虽然上节中我们可以利用定义来计算一些特殊的行列式,

虽然上节中我们可以利用定义来计算一些特殊的行列式，但是一般而言，用定义计算n阶行列式将是十分复杂的。

虽然上节中我们可以利用定义来计算一些特殊的行列式，但是一般而言，用定义计算n阶行列式将是十分复杂的。具体来看:

虽然上节中我们可以利用定义来计算一些特殊的行列式，但是一般而言，用定义计算n阶行列式将是十分复杂的。具体来看:

乘法次数:$(n-1)\times n!$
加法次数:$n!-1$

虽然上节中我们可以利用定义来计算一些特殊的行列式，但是一般而言，用定义计算n阶行列式将是十分复杂的。具体来看:

乘法次数:$(n-1)\times n!$
加法次数:$n!-1$

总数$n\times n!-1$

虽然上节中我们可以利用定义来计算一些特殊的行列式，但是一般而言，用定义计算n阶行列式将是十分复杂的。具体来看:

乘法次数:$(n-1)\times n!$
加法次数:$n!-1$

总数$n\times n!-1$

还要考虑排列的奇偶性，计算量更大

虽然上节中我们可以利用定义来计算一些特殊的行列式，但是一般而言，用定义计算n阶行列式将是十分复杂的。具体来看:

乘法次数:$(n-1)\times n!$
加法次数:$n!-1$

总数$n\times n!-1$

还要考虑排列的奇偶性，计算量更大

接下来将讨论行列式的性质, 依据这些性质，行列式的计算就具有了可操作性.

1.4 n阶行列式的性质

1.4 n阶行列式的性质

所有性质的证明只需要理解即可，但性质本身一定要牢记并熟练应用

行列式的基本性质

行列式的基本性质

有n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

行列式的基本性质

有n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

我们将

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的基本性质

有n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

我们将

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为D的转置行列式,

行列式的基本性质

有n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

我们将

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为D的转置行列式, 有时候也记作D'.

性质1 行列式与它的转置行列式相等:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质1 行列式与它的转置行列式相等:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明:

性质1 行列式与它的转置行列式相等:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: 比较两边的展开式是否相等。

性质1 行列式与它的转置行列式相等:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: 比较两边的展开式是否相等。设$b_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$,

性质1 行列式与它的转置行列式相等:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: 比较两边的展开式是否相等。设$b_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$,

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

性质1 行列式与它的转置行列式相等:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: 比较两边的展开式是否相等。设$b_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$,

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{按列展开}}{=\!=\!=\!=}$$

性质1 行列式与它的转置行列式相等:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: 比较两边的展开式是否相等。设$b_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$,

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按列展开}} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n}$$

性质1 行列式与它的转置行列式相等:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: 比较两边的展开式是否相等。设$b_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$,

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按列展开}} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$$

性质1 行列式与它的转置行列式相等:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: 比较两边的展开式是否相等。设$b_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$,

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按列展开}} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} \xlongequal{\text{按行展开}} D.$$

性质1 行列式与它的转置行列式相等:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明: 比较两边的展开式是否相等。设$b_{ij} = a_{ji}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$,

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按列展开}} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} b_{j_1 1} b_{j_2 2} \cdots b_{j_n n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n} \xlongequal{\text{按行展开}} D.$$

行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立.

性质2: 交换任意两行(列)的位置，行列式的值变号.

性质2:交换任意两行(列)的位置，行列式的值变号.

证明:

设行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质2:交换任意两行(列)的位置，行列式的值变号.

证明:

设行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

交换D的p, q两行得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质2:交换任意两行(列)的位置，行列式的值变号.

证明:

设行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

交换D的p,q两行得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

比较两者的展开式。

性质2:交换任意两行(列)的位置, 行列式的值变号.

证明:

设行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

交换D的p,q两行得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

比较两者的展开式。

先不考虑符号, 任取D的一项$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$。

性质2:交换任意两行(列)的位置, 行列式的值变号.

证明:

设行列式为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

交换D的p, q两行得

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

比较两者的展开式。

先不考虑符号, 任取D的一项$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$。
同样的项也在D_1中;

性质2:交换任意两行(列)的位置，行列式的值变号.

证明:

设行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

交换D的p,q两行得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

比较两者的展开式。

先不考虑符号，任取D的一项$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$。
同样的项也在D_1中；反之亦然。

性质2:交换任意两行(列)的位置,行列式的值变号.

证明:

设行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

交换D的p, q两行得

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

比较两者的展开式。

先不考虑符号,任取D的一项$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{pj_p}\cdots a_{qj_q}\cdots a_{nj_n}$。
同样的项也在D_1中;反之亦然。
故不计符号,两展开式有相同的项。

再来比较这项分别在D和D_1中的符号.

再来比较这项分别在D和D_1中的符号.
在D中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)},$$

再来比较这项分别在D和D_1中的符号.
在D中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)},$$

在D_1中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_q \cdots j_p \cdots j_n)},$$

再来比较这项分别在D和D_1中的符号.
在D中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)},$$

在D_1中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_q \cdots j_p \cdots j_n)},$$

由于排列相差一个对换，以上两式符号相反。

再来比较这项分别在D和D_1中的符号.
在D中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)},$$

在D_1中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_q \cdots j_p \cdots j_n)},$$

由于排列相差一个对换，以上两式符号相反。

最后根据该项选取的任意性, 有$D_1 = -D$.

再来比较这项分别在D和D_1中的符号.
在D中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)},$$

在D_1中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_q \cdots j_p \cdots j_n)},$$

由于排列相差一个对换，以上两式符号相反。

最后根据该项选取的任意性，有$D_1 = -D$.

由性质1，交换任意两列结论也成立。

再来比较这项分别在D和D_1中的符号.
在D中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)},$$

在D_1中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_q \cdots j_p \cdots j_n)},$$

由于排列相差一个对换，以上两式符号相反。

最后根据该项选取的任意性, 有$D_1 = -D$.

由性质1，交换任意两列结论也成立。

推论1:如果行列式有两行(列)完全相同, 则行列式为零。

再来比较这项分别在D和D_1中的符号.
在D中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)},$$

在D_1中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_q \cdots j_p \cdots j_n)},$$

由于排列相差一个对换，以上两式符号相反。

最后根据该项选取的任意性, 有$D_1 = -D$.

由性质1，交换任意两列结论也成立。

推论1:如果行列式有两行(列)完全相同, 则行列式为零。

证明： 设行列式D有i, j两行完全相同, 交换i, j行形成的新行列式记为D_1. 则$D_1 = D$.

再来比较这项分别在D和D_1中的符号.
在D中的符号为
$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)},$$
在D_1中的符号为
$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_q \cdots j_p \cdots j_n)},$$
由于排列相差一个对换，以上两式符号相反。

最后根据该项选取的任意性, 有$D_1 = -D$.

由性质1，交换任意两列结论也成立。

推论1:如果行列式有两行(列)完全相同, 则行列式为零。

证明：设行列式D有i, j两行完全相同, 交换i, j行形成的新行列式记为D_1. 则$D_1 = D$.
又由性质2知$D_1 = -D$, 于是$D = -D$,

再来比较这项分别在D和D_1中的符号.
在D中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_p \cdots j_q \cdots j_n)},$$

在D_1中的符号为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_q \cdots j_p \cdots j_n)},$$

由于排列相差一个对换，以上两式符号相反。

最后根据该项选取的任意性, 有$D_1 = -D$.

由性质1，交换任意两列结论也成立。

推论1:如果行列式有两行(列)完全相同, 则行列式为零。

证明： 设行列式D有i, j两行完全相同, 交换i, j行形成的新行列式记为D_1. 则$D_1 = D$.
又由性质2知$D_1 = -D$, 于是$D = -D$, 从而$D = 0$.

行列式运算对某一行(列)具有线性

行列式运算对某一行(列)具有线性

性质3:

$$\text{第i行}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1+c_1 & b_2+c_2 & \cdots & b_n+c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

证明：

证明：直接看展开式，

证明： 直接看展开式，

$$左侧 = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots (b_{j_i} + c_{j_i}) \cdots a_{nj_n}$$

证明：直接看展开式，

$$
\begin{aligned}
\text{左侧} &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(b_{j_i}+c_{j_i})\cdots a_{nj_n} \\
&= \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots b_{j_i}\cdots a_{nj_n} \\
&+ \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots c_{j_i}\cdots a_{nj_n} \\
&= \text{右侧}.
\end{aligned}
$$

性质4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明： 与性质3的证明类似。

性质4

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明：与性质3的证明类似。

性质3与性质4，表明了行列式的运算遵从一定的线性。这是行列式最重要的性质。之后的研究均以此为基础。

推论2： 如果行列式有两行(列)成比例，则行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{p1} & ka_{p2} & \cdots & ka_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

推论2： 如果行列式有两行(列)成比例，则行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{p1} & ka_{p2} & \cdots & ka_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

证明： 结合性质4和推论1可得。

推论3： 行列式的某一行(列)的k倍加到另一行(列)行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1}+ka_{p1} & a_{q2}+ka_{p2} & \cdots & a_{qn}+ka_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论3： 行列式的某一行(列)的k倍加到另一行(列)行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1}+ka_{p1} & a_{q2}+ka_{p2} & \cdots & a_{qn}+ka_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明： 结合性质3和推论2可得.

推论3： 行列式的某一行(列)的k倍加到另一行(列)行列式不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & \cdots & a_{qn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{q1}+ka_{p1} & a_{q2}+ka_{p2} & \cdots & a_{qn}+ka_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明： 结合性质3和推论2可得.

性质及其推论一定要牢记，如果确实理解证明过程有困难，可以用二阶和三阶行列式验证一下帮助记忆

行列式性质在计算行列式中的应用

行列式性质在计算行列式中的应用

这些性质似乎看起来和行列式的计算没有关系，无非是说某些行列式相等的，相反的或者为零。

行列式性质在计算行列式中的应用

这些性质似乎看起来和行列式的计算没有关系，无非是说某些行列式相等的，相反的或者为零。

但是仔细回想一下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

行列式性质在计算行列式中的应用

这些性质似乎看起来和行列式的计算没有关系，无非是说某些行列式相等的，相反的或者为零。

但是仔细回想一下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这样的上三角行列式是非常容易计算的。

行列式性质在计算行列式中的应用

这些性质似乎看起来和行列式的计算没有关系，无非是说某些行列式相等的，相反的或者为零。

但是仔细回想一下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这样的上三角行列式是非常容易计算的。

自然的问题，任给一个行列式，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式性质在计算行列式中的应用

这些性质似乎看起来和行列式的计算没有关系，无非是说某些行列式相等的，相反的或者为零。
但是仔细回想一下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这样的上三角行列式是非常容易计算的。
自然的问题，任给一个行列式，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

能否将其转化为上三角行列式，再进行计算？

行列式性质在计算行列式中的应用

这些性质似乎看起来和行列式的计算没有关系，无非是说某些行列式相等的，相反的或者为零。

但是仔细回想一下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

这样的上三角行列式是非常容易计算的。

自然的问题，任给一个行列式，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

能否将其转化为上三角行列式，再进行计算？回答是肯定的。

例： 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

例： 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

解：

例： 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

解： 观察第一行和第二行，接近于相差2倍。

例： 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

解： 观察第一行和第二行，接近于相差2倍。第二行减去第一行的两倍，

例： 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

解： 观察第一行和第二行，接近于相差2倍。第二行减去第一行的两倍，得：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

例： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}.$$

解： 观察第一行和第二行，接近于相差2倍。第二行减去第一行的两倍，得：

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}.$$

根据

> **推论3：** 行列式的某一行(列)的k倍加到另一行(列)行列式不变。

例： 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

解： 观察第一行和第二行，接近于相差2倍。第二行减去第一行的两倍，得：

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

根据

> **推论3：** 行列式的某一行(列)的k倍加到另一行(列)行列式不变。

这两个行列式的值相同。

例： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}.$$

解： 观察第一行和第二行，接近于相差2倍。第二行减去第一行的两倍，得：

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}.$$

根据

> **推论3：** 行列式的某一行(列)的k倍加到另一行(列)行列式不变。

这两个行列式的值相同。如法炮制，

例： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}.$$

解： 观察第一行和第二行，接近于相差2倍。第二行减去第一行的两倍，得：

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}.$$

根据

> **推论3：** 行列式的某一行(列)的k倍加到另一行(列)行列式不变。

这两个行列式的值相同。如法炮制，第三行加上第一行，

例： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}.$$

解： 观察第一行和第二行，接近于相差2倍。第二行减去第一行的两倍，得：

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}.$$

根据

> **推论3：** 行列式的某一行(列)的k倍加到另一行(列)行列式不变。

这两个行列式的值相同。如法炮制，第三行加上第一行，得

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

差一些就是上三角行列式了，只需要

差一些就是上三角行列式了，只需要交换第二行和第三行。

差一些就是上三角行列式了，只需要交换第二行和第三行。

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

差一些就是上三角行列式了，只需要交换第二行和第三行。

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

注意添加负号

差一些就是上三角行列式了，只需要交换第二行和第三行。

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

注意添加负号

容易计算值为1，

差一些就是上三角行列式了，只需要交换第二行和第三行。

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

注意添加负号

容易计算值为1，根据行列式的基本性质及线性，初始行列式$D = 1$。

差一些就是上三角行列式了，只需要交换第二行和第三行。

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

注意添加负号

容易计算值为1，根据行列式的基本性质及线性，初始行列式$D = 1$。

返回来审视这个思路，利用性质转化为三角行列式，对任意行列式的计算都是适用的。

差一些就是上三角行列式了，只需要交换第二行和第三行。

$$
-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.
$$

注意添加负号

容易计算值为1，根据行列式的基本性质及线性，初始行列式$D = 1$。

返回来审视这个思路，利用性质转化为三角行列式，对任意行列式的计算都是适用的。

在用于更一般的例子前，先解决记号的问题：

差一些就是上三角行列式了，只需要交换第二行和第三行。

$$-\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix}.$$

注意添加负号

容易计算值为1，根据行列式的基本性质及线性，初始行列式$D=1$。

返回来审视这个思路，利用性质转化为三角行列式，对任意行列式的计算都是适用的。

在用于更一般的例子前，先解决记号的问题：

1. $r_i \div k$ (或$c_i \div k$)表示从第i行(列)提取公因子k;
2. $r_i + kr_j$(或$c_i + kc_j$)表示将第j行(列)的k倍加到第i行(列)；
3. $r_i \leftrightarrow r_j$ (或$c_i \leftrightarrow c_j$)表示交换第i行(列)与第j行(列)的位置.

差一些就是上三角行列式了，只需要交换第二行和第三行。

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

注意添加负号

容易计算值为1，根据行列式的基本性质及线性，初始行列式$D=1$。

返回来审视这个思路，利用性质转化为三角行列式，对任意行列式的计算都是适用的。

在用于更一般的例子前，先解决记号的问题：

1. $r_i \div k$ (或$c_i \div k$)表示从第i行(列)提取公因子k;
2. $r_i + kr_j$(或$c_i + kc_j$)表示将第j行(列)的k倍加到第i行(列)；
3. $r_i \leftrightarrow r_j$ (或$c_i \leftrightarrow c_j$)表示交换第i行(列)与第j行(列)的位置.

这里row代表行，$column$代表列。

例： 计算行列式$\begin{vmatrix} 7 & 13 & 1 \\ 7 & 24 & 7 \\ 11 & 24 & 4 \end{vmatrix}$

例： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 1 & \frac{1}{6} & 2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}.$$

例： 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 1 & \frac{1}{6} & 2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}.$$

解：

例： 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 1 & \frac{1}{6} & 2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}.$$

解：

$$D \xlongequal[r_4 \div \frac{1}{6}]{r_3 \div \frac{1}{2}} \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \\ 6 & 1 & 12 & 4 \end{vmatrix}$$

例： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 1 & \frac{1}{6} & 2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}.$$

解：

$$D \xlongequal[r_4 \div \frac{1}{6}]{r_3 \div \frac{1}{2}} \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \\ 6 & 1 & 12 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4 \div 2} \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 12 & 2 \end{vmatrix}$$

例： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 1 & \frac{1}{6} & 2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}.$$

解：

$$D \xlongequal[r_4\div\frac{1}{6}]{r_3\div\frac{1}{2}} \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \\ 6 & 1 & 12 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4\div 2} \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 12 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 12 & 2 \end{vmatrix}$$

例：计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 1 & \frac{1}{6} & 2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}.$$

解：

$$D \xlongequal[r_4\div\frac{1}{6}]{r_3\div\frac{1}{2}} \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \\ 6 & 1 & 12 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4\div 2} \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 12 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 12 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-6r_1]{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3-4r_1}} -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & -7 & -13 & -1 \\ 0 & -7 & -24 & -7 \\ 0 & -11 & -24 & -4 \end{vmatrix}$$

例： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 1 & \frac{1}{6} & 2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}.$$

解：

$$D \xlongequal[r_4\div\frac{1}{6}]{r_3\div\frac{1}{2}} \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \\ 6 & 1 & 12 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4\div 2} \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 12 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 12 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-6r_1]{\substack{r_2-3r_1 \\ r_3-4r_1}} -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & -7 & -13 & -1 \\ 0 & -7 & -24 & -7 \\ 0 & -11 & -24 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i\div(-1)} \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 13 & 1 \\ 0 & 7 & 24 & 7 \\ 0 & 11 & 24 & 4 \end{vmatrix}$$

例： 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 & -3 \\ 1 & \frac{1}{6} & 2 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}.$$

解：

$$D \xlongequal[r_4 \div \frac{1}{6}]{r_3 \div \frac{1}{2}} \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -6 \\ 6 & 1 & 12 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_4 \div 2} \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 12 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ 6 & 1 & 12 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 6r_1]{\substack{r_2 - 3r_1 \\ r_3 - 4r_1}} -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & -7 & -13 & -1 \\ 0 & -7 & -24 & -7 \\ 0 & -11 & -24 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{r_i \div (-1)} \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 13 & 1 \\ 0 & 7 & 24 & 7 \\ 0 & 11 & 24 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_4} -\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & 7 \\ 0 & 7 & 24 & 7 \\ 0 & 4 & 24 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-4r_2]{r_3-7r_2} -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & -67 & -42 \\ 0 & 0 & -28 & -17 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-4r_2]{r_3-7r_2} -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & -67 & -42 \\ 0 & 0 & -28 & -17 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-28r_3]{\substack{r_4\div(-1)\\ r_3\div(-67)}} -\frac{67}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{42}{67} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-37}{67} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-4r_2]{r_3-7r_2} -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & -67 & -42 \\ 0 & 0 & -28 & -17 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-28r_3]{\substack{r_4\div(-1)\\ r_3\div(-67)}} -\frac{67}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 13 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{42}{67} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-37}{67} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{67}{6} \times \frac{-37}{67} = \frac{37}{6}.$$

思路总结

思路总结

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

思路总结

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

理想的状况：

思路总结

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

理想的状况：

第1行的$-\frac{a_{21}}{a_{11}}\cdots-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$倍分别加到第2 行到第$n$行，

思路总结

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

理想的状况：

第1行的$-\frac{a_{21}}{a_{11}}\cdots-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$倍分别加到第2 行到第$n$行，

第2行的$-\frac{a_{32}}{a_{22}}\cdots-\frac{a_{n2}}{a_{22}}$倍分别加到第3 行到第$n$行，

思路总结

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

理想的状况：

第1行的$-\frac{a_{21}}{a_{11}} \cdots -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$倍分别加到第2 行到第$n$行，

第2行的$-\frac{a_{32}}{a_{22}} \cdots -\frac{a_{n2}}{a_{22}}$倍分别加到第3 行到第$n$行，

类推。

思路总结

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

理想的状况：

第1行的$-\frac{a_{21}}{a_{11}}\cdots-\frac{a_{n1}}{a_{11}}$倍分别加到第2 行到第$n$行，

第2行的$-\frac{a_{32}}{a_{22}}\cdots-\frac{a_{n2}}{a_{22}}$倍分别加到第3 行到第$n$行，

类推。

总的计算次数：

$$2[(n-1)^2+(n-2)^2+\cdot+2^2+1]=2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

思路总结

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

理想的状况:
第1行的$-\frac{a_{21}}{a_{11}} \cdots -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$倍分别加到第2 行到第$n$行,
第2行的$-\frac{a_{32}}{a_{22}} \cdots -\frac{a_{n2}}{a_{22}}$倍分别加到第3 行到第$n$行,
类推。

总的计算次数:

$$2[(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdot + 2^2 + 1] = 2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

而且,更重要的是,无需计算逆序数。

思路总结

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

理想的状况：
第1行的$-\frac{a_{21}}{a_{11}} \cdots -\frac{a_{n1}}{a_{11}}$倍分别加到第2 行到第$n$行，
第2行的$-\frac{a_{32}}{a_{22}} \cdots -\frac{a_{n2}}{a_{22}}$倍分别加到第3 行到第$n$行，
类推。

总的计算次数：

$$2[(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdot + 2^2 + 1] = 2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

而且，更重要的是，无需计算逆序数。

例： 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

例： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解：

例：计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解：

$$D \xlongequal[r_4 - 4r_1]{\substack{r_2+3r_1 \\ r_3-5r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

例： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解：

$$D \overset{\substack{r_2+3r_1\\ r_3-5r_1}}{\underset{r_4-4r_1}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\underset{r_2\leftrightarrow r_3}{=\!=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

例： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解：

$$D \xlongequal[r_4-4r_1]{\substack{r_2+3r_1 \\ r_3-5r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2\leftrightarrow r_3]{r_3\leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

例： 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & -2 \\ 5 & -2 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

解：

$$D \xlongequal[r_4-4r_1]{\substack{r_2+3r_1 \\ r_3-5r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_3-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 18$$

另一种方式

解:

$$D \xlongequal[r_4-4r_1]{\substack{r_2+3r_1\\ r_3-5r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

另一种方式

解：

$$D \xlongequal[r_4-4r_1]{\substack{r_2+3r_1\\ r_3-5r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_4} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

另一种方式

解：

$$D \xlongequal[r_4-4r_1]{\substack{r_2+3r_1\\ r_3-5r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_4} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_2]{r_3-r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{vmatrix}$$

另一种方式

解：

$$D \xlongequal[r_4-4r_1]{\substack{r_2+3r_1\\ r_3-5r_1}} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 \leftrightarrow c_4} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_2]{r_3-r_2} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_3} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 18$$

专题：特殊行列式的计算

专题：特殊行列式的计算

以上介绍的只是将行列式化为三角行列式的最普通的方法，但是具体到一些特殊的行列式，往往根据行列式自身的特点，有更为简便的方法将它们化为三角行列式

例： 计算n阶行列式，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

例： 计算n阶行列式,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

解：

例： 计算n阶行列式，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

解： 可以按标准的思路直接来做，大家可以是尝试一下，

例： 计算n阶行列式，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

解： 可以按标准的思路直接来做，大家可以是尝试一下，但不是最简便的方法。

例： 计算n阶行列式，

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

解： 可以按标准的思路直接来做，大家可以是尝试一下，但不是最简便的方法。行或者列中的元素不计次序的话都是一样的，

例： 计算n阶行列式，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

解： 可以按标准的思路直接来做，大家可以是尝试一下，但不是最简便的方法。行或者列中的元素不计次序的话都是一样的，即它们的和相同。

例： 计算n阶行列式,

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

解： 可以按标准的思路直接来做，大家可以是尝试一下，但不是最简便的方法。行或者列中的元素不计次序的话都是一样的，即它们的和相同。

$$D\ \overset{r_1+r_j}{\underset{j=2,3,\cdots,n}{=\!=\!=\!=\!=}}\ \begin{vmatrix} 1+(n-1)x & 1+(n-1)x & 1+(n-1)x & \cdots & 1+(n-1)x \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 \div (1+(n-1)x)} (1+(n-1)x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 \div (1+(n-1)x)} (1+(n-1)x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{r_j - x r_1} (1+(n-1)x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1 \div (1+(n-1)x)} (1+(n-1)x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{r_j - x r_1} (1+(n-1)x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$= [1+(n-1)x](1-x)^{n-1}$$

$$\xlongequal{r_1\div(1+(n-1)x)}(1+(n-1)x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{r_j-xr_1}(1+(n-1)x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}$$

$$=[1+(n-1)x](1-x)^{n-1}$$

也可以对列进行相同的操作

$$
\xlongequal{r_1\div(1+(n-1)x)} (1+(n-1)x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & 1 & x & \cdots & x \\ x & x & 1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[j=2,3,\cdots,n]{r_j-xr_1} (1+(n-1)x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix}
$$

$$
= [1+(n-1)x](1-x)^{n-1}
$$

也可以对列进行相同的操作

很常用的方法，考试一定会考到。

例：计算4阶行列式，

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

例： 计算4阶行列式，

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解： 大家最先想到什么办法是：

例： 计算4阶行列式，

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解： 大家最先想到什么办法是：

$$D \xlongequal[\substack{c_2-bc_1 \\ c_3-cc_1 \\ c_4-dc_1}]{c_1 \div a} a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & a+b & a+b+c \\ 1 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 1 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$$

例：计算4阶行列式，

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解：大家最先想到什么办法是：

$$D \xlongequal[\substack{c_2-bc_1 \\ c_3-cc_1 \\ c_4-dc_1}]{c_1 \div a} a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & a+b & a+b+c \\ 1 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 1 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_3-cc_2 \\ c_4-dc_2}]{c_2 \div a} a^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & a+b \\ 1 & 2 & 3a & 4a+3b \\ 1 & 3 & 6a & 10a+6b \end{vmatrix}$$

例：计算4阶行列式，

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解：大家最先想到什么办法是：

$$D \xlongequal[\substack{c_2-bc_1\\ c_3-cc_1\\ c_4-dc_1}]{c_1\div a} a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & a+b & a+b+c \\ 1 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 1 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{c_3-cc_2\\ c_4-dc_2}]{c_2\div a} a^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & a+b \\ 1 & 2 & 3a & 4a+3b \\ 1 & 3 & 6a & 10a+6b \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-bc_3]{c_3\div a} a^3\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & 4a \\ 1 & 3 & 6 & 10a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4 \div a} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4 \div a} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - c_2]{c_3 - c_2} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4 \div a} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - c_2]{c_3 - c_2} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4 - 2c_3} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4 \div a} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - c_2]{c_3 - c_2} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4 - 2c_3} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^4$$

$$\xlongequal{c_4 \div a} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - c_2]{c_3 - c_2} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4 - 2c_3} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^4$$

运算还是很复杂。

$$\xlongequal{c_4 \div a} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - c_2]{c_3 - c_2} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4 - 2c_3} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^4$$

运算还是很复杂。是否还有更简便的办法?

$$\xlongequal{c_4 \div a} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - c_2]{c_3 - c_2} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4 - 2c_3} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^4$$

运算还是很复杂。是否还有更简便的办法?

事实上，用第1行或者第1列化简其他行和列仅仅是一种习惯；

$$\xlongequal{c_4 \div a} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4 - c_2]{c_3 - c_2} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_4 - 2c_3} a^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = a^4$$

运算还是很复杂。是否还有更简便的办法？

事实上，用第1行或者第1列化简其他行和列仅仅是一种习惯；我们完全可以反过来。

解法二:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解法二：

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

从第4行开始，后行减前行：

解法二：

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

从第4行开始，后行减前行：

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_2\\ r_2-r_1}]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

解法二：

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

从第4行开始，后行减前行：

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_2\\ r_2-r_1}]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

继续进行类似的操作，第4行减第3行，第3 行减第2行：

解法二：

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

从第4行开始，后行减前行：

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_2 \\ r_2-r_1}]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

继续进行类似的操作，第4行减第3行，第3 行减第2行：

$$\xlongequal[r_4-r_3]{r_3-r_2} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

解法二：

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

从第4行开始，后行减前行：

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_2\\ r_2-r_1}]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

继续进行类似的操作，第4行减第3行，第3 行减第2行：

$$\xlongequal[r_4-r_3]{r_3-r_2} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

解法二:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

从第4行开始，后行减前行:

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_2\\ r_2-r_1}]{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

继续进行类似的操作，第4行减第3行，第3 行减第2行:

$$\xlongequal[r_4-r_3]{r_3-r_2} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

这样的解法我们下一节中还会遇到，也很重要。

例： 计算n阶行列式，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

例： 计算n阶行列式，

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解：

例： 计算n阶行列式，

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解： 注意观察，行列式中已经有很多零，接近上三角或下三角行列式。

例： 计算n阶行列式，

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解： 注意观察，行列式中已经有很多零，接近上三角或下三角行列式。如果用第1行的k倍消去其他行第1列上的元素，反倒增加了很多非零项。

例： 计算n阶行列式，

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}.$$

解： 注意观察，行列式中已经有很多零，接近上三角或下三角行列式。如果用第1行的k倍消去其他行第1列上的元素，反倒增加了很多非零项。

在这样特殊的情况下，逆向考虑，只要能把第1行的2至n列的元素消去即可。

将第2行的$-\frac{1}{2}$倍，

将第2行的$-\frac{1}{2}$倍，将第3行的$-\frac{1}{3}$倍，

将第2行的$-\frac{1}{2}$倍，将第3行的$-\frac{1}{3}$倍，$\cdots$,将第n行的$-\frac{1}{n}$倍加到第一行得到,

将第2行的$-\frac{1}{2}$倍，将第3行的$-\frac{1}{3}$倍，$\cdots$,将第n行的$-\frac{1}{n}$倍加到第一行得到，

$$D \xlongequal[i=2,3,\cdots n]{r_1-\frac{1}{i}r_i} \begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i}2^{i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$= (1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}2^{i-1}) \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

$$= -\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{i}2^{i-1} \cdot n!.$$

将第2行的$-\frac{1}{2}$倍，将第3行的$-\frac{1}{3}$倍，$\cdots$,将第n行的$-\frac{1}{n}$倍加到第一行得到,

$$D \xlongequal[i=2,3,\cdots n]{r_1-\frac{1}{i}r_i} \begin{vmatrix} 1-\sum\limits_{i=2}^{n}\frac{1}{i}2^{i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 4 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$= (1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}2^{i-1}) \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

$$= -\sum_{i=3}^{n}\frac{1}{i}2^{i-1} \cdot n!.$$

也可以对列做类似操作

例： 计算$n+1$阶行列式，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots b_n & a_n \end{vmatrix}$$

例： 计算$n+1$阶行列式，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots b_n & a_n \end{vmatrix}$$

解：

例：计算$n+1$阶行列式，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots b_n & a_n \end{vmatrix}$$

解：涉及到a的部分比较简单，可以先化简

例： 计算$n+1$阶行列式，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots b_n & a_n \end{vmatrix}$$

解： 涉及到a的部分比较简单，可以先化简

$$D \xlongequal[i=2,\cdots,n+1p]{r_i-a_{i-1}r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 1 \\ b_1-a_1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1-a_2 & b_2-a_2 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1-a_n & b_2-a_n & b_3-a_n & \cdots b_n-a_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$D \xlongequal[c_i - c_{n+1}]{i=1,\cdots,n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \\ b_1 - a_1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1 - a_2 & b_2 - a_2 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 - a_n & b_2 - a_n & b_3 - a_n & \cdots b_n - a_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$D \xlongequal[c_i - c_{n+1}]{i=1,\cdots,n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \\ b_1 - a_1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1 - a_2 & b_2 - a_2 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 - a_n & b_2 - a_n & b_3 - a_n & \cdots b_n - a_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n)$$
$$= (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\cdots(a_n - b_n)$$

$$D \xlongequal[c_i - c_{n+1}]{i=1,\cdots,n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \\ b_1 - a_1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1 - a_2 & b_2 - a_2 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 - a_n & b_2 - a_n & b_3 - a_n & \cdots b_n - a_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$
$$= (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdots (a_n - b_n)$$

注意： 我们可以引入连乘符号：$\prod_{i=1}^{n}(a_i - b_i)$来记乘积$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \cdots (a_n - b_n)$

$$D \xlongequal[c_i - c_{n+1}]{i=1,\cdots,n} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \\ b_1 - a_1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1 - a_2 & b_2 - a_2 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 - a_n & b_2 - a_n & b_3 - a_n & \cdots b_n - a_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cdots(b_n - a_n)$$
$$= (a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\cdots(a_n - b_n)$$

注意： 我们可以引入连乘符号：$\prod_{i=1}^{n}(a_i - b_i)$来记乘积$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\cdots(a_n - b_n)$

中间过程还可以怎样化简？

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 1 \\ b_1 - a_1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1 - a_2 & b_2 - a_2 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 - a_n & b_2 - a_n & b_3 - a_n & \cdots b_n - a_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 1 \\ b_1 - a_1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1 - a_2 & b_2 - a_2 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 - a_n & b_2 - a_n & b_3 - a_n & \cdots b_n - a_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ r_n \leftrightarrow r_{n+1}}]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}} (-1)^n \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1 - a_2 & b_2 - a_2 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 - a_n & b_2 - a_n & b_3 - a_n & \cdots b_n - a_n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 1 \\ b_1-a_1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1-a_2 & b_2-a_2 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1-a_n & b_2-a_n & b_3-a_n & \cdots b_n-a_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ r_n \leftrightarrow r_{n+1}}]{\substack{r_1 \leftrightarrow r_2 \\ r_2 \leftrightarrow r_3}} (-1)^n \begin{vmatrix} b_1-a_1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1-a_2 & b_2-a_2 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1-a_n & b_2-a_n & b_3-a_n & \cdots b_n-a_n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 1 \end{vmatrix}$$

这道题目还可以如何求解?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 1 \\ b_1-a_1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1-a_2 & b_2-a_2 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1-a_n & b_2-a_n & b_3-a_n & \cdots b_n-a_n & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\cdots \\ r_n\leftrightarrow r_{n+1}}]{\substack{r_1\leftrightarrow r_2 \\ r_2\leftrightarrow r_3}}(-1)^n \begin{vmatrix} b_1-a_1 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ b_1-a_2 & b_2-a_2 & 0 & \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1-a_n & b_2-a_n & b_3-a_n & \cdots b_n-a_n & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & 1 \end{vmatrix}$$

这道题目还可以如何求解？

这几个例题都很典型，大家一定要熟练掌握

利用性质进行行列式计算的一些注意事项

1. 熟练之后可不用写行列操作的记号r, c；
2. 注意观察行列式自身的特点，灵活运用性质。特别要注意的是：$r_j - kr_1$，r_1就是我们的“斧子”，工欲善其事，必先利其器：先想办法改进第一行的形式，再利用其化简其他行。

习题1,P25

11(3)(5)(6)

习题1,P25

11(3)(5)(6)
12(1)(2)(3)

练习题

1. 计算n阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

2. 计算行列式：

$$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$$