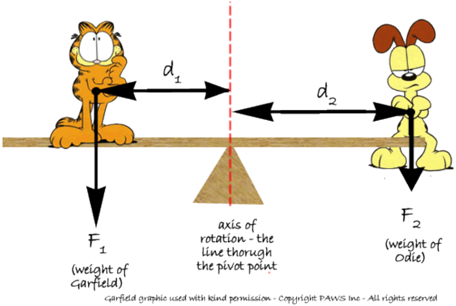
物理背景

力学中，作用在A点上的力F关于支点O产生力矩**M**，



力矩**M**是一个向量，大小为：

$$|\mathbf{M}| = |F_1||\overrightarrow{OA}| = |F||\overrightarrow{OA}|\sin\langle F, \overrightarrow{OA}\rangle;$$

方向为：让右手四指从$\overrightarrow{OA}$弯向F(转角小于π)，拇指所指方向。

向量的外积

外积的定义

定义： 两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的外积$\vec{a}\times\vec{b}$仍是一个向量，它的长度规定为：

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$$

方向规定为与$\vec{a}$, $\vec{b}$均垂直，并使$(\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b})$成右手系。

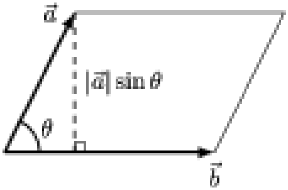
不难看出，若$\vec{a}$, $\vec{b}$中有一个为$\vec{0}$, 或$\vec{a}$与$\vec{b}$平行时，$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$。

即：$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ 共线。

故计算外积也可以用来判定向量是否共线。

外积的几何意义

当$\vec{a},\vec{b}$不共线时，$|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积。



$\vec{a}\times\vec{b}$的方向的几何意义是什么？

空间几何中，用垂直于平面的两个向量来表示平面的定向。

$\vec{a}\times\vec{b}$的方向，给出了以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形所在平面π_0的一个定向。

向量外积的运算规律

定理： 外积适合下列运算规律，对于任意向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$和任意实数$\lambda$，有

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$(反交换律);
2. $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;
3. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ (左分配率).
   $(\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a}$ (右分配率).

证明： (1)由定义直接可得，且有推论：$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$;

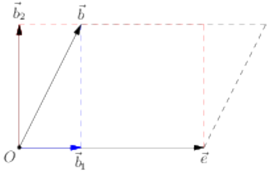
(2)先看大小：$|(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}| = |\lambda\vec{a}||\vec{b}| \sin\langle\lambda\vec{a}, \vec{b}\rangle = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}| \sin\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = |\lambda||\vec{a} \times \vec{b}| = |\lambda(\vec{a} \times \vec{b})|$

再看方向：当$\lambda > 0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$同向，故$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b}$与$\vec{a} \times \vec{b}$同向，从而和$\lambda(\vec{a} \times \vec{b})$同向。当$\lambda < 0$时类似可证。

(3)的证明相对有一定难度。

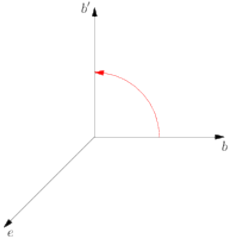
两个命题

回忆：记$\vec{e}$为一单位长度的向量，任一向量$\vec{b}$关于$\vec{e}$的外射影有$\vec{b}_2 = \vec{b} - \vec{b}_1$。



命题1：

1. $\vec{e} \times \vec{b}_2 = \vec{e} \times \vec{b}$
2. $(\vec{b} + \vec{c})_2 = \vec{b}_2 + \vec{c}_2$



命题2：设$\vec{e}$是单位向量，且$\vec{b} \perp \vec{e}$,则$\vec{e} \times \vec{b}$等于$\vec{b}$按右手螺旋规律绕$\vec{e}$旋转$90°$得到的向量$\vec{b}'$。

左分配率的证明

记$\vec{a}^0$为$\vec{a}$的单位化，由于对数乘的线性，只要证明：

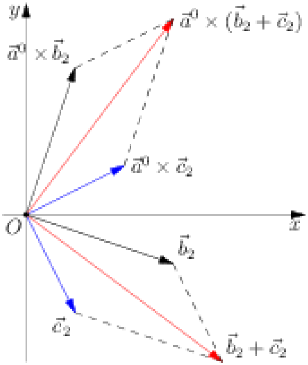
$$\vec{a}^0 \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}^0 \times \vec{b} + \vec{a}^0 \times \vec{c}$$

由命题1(1)，只要证明

$$\vec{a}^0 \times (\vec{b} + \vec{c})_2 = \vec{a}^0 \times \vec{b}_2 + \vec{a}^0 \times \vec{c}_2$$

再由命题1(2)，即

$$\vec{a}^0 \times (\vec{b}_2 + \vec{c}_2) = \vec{a}^0 \times \vec{b}_2 + \vec{a}^0 \times \vec{c}_2$$



如右图，$\vec{a}^0$指向z轴正向，

根据命题2，可证。

右分配率如何证明？

用坐标计算向量的外积

取仿射标架$[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}]$ 设$\vec{a},\vec{b}$的坐标为(a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3),

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} =&(a_1\mathbf{e_1}+a_2\mathbf{e_2}+a_3\mathbf{e_3})\times(b_1\mathbf{e_1}+b_2\mathbf{e_2}+b_3\mathbf{e_3})\\
=&a_1b_1\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_1}+a_1b_2\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2}+a_1b_3\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_3}\\
&+a_2b_1\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_1}+a_2b_2\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_2}+a_2b_3\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_3}\\
&+a_3b_1\mathbf{e_3}\times\mathbf{e_1}+a_3b_2\mathbf{e_3}\times\mathbf{e_2}+a_3b_3\mathbf{e_3}\times\mathbf{e_3}\\
=&(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2}+(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_3}\\
&+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{e_3}\times\mathbf{e_1}
\end{aligned}$$

倘若$[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}]$是右手直角标架，根据命题2，有

$$\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2}=\mathbf{e_3},\quad \mathbf{e_2}\times\mathbf{e_3}=\mathbf{e_1},\quad \mathbf{e_3}\times\mathbf{e_1}=\mathbf{e_2}$$

定理： 设$\vec{a},\vec{b}$在右手直角坐标系中的坐标分别为$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3)$,则$\vec{a}\times\vec{b}$的坐标为

$$(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

推论： 直角坐标系中以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积为：

$$\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2}$$

二重外积

命题： 对任意向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$,有

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\bullet\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\bullet\vec{b})\vec{c}$$

证明： 用坐标法，取右手直角坐标系，设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的坐标为(a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3), (c_1,c_2,c_3)； $\vec{b}\times\vec{c}$, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$的坐标为$(d_1,d_2,d_3)$, (h_1,h_2,h_3)。

$$\begin{aligned}h_1&=a_2d_3-a_3d_2=a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)\\&=b_1(a_2c_2+a_3c_3)-c_1(a_2b_2+a_3b_3)\\&=b_1(\vec{a}\bullet\vec{c}-a_1c_1)-c_1(\vec{a}\bullet\vec{b}-a_1b_1)\\&=(\vec{a}\bullet\vec{c})b_1-(\vec{a}\bullet\vec{b})c_1\end{aligned}$$

同理可得

$$h_2=(\vec{a}\bullet\vec{c})b_2-(\vec{a}\bullet\vec{b})c_2,h_3=(\vec{a}\bullet\vec{c})b_3-(\vec{a}\bullet\vec{b})c_3$$

即：

$$(h_1,h_2,h_3)=(\vec{a}\bullet\vec{c})(b_1,b_2,b_3)-(\vec{a}\bullet\vec{b})(c_1,c_2,c_3)$$

定理得证。

外积是否满足结合律？

再来看

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=-\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=(\vec{c}\bullet\vec{a})\vec{b}-(\vec{c}\bullet\vec{b})\vec{a}$$

从而

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})-(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{c}\bullet\vec{b})\vec{a}-(\vec{a}\bullet\vec{b})\vec{c}$$

一般情况下不相同。

向量外积不满足结合律！

但是可以验证Jacobi等式：

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$$

回忆，我们之前证明过：$\boxed{(\vec{c}\bullet\vec{a})\vec{b}-(\vec{c}\bullet\vec{b})\vec{a}\text{ 垂直于}\vec{c}.}$

几何解释： $(\vec{c}\bullet\vec{a})\vec{b}-(\vec{c}\bullet\vec{b})\vec{a}=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.而后者由外积定义和$\vec{c}$一定垂直。

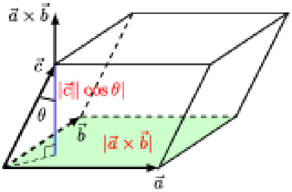
向量的混合积

混合积

定义： 三个向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$的混合积是一个数，规定为$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$。混合积有时也写为$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$。

几何意义：

考虑三个非零向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$为棱作成的一个平行六面体。其底面积为$|\vec{a}\times\vec{b}|$，高为$|\vec{c}\cdot\vec{n}|$，其中$\vec{n}$为外积的单位方向。



从而$V=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}\cdot\vec{n}|=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$。

若$\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle$为锐角，$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$成右手系，则$V=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}>0$;

若$\langle\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle$为钝角，$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$成左手系，则$-V=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}<0$;

故混合积$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$也称为平行六面体的定向体积。

混合积的性质与应用

命题： 混合积有以下两条常用的性质：

1. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$
2. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

证明： (1)由混合积的几何意义及标架定向相同可得；

(2)$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$。

命题： 三个向量$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$共面的充分必要条件是$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.
证明： 利用混合积的几何意义。

可以通过计算混合积来判定三个向量是否共面

用坐标计算向量的混合积

取仿射标架$[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}]$，设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的坐标为$(a_1,a_2,a_3)$, (b_1,b_2,b_3), (c_1,c_2,c_3),则

$$
\begin{aligned}
&(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\\
=&[(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2}+(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_3}\\
&+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{e_3}\times\mathbf{e_1}]\cdot(c_1\mathbf{e_1}+c_2\mathbf{e_2}+c_3\mathbf{e_3})\\
=&(a_1b_2-a_2b_1)c_3(\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2})\cdot\mathbf{e_3}+(a_2b_3-a_3b_2)c_1(\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_3})\cdot\mathbf{e_1}\\
&+(a_3b_1-a_1b_3)c_2(\mathbf{e_3}\times\mathbf{e_1})\cdot\mathbf{e_2}\\
=&[(a_1b_2-a_2b_1)c_3+(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2]\\
&(\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2})\cdot\mathbf{e_3}
\end{aligned}
$$

定理： 若$[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}]$为右手直角坐标架，则

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(a_1b_2-a_2b_1)c_3+(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2$$

证明： 右手直角标架：$(\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2})\cdot\mathbf{e_3}=\mathbf{e_3}\cdot\mathbf{e_3}=1$

拉格朗日恒等式

现在考虑四个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$，求$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})$

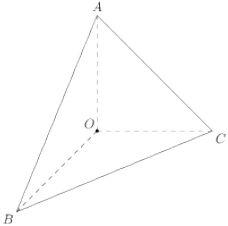
回忆：$\boxed{\text{混合积的性质：}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{a}\cdot[\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})]=\vec{a}\cdot[(\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}]$$
$$=(\vec{b}\cdot\vec{d})(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{b}\cdot\vec{c})(\vec{a}\cdot\vec{d})$$

上述等式称为拉格朗日恒等式。

例： 证明三直角棱锥的斜面面积的平方等于其他三个面的面积的平方和。

证明： 我们有



$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|^2$$
$$=(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})$$
$$=|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2$$
$$=(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2)(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2)-[(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})]^2$$
$$=(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2)(|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2)-[\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}]^2$$
$$=(|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|)^2+(|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|)^2+(|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OA}|)^2$$

行列式

内容回顾

本着简化思考过程的想法，我们引入坐标，将向量运算转化为代数运算。
取右直角标架$[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}]$，设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的坐标为$(a_1,a_2,a_3)$, (b_1,b_2,b_3), (c_1,c_2,c_3),则下列运算对应的坐标或数值为：

- $\vec{a}+\vec{b}$: $(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$
- $\lambda\vec{a}$: $(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$
- $\vec{a}\cdot\vec{b}$: $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
- $\vec{a}\times\vec{b}$: $(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$
- $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$:
  $(a_1b_2-a_2b_1)c_3+(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2$

外积和混合积的坐标表达式非常繁杂，难以记忆，更重要的是直接使用的话计算量很大，没有起到简化运算的作用。

我们需要一种新的代数工具来表达并简化这样的复杂运算！

问题的背景

我的学生问我今年多大了，我告诉学生，当我像你这么大时，你才3岁，当你像我这么大的时候，我已经63了。问老师今年多大了？

令x为老师年龄，y为学生年龄，有

$$\begin{cases} y-(x-y)=3 \\ x+(x-y)=63 \end{cases}$$

化简为

$$\begin{cases} -x+2y=3 \\ 2x-y=6 \end{cases}$$

用消元法易得: $x=43, y=23$。

二元一次线性方程组的求解

考虑一般的二元一次线性方程组的求解：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

当$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，由消元法可得方程组的解:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ \\ x_2 = \dfrac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

二阶行列式的定义

定义：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$叫做一个二阶行列式。

注意：

- 所谓行列式，本质上是由行列元素按照一定运算关系计算出的数；
- 其值为主、副对角线元素的积作差得来的。

利用行列式，方程组的解可以表示为：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

大家可以把例子中方程系数具体代入，看能否得到预期的结果。

三阶行列式

能否类似地定义三阶行列式？$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

- 最自然的方法，求三元一次方程组的通解，找出公共的分母；
- 类比于二阶行列式：$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{array}$$

事实上，有严格的方法来定义任意n阶行列式；但是我们这门课主要限于二阶和三阶行列式，至多用到四阶行列式。

行列式的基本性质

1. 行与列互换, 行列式的值不变;
2. 在行列式中, 如果某一行(列)元素全为零, 则该行列式值为零;
3. 交换任意两行(列)的位置, 行列式的值变号;
4. 行列式运算具有线性;
5. 行列式可按一行或者一列展开。

只说明性质(5)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{21}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

三阶行列式由三个二阶行列式表示了出来, 且其系数全部来自于原行列式的第一行。也可选取其他的公因子, 有类似的表达式。

行列式与方程组的解之间的关系

我们已经看到，只有当方程组对应的行列式不为零时，方程组的解才能表示为行列式。事实上我们有：

克莱姆法则: 如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么该方程组有唯一解。

推论:如果线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

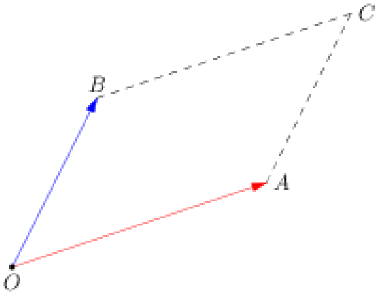
不存在解，或者有两个以上的解，则必有：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

行列式在解析几何中的初步应用

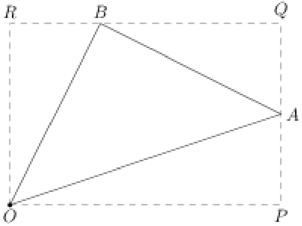
在平面解析几何中的应用

考虑平面直角坐标系中的向量$\vec{a}=(a_x,a_y)$，$\vec{b}=(b_x,b_y)$，张成平行四边形



如何计算平行四边形的面积？

转化为计算三角形面积



$$\triangle OAB$$

$$= \square OPQR - \triangle OPA - \triangle OBR - \triangle ABQ$$

$$= a_x b_y - \frac{1}{2}(a_x a_y + b_x b_y + (a_x - b_x)(b_y - a_y))$$

$$= a_x b_y - \frac{1}{2}(a_x b_y + b_x a_y) = \frac{1}{2}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

平行四边形面积为: $\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$

在空间解析几何中的应用

外积

考虑右手仿射标架$[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}]$，设$\vec{a},\vec{b}$的坐标为$(a_1,a_2,a_3)$, (b_1,b_2,b_3)。回忆：

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}=&(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2}+(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_3}\\&+(a_3b_1-a_1b_3)\mathbf{e_3}\times\mathbf{e_1}\end{aligned}$$

利用行列式可写为：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_3}+\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}\mathbf{e_3}\times\mathbf{e_1}+\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2}$$

特别的，若为右手直角标架$[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}]$，则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix}\mathbf{e_1}+\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix}\mathbf{e_2}+\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\mathbf{e_3}$$

即在直角标架下$\vec{a}\times\vec{b}$的坐标为：

$$\left(\begin{vmatrix}a_2&b_2\\a_3&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3&b_3\\a_1&b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{vmatrix}\right)$$

思考题

习题1.4

8.在平面右手直角坐标系$[O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2]$中，设$\triangle ABC$的三个顶点$A,B,C$的坐标分别为

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3).$$

证明$\triangle ABC$的面积为$|s|$（s的绝对值），其中

$$s=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

注意:

- 不要直接用平面几何中的结论，利用外积运算的几何意义;
- 要利用行列式的性质。

混合积

回忆，混合积$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$数值为

$$[(a_1b_2-a_2b_1)c_3+(a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2](\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2})\cdot\mathbf{e_3}$$

其中的系数利用行列式可写为：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_3 + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

注意： 后一个等号可直接根据三阶行列式的表达式得到；也可根据行列式按照列展开得到。

特别的，由混合积的几何意义，直角坐标系下平行六面体的体积可以用行列式表示。

用行列式表示共线或共面的条件

现在我们希望从坐标的角度来研究这一问题，同时充分利用行列式这一工具。

三向量共面的条件

定理：设向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$在仿射标架$[O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}]$中的坐标分别是$(a_1, a_2, a_3)$, (b_1, b_2, b_3),(c_1, c_2, c_3)。则$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$共面的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

证明：根据混合积的坐标表示

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} (\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_2}) \cdot \mathbf{e_3}$$

又由混合积的几何意义，定理得证。

两向量共线的条件

定理：设两向量$\vec{a}, \vec{b}$在空间仿射标架$[O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}]$中的坐标分别是$(a_1, a_2, a_3)$, (b_1, b_2, b_3)。则$\vec{a}$与$\vec{b}$共线的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

证明：不失一般性，假设$\vec{a}, \vec{b}$均不为零向量。先证必要性。设$\vec{a}, \vec{b}$共线，于是有实数k使得$\vec{b} = k\vec{a}$，从而

$$b_i = ka_i, \qquad i = 1, 2, 3$$

故

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & ka_1 \\ a_2 & ka_2 \end{vmatrix} = 0$$

同理，其余两项也为零。

充分性。分情况讨论：若$\vec{a}$只有一个坐标不为零，不妨设$a_1 \neq 0$, $a_2 = a_3 = 0$.此时

$$a_1 b_2 = a_1 b_3 = 0 \Rightarrow b_2 = b_3 = 0$$

故$\vec{a}$, $\vec{b}$共线；
若$\vec{a}$有两个坐标不为零，不妨设$a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$,因为

$$0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

所以$a_1 b_2 = a_2 b_1$,同除以$a_1 a_2$有$\dfrac{b_1}{a_1} = \dfrac{b_2}{a_2} = k$.
则得$b_1 = ka_1, b_2 = ka_2$.又

$$0 = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = a_3 b_1 - a_1 b_3 = a_1(ka_3 - b_3)$$

故$b_3 = ka_3$.最终有$\vec{a}$, $\vec{b}$共线。

另一种思路

大家不妨再看下定理中的这一条件和那类运算很相似？

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0}$$

我们也可以利用外积来证明这一定理。充分性显然，只证必要性。由$\vec{a},\vec{b}$ 共线有$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.即

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e_1} \times \mathbf{e_2} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \mathbf{e_3} \times \mathbf{e_1} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e_2} \times \mathbf{e_3} = \vec{0}$$

可惜$[O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}]$只是仿射标架。

不过只要可以证明$\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_2}$，$\mathbf{e_3} \times \mathbf{e_1}$，$\mathbf{e_2} \times \mathbf{e_3}$三个向量不共面即可。

解法一：计算混合积$(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\times(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)$.先来看

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\times(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)=&((\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_3-((\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1\\=&-((\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1\end{aligned}$$

从而

$$(\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\times(\mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1)\cdot(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)=-((\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{e}_3)^2\neq 0$$

最终根据不共面向量组的判定法则（P8，推论1.2），可证。

解法二：设有实数λ,μ,ν使得

$$\lambda\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2}+\mu\mathbf{e_3}\times\mathbf{e_1}+\nu\mathbf{e_2}\times\mathbf{e_3}=\vec{0}$$

等式两边同时内积$\mathbf{e_3}$，有:

$$\lambda(\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2})\cdot\mathbf{e_3}=0$$

由于$\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}$不共面，$(\mathbf{e_1}\times\mathbf{e_2})\cdot\mathbf{e_3}\neq 0$，故有$\lambda=0$。
类似，可以证明$\mu=\nu=0$，得证。

三点共线的条件

首先要选择合适的坐标系。鉴于三点必然落在同一平面，取一个仿射标架$[O; \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}]$，使得$O, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$落在$ABC$所在的平面。可设$A, B, C$的坐标分别为：

$(x_1, y_1, 0)$,$(x_2, y_2, 0)$,$(x_3, y_3, 0)$,

定理：三点A, B, C共线的充要条件为：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明：由三点共线知$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{BC}$ 同向。此时向量$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{BC}$的坐标分别为：$(x_3 - x_1, y_3 - y_1, 0)$, $(x_3 - x_2, y_3 - y_2, 0)$。根据两向量共线的等价条件有：

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x_3 - x_1 & x_3 - x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_3 - y_1 & y_3 - y_2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

即：

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & y_3 - y_2 \end{vmatrix} = 0$$

由行列式性质得:

$$\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & x_3 - x_2 & x_3 \\ y_3 - y_1 & y_3 - y_2 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

有没有其他的证法?

之前证明了：

> A,B,C三点共线的充要条件为存在不全为零的实数λ,μ,ν，使得：$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}=\vec{0},\lambda+\mu+\nu=0.$

能否从这一结论出发来证明必要性？

上述向量等式用坐标写出为：

$$\begin{cases}\lambda x_1+\mu x_2+\nu x_3=0\\ \lambda y_1+\mu y_2+\nu y_3=0\end{cases}$$

用$\nu=-\lambda-\mu$代入，得

$$\begin{cases}\lambda(x_1-x_3)+\mu(x_2-x_3)=0\\ \lambda(y_1-y_3)+\mu(y_2-y_3)=0\end{cases}$$

此时，λ,μ可以看做下列未知量为x,y的方程的非零解：

$$\begin{cases}(x_1-x_3)x+(x_2-x_3)y=0\\ (y_1-y_3)x+(y_2-y_3)y=0\end{cases}$$

于是根据克拉默法则的推论，有：

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = 0$$

利用行列式性质变形后可得。

上述证明过程可逆，得充分性。

大家看了这几几个问题的解决，不知有何感想？

可以看出，解析几何中的问题思考角度是多方面的，具体的方法不计其数，不过大的方面总是可以归为两类：

- 从几何直观入手;
- 从几何所对应的代数问题入手。

运用之妙，存乎一心。

结语

行列式运算是一种与“体积”，“线性表出”，“求解方程组”密切关联的代数运算

我们求解几何问题不论是从“体积”出发，还是从“线性表出”，或者从“求解方程组”出发，往往都能得到以行列式为表达形式的结论，殊途同归。

思考

定理： 设向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$在仿射标架$[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}]$中的坐标分别是$(a_1,a_2,a_3)$, (b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3)。则$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

之前是用混合积的几何意义证明的，是否有其他的证明思路？

而且很多时候向量的坐标并没有给定，或者很难求出，那么这个定理就不方便使用了。如：

P28,习题16：证明：三向量$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$共面的充分必要条件是：

$$\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix} = 0$$

作业

习题1.3，P27
2,4,5,7,11,12,13,14,15

习题1.4，P35
2,3,11,14

习题1.5，P43
2,3,11,12,13

一个疑惑

说好的综合法呢？

命题： 设四个点A, B, C, D的仿射坐标分别为：

$$(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, 3, 4$$

则A, B, C, D共面的充要条件是：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明： 点A, B, C, D共面即向量$\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$共面。

根据混合积的几何意义，等价于$\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$。
再利用混合积的坐标表达式，有：

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

即：

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_1 & z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

将第1列分别加到第2,3,4列可得结论。

我们返回来看下解决四点共面问题的整个过程：

问题：求三点A, B, C, D共线的充要条件

$\Downarrow$

先转化为向量的运算：$\overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$　　向量法

$\Downarrow$　　　　综合法

再将混合积的运算用坐标表达　　坐标法

$\Downarrow$

结论：某个行列式的条件。