二级、三级行列式的展开式

二级(阶)行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

二级、三级行列式的展开式

二级(阶)行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

三级(阶)行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

注: 三级行列式结果可借助于对角线规则记忆。

排列

概念： n级排列，逆序，逆序数，偶排列，奇排列，对换。

排列

概念： n级排列，逆序，逆序数，偶排列，奇排列，对换。

定理1:对换改变排列的奇偶性。

排列

概念： n级排列，逆序，逆序数，偶排列，奇排列，对换。

定理1:对换改变排列的奇偶性。

推论1:$n(n \geq 2)$级排列中，奇偶排列数相等，各为$\frac{n!}{2}$个。

排列

概念： n级排列，逆序，逆序数，偶排列，奇排列，对换。

定理1:对换改变排列的奇偶性。

推论1:$n(n \geq 2)$级排列中，奇偶排列数相等，各为$\frac{n!}{2}$个。

推论2:偶数次对换不改变排列的奇偶性，奇数次对换改变排列的奇偶性。

排列

概念： n级排列，逆序，逆序数，偶排列，奇排列，对换。

定理1:对换改变排列的奇偶性。

推论1:$n(n \geq 2)$级排列中，奇偶排列数相等，各为$\frac{n!}{2}$个。

推论2:偶数次对换不改变排列的奇偶性，奇数次对换改变排列的奇偶性。

定理2:任意一个n级排列与排列$12\cdots n$都可以经过一系列对换互换，且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性。

排列

概念： n级排列，逆序，逆序数，偶排列，奇排列，对换。

定理1:对换改变排列的奇偶性。

推论1:$n(n \geq 2)$级排列中，奇偶排列数相等，各为$\frac{n!}{2}$个。

推论2:偶数次对换不改变排列的奇偶性，奇数次对换改变排列的奇偶性。

定理2:任意一个n级排列与排列$12\cdots n$都可以经过一系列对换互换，且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性。

推论3:设$i_1 i_2 \cdots i_n$与$j_1 j_2 \cdots j_n$是任意两个n级排列，则经过一系列对换总可把$i_1 i_2 \cdots i_n$化成$j_1 j_2 \cdots j_n$。

n级行列式

定义:n级行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有n级排列求和。

n级行列式

定义: n级行列式

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有n级排列求和。

$$\Delta_n = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n \text{固定}, j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \text{固定}, i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

行列式的性质

性质1:行列互换,行列式值不变,即行列式与其转置行列式相等。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

性质1:行列互换,行列式值不变,即行列式与其转置行列式相等。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注:行列式中，行与列的地位是对称的。

行列式的性质

性质2: 用一个数k乘行列式的一行(列)，等于用k乘此行列式，即行列式中行(列)的公因子可提出；特别地，若$k=0$，即若行列式中一行(列)为零，则行列式为零。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

性质3:若行列式某一行(列)是两组数的和，则这个行列式等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行(列)外全与原来行列式的对应的行(列)一样。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质

性质4:若行列式中有两行(列)相同，则行列式为零。

行列式的性质

性质4:若行列式中有两行(列)相同，则行列式为零。

性质5:若行列式中有两行(列)成比例，则行列式为零。

行列式的性质

性质4:若行列式中有两行(列)相同，则行列式为零。

性质5:若行列式中有两行(列)成比例，则行列式为零。

性质6:把一行(列)的倍数加到另一行(列)，行列式的值不变。

行列式的性质

性质4:若行列式中有两行(列)相同，则行列式为零。

性质5:若行列式中有两行(列)成比例，则行列式为零。

性质6:把一行(列)的倍数加到另一行(列)，行列式的值不变。

性质7:交换行列式中两行(列)位置，行列式的值变号。

特殊行列式

定义： 在一个行列式中，由左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，其上元素称为**主对角线元素**；由右上角到左下角的对角线称为**次对角线**。

特殊行列式

定义：在一个行列式中，由左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，其上元素称为**主对角线元素**；由右上角到左下角的对角线称为**次对角线**。

1、三角行列式: 主对角线**下方(上方)**的元素全为零的行列式称为**上(下)**三角行列式, 即$i > j(i < j)$时,$a_{ij} = 0$,行列式称为**上(下)**三角行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特殊行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

特殊行列式

2、对角行列式:主对角线以外的元素全为零的行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

特殊行列式

2、对角行列式:主对角线以外的元素全为零的行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

3、对称行列式与反对称行列式:对$\forall i,j$,若$a_{ij}=a_{ji}(a_{ij}=-a_{ji})$,则称行列式为**对称(反对称)**行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

特殊行列式

2、对角行列式:主对角线以外的元素全为零的行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

3、对称行列式与反对称行列式:对$\forall i, j$,若$a_{ij} = a_{ji}(a_{ij} = -a_{ji})$,则称行列式为**对称(反对称)**行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

注: 奇数阶反对称行列式值为0。 $(P67, 例2)$

特殊行列式

4、范德蒙德(Vandermonde)行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n} (a_i - a_j)$$

4、范德蒙德(Vandermonde)行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le j<i\le n}(a_i - a_j)$$

注： 范德蒙德行列式为零的充要条件是$a_1, a_2, \cdots, a_n$中至少有两个相等。

定义5： 由$m \times n$个数$a_{ij}(1 \le i \le m; 1 \le j \le n)$排成$m$行$n$列的数表：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为$m \times n$**矩阵**，通常用**大写**黑斜体字母表示，也可记作$(a_{ij})_{m \times n}$**或**(a_{ij})**或**$\mathbf{A}_{m \times n}$。

矩阵的概念

定义5： 由$m \times n$个数$a_{ij}(1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n)$排成$m$行$n$列的数表：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为$m \times n$**矩阵**，通常用**大写**黑斜体字母表示，也可记作$(a_{ij})_{m \times n}$**或**(a_{ij})**或**$\mathbf{A}_{m \times n}$。

数a_{ij}称为矩阵$\mathbf{A}$的第i行第j列的元素，简称为(i,j)**元素**，i称为元素a_{ij}的**行指标**，j称为**列指标**。

矩阵的概念

注： (1)若矩阵$\mathbf{A}$的元素都是某个数域P中的数时，则称之为**数域P上的矩阵**。

矩阵的概念

注：(1)若矩阵$\mathbf{A}$的元素都是某个数域P中的数时，则称之为**数域P上的矩阵**。

(2) 当$m=n$时,称之为**n级(阶)矩阵或n级(阶)方阵**。特别地,当$m=n=1$时,也记$(a_{11})=a_{11}$，即一阶矩阵是一个数。

矩阵的概念

注：(1)若矩阵$\mathbf{A}$的元素都是某个数域P中的数时，则称之为**数域P上的矩阵**。

(2) 当$m=n$时,称之为**n级(阶)矩阵或n级(阶)方阵**。特别地,当$m=n=1$时,也记$(a_{11})=a_{11}$，即一阶矩阵是一个数。

(3)$m\times 1$矩阵(只有1列的矩阵)称为**列矩阵或m维列向量**。$1\times n$矩阵(只有1行的矩阵)称为**行矩阵或n维行向量**。向量通常用**小写**黑斜体的英文或希腊字母表示。

矩阵的概念

注：(1)若矩阵$\mathbf{A}$的元素都是某个数域P中的数时，则称之为**数域P上的矩阵**。

(2) 当$m=n$时,称之为**n级(阶)矩阵或n级(阶)方阵**。特别地,当$m=n=1$时,也记$(a_{11})=a_{11}$，即一阶矩阵是一个数。

(3)$m\times 1$矩阵(只有1列的矩阵)称为**列矩阵或m维列向量**。$1\times n$矩阵(只有1行的矩阵)称为**行矩阵或n维行向量**。向量通常用**小写**黑斜体的英文或希腊字母表示。

(4) 若两个$m\times n$矩阵A和B的对应元素都相等,即$a_{ij}=b_{ij}(1\leq i\leq m,1\leq j\leq n)$,称**$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$相等**,记作$\mathbf{A}=\mathbf{B}$。

矩阵的概念

注：(1)若矩阵$\mathbf{A}$的元素都是某个数域P中的数时，则称之为**数域P上的矩阵**。

(2) 当$m=n$时,称之为**n级(阶)矩阵或n级(阶)方阵**。特别地,当$m=n=1$时,也记$(a_{11})=a_{11}$，即一阶矩阵是一个数。

(3)$m\times 1$矩阵(只有1列的矩阵)称为**列矩阵或m维列向量**。$1\times n$矩阵(只有1行的矩阵)称为**行矩阵或n维行向量**。向量通常用**小写**黑斜体的英文或希腊字母表示。

(4) 若两个$m\times n$矩阵A和B的对应元素都相等,即$a_{ij}=b_{ij}(1\le i\le m, 1\le j\le n)$,称**$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$相等**,记作$\mathbf{A}=\mathbf{B}$。

(5)若一个$m\times n$矩阵的所有元素都是0，称它为$m\times n$**零矩阵**，记为$\mathbf{O}_{m\times n}$，在不混淆的情况下可简记为0。

n阶矩阵与n阶行列式

记号： 设$\mathbf{A} = (a_{ij})$为任意一个n阶矩阵，称行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为矩阵A的行列式，记作$|A|$或$\det A$。

n阶矩阵与n阶行列式

记号： 设$\mathbf{A} = (a_{ij})$为任意一个n阶矩阵，称行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为矩阵A的行列式，记作$|A|$或$\det A$。

行列式与矩阵的区别:

(1)行列式记号是两边加两条竖线,矩阵记号是两边加括号;

n阶矩阵与n阶行列式

记号： 设$\mathbf{A} = (a_{ij})$为任意一个n阶矩阵，称行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为矩阵A的行列式，记作$|A|$或$\det A$。

行列式与矩阵的区别:

(1)行列式记号是两边加两条竖线,矩阵记号是两边加括号;

(2)行列式本身是一个数,而矩阵是一个数表;

n阶矩阵与n阶行列式

记号： 设$\mathbf{A}=(a_{ij})$为任意一个n阶矩阵，称行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为**矩阵A的行列式**，记作$|A|$或$\det A$。

行列式与矩阵的区别:

(1)行列式记号是两边加两条竖线,矩阵记号是两边加括号;

(2)行列式本身是一个数,而矩阵是一个数表;

(3)只有方阵才有行列式,当$m \neq n$时,$m \times n$矩阵没有行列式.

定义6: 设$\mathbf{A}$是数域P上的$m \times n$矩阵,下列变换称为矩阵的**行初等变换:**

定义6: 设$\mathbf{A}$是数域P上的$m \times n$矩阵,下列变换称为矩阵的**行初等变换:**

(1)倍法变换： 把$\mathbf{A}$的第i行乘以P中一个**非零数**k,记作kr_i或$i(k)$;

矩阵的初等变换

定义6:设$\mathbf{A}$是数域P上的$m \times n$矩阵,下列变换称为矩阵的**行初等变换:**

(1)倍法变换: 把$\mathbf{A}$的第i行乘以P中一个**非零数**k,记作kr_i或$i(k)$;

(2)消法变换: 把$\mathbf{A}$的第j行乘以P中的一个数k加到第i行, 记作$r_i + kr_j$或$(i, j(k))$;

矩阵的初等变换

定义6:设$\mathbf{A}$是数域P上的$m \times n$矩阵,下列变换称为矩阵的**行初等变换:**

(1)倍法变换：把$\mathbf{A}$的第i行乘以P中一个**非零数**k,记作kr_i或$i(k)$;

(2)消法变换：把$\mathbf{A}$的第j行乘以P中的一个数k加到第i行, 记作$r_i + kr_j$或$(i, j(k))$;

(3)换法变换：交换$\mathbf{A}$的第i行与第j行元素,记作$r_i \leftrightarrow r_j$或(i, j)。

矩阵的初等变换

定义6: 设**A**是数域P上的$m\times n$矩阵,下列变换称为矩阵的**行初等变换:**

(1)倍法变换： 把**A**的第i行乘以P中一个**非零数**k,记作kr_i或$i(k)$;

(2)消法变换： 把**A**的第j行乘以P中的一个数k加到第i行, 记作r_i+kr_j或$(i,j(k))$;

(3)换法变换： 交换**A**的第i行与第j行元素,记作$r_i\leftrightarrow r_j$或(i,j)。

注： (1)类似可定义矩阵的列初等变换，三种列初等变换分别记为$c_i\leftrightarrow c_j$，kc_i，c_i+kc_j。

矩阵的初等变换

定义6: 设$\mathbf{A}$是数域P上的$m \times n$矩阵,下列变换称为矩阵的**行初等变换:**

(1)倍法变换: 把$\mathbf{A}$的第i行乘以P中一个**非零数**k,记作kr_i或$i(k)$;

(2)消法变换: 把$\mathbf{A}$的第j行乘以P中的一个数k加到第i行, 记作$r_i + kr_j$或$(i, j(k))$;

(3)换法变换: 交换$\mathbf{A}$的第i行与第j行元素,记作$r_i \leftrightarrow r_j$或(i, j)。

注: (1)类似可定义矩阵的列初等变换,三种列初等变换分别记为$c_i \leftrightarrow c_j$,kc_i,$c_i + kc_j$。

(2) 上述三种变换分别称为矩阵的第一类、第二类、第三类初等变换。

定义6: 设$\mathbf{A}$是数域P上的$m\times n$矩阵,下列变换称为矩阵的**行初等变换:**

(1)倍法变换: 把$\mathbf{A}$的第i行乘以P中一个**非零数**k,记作kr_i或$i(k)$;

(2)消法变换: 把$\mathbf{A}$的第j行乘以P中的一个数k加到第i行, 记作r_i+kr_j或$(i,j(k))$;

(3)换法变换: 交换$\mathbf{A}$的第i行与第j行元素,记作$r_i\leftrightarrow r_j$或(i,j)。

注: (1)类似可定义矩阵的列初等变换, 三种列初等变换分别记为$c_i\leftrightarrow c_j$, kc_i, c_i+kc_j。

(2) 上述三种变换分别称为矩阵的第一类、第二类、第三类初等变换。

(3)变换前后的矩阵之间用"$\rightarrow$"连接,所做变换写在"$\rightarrow$"的上方或下方.

阶梯形矩阵

定义： $m \times n$矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})$若满足条件：

(1)它的前r行$(1 \leq r \leq m)$是非零向量，其他各行都是零向量；

(2)若它的第k行$(1 \leq k \leq r)$的第一个非零元素是a_{k,j_k}(称为**先导元素**)，则$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$，即$j_1, j_2, \cdots, j_r$是严格递增的，

则称$\mathbf{A}$是**阶梯形矩阵**。

阶梯形矩阵

定义： $m \times n$矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})$若满足条件：

(1)它的前r行$(1 \le r \le m)$是非零向量，其他各行都是零向量；

(2)若它的第k行$(1 \le k \le r)$的第一个非零元素是a_{k,j_k}(称为**先导元素**)，则$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$，即$j_1, j_2, \cdots, j_r$是严格递增的，

则称$\mathbf{A}$是**阶梯形矩阵**。

定义： 设$\mathbf{A}$是阶梯形矩阵，其所有先导元素皆为1，且各先导元素所在的列的其它元素皆为0，则称$\mathbf{A}$为**简化阶梯形矩阵**。

阶梯形矩阵

定义： $m \times n$矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})$若满足条件：

(1)它的前r行$(1 \leq r \leq m)$是非零向量，其他各行都是零向量；

(2)若它的第k行$(1 \leq k \leq r)$的第一个非零元素是a_{k,j_k}(称为**先导元素**)，则$j_1 < j_2 < \cdots < j_r$，即$j_1, j_2, \cdots, j_r$是严格递增的，

则称$\mathbf{A}$是**阶梯形矩阵**。

定义： 设$\mathbf{A}$是阶梯形矩阵，其所有先导元素皆为1，且各先导元素所在的列的其它元素皆为0，则称$\mathbf{A}$为**简化阶梯形矩阵**。

定理:任何一个非零矩阵可经一系列行初等变换化为阶梯形矩阵。

阶梯形矩阵

定义： $m\times n$矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$若满足条件：

(1)它的前r行$(1\le r\le m)$是非零向量，其他各行都是零向量；

(2)若它的第k行$(1\le k\le r)$的第一个非零元素是a_{k,j_k}(称为**先导元素**)，则$j_1<j_2<\cdots<j_r$，即$j_1,j_2,\cdots,j_r$是严格递增的，

则称$\mathbf{A}$是**阶梯形矩阵**。

定义： 设$\mathbf{A}$是阶梯形矩阵，其所有先导元素皆为1，且各先导元素所在的列的其它元素皆为0，则称$\mathbf{A}$为**简化阶梯形矩阵**。

定理: 任何一个非零矩阵可经一系列行初等变换化为阶梯形矩阵。

注: 阶梯形方阵的行列式皆为上三角形，故可利用初等变换及行列式的性质化行列式为上三角形行列式后再进行计算。

定义7： 在n级行列式$|a_{ij}|$中划去元素a_{ij}所在的第i行和第j列,剩下的$(n-1)^2$个元素按原来的排法构成一个$n-1$级行列式，称为元素a_{ij}的**余子式**,记为M_{ij},并称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为a_{ij}的**代数余子式**。

行列式按行列展开

定义7： 在n级行列式$|a_{ij}|$中划去元素a_{ij}所在的第i行和第j列,剩下的$(n-1)^2$个元素按原来的排法构成一个$n-1$级行列式，称为元素a_{ij}的**余子式**,记为M_{ij},并称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为a_{ij}的**代数余子式**。

定理3： 设$d=|a_{ij}|$，A_{ij}表示元素a_{ij}的代数余子式，则

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is}=\begin{cases} d, & k=i \\ 0, & k\neq i \end{cases}, \quad \sum_{s=1}^{n} a_{sl}A_{sj}=\begin{cases} d, & l=j \\ 0, & l\neq j \end{cases}$$

行列式按行列展开

定义7： 在n级行列式$|a_{ij}|$中划去元素a_{ij}所在的第i行和第j列,剩下的$(n-1)^2$个元素按原来的排法构成一个$n-1$级行列式，称为元素a_{ij}的**余子式**,记为M_{ij},并称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为a_{ij}的**代数余子式**。

定理3： 设$d=|a_{ij}|$，A_{ij}表示元素a_{ij}的代数余子式，则

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is}=\begin{cases} d, & k=i \\ 0, & k\neq i \end{cases},\ \sum_{s=1}^{n} a_{sl}A_{sj}=\begin{cases} d, & l=j \\ 0, & l\neq j \end{cases}$$

定理3'： 行列式可按它的任何一行(或一列)展开，即行列式等于它的任何一行(或一列)各元素与该元素的代数余子式的乘积之和。

行列式按行列展开

定义7： 在n级行列式$|a_{ij}|$中划去元素a_{ij}所在的第i行和第j列,剩下的$(n-1)^2$个元素按原来的排法构成一个$n-1$级行列式，称为元素a_{ij}的**余子式**,记为M_{ij},并称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为a_{ij}的**代数余子式**。

定理3： 设$d=|a_{ij}|$，A_{ij}表示元素a_{ij}的代数余子式，则

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ks}A_{is} = \begin{cases} d, & k=i \\ 0, & k\neq i \end{cases}, \quad \sum_{s=1}^{n} a_{sl}A_{sj} = \begin{cases} d, & l=j \\ 0, & l\neq j \end{cases}$$

定理3'： 行列式可按它的任何一行(或一列)展开，即行列式等于它的任何一行(或一列)各元素与该元素的代数余子式的乘积之和。

注： 计算行列式时，可选择有较多零元素的行列展开。

行列式的计算方法

1、三角化法:对行列式通过恒等变形化为上(下)三角行列式。

行列式的计算方法

1、三角化法:对行列式通过恒等变形化为上(下)三角行列式。

常化为三角形的两类行列式:

(1)爪形:$a_i \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{b_j c_j}{a_j} & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{b_j c_j}{a_j}) a_2 \cdots a_n$$

行列式的计算方法

1、三角化法: 对行列式通过恒等变形化为上(下)三角行列式。

常化为三角形的两类行列式:

(1)爪形: $a_i \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{b_j c_j}{a_j} & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{b_j c_j}{a_j}) a_2 \cdots a_n$$

处理方法: (1)消去第一列(行)后化成三角行列式;

(2)直接按第一行(列)展开。 $(P100, 18(1))$

行列式的计算方法

可化为爪形的行列式类型:$x_i \neq a_i$

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

行列式的计算方法

可化为爪形的行列式类型:$x_i \neq a_i$

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

处理方法:(1)利用第一行(列)消去其他各行(列)，化为爪形；

行列式的计算方法

可化为爪形的行列式类型:$x_i \neq a_i$

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

处理方法:(1)利用第一行(列)消去其他各行(列)，化为爪形;

(2)加边法:通过新加的行(列)消去原来的所有行(列)，化为爪形;

行列式的计算方法

可化为爪形的行列式类型:$x_i \neq a_i$

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

处理方法:(1)利用第一行(列)消去其他各行(列),化为爪形;

(2)加边法:通过新加的行(列)消去原来的所有行(列),化为爪形;

(3)若各行(列)的和相等,则将各行(列)都加到第一行(列),然后提出公因子,再由第一行(列)消去其他各行(列),化为三角形。

$(P101, 18(5), P103, 4(3)(4))$

(2)滑梯形:$b_i \neq 0$

$$
\begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\
c_1 & b_1 & & & & \\
& c_2 & b_2 & & & \\
& & \ddots & \ddots & & \\
& & & c_{n-2} & b_{n-2} & \\
& & & & c_{n-1} & b_{n-1}
\end{vmatrix},
\begin{vmatrix}
a_0 & c_1 & & & & \\
a_1 & b_1 & c_2 & & & \\
a_2 & & b_2 & c_3 & & \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \\
a_{n-2} & & & & b_{n-2} & c_{n-1} \\
a_{n-1} & & & & & b_{n-1}
\end{vmatrix}
$$

行列式的计算方法

(2)滑梯形:$b_i \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ c_1 & b_1 & & & & \\ & c_2 & b_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & c_{n-2} & b_{n-2} & \\ & & & & c_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & c_1 & & & & \\ a_1 & b_1 & c_2 & & & \\ a_2 & & b_2 & c_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ a_{n-2} & & & & b_{n-2} & c_{n-1} \\ a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

处理方法:(1)依次将$c_{n-1}, c_{n-2}, \cdots, c_1$位置化为0，即得三角形;

(2)滑梯形:$b_i \neq 0$

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ c_1 & b_1 & & & & \\ & c_2 & b_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & c_{n-2} & b_{n-2} & \\ & & & & c_{n-1} & b_{n-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_0 & c_1 & & & & \\ a_1 & b_1 & c_2 & & & \\ a_2 & & b_2 & c_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ a_{n-2} & & & & b_{n-2} & c_{n-1} \\ a_{n-1} & & & & & b_{n-1} \end{vmatrix}$$

处理方法:(1)依次将$c_{n-1}, c_{n-2}, \cdots, c_1$位置化为0，即得三角形；

(2)直接按第一行(列)展开。 $(P100, 17(5), 18(2))$

行列式的计算方法

可化为滑梯形的:上述可化为爪形的亦可化为滑梯形

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$$

行列式的计算方法

可化为滑梯形的:上述可化为爪形的亦可化为滑梯形

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$$

处理方法:将第i行(列)乘-1加到第$i+1$行(列)$(i=n-1,\cdots,1)$。

2、行列展开降阶法:

(1)直接降阶：按行列式中零元素较多的行(列)展开；

$(P99, 17(1), P101, 18(3)(4))$

行列式的计算方法

2、行列展开降阶法:

(1)直接降阶：按行列式中零元素较多的行(列)展开；

$(P99, 17(1), P101, 18(3)(4))$

(2)间接降阶：利用行列式性质，使行列式的某行(列)具有较少的非零元，再按其展开。 $(P99, 17(4), P100, 18(2))$

2、行列展开降阶法:

(1)直接降阶： 按行列式中零元素较多的行(列)展开；

$(P99, 17(1), P101, 18(3)(4))$

(2)间接降阶： 利用行列式性质，使行列式的某行(列)具有较少的非零元，再按其展开。 $(P99, 17(4), P100, 18(2))$

注： 三角化法与降阶法是计算行列式的普遍方法。

3、特殊行列式法: 化行列式为特殊行列式。 $(P103, 4(5))$

行列式计算的常用技巧

1、提取公因子法:(1)行(列)和相等时,各行(列)加到第一行(列),提取公因子; $(P100, 17(3))$

行列式计算的常用技巧

1、提取公因子法:(1)行(列)和相等时,各行(列)加到第一行(列),提取公因子; $(P100, 17(3))$

(2)文字行列式,当文字取某些值时可使行列式为零,则行列式含此因子;结合行列式定义,可得行列式值。

行列式计算的常用技巧

1、提取公因子法:(1)行(列)和相等时,各行(列)加到第一行(列),提取公因子; $(P100,17(3))$

(2)文字行列式,当文字取某些值时可使行列式为零,则行列式含此因子;结合行列式定义,可得行列式值。

2、拆分法:利用行列式性质3将行列式拆成两个行列式的和。 $((P100,17(2)(3),18(5))$

行列式计算的常用技巧

1、提取公因子法:(1)行(列)和相等时,各行(列)加到第一行(列),提取公因子; $(P100, 17(3))$

(2)文字行列式,当文字取某些值时可使行列式为零,则行列式含此因子;结合行列式定义,可得行列式值。

2、拆分法:利用行列式性质3将行列式拆成两个行列式的和。

$((P100, 17(2)(3), 18(5))$

3、加边法: $(P100, 17(3), P101, 18(5))$

行列式计算的常用技巧

1、提取公因子法:(1)行(列)和相等时,各行(列)加到第一行(列),提取公因子; $(P100,17(3))$

(2)文字行列式,当文字取某些值时可使行列式为零,则行列式含此因子;结合行列式定义,可得行列式值。

2、拆分法:利用行列式性质3将行列式拆成两个行列式的和。 $((P100,17(2)(3),18(5))$

3、加边法: $(P100,17(3),P101,18(5))$

4、递推法: $(P101,18(3)(4))$

行列式计算的常用技巧

1、提取公因子法:(1)行(列)和相等时,各行(列)加到第一行(列),提取公因子; $(P100, 17(3))$

(2)文字行列式,当文字取某些值时可使行列式为零,则行列式含此因子;结合行列式定义,可得行列式值。

2、拆分法:利用行列式性质3将行列式拆成两个行列式的和。 $((P100, 17(2)(3), 18(5))$

3、加边法: $(P100, 17(3), P101, 18(5))$

4、递推法: $(P101, 18(3)(4))$

5、归纳法:通常对行列式的阶数进行归纳。 $(P101, 18(3)(4))$

例1 按定义计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad (P97,8(2))$$

例1 按定义计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \qquad (P97, 8(2))$$

注： 亦可按第一列或最后一行展开

例2 求

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有n级排列求和。 $(P102,1)$

例2 求

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} \begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix}$$

这里 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是对所有n级排列求和。 $(P102, 1)$

注： 利用对换变号的性质与奇偶排列各半可得。

例3 证明:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} \qquad (P102, 2)$$

例3 证明:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} \qquad (P102, 2)$$

注: 利用行列式定义、乘法求导法则及和式运算性质可得。

例4 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

例4 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

注：法一、三角化法:将最后一列依次乘以$-a_i$加至第i列；

例4 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & 1 \end{vmatrix}$$

注： 法一、三角化法:将最后一列依次乘以$-a_i$加至第i列；

法二、提公因子法

例5 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

例5 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

注： 法一，应用三角化法:从最后一行开始,依次将每一行减去其前一行，再将最后一列加到其余各列；

例5 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

注： 法一，应用三角化法:从最后一行开始,依次将每一行减去其前一行，再将最后一列加到其余各列；

法二，间接展开结合三角化法:从最后一列开始,依次将每一列减去其前一列，再将第一行加到其余各行，然后按最后一行展开。

例6 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

例6 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

注： 间接降阶展开与三角化法综合：

(1)从最后一行开始,依次将每一行减去其前一行,再按第一列展开，接着从第一行开始，依次将每一行减去其下一行；

例6 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \cdots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \cdots & n-3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & x & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

注： 间接降阶展开与三角化法综合：

(1)从最后一行开始,依次将每一行减去其前一行,再按第一列展开，接着从第一行开始，依次将每一行减去其下一行；

(2)从第二行开始，依次乘-1加至前一行，再按第一列展开，接着从第一行开始，依次将每一行减去其下一行。

例7 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

例7 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

注：(1)间接降阶展开与三角化法综合：从第一行开始，依次将每一行减去其后一行，再从最后一列开始，依次将每一列减去其前一列，再按第一列展开；

例7 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

注：(1)间接降阶展开与三角化法综合：从第一行开始，依次将每一行减去其后一行，再从最后一列开始，依次将每一列减去其前一列，再按第一列展开；(2)间接降阶展开、三角化法与递推法综合：从最后一行开始,依次将每一行减去其前一行，再从最后一列开始，依次将每一列减去其前一列，接着按第一列展开后利用递推法；

例7 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}$$

注：(1)间接降阶展开与三角化法综合：从第一行开始，依次将每一行减去其后一行，再从最后一列开始，依次将每一列减去其前一列，再按第一列展开；

(2)间接降阶展开、三角化法与递推法综合：从最后一行开始,依次将每一行减去其前一行，再从最后一列开始，依次将每一列减去其前一列，接着按第一列展开后利用递推法；

(3)间接降阶展开、拆项结合三角化法：从第一行开始，依次将每一行减去其后一行，再将第n行第n列元素看成$1-x+x$,对最后一列分拆后展开化三角形。

例8 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

例8 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

注：(1)直接降阶展开结合递推法：按最后一行或最后一列展开得递推式，对递推式进行适当变形后可求；

例8 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$$

注：(1)直接降阶展开结合递推法：按最后一行或最后一列展开得递推式，对递推式进行适当变形后可求；

(2)拆项后展开结合三角化法与递推法：按最后一列进行分拆,后将其中一个化三角形，另一个按最后一列展开，可得递推式；按第一列分拆亦可。

例9 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} \qquad (P101, 18(3))$$

例9 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} \qquad (P101, 18(3))$$

注：(1)直接降阶展开结合递推法：按最后一行或最后一列展开得递推式，对递推式进行适当变形后，再由α与β的对称性联立方程组求解；亦可按第一行或第一列展开；

例9 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} \qquad (P101, 18(3))$$

注：(1)直接降阶展开结合递推法：按最后一行或最后一列展开得递推式，对递推式进行适当变形后，再由α与β的对称性联立方程组求解；亦可按第一行或第一列展开；

(2)拆项后展开结合三角化法与递推法：按最后一行进行分拆,后将其中一个化三角形，另一个按最后一行展开，可得递推式，再由α与β的对称性联立方程组求解；按最后一列或第一行或第一列分拆皆可。

例7 计算n级行列式$(P103, 4(3)(4)$的一般情形$)$:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a & a \\ b & x_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}$$

例7 计算n级行列式($P103, 4(3)(4)$**的一般情形**):

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a & a \\ b & x_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}$$

注： 若有递推式$D_n = aD_{n-1} + b$及$D_n = cD_{n-1} + d$，则可解方程组求得D_n

例7 计算n级行列式($P103,4(3)(4)$**的一般情形**):

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a & a \\ b & x_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}$$

注: 若有递推式$D_n=aD_{n-1}+b$及$D_n=cD_{n-1}+d$，则可解方程组求得D_n

例8 计算n级行列式($P101,18(3)$**的一般情形**):

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

例7 计算n级行列式($P103, 4(3)(4)$**的一般情形**):

$$\begin{vmatrix} x_1 & a & \cdots & a & a \\ b & x_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b & b & \cdots & b & x_n \end{vmatrix}$$

注： 若有递推式$D_n = aD_{n-1} + b$及$D_n = cD_{n-1} + d$，则可解方程组求得D_n

例8 计算n级行列式($P101, 18(3)$**的一般情形**):

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix}$$

注: 若有递推式$D_n = pD_{n-1} - qD_{n-2}$，令$a + b = p, ab = q$，递归可得$D_n - aD_{n-1} = f_1(n), D_n - bD_{n-1} = f_2(n)$，从而解方程组得$D_n$。

例9 设$\sin\alpha \neq 0$，计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

例9 设$\sin\alpha \neq 0$，计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

注: 应用此结果可计算$P101, 18(4)$。

例9 设$\sin\alpha \neq 0$，计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}$$

注: 应用此结果可计算$P101, 18(4)$。

例10 计算n阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 6 & 11 & 6 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 11 & 6 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 11 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

例11 设$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ a_3+a_1 & a_3+a_2 & \cdots & a_3+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

例11 设$a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ a_3+a_1 & a_3+a_2 & \cdots & a_3+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

例12 计算$2n$阶行列式:

$$D_{2n}=\begin{vmatrix} a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_n \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \cdots & b_{n-2} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & c_{n-2} & \cdots & d_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & c_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_n \end{vmatrix}$$

例13 设$i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n-1$，计算$n$阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{i-1} & x_2^{i-1} & \cdots & x_n^{i-1} \\ x_1^{i+1} & x_2^{i+1} & \cdots & x_n^{i+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

例13 设$i \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq n-1$，计算$n$阶行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{i-1} & x_2^{i-1} & \cdots & x_n^{i-1} \\ x_1^{i+1} & x_2^{i+1} & \cdots & x_n^{i+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

例14 计算n阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a+x_2 & \cdots & a+x_n \\ a^2+x_1^2 & a^2+x_2^2 & \cdots & a^2+x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n+x_1^n & a^n+x_2^n & \cdots & a^n+x_n^n \end{vmatrix}$$