矩阵的运算—加法

定义1:设$\mathbf{A} = (a_{ij})$和$\mathbf{B} = (b_{ij})$都是$m \times n$矩阵，则它们的**和**定义为一个$m \times n$矩阵，它的(i, j)元素为$a_{ij} + b_{ij}$。这个矩阵记为$\mathbf{A} + \mathbf{B}$，即

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

矩阵的运算—加法

定义1: 设$\mathbf{A}=(a_{ij})$和$\mathbf{B}=(b_{ij})$都是$m\times n$矩阵，则它们的**和**定义为一个$m\times n$矩阵，它的(i,j)元素为$a_{ij}+b_{ij}$。这个矩阵记为$\mathbf{A}+\mathbf{B}$，即

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

注： 只有行数相同，且列数也相同的两个矩阵才能相加。

矩阵的运算—加法

定义1: 设$\mathbf{A}=(a_{ij})$和$\mathbf{B}=(b_{ij})$都是$m\times n$矩阵，则它们的**和**定义为一个$m\times n$矩阵，它的(i,j)元素为$a_{ij}+b_{ij}$。这个矩阵记为$\mathbf{A}+\mathbf{B}$，即

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

注： 只有行数相同，且列数也相同的两个矩阵才能相加。

性质： 设$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$都是$m\times n$矩阵：

(1)交换律:$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

矩阵的运算—加法

定义1: 设$\mathbf{A}=(a_{ij})$和$\mathbf{B}=(b_{ij})$都是$m\times n$矩阵，则它们的**和**定义为一个$m\times n$矩阵，它的(i,j)元素为$a_{ij}+b_{ij}$。这个矩阵记为$\mathbf{A}+\mathbf{B}$，即

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

注： 只有行数相同，且列数也相同的两个矩阵才能相加。

性质： 设$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$都是$m\times n$矩阵：

(1)交换律:$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

(2)结合律:$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;

矩阵的运算—加法

定义1: 设$\mathbf{A}=(a_{ij})$和$\mathbf{B}=(b_{ij})$都是$m\times n$矩阵，则它们的**和**定义为一个$m\times n$矩阵，它的(i,j)元素为$a_{ij}+b_{ij}$。这个矩阵记为$\mathbf{A}+\mathbf{B}$，即

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

注： 只有行数相同，且列数也相同的两个矩阵才能相加。

性质： 设$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$都是$m\times n$矩阵：

(1)交换律:$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

(2)结合律:$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;

(3)$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$

矩阵的运算—加法

定义1:设$\mathbf{A}=(a_{ij})$和$\mathbf{B}=(b_{ij})$都是$m\times n$矩阵，则它们的**和**定义为一个$m\times n$矩阵，它的(i,j)元素为$a_{ij}+b_{ij}$。这个矩阵记为$\mathbf{A}+\mathbf{B}$，即

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

注：只有行数相同，且列数也相同的两个矩阵才能相加。

性质：设$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$都是$m\times n$矩阵：

(1)交换律:$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

(2)结合律:$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;

(3)$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$

定义：矩阵$(-a_{ij})_{m\times n}$称为矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的**负矩阵**，记为$-\mathbf{A}$。

矩阵的运算—加法

定义1: 设$\mathbf{A}=(a_{ij})$和$\mathbf{B}=(b_{ij})$都是$m\times n$矩阵，则它们的**和**定义为一个$m\times n$矩阵，它的(i,j)元素为$a_{ij}+b_{ij}$。这个矩阵记为$\mathbf{A}+\mathbf{B}$，即

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

注： 只有行数相同，且列数也相同的两个矩阵才能相加。

性质： 设$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$都是$m\times n$矩阵：

(1)交换律:$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

(2)结合律:$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;

(3)$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$

定义： 矩阵$(-a_{ij})_{m\times n}$称为矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的**负矩阵**，记为$-\mathbf{A}$。

(4)$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=0$

矩阵的运算—加法

定义1: 设$\mathbf{A}=(a_{ij})$和$\mathbf{B}=(b_{ij})$都是$m\times n$矩阵，则它们的**和**定义为一个$m\times n$矩阵，它的(i,j)元素为$a_{ij}+b_{ij}$。这个矩阵记为$\mathbf{A}+\mathbf{B}$，即

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

注： 只有行数相同，且列数也相同的两个矩阵才能相加。

性质： 设$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$都是$m\times n$矩阵：

(1)交换律:$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

(2)结合律:$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;

(3)$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$

定义： 矩阵$(-a_{ij})_{m\times n}$称为矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的**负矩阵**，记为$-\mathbf{A}$。

(4)$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=0$

矩阵的减法： $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$.

矩阵的运算—加法

定义1: 设$\mathbf{A}=(a_{ij})$和$\mathbf{B}=(b_{ij})$都是$m\times n$矩阵，则它们的**和**定义为一个$m\times n$矩阵，它的(i,j)元素为$a_{ij}+b_{ij}$。这个矩阵记为$\mathbf{A}+\mathbf{B}$，即

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

注： 只有行数相同，且列数也相同的两个矩阵才能相加。

性质： 设$\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$都是$m\times n$矩阵：

(1)交换律:$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

(2)结合律:$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;

(3)$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$

定义： 矩阵$(-a_{ij})_{m\times n}$称为矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的**负矩阵**，记为$-\mathbf{A}$。

(4)$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=0$

矩阵的减法： $\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$.

性质： $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$ $(P200,17)$

矩阵的运算—乘法

定义2: 设$\mathbf{A}=(a_{ik})$是$m\times s$矩阵，$\mathbf{B}=(b_{kj})$是$s\times n$矩阵，则$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的**乘积**是一个$m\times n$矩阵$\mathbf{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

即c_{ij}等于A的第i行与B的第j列对应元素乘积的和，记作$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$。

矩阵的运算—乘法

定义2: 设$\mathbf{A} = (a_{ik})$是$m \times s$矩阵，$\mathbf{B} = (b_{kj})$是$s \times n$矩阵，则$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的**乘积**是一个$m \times n$矩阵$\mathbf{C} = (c_{ij})$，其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj}$$

即c_{ij}等于A的第i行与B的第j列对应元素乘积的和，记作$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$。

注:(1)只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时,两个矩阵才能相乘;

矩阵的运算—乘法

定义2: 设$\mathbf{A}=(a_{ik})$是$m\times s$矩阵，$\mathbf{B}=(b_{kj})$是$s\times n$矩阵，则$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的**乘积**是一个$m\times n$矩阵$\mathbf{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

即c_{ij}等于A的第i行与B的第j列对应元素乘积的和，记作$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$。

注: (1)只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时,两个矩阵才能相乘;

(2)矩阵乘法不满足交换律:$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$未必同时有意义;若$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$同时有意义，但它们未必同型；若$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$同型，它们未必相等;

矩阵的运算—乘法

定义2: 设$\mathbf{A}=(a_{ik})$是$m\times s$矩阵，$\mathbf{B}=(b_{kj})$是$s\times n$矩阵，则$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的**乘积**是一个$m\times n$矩阵$\mathbf{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

即c_{ij}等于A的第i行与B的第j列对应元素乘积的和，记作$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$。

注: (1)只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时,两个矩阵才能相乘;

(2)矩阵乘法不满足交换律:$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$未必同时有意义;若$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$同时有意义，但它们未必同型；若$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$同型，它们未必相等;

(3)当$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$时，未必有$\mathbf{A}=\mathbf{0}$或$\mathbf{B}=\mathbf{0}$;

矩阵的运算—乘法

定义2:设$\mathbf{A}=(a_{ik})$是$m\times s$矩阵，$\mathbf{B}=(b_{kj})$是$s\times n$矩阵，则$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的**乘积**是一个$m\times n$矩阵$\mathbf{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

即c_{ij}等于A的第i行与B的第j列对应元素乘积的和，记作$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$。

注:(1)只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时,两个矩阵才能相乘;

(2)矩阵乘法不满足交换律:$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$未必同时有意义;若$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$同时有意义，但它们未必同型；若$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$同型，它们未必相等;

(3)当$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$时，未必有$\mathbf{A}=\mathbf{0}$或$\mathbf{B}=\mathbf{0}$;

(4)乘法消去律不成立，即当$\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$且$\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$时，未必有$\mathbf{B}=\mathbf{C}$。

矩阵的运算—乘法

定义2: 设$\mathbf{A}=(a_{ik})$是$m\times s$矩阵，$\mathbf{B}=(b_{kj})$是$s\times n$矩阵，则$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的**乘积**是一个$m\times n$矩阵$\mathbf{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

即c_{ij}等于A的第i行与B的第j列对应元素乘积的和，记作$\mathbf{C}=\mathbf{AB}$。

注:(1)只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时,两个矩阵才能相乘;

(2)矩阵乘法不满足交换律:$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$未必同时有意义;若$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$同时有意义，但它们未必同型；若$\mathbf{AB}$与$\mathbf{BA}$同型，它们未必相等;

(3)当$\mathbf{AB}=\mathbf{0}$时，未必有$\mathbf{A}=\mathbf{0}$或$\mathbf{B}=\mathbf{0}$;

(4)乘法消去律不成立，即当$\mathbf{AB}=\mathbf{AC}$且$\mathbf{A}\neq\mathbf{0}$时，未必有$\mathbf{B}=\mathbf{C}$。

问:矩阵乘法消去律何时成立？

矩阵乘法的运算性质

性质： 设下列各式中的运算都有意义：

矩阵乘法的运算性质

性质： 设下列各式中的运算都有意义：

(1)结合律：$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

矩阵乘法的运算性质

性质： 设下列各式中的运算都有意义：

(1)结合律：$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(2)分配律：$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;

矩阵乘法的运算性质

性质： 设下列各式中的运算都有意义：

(1)结合律：$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(2)分配律：$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$；

(3)$\mathbf{E}_m\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}, \mathbf{E}_n\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_n\mathbf{E}_n = \mathbf{A}_n$.

矩阵乘法的运算性质

性质： 设下列各式中的运算都有意义：

(1)结合律：$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(2)分配律：$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;

(3)$\mathbf{E}_m\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_n=\mathbf{A},\mathbf{E}_n\mathbf{A}_n=\mathbf{A}_n\mathbf{E}_n=\mathbf{A}_n.$

方阵的幂： 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，$\mathbf{A}$的k次幂表示k个$\mathbf{A}$的乘积，即

$$\mathbf{A}^k=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}(k\text{个}\mathbf{A})$$

矩阵乘法的运算性质

性质： 设下列各式中的运算都有意义：

(1)结合律：$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(2)分配律：$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;

(3)$\mathbf{E}_m\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}, \mathbf{E}_n\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_n\mathbf{E}_n = \mathbf{A}_n$.

方阵的幂： 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，$\mathbf{A}$的k次幂表示k个$\mathbf{A}$的乘积，即

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}(k\text{个}\mathbf{A})$$

注： (1)$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$;

矩阵乘法的运算性质

性质： 设下列各式中的运算都有意义：

(1)结合律：$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(2)分配律：$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;

(3)$\mathbf{E}_m\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}, \mathbf{E}_n\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_n\mathbf{E}_n = \mathbf{A}_n$.

方阵的幂： 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，$\mathbf{A}$的k次幂表示k个$\mathbf{A}$的乘积，即

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}(k\text{个}\mathbf{A})$$

注： (1)$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$;

(2)对任意正整数r, s，有$\mathbf{A}^r\cdot\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}$，$(\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}$;

矩阵乘法的运算性质

性质： 设下列各式中的运算都有意义：

(1)结合律：$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(2)分配律：$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;

(3)$\mathbf{E}_m\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}, \mathbf{E}_n\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_n\mathbf{E}_n = \mathbf{A}_n$.

方阵的幂： 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，$\mathbf{A}$的k次幂表示k个$\mathbf{A}$的乘积，即

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}(k\text{个}\mathbf{A})$$

注： (1)$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$;

(2)对任意正整数r, s，有$\mathbf{A}^r\cdot\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}$，$(\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}$;

(3)一般情况下，$(\mathbf{AB})^r \neq \mathbf{A}^r\mathbf{B}^r$。

矩阵乘法的运算性质

性质： 设下列各式中的运算都有意义：

(1)结合律：$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(2)分配律：$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}$，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;

(3)$\mathbf{E}_m\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_n = \mathbf{A}, \mathbf{E}_n\mathbf{A}_n = \mathbf{A}_n\mathbf{E}_n = \mathbf{A}_n.$

方阵的幂： 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，$\mathbf{A}$的k次幂表示k个$\mathbf{A}$的乘积，即

$$\mathbf{A}^k = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}(k\text{个}\mathbf{A})$$

注： (1)$\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$;

(2)对任意正整数r,s，有$\mathbf{A}^r\cdot\mathbf{A}^s = \mathbf{A}^{r+s}$，$(\mathbf{A}^r)^s = \mathbf{A}^{rs}$;

(3)一般情况下，$(\mathbf{AB})^r \neq \mathbf{A}^r\mathbf{B}^r$。

性质:$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ $(P176, \text{定理}2)$

矩阵乘法的运算性质

性质： 设下列各式中的运算都有意义：

(1)结合律：$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$;

(2)分配律：$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;

(3)$\mathbf{E}_m\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{E}_n=\mathbf{A}, \mathbf{E}_n\mathbf{A}_n=\mathbf{A}_n\mathbf{E}_n=\mathbf{A}_n$.

方阵的幂： 设$\mathbf{A}$为n阶方阵，$\mathbf{A}$的k次幂表示k个$\mathbf{A}$的乘积，即

$$\mathbf{A}^k=\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}(k\text{个}\mathbf{A})$$

注： (1)$\mathbf{A}^0=\mathbf{E}$;

(2)对任意正整数r, s，有$\mathbf{A}^r\cdot\mathbf{A}^s=\mathbf{A}^{r+s}$，$(\mathbf{A}^r)^s=\mathbf{A}^{rs}$;

(3)一般情况下，$(\mathbf{AB})^r\neq\mathbf{A}^r\mathbf{B}^r$。

性质:$r(AB)\leq\min\{r(A), r(B)\}$ $\qquad$ $(P176,\text{定理}2)$

推论:若$A=A_1A_2\cdots A_t$,则$r(A)\leq\min\{r(A_j), 1\leq j\leq t\}$

矩阵的运算—数乘

定义4: 数k与$m \times n$矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})$的乘积(简称**数乘**)仍是$m \times n$矩阵，记为$k\mathbf{A}$，定义为

$$k\mathbf{A} = (ka_{ij})_{m \times n}$$

矩阵的运算—数乘

定义4: 数k与$m \times n$矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})$的乘积(简称**数乘**)仍是$m \times n$矩阵，记为$k\mathbf{A}$，定义为

$$k\mathbf{A} = (ka_{ij})_{m\times n}$$

性质： 设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$为$m \times n$矩阵，$\mathbf{C}$为$n \times t$矩阵，k, l是数:

(1)$(k+l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$;

矩阵的运算—数乘

定义4: 数k与$m \times n$矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})$的乘积(简称**数乘**)仍是$m \times n$矩阵，记为$k\mathbf{A}$，定义为

$$k\mathbf{A} = (ka_{ij})_{m\times n}$$

性质： 设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$为$m \times n$矩阵，$\mathbf{C}$为$n \times t$矩阵，k, l是数:

(1)$(k+l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$;

(2)$k(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$;

矩阵的运算—数乘

定义4: 数k与$m \times n$矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})$的乘积(简称**数乘**)仍是$m \times n$矩阵，记为$k\mathbf{A}$，定义为

$$k\mathbf{A} = (ka_{ij})_{m\times n}$$

性质： 设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$为$m \times n$矩阵，$\mathbf{C}$为$n \times t$矩阵，k, l是数:

(1)$(k + l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$;

(2)$k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$;

(3)$k(l\mathbf{A}) = (kl)\mathbf{A}$;

矩阵的运算—数乘

定义4:数k与$m \times n$矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})$的乘积(简称**数乘**)仍是$m \times n$矩阵，记为$k\mathbf{A}$，定义为

$$k\mathbf{A} = (ka_{ij})_{m\times n}$$

性质： 设$\mathbf{A}, \mathbf{B}$为$m \times n$矩阵，$\mathbf{C}$为$n \times t$矩阵，k, l是数:

(1)$(k+l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A}$;

(2)$k(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$;

(3)$k(l\mathbf{A}) = (kl)\mathbf{A}$;

(4)$1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$，$0 \cdot \mathbf{A} = 0$;

矩阵的运算—数乘

定义4: 数k与$m\times n$矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$的乘积(简称**数乘**)仍是$m\times n$矩阵，记为$k\mathbf{A}$，定义为

$$k\mathbf{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$$

性质： 设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为$m\times n$矩阵，$\mathbf{C}$为$n\times t$矩阵，k,l是数:

(1)$(k+l)\mathbf{A}=k\mathbf{A}+l\mathbf{A}$;

(2)$k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$;

(3)$k(l\mathbf{A})=(kl)\mathbf{A}$;

(4)$1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$，$0\cdot\mathbf{A}=0$;

(5)$-\mathbf{B}=(-1)\cdot\mathbf{B}$，$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{1})\mathbf{B}$;

矩阵的运算—数乘

定义4: 数k与$m\times n$矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$的乘积(简称**数乘**)仍是$m\times n$矩阵，记为$k\mathbf{A}$，定义为

$$k\mathbf{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$$

性质： 设$\mathbf{A},\mathbf{B}$为$m\times n$矩阵，$\mathbf{C}$为$n\times t$矩阵，k,l是数:

(1)$(k+l)\mathbf{A}=k\mathbf{A}+l\mathbf{A}$;

(2)$k(\mathbf{A}+\mathbf{B})=k\mathbf{A}+k\mathbf{B}$;

(3)$k(l\mathbf{A})=(kl)\mathbf{A}$;

(4)$1\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}$，$0\cdot\mathbf{A}=0$;

(5)$-\mathbf{B}=(-1)\cdot\mathbf{B}$，$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}+(-\mathbf{1})\mathbf{B}$;

(6)$k(\mathbf{AC})=(k\mathbf{A})\mathbf{C}=\mathbf{A}(k\mathbf{C})$.

矩阵的运算—转置

定义5:矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的**转置矩阵**是一个$n\times m$矩阵，它的$(i,j)$元素是$a_{ji}$，记为$\mathbf{A}'$(或$\mathbf{A}^T$)。即

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

矩阵的运算—转置

定义5: 矩阵$\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$的**转置矩阵**是一个$n \times m$矩阵，它的$(i,j)$元素是$a_{ji}$，记为$\mathbf{A}'$**(或**$\mathbf{A}^T$**)**。即

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

性质： $(1)(\mathbf{A}')' = \mathbf{A}$;

矩阵的运算—转置

定义5:矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的**转置矩阵**是一个$n\times m$矩阵，它的$(i,j)$元素是$a_{ji}$，记为$\mathbf{A}'$**(或**$\mathbf{A}^T$**)**。即

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

性质：(1)$(\mathbf{A}')'=\mathbf{A}$;

(2)$(\mathbf{A}+\mathbf{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}'$;

矩阵的运算—转置

定义5:矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的**转置矩阵**是一个$n\times m$矩阵，它的$(i,j)$元素是$a_{ji}$，记为$\mathbf{A}'$(或$\mathbf{A}^T$)。即

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

性质： (1)$(\mathbf{A}')'=\mathbf{A}$;

(2)$(\mathbf{A}+\mathbf{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}'$;

(3)$(\lambda\mathbf{A})'=\lambda\mathbf{A}'$;

矩阵的运算—转置

定义5:矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的**转置矩阵**是一个$n\times m$矩阵，它的$(i,j)$元素是$a_{ji}$，记为$\mathbf{A}'$**(或**$\mathbf{A}^T$**)**。即

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

性质： (1)$(\mathbf{A}')'=\mathbf{A}$;

(2)$(\mathbf{A}+\mathbf{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}'$;

(3)$(\lambda\mathbf{A})'=\lambda\mathbf{A}'$;

(4)$(\mathbf{AB})'=\mathbf{B}'\mathbf{A}'$.

矩阵的运算—转置

定义5:矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$的转置矩阵是一个$n\times m$矩阵，它的$(i,j)$元素是$a_{ji}$，记为$\mathbf{A}'$(或$\mathbf{A}^T$)。即

$$\mathbf{A}'=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

性质：(1)$(\mathbf{A}')'=\mathbf{A}$;

(2)$(\mathbf{A}+\mathbf{B})'=\mathbf{A}'+\mathbf{B}'$;

(3)$(\lambda\mathbf{A})'=\lambda\mathbf{A}'$;

(4)$(\mathbf{AB})'=\mathbf{B}'\mathbf{A}'$.

注：一般地，有$(\mathbf{A_1A_2}\cdots\mathbf{A_k})'=\mathbf{A}_k'\mathbf{A}_{k-1}'\cdots\mathbf{A}_2'\mathbf{A}_1'$。

共轭矩阵

定义:若$A=(a_{ij})_{m\times n}$为**复矩阵**，记$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$，其中$\overline{a_{ij}}$为$a_{ij}$的共轭复数，称$\overline{A}$为$A$的**共轭矩阵**。

共轭矩阵

定义:若$A=(a_{ij})_{m\times n}$为**复矩阵**，记$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$，其中$\overline{a_{ij}}$为$a_{ij}$的共轭复数，称$\overline{A}$为$A$的**共轭矩阵**。

性质： 设A,B为复矩阵，k为复数

(1)$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

共轭矩阵

定义:若$A=(a_{ij})_{m\times n}$为**复矩阵**，记$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$，其中$\overline{a_{ij}}$为$a_{ij}$的共轭复数，称$\overline{A}$为$A$的**共轭矩阵**。

性质： 设A,B为复矩阵，k为复数

(1)$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

(2)$\overline{AB}=\overline{A}\ \overline{B}$;

共轭矩阵

定义: 若$A=(a_{ij})_{m\times n}$为**复矩阵**，记$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$，其中$\overline{a_{ij}}$为$a_{ij}$的共轭复数，称$\overline{A}$为$A$的**共轭矩阵**。

性质： 设A,B为复矩阵，k为复数

(1)$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

(2)$\overline{AB}=\overline{A}\ \overline{B}$;

(3)$\overline{kA}=\overline{k}\ \overline{A}$;

共轭矩阵

定义: 若$A=(a_{ij})_{m\times n}$为**复矩阵**，记$\overline{A}=(\overline{a_{ij}})_{m\times n}$，其中$\overline{a_{ij}}$为$a_{ij}$的共轭复数，称$\overline{A}$为$A$的**共轭矩阵**。

性质： 设A,B为复矩阵，k为复数

(1)$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$;

(2)$\overline{AB}=\overline{A}\ \overline{B}$;

(3)$\overline{kA}=\overline{k}\ \overline{A}$;

(4)$\overline{A'}=\overline{A}'$.

特殊矩阵

定义： 设$\mathbf{A}$是n阶矩阵，元素a_{ii}称为$\mathbf{A}$的**第i个主对角线元**，元素$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$组成$\mathbf{A}$的**主对角线**。

特殊矩阵

定义： 设$\mathbf{A}$是n阶矩阵，元素a_{ii}称为$\mathbf{A}$的第i个主对角线元，元素$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$组成$\mathbf{A}$的主对角线。

对角矩阵： 若n阶矩阵$\mathbf{A}$除主对角线元外，其他元素都是零，即当$i \neq j$时，$a_{ij} = 0$，称A是对角矩阵。

特殊矩阵

定义： 设$\mathbf{A}$是n阶矩阵，元素a_{ii}称为$\mathbf{A}$的第i个主对角线元，元素$a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$组成$\mathbf{A}$的主对角线。

对角矩阵： 若n阶矩阵$\mathbf{A}$除主对角线元外，其他元素都是零，即当$i\neq j$时，$a_{ij}=0$，称A是对角矩阵。

注： 主对角线元为$\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$的对角阵，也可记为$\text{diag}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)$，即

$$\text{diag}(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)=\begin{pmatrix}\delta_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \delta_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n\end{pmatrix}$$

特殊矩阵

单位矩阵： 主对角线元全是1的n阶对角矩阵称为n阶单位矩阵，记为$\mathbf{E}_n$或$\mathbf{E}$，即

$$\mathbf{E}_n = \mathrm{diag}(1,1,\cdots,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

特殊矩阵

单位矩阵： 主对角线元全是1的n阶对角矩阵称为n阶单位矩阵，记为$\mathbf{E}_n$或$\mathbf{E}$，即

$$\mathbf{E}_n = \mathrm{diag}(1, 1, \cdots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

数量矩阵： 主对角线元都相同的n阶对角矩阵，即数k与单位矩阵$\mathbf{E}$的数乘矩阵，记为kE,

$$k\mathbf{E} = \mathrm{diag}(k, k, \cdots, k) = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

特殊矩阵

上三角矩阵与下三角矩阵:若一个n阶矩阵的主对角线下方的元素全是零，称它为上三角矩阵；若一个n阶矩阵的主对角线上方的元素全是零，称它为下三角矩阵。 $(P202, 25)$

特殊矩阵

上三角矩阵与下三角矩阵:若一个n阶矩阵的主对角线下方的元素全是零，称它为**上三角矩阵**；若一个n阶矩阵的主对角线上方的元素全是零，称它为**下三角矩阵**。 $(P202, 25)$

定义： 在n阶矩阵$\mathbf{A}=(a_{ij})$中，若当$i>j$时都有$a_{ij}=0$，称$\mathbf{A}$为**上三角矩阵**。若在n阶矩阵$\mathbf{A}$中，当$i<j$时都有$a_{ij}=0$，称$\mathbf{A}$为**下三角矩阵**。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

特殊矩阵

对称矩阵与反对称矩阵:对于n阶矩阵$\mathbf{A}$，若满足$\mathbf{A}' = \mathbf{A}$,称$\mathbf{A}$为**对称矩阵**;若满足$\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$，称$\mathbf{A}$为**反对称矩阵**。 $(P200, 10, 12)$

特殊矩阵

对称矩阵与反对称矩阵:对于n阶矩阵$\mathbf{A}$，若满足$\mathbf{A}' = \mathbf{A}$,称$\mathbf{A}$为**对称矩阵**;若满足$\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$，称$\mathbf{A}$为**反对称矩阵**。 $(P200, 10, 12)$

注：(1)$\mathbf{A}$是对称矩阵，即$\mathbf{A} = \mathbf{A}'$的充要条件是

$$a_{ij} = a_{ji}(1 \le i, j \le n)$$

特殊矩阵

对称矩阵与反对称矩阵:对于n阶矩阵$\mathbf{A}$，若满足$\mathbf{A}' = \mathbf{A}$,称$\mathbf{A}$为对称矩阵;若满足$\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$，称$\mathbf{A}$为反对称矩阵。 $(P200, 10, 12)$

注：(1)$\mathbf{A}$是对称矩阵，即$\mathbf{A} = \mathbf{A}'$的充要条件是

$$a_{ij} = a_{ji}(1 \leq i, j \leq n)$$

(2)$\mathbf{A}$是反对称矩阵，即$\mathbf{A} = -\mathbf{A}'$充要条件是

$$a_{ij} = -a_{ji}(1 \leq i, j \leq n)$$

特别地，有$a_{ii} = 0$。

特殊矩阵

对称矩阵与反对称矩阵: 对于n阶矩阵$\mathbf{A}$，若满足$\mathbf{A}' = \mathbf{A}$,称$\mathbf{A}$为**对称矩阵**;若满足$\mathbf{A}' = -\mathbf{A}$，称$\mathbf{A}$为**反对称矩阵**。　$(P200, 10, 12)$

注：(1)$\mathbf{A}$是对称矩阵，即$\mathbf{A} = \mathbf{A}'$的充要条件是

$$a_{ij} = a_{ji}(1 \leq i, j \leq n)$$

(2)$\mathbf{A}$是反对称矩阵，即$\mathbf{A} = -\mathbf{A}'$充要条件是

$$a_{ij} = -a_{ji}(1 \leq i, j \leq n)$$

特别地，有$a_{ii} = 0$。

定义: 若矩阵$\mathbf{A}, \mathbf{B}$满足$\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$，称$\mathbf{A}$与$\mathbf{B}$是**可交换的**。

矩阵乘法的一些常用结论

1、两个对角矩阵可交换，且它们的乘积仍为对角矩阵；反之与一个主对角元互异的对角矩阵可交换的矩阵必为对角矩阵。 $(P199,5)$

矩阵乘法的一些常用结论

1、两个对角矩阵可交换，且它们的乘积仍为对角矩阵；反之与一个主对角元互异的对角矩阵可交换的矩阵必为对角矩阵。 $(P199, 5)$

2、上(下)三角矩阵的乘积仍为上(下)三角矩阵。 $(P202, 25)$

矩阵乘法的一些常用结论

1、两个对角矩阵可交换，且它们的乘积仍为对角矩阵；反之与一个主对角元互异的对角矩阵可交换的矩阵必为对角矩阵。 $(P199, 5)$

2、上(下)三角矩阵的乘积仍为上(下)三角矩阵。 $(P202, 25)$

3、n级矩阵A与所有n级矩阵可交换$\Leftrightarrow$ A为数量矩阵。 $(P199, 7)$

矩阵乘法的一些常用结论

1、两个对角矩阵可交换，且它们的乘积仍为对角矩阵；反之与一个主对角元互异的对角矩阵可交换的矩阵必为对角矩阵。 $(P199, 5)$

2、上(下)三角矩阵的乘积仍为上(下)三角矩阵。 $(P202, 25)$

3、n级矩阵A与所有n级矩阵可交换$\Leftrightarrow$ A为数量矩阵。 $(P199, 7)$

证明方法：待定系数法

矩阵乘法的一些常用结论

1、两个对角矩阵可交换，且它们的乘积仍为对角矩阵；反之与一个主对角元互异的对角矩阵可交换的矩阵必为对角矩阵。 $(P199,5)$

2、上(下)三角矩阵的乘积仍为上(下)三角矩阵。 $(P202,25)$

3、n级矩阵A与所有n级矩阵可交换$\Leftrightarrow A$为数量矩阵。 $(P199,7)$

证明方法： 待定系数法

定理1: 设A,B是数域P上的n级方阵，则$|AB|=|A||B|$。

矩阵乘法的一些常用结论

1、两个对角矩阵可交换，且它们的乘积仍为对角矩阵；反之与一个主对角元互异的对角矩阵可交换的矩阵必为对角矩阵。 $(P199, 5)$

2、上(下)三角矩阵的乘积仍为上(下)三角矩阵。 $(P202, 25)$

3、n级矩阵A与所有n级矩阵可交换$\Leftrightarrow$ A为数量矩阵。 $(P199, 7)$

证明方法： 待定系数法

定理1: 设A, B是数域P上的n级方阵，则$|AB| = |A||B|$。

证明方法： 1、应用拉普拉斯定理($P93-96$, 定理7)；2、利用矩阵分块及P81例3($P195$例3)；3、利用初等矩阵与初等变换的关系

矩阵乘法的一些常用结论

1、两个对角矩阵可交换，且它们的乘积仍为对角矩阵；反之与一个主对角元互异的对角矩阵可交换的矩阵必为对角矩阵。 $(P199,5)$

2、上(下)三角矩阵的乘积仍为上(下)三角矩阵。 $(P202,25)$

3、n级矩阵A与所有n级矩阵可交换$\Leftrightarrow$ A为数量矩阵。 $(P199,7)$

证明方法： 待定系数法

定理1: 设A,B是数域P上的n级方阵，则$|AB|=|A||B|$。

证明方法： 1、应用拉普拉斯定理($P93-96$, 定理7)；2、利用矩阵分块及P81例3($P195$例3)；3、利用初等矩阵与初等变换的关系

推论1: 设$A_1,A_2,\cdots,A_m$是数域P上的n级方阵，则

$$|A_1A_2\cdots A_m|=|A_1||A_2|\cdots|A_m|$$

例1 求矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵。 $(P201, 20(2))$

例1 求矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵。 $(P201, 20(2))$

例2 (1)$T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$, A, D可逆,求T^{-1}; $(P194-195,$ 例$1,$ 例$2)$

(2)$T_1=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, T_1, D可逆,则$(A-BD^{-1}C)$可逆,并求T_1^{-1}.

例1 求矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$的逆矩阵。 $(P201, 20(2))$

例2 (1)$T=\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}$, A, D可逆,求T^{-1}; $(P194-195,$ 例$1,$ 例$2)$

(2)$T_1=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, T_1, D可逆,则$(A-BD^{-1}C)$可逆,并求T_1^{-1}.

例3 已知n级方阵A满足$A^2-3A-2E=0$,证明A可逆,并求其逆。

例1 求矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$的逆矩阵。 $(P201,20(2))$

例2 (1)$T=\begin{pmatrix}A&0\\C&D\end{pmatrix}$, A,D可逆,求T^{-1}; $(P194-195,例1,例2)$

(2)$T_1=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$, T_1,D可逆,则$(A-BD^{-1}C)$可逆,并求T_1^{-1}.

例3 已知n级方阵A满足$A^2-3A-2E=0$,证明A可逆,并求其逆。

例4 设$A,B,A+B$都是可逆矩阵，求证：$A^{-1}+B^{-1}$也是可逆矩阵。

例1 求矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$的逆矩阵。 $(P201,20(2))$

例2 (1)$T=\begin{pmatrix}A&0\\C&D\end{pmatrix}$, A,D可逆,求T^{-1}; $(P194-195,$ 例$1,$ 例$2)$

(2)$T_1=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$, T_1,D可逆,则$(A-BD^{-1}C)$可逆,并求T_1^{-1}.

例3 已知n级方阵A满足$A^2-3A-2E=0$,证明A可逆,并求其逆。

例4 设$A,B,A+B$都是可逆矩阵，求证：$A^{-1}+B^{-1}$也是可逆矩阵。

例5 设A,B为n级方阵,$|B|\neq 0$, $A-E$可逆,且$(A-E)^{-1}=(B-E)'$,证明A可逆。

例6 设A是n级方阵, $|A| = \frac{1}{2}$,求$|(3A)^{-1} - 2A^*|$。

例6 设A是n级方阵, $|A|=\frac{1}{2}$,求$|(3A)^{-1}-2A^*|$。

例7 设A为n级方阵$(n\geq 2)$,证明:

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases} \qquad (P202, 27)$$

例6 设A是n级方阵, $|A| = \frac{1}{2}$,求$|(3A)^{-1} - 2A^*|$。

例7 设A为n级方阵$(n \geq 2)$,证明:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases} \qquad (P202, 27)$$

例8 设A为n级方阵$(n \geq 2)$,证明:$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$. $(P203, 5)$

例6 设A是n级方阵, $|A|=\frac{1}{2}$,求$|(3A)^{-1}-2A^*|$。

例7 设A为n级方阵$(n\geq 2)$,证明:

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases} \qquad (P202,27)$$

例8 设A为n级方阵$(n\geq 2)$,证明:$(A^*)^*=|A|^{n-2}A.$ $(P203,5)$

例9 设A为n级方阵$(n\geq 2)$,证明:对任意数k,有$(kA)^*=k^{n-1}A^*.$

例6 设A是n级方阵, $|A|=\frac{1}{2}$,求$|(3A)^{-1}-2A^*|$。

例7 设A为n级方阵$(n\geq 2)$,证明:

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases} \qquad (P202,27)$$

例8 设A为n级方阵$(n\geq 2)$,证明:$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$. $(P203,5)$

例9 设A为n级方阵$(n\geq 2)$,证明:对任意数k,有$(kA)^*=k^{n-1}A^*$.

例10 设A,B为n级方阵,证明:$(AB)^*=B^*A^*$.

例6 设A是n级方阵, $|A| = \frac{1}{2}$,求$|(3A)^{-1} - 2A^*|$。

例7 设A为n级方阵$(n \geq 2)$,证明:

$$r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases} \qquad (P202, 27)$$

例8 设A为n级方阵$(n \geq 2)$,证明:$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$. $(P203, 5)$

例9 设A为n级方阵$(n \geq 2)$,证明:对任意数k,有$(kA)^* = k^{n-1}A^*$.

例10 设A, B为n级方阵,证明:$(AB)^* = B^*A^*$.

例11 设A, B, C, D都是n级方阵, $AC = CA$,证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB| \qquad (P203, 6)$$

结论:A, B皆为n级方阵, $AB = 0$,则$r(A) + r(B) \leq n$.　　$(P200, 18)$

例12 设A是n级方阵, $A^2 = E$,证明:

$$r(A+E) + r(A-E) = n \qquad (P203, 3)$$

结论:A, B皆为n级方阵, $AB=0$,则$r(A)+r(B)\leq n.$ $(P200, 18)$

例12 设A是n级方阵, $A^2=E$,证明:

$$r(A+E)+r(A-E)=n \qquad (P203, 3)$$

例13 设A是n级方阵, $A^2=A$,证明:

$$r(A)+r(A-E)=n \qquad (P203, 4)$$

结论: A, B皆为n级方阵, $AB=0$,则$r(A)+r(B)\le n.$ $(P200, 18)$

例12 设A是n级方阵, $A^2=E$,证明:

$$r(A+E)+r(A-E)=n \qquad (P203,3)$$

例13 设A是n级方阵, $A^2=A$,证明:

$$r(A)+r(A-E)=n \qquad (P203,4)$$

例14 设A是n级方阵, $A^3=E$,证明:

$$r(A-E)+r(A^2+A+E)=n$$

结论:A, B皆为n级方阵, $AB=0$,则$r(A)+r(B)\leq n.$ $(P200, 18)$

例12 设A是n级方阵, $A^2=E$,证明:

$$r(A+E)+r(A-E)=n \qquad (P203, 3)$$

例13 设A是n级方阵, $A^2=A$,证明:

$$r(A)+r(A-E)=n \qquad (P203, 4)$$

例14 设A是n级方阵, $A^3=E$,证明:

$$r(A-E)+r(A^2+A+E)=n$$

例15 设A是n级方阵,证明:$r(A^n)=r(A^{n+1})=r(A^{n+2})=\cdots$

例16 证明:秩为r的矩阵可表成r个秩为1的矩阵的和。

例16 证明:秩为r的矩阵可表成r个秩为1的矩阵的和。

例17 设A是n级方阵, $r(A) = r$,证明:存在一个n级可逆矩阵P使PAP^{-1}的后$n-r$行全为零。 $(P204, 7)$

例16 证明:秩为r的矩阵可表成r个秩为1的矩阵的和。

例17 设A是n级方阵,$r(A)=r$,证明:存在一个n级可逆矩阵P使PAP^{-1}的后$n-r$行全为零。 $(P204,7)$

例18 设A是$m\times r$矩阵,则A是列满秩的充要条件是存在m级可逆阵P使

$$A=P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

A是列满秩的充要条件是存在r级可逆阵Q使

$$A=(E_m \ \ 0)Q \qquad (P204,11)$$

例16 证明:秩为r的矩阵可表成r个秩为1的矩阵的和。

例17 设A是n级方阵, $r(A)=r$,证明:存在一个n级可逆矩阵P使PAP^{-1}的后$n-r$行全为零。 $(P204,7)$

例18 设A是$m\times r$矩阵,则A是列满秩的充要条件是存在m级可逆阵P使

$$A=P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

A是列满秩的充要条件是存在r级可逆阵Q使

$$A=(E_m\ \ 0)Q \qquad (P204,11)$$

例19 设$r(A_{m\times n})=r$,则有$m\times r$的列满秩矩阵P和$r\times n$的行满秩矩阵Q,使$A=PQ$。 $(P204,12)$

例16 证明:秩为r的矩阵可表成r个秩为1的矩阵的和。

例17 设A是n级方阵,$r(A)=r$,证明:存在一个n级可逆矩阵P使PAP^{-1}的后$n-r$行全为零。 $(P204,7)$

例18 设A是$m\times r$矩阵,则A是列满秩的充要条件是存在m级可逆阵P使

$$A=P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}$$

A是列满秩的充要条件是存在r级可逆阵Q使

$$A=(E_m \ \ 0)Q \qquad (P204,11)$$

例19 设$r(A_{m\times n})=r$,则有$m\times r$的列满秩矩阵P和$r\times n$的行满秩矩阵Q,使$A=PQ$。 $(P204,12)$

例20 设$A=(a_{ij})s\times n, B=(b_{ij})n\times m$,证明:

$$r(AB)\geq r(A)+r(B)-n \qquad (P204,10)$$