

引例

习题1.2, 6, 已知 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{e}_2$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{e}_3$ 是以原点 O 为顶点的平行六面体的三条棱。求此平行六面体过点 O 的对角线与平面 ABC 的交点 M 在仿射标架 $[O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ 下的坐标。

解：不妨设平行六面体对角线为 \overrightarrow{OD} ，由向量加法的几何意义，有： $\overrightarrow{OD} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ 。

根据 M 是交点，有： $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OD}$ 。关键问题： k 是多少？
 M 是交点同时表明 M, A, B, C 共面，回忆：

设 A, B, C 是不在一直线上的三点，则点 M 在平面 ABC 上的充要条件为存在实数 λ, μ, ν ，使得： $\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + \mu\overrightarrow{OB} + \nu\overrightarrow{OC}$, $\lambda + \mu + \nu = 1$ 。

已知 $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + k\overrightarrow{OC}$ ，必有 $k + k + k = 1$ ，即 $k = \frac{1}{3}$ ，从而 M 点的坐标为： $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 。

解法尽管简洁，但是不容易想到。大家回忆一下平面解析几何中遇到类似的问题如何处理？

第二章 空间的平面和直线

学习这一章的意义所在

- ▶ 把几何问题转化为代数方程的求解。
- ▶ 反过来，也为方程组的求解提供几何解释，并为抽象的线性空间提供几何背景。
- ▶ 实践综合法解决几何问题，即把向量法和坐标法有机地结合起来。

图形和方程

对于一个图形 S ，如果 S 上的点的坐标满足某种数量关系，而 S 外的点的坐标不满足这种数量关系，我们就把这种数量关系称为 S 的一个方程。

§1 仿射坐标系中平面的方程，两平面的相关位置

在本节中始终取定仿射标架 $[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ 。

平面的参数方程和普通方程

确定一个平面的条件是：

- ▶ 不在一直线上的三点；
- ▶ 一条直线和此直线外的一点；
- ▶ 两条相交直线；
- ▶ 两条平行直线。

不同的情况下给我们的纯几何条件都是不同的。

将这些纯几何先化为向量条件，再用坐标表达向量的运算。

找一个可以共用的向量条件：一个点和两个不共线的向量

可以验证，上述四个纯几何条件都可以方便地转化为这一向量条件。

本节中我们重点把这一向量条件用坐标表达。

为了使用起来不引起混淆，这章中向量的坐标一般用大写 X, Y, Z 表示，点的坐标一般用小写 x, y, z 表示。

取定仿射标架 $[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$, 已知一个点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 不共线的两个向量 $v_1(X_1, Y_1, Z_1)$ 和 $v_2(X_2, Y_2, Z_2)$, 求由 M_0, v_1, v_2 确定的平面 π 的方程。

点 $M(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}$ 与 v_1, v_2 共面, 即存在实数 λ, μ 使得:

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda v_1 + \mu v_2$$

由向量相等可得对应位置坐标相等

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda X_1 + \mu X_2, \\ y - y_0 = \lambda Y_1 + \mu Y_2, \\ z - z_0 = \lambda Z_1 + \mu Z_2, \end{cases}$$

即:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda X_1 + \mu X_2, \\ y = y_0 + \lambda Y_1 + \mu Y_2, \\ z = z_0 + \lambda Z_1 + \mu Z_2, \end{cases}$$

当点 $M(x, y, z)$ 取遍所有可能的点时, λ, μ 取遍所有的实数。上述方程称为平面 π 的**参数方程**, 其中 λ, μ 称为**参数**。

平面的参数方程尽管可以很方便地求出平面上的点的坐标，但是平面的某些整体性质不容易看出来。

$\overrightarrow{M_0M}$ 与 v_1, v_2 共面的另一个充要条件：

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & X_1 & X_2 \\ y - y_0 & Y_1 & Y_2 \\ z - z_0 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & X_1 & X_2 \\ y & Y_1 & Y_2 \\ z & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_0 & X_1 & X_2 \\ y_0 & Y_1 & Y_2 \\ z_0 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

令

$$A = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}, B = -\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix},$$

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

可写为：

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

由于 v_1, v_2 不共线， A, B, C 不全为零，上述方程是三元一次方程，称为平面 π 的普通方程。

定理：在空间取定一个仿射坐标系，则平面的方程必定是三元一次方程；反之，任意一个三元一次方程表示一个平面。

证明：现在看后半部分。我们要说明任何一个三元一次方程都表示一个平面，只要找到一个点和两个向量，使得他们决定的平面方程为所给三元一次方程即可。任给一个三元一次方程：

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

不妨设 $A_1 \neq 0$ ，取点 $M_1(-\frac{D_1}{A_1}, 0, 0)$ 。

如何找两个向量？ 再找两个与 M_1 不共线的点即可。

取 $P(-\frac{B_1+D_1}{A_1}, 1, 0)$ ， $Q(-\frac{C_1+D_1}{A_1}, 0, 1)$ 。得向量：

$$\mu_1(-\frac{B_1}{A_1}, 1, 0), \mu_2(-\frac{C_1}{A_1}, 0, 1)$$

由点 M_1 和 μ_1, μ_2 决定的平面 π_1 的方程为：

$$\begin{vmatrix} x + \frac{D_1}{A_1} & -\frac{B_1}{A_1} & -\frac{C_1}{A_1} \\ y - 0 & 1 & 0 \\ z - 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

展开得：

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

普通方程中系数的几何意义

大家观察一下，我们找的两个向量 $\mu_1(-\frac{B_1}{A_1}, 1, 0), \mu_2(-\frac{C_1}{A_1}, 0, 1)$ 与系数 A_1, B_1, C_1 有什么关系？

定理：向量 $\omega(r, s, t)$ 平行于平面 $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ 的充分必要条件是

$$Ar + Bs + Ct = 0.$$

证明： $\omega \parallel \pi \Leftrightarrow \omega, v_1, v_2$ 共面。故

$$\begin{vmatrix} r & X_1 & X_2 \\ s & Y_1 & Y_2 \\ t & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} = 0$$

展开，由 $A = \begin{vmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}, B = -\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Z_1 & Z_2 \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix}$ ，即得。

注意：上述关系不代表向量 $\omega(r, s, t)$ 与 $\mu(A, B, C)$ 垂直。

系数几何意义的应用

例：在仿射标架 $[O; e_1, e_2, e_3]$ 下画出平面 $x + 2y - z = 0$

解：只要找一点和两向量即可。

因为 $D = 0$ ，所以平面过原点。根据系数的几何意义，没有必要再去找平面上的其他两点。解方程

$$r + 2s - t = 0.$$

取两个线性无关的解，即不共线的向量： $\omega_1(-2, 1, 0), \omega_2(1, 0, 1)$.

两平面的相关位置

$$\text{平面位置关系: } \begin{cases} \text{相交} \\ \text{平行} \begin{cases} \text{平行且无交点} \\ \text{重合} \end{cases} \end{cases}$$

定理：取定仿射标架，设平面 π_1, π_2 的方程分别为：

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

则

$$1. \pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2;$$

$$2. \pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = D_1 : D_2;$$

证明：(1) \Leftarrow 设向量 $\mu(r, s, t) \parallel \pi_1$ ，则 $A_1r + B_1s + C_1t = 0$ 。但根据成比例条件，必有 $A_2r + B_2s + C_2t = 0$ 。由 μ 的任意性，可得 $\pi_1 \parallel \pi_2$ 。

(1) \Rightarrow 取与 π_1 平行的向量 $\mu(B_1, -A_1, 0)$, 由于 $\pi_1 \parallel \pi_2$, 有 $\mu \parallel \pi_2$, 从而 $A_2B_1 - B_2A_1 = 0$ 。类

似, $B_2C_1 - C_2B_1 = 0$, $C_2A_1 - A_2C_1 = 0$, 得证。

(2) \Leftarrow 由(1)可知两平面平行, p 且由

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)$$

至少过同一点, 必重合。

(2) \Rightarrow 此时 π_2 的方程可写为 $\lambda(A_1x + B_1y + C_1z) + D_2 = 0$ 。设点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 在 π_1 上, 即有 $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0$ 。由平面重合, 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 也在 π_2 上, 代入 π_2 的方程有: $-\lambda D_1 + D_2 = 0$ 。

推论1: π_1, π_2 相交 $\Leftrightarrow A_1, B_1, C_1$ 和 A_2, B_2, C_2 不成比例。

推论2: $\pi_1 \parallel \pi_2$ 但不重合 $\Leftrightarrow A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 \neq D_1 : D_2$

以上是从平面方程系数的几何意义出发证明的, 有没有不同的思路?

仔细来看这两个推论：

1. π_1, π_2 相交：有交点，且交点集合是平面集合的真子集。
2. $\pi_1 \parallel \pi_2$ 但不重合：没有交点。

交点的坐标有何代数意义？ 是两个平面方程的公共解。

从代数的角度出发，考虑下列方程组的解

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

推论1的证明： \Leftarrow 由于不成比例，故下列三个行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

不全为零。不妨设 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ，令方程组中 $z = 0$ ，有

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

根据克拉默法则，方程(*)有唯一解： (x_0, y_0) 。故两平面有交点 $M_0(x_0, y_0, 0)$ 。

再取 $M_1(x_0 + B_1, y_0 - A_1, 0)$ ，可验证 M_1 是 π_1 上不同于 M_0 的点。现在来说明 M_1 不落在 π_2 上。最直接的办法，将 M_1 的坐标代入 π_2 的方程中，有

$$\begin{aligned} & A_2(x_0 + B_1) + B_2(y_0 - A_1) + C_2 \cdot 0 + D_2 \\ &= (A_2x_0 + B_2y_0 + D_2) + A_2B_1 - B_2A_1 \\ &= \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

除了直接代入验证，还有什么办法可以说明 M_1 不属于 π_2 ？

由克拉默法则，方程组(*)有唯一解，为 (x_0, y_0) ，故 $(x_0 + B_1, y_0 - A_1)$ 不是方程组(*)的解，等价于 $M_1(x_0 + B_1, y_0 - A_1, 0)$ 的坐标不满足方程

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

即 M_1 不在 π_2 上。

最终，两平面相交且不重合。

\Rightarrow ,两平面相交于一条直线,该直线至少与 xOy, yOz, zOx 三个坐标平面中的一个有唯一交点。不妨设和 xOy 平面有唯一交点。即方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

有唯一解,故 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ 。其他情况类似讨论,得证。

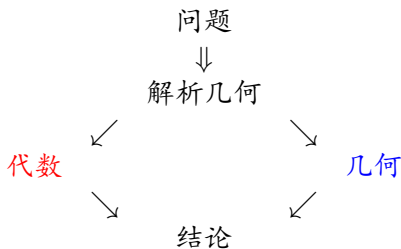
推论2的证明: \Leftarrow 由条件知存在 $\lambda \neq 0$, 使得

$$A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1, D_2 \neq \lambda D_1.$$

方程组可改写为:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + \frac{D_2}{\lambda} = 0 \end{cases}$$

消元法得方程组无解。故两平面无交点, 必然平行, 且不重合。
 \Rightarrow 综合推论1, 逆推即可。



三平面交与一点的条件

命题：取定仿射标架，设平面 π_1, π_2, π_3 的方程分别为：

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

则这三个平面恰交与一点的充要条件是：

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

证明：采用代数的方法。

三个平面交与唯一一点 \Leftrightarrow 方程组有唯一解。

再根据克拉默法则，其系数行列式不为零。

思考题：用几何的方法如何证明？

作业

习题2.1, P50

$1(3)(4), 3, 4, 5, 6(3), 7, 8, 10, 11.$

§2 直线的方程，直线平面的相关位置

本节中仍然仿射标架 $[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ 。

直线的点向式方程

决定直线的向量条件：一个点和一个非零向量，可以决定一条过该点，且与给定向量平行的直线。

已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ，以及非零向量 $\vec{v}(X, Y, Z)$ ，求直线 l 的方程。
点 $M(x, y, z)$ 在直线 l 上的充要条件是 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{v}$ ，即 $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}$ 。用坐标写出：

$$\begin{cases} x - x_0 = tX \\ y - y_0 = tY \\ z - z_0 = tZ \end{cases}$$

变形即得直线的参数方程，其中 t 可以取任意实数：

$$\begin{cases} x = x_0 + tX \\ y = y_0 + tY \\ z = z_0 + tZ \end{cases}$$

参数方程往往适合求具体点的坐标，研究直线整体性质时需要将参数消去。

因为 $\vec{v} \neq \vec{0}$, 不妨设 $X \neq 0$, 则得: $t = \frac{x-x_0}{X}$ 。

如果 $Y \neq 0$, 则类似有 $t = \frac{y-y_0}{Y}$, 故:

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y}$$

倘若 $Y = 0$ 怎么办? 此时 $y - y_0 = tY \equiv 0$

人为规定分母为零时表示分子也必须为零, 而不限定任何具体的比值, 约定等式仍然成立。最终有:

$$\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$$

称为直线 l 的 **标准方程**。

直线的参数方程和标准方程统称为 **点向式方程**。方程中的 (X, Y, Z) 称为直线 l 的 **方向系数**。

直线的两点式方程

如果已知直线 l 上两点 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求直线方程。
易知 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 是 l 的一个方向向量。再取 M_1 为定点, 有:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

称为直线 l 的**两点式方程**。

直线的普通方程

除了一点和一个向量，两点以外，两个平面的交线也是一条直线。

设直线 l 是相交平面 π_1, π_2 的交线， π_i 的方程为：

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad i = 1, 2$$

则方程组

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的解所对应的坐标一定都在 l 上，反之 l 上的点的坐标也都满足方程组。从而将上述方程组称为直线 l 的普通方程。

标准方程和普通方程的关系

观察标准方程：

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z}$$

实际上是两个两个方程的联立方程组，

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} \\ \frac{x-x_0}{X} = \frac{z-z_0}{Z} \end{cases}$$

不妨设 $X \neq 0$ ，则可以写为：

$$\begin{cases} Y(x - x_0) - X(y - y_0) = 0 \\ Z(x - x_0) - X(z - z_0) = 0 \end{cases}$$

即得 l 的普通方程。此时第一个方程表示平行于 z 轴的平面，第二个方程表示平行于 y 轴的平面。

反过来, 若给定直线的普通方程:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

如何由普通方程求出标准方程? 从标准方程的几何意义入手
Step1, 先找直线 l 上的一个点 M_0 。两个平面方程系数不成比例, 故下列三个行列式

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

不全为零。不妨设 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, 令方程组中 $z = 0$, 有

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

根据克拉默法则, 有唯一解: (x_0, y_0) 。故两平面有交点 $M_0(x_0, y_0, 0)$ 。

Step2, 再找 l 的一个方向向量 $\vec{v}(X, Y, Z)$. 回忆:

定理: 向量 $\omega(r, s, t)$ 平行于平面 π 的充分必要条件是 $Ar + Bs + Ct = 0$

设 $\vec{v} \parallel \pi_i, i = 1, 2$, 所以

$$\begin{cases} A_1X + B_1Y + C_1Z = 0 \\ A_2X + B_2Y + C_2Z = 0 \end{cases}$$

若 $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$, 令 $z = 1$, 方程组

$$\begin{cases} A_1X + B_1Y = -C_1 \\ A_2X + B_2Y = -C_2 \end{cases}$$

有唯一解: (X_0, Y_0) . 故原方程组有非零解: $(X_0, Y_0, 1)$.

事实上我们只需要找到一个非零解即可，并没有必要具体求方程组。观察，若令

$$X = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, Y = -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, Z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

三个数不全为零，且有：

$$A_1X + B_1Y + C_1Z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$A_2X + B_2Y + C_2Z = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

即取方向向量为 $\vec{v}(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix})$

进而可得直线的标准方程：

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

两条直线的相关位置

只探讨用标准方程表示的直线的位置关系。

在仿射标架中, 设直线 l_i 过点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$, 方向向量为 $\vec{v}_i(X_i, Y_i, Z_i)$, $i = 1, 2$.

若 l_1 与 l_2 异面, 充要条件为: $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ 不共面, 即:

$$\Delta := \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & X_1 & X_2 \\ y_2 - y_1 & Y_1 & Y_2 \\ z_2 - z_1 & Z_1 & Z_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

若 l_1 与 l_2 相交, 充要条件为: $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$ 共面, 且 $\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$, 即: $\Delta = 0$ 且 $(X_i, Y_i, Z_i) \quad i = 1, 2$ 不成比例。

若 l_1 与 l_2 平行但不重合, 充要条件为: $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ 且 $\overrightarrow{M_1M_2} \nparallel \vec{v}_1$, 即: $(X_i, Y_i, Z_i) \quad i = 1, 2$ 成比例, 但与 $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ 不成比例。

若 l_1 与 l_2 重合, 充要条件为: $\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$,

即: $(X_i, Y_i, Z_i) \quad i = 1, 2, (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ 三者成比例。

直线和平面的相关位置

设直线 l 过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 方向向量为 $\vec{v}(X, Y, Z)$. 设平面 π 的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$.

l 与 π 相交 $\Leftrightarrow \vec{v} \nparallel \pi$, 即:

$$AX + BY + CZ \neq 0$$

l 与 π 平行但不重合 $\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \pi$ 且 M_0 不在 π 上, 即:

$$AX + BY + CZ = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

l 与 π 重合 $\Leftrightarrow \vec{v} \parallel \pi$ 且 M_0 在 π 上, 即:

$$AX + BY + CZ = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

思考: 使用直线的普通方程讨论直线和平面的位置关系。
在高等代数学过方程组理论之后大家会有更清晰的认识

求直线和平面的交点

已知平面 π 方程由普通方程给出： $Ax + By + Cz + D = 0$

当直线 l 使用普通方程 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ 时，

求解方程组：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

当直线 l 使用标准方程 $\frac{x-x_0}{X} = \frac{y-y_0}{Y} = \frac{z-z_0}{Z}$ 时，改写为参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + tX \\ y = y_0 + tY \\ z = z_0 + tZ \end{cases}$$

代入平面 π 的方程中，得

$$A(x_0 + tX) + B(y_0 + tY) + C(z_0 + tZ) + D = 0$$

解得

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{AX + BY + CZ}$$

代回参数方程，即可。

作业

习题2.3

$1(2), 3(2), 5(1), 6(2), 7, 8(3), 10(2), 13$

§3 平面和直线的度量关系

本节我们讨论平面和直线相关的距离和角度的计算，重点是距离。

由于要计算距离和角度，需要大量用到内积，同时也会用到外积。

在第一章中已经说明，内积和外积的运算只有在直角标架中才是最简便的。

故本节中始终取定直角标架 $[O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]$ 。

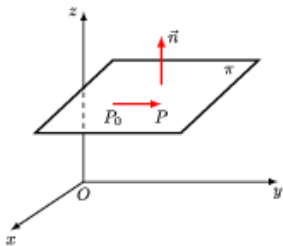
直角坐标系中的平面方程

上节中用来确定一个平面的条件是：一个点和两个不共线的向量。**有无其他可以取定平面的向量条件？**

一个点和一个与这个平面垂直的非零向量。

定义：与平面垂直的非零向量叫做该平面的**法向量**。

求过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ，并且法向量为 $\vec{n}(A, B, C)$ 的平面 π 的方程。



点 $P(x, y, z)$ 在平面 π 上 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$. 于是得：

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

称为平面的**点法式方程**。

可改写为普通方程：

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

其中 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

反之，直角标架中任何一个普通方程也可以改写为点法式方程。

系数的几何意义

在直角坐标系中，平面普通方程的一次项系数是法向量的坐标。

回忆仿射标架下：

定理： 向量 $\omega(r, s, t)$ 平行于平面 π 的充分必要条件是 $Ar + Bs + Ct = 0$

仿射标架下成立的定理直角标架下当然也成立。

在直角标架下有更直接的几何的解释：

$$\omega \parallel \pi \Rightarrow \vec{n} \perp \omega \Rightarrow \vec{n} \cdot \omega = 0 \Rightarrow Ar + Bs + Ct = 0$$

回忆，在之前一节中，仿射标架下：

直线 l 有一般方程：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

则其标准方程：

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

直角标架下也有更直接的几何解释： $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1), \vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ 分别为 π_1, π_2 的法向量。 \vec{v} 为 l 的方向向量。故 $\vec{n}_1 \perp \vec{v}, \vec{n}_2 \perp \vec{v}$ ，从而 $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \parallel \vec{v}$ ，也为直线 l 的方向向量。

此时， $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ 的坐标为： $(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix})$

点到平面的距离

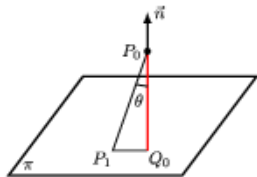
设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为空间一定点，平

面 π 的一般式方程

为： $Ax + By + Cz + D = 0$ ，即法向量

为 $\vec{n} = (A, B, C)$ 。

点 P_0 到平面 π 的距离用 $d(P_0, \pi)$ 表示。



由 P_0 作平面 π 的垂线与 π 交于 Q_0 。最一般的思路，用直线和平面方程求出 Q_0 点的坐标，再计算距离 P_0Q_0 。

实际上可取平面上任意一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ，有：

$$\begin{aligned} d(P_0, \pi) &= |\overrightarrow{P_1P_0}| |\cos \langle \overrightarrow{P_1P_0}, \vec{n} \rangle| = |\overrightarrow{P_1P_0}| \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{P_1P_0}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{n}|} = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

由于 P_1 在平面 π 上, $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$,
因此, 点 P_0 到平面 π 的距离为

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

实际上并没有必要显式求出垂足的坐标

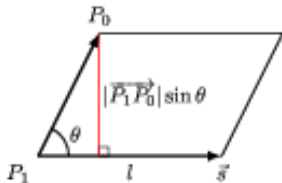
注意: 距离公式可改写为:

$$d(P_0, \pi) = \left| \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \overrightarrow{P_1 P_0} \right|$$

表示向量 $\overrightarrow{P_1 P_0}$ 在法向量 \vec{n} 方向上内射影的长度。

点到直线的距离

设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为空间一定点，过点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 且方向向量为 \vec{s} 的直线用 $l(P_1, \vec{s})$ 表示。点 P_0 到直线 l 的距离用 $d(P_0, l)$ 表示。



显然， $d(P_0, l) = |\overrightarrow{P_1P_0}| \sin \theta$ (其中 θ 为 \vec{s} 与 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 的夹角)。由

$$|\vec{s} \times \overrightarrow{P_1P_0}| = |\vec{s}| |\overrightarrow{P_1P_0}| \sin \theta$$

$$\text{可得 } d(P_0, l) = \frac{|\vec{s} \times \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\vec{s}|}$$

$$\text{也可改写为 } d(P_0, l) = \left| \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} \times \overrightarrow{P_1P_0} \right|$$

表示向量 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 在直线方向向量 \vec{s} 上的外射影的长度。

小结

- ▶ 点到平面的距离用内积
- ▶ 点到直线的距离用外积

其他类型的距离均可转化为点到平面和点到直线的距离

两平行平面间的距离

例：求下列两平行平面 π_1 和 π_2 之间的距离 $d(\pi_1, \pi_2)$ ，其中

$$\pi_1 : x + 2y - 2z + 3 = 0,$$

$$\pi_2 : 2x + 4y - 4z - 3 = 0.$$

解法一：在 π_1 上取一点 $P(-3, 0, 0)$ ，则

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|2 \times (-3) + 4 \times 0 - 4 \times 0 - 3|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{2}.$$

解法二：若两平行平面方程可以写为：

$$\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

设 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 在平面 π_1 上，根据点到平面的距离有：

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

注意到 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1 = 0$ ，最终有：

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

将平面 π_2 的方程改写为： $x + 2y - 2z - \frac{3}{2} = 0$ 。有：

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{3 + \frac{3}{2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{2}.$$

两平行直线间的距离

例：求两条平行直线 $l_1(P_1, \vec{s}_1)$ 和 $l_2(P_2, \vec{s}_2)$ 的距离 $d(l_1, l_2)$, 其中

$$\begin{aligned}l_1(P_1, \vec{s}_1) : \frac{x}{1} &= \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}, \\l_2(P_2, \vec{s}_2) : \frac{x-1}{2} &= \frac{y-2}{4} = \frac{z-2}{4}.\end{aligned}$$

解：转化为点到直线的距离： $d(l_1, l_2) = d(P_2, l_1)$.

由 $P_1(0, 2, 1), P_2(1, 2, 2)$, 知 $\overrightarrow{P_1P_2}(1, 0, 1)$.

此时： $\vec{s}_1 \times \overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标为：

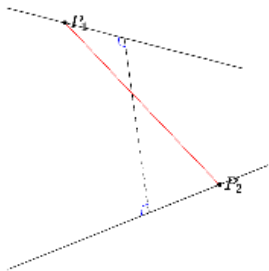
$$\left(\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (2, 1, -2).$$

从而 $|\vec{s}_1 \times \overrightarrow{P_1P_2}| = 3$ 再由 $|\vec{s}_1| = 3$ 可得 $d(P_2, l_1) = \frac{|\vec{s}_1 \times \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{s}_1|} = 1$ 。

因此, $d(l_1, l_2) = 1$.

两异面直线间的距离

求两条异面直线 $l_1(P_1, \vec{s}_1)$ 和 $l_2(P_2, \vec{s}_2)$ 的距离 $d(l_1, l_2)$ 。



其实可以理解为两条异面直线各自所在的平行平面之间的距离。

取 $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2$ ，则有：

$$d(l_1, l_2) = \left| \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \overrightarrow{P_1P_2} \right| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(\vec{s}_1 \times \vec{s}_2) \cdot \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|}$$

最终的表达式为一个混合积。

若直线和平面平行，其间的距离也可化为直线上一点到平面的距离来求解。

注意：所有涉及到距离的计算当中，我们从未显示地求出过具体垂足的坐标，仅仅利用垂线的方向向量，再利用内积或外积的运算性质即可。

有关直线和平面的夹角有下列三种：

- ▶ 平面和平面夹角；
- ▶ 直线和直线的夹角；
- ▶ 直线和平面的夹角。

回忆向量 \vec{a} , \vec{b} 之间的夹角可以利用内积求解：

$$\cos\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

两个平面的夹角

定义：两个相交平面 π_1, π_2 的夹角是指两个平面交成四个二面角中的任意一个，即 $\langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle$ 或 $\pi - \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle$ 。

若在直角坐标系中，两平面 π_i 的方程为：

$$A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

则 π_1, π_2 的一个夹角 θ 满足：

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

直线与直线的夹角规定为方向向量的夹角或方向向量夹角的补角。

$$\cos \theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1||\vec{v}_2|}$$

直线与平面的夹角规定为直线和其在平面上投影所夹的锐角 α ,
即

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}||\vec{n}|} = \sin \theta$$

作业

习题2.2: P55

$1(2), 2, 4(1), 11.$

习题2.3: P64

$9(3), 11(2), 17$

习题2.4: P73

$1(2), 2(2)(3), 3(2), 4(1), 5(2), 7$

思考:9, 注意和方向角的区别。