b_{1,j_2-1}\cdots b_{n-1,j_n-1}.$$

注意到:

$$\tau(1j_2\cdots j_n)=\tau(j_2-1,j_3-1\cdots j_n-1)$$

$$\begin{aligned}D=&a_{11}\sum_{j_2-1,j_3-1\cdots j_n-1}(-1)^{\tau(j_2-1,j_3-1\cdots j_n-1)}b_{1,j_2-1}\cdots b_{n-1,j_n-1}\\=&\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n-1}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

令$b_{ij}=a_{i+1,j+1}$,有

$$D=a_{11}\sum_{j_2j_3\cdots j_n}(-1)^{\tau(1j_2j_3\cdots j_n)}b_{1,j_2-1}\cdots b_{n-1,j_n-1}.$$

注意到:

$$\tau(1j_2\cdots j_n)=\tau(j_2-1,j_3-1\cdots j_n-1)$$

$$\begin{aligned}D=&a_{11}\sum_{j_2-1,j_3-1\cdots j_n-1}(-1)^{\tau(j_2-1,j_3-1\cdots j_n-1)}b_{1,j_2-1}\cdots b_{n-1,j_n-1}\\=&\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1,n-1}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2,n-1}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n-1,1}&b_{n-1,2}&\cdots&b_{n-1,n-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}&\cdots&a_{2,n}\\a_{32}&a_{33}&\cdots&a_{3,n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n2}&a_{n3}&\cdots&a_{n,n}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

令$b_{ij} = a_{i+1,j+1}$,有

$$D = a_{11} \sum_{j_2 j_3 \cdots j_n} (-1)^{\tau(1 j_2 j_3 \cdots j_n)} b_{1,j_2-1} \cdots b_{n-1,j_n-1}.$$

注意到:

$$\tau(1 j_2 \cdots j_n) = \tau(j_2-1, j_3-1 \cdots j_n-1)$$

$$\begin{aligned} D =& a_{11} \sum_{j_2-1, j_3-1 \cdots j_n-1} (-1)^{\tau(j_2-1, j_3-1 \cdots j_n-1)} b_{1,j_2-1} \cdots b_{n-1,j_n-1} \\ =& \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1,n-1} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

故有:$D = a_{11} A_{11}$。

(2)考虑稍微一般的情形，

(2)考虑稍微一般的情形，设第i行只有元素a_{ij}不为零，
即$0 = a_{it} \neq a_{ij} (t = 1, 2 \cdots, i-1, i+1, \cdots, n)$.

(2)考虑稍微一般的情形，设第i行只有元素a_{ij}不为零，
即$0 = a_{it} \neq a_{ij}(t = 1, 2 \cdots, i-1, i+1, \cdots, n)$.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2)考虑稍微一般的情形，设第i行只有元素a_{ij}不为零，
即$0 = a_{it} \neq a_{ij}(t = 1, 2 \cdots, i-1, i+1, \cdots, n)$.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

要证$D=a_{ij}A_{ij}$，

(2)考虑稍微一般的情形，设第i行只有元素a_{ij}不为零,
即$0 = a_{it} \neq a_{ij}(t = 1, 2 \cdots, i-1, i+1, \cdots, n)$.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

要证D=$a_{ij}A_{ij}$，无需重新展开一次，想办法利用之前的结果。

(2)考虑稍微一般的情形，设第i行只有元素a_{ij}不为零,
即$0 = a_{it} \neq a_{ij}(t = 1, 2\cdots, i-1, i+1, \cdots, n)$.

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

要证$D=a_{ij}A_{ij}$，无需重新展开一次，想办法利用之前的结果。

将D的第i行依次与它上面的各行作对换, 换至第一行; 然后再将第j列依次与它前面的各列作对换, 直至a_{ij}被换到左上角的位置.

$$D = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{Case(1)} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{nj} & a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{Case(1)}{=\!=\!=} (-1)^{i+j} a_{ij} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = a_{ij} A_{ij}.$$

(3) 对于任意行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$按第$i$行$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$展开,

(3) 对于任意行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$按第$i$行$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$展开，可将这行写为

$$(a_{i1} + 0 + \cdots + 0, 0 + a_{i2} + 0 + \cdots + 0, \cdots, 0 + \cdots + 0 + a_{in})$$

(3) 对于任意行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$按第$i$行$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$展开，可将这行写为

$$(a_{i1} + 0 + \cdots + 0, 0 + a_{i2} + 0 + \cdots + 0, \cdots, 0 + \cdots + 0 + a_{in})$$

借助于行列式的线性性质有

(3) 对于任意行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$按第$i$行$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$展开，可将这行写为

$$(a_{i1} + 0 + \cdots + 0, 0 + a_{i2} + 0 + \cdots + 0, \cdots, 0 + \cdots + 0 + a_{in})$$

借助于行列式的线性性质有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(3) 对于任意行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$按第$i$行$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$展开，可将这行写为

$$(a_{i1} + 0 + \cdots + 0, 0 + a_{i2} + 0 + \cdots + 0, \cdots, 0 + \cdots + 0 + a_{in})$$

借助于行列式的线性性质有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(3) 对于任意行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$按第$i$行$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$展开，可将这行写为

$$(a_{i1} + 0 + \cdots + 0, 0 + a_{i2} + 0 + \cdots + 0, \cdots, 0 + \cdots + 0 + a_{in})$$

借助于行列式的线性性质有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+0+\cdots+0 & 0+a_{i2}+0+\cdots+0 & \cdots & 0+\cdots+0+a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

根据行列式行和列的对等性，行列式也可以按列展开，即：

根据行列式行和列的对等性，行列式也可以按列展开，即：
n阶行列式$D = |a_{ij}|$等于它的任意一列的所有元素与各自的代数余子式的乘积之和, 即

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

行列式按行列展开在计算中的应用

行列式按行列展开在计算中的应用

例： 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

行列式按行列展开在计算中的应用

例： 计算n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解： 将行列式按第一行展开，得

行列式按行列展开在计算中的应用

例： 计算n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解： 将行列式按第一行展开，得

$$\begin{aligned} D =&(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &+(-1)^{1+n}a_{1n}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

两个余子式均为三角阵

两个余子式均为三角阵

$$
\begin{aligned}
= \quad & a_{11}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}a_{2n}a_{3,n-1}\cdots a_{n2} \\
& +(-1)^{1+n}a_{1n}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n1}
\end{aligned}
$$

两个余子式均为三角阵

$$
\begin{aligned}
&= a_{11}(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} a_{2n} a_{3,n-1} \cdots a_{n2} \\
&\quad + (-1)^{1+n} a_{1n} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \cdots a_{n1} \\
&= (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} a_{11} a_{2n} a_{3,n-1} \cdots a_{n2} \\
&\quad + (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n} a_{2,n-1} a_{3,n-2} \cdots a_{n1}.
\end{aligned}
$$

范德蒙德行列式

例： 证明n阶$(n \geq 2)$范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

范德蒙德行列式

例： 证明n阶$(n \geq 2)$范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

证明：

范德蒙德行列式

例： 证明n阶$(n \geq 2)$范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

证明： 对n用数学归纳法.

范德蒙德行列式

例： 证明n阶$(n \geq 2)$范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

证明： 对n用数学归纳法.

当$n = 2$时，有$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$，结论成立.

范德蒙德行列式

例： 证明n阶$(n\geq 2)$范德蒙(Vandermonde)行列式

$$V_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leq j<i\leq n}(a_i-a_j).$$

证明： 对n用数学归纳法.

当$n=2$时，有$V_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}=a_2-a_1$，结论成立. 假设对于$n-1$阶范德蒙行列式$V_{n-1}$成立，下证$n$阶行列式的情形成立.

直接按行展开行不通，需要先用行列式性质化简。

直接按行展开行不通，需要先用行列式性质化简。注意观察，每两行都差的不多。

直接按行展开行不通，需要先用行列式性质化简。注意观察，每两行都差的不多。回忆：

例： 计算4阶行列式，

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

直接按行展开行不通，需要先用行列式性质化简。注意观察，每两行都差的不多。回忆：

例： 计算4阶行列式，

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

类比，在V_n中，从第n行开始逐行减去上一行的a_n倍，得

$$V_n \xlongequal[i=n,\cdots,2]{r_i-a_nr_{i-1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n & 0 \\ a_1(a_1-a_n) & a_2(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}(a_{n-1}-a_n) & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1}(a_1-a_n) & a_2^{n-1}(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1}-a_n) & 0 \\ a_1^{n-2}(a_1-a_n) & a_2^{n-2}(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_n) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第}n\text{列展开}}(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n \\ a_1(a_1-a_n) & a_2(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}(a_{n-1}-a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}(a_1-a_n) & a_2^{n-1}(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1}-a_n) \\ a_1^{n-2}(a_1-a_n) & a_2^{n-2}(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_n) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第}n\text{列展开}}(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n \\ a_1(a_1-a_n) & a_2(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}(a_{n-1}-a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}(a_1-a_n) & a_2^{n-1}(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1}-a_n) \\ a_1^{n-2}(a_1-a_n) & a_2^{n-2}(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_n) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{c_i\div(a_i-a_n)}(-1)^{n+1}\prod_{1\le i\le n-1}(a_i-a_n)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第}n\text{列展开}} (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n \\ a_1(a_1-a_n) & a_2(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}(a_{n-1}-a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}(a_1-a_n) & a_2^{n-1}(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1}-a_n) \\ a_1^{n-2}(a_1-a_n) & a_2^{n-2}(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_n) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{c_i \div (a_i-a_n)} (-1)^{n+1} \prod_{1\le i\le n-1} (a_i - a_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1\le i\le n-1} (a_n - a_i) V_{n-1}$$

$$\xlongequal{\text{按第}n\text{列展开}} (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n \\ a_1(a_1-a_n) & a_2(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}(a_{n-1}-a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}(a_1-a_n) & a_2^{n-1}(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1}-a_n) \\ a_1^{n-2}(a_1-a_n) & a_2^{n-2}(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_n) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{c_i \div (a_i-a_n)} (-1)^{n+1} \prod_{1\le i\le n-1} (a_i - a_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{1\le i\le n-1} (a_n - a_i) V_{n-1} \\ &= \prod_{1\le k\le n-1} (a_n - a_k) \prod_{1\le j<i\le n-1} (a_i - a_j) \\ &= \prod_{1\le j<i\le n} (a_i - a_j). \end{aligned}$$

$$\xlongequal{\text{按第}n\text{列展开}} (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} a_1-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n \\ a_1(a_1-a_n) & a_2(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}(a_{n-1}-a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1}(a_1-a_n) & a_2^{n-1}(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-3}(a_{n-1}-a_n) \\ a_1^{n-2}(a_1-a_n) & a_2^{n-2}(a_2-a_n) & \cdots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1}-a_n) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=1,2,\cdots,n-1]{c_i\div(a_i-a_n)} (-1)^{n+1} \prod_{1\leq i\leq n-1} (a_i-a_n) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \prod_{1\leq i\leq n-1} (a_n-a_i) V_{n-1} \\ &= \prod_{1\leq k\leq n-1} (a_n-a_k) \prod_{1\leq j<i\leq n-1} (a_i-a_j) \\ &= \prod_{1\leq j<i\leq n} (a_i-a_j). \end{aligned}$$

范德蒙德行列式有一些应用，我们会在以后的学习中遇到。

行列式计算的主要方法

行列式计算的主要方法

1. 当行列式中含有较多零元素时，可按定义计算；
2. 利用行列式性质化成三角阵计算；
3. 利用按行或列展开化为低阶行列式。

行列式计算的主要方法

1. 当行列式中含有较多零元素时，可按定义计算；
2. 利用行列式性质化成三角阵计算；
3. 利用按行或列展开化为低阶行列式。

注意：

- 这些方法往往需要结合起来使用，如计算范德蒙德行列式；
- 我们所讲的例题可以覆盖行列式计算的基本类型，但是千变万化，需要多做练习，灵活运用；

一团疑云

我们最开始是从方程组的求解中引出行列式的，但其最终的一般化的定义式确实通过排列的逆序数来定义的。

一团疑云

我们最开始是从方程组的求解中引出行列式的，但其最终的一般化的定义式确实通过排列的逆序数来定义的。

也就是说，二阶和三阶方程组的解都可以用行列式的比值来表示，

一团疑云

我们最开始是从方程组的求解中引出行列式的，但其最终的一般化的定义式确实通过排列的逆序数来定义的。
也就是说，二阶和三阶方程组的解都可以用行列式的比值来表示，例如三阶方程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

若

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

其解为:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

其中D_1, D_2, D_3是将D的第一列、第二列、第三列分别换成常数项所得到的三阶行列式, 即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

其中D_1, D_2, D_3是将D的第一列、第二列、第三列分别换成常数项所得到的三阶行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

一般的n阶方程组，解是否也可以用n阶行列式的比值来表示？

其中D_1, D_2, D_3是将D的第一列、第二列、第三列分别换成常数项所得到的三阶行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

一般的n阶方程组，解是否也可以用n阶行列式的比值来表示？

我们利用行列式按行列展开的性质，对这一问题加以讨论。

克莱默法则

准备工作

命题： 在n阶行列式$D = |a_{ij}|$中, 某一行元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积的和等于零，即对$1 \le i, j \le n$, 有下面的等式成立

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \ (i \neq j).$$

准备工作

命题： 在n阶行列式$D = |a_{ij}|$中，某一行元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积的和等于零，即对$1 \le i, j \le n$，有下面的等式成立

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \ (i \neq j).$$

证明：

准备工作

命题： 在n阶行列式$D = |a_{ij}|$中，某一行元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积的和等于零，即对$1 \le i, j \le n$，有下面的等式成立

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \ (i \neq j).$$

证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

准备工作

命题： 在n阶行列式$D=|a_{ij}|$中，某一行元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积的和等于零，即对$1\le i,j\le n$，有下面的等式成立

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j).$$

证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将第j行替换为第i行:

准备工作

命题： 在n阶行列式$D = |a_{ij}|$中，某一行元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积的和等于零，即对$1 \leq i, j \leq n$，有下面的等式成立

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \ (i \neq j).$$

证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{将第}j\text{行替换为第}i\text{行:} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

根据行列式的基本性质及按行展开定理，有

根据行列式的基本性质及按行展开定理，有

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

根据行列式的基本性质及按行展开定理，有

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$

综合定理和命题：

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} D, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

根据行列式的基本性质及按行展开定理，有

$$0=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

综合定理和命题：

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$$

对列也成立：

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\begin{cases} D, & i=j, \\ 0, & i\neq j. \end{cases}$$

克拉默法则

定理： 若方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么该方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中D_i是把D中第i列依次换成常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$后的行列式.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

其中D_i是把D中第i列依次换成常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$后的行列式.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

先证解的**存在性**:

其中D_i是把D中第i列依次换成常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$后的行列式.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

先证解的**存在性**:

只要把$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$代入方程验证两端是否相等即可。

其中D_i是把D中第i列依次换成常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$后的行列式.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

先证解的存在性:
只要把$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$代入方程验证两端是否相等即可。比如第一个方程:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

其中D_i是把D中第i列依次换成常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$后的行列式.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

先证解的**存在性**:

只要把$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$代入方程验证两端是否相等即可。比如第一个方程:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

左端为:

$$a_{11}\frac{D_1}{D} + a_{12}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{1n}\frac{D_n}{D} = \frac{1}{D}(a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + \cdots + a_{1n}D_n)$$

其中D_i是把D中第i列依次换成常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$后的行列式.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

先证解的**存在性**:

只要把$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$代入方程验证两端是否相等即可。比如第一个方程:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

左端为:

$$a_{11}\frac{D_1}{D} + a_{12}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{1n}\frac{D_n}{D} = \frac{1}{D}(a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + \cdots + a_{1n}D_n)$$

注意到方程右端为b_1，要证两端相等，须找出左端含b_1 的项。

其中D_i是把D中第i列依次换成常数项$b_1, b_2, \cdots, b_n$后的行列式.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdots D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

先证解的**存在性**:
只要把$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D}$代入方程验证两端是否相等即可。比如第一个方程:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

左端为:

$$a_{11}\frac{D_1}{D} + a_{12}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{1n}\frac{D_n}{D} = \frac{1}{D}(a_{11}D_1 + a_{12}D_2 + \cdots + a_{1n}D_n)$$

注意到方程右端为b_1，要证两端相等，须找出左端含b_1 的项。将D_1,D_2,$\cdots D_n$ 分别按第1列，第2列，$\cdots$，第n列展开，有

$$\frac{1}{D}\left(a_{11}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k1} + a_{12}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k2} + \cdots + a_{1n}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kn}\right)$$

$$\frac{1}{D}\left(a_{11}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k1} + a_{12}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k2} + \cdots + a_{1n}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kn}\right)$$

关于b_k合并同类项，

$$\frac{1}{D}(b_1\sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} + b_2\sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{2k} + \cdots + b_n\sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{nk})$$

$$\frac{1}{D}\left(a_{11}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k1} + a_{12}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{k2} + \cdots + a_{1n}\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kn}\right)$$

关于b_k合并同类项，

$$\frac{1}{D}(b_1\sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} + b_2\sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{2k} + \cdots + b_n\sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{nk})$$

由行列式按行展开的性质得：

$$\frac{1}{D}b_1\sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} = b_1.$$

$$\frac{1}{D}\left(a_{11}\sum_{k=1}^{n}b_kA_{k1}+a_{12}\sum_{k=1}^{n}b_kA_{k2}+\cdots+a_{1n}\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kn}\right)$$

关于b_k合并同类项,

$$\frac{1}{D}(b_1\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}+b_2\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{2k}+\cdots+b_n\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{nk})$$

由行列式按行展开的性质得:

$$\frac{1}{D}b_1\sum_{k=1}^{n}a_{1k}A_{1k}=b_1.$$

其他方程类似可证,故存在性成立。

再证解的**唯一性**：

再证解的**唯一性**：

假定原方程组有两组解，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$

再证解的**唯一性**：

假定原方程组有两组解，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$

令$c_i = x_i - y_i$,则$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$是如下方程组的解：

再证解的**唯一性**：

假定原方程组有两组解，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$

令$c_i = x_i - y_i$,则$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$是如下方程组的解：

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = 0, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = 0. \end{cases}$$

再证解的**唯一性**：

假定原方程组有两组解，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$

令$c_i = x_i - y_i$,则$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$是如下方程组的解：

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = 0, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = 0. \end{cases}$$

用“消元法”求解c_1:

再证解的**唯一性**：

假定原方程组有两组解，$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$

令$c_i = x_i - y_i$,则$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$是如下方程组的解：

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = 0, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = 0. \end{cases}$$

用“消元法”求解c_1:

用D的第1列的代数余子式$A_{11}, A_{21}, \cdots, A_{n1}$依次去乘上面方程组中的$n$个等式,

再证解的**唯一性**:
假定原方程组有两组解, $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$
令$c_i = x_i - y_i$,则$(c_1, c_2, \cdots, c_n)$是如下方程组的解:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n = 0, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n = 0. \end{cases}$$

用"消元法"求解c_1:
用D的第1列的代数余子式$A_{11}, A_{21}, \cdots, A_{n1}$依次去乘上面方程组中的$n$个等式,有

$$\begin{cases} a_{11}A_{11}c_1 + a_{12}A_{11}c_2 + \cdots + a_{1n}A_{11}c_n = 0, \\ a_{21}A_{21}c_1 + a_{22}A_{21}c_2 + \cdots + a_{2n}A_{21}c_n = 0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}A_{n1}c_1 + a_{n2}A_{n1}c_2 + \cdots + a_{nn}A_{n1}c_n = 0. \end{cases}$$

这n个等式两边分别相加, 有

$$c_1\sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1} + c_2\sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{k1} + \cdots + c_n\sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{k1} = 0.$$

这n个等式两边分别相加，有

$$c_1 \sum_{k=1}^{n} a_{k1}A_{k1} + c_2 \sum_{k=1}^{n} a_{k2}A_{k1} + \cdots + c_n \sum_{k=1}^{n} a_{kn}A_{k1} = 0.$$

即：

$$c_1 D = 0$$

这n个等式两边分别相加, 有

$$c_1\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{k1}+c_2\sum_{k=1}^{n}a_{k2}A_{k1}+\cdots+c_n\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{k1}=0.$$

即：

$$c_1 D=0$$

由于$D\neq 0$,有$c_1=0$,

这n个等式两边分别相加, 有

$$c_1\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{k1}+c_2\sum_{k=1}^{n}a_{k2}A_{k1}+\cdots+c_n\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{k1}=0.$$

即：

$$c_1D=0$$

由于$D\neq 0$,有$c_1=0$，类似可证$c_i=0,\quad i=1,\cdots,n$。故原方程解唯一。

这n个等式两边分别相加，有

$$c_1\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{k1}+c_2\sum_{k=1}^{n}a_{k2}A_{k1}+\cdots+c_n\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{k1}=0.$$

即：

$$c_1D=0$$

由于$D\neq 0$,有$c_1=0$，类似可证$c_i=0,\quad i=1,\cdots,n$。故原方程解唯一。

小结：

- $D\neq 0$,即保证了存在性，也保证了唯一性；
- 提供了我们求解任意n阶方程组的方法，但是计算量非常大，更多的是理论上应用的价值。

例： 求一个三次多项式$f(x)$, 使得$f(1)=6, f(2)=8$, $f(-1)=20$, $f(-3)=10$.

例： 求一个三次多项式$f(x)$, 使得$f(1)$=6, $f(2)$=8, $f(-1)$=20, $f(-3)$=10.

解： 设三次多项式为$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.

例： 求一个三次多项式$f(x)$, 使得$f(1)$=6, $f(2)$=8, $f(-1)$=20, $f(-3)$=10.

解： 设三次多项式为$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. 由条件有

$$\begin{aligned}
f(1) &= a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 6,\\
f(2) &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 20,\\
f(-1) &= -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 8,\\
f(-3) &= -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + a_0 = 10.
\end{aligned}$$

例： 求一个三次多项式$f(x)$, 使得$f(1)$=6, $f(2)$=8, $f(-1)$=20, $f(-3)$=10.

解： 设三次多项式为$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. 由条件有

$$\begin{aligned}
f(1) &= a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 6,\\
f(2) &= 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 20,\\
f(-1) &= -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 8,\\
f(-3) &= -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + a_0 = 10.
\end{aligned}$$

将a_3, a_2, a_1, a_0看作未知量, 可得方程组

$$\left\{\begin{aligned}
a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 6,\\
8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 20,\\
-a_3 + a_2 - a_1 + a_0 &= 8,\\
-27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + a_0 &= 10.
\end{aligned}\right.$$

例： 求一个三次多项式$f(x)$, 使得$f(1)$=6, $f(2)$=8, $f(-1)$=20, $f(-3)$=10.

解： 设三次多项式为$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. 由条件有

$$
\begin{aligned}
&f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 6,\\
&f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 20,\\
&f(-1) = -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 8,\\
&f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + a_0 = 10.
\end{aligned}
$$

将a_3, a_2, a_1, a_0看作未知量，可得方程组

$$
\left\{
\begin{aligned}
a_3 + a_2 + a_1 + a_0 &= 6,\\
8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 20,\\
-a_3 + a_2 - a_1 + a_0 &= 8,\\
-27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + a_0 &= 10.
\end{aligned}
\right.
$$

利用克莱默法则求解。

其系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -27 & 9 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

其系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -27 & 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{行列式的性质}]{\text{利用范德蒙德}} -240$$

其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\8&4&2&1\\-1&1&-1&1\\-27&9&-3&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{行列式的性质}]{\text{利用范德蒙德}}-240$$

计算可得

$$D_1=\begin{vmatrix}6&1&1&1\\20&4&2&1\\8&1&-1&1\\10&9&-3&1\end{vmatrix}=-240,\quad D_2=\begin{vmatrix}1&6&1&1\\8&20&2&1\\-1&8&-1&1\\-27&10&-3&1\end{vmatrix}=-720$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&6&1\\8&4&20&1\\-1&1&8&1\\-27&9&10&1\end{vmatrix}=480,\quad D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&6\\8&4&2&20\\-1&1&-1&8\\-27&9&-3&10\end{vmatrix}=-960,$$

其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -27 & 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{行列式的性质}]{\text{利用范德蒙德}} -240$$

计算可得

$$D_1=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & 4 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & -1 & 1 \\ 10 & 9 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-240, \quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 \\ 8 & 20 & 2 & 1 \\ -1 & 8 & -1 & 1 \\ -27 & 10 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-720$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & 20 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 1 \\ -27 & 9 & 10 & 1 \end{vmatrix}=480, \quad D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & 2 & 20 \\ -1 & 1 & -1 & 8 \\ -27 & 9 & -3 & 10 \end{vmatrix}=-960,$$

所以有

$$a_3=\frac{D_1}{D}=1, a_2=\frac{D_2}{D}=3, a_1=\frac{D_3}{D}=-2, a_0=\frac{D_4}{D}=4.$$

其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -27 & 9 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{行列式的性质}]{\text{利用范德蒙德}} -240$$

计算可得

$$D_1=\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 20 & 4 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & -1 & 1 \\ 10 & 9 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-240,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 & 1 \\ 8 & 20 & 2 & 1 \\ -1 & 8 & -1 & 1 \\ -27 & 10 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-720$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & 20 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 1 \\ -27 & 9 & 10 & 1 \end{vmatrix}=480,\quad D_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & 2 & 20 \\ -1 & 1 & -1 & 8 \\ -27 & 9 & -3 & 10 \end{vmatrix}=-960,$$

所以有

$$a_3=\frac{D_1}{D}=1, a_2=\frac{D_2}{D}=3, a_1=\frac{D_3}{D}=-2, a_0=\frac{D_4}{D}=4.$$

故而所求三次多项式为$f(x)=x^3+3x^2-2x+4.$

拉普拉斯展开定理

设k是不大于n的正整数,在n阶行列式D中选定k行k列, 位于这k行k列交点处的k^2个元素按原来的次序组成一个k阶行列式M, 它称为D的k阶子式. 若把选定的k行k列划去,则余下的$(n-k)^2$个元素按原来的次序组成一个$n-k$阶行列式N, 它称为M的余子式. 显然余子式也是子式, 并且M也是N的余子式. 设选定的k行为第$i_1, i_2, \cdots, i_k$行,选定的k列为第$j_1, j_2, \cdots, j_k$列，此时称

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} N$$

为M的代数余子式.

设k是不大于n的正整数,在n阶行列式D中选定k行k列, 位于这k行k列交点处的k^2个元素按原来的次序组成一个k阶行列式M, 它称为D的k阶子式. 若把选定的k行k列划去,则余下的$(n-k)^2$个元素按原来的次序组成一个$n-k$阶行列式N, 它称为M的余子式. 显然余子式也是子式, 并且M也是N的余子式. 设选定的k行为第$i_1, i_2, \cdots, i_k$行,选定的k列为第$j_1, j_2, \cdots, j_k$列，此时称

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} N$$

为M的代数余子式.

拉普拉斯展开定理: 设k是小于n的正整数, 在n阶行列式D中取定k行（或k 列）. 元素来自这k行（k列）的所有k阶子式和它们各自的代数余子式的乘积之和等于行列式D.

设k是不大于n的正整数,在n阶行列式D中选定k行k列, 位于这k行k列交点处的k^2个元素按原来的次序组成一个k阶行列式M, 它称为D的k阶子式. 若把选定的k行k列划去,则余下的$(n-k)^2$个元素按原来的次序组成一个$n-k$阶行列式N, 它称为M的余子式. 显然余子式也是子式, 并且M也是N的余子式. 设选定的k行为第$i_1, i_2, \cdots, i_k$行,选定的k列为第$j_1, j_2, \cdots, j_k$列, 此时称

$$(-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k} N$$

为M的代数余子式.

拉普拉斯展开定理: 设k是小于n的正整数, 在n阶行列式D中取定k行（或k 列）. 元素来自这k行（k列）的所有k阶子式和它们各自的代数余子式的乘积之和等于行列式D.

取定的k行的k阶子式共有$t = C_n^k$个, 把他们记做$M_1, M_2, \cdots, M_t$,并把M_j的代数余子式记为A_j.则定理表述为:

$$D = M_1 A_1 + M_2 A_2 + \cdots + M_t A_t.$$

例： 将4阶行列式按前两行展开。

例: 将4阶行列式按前两行展开。

解:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

例：将4阶行列式按前两行展开。

解：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

例：将4阶行列式按前两行展开。

解：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{34} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

计算量比按行展开还大，一般情况下不用拉普拉斯展开求行列式

例:证明: $k+n$阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}=D_1D_2,$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

例:证明: $k+n$阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} & c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}=D_1D_2,$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

结论一定要记住，以后会用到

习题1,P25

12(4)

习题1,P25

12(4)
13

习题1,P25

12(4)
13
14(3)

习题1,P25

12(4)
13
14(3)
15

习题1,P25

12(4)
13
14(3)
15
18(2)

习题1,P25

12(4)
13
14(3)
15
18(2)
21

习题1,P25

12(4)
13
14(3)
15
18(2)
21

思考题

证明：若$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$,则：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^4 & x_2^4 & x_3^4 & x_4^4 \end{vmatrix} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$$