引例

习题1.2， 6，已知$\overrightarrow{OA}=\mathbf{e}_1$，$\overrightarrow{OB}=\mathbf{e}_2$，$\overrightarrow{OC}=\mathbf{e}_3$是以原点$O$为顶点的平行六面体的三条棱。求此平行六面体过点$O$的对角线与平面$ABC$的交点$M$在仿射标架$[O,\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]$下的坐标。

解： 不妨设平行六面体对角线为$\overrightarrow{OD}$，由向量加法的几何意义，有：$\overrightarrow{OD}=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3$。
根据M是交点，有：$\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OD}$。关键问题：$k$ 是多少？
M是交点同时表明M,A,B,C共面，回忆：

> 设A,B,C是不在一直线上的三点，则点M在平面ABC上的充要条件为存在实数λ,μ,ν，使得：$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\nu\overrightarrow{OC}$,$\lambda+\mu+\nu=1$.

已知$\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OD}=k\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}+k\overrightarrow{OC}$，必有$k+k+k=1$，即$k=\frac{1}{3}$，从而$M$ 点的坐标为：$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$。

解法尽管简洁，但是不容易想到。大家回忆一下平面解析几何中遇到类似的问题如何处理？

第二章　空间的平面和直线

学习这一章的意义所在

- 把几何问题转化为代数方程的求解。
- 反过来，也为方程组的求解提供几何解释，并为抽象的线性空间提供几何背景。
- 实践综合法解决几何问题，即把向量法和坐标法有机地结合起来。

图形和方程

对于一个图形S，如果S上的点的坐标满足某种数量关系，而S外的点的坐标不满足这种数量关系，我们就把这种数量关系称为S的一个方程。

§1 仿射坐标系中平面的方程，两平面的相关位置

在本节中始终取定仿射标架$[O;\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3]$。

平面的参数方程和普通方程

确定一个平面的条件是：

- 不在一直线上的三点；
- 一条直线和此直线外的一点；
- 两条相交直线；
- 两条平行直线。

不同的情况下给我们的纯几何条件都是不同的。

将这些纯几何先化为向量条件，再用坐标表达向量的运算。

找一个可以共用的向量条件：一个点和两个不共线的向量

可以验证，上述四个纯几何条件都可以方便地转化为这一向量条件。

本节中我们重点把这一向量条件用坐标表达。

为了使用起来不引起混淆，这章中向量的坐标一般用大写X, Y, Z表示，点的坐标一般用小写x, y, z表示。

取定仿射标架$[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}]$，已知一个点$M_0(x_0,y_0,z_0)$，不共线的两个向量$v_1(X_1,Y_1,Z_1)$和$v_2(X_2,Y_2,Z_2)$，求由$M_0,v_1,v_2$确定的平面$\pi$的方程。

点$M(x,y,z)\in\pi\Leftrightarrow\overrightarrow{M_0M}$与$v_1,v_2$共面，即存在实数$\lambda,\mu$使得：

$$\overrightarrow{M_0M}=\lambda v_1+\mu v_2$$

由向量相等可得对应位置坐标相等

$$\begin{cases} x-x_0=\lambda X_1+\mu X_2, \\ y-y_0=\lambda Y_1+\mu Y_2, \\ z-z_0=\lambda Z_1+\mu Z_2, \end{cases}$$

即：

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda X_1+\mu X_2, \\ y=y_0+\lambda Y_1+\mu Y_2, \\ z=z_0+\lambda Z_1+\mu Z_2, \end{cases}$$

当点$M(x,y,z)$取遍所有可能的点时，λ,μ取遍所有的实数。上述方程称为平面π的参数方程，其中λ,μ称为参数。

平面的参数方程尽管可以很方便地求出平面上的点的坐标，但是平面的某些整体性质不容易看出来。

$\overrightarrow{M_0M}$与v_1, v_2共面的另一个充要条件：

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & X_1 & X_2 \\ y-y_0 & Y_1 & Y_2 \\ z-z_0 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & X_1 & X_2 \\ y & Y_1 & Y_2 \\ z & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & X_1 & X_2 \\ y_0 & Y_1 & Y_2 \\ z_0 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

令

$$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}, B = -\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix},$$

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

可写为：

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

由于v_1, v_2不共线，A, B, C不全为零，上述方程是三元一次方程，称为平面π的普通方程。

定理：在空间取定一个仿射坐标系，则平面的方程必定是三元一次方程；反之，任意一个三元一次方程表示一个平面。

证明：现在看后半部分。我们要说明任何一个三元一次方程都表示一个平面，只要找到一个点和两个向量，使得他们决定的平面方程为所给三元一次方程即可。任给一个三元一次方程：

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

不妨设$A_1 \neq 0$，取点$M_1(-\frac{D_1}{A_1}, 0, 0)$。

如何找两个向量？再找两个与M_1不共线的点即可。

取$P(-\frac{B_1+D_1}{A_1}, 1, 0)$，$Q(-\frac{C_1+D_1}{A_1}, 0, 1)$。得向量：

$$\mu_1(-\frac{B_1}{A_1}, 1, 0), \mu_2(-\frac{C_1}{A_1}, 0, 1)$$

由点M_1和μ_1, μ_2决定的平面π_1的方程为：

$$\begin{vmatrix} x + \frac{D_1}{A_1} & -\frac{B_1}{A_1} & -\frac{C_1}{A_1} \\ y - 0 & 1 & 0 \\ z - 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

展开得：

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

普通方程中系数的几何意义

大家观察一下，我们找的两个向量$\mu_1(-\frac{B_1}{A_1}, 1, 0)$,$\mu_2(-\frac{C_1}{A_1}, 0, 1)$与系数$A_1, B_1, C_1$有什么关系？

定理： 向量$\omega(r, s, t)$平行于平面$\pi : Ax + By + Cz + D = 0$的充分必要条件是

$$Ar + Bs + Ct = 0.$$

证明： $\omega \parallel \pi \Leftrightarrow \omega, v_1, v_2$ 共面。故

$$\begin{vmatrix} r & X_1 & X_2 \\ s & Y_1 & Y_2 \\ t & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

展开，由$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}, B = -\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix}$，即得。

注意： 上述关系不代表向量$\omega(r, s, t)$与$\mu(A, B, C)$垂直。

系数几何意义的应用

例： 在仿射标架$[O; e_1, e_2, e_3]$下画出平面$x + 2y - z = 0$

解： 只要找一点和两向量即可。
因为$D = 0$，所以平面过原点。根据系数的几何意义，没有必要再去找平面上的其他两点。解方程

$$r + 2s - t = 0.$$

取两个线性无关的解，即不共线的向量：$\omega_1(-2, 1, 0)$,$\omega_2(1, 0, 1)$.

两平面的相关位置

$$\text{平面位置关系：}\begin{cases}\text{相交}\\ \text{平行}\begin{cases}\text{平行且无交点}\\ \text{重合}\end{cases}\end{cases}$$

定理： 取定仿射标架，设平面π_1,π_2的方程分别为：

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

则

1. $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2$;
2. $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = D_1 : D_2$;

证明： (1) $\Leftarrow$ 设向量$\mu(r, s, t) \parallel \pi_1$，则$A_1r + B_1s + C_1t = 0$。但根据成比例条件，必有$A_2r + B_2s + C_2t = 0$。由$\mu$的任意性，可得$\pi_1 \parallel \pi_2$。

(1) $\Rightarrow$ 取与π_1平行的的向量$\mu(B_1, -A_1, 0)$，由于$\pi_1 \parallel \pi_2$，
有$\mu \parallel \pi_2$，从而$A_2B_1 - A_1B_2 = 0$。类
似，$B_2C_1 - B_1C_2 = 0$，$C_2A_1 - C_1A_2 = 0$，得证。
(2) $\Leftarrow$ 由(1)可知两平面平行，p且由

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)$$

至少过同一点，必重合。
(2) $\Rightarrow$ 此时π_2的方程可写为$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z) + D_2 = 0$。设
点$M_0(x_0, y_0, z_0)$在π_1上，即有$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$。由平
面重合，点$M_0(x_0, y_0, z_0)$也在π_2上，代入π_2 的方程
有：$-\lambda D_1 + D_2 = 0$。

推论1：π_1, π_2相交$\Leftrightarrow A_1, B_1, C_1$和$A_2, B_2, C_2$不成比例。
推论2：$\pi_1 \parallel \pi_2$但不重合$\Leftrightarrow A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 \neq D_1 : D_2$

以上是从平面方程系数的几何意义出发证明的，有没有不同的思路？

仔细来看这两个推论：

1. π_1, π_2相交：有交点，且交点集合是平面集合的真子集。
2. $\pi_1 \parallel \pi_2$但不重合：没有交点。

交点的坐标有何代数意义？是两个平面方程的公共解。
从代数的角度出发，考虑下列方程组的解

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

推论1的证明：$\Leftarrow$p由于不成比例，故下列三个行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

不全为零。不妨设$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$，令方程组中$z = 0$，有

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

根据克拉默法则，方程$(*)$有唯一解：(x_0, y_0)。故两平面有交点$M_0(x_0, y_0, 0)$。
再取$M_1(x_0 + B_1, y_0 - A_1, 0)$，可验证$M_1$是$\pi_1$上不同于$M_0$的点。另一方面，由克拉默法则，$(x_0 + B_1, y_0 - A_1)$不是方程组(*)的解，即$M_1$不在$\pi_2$上。故平面相交且不重合。

$\Rightarrow$,两平面相交于一条直线，该直线至少与xOy,yOz,zOx三个坐标平面中的一个有唯一交点。不妨设和xOy平面有唯一交点。即方程组

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

有唯一解，故$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$。其他情况类似讨论，得证。

推论2的证明： $\Leftarrow$ 由条件知存在$\lambda \neq 0$，使得

$$A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1, D_2 \neq \lambda D_1.$$

方程组可改写为：

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_1 x + B_1 y + C_1 z + \frac{D_2}{\lambda} = 0 \end{cases}$$

消元法得方程组无解。故两平面无交点，必然平行，且不重合。
$\Rightarrow$综合推论1，逆推即可。

问题

$\Downarrow$

解析几何

$\swarrow \qquad \searrow$

代数 $\qquad\qquad$ 几何

$\searrow \qquad \swarrow$

结论

三平面交与一点的条件

命题： 取定仿射标架，设平面π_1,π_2,π_3的方程分别为：

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 &= 0 \end{aligned}$$

则这三个平面恰交与一点的充要条件是：

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

证明： 采用代数的方法。
三个平面交与唯一一点$\Leftrightarrow$方程组有唯一解。
再根据克拉默法则，其系数行列式不为零。

思考题： 用几何的方法如何证明？

作业

习题2.1，P50
1(3)(4),3,4,5,6(3),7,8,10,11.

§2 直线的方程，直线平面的相关位置

本节中仍然仿射标架$[O;\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3}]$。

直线的点向式方程

决定直线的向量条件：一个点和一个非零向量，可以决定一条过该点，且与给定向量平行的直线。

已知点$M_0(x_0, y_0, z_0)$,以及非零向量$\vec{v}(X, Y, Z)$，求直线l的方程。

点$M(x, y, z)$在直线l上的充要条件是$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{v}$，即$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}$.用坐标写出：

$$\begin{cases} x - x_0 = tX \\ y - y_0 = tY \\ z - z_0 = tZ \end{cases}$$

变形即得直线的参数方程，其中t可以取任意实数：

$$\begin{cases} x = x_0 + tX \\ y = y_0 + tY \\ z = z_0 + tZ \end{cases}$$

参数方程往往适合求具体点的坐标，研究直线整体性质时需要将参数消去。

因为$\vec{v} \neq \vec{0}$，不妨设$X \neq 0$，则得：$t = \frac{x-x_0}{X}$。
如果$Y \neq 0$, 则类似有$t = \frac{y-y_0}{Y}$，故：

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y}$$

倘若$Y = 0$怎么办？此时$y - y_0 = tY \equiv 0$
人为规定分母为零时表示分子也必须为零，而不限定任何具体的比值，约定等式仍然成立。最终有：

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$$

称为直线l的标准方程。
直线的参数方程和标准方程统称为点向式方程。方程中的(X, Y, Z)称为直线l的方向系数。

直线的两点式方程

如果已知直线l上两点$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$，求直线方程。
易知$\overrightarrow{M_1M_2}$是l的一个方向向量。再取M_1为定点，有：

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

称为直线l的两点式方程。

直线的普通方程

除了一点和一个向量，两点以外，两个平面的交线也是一条直线。
设直线l是相交平面π_1,π_2的交线，π_i的方程为：

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad i = 1, 2$$

则方程组

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的解所对应的坐标一定都在l上，反之l上的点的坐标也都满足方程组。从而将上述方程组称为直线l的普通方程。

标准方程和普通方程的关系

观察标准方程：

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$$

实际上是两个两个方程的联立方程组，

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y} \\ \frac{x-x_0}{X}=\frac{z-z_0}{Z} \end{cases}$$

不妨设$X\neq 0$，则可以写为：

$$\begin{cases} Y(x-x_0)-X(y-y_0)=0 \\ Z(x-x_0)-X(z-z_0)=0 \end{cases}$$

即得l的普通方程。此时第一个方程表示平行于z轴的平面，第二个方程表示平行于y轴的平面。

反过来，普通方程为：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

如何由普通方程求出标准方程？从标准方程的几何意义入手

Step1,先找直线l上的一个点M_0。两个平面方程系数不成比例，故下列三个行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

不全为零。不妨设$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$，令方程组中$z=0$，有

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

根据克拉默法则，有唯一解：(x_0, y_0)。故两平面有交点$M_0(x_0, y_0, 0)$。

Step2,再找l的一个方向向量$\vec{v}(X, Y, Z)$.回忆：

定理： 向量$\omega(r, s, t)$平行于平面π的充分必要条件是$Ar + Bs + Ct = 0$

设$\vec{v} \parallel \pi_i, i=1,2$，所以

$$\begin{cases} A_1X + B_1Y + C_1Z = 0 \\ A_2X + B_2Y + C_2Z = 0 \end{cases}$$

若$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$，令$z=1$,方程组

$$\begin{cases} A_1X + B_1Y = -C_1 \\ A_2X + B_2Y = -C_2 \end{cases}$$

有唯一解：(X_0, Y_0)。故原方程组有非零解：$(X_0, Y_0, 1)$.
事实上我们只需要找到一个非零解即可，并没有必要具体求方程组。观察，若令

$$X = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, Y = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, Z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

三个数不全为零，且有：

$$A_iX + B_iY + C_iZ = \begin{vmatrix} A_i & B_i & C_i \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0 \quad i = 1, 2.$$

即取方向向量为$\vec{v}\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$

进而可得直线的标准方程:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

两条直线的相关位置

只探讨用标准方程表示的直线的位置关系。
在仿射标架中，设直线l_i过点$M_i(x_i, y_i, z_i)$，方向向量为$\vec{v}_i(X_i, Y_i, Z_i)$，$i = 1, 2$.
若l_1与l_2异面，充要条件为：$\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$不共面，即：

$$\Delta := \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & X_1 & X_2 \\ y_2 - y_1 & Y_1 & Y_2 \\ z_2 - z_1 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

若l_1与l_2相交，充要条件为：$\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ 共面，且$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$，
即：$\Delta = 0$且$(X_i, Y_i, Z_i) \quad i = 1, 2.$不成比例。
若l_1与l_2平行但不重合，充要条件为：$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ 且$\overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \vec{v}_1$，
即：$(X_i, Y_i, Z_i) \quad i = 1, 2.$ 成比例，但与$(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$不成比例。
若l_1与l_2重合，充要条件为：$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$，
即：$(X_i, Y_i, Z_i) \quad i = 1, 2, (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$三者成比例。

直线和平面的相关位置

设直线l过点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，方向向量为$\vec{v}(X, Y, Z)$. 设平面π的方程为$Ax + By + Cz + D = 0$.

l与π相交$\Leftrightarrow \vec{v} \nparallel \pi$,即：

$$AX + BY + CZ \neq 0$$

l与π平行但不重合$\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \pi$且$M_0$不在$\pi$上,即：

$$AX + BY + CZ = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

l与π重合$\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \pi$且$M_0$在$\pi$上,即：

$$AX + BY + CZ = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

思考：使用直线的普通方程讨论直线和平面的位置关系。p
在高等代数学过方程组理论之后大家会有更清晰的认识

求直线和平面的交点

已知平面π方程由普通方程给出：$Ax+By+Cz+D=0$

当直线l使用普通方程$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$时，

求解方程组：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

当直线l使用标准方程$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$时，改写为参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + tX \\ y = y_0 + tY \\ z = z_0 + tZ \end{cases}$$

代入平面π的方程中，得

$$A(x_0 + tX) + B(y_0 + tY) + C(z_0 + tZ) + D = 0$$

解得

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{AX + BY + CZ}$$

代回参数方程，即可。

作业

习题2.3

1(2),3(2),5(1),6(2),7,8(3),10(2),13

§3 平面和直线的度量关系

本节我们讨论平面和直线相关的距离和角度的计算，重点是距离。

由于要计算距离和角度，需要大量用到内积，同时也会用到外积。
在第一章中已经说明，内积和外积的运算只有在直角标架中才是最简便的。
故本节中始终取定直角标架$[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$。

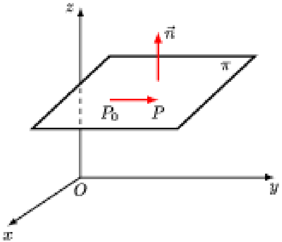
直角坐标系中的平面方程

上节中用来确定一个平面的条件是：一个点和两个不共线的向量。有无其他可以取定平面的向量条件？

一个点和一个与这个平面垂直的非零向量。

定义： 与平面垂直的非零向量叫做该平面的法向量。

求过点$P_0(x_0, y_0, z_0)$，并且法向量为$\vec{n}(A, B, C)$的平面π的方程。



点$P(x, y, z)$在平面π上$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0.$于是得：

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

称为平面的点法式方程。

可改写为普通方程：

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

其中$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

反之，任何一个普通方程也可以改写为点法式方程。

系数的几何意义

在直角坐标系中，平面普通方程的一次项系数是法向量的坐标。

回忆仿射标架下：

> **定理：** 向量$\omega(r,s,t)$平行于平面π的充分必要条件是$Ar+Bs+Ct=0$

在直角标架下有更直接的几何的解释：

$$\omega \parallel \pi \Rightarrow \vec{n} \perp \omega \Rightarrow \vec{n}\cdot\omega = 0 \Rightarrow Ar+Bs+Ct=0$$

回忆，在之前一节中，仿射标架下：

直线l有一般方程：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

则其标准方程：

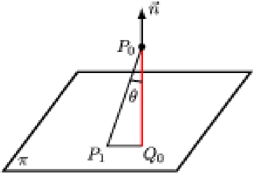
$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

直角标架下也有更直接的几何解释：$\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$,$\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ 分别为π_1, π_2 的法向量。$\vec{v}$为l的方向向量。故$\vec{n}_1 \perp \vec{v}, \vec{n}_2 \perp \vec{v}$，从而$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel \vec{v}$，也为直线$l$的方向向量。

此时，$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$的坐标为：$(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix})$

点到平面的距离

设$P_0(x_0, y_0, z_0)$为空间一定点，平面π的一般式方程为:$Ax + By + Cz + D = 0$，即法向量为$\vec{n} = (A, B, C)$。
点P_0到平面π的距离用$d(P_0, \pi)$表示。



由P_0作平面π的垂线与π交于Q_0。
取平面上任意一点$P_1(x_1, y_1, z_1)$，有：

$$d(P_0, \pi) = |\overrightarrow{P_1P_0}||\cos\langle\overrightarrow{P_1P_0}, \vec{n}\rangle| = |\overrightarrow{P_1P_0}|\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\cdot\vec{n}|}{|\overrightarrow{P_1P_0}||\vec{n}|}$$

$$= \frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

由于P_1在平面π上，$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$,
因此，点P_0到平面π的距离为

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

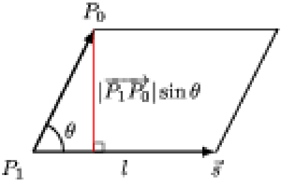
注意：距离公式可改写为：

$$d(P_0,\pi)=\left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\cdot\overrightarrow{P_1P_0}\right|$$

表示向量$\overrightarrow{P_1P_0}|$在法向量$\vec{n}$方向上内射影的长度。

点到直线的距离

设$P_0(x_0,y_0,z_0)$为空间一定点，过点$P_1(x_1,y_1,z_1)$且方向向量为$\vec{s}$的直线用$l(P_1,\vec{s})$表示。点P_0到直线l的距离用$d(P_0,l)$表示。



显然，$d(P_0,l)=|\overrightarrow{P_1P_0}|\sin\theta$(其中$\theta$为$\vec{s}$与$\overrightarrow{P_1P_0}$的夹角)。由

$$|\vec{s}\times\overrightarrow{P_1P_0}|=|\vec{s}||\overrightarrow{P_1P_0}|\sin\theta$$

可得$d(P_0,l)=\frac{|\vec{s}\times\overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{s}|}$

也可改写为$d(P_0,l)=|\frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}\times\overrightarrow{P_1P_0}|$

表示向量$\overrightarrow{P_1P_0}$在直线方向向量$\vec{s}$上的外射影的长度。

小结

- 点到平面的距离用内积
- 点到直线的距离用外积

其他类型的距离均可转化为点到平面和点到直线的距离

两平行平面间的距离

例： 求下列两平行平面π_1和π_2之间的距离$d(\pi_1, \pi_2)$, 其中

$$\begin{aligned}\pi_1 :& x + 2y - 2z + 3 = 0,\\ \pi_2 :& 2x + 4y - 4z - 3 = 0.\end{aligned}$$

解法一： 在π_1上取一点$P(-3, 0, 0)$,则

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|2 \times (-3) + 4 \times 0 - 4 \times 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{2}.$$

解法二：若两平行平面方程可以写为：

$$\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$$
$$\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

设$P_1(x_1, y_1, z_1)$在平面π_1上，根据点到平面的距离有：

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

注意到$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0$，最终有：

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

将平面π_2的方程改写为：$x + 2y - 2z - \frac{3}{2} = 0$。有：

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{3 + \frac{3}{2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{2}.$$

两平行直线间的距离

例: 求两条平行直线$l_1(P_1,\vec{s}_1)$和$l_2(P_2,\vec{s}_2)$ 的距离$d(l_1,l_2)$, 其中

$$l_1(P_1,\vec{s}_1):\frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{2},$$
$$l_2(P_2,\vec{s}_2):\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-2}{4}.$$

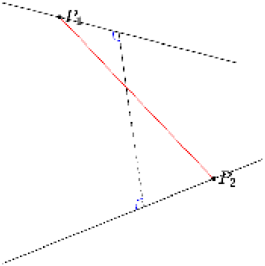
解: 转化为点到直线的距离：$d(l_1,l_2)=d(P_2,l_1)$.
由$P_1(0,2,1)$,$P_2(1,2,2)$,知$\overrightarrow{P_1P_2}(1,0,1)$.
此时：$\vec{s}_1\times\overrightarrow{P_1P_2}$的坐标为：

$$\left(\begin{vmatrix}2&2\\0&1\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\1&0\end{vmatrix}\right)=(2,1,-2).$$

从而$|\vec{s}_1\times\overrightarrow{P_1P_2}|=3$再由$|\vec{s}_1|=3$可得$d(P_2,l_1)=\frac{|\vec{s}_1\times\overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{s}_1|}=1$。
因此, $d(l_1,l_2)=1$.

两异面直线间的距离

求两条异面直线$l_1(P_1, \vec{s}_1)$和$l_2(P_2, \vec{s}_2)$ 的距离$d(l_1, l_2)$。



其实可以理解为两条异面直线各自所在的平行平面之间的距离。
取$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$，则有：

$$d(l_1, l_2) = \left|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}\right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

最终的表达式为一个混合积。

若直线和平面平面平行，其间的距离也可化为直线上一点到平面的距离来求解。

注意：所有涉及到距离的计算当中，我们从未显示地求出过具体垂足的坐标，仅仅利用垂线的方向向量，再利用内积或外积的运算性质即可。

有关直线和平面的夹角有下列三种:

- 平面和平面夹角;
- 直线和直线的夹角;
- 直线和平面的夹角。

回忆向量$\vec{a}, \vec{b}$之间的夹角可以利用内积求解:

$$\boxed{\cos\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}}$$

两个平面的夹角

定义： 两个相交平面π_1, π_2的夹角是指两个平面交成四个二面角中的任意一个，即$\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle$或$\pi - \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle$。
若在直角坐标系中，两平面π_i的方程为：

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

则π_1, π_2的一个夹角θ满足：

$$\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

直线与直线的夹角规定为方向向量的夹角或方向向量夹角的补角。

$$\cos\theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$$

直线与平面的夹角规定为直线和其在平面上投影所夹的锐角x，即

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|} = \sin\theta$$

作业

习题2.2：P55
1(2),2,4(1),11.

习题2.3：P64
9(3),11(2),17

习题2.4：P73
1(2),2(2)(3),3(2),4(1),5(2),7

思考:9，注意和方向角的区别。