习题 1.1

1. 已知平行四边形$ABCD$的对角线为AC,BD，设$\overrightarrow{AC}=\vec{a},\overrightarrow{BD}=\vec{b}$，求$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD},\overrightarrow{DA}$

解：由平行四边形的对边相等且平行可得：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{DA}$，那么由

$\begin{cases}\overrightarrow{AC}=\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BD}=\vec{b}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\end{cases}$，可得$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right),\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$。

2. 已知平行四边形$ABCD$的边BC,CD的中点分别为K,L，设$\overrightarrow{AK}=\vec{k},\overrightarrow{AL}=\vec{l}$，求$\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$。

解:在平行四边形中$\begin{cases}\overrightarrow{AK}=\vec{k}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{AL}=\vec{l}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DL}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\end{cases}$,解得$\begin{cases}\overrightarrow{BC}=\frac{4}{3}\vec{l}-\frac{2}{3}\vec{k}\\ \overrightarrow{CD}=\frac{2}{3}\vec{l}-\frac{4}{3}\vec{k}\end{cases}$

3. 证明：M是线段AB中点的充要条件是：对任意一点O有$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$。

解：若M是线段AB中点当且仅当$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$，即$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}$，整理得$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$。

4. 设M是平行四边形$ABCD$的对角线的交点，证明：对任意一点O有$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$。

解：设M是平行四边形$ABCD$的对角线的交点，则由 14 题结论可知M平分对角线，即$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}=0$，那么对任意一点$O$有

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OM}=0$$

整理得$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$。

5. 设$AD.BE,CF$是三角形ABC的三条中线，用$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$表示$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CF}$，并且求$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$。

解：三角形ABC中，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，又$AD.BE,CF$是三条中线，那么

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\end{cases}$$，所以 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=0$

6. 设 A,B,C,D 是一个四面体的顶点，M,N 分别是 AB,CD 的中点，证明：$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$。

解：取 BD 边中点 E，那么 $\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，同理 $\overrightarrow{ME}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$。

7. 证明：对任意向量 $\vec{a},\vec{b}$ 都有 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|\le\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$，这个称为三角形不等式，等号成立的充要条件是什么？

证明：若 $\vec{a},\vec{b}$ 全不为零，则 $\vec{a}+\vec{b},\vec{a},\vec{b}$ 首尾相接成一三角形，那么有三角形性质可得 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|<\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$；若 $\vec{a},\vec{b}$ 有一个或者全为零（$\vec{a},\vec{b}$ 共线），那么显然 $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$。

8. 证明：若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，则其中至少有一个向量可以表示成其余两个向量的线性组合，是否其中每一个向量都可以表示成其余两个向量的线性组合？

证明：若 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面，则有 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\upsilon\vec{c}=0$，其中 λ,μ,υ 不全为零，则若 $\lambda\neq0$，那么 $\vec{a}=-\frac{\mu}{\lambda}\vec{b}-\frac{\upsilon}{\lambda}\vec{c}$，同理可讨论 μ,υ；因为 λ,μ,υ 不全为零，那么若 $\lambda=0$，则 $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\upsilon\vec{c}=\mu\vec{b}+\upsilon\vec{c}=0$，则 $\vec{a}$ 不能表示成其他向量的线性组合，同理可讨论 μ,υ。

9. 证明：点 M 在直线 AB 上的充要条件是：有实数 λ,μ 使 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},\lambda+\mu=1$，其中 O 是任意一点。

证明：点 M 在直线 AB 上当且仅当 AM,AB 共线，AM,AB 共线当且仅当 $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$，即对任意一点 O，有 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}=k\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)$，整理得 $\overrightarrow{OM}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}$，令 $\lambda=1-k,\mu=k$ 即可得知命题得证。

10. 证明：四点 A,B,C,D 共面的充要条件是：存在不全为零的实 $\lambda,\mu,\upsilon,\omega$ 使得

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\upsilon\overrightarrow{OC}+\omega\overrightarrow{OD}=0,\lambda+\mu+\upsilon+\omega=0$$

其中O是任意一点。

证明：必要性：若 A,B,C,D 共面，则 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 共面，则有不全为零的实数 k_1,k_2,k_3，使得 $k_1\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{AC}+k_3\overrightarrow{AD}=0$，那么对任意一点 O，有

$$k_1\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)+k_2\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)+k_3\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}\right)=0$$

整理得 $\left(1-k_1-k_2-k_3\right)\overrightarrow{OA}+k_1\overrightarrow{OB}+k_2\overrightarrow{OC}+k_3\overrightarrow{OD}=0$，

令 $\lambda=1-k_1-k_2-k_3,\mu=k_1,\upsilon=k_2,\omega=k_3$ 即可得知必要性得证；

充分性：$\lambda+\mu+\upsilon+\omega=0$，且 $\lambda,\mu,\upsilon,\omega$ 不全为零，不妨设 $\lambda\neq 0$，那么 $\lambda=-\mu-\upsilon-\omega$，

则 $\left(-\mu-\upsilon-\omega\right)\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\upsilon\overrightarrow{OC}+\omega\overrightarrow{OD}=0$，

整理得 $\mu\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)+\upsilon\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)+\omega\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}\right)=0$，所以 $\mu\overrightarrow{AB}+\upsilon\overrightarrow{AC}+\omega\overrightarrow{AD}=0$，

则 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ 共面，所以 A,B,C,D 共面。

11. 设 A,B,C 是不在一直线上的三点，则点 M 在 A,B,C 决定的平面上的充要条件是：存在实 λ,μ,υ 使得

$$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\upsilon\overrightarrow{OC},\lambda+\mu+\upsilon=1$$

其中O是任意一点。

证明：因为 A,B,C 不共线，则 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 不共线，那么点 M 在 A,B,C 决定的平面上当且仅当 $\overrightarrow{AM}=k_1\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{AC}$，$k_1,k_2$ 不全为零，即对任意一点 O，有 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}=k_1\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)+k_2\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)$，

整理得 $\overrightarrow{OM}=\left(1-k_1-k_2\right)\overrightarrow{OA}+k_1\overrightarrow{OB}+k_2\overrightarrow{OC}$，令 $\lambda=1-k_1-k_2,\mu=k_1,\upsilon=k_2$ 即可得证。

12. 证明：点 M 在三角形 ABC 内（包括三边）的充要条件是：存在非负实数 λ,μ 使得

$$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC},\lambda+\mu\leq 1$$

证明：点 M 在三角形 ABC 内（包括三边）当且仅当存在 BC 边上一点 D，使得 M 在线段 AD 上，当且仅当 $\overrightarrow{AD}=k_1\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AD},k_1+k_2=1,0\leq k\leq 1$，即 $\overrightarrow{AM}=kk_1\overrightarrow{AB}+kk_2\overrightarrow{AC},kk_1+kk_2\leq 1$，命题得证。

13. 证明：点M在三角形ABC内（包括三边）的充要条件是：存在非负实数λ,μ,υ使得

$$\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\upsilon\overrightarrow{OC},\lambda+\mu+\upsilon=1$$

其中O是任意一点。

证明：由 12 题可知 $\overrightarrow{AM}=\lambda'\overrightarrow{AB}+\mu'\overrightarrow{AC},\lambda'+\mu'\le 1$，那么对任意一点 O，有 $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}=\lambda'\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)+\mu'\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}\right)$，

整理得$\overrightarrow{OM}=\left(1-\lambda'-\mu'\right)\overrightarrow{OA}+\lambda'\overrightarrow{OB}+\mu'\overrightarrow{OC}$，令$\lambda=1-\lambda'-\mu',\mu=\lambda',\upsilon=\mu'$即可得证。

14. 用向量法证明：平行四边形的对角线互相平分。

证明：设M是平行四边形$ABCD$对角线AC,BD的交点，那么$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BD}$分别共线，所以 $\overrightarrow{AM}=k_1\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BM}=k_2\overrightarrow{BD}$，那么 $\overrightarrow{AM}=k_1\overrightarrow{AC}=k_1\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=k_1\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)$，同时 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+k_2\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$，因为 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ 不共线，那么可得 $k_1=1-k_2,k_1=k_2$，解得$k_1=k_2=\dfrac{1}{2}$，所以M是AC,BD的中点，命题得证。

15. 用向量法证明：三角形ABC的三条中线交于一点M，并且对任意一点O有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$

证明：设D,E,F分别为BC,CA,AB边的中点，BE,CF交于点M下证$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD}$共线。

设$\overrightarrow{CM}=k_1\overrightarrow{CF},\overrightarrow{BM}=k_2\overrightarrow{BE}$，那么

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}+k_1\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AC}+k_1\left(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AC}+k_1\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+k_2\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AB}+k_2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$$

因为$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$不共线，那么由以上两式可得$k_1=k_2=\dfrac{2}{3}$，

所以$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

又$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)$，

所以$\overrightarrow{AM}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，即$\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD}$共线。所以三角形$ABC$的三条中线交于一点。

因为$\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，所以$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=0$，所以对任意一点$O$，有$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OM}=0$，整理得$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$。

16. 用向量法证明：四面体$ABCD$的对棱中点连线交于一点M，并且对任意一点O有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$

证明：设E,F,G,H,K,L分别为四面体$ABCD$的AB,CD,BC,AD,AC,BD棱的中点，下证EF,GH,KL交于一点。

由于$\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{GF}$，所以$EHFG$为平行四边形，那么它的对角线$EF,GH$交于一点$M$。

$\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HF}\right)$
$=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，那么$\overrightarrow{KM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{KL}$，所以点$M$在$KL$上，那么$EF,GH,KL$交于一点。

又$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FM}=0$

所以对任意一点O，

有$\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OM}=0$

整理得$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$。

17. 在三角形ABC中，E,F分别是AC,AB上的点，并且$CE=\frac{1}{3}CA, AF=\frac{1}{3}AB$，设$BE,CF$交于点$G$，证明：$GE=\frac{1}{7}BE, GF=\frac{4}{7}CE$。

证明：设$\overrightarrow{GE}=k_1\overrightarrow{BE},\overrightarrow{GF}=k_2\overrightarrow{CF}$，

则$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CE}=\left(1-k_2\right)\overrightarrow{FC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\left(1-k_2\right)\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

又$\overrightarrow{GE}=k_1\overrightarrow{BE}=k_1\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)$，所以$-k_1=-\frac{1}{3}\left(1-k_2\right),\frac{2}{3}k_1=\frac{1}{3}+\left(1-k_2\right)$，

解得 $k_1=\frac{1}{7},k_2=\frac{4}{7}$，所以 $GE=\frac{1}{7}BE,GF=\frac{4}{7}CE$。

18. 用向量法证明契维定理：若三角形 ABC 的三边 AB,BC,CA 依次被分割成

$$AF:FB=\lambda:\mu,BD:DC=\upsilon:\lambda,CE:EA=\mu:\upsilon$$

其中 λ,μ,υ 都是正数，则三角形 ABC 的顶点与对边分点的连线交于一点 M，并且对任意一点 O 有

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{\lambda+\mu+\upsilon}\left(\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\upsilon\overrightarrow{OC}\right)$$

证明： 设 CF,BE 交于点 M，$\overrightarrow{CM}=k_1\overrightarrow{CF},\overrightarrow{BM}=k_2\overrightarrow{BE}$，因为

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AC}+k_1\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AC}+k_1\left(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AC}+k_1\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+k_2\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+k_2\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AC}+k_2\left(\frac{\upsilon}{\upsilon+\mu}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$$

所以 $1-k_1=k_2\frac{\upsilon}{\upsilon+\mu},k_1\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=1-k_2$，解得 $k_1=\frac{\mu+\lambda}{\upsilon+\lambda+\mu},k_2=\frac{\mu+\upsilon}{\upsilon+\lambda+\mu}$，

所以 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{\upsilon+\lambda+\mu}\left(\lambda\overrightarrow{AB}+\upsilon\overrightarrow{AC}\right)$，

又 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{\upsilon}{\upsilon+\lambda}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{\upsilon+\lambda}\left(\lambda\overrightarrow{AB}+\upsilon\overrightarrow{AC}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AD}$ 共线，那么三角形 ABC 的顶点与对边分点的连线交于一点 M。

$$\overrightarrow{CM}=k_1\overrightarrow{CF}=\frac{\mu+\lambda}{\mu+\upsilon+\lambda}\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right),$$

$$\overrightarrow{BM}=k_2\overrightarrow{BE}=\frac{\mu+\upsilon}{\mu+\upsilon+\lambda}\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{\upsilon}{\mu+\upsilon}\overrightarrow{AC}\right),$$

所以对任意一点 O 有

$$\lambda\overrightarrow{AM}+\mu\overrightarrow{BM}+\upsilon\overrightarrow{CM}=\lambda\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OM}\right)+\mu\left(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}\right)+\upsilon\left(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OM}\right)=0$$

整理得 $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{\lambda+\mu+\upsilon}\left(\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}+\upsilon\overrightarrow{OC}\right)$。

19. 用向量法证明：三角形 ABC 的角平分线交于一点 N，并且对任意一点 O 有

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{a+b+c}\left(a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}+c\overrightarrow{OC}\right)$$

其中 a,b,c 分别是 A,B,C 所对的边的边长。

证明：由于三角形的角平分线分对边之比等于$1:1$，那么用 18 题的契维定理马上可得命题成立。

20. 设 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 是正 n 边行的顶点，O 是它的对称中心，证明 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=0$

证明：反证法。假设结论不成立，则可以设 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OP}$，其中 $P\neq O$，将平面绕 O 点旋转 $\dfrac{2\pi}{n}$，设点 P 变成 $Q(\neq P)$，则 $\overrightarrow{OP}$ 变成 $\overrightarrow{OQ}\left(\neq\overrightarrow{OP}\right)$，由于 O 是正 n 边行的对称中心，所以当平面绕 O 点旋转 $\dfrac{2\pi}{n}$ 时，和向量 $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}$ 不变，即 $\overrightarrow{OP}$ 不变，矛盾。所以命题成立。

21. 设一个区域 G，如果连接它的任意两点的线段上的每一点都是 G 的点，则称 G 是凸的，证明：由同一点出发的向量 $\vec{x}=k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+k_m\overrightarrow{a_m}$ 的终点组成的区域是凸的，其中 $k_1,k_2,\ldots,k_n$ 都是非负实数，并且 $k_1+k_2+\ldots+k_n=1$。

证明：设由 O 点出发的向量 $\vec{x}=k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+k_m\overrightarrow{a_m}$ 的终点组成的区域是 G，A,B 为 G 中的点，则 $\overrightarrow{OA}=k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+k_m\overrightarrow{a_m}$，$\overrightarrow{OB}=k_1'\overrightarrow{a_1}+k_2'\overrightarrow{a_2}+\ldots+k_m'\overrightarrow{a_m}$，$k_1+k_2+\ldots+k_n=k_1'+k_2'+\ldots+k_n'=1$，若 M 为线段 AB 上的点则有 $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB},\lambda+\mu=1$，即

$$\overrightarrow{OM}=\lambda\left(k_1\overrightarrow{a_1}+k_2\overrightarrow{a_2}+\ldots+k_m\overrightarrow{a_m}\right)+\mu\left(k_1'\overrightarrow{a_1}+k_2'\overrightarrow{a_2}+\ldots+k_m'\overrightarrow{a_m}\right)$$
$$=\left(\lambda k_1+\mu k_1'\right)\overrightarrow{a_1}+\left(\lambda k_2+\mu k_2'\right)\overrightarrow{a_2}+\ldots+\left(\lambda k_m+\mu k_m'\right)\overrightarrow{a_m}$$

且
$$\left(\lambda k_1+\mu k_1'\right)+\left(\lambda k_2+\mu k_2'\right)+\ldots+\left(\lambda k_m+\mu k_m'\right)$$
$$=\lambda\left(k_1+k_2+\ldots+k_m\right)+\mu\left(k_1'+k_2'+\ldots+k_m'\right)=1$$

所以 M 也是 G 中的点，所以 G 是凸的。

习题 1.2

1. 在一个仿射坐标系中画出下列各点。

$$P(1,3,4),Q(-1,1,3),M(-1,-2,-3)$$

2. 给定直角坐标系，设点 M 的坐标为 (x,y,z)，求它分别对于 xOy 平面，x 轴和原点的对称点的坐标。

解： 它对于 xOy 平面的对称点的坐标为 $(x,y,-z)$，

对于 x 轴的对称点的坐标为 $\left(x,-y,-z\right)$，

对于原点的对称点的坐标为 $\left(-x,-y,-z\right)$。

3. 设平行四边形 $ABCD$ 的对角线交于 M 点，设

$$\overrightarrow{DP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{DB},\overrightarrow{CQ}=\frac{1}{6}\overrightarrow{CA}$$

取仿射坐标架 $\left[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]$，求点 M,P,Q 的坐标以及向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标。

解：由平行四边形的对边平行且相等可知，$M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),P\left(\frac{1}{5},\frac{4}{5}\right),Q\left(\frac{5}{6},\frac{5}{6}\right)$，则 $\overrightarrow{PQ}$ 的坐标为 $\left(\frac{19}{30},\frac{1}{30}\right)$

4. 对于平行四边形 $ABCD$，求 $A,D,\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DB}$ 在仿射坐标架 $\left[C;\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right]$ 中的坐标。

解：由平行四边形的对边平行且相等可知，$A\left(-1,0\right),D\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{AD}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{DB}\left(0,-1\right)$

5. 设 $ABCDEF$ 为正六边形，求个顶点以及向量 $\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DF}$ 在 $\left[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right]$ 中的坐标。

解：由正六边形的性质可知 $A\left(0,0\right),B\left(1,0\right),C\left(2,1\right),D\left(2,2\right),E\left(1,2\right),F\left(0,1\right)$，则由向量坐标和对应点坐标的关系可知 $\overrightarrow{DB}\left(-1,-2\right),\overrightarrow{DF}\left(-2,-1\right)$

6. 已知 $\overrightarrow{OA}=e_1,\overrightarrow{OB}=e_2,\overrightarrow{OC}=e_3$，是以原点 O 为顶点的平行六面体的三条棱，求此平行六面体过点 O 的对角线与平面 ABC 的交点 M 在仿射标架 $\left[o;e_1,e_2,e_3\right]$ 下的坐标。

解：由于 $\overrightarrow{OA}=e_1,\overrightarrow{OB}=e_2,\overrightarrow{OC}=e_3$ 不共面，则可得仿射标架 $\left[o;e_1,e_2,e_3\right]$，那么可设 $\overrightarrow{OM}$ 在该仿射标架下的坐标为 $\left(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right)$，因为 A,B,C,M 共面，则 $\overrightarrow{OM}=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3$，且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$，又由 O,M,E 共面，则可设 $\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{OE}$，因为 E 坐标为 $\left(1,1,1\right)$，所以 $\overrightarrow{OM}=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3=k\left(e_1+e_2+e_3\right)$，则可知 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{1}{3}$，所以 M 点坐标为 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$

7. 设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的坐标分别是$(1,5,2),(0,-3,4),(-2,3,-1)$，求下列向量的坐标：

$(1)2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c},(2)-3\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}$

解：由用坐标表示向量的线性运算可知

$2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$的坐标为$(2\times1-0-2,2\times5+3+3,2\times2-4-1)=(0,16,-1)$

$-3\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}$的坐标为$(-11,-9,-2)$

8. 已知平行四边形$ABCD$中顶点A,B,C的坐标分别为$(1,0,2),(0,3,-1),(2,-1,3)$，求$D$点和对角线交点$M$的坐标。

解：由$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$可知$D$点坐标为$(3,-4,6)$，由$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$可知$M$点坐标为$\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$

9. 判断下列各组向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$是否共面？能否将$\vec{c}$表示成$\vec{a},\vec{b}$的线性组合？若能，写出表示式。

（1）$\vec{a}(5,2,1),\vec{b}(-1,4,2),\vec{c}(-1,-1,5)$

（2）$\vec{a}(6,4,2),\vec{b}(-9,6,3),\vec{c}(-3,6,3)$

（3）$\vec{a}(1,2,-3),\vec{b}(-2,-4,6),\vec{c}(1,0,5)$

解：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的混合积为零是$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面的充要条件。

（1）$\begin{vmatrix}5&-1&-1\\2&4&-1\\1&2&5\end{vmatrix}\neq0$则$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面，$\vec{c}$不能表示成$\vec{a},\vec{b}$的线性组合

（2）$\begin{vmatrix}6&-9&-3\\4&6&6\\2&3&3\end{vmatrix}=0$则$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面，$\vec{c}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$

（3）$\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&-4&0\\-3&6&5\end{vmatrix}=0$则$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面，$\vec{c}$不能表示成$\vec{a},\vec{b}$的线性组合，因为$\vec{a},\vec{b}$成比例，所以$\vec{a},\vec{b}$共线，而$\vec{c}$与$\vec{a},\vec{b}$不共线。

10. 设点C分线段AB成$5:2$，点A的坐标为$(3,7,4)$，点C坐标为$(8,2,3)$，求点B的坐标。

解：设B坐标为(x,y,z)，则由于C分线段AB成定比$\frac{5}{2}$，则

$8=\frac{3+\frac{5}{2}x}{1+\frac{5}{2}},2=\frac{7+\frac{5}{2}y}{1+\frac{5}{2}},3=\frac{4+\frac{5}{2}z}{1+\frac{5}{2}}$，得$(x,y,z)=\left(10,0,\frac{13}{5}\right)$

11. 用坐标法证明：三角形ABC的三条中线交于一点，若A,B,C的坐标分别为

$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$，求其重心的坐标。

证明：在三角形ABC中，设D,E,F分别为BC,CA,AB边的中点，在$\left[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$中，

$A(0,0),B(1,0),C(0,1),D\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),E\left(0,\frac{1}{2}\right),F\left(\frac{1}{2},0\right)$，设$M$分线段$BE$成定比$k$，分线段

CF为定比l，则M坐标为

$$M_x=\frac{1+k\cdot 0}{1+k}=\frac{0+\frac{1}{2}\cdot l}{1+l},M_y=\frac{0+k\cdot\frac{1}{2}}{1+k}=\frac{1+0\cdot l}{1+l}$$

解得$k=l=2$，所以M坐标为$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，则$\overrightarrow{AM}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),\overrightarrow{AD}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，所以$A,D,M$共线，所以三角形$ABC$的三条中线交于一点。

12. 在三角形ABC中，设P,Q,R分别是中线AB,BC,CA上的点，并且

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB},\overrightarrow{BQ}=\mu\overrightarrow{QC},\overrightarrow{CR}=\upsilon\overrightarrow{RA}$$

证明P,Q,R共线的充要条件是$\lambda\mu\upsilon=-1$。

证明：在仿射标架$\left[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$中，$A(0,0),B(1,0),C(0,1)$，由于$P$分线段$AB$成定比$\lambda$，则

$p_x=\frac{\lambda}{1+\lambda},p_y=\frac{0}{1+\lambda}$，$Q$分线段$BC$成定比$\mu$，则$Q_x=\frac{1}{1+\mu},Q_y=\frac{\mu}{1+\mu}$，$R$分线段$CA$成定比$\upsilon$，则$R_x=\frac{0}{1+\upsilon},R_y=\frac{1}{1+\upsilon}$，所以$P,Q,R$共线的充要条件是

$$\begin{vmatrix} p_x & Q_x & R_x \\ p_y & Q_y & R_y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{\lambda\mu\upsilon+1}{(1+\lambda)(1+\mu)(1+\upsilon)}=0$$

即$\lambda\mu\upsilon=-1$

习题 1.3

1. 已知$\left|\vec{a}\right|=3,\left|\vec{b}\right|=2,<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{6}$，求$3\vec{a}+2\vec{b}$与$2\vec{a}-5\vec{b}$的内积。

解：$\left(3\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{a}-5\vec{b}\right)=6\vec{a}^2-15\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{a}\cdot\vec{b}-10\vec{b}^2=14-33\sqrt{3}$

2. 设$OABC$是一个四面体，$\left|OA\right|=\left|OB\right|=2,\left|OC\right|=1,\angle AOB=\angle AOC=\dfrac{\pi}{3},\angle BOC=\dfrac{\pi}{6}$，$P$是$AB$中点，$M$是$\triangle ABC$的重心，求$\left|OP\right|,\left|OM\right|,<\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OM}>$。

解：取仿射标架$\left[O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\right]$，其中$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$长度都等于$\overline{OC}$的长度，且分别与$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$同向，则 A,B,C 坐标分别为 $(2,0,0),(0,2,0),(0,0,1)$ ，P 坐标为 $(1,1,0)$ ，所以 $\left|OP\right|^2=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}=\left(\vec{e}_1+\vec{e}_2\right)\cdot\left(\vec{e}_1+\vec{e}_2\right)=\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1+\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2+2\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=1+1+2\cos\dfrac{\pi}{3}=3$，

又点M分线段CP成定比2，那么可求得M坐标分别为$\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$，则用内积计算可得

$\left|OM\right|=\dfrac{1}{3}\sqrt{15+2\sqrt{3}}$，$<\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OM}>=\arccos\dfrac{\sqrt{2424+46\sqrt{3}}}{6\sqrt{71}}$

3. 证明下列各对向量互相垂直。

（1）直角坐标分别为$(3,2,1),(2,-3,0)$的两个向量；

（2）$\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)-\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)$与$\vec{c}$。

证明：（1）$(3,2,1)\cdot(2,-3,0)=0$，所以两向量垂直；

（2）$\left[\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)-\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\right]\cdot\vec{c}=\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{c}-\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)=0$，所以两向量垂直。

4. 证明：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}=0$。

证明：

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}\\
&=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\\
&=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}\\
&=0
\end{aligned}
$$

5. 证明：对任意向量$\vec{a},\vec{b}$都有

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{b}\right|^2$$

当$\vec{a},\vec{b}$不共线时，说明此等式的意义。

证明：

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$

$=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2+\vec{a}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$

$=2\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{b}\right|^2$

当$\vec{a},\vec{b}$不共线时，此等式的几何意义是：平行四边形两条对角线的长度的平方和等于它的四条边的长度的平方和。

6. 下列等式是否正确（$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2$）

（1）$\left|\vec{a}\right|\vec{a}=\vec{a}^2$**，（2）**$\vec{a}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}^2\vec{b}$**，（3）**$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2$**，（4）**$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}=\vec{a}\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$

解：都不正确。（1）式左边是向量，右边是实数；（2）式左边向量和$\vec{a}$同向，右边向量和$\vec{b}$同向；（3）式$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\cos^2<\vec{a},\vec{b}>$；（4）式左边向量和$\vec{c}$同向，右边向量和$\vec{a}$同向，左右两边的向量的长度也不一样。

7. 在直角坐标系中，已知$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的坐标分别为$(3,5,7),(0,4,3),(-1,2,-4)$，设

$$\vec{u}=3\vec{a}+4\vec{b}-\vec{c},\vec{v}=2\vec{b}+\vec{c}$$

求$\vec{u}\cdot\vec{v},\left|\vec{u}\right|,\left|\vec{v}\right|,<\vec{u},\vec{v}>$。

解：$\vec{u},\vec{v}$坐标分别为$(10,29,37),(-1,10,2)$，则$\vec{u}\cdot\vec{v}=354$，

$\left|\vec{u}\right|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{2310},\left|\vec{v}\right|=\sqrt{\vec{v}^2}=\sqrt{105},<\vec{u},\vec{v}>=\arccos\dfrac{118}{35\sqrt{22}}$

8. 已知三角形ABC的顶点A,B,C的直角坐标分别为$(2,5,0),(11,3,8),(5,11,12)$，求各边和各中线的长度。

解：设D,E,F分别为BC,AC,AB边的中点，那么D,E,F的坐标分别为

$(8,7,10),\left(\frac{7}{2},8,6\right),\left(\frac{13}{2},4,2\right)$，则$|AB|=|(9,-2,8)|=\sqrt{149}$，$|AC|=|(3,6,12)|=3\sqrt{21}$，$|BC|=|(-6,8,4)|=2\sqrt{29}$，$|AD|=2\sqrt{35}$，$|BE|=\frac{1}{2}\sqrt{341}$，$|CF|=\frac{1}{2}\sqrt{461}$

9. 设三角形 ABC 的顶点 A,B,C 的直角坐标分别为 $(2,4,3),(4,1,9),(10,-1,6)$，证明三角形 ABC 是直角三角形。

证明：解得向量 $\overrightarrow{AB}(2,-3,6),\overrightarrow{AC}(8,-5,3),\overrightarrow{BC}(6,-2,-3)$，因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，所以三角形 AB,BC 边垂直，即它是直角三角形。

10. 证明：三角形三条中线的长度的平方和等于三边长度的平方和的 $\frac{3}{4}$。

证明：设三角形 AB,AC 边长为 a,b，D,E,F 分别为 BC,AC,AB 边的中点，取仿射标架 $\left[A;\vec{e_1},\vec{e_2}\right]$，其中 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 分别与 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 同向，长度为 1，则 A,B,C,D,E,F 的坐标分别为 $(0,0),(a,0),(0,b),\left(\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}b\right),\left(0,\frac{1}{2}b\right),\left(\frac{1}{2}a,0\right)$，则 $|AB|^2+|AC|^2+|BC|^2=2a^2+2b^2$，$|AD|^2+|BE|^2+|CF|^2=\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2$，命题得证。

11. 证明：三角形的三边的垂直平分线交于一点。

证明：设 D,E,F 分别为 BC,AC,AB 边的中点，点 M 为 AC,AB 边垂直平分线的交点，下证 MD 和 BC 垂直，即证 $\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$。由于 $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}$，

$$
\begin{aligned}
&2\overrightarrow{MD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\overrightarrow{BC}\\
&=\left(\overrightarrow{MF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{ME}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\\
&=\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\
&=\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}\right)\cdot\overrightarrow{AC}-\left(\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AE}\right)\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}\\
&=\left(\overrightarrow{ME}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AC}-\left(\overrightarrow{MF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2\\
&=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}^2=0
\end{aligned}
$$

所以MD和BC垂直，命题得证。

12. 证明：如果一个四面体有两对对棱互相垂直，则第三对对棱也必垂直，并且三对对棱的长度的平方和相等。

证明：设$O-ABC$为四面体，且$\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$，则

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=0$，所以$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}\cdot\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

所以$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$，即$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OC}$，则

$\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{OC}$。

由于$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CA}$，所以

$$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB}\right)^2=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{CB}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{CB}\right|^2=\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CA}\right)^2$$
$$=\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{CA}\right|^2$$

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}$，所以

$$\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}\right)^2=\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{BA}^2+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BA}\right|^2=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}\right)^2$$
$$=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2$$

所以$\left|\overrightarrow{OC}\right|^2+\left|\overrightarrow{BA}\right|^2=\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2=\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{CA}\right|^2$。

13. 设方向$\vec{a}$的直角坐标为$\left(1,2,-2\right)$，求它的方向角和方向余弦。

解：求得$\vec{a}^0$的坐标为$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{-2}{3}\right)$，所以$\vec{a}^0$的方向余弦为$\cos\alpha=\frac{1}{3},\cos\beta=\frac{2}{3},\cos\gamma=\frac{-2}{3}$，方向角为$\alpha=arc\cos\frac{1}{3},\beta=arc\cos\frac{2}{3},\gamma=arc\cos\frac{-2}{3}$，$\vec{a}$的方向角和方向余弦与$\vec{a}^0$的方向角和方向余弦相等。

14. 下述推断是否正确：若$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，且$\vec{c}\neq 0$，则$\vec{a}=\vec{b}$。

解：不对，若$\vec{c}\neq 0$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$不能判断$\vec{a}=\vec{b}$，如直角坐标系中的三个基向量：$e_1,e_2,e_3$，$e_1\cdot e_3=e_2\cdot e_3$，且$e_3\neq 0$，但$e_1\neq e_2$。

15. 证明：设三个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$不共面，如果向量$\vec{x}$满足$\vec{x}\cdot\vec{a}=0,\vec{x}\cdot\vec{b}=0,\vec{x}\cdot\vec{c}=0$，则$\vec{x}=0$。

证 明 ： 因 为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不 共 面 ， 所 以 存 在 实 数 k_1,k_2,k_3 使 得 $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=\vec{x}$ ， 那 么 $\vec{x}\cdot\vec{x}=\vec{x}\cdot\left(k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}\right)=k_1\vec{x}\cdot\vec{a}+k_2\vec{x}\cdot\vec{b}+k_3\vec{x}\cdot\vec{c}=0$，所以$\vec{x}=0$。

16. 证明：三向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面的充要条件是

$$\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}=0$$

证明：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面，则存在不全为零的实数k_1,k_2,k_3使得$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}+k_3\vec{c}=0$，那么

$k_1\vec{a}\cdot\vec{a}+k_2\vec{a}\cdot\vec{b}+k_3\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot 0=0$，

$k_1\vec{b}\cdot\vec{a}+k_2\vec{b}\cdot\vec{b}+k_3\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot 0=0$，

$k_1\vec{c}\cdot\vec{a}+k_2\vec{c}\cdot\vec{b}+k_3\vec{c}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot 0=0$，

所以以上齐次线性方程组有非零解，所以它的系数行列式

$$\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}=0$$

习题 1.4

1. 证明：$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2\vec{b}^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$

证明：

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)^2=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2<\vec{a},\vec{b}>=\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2\left(1-\cos^2<\vec{a},\vec{b}>\right)=\vec{a}^2\vec{b}^2-\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2$

2. 证明：若$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{d},\vec{a}\times\vec{c}=\vec{b}\times\vec{d}$，则$\vec{a}-\vec{d},\vec{b}-\vec{c}$共线。

证明：$\left(\vec{a}-\vec{d}\right)\times\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{d}\times\vec{b}-\vec{a}\times\vec{c}+\vec{d}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{d}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{c}\times\vec{d}=0$

所以$\vec{a}-\vec{d},\vec{b}-\vec{c}$共线。

3. 在右手直角坐标系中，设$\vec{a},\vec{b}$的坐标分别为$(5,-2,1),(4,0,6)$，求以$\vec{a}\times\vec{b}$和以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积。

解：$\vec{a}\times\vec{b}$的坐标为$\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 6\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}5 & 1\\ 4 & 6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}5 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\right)=(-12,-26,8)$，$s=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=2\sqrt{221}$。

4. 在右手直角坐标系中，设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$的坐标分别为$(1,0,-1),(1,-2,0),(-1,2,1)$，求$\left(3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)$。

解：

$$
\begin{aligned}
&\left(3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)\\
&=3\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{c}\times\vec{a}+3\vec{a}\times\left(-\vec{b}\right)+\vec{b}\times\left(-\vec{b}\right)-\vec{c}\times\left(-\vec{b}\right)+3\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}-\vec{c}\times\vec{c}\\
&=-2\vec{a}\times\vec{b}+2\vec{a}\times\vec{c}+2\vec{b}\times\vec{c}
\end{aligned}
$$

所以$\left(3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)$的坐标为$(16,4,16)$。

5. 证明：$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=2\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)$，并且说明它的几何意义。

证明：$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{a}\times\vec{a}-\vec{b}\times\vec{a}+\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{b}=2\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)$，它的几何意义是：以$\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形的定向面积的两倍等于以它的两条对角线为邻边且定向为$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$的平行四边形的定向面积。

6. 证明：若$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$，则$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$，并且说明它的几何意义。

证明：$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\times\vec{a}=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{c}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{a}=0$，所以$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}\times\vec{a}$，

$\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}+\vec{c}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b}-\vec{b}\times\vec{c}=0$，所以$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}$。

7. 证明三角形的重心分原三角形成三个等积三角形。

证明：设 D,E,F 分别是三角形 ABC BC,AC,AB 边的中点，重心为 M，取仿射标架$\left[O;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$，则

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\times\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\times\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\times\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\times\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BM}=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\times\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}\right)=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)\times\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$$

所以$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BM}$，命题成立。

8. 在平面右手直角坐标系中$\left[O;e_1,e_2\right]$中，设三角形ABC的三个顶点A,B,C的坐标分别为$\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right),\left(x_3,y_3\right)$，证明三角形的面积为

$$s=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

并且说明正负号的几何意义。

证明：取空间直角坐标系$\left[O;e_1,e_2,e_3\right]$，则$A,B,C$的坐标分别为$\left(x_1,y_1,0\right),\left(x_2,y_2,0\right),\left(x_3,y_3,0\right)$，所以

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\\ e_1 & e_2 & e_3\end{matrix}\right\|=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

正负号的几何意义是：当$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$的旋转方向（转角小于$\pi$）为逆时针方向时，带正号，否则带负号。

9. 下述推断是否正确？若$\vec{c}\times\vec{a}=\vec{c}\times\vec{b}$，并且$\vec{c}\neq 0$，则$\vec{a}=\vec{b}$。

解：不对，只要$\vec{a},\vec{c},\vec{b}$共线，则有$\vec{c}\times\vec{a}=\vec{c}\times\vec{b}=0$，但不一定有$\vec{a}=\vec{b}$。

10. 设$\vec{x}$与$\vec{x}\times\vec{y}$共线，讨论$\vec{x}$与$\vec{y}$的关系。

解：$\vec{x}$与$\vec{x}\times\vec{y}$共线，当且仅当$\vec{x}\times\left(\vec{x}\times\vec{y}\right)=0$，则由二重外积公式可得

$\vec{x}\times\left(\vec{x}\times\vec{y}\right)=\left(\vec{x}\cdot\vec{y}\right)\vec{x}-\left(\vec{x}\cdot\vec{x}\right)\vec{y}=0$，即$\vec{x}$与$\vec{y}$共线。

11. 就下列各种情形，讨论$\vec{x}$与$\vec{y}$的关系（$\vec{a}\neq 0$）

（1）$\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\vec{y}$

（2）$\vec{a}\times\vec{x}=\vec{a}\times\vec{y}$

（3）$\vec{a}\cdot\vec{x}=\vec{a}\cdot\vec{y}$**，并且**$\vec{a}\times\vec{x}=\vec{a}\times\vec{y}$**。**

解：（1）$\vec{x}$在$\vec{a}$上的分量与$\vec{y}$在$\vec{a}$上的分量相等，或者说在同一起点下，$\vec{x},\vec{y}$的终点的连线和$\vec{a}$垂直。

（2）在同一起点下，$\vec{x},\vec{y}$的终点的连线和$\vec{a}$平行。

（3）$\vec{x}=\vec{y}$。

12. 设$\vec{a}\neq 0,\overrightarrow{OP}=\vec{x}$**，求满足方程**$\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}$**的点**$P$**的轨迹。**

解：若$\vec{a},\vec{b}$不垂直，则$\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}$无解，下设$\vec{a},\vec{b}$垂直，可求出$\vec{x}=\left|\vec{a}\right|^{-2}\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)$是$\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}$的一个特解，从而点$P$的轨迹是与$\vec{a}$平行且与$OA$的距离为$\left|\vec{b}\right|\left|\vec{a}\right|^{-1}$的一条直线，它位于过$OA$且与$\vec{b}$垂直的平面内，且在直线$OA$的由$\vec{b}\times\vec{a}$指向的一侧。

13. 设$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$**都不是**0**，**$\vec{x}\cdot\vec{a}=h\neq 0,\vec{x}\times\vec{b}=\vec{c}$**，求**$\vec{x}$**（讨论各种情况）。**

解：若$\vec{b},\vec{c}$不垂直时，显然无解。下设$\vec{b}\perp\vec{c}$，设$\vec{x}$是$\vec{x}\cdot\vec{a}=h\neq 0,\vec{x}\times\vec{b}=\vec{c}$的解，则得

$$\vec{a}\times\left(\vec{x}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\times\vec{c}$$

从而得$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{x}=h\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$，所以

情形Ⅰ，$\vec{a}//\vec{c}$时，无解；

情形Ⅱ，$\vec{a},\vec{c}$不平行且$\vec{a},\vec{b}$不垂直时，有唯一解：$\vec{x}=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^{-1}\left(h\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}\right)$

情形Ⅲ，$\vec{a},\vec{c}$不平行且$\vec{a},\vec{b}$垂直时，如果$\vec{c},\vec{a},h\vec{b}$成左手系，则无解；$\left|h\right|\left|\vec{b}\right|\neq\left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}\right|\sin<\left|\vec{a}\right|,\left|\vec{c}\right|>$，也无解；如果$\vec{c},\vec{a},h\vec{b}$成右手系并且$\left|h\right|\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{c}\right|\sin<\left|\vec{a}\right|,\left|\vec{c}\right|>$，则有无穷多个解，此时在空间中取定一点$O$，所有向量的起点都放在$O$上，那么$\vec{x}\cdot\vec{a}=h$的解向量\ $\vec{x}$的终点的轨迹是与$\vec{a}$垂直且与O的距

离为$\dfrac{|h|}{|\vec{a}|}$的平面π_1，并且O到π_1的指向与$h\vec{a}$同向；$\vec{x}\times\vec{b}=\vec{c}$的解向量$\vec{x}$的终点的轨迹是与$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$平行且与$\overrightarrow{OB}$的距离为$\dfrac{|\vec{c}|}{|\vec{b}|}$的一条直线$l$，它位于过$O$且与$\vec{c}$垂直的平面$\pi_2$内，且在直线$OB$的由$\vec{b}\times\vec{c}$指向的一侧。因此$\vec{x}\cdot\vec{a}=h,\vec{x}\times\vec{b}=\vec{c}$的解向量$\vec{x}$的终点轨迹是$\pi_1\ \pi_2$的交线，此交线就是$l$。

14. （1）已知$|\vec{e}|=1,\vec{e}\perp\vec{r}$，将$\vec{r}$绕$\vec{e}$右旋角度$\theta$得$\vec{r_1}$，试用$\vec{e}$，$\vec{r}$，$\theta$表示$\vec{r_1}$。

（2）给定三点$O,A,P,O\neq A$，将P绕$\overrightarrow{OA}$右旋角度θ得到P_1，试用$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OP}$，θ表示$\overrightarrow{OP_1}$。

解：(1) $\vec{r_1}=(\cos\theta)\vec{r}+(\sin\theta)\vec{e}\times\vec{r}$

（2）过P作平面π与OA垂直，设OA于π交于点B，于是$\overrightarrow{BP}$绕$\overrightarrow{OA}$右旋θ角得到$\overrightarrow{BP_1}$，所以

$$\overrightarrow{BP_1}=(\cos\theta)\overrightarrow{OP}+\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2}(1-\cos\theta)\overrightarrow{OA}+\frac{\sin\theta}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OP}$$

习题 1.5

1. 证明：$|\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}|\leq|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$

证明：$|\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}|=\left(|\vec{a}||\vec{b}|\sin<\vec{a},\vec{b}>\right)\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|\sin<\vec{a},\vec{b}>\cos<\vec{a}\times\vec{b},\vec{c}>\leq|\vec{a}||\vec{b}||\vec{c}|$

2. 证明：如果$\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=0$，则$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面。

证明：$\left(\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=0\cdot\vec{c}$，所以$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面。

3. 在右手直角坐标系中，一个四面体的得到A,B,C,D的坐标分别是

$$(1,2,0),(-1,3,4),(-1,-2,-3),(0,-1,3)$$

求它的体积。

解：它的体积等于以$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}$构成的平行六面体的体积的六分之一，即

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{DA}\times\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}1&3&-3\\-1&4&1\\-1&-1&-6\end{matrix}\right\|=\frac{59}{6}$$

4. 证明： $\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)^2$

证明：

$$\left(\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$$
$$=\left(\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)\vec{b}-\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{b}\right)\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$$
$$=\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)$$
$$=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)^2$$

5. 证明： $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=0$

证明：由 Lagrange 恒等式可得：

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)+\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{d}\\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{d}\\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$$
$$=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)\left(\vec{c}\cdot\vec{d}\right)$$
$$-\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{c}\cdot\vec{a}\right)+\left(\vec{c}\cdot\vec{b}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{d}\right)-\left(\vec{c}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$
$$=0$$

6. 证明： $\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right]=\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)$

证明：由二重外积公式可得

$$\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\right]=\vec{a}\times\left[\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)\times\vec{c}-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\times\vec{d}\right]$$
$$=\left(\vec{b}\cdot\vec{d}\right)\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)-\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)\left(\vec{a}\times\vec{d}\right)$$

7. 证明：（1） $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)\vec{c}-\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\vec{d}$

（2） $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{b}-\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{a}$

证明：（1）由二重外积公式可得

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{d}\right)\vec{c}-\left(\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right)\vec{d}=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)\vec{c}-\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\vec{d}$$

（2）

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=-\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$$
$$=-\left(\left(\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\cdot\vec{b}\right)\vec{a}-\left(\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)\cdot\vec{a}\right)\vec{b}\right)=\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{b}-\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{a}$$

8. 证明：对任意四个向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$，有$\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{a}+\left(\vec{c},\vec{a},\vec{d}\right)\vec{b}+\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)\vec{c}+\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)\vec{d}=0$

证明：由第 7 题可得

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)-\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}\times\vec{d}\right)=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)\vec{c}-\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\vec{d}-\left(\left(\vec{a},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{b}-\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{a}\right)$$

$$=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{d}\right)\vec{c}+\left(\vec{b},\vec{a},\vec{c}\right)\vec{d}+\left(\vec{b},\vec{c},\vec{d}\right)\vec{a}+\left(\vec{c},\vec{a},\vec{d}\right)\vec{b}=0$$

9. 若$\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}$共面，讨论$\vec{x},\vec{y}$的关系。

解：若$\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}$共面，则$\vec{x},\vec{y},\vec{x}\times\vec{y}$的混合积等于零，即$\left(\vec{x}\times\vec{y}\right)\cdot\left(\vec{x}\times\vec{y}\right)=0$，所以$\vec{x}\times\vec{y}=0$，

即$\vec{x},\vec{y}$共线。

10. 证明：$\left[\vec{v}_1\times\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)\right]\times\left[\vec{v}_2\times\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)\right]=\left|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right|^2\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)$

证明：

$$\begin{aligned}
&\left[\vec{v}_1\times\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)\right]\times\left[\vec{v}_2\times\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)\right]\\
&=\left[\left(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\right)\vec{v}_1-\left(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1\right)\vec{v}_2\right]\times\left[\left(\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2\right)\vec{v}_1-\left(\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1\right)\vec{v}_2\right]\\
&=\left(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\right)\left(\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2\right)\vec{v}_1\times\vec{v}_1-\left(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1\right)\left(\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2\right)\vec{v}_2\times\vec{v}_1\\
&\quad-\left(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2\right)^2\vec{v}_1\times\vec{v}_2+\left(\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1\right)\left(\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1\right)\vec{v}_2\times\vec{v}_2\\
&=\left(\left|\vec{v}_1\right|^2\left|\vec{v}_2\right|^2-\left|\vec{v}_1\right|^2\left|\vec{v}_2\right|^2\cos^2<\vec{v}_1,\vec{v}_2>\right)\vec{v}_1\times\vec{v}_2\\
&=\left|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right|^2\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)
\end{aligned}$$

11. 证明：若$\vec{v}_1,\vec{v}_1$不共线，则$\vec{v}_1\times\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right),\vec{v}_2\times\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)$不共线。

证明：由第 10 题可得$\left[\vec{v}_1\times\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)\right]\times\left[\vec{v}_2\times\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)\right]=\left|\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right|^2\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)$，所以若$\vec{v}_1,\vec{v}_1$不共线，

则$\vec{v}_1\times\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right),\vec{v}_2\times\left(\vec{v}_1\times\vec{v}_2\right)$不共线。

12. 设$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$不共面，证明：任一向量$\vec{a}$可以表示成

$$\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_2\times\vec{e}_3}{\vec{e}_1\times\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3}\vec{e}_1+\frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_3\times\vec{e}_1}{\vec{e}_1\times\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3}\vec{e}_2+\frac{\vec{a}\cdot\vec{e}_1\times\vec{e}_2}{\vec{e}_1\times\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3}\vec{e}_3$$

证明：$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$不共面，所以可设$\vec{a}=k_1\vec{e}_1+k_2\vec{e}_2+k_3\vec{e}_3$，那么依次两边内积$\vec{e}_2\times\vec{e}_3,\vec{e}_3\times\vec{e}_1,\vec{e}_1\times\vec{e}_2$

可得

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}=\left(k_1\overrightarrow{e_1}+k_2\overrightarrow{e_2}+k_3\overrightarrow{e_3}\right)\cdot\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}=k_1\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}$$

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}=\left(k_1\overrightarrow{e_1}+k_2\overrightarrow{e_2}+k_3\overrightarrow{e_3}\right)\cdot\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}=k_2\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}$$

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}=\left(k_1\overrightarrow{e_1}+k_2\overrightarrow{e_2}+k_3\overrightarrow{e_3}\right)\cdot\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}=k_3\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3},$$

所以 $k_1=\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}}{\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_3}},k_2=\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}}{\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_3}},k_3=\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}}{\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_3}}\overrightarrow{e_3}$，

所以 $\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_2}\times\overrightarrow{e_3}}{\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_3}}\overrightarrow{e_1}+\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_3}\times\overrightarrow{e_1}}{\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_3}}\overrightarrow{e_2}+\dfrac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}}{\overrightarrow{e_1}\times\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_3}}\overrightarrow{e_3}$。

13. 用向量法证明：若三元一次方程组的系数行列式不等于零，则它有唯一一个解。

证明：取一个仿射标架，把方程组的系数行列式的第 1,2,3 列分别看成向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的坐标，由方程组的系数行列式不等于零可得 $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$，从而 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，所以任意向量都可以唯一表示成 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的线性组合。所以方程组有唯一解。

14. 设 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，设向量 $\vec{x}$ 满足：$\vec{a}\cdot\vec{x}=f,\vec{b}\cdot\vec{x}=g,\vec{c}\cdot\vec{x}=h$，证明：

$$\vec{x}=\frac{f\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+g\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+h\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}{\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}}$$

证明：因为 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 不共面，所以利用第 4 题结论可得 $\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}$ 不共面，所以设 $\vec{x}=k_1\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+k_2\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+k_3\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$，那么依次两边内积 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 可得

$$\vec{x}\cdot\vec{a}=\left(k_1\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+k_2\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+k_3\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\cdot\vec{a}=k_1\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=k_1\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=f,$$

$$\vec{x}\cdot\vec{b}=\left(k_1\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+k_2\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+k_3\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\cdot\vec{b}=k_2\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=k_2\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=g,$$

$$\vec{x}\cdot\vec{c}=\left(k_1\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+k_2\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+k_3\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right)\cdot\vec{c}=k_3\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=h,$$

所以 $k_1=\dfrac{f}{\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}},k_2=\dfrac{g}{\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}},k_3=\dfrac{h}{\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}}$，所以 $\vec{x}=\dfrac{f\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)+g\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)+h\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}{\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}}$

习题 2.1

1. 在给定的仿射坐标系中，求下列平面的普通方程和参数方程。

（1）过点$(-1,2,0),(-2,-1,4),(3,1,-5)$**；**

（2）过点$(1,0,-2),(-1,3,2)$**,平行于** $v(1,-2,4)$**;**

（3）过点$(3,1,-2)$**和** z **轴;**

（4）过点$(2,0,-1),(-1,3,4)$**，平行于** y **轴；**

（5）过点$(-1,-5,4)$**，平行于平面**$3x-2y+5=0$**。**

解：（1）令 A =（-1,2,0），B = (-2,-1,4)，C = (3,1,-5)，做向量 $\overline{AB}$ = (-1,-3,4)，$\overline{AC}$ =(4,-1,-5)

则该平面的参数方程为：

$$\begin{cases} x=-1-\lambda+4\mu \\ y=2-3\lambda-\mu \\ z=0+4\lambda-5\mu \end{cases}$$

普通方程为：

$$\begin{vmatrix} x+1 & -1 & 4 \\ y-2 & -3 & -1 \\ z-0 & 4 & -5 \end{vmatrix}=0$$

则平面的普通方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中

$$A=\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=19，B=-\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}=11，C=\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=13，$$

$$D=-(19\times(-1)+11\times 2+13\times 0)=-3，$$

那么普通方程为：$19x+11y+13z-3=0$

（2）已知所求平面过点(1,0,-2)和(-1,3,2)，那么所求平面平行于向量$(-2,3,4)$和$(1,-2,4)$，那么所求平面的参数方程为：

$$\begin{cases} x=1-2\lambda+\mu \\ y=0+3\lambda-2\mu \\ z=-2+4\lambda+4\mu \end{cases}$$

普通方程为：

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y & 3 & -2 \\ z+2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

化简可得：$20x+12y+z-18=0$。

（3）由已知可得所求平面过点(3,1,-2)和原点，那么平行于向量(3,1,-2)，又所求平面过 z 轴，那么所求平面平行于向量 $(0,0,1)$，那么所求平面的参数方程可得：

$$\begin{cases} x=0+3\lambda+0\mu \\ y=0+\lambda+0\mu \\ z=0-2\lambda+\mu \end{cases}$$

设普通方程为 $Ax+By+Cz+D=0$，因为所求平面过 z 轴，所以 $C=0, D=0$，把点(3,1,-2)代入方程可得：$3A+B=0$，令 $A=1, B=-3$，那么所求平面的普通方程为：$x-3y=0$。

（4） 令 A = (2,0,-1)，B = (-1,3,4)，做向量 $\overline{AB}$ = (-3,3,5)，要平行于 y 轴，故可取向量 υ =(0,1,0)，则所求平面的参数方程为：

$$\begin{cases} x=2-3\lambda+0\mu \\ y=0+3\lambda+\mu \\ z=-1+5\lambda+0\mu \end{cases}$$

普通方程为：

$$\begin{vmatrix} x+2 & -3 & 0 \\ y-0 & 3 & 1 \\ z-1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

则所求平面的普通方程为

$$Ax+By+Cz+D=0$$

其中

$$A=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=-5，B=-\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}=0，C=\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-3，$$

$$D=-\left(-5\times 2+0\times 0+-1\times(-3)\right)=7$$

那么所求平面的普通方程为：$-5x-3z+7=0$

（5）已知平面 $3x-2y+5=0$ 上有不共线三点：$(1,-1,0),(1,-1,1),(3,7,0)$，那么所求平面平行于向量：$v(0,0,1), u(2,8,0)$，又所求平面过点 $(-1,-5,4)$，那么所求平面的参数方程为：

$$\begin{cases} x=-1+2\mu \\ y=-5+8\mu \\ z=4+1\lambda \end{cases}$$

可设所求平面的普通方程为：$3x-2y+D=0$，把点$(-1,-5,4)$代入可得：$D=-7$，那么所求平面的普通方程为：$3x-2y-7=0$。

2． 在给定的仿射坐标系中，画出下列平面。

（1）$2x+3y+z-6=0$**；（2）**$4x+3z+2=0$**；**

（3）$3x-y+4z=0$**； （4）**$3y+2=0$**.**

解：（1）方程化成截距式：$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1$，那么在坐标系中，此平面的图像过点：$(3,0,0),(0,2,0),(0,0,6)$. 描出三点连接即为此平面的图像.

（2）化为截距式：$\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{z}{-1}=1$，此平面的图像过点：$\left(\frac{-1}{2},0,0\right),(0,0,-1)$，由$y$前的系数为零可知此平面与$y$轴平行，则可描出两点，再通过两点画$y$轴的平行线即为此平面的图像.

（3）由于没有常数项，则此平面过原点，则可画出平面上的两条过原点的直线。因为向量$\overrightarrow{v_1}(\frac{1}{3},1,0),\overrightarrow{v_2}(-\frac{4}{3},0,1)$与平面平行，那么原点与这两个向量可画出平面上的两条直线，即为此平面的图像.

（4）平面方程为：$y=-\frac{2}{3}$.则平面平行于xOz平面且过点：$\left(0,-\frac{2}{3},0\right)$，那么过$\left(0,-\frac{2}{3},0\right)$画$xOz$的平行平面即为此平面的图像.

3． 证明三个定点(x_i,y_i,z_i)**，**$i=1,2,3$**的平面的方程为**

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

证明： 因为过(x_i,y_i,z_i)**，**$i=1,2,3$三点的平面方程为：

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

应用行列式性质可知上式可以写为：

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & x_1 \\ y-y_1 & y_2-y_1 & y_3-y_1 & y_1 \\ z-z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

把上式最后一列分别加到前三列可以得到：

$$\begin{vmatrix} x & x_1 & x_2 & x_3 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 \\ z & z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

4． 在给定的仿射坐标系中，设平面 π 的方程为：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

其中 $abc\neq 0$ ，说明 a,b,c 的几何意义。

解： 当 $y=z=0$ 时， $x=a$ ，也就是说平面 π 过点 $(a,0,0)$ ，那么 a 就表示平面在 x 轴上的截距，同理 b,c 分别表示平面在 y， z 轴上的截距。

5． 坐标满足方程

$$(Ax+By+Cz+D)^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)^2=0$$

的点的轨迹是什么？

解： 由方程可知

$$\big((A+\alpha)x+(B+\beta)y+(C+\gamma)z+(D+\delta)\big)\big((A-\alpha)x+(B-\beta)y+(C-\gamma)z+(D-\delta)\big)=0$$

那么若 $(A,B,C)\neq(\alpha,\beta,\gamma)$ 且 $(A,B,C)\neq-(\alpha,\beta,\gamma)$ ，则它表示的就是两个平面。

若 $(A,B,C)=(\alpha,\beta,\gamma)$ ，它表示 $2Ax+2By+2Cz+D+\delta=0$

若 $(A,B,C)=-(\alpha,\beta,\gamma)$ ，它表示 $2Ax+2By+2Cz+D-\delta=0$

6． 判断下列各对平面的相关位置。

(1) $2x+y-3z-1=0$ **与** $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}-\frac{z}{2}+2=0$

(2) $x-2y+z-2=0$ **与** $3x+y-2z-1=0$

(3) $3x+9y-6z+2=0$ **与** $2x+6y-4z+\frac{4}{3}=0$

解： (1) $\because (2,1,-3)$ 与 $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5},-\frac{1}{2}\right)$ 成比例，$\therefore$两个平面平行。

(2) $\because (1,-2,1)$ 与 $(3,1,-2)$ 不成比例，$\therefore$两个平面相交。

(3) $\because (3,9,-6,2)$ 与 $\left(2,6,-4,\frac{4}{3}\right)$ 成比例，$\therefore$两个平面重合。

7． 在给定的仿射坐标系中，证明：通过点 (x_0,y_0,z_0) 并且与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 平行的平面方程为：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

证明： 因为所求平面与已知平面平行，故所求平面可以设为：

$$Ax+By+Cz+D_1=0$$

又因为该平面过点 (x_0,y_0,z_0)，代入上式可得：

$$Ax_0+By_0+Cz_0+D_1=0$$

所以 $D_1=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$，代入所设平面方程化简可得：

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\text{。}$$

8． 下述三个平面是否交于一点？

$$2x+3y-z+1=0,x-2y+5z-3=0,2x+y+z+5=0$$

解： 计算行列式：$\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -2 & 5\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=8$，所以这三个平面是交于一点。

9． 证明：分别由方程

$$ax+by+cz+d=0$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$$

$$\lambda(ax+by+cz)+\mu(\alpha x+\beta y+\gamma z)+k=0$$

给出的三个平面，当 $k \neq \lambda d+\mu\delta$ 时，没有公共点。

证明： 用反证法。假设 $k \neq \lambda d+\mu\delta$ 时，有公共点，那么可设其公共点为：(x_0, y_0, z_0)，

代入三个方程可得： $ax_0+by_0+cz_0+d=0$ ， $\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0+\delta=0$ ，

$\lambda(ax_0+by_0+cz_0)+\mu(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0)+k=0$ ，

则 $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$ ，$\delta=-(\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0)$ ，

那么 $\lambda(-d)+\mu(-\delta)+k=0$ ，即 $k=\lambda d+\mu\delta$ ，与题设矛盾，所以假设不成立。那么当 $k \neq \lambda d+\mu\delta$ 时，没有公共点。

10. 证明：任何一个经过相交两平面 π_1 和 π_2 ：

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ 和 } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

的交线的平面方程能写成：

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

其中，λ 和 μ 的不全为零的实数。（我们把经过一条直线的所有平面称为平面束，本题说明：平面束的方程形如以上式子，其中 λ 和 μ 取遍不全为零的实数）

证明： 设点 $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 π_1 和 π_2 的交线 l 上的任意一点。

因为 M_0 在 π_1 和 π_2 的交线上，所以它满足 π_1 和 π_2 的方程。即：

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0 \text{ 和 } A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0$$

将 $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ 代入平面束方程中可得：

$$\lambda(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)+\mu(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0$$

$\therefore M_0=(x_0, y_0, z_0)$ 也在平面束的任意一个平面上，那么由 $M_0=(x_0, y_0, z_0)$ 的任意性，可知平面 π_1 和 π_2 的交线 l 也在平面束的任意一个平面上。

下证任意一个过 l 的平面都可以写成平面束方程的形式。

设 $M_1=(x_1, y_1, z_1)$ 为 l 外任意一点。过 $M_1=(x_1, y_1, z_1)$ 和 l 可以决定一个平面，我们现证该平面可

以写为平面束中的方程的形式。

可以取 $A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2=\lambda_1$ ，$A_1x_1+B_1y_1+C_1z_1+D_1=\mu_1$ ，那么点 M_1 满足平面方程：

$$\lambda_1\left(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1\right)+\mu_1\left(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2\right)=0$$

也就是说过点 $M_1=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ 和 l 的平面可以写为以上形式。那么由 $M_1=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ 的任意性，可得任意过 l 的平面都可以写成平面束的方程的形式。
证毕。

11．求经过点 $M_0(1,-2,0)$ ，并且经过两平面 $2x-y+z-3=0$ 与 $x+2y-z+1=0$ 的交线的平面方程。

解： ∵所有过平面 $2x-y+z-3=0$ 与 $x+2y-z+1=0$ 的交线的平面方程可以写成平面束：

$$\lambda(2x-y+z-3)+\mu(x+2y-z+1)=0$$

其中 λ,μ 是不全为零的实数。

∵所求平面过点 $M_0(1,-2,0)$ ，代入上式可得：

$$\lambda(2-(-2)+0-3)+\mu(1+2(-2)-0+1)=0$$

解得：$\lambda-2\mu=0$。 ∴可取 $\lambda=2$ ，$\mu=1$。那么所求平面方程为：

$$5x+z-5=0$$

12． 设平面 $\pi: Ax+By+Cz+D=0$ 与连接两点 $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right),M_2\left(x_2,y_2,z_2\right)$ 的线段相交于点 M ，且 $\overrightarrow{M_1M}=k\overrightarrow{MM_2}$ ，证明

$$k=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}$$

证明： 设 M 的坐标为 (x,y,z)，由 $\overrightarrow{M_1M}=k\overrightarrow{MM_2}$ 得：

$$x-x_1=k(x_2-x),y-y_1=k(y_2-y),z-z_1=k(z_2-z),$$

解得 $x=\dfrac{kx_2+x_1}{1+k},y=\dfrac{ky_2+y_1}{1+k},z=\dfrac{kz_2+z_1}{1+k}$ ，

因为 M 为平面 π 上一点，则 M 的坐标满足平面 π 的方程，将 M 的坐标代入平面方程得

$$A\frac{kx_2+x_1}{1+k}+B\frac{ky_2+y_1}{1+k}+C\frac{kz_2+z_1}{1+k}+D=0$$

化简得：$k=-\dfrac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Ax_2+By_2+Cz_2+D}$。

13． 设有三个平行平面

$$\pi_i: A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, i=1,2,3$$

一直线l与π_1,π_2,π_3分别交于P,Q,R。求Q分有向线段$\overrightarrow{PR}$的比值。

解： 因为π_1,π_2,π_3为平行平面，那么一次项系数成比例。可设$\lambda=\dfrac{A_2}{A_1}=\dfrac{B_2}{B_1}=\dfrac{C_2}{C_1}$，

$\mu=\dfrac{A_2}{A_3}=\dfrac{B_2}{B_3}=\dfrac{C_2}{C_3}$。

设P,Q,R的坐标分别为$(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2),(x_3,y_3,z_3)$，且三点共线，那么由12题结果可得：

$\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{QR}$，那么

$$k=-\frac{A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2}{A_2x_3+B_2y_3+C_2z_3+D_2}=-\frac{\lambda}{\mu}\frac{\mu}{\lambda}\frac{A_2x_1+B_2y_1+C_2z_1+D_2}{A_2x_3+B_2y_3+C_2z_3+D_2}$$

$$=-\frac{\lambda}{\mu}\frac{-D_1+\frac{1}{\lambda}D_2}{-D_3+\frac{1}{\mu}D_2}=\frac{\lambda D_1-D_2}{-\mu D_3+D_2}$$

其中：$\lambda=\dfrac{A_2}{A_1}=\dfrac{B_2}{B_1}=\dfrac{C_2}{C_1}$，$\mu=\dfrac{A_2}{A_3}=\dfrac{B_2}{B_3}=\dfrac{C_2}{C_3}$。

习题 2.2

1. 在直角坐标系中，求下列平面的方程。

（1）过点$P(-1,2,0)$,一个法向量$(3,1,-2)$

（2）过点$M_1(3,-1,4)$，$M_2(1,0,-3)$，垂直于平面$2x+5y+z+1=0$.

解： （1）∵在直角坐标系中，已知平面的法向量为$(3,1,-2)$，那么平面方程可以设为：

$3x+y-2z+D=0$，又∵平面过点$(-1,2,0)$，代入所设方程可解得：$D=1$，那么所求方程为：

$3x+y-2z+1=0$

（2）要求平面方程，首先要找两个不共线向量和一个在平面上的点。M_1 为平面上一点，

$\overline{M_1M_2}=(-2,1,-7)$为平面上一个向量。因为所求平面垂直于平面 $2x+5y+z+1=0$，所以平行于

$2x+5y+z+1=0$ 的法向量 $n=(2,5,1)$，所以所求平面方程为：

$$\begin{cases} x=3-2\lambda+2\mu \\ y=-1+\lambda+5\mu \\ z=4-7\lambda+\mu \end{cases}$$

或者

$$\begin{vmatrix} x-3 & -2 & 2 \\ y+1 & 1 & 5 \\ z-4 & -7 & 1 \end{vmatrix}=0$$

2. 证明：在直角坐标系中，通过点 (x_0,y_0,z_0)，并且与平面

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ 和 } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

都垂直的平面的方程为：

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & A_1 & A_2 \\ y-y_0 & B_1 & B_2 \\ z-z_0 & C_1 & C_2 \end{vmatrix}=0$$

证明：要求平面方程，首先要找两个不共线向量和一个在平面上的点。

由题设条件，所求平面过点 (x_0,y_0,z_0)，因为与 $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 都垂直，所以所求平面与这两个已知平面的法向量 $n_1=(A_1,B_1,C_1)$，

$n_2=(A_2,B_2,C_2)$ 平行。所以所求平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & A_1 & A_2 \\ y-y_0 & B_1 & B_2 \\ z-z_0 & C_1 & C_2 \end{vmatrix}=0$$

3．在直角坐标系中，平面 π 的方程为：$Ax+By+Cz+D=0$，其中所有系数都不为零。设此平面与三根坐标轴分别交于 M_1,M_2,M_3，求三角形 $\Delta M_1M_2M_3$ 的面积和四面体 $OM_1M_2M_3$ 的体积。

解： 化π的方程为截距式可得：$\dfrac{x}{\frac{-D}{A}}+\dfrac{y}{\frac{-D}{B}}+\dfrac{z}{\frac{-D}{C}}=1$

那么π与x,y,z轴分别交于$M_1\left(\dfrac{-D}{A},0,0\right),M_2\left(0,\dfrac{-D}{B},0\right),M_3\left(0,0,\dfrac{-D}{C}\right)$，那么

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(\frac{D}{A},-\frac{D}{B},0)$$
$$\overrightarrow{M_1M_3}=(\frac{D}{A},0,-\frac{D}{C})$$

$$S_{\Delta M_1M_2M_3}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D^4}{B^2C^2}+\frac{D^4}{A^2C^2}+\frac{D^4}{A^2B^2}}=\frac{1}{2}\frac{D^2}{|ABC|}\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

$$V_{0M_1M_2M_3}=\frac{1}{6}\left|OM_1\cdot OM_2\times OM_3\right|=\frac{|D|^3}{6|ABC|}$$

4． 在直角坐标系中，求点到平面的距离。

（1）点$(0,2,1)$到平面$2x-3y+5z-1=0$；

（2）点$(-1,2,4)$到平面$x-y+1=0$。

解：（1）应用公式：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{|-3\times2+5\times1-1|}{\sqrt{2^2+3^2+5^2}}=\dfrac{\sqrt{38}}{19}$

（2）$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\dfrac{|-1-1\times2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\sqrt{2}$

5． 在直角坐标系中，求平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

与平面

$$Ax+By+Cz+D_1=0$$

之间的距离。

解： 由两平面的方程可知两平面相互平行。设$M_0(x_0,y_0,z_0)$为$Ax+By+Cz+D_1=0$上一点,那么 $Ax_0+By_0+Cz_0+D_1=0$ 。两平面之间的距离也就是$M_0(x_0,y_0,z_0)$到$Ax+By+Cz+D=0$的距离。应用公式：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-D_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

6． 在直角坐标系中，平面 π 的方程为 $Ax+By+D=0$ ，求 z 轴到平面的距离。

解： 平面方程中， z 前的系数为零，也就是说平面平行于 z 轴。又原点在 z 轴上，那么 z 轴到平面的距离也就是原点到平面的距离。所以

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

7．在直角坐标系中，如果一个平面与三根坐标轴均相交，则三个截距倒数的平方和等于原点到此平面的距离的倒数的平方。

证明： 设次平面的方程为： $Ax+By+Cz+D=0$ ，化为截距式为： $\frac{x}{\frac{-D}{A}}+\frac{y}{\frac{-D}{B}}+\frac{z}{\frac{-D}{C}}=1$,那么原点到此平面的距离为：

$$d=\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

那么

$$\frac{1}{d^2}=\frac{A^2+B^2+C^2}{D^2}=\frac{A^2}{D^2}+\frac{B^2}{D^2}+\frac{C^2}{D^2}$$

命题得征。

8．在直角坐标系中，求与平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

平行且与它距离为 d 的平面的方程。

解： 因为所求平面与已知平面平行，那么可设所求平面为： $Ax+By+Cz+E=0$ ，

已知两平行平面间的距离为： $d=\frac{|-E+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ，

所以 $E=D\pm d\sqrt{A^2+B^2+C^2}$

那么所求平面为： $Ax+By+Cz+D\pm d\sqrt{A^2+B^2+C^2}=0$.

9．在直角坐标系中，设

$$\pi_1: Ax+By+Cz+D_1=0 \text{ 与 } \pi_2: Ax+By+Cz+D_2=0$$

平行，求与π_1,π_2等距离的点的轨迹。

解： 设点$M(x,y,z)$为到π_1,π_2等距离的点，那么$M(x,y,z)$满足方程：

$$d=\frac{|Ax+By+Cz+D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax+By+Cz+D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

化简为：$Ax+By+Cz+D_1=\pm Ax+By+Cz+D_2$

上式若取正，那么$D_1=D_2$，表示π_1,π_2为同一条直线，不符合题意。

取负可得$Ax+By+Cz+\dfrac{D_1-D_2}{2}=0$，表示满足题设条件的点的轨迹为平行于$\pi_1,\pi_2$的平面。

10．在直角坐标系中，求平面$z=ax+by+c$与xOy平面的夹角。

解： 已知在直角坐标系中，两平面的夹角为其法向量的夹角，$z=ax+by+c$的法向量为：$(a,b,-1)$，

xOy平面的法向量为：$(0,0,1)$，那么

$$\cos<\vec{n}_1,\vec{n}>=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{-1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$$
$$<\vec{n},\vec{n}_1>=\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}\right)$$

11． 给定直角坐标系，在平面束

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

中求出与平面$Ax+By+Cz+D=0$垂直的平面的方程。

解： 设$\pi_i:A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0\quad(i=1,2)$，$\pi:Ax+By+Cz+D=0$

若π与π_1,π_2都垂直，则π与平面束任何平面都垂直。

若π至少与π_1或π_2中一个不垂直。那么在直角坐标系中，两个平面垂直的充要条件是它们的方向向量内积为零。平面束方程的方向向量为：$(\lambda A_1+\mu A_2,\lambda B_1+\mu B_2,\lambda C_1+\mu C_2)$，$\pi$的方向向量为：$(A,B,C)$，由两个方向向量内积为零可得：

$$\begin{aligned}&\lambda A_1A+\mu A_2A+\lambda B_1B+\mu B_2B+\lambda C_1C+\mu C_2C\\&=\lambda(A_1A+B_1B+C_1C)+\mu(A_2A+B_2B+C_2C)=0\end{aligned}$$

令 $\lambda = AA_2 + BB_2 + CC_2 \neq 0$，$\mu = -(AA_1 + BB_1 + CC_1)$ 代入平面束方程得

$$\begin{aligned}&(AA_2 + BB_2 + CC_2)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)\\&-(AA_1 + BB_1 + CC_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0\end{aligned}$$

即为所求平面方程。

12． 在直角坐标系中，设 π_i 的方程为：

$$A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0\text{，}i = 1,2$$

设 π_1,π_2 相交，求 π_1,π_2 交成的二面角的角平分面的方程。

解： 设角平分面上的点坐标为 $M(x,y,z)$，则 $M(x,y,z)$ 到 π_i 的距离相等，那么

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

去掉绝对值可得：

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

上式为两个三元一次方程，表示到平面 π_1,π_2 距离相等的两个平面。

13． 求到两个给定平面的距离为定比的点的轨迹。

解： 不妨设定比为 $k > 0$，可取直角坐标系，使得 π_2 的方程为 $z = 0$，π_1 的方程可设为：

$Ax + By + Cz + D = 0$，设点 $M(x,y,z)$ 为到 π_1 π_2 的距离的比为 k 的点，那么它满足：

$$\frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = kz$$

化简可得：$Ax + By + \left(C \pm k\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\right)z + D = 0$，此为三元一次方程，当 $\pi_1 // \pi_2$，并且当 $k = 1$ 时，它表示为一个平面，其余情况为两个平面。

14． 证明：空间中满足条件 $|Ax + By + Cz + D| < d^2$ 的点分布在两个平行平面

$$Ax + By + Cz + D + d^2 = 0, Ax + By + Cz + D - d^2 = 0$$

之间。

证明： 设 π_1,π_2 的方程分别为

$$Ax+By+Cz+D+d^2=0, Ax+By+Cz+D-d^2=0$$

在 π_1 上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，它满足

$$Ax+By+Cz+D+d^2=0$$

从而

$$Ax+By+Cz+D-d^2=-2d^2<0$$

这表明满足条件 $|Ax+By+Cz+D|<d^2$ 的点与 π_1 上的点都在平面 π_2 的同侧，同理可得满足条件 $|Ax+By+Cz+D|<d^2$ 的点与 π_2 上的点都在平面 π_1 的同侧，则命题得征。

15． 证明：空间中满足条件 $|x|+|y|+|z|<a, a>0$ 的点位于中心在原点，顶点在坐标轴上，且顶点与中心的距离为 a 的八面体的内部。

证明：$|x|+|y|+|z|<a$ 去掉绝对值可得 $\pm x \pm y \pm z<a$，它等价于下列不等式组：

$$\begin{cases} |x+y+z|<a \\ |x-y+z|<a \\ |x+y-z|<a \\ |-x+y+z|<a \end{cases}$$

考虑第一个不等式 $|x+y+z|<a$，由 14 题的结果可知满足该不等式的点在平面 $\pm(x+y+z)=a$ 之间。同理可得满足不等式组的点在

$$\begin{cases} \pm(x+y+z)=a \\ \pm(x-y+z)=a \\ \pm(x+y-z)=a \\ \pm(-x+y+z)=a \end{cases}$$

表示的中心在原点，顶点在坐标轴上，且顶点与中心的距离为 a 八面体之间。

16． 在仿射坐标系中，设 $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ 都不在平面

$$\pi : Ax+By+Cz+D=0$$

上，且 $M_1 \neq M_2$。证明：M_1, M_2 在平面 π 的同侧的充要条件是：

$$F_1 = Ax_1+By_1+Cz_1+D, F_2 = Ax_2+By_2+Cz_2+D$$

同号。

证明：M_1, M_2 在平面 π 的同侧的充要条件是线段 M_1M_2 上的点都不在平面 π 上，线段 M_1M_2 可表

示为：

$$\begin{cases} x=(1-t)x_1+tx_2 \\ y=(1-t)y_1+ty_2 \\ z=(1-t)z_1+tz_2 \end{cases} \qquad 0\le t\le 1$$

用反证法。若线段 M_1M_2 有点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在平面 π 上的充要条件是存在 $0\le t_0\le 1$，使得

$$x=(1-t_0)x_1+t_0x_2,\ y=(1-t_0)y_1+t_0y_2,\ z=(1-t_0)z_1+t_0z_2$$

平面方程，即 $A((1-t_0)x_1+t_0x_2)+B((1-t_0)y_1+t_0y_2)+C((1-t_0)z_1+t_0z_2)+D=0$

化简得：$(1-t_0)F_1+t_0F_2=0$，因为 $1-t_0$ 和 t_0 都大于零，那么 F_1,F_2 异号。矛盾。所以 M_1,M_2 在平面 π 的同侧的充要条件是 F_1,F_2 同号。

习题 2.3

1. 在给定的仿射坐标系中，求下列直线的方程。

（1） 过点 $(-2,3,5)$，方向系数为 $(-1,3,4)$；

（2） 过点 $(0,3,1)$ 和 $(-1,2,7)$。

解：（1）该直线方程可以写为：$\dfrac{x+2}{-1}=\dfrac{y-3}{3}=\dfrac{z-5}{4}$。

（2）已知所求直线的方向向量为：$(-1-0,2-3,7-1)=(-1,-1,6)$，所以该直线方程可以写为：

$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-1}{6}$。

2． 在给定的直角坐标系中，求下列直线的方程。

（1）过点 $(-1,2,9)$，垂直于平面 $3x+2y-z-5=0$；

（2）过点 $(2,4,-1)$，与三根坐标轴夹角相等。

解：（1）$\because$ 是在直角坐标系中，$\therefore$ 直线垂直于平面，则平行于该平面的法向量 $(3,2,-1)$，$\therefore$ 所求直线的方程可以写为：$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-9}{-1}$。

（2）设直线 l 的单位法向量为 ν，则 ν 的坐标为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，其中 α,β,γ 是 ν 的方向角。l 与三根坐标轴的夹角相等，$\therefore$ $\alpha=\beta=\gamma$ 或 $\alpha=\beta=\pi-\gamma$ 或 $\alpha=\pi-\beta=\gamma$ 或 $\alpha=\pi-\beta=\pi-\gamma$。

$\because \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，$\therefore$可求得$v$的坐标为：$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，$\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$。

$\therefore$所求直线为四条，分别是：$\dfrac{x-2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{y-4}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{z+1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$，$\dfrac{x-2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{y-4}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{z+1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$，

$\dfrac{x-2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{y-4}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{z+1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$，$\dfrac{x-2}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{y-4}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}=\dfrac{z+1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$。

3． 将下列直线的普通方程化为标准方程。

（1）$\begin{cases}3x-y+2=0\\4y+3z+1=0\end{cases}$ **（2）**$\begin{cases}y-1=0\\z+2=0\end{cases}$

解：（1）令$z=0$，解得该直线过点$\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4},0\right)$，求直线的方向向量$(X,Y,Z)$：

$$X=\begin{vmatrix}-1&0\\4&3\end{vmatrix}=-3,\quad Y=-\begin{vmatrix}3&0\\0&3\end{vmatrix}=-9,\quad Z=\begin{vmatrix}3&-1\\0&4\end{vmatrix}=12$$

$\therefore$该直线的标准方程为：$\dfrac{x+\frac{3}{4}}{-3}=\dfrac{y+\frac{1}{4}}{-9}=\dfrac{z}{12}$。

（也可以令$z=0$，和$y=0$求出直线上的两点，用两点式也能算出标准方程。）

（2）由直线的普通方程可以看出，直线过点$(1,1,-2)$和$(2,1,-2)$，那么用两点式可以求得标准方程为：

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+2}{0}。$$

4． 在给定的直角坐标系中求下列直线在xoy平面上的投影。

（1）$\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$ **（2）**$\begin{cases}2x+3y+1=0\\4x+3y+z-1=0\end{cases}$

解：（1）解法一： 把标准方程可以写为普通方程：

$$\begin{cases}\dfrac{x+1}{0}=\dfrac{y-2}{-1}\\ \dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{2}\end{cases}$$

而上式第一个方程表示的就是过该直线且平行于 z 轴的平面，因此直线在 xoy 平面上的投影就是

$$\begin{cases}x+1=0\\ z=0\end{cases}$$

解法二： 已知直线过点 $\left(-1,2,3\right)$，方向向量为 $\left(0,-1,2\right)$，该点在 xoy 平面上的投影为 $\left(-1,2,0\right)$，方向向量的投影为 $\left(0,-1,0\right)$，那么该直线在 xoy 平面上的投影为

$$\frac{x+1}{0}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{0}$$

（2）该直线的普通方程的第一个方程即表示过该直线且平行于 z 轴的平面，那么该直线在 xoy 平面上的投影马上可得

$$\begin{cases}2x+3y+1=0\\ z=0\end{cases}$$

5． 判断下列各对直线的位置。

（1） $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{1}$，$\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z+5}{3}$

（2） $\begin{cases}x+y+z=0\\ y+z+1=0\end{cases}$**，**$\begin{cases}x+z+1=0\\ x+y+1=0\end{cases}$

解：（1）第一个直线过点 $\left(-1,1,2\right)$，方向向量为 $\left(3,3,1\right)$，第二个直线过点 $\left(0,6,-5\right)$，方向向量为 $\left(-1,2,3\right)$，那么求行列式：

$$\begin{vmatrix}0+1 & 3 & -1\\ 6-1 & 3 & 2\\ -5-2 & 1 & 3\end{vmatrix}=-106$$

那么这对直线为异面直线。

（2）第一个直线过点 $\left(1,-1,0\right)$，方向向量为 $\left(A,B,C\right)$，$A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0$，$B=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1$，

$C=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$，

第二个直线过点 $\left(-1,0,0\right)$，方向向量为 $\left(X,Y,Z\right)$， $X=\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}=-1$， $Y=-\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}=1$，

$Z=\begin{vmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{vmatrix}=1$

那么求行列式：

$$\begin{vmatrix}-1-1 & 0 & -1\\0+1 & -1 & 1\\0 & 1 & 1\end{vmatrix}=3$$

那么这对直线为异面直线。

6．求直线与平面的交点。

（1）$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{-1}$**与**$3x+2y+z=0$

（2）$\begin{cases}2x+3y+z-1=0\\x+2y-z+2=0\end{cases}$**与** xoz **平面**

解：（1）求交点，则联立两个方程为：

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{-1}\\3x+2y+z=0\end{cases}$$

解得交点坐标为：$\left(\dfrac{13}{11},\dfrac{-8}{11},\dfrac{-23}{11}\right)$.

（2）$\because xoz$ 平面的方程可以写为 $y=0$，联立方程为：

$$\begin{cases}2x+3y+z-1=0\\x+2y-z+2=0\\y=0\end{cases}$$

解得交点坐标为：$\left(-\dfrac{1}{3},0,\dfrac{5}{3}\right)$.

7．求直线l

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

与z**轴相交的条件。**

解： 求交点，则联立方程。$\because z$ 轴的方程为$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，那么联立得：

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

解以上方程组，得 $z=-\dfrac{D_1}{C_1}=-\dfrac{D_2}{C_2}$ ，$x=0$ ，$y=0$ 。

那么要使得交点存在，那么 $(C_2,C_1)\neq(0,0)$ 和 $\dfrac{D_1}{C_1}=\dfrac{D_2}{C_2}$ 都要成立。

8． 在仿射坐标系中，求下列平面的方程。

（1）过直线 l_1 且平行于直线 l_2 ，其中 l_1 ，l_2 方程分别是：

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}\text{，}\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}\text{。}$$

（2）过直线 l_1 ：

$$\begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ x+y+4z-2=0 \end{cases}$$

并且在 y 轴和 z 轴上有相同的非零截距。

（3）经过两平面

$$\pi_1:4x-y+3z-1=0 \text{ 和 } \pi_2:x+5y-z+2=0$$

的交线，并且经过点 $(1,1,1)$。

解： （1）要求平面方程，则找出一点和两个不共线向量。

$\because$平面过直线 l_1 ，$\therefore$平面过点 $(1,0,0)$ ，向量 $(2,1,-1)$ 平行于平面。

$\because$平面平行于直线 l_2 ，$\therefore$平面平行于向量 $(2,1,-2)$。

$\therefore$平面方程为：

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ z & -1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$\therefore$平面方程为： $x-2y-1=0$

（2）$\because$过直线 l_1 的方程都可以写为：

$$\lambda(2x-y-2z+1)+\mu(x+y+4z-2)=0$$

由在y轴和z轴上有相同的非零截距可得：

$$\frac{2\mu-\lambda}{\mu-\lambda}=\frac{2\mu-\lambda}{4\mu-2\lambda}$$

$\therefore \lambda=3\mu$，取$\lambda=3$，$\mu=1$，可得平面方程为：

$$7x-2y-2z+1=0$$

（3）$\because$过直线l_1的方程都可以写为：

$$\lambda(4x-y+3z-1)+\mu(x+5y-z+2)=0$$

$\because$平面过点$(1,1,1)$，代入上式可得:$5\lambda+7\mu=0$，取$\lambda=7$，$\mu=-5$，那么平面方程为：

$$23x-32y+26z-17=0.$$

9． 在给定的直角坐标系中，求下列平面方程

（1）与平面$\pi_1:6x-2y+3z+15=0$平行，且这两个平面与点$(0,-2,-1)$等距。

（2）经过z轴，且与平面$2x+y-\sqrt{5}z-7=0$交成60°角。

（3）经过点$(2,0,-3)$，且垂直于两平面：

$$\pi_1:x-2y+4z-7=0\text{ 和 }\pi_2:3x+5y-2z+1=0.$$

解：（1）$\because$所求平面与π_1平行，$\therefore$可以设为：$6x-2y+3z+D=0$，两个平面与点$(0,-2,-1)$等距，所以：

$$\frac{|-2(-2)+3(-1)+15|}{\sqrt{6^2+(-2)^2+3^2}}=\frac{|-2(-2)+3(-1)+D|}{\sqrt{6^2+(-2)^2+3^2}}$$

$\therefore D=-17$，$\therefore$平面方程为：

$$6x-2y+3z-17=0$$

（2）经过z轴，$\therefore$平面方程可设为：

$$Ax+By=0$$

它与$2x+y-\sqrt{5}z-7=0$成60°角，$\therefore$他们的法向量$(2,1,-\sqrt{5})$和$(A,B,0)$成120°角或60°角，

$$\therefore (2,1,-\sqrt{5})\cdot(A,B,0)=\left|(2,1,-\sqrt{5})\right|\cdot|(A,B,0)|\cos120^\circ \text{ 或}$$

$$\left(2,1,-\sqrt{5}\right)\cdot\left(A,B,0\right)=\left|\left(2,1,-\sqrt{5}\right)\right|\cdot\left|\left(A,B,0\right)\right|\cos 60^{\circ}$$

解得 $A=-3$ ，$B=1$，或者 $A=\dfrac{1}{3}$ ，$B=1$，$\therefore$平面方程为：

$$x+3y=0 \text{ 或者 } 3x-y=0$$

（3）垂直于平面，则平行于平面的法向量$\left(1,-2,4\right)$和$\left(3,5,-2\right)$，那么平面方程为：

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 3 \\ y & -2 & 5 \\ z+3 & 4 & -2 \end{vmatrix}=0$$

化简得：$-16x+14y+11z+65=0$

10． 在给定的仿射坐标系中，求下列直线的方程。

（1）过点$\left(1,0,-1\right)$，平行于直线l_1：

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=0 \end{cases}$$

（2）过点$\left(11,9,0\right)$，与直线l_1和l_2均相交，其中l_1和l_2的方程分别是：

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-5}{3}\text{，}\frac{x}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

（3）平行于向量$\left(8,7,1\right)$，且与直线l_1和l_2均相交，其中l_1和l_2的方程分别是：

$$\frac{x+13}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}\text{，}\frac{x-10}{5}=\frac{y+7}{4}=\frac{z}{1}$$

解：（1）直线l_1的方向向量为：

$$X=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1\text{，}Y=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=1\text{，}Z=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2$$

所求直线平行于l_1，那么两条直线的方向向量相同。那么所求直线方程为：

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$$

（2）直线l过点$M\left(11,9,0\right)$，和l_1相交，那么l在M和l_1确定的平面π_1上，同理l也在M和l_2确定的平面π_2上，那么l为平面π_1和π_2就交线。

π_1方程可求得：$\begin{vmatrix} x-11 & 1-11 & 2 \\ y-9 & -3-9 & 4 \\ z & 5 & 3 \end{vmatrix}=0$，化简为：$7x-5y+2z-32=0$

π_2方程可求得：$\begin{vmatrix} x-11 & -11 & 5 \\ y-9 & 2-9 & -1 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix}=0$，化简为：$15x-17y-46z-12=0$

$\therefore$直线l的方程为$\begin{cases} 7x-5y+2z-32=0 \\ 15x-17y-46z-12=0 \end{cases}$

（3）$\because$向量$(8,7,1)$和l_1，l_2的方向向量都不共线，$\therefore l$在$(8,7,1)$和l_1，l_2确定的平面π_1，π_2上，那么l为平面π_1和π_2就交线。

π_1方程可求得：$\begin{vmatrix} x+13 & 8 & 2 \\ y-5 & 7 & 3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，化简为：$2x-3y+5z+41=0$

π_2方程可求得：$\begin{vmatrix} x-10 & 8 & 5 \\ y+7 & 7 & 4 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$，化简为：$x-y-z-17=0$

$\therefore$直线l的方程为$\begin{cases} 2x-3y+5z+41=0 \\ x-y-z-17=0 \end{cases}$

11． 在给定的直角坐标系中，求下列直线的方程。

（1）过点$(2,-1,3)$，与直线l_1

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-2}{2}$$

相交且垂直（正交）。

（2）过点$(4,2-3)$，平行于平面$x+y+z-10=0$，且与直线l_1：

$$\begin{cases} x+2y-z-5=0 \\ z-10=0 \end{cases}$$

垂直。

（3） 从点$(2,-3,-1)$引向直线：

$$\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$$

的垂线。

(4)经过点M_0，且与直线$r=r_1+tv$正交。

解：（1）设直线的方向向量为：$(X,Y.Z)$，那么由和已知直线相交的条件可得：

$$\begin{vmatrix} 2-1 & -1 & X \\ -1 & 0 & Y \\ 3-2 & 2 & Z \end{vmatrix}=0$$

解得：$-2X-3Y-Z=0$，

由和已知直线垂直的条件可得：$(X,Y,Z)\cdot(-1,0,2)=0$

解得：$-X+2Z=0$，

那么可取：$X=2$，$Z=1$，$Y=-\dfrac{5}{3}$，则所求直线方程为：

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-5/3}=\frac{z-3}{1}$$

（2）设所求直线的方向向量为：(X,Y,Z)，因为所求直线平行于已知平面，所以有：

$$X+Y+Z=0$$

又因为已知直线的方向向量(A,B,C)可以求得：$A=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2$，$B=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$，

$C=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$，由两个直线垂直可得：$(X,Y,Z)\cdot(2,-1,0)=2X-Y=0$，

则可令$X=1$，$Y=2$，$Z=-3$，那么直线方程为：

$$\frac{x-4}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-3}$$

（3）和（1）的方法相同。所求直线方程为：$\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{-13}=\dfrac{z+1}{-5}$

（4）设所求直线l与已知直线l_1的交点为M_2，设$r_2=\overline{OM_2}$，$r_1=\overline{OM_1}$，$r_0=\overline{OM_0}$，

$\because \overline{M_0M_2}\perp v$，$\therefore (r_2-r_0)\cdot v=0$。

$\because M_2$在l_1上，$\therefore r_2=r_1+tv$对某个实数t，那么代入上式可得：

$(r_1+tv-r_0)\cdot v=0$，那么$t=\dfrac{(r_1-r_0)\cdot v}{|v|^2}$，那么$r_2=r_1+\dfrac{(r_1-r_0)\cdot v}{|v|^2}v$，

$\therefore \overline{M_0M_2}=r_2-r_0=r_1-r_0+\dfrac{(r_1-r_0)\cdot v}{|v|^2}v$，

那么l的方程为：$r = r_0 + u\left(r_1 - r_0 + \frac{(r_1 - r_0)\cdot v}{|v|^2}v\right)$，其中参数$u$可取任意实数。

12． 在ΔABC中，设P,Q,R分别是AB,BC,CA上的点，并且

$$\overline{AP} = \lambda\overline{PB}, \overline{BQ} = \mu\overline{QC}, \overline{CR} = \nu\overline{RA}$$

证明AQ,BR,CP共点的充要条件是$\lambda\mu\nu = 1$。

证明：在ΔABC中，取A为原点，$\overrightarrow{AB}$为x轴，$\overrightarrow{AC}$为y轴，建立仿射坐标系，那么A点坐标为$(0,0)$，

设B,C点坐标为：$(b,0),(0,c)$，那么由P,Q,R点分三角形三边的比例关系可知它们的坐标分别为：

$\left(\frac{b\lambda}{1+\lambda},0\right),\left(\frac{b}{1+\mu},\frac{c\mu}{1+\mu}\right),\left(0,\frac{c}{1+\nu}\right)$，那么直线$CP,BR$的方程为：

$$\frac{x(1+\lambda)}{b\lambda} + \frac{y}{c} = 1\text{，}\frac{x}{b} + \frac{y(1+\nu)}{c} = 1$$

那么由直线CP,BR的方程可得$\frac{y}{x} = \frac{c}{b\lambda\nu}$，若要使直线$CP,BR$的交点和$A,Q$两点共线，则只需

$\frac{y}{x} = \frac{c}{b\lambda\nu} = \frac{y_Q}{x_Q} = \frac{c\mu}{1+\mu}\frac{1+\mu}{b}$，化简得：$\lambda\mu\nu = 1$.

由于以上证明都是可逆的，那么命题得征.

13． 用坐标法证明契维定理：若三角形的三边依次被分割成：

$$\lambda:\mu, \nu:\lambda, \mu:\nu$$

其中λ,μ,ν均为正实数，则次三角形的顶点与对边分点的连线交于一点。

证明：在ΔABC中，取A为原点，$\overrightarrow{AB}$为x轴，$\overrightarrow{AC}$为y轴，建立仿射坐标系，那么A点坐标为$(0,0)$，

设B,C点坐标为：$(b,0),(0,c)$，设P,Q,R分别是AB,BC,CA上的点，那么由P,Q,R点分三角形三边的比例关系可知它们的坐标分别为：$\left(\frac{b\lambda}{\mu+\lambda},0\right),\left(\frac{b\lambda}{\lambda+\nu},\frac{c\nu}{\lambda+\nu}\right),\left(0,\frac{c}{\mu+\nu}\right)$，那么直线

CP,BR的方程为：

$$\frac{x(\mu+\lambda)}{b\lambda} + \frac{y}{c} = 1\text{，}\frac{x}{b} + \frac{y(\mu+\nu)}{c\nu} = 1$$

那么由直线CP,BR的方程可得$\frac{y}{x} = \frac{c\nu}{b\lambda}$，因为$\frac{y}{x} = \frac{c\nu}{b\lambda} = \frac{c\nu}{1+\mu}\frac{1+\mu}{b\lambda} = \frac{y_Q}{x_Q}$，那么直线$CP,BR$的

交点和 A,Q 两点共线，命题得征.

14． 求出直线 l

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

和平面 π

$$Ax+By+Cz+D=0$$

平行或 l 在 π 上的条件。

解： $\because$直线的方向向量(X,Y,Z)可以求得：$X=\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$，$Y=-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$，$Z=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$，

那么直线在平面上或两者平面的条件为：$AX+BY+CZ=0$

也就是：$\begin{vmatrix} A & A_1 & A_2 \\ B & B_1 & B_2 \\ C & C_1 & C_2 \end{vmatrix}=0$

15． 证明：如果直线 l_1

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

与直线 l_2

$$\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0 \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0 \end{cases}$$

相交，那么

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix}=0$$

证明： 已知两个直线相交，设交点为：$M_0(x_0,y_0,z_0)$，那么$M_0(x_0,y_0,z_0)$满足两个直线方程，那么四元齐次方程组

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_iw=0, i=1,2,3,4$$

有非零解$(x_0,y_0,z_0,1)$，从而系数行列式等于零. 即

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

16． 证明：任何与直线 l_1

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

和直线 l_2

$$\begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

都相交的直线 l **的方程为：**

$$\begin{cases} \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \\ \lambda'(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + \mu'(A_4x + B_4y + C_4z + D_4) = 0 \end{cases}$$

证明： $\because$所求直线 l 和 l_1 相交，那么它定在过 l_1 的某个平面上，也就是说它在平面束

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

上。同理 l 也在 $\lambda'(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + \mu'(A_4x + B_4y + C_4z + D_4) = 0$ 上，那么它就在两个平面束的交线

$$\begin{cases} \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \\ \lambda'(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) + \mu'(A_4x + B_4y + C_4z + D_4) = 0 \end{cases}$$

上。

17． 证明：到三角形的三个顶点等距离的点的轨迹是一条直线。

证明： 设 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ 为三角形的三个顶点，那么到 A, B 距离相等的点的轨迹可求得：$\sqrt{(x-x_1)+(y-y_1)+(z-z_1)} = \sqrt{(x-x_2)+(y-y_2)+(z-z_2)}$，化简得：

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y + 2(z_2 - z_1)z + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) = 0。$$

上式为三元一次方程，所以到 A, B 距离相等的点的轨迹是一个平面。

同理到 B, C 距离相等的点的轨迹为平面：

$$2(x_3 - x_2)x + 2(y_3 - y_2)y + 2(z_3 - z_2)z + (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) = 0$$

那么到 A,B,C 距离相等的点的轨迹为两个平面的交线：

$$\begin{cases}2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y+2(z_2-z_1)z+\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right)-\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)=0\\2(x_3-x_2)x+2(y_3-y_2)y+2(z_3-z_2)z+\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right)-\left(x_3^2+y_3^2+z_3^2\right)=0\end{cases}$$

所以到 A,B,C 距离相等的点的轨迹是一条直线。

18． 在直角坐标系中，给定点 $A(1,0,3),B(0,2,5)$，直线 l

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3}$$

设 A',B' 各为 A,B 在 l 上的垂直，求 $|A'B'|,A',B'$ 的坐标。

解： 作平面 π_1 与 l 垂直且过 A 点，因为在直角坐标系中，π_1 和 l 垂直，那么 π_1 的法向量为 l 的方向向量 $(2,1,3)$，那么可设 π_1 的方程为 $2x+y+3z+D=0$，又 π_1 过 A 点，那么 $D=-11$，所以 π_1 的方程为 $2x+y+3z-11=0$，同理作平面 π_2 与 l 垂直且过 B 点，那么 π_2 的方程为 $2x+y+3z-17=0$。则 $|A'B'|$ 等于 π_1,π_2 之间的距离；A' 为 π_1 与 l 的交点；B' 为 π_2 与 l 的交点。

所以 $|A'B'|=\dfrac{|-11-(-17)|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{14}}$，

$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}\\2x+y+3z-11=0\end{cases}$，解得 A' 的坐标为 $\left(\dfrac{17}{7},\dfrac{-2}{7},\dfrac{15}{7}\right)$

$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}\\2x+y+3z-17=0\end{cases}$，解得 B' 的坐标为 $\left(\dfrac{23}{7},\dfrac{1}{7},\dfrac{24}{7}\right)$.

19． 在仿射坐标系中，求出过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，并且与平面

$$\pi_i: A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, i=1,2$$

都平行的直线的方程。

解： 求过已知一点的直线方程，只要求出直线的方向向量 (X,Y,Z),那么直线的方程为：

$$\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}.$$

情形一. 若$\pi_1 // \pi_2$或π_1, π_2重合，那么所求直线不唯一，只要过$M_0(x_0, y_0, z_0)$且方向向量平行于两个平面的直线都是所求直线。即直线的方向向量(X, Y, Z)满足条件：$A_1X + B_1Y + C_1Z = 0$.

情形二. 若π_1, π_2相交，那么所求直线平行于两个平面的交线：

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

所以所求直线的方向向量为：$\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right)$.

习题 2.4

1． 求下列点到直线的距离。

（1）点$(-1,-3,5)$**，直线**$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{-3}$

（2）点$(1,0,2)$**，直线**$\begin{cases} 2x - y - 2z + 1 = 0 \\ x + y + 4z - 2 = 0 \end{cases}$

解：（1）$\because$直线过点$(1,1,-1)$，方向向量为$(2,3,-3)$，

应用公式：$d = \dfrac{\left|\overline{M_0M} \times v\right|}{|v|} = \sqrt{\dfrac{38}{11}}$

（2）令$z = 0$可求得直线过点：$\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{5}{3}, 0\right)$，另可求得直线的方向向量为：$(X, Y, Z)$，其中

$X = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -2$，$Y = -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10$，$Z = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$

$\therefore d = \dfrac{\left|\overline{M_0M} \times v\right|}{|v|} = \sqrt{\dfrac{361}{113}}$

2． 求下列各对直线之间的距离。

（1）$\dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+5}{2}$**与**$\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-6}{-9} = \dfrac{z+5}{-6}$

（2）$\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{-1}$**与**$\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$

（3）$\begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$**与**$\begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0 \\ 2x - y + 3z - 6 = 0 \end{cases}$

解：（1）两条直线的方向向量成比例，所以平行，即求点$(-1,1,-5)$到$\frac{x}{3}=\frac{y-6}{-9}=\frac{z+5}{-6}$的距离。

应用公式：$d=\frac{\left|\overline{M_0M}\times v\right|}{|v|}=2\sqrt{3}$

（2）判断两条直线的位置关系，计算行列式:$\begin{vmatrix} 0-1 & 2 & 4 \\ -2-3 & -2 & 2 \\ 1+1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=30$，所以两条直线异面。那么应用

公式：$d=\frac{\left|\overline{M_1M_2}\cdot v_1\times v_2\right|}{|v_1\times v_2|}=\frac{15}{\sqrt{41}}$

（3）分别令$x=0$和$x=1$，可求得直线$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+y=0 \end{cases}$过点$(0,0,1)$和$(1,-1,1)$，那么该直线的方向向量为：$(1,-1,0)$，同样可求得直线$\begin{cases} x-2y+3z-6=0 \\ 2x-y+3z-6=0 \end{cases}$过点：$(0,0,2)$，方向向量为：$(-3,3,3)$，

那么判断两条直线的位置关系，计算行列式:$\begin{vmatrix} 0-0 & 1 & -3 \\ 0-0 & -1 & 3 \\ 2-1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0$，那么两条直线相交，则两条直线的距离为零。

3． 求下列各对直线的公垂线的方程。

（1） $x-1=\frac{y}{-3}=\frac{z}{3}$**与**$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$

（2） $\begin{cases} x+y-1=0 \\ z=0 \end{cases}$**与**$\begin{cases} x-z+1=0 \\ 2y+z-2=0 \end{cases}$

解：（1）直线l_1,l_2的方向向量分别为：$(1,-3,3)$，$(2,1,-2)$

所以它们的公垂线的方向向量为：$(1,-3,3)\times(2,1,-2)=(3,8,7)$，那么所求公垂线就是向量$(3,8,7)$和$l_1,l_2$决定的两个平面的交线。

向量$(3,8,7)$和l_1决定平面可以求得：$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 3 \\ y & -3 & 8 \\ z & 3 & 7 \end{vmatrix}=0$，化简为：$45x-2y-17z-45=0$

向量$(3,8,7)$和l_2决定平面可以求得：$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ y & 1 & 8 \\ z & -2 & 7 \end{vmatrix}=0$，化简为：$23x-20y+13z=0$

那么公垂线方程可表示为：$\begin{cases} 45x-2y-17z-45=0 \\ 23x-20y+13z=0 \end{cases}$

（2）两个直线化为标准式为：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{0}$与$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$，那么它们的公垂线的方向向量为：$(1,-1,0)\times(2,-1,2)=(-2,-2,1)$，那么公垂线就是向量$(-2,-2,1)$和$l_1,l_2$决定的两个平面的交线。

向量$(-2,2,1)$和l_1决定平面可以求得：$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -2 \\ y & -1 & -2 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$，化简为：$x+y+4z-1=0$.

向量$(-2,2,1)$和l_2决定平面可以求得：$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -2 \\ y & -1 & -2 \\ z-2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0$，化简为：$x-2y-2z+1=0$.

那么公垂线方程可表示为：$\begin{cases} x+y+4z-1=0 \\ x-2y-2z+1=0 \end{cases}$

4．求下列各对直线的夹角。

（1）$\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+4}{2}$**与**$\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{-3}$

（2）$\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y+2z+1=0 \end{cases}$**与**$\begin{cases} 3x+y+1=0 \\ y+3z+2=0 \end{cases}$

解：（1）两个直线的夹角就是其方向向量的夹角，这两个直线的方向向量为：$(-1,1,2),(-2,4,-3)$

那么他们的夹角的余弦可求得：$\cos<n_1,n_2>=\dfrac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}=\dfrac{(-1,1,2)\cdot(-2,4,-3)}{|(-1,1,2)||(-2,4,-3)|}=0$

那么$<n_1,n_2>=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$.

（2）第一条直线过点：$(0,3,-2)$，$(3,0,-2)$，那么其方向向量为：$(3,-3,0)$。

第二条直线过点：$\left(-\dfrac{1}{3},0,-\dfrac{2}{3}\right)$，$\left(-1,2,-\dfrac{4}{3}\right)$，那么其方向向量为：$\left(-\dfrac{2}{3},2,-\dfrac{2}{3}\right)$。

那么他们的夹角的余弦可求得：$\cos<n_1,n_2>=\dfrac{n_1\cdot n_2}{|n_1||n_2|}=-\dfrac{-2\sqrt{22}}{11}$，

那么$<n_1,n_2>=\arccos\dfrac{-2\sqrt{22}}{11}$或者$<n_1,n_2>=\pi-\arccos\dfrac{-2\sqrt{22}}{11}$.

5． 求下列直线与平面的夹角。

（1）直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ **，平面** $x-2y+4z-1=0$

（2）直线 $\begin{cases} x-y-z+2=0 \\ 2x-3y+3=0 \end{cases}$ **，平面** $2x-z+1=0$

解：（1）平面的法向量为：$(1,-2,4)$，直线方向向量为：$(2,1,-1)$，那么应用公式：

$\cos<v,n>=\frac{v\cdot n}{|v||n|}=-\frac{2\sqrt{14}}{21}$，那么 $\sin\theta=|\cos<v,n>|=\frac{2\sqrt{14}}{21}$.

那么直线和平面的夹角为：$\arcsin\frac{2\sqrt{14}}{21}$.

（2）平面的法向量为：$(2,0,-1)$，因为直线过点：$(-3,-1,0),(0,1,1)$，那么直线的方向向量为：$(3,2,1)$，那么应用公式：

$\cos<v,n>=\frac{v\cdot n}{|v||n|}=\frac{\sqrt{70}}{14}$，那么 $\sin\theta=|\cos<v,n>|=\frac{\sqrt{70}}{14}$.

那么直线和平面的夹角为：$\arcsin\frac{\sqrt{70}}{14}$.

6． 求平面 $Ax+By+Cz+D=0$ **与坐标轴的夹角，在怎样的条件下，此平面与三根坐标轴成等角。**

解：∵平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的法向量为：(A,B,C)，那么 x 轴与 (A,B,C) 的夹角的余弦值为：$\cos\alpha=\frac{|(1,0,0)\cdot(A,B,C)|}{|(1,0,0)||(A,B,C)|}=\frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$，同样可以计算 (A,B,C) 与 y 轴和 z 轴的夹角的余弦值分别为：$\cos\beta=\frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$，$\cos\gamma=\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$，所以要此平面和三根坐标轴成等角，只要 $|A|=|B|=|C|$.

7． 设异面直线 l_1,l_2 **的方程分别为：**

$$\frac{x-x_1}{X_1}=\frac{y-y_1}{Y_1}=\frac{z-z_1}{Z_1}，\frac{x-x_2}{X_2}=\frac{y-y_2}{Y_2}=\frac{z-z_2}{Z_2}$$

求与 l_1,l_2 **等距离的平面的方程。**

解： $\because$所求平面π平行于l_1,l_2，那么π平行于两个直线的方向向量：$(X_1,Y_1,Z_1),(X_2,Y_2,Z_2)$，又平面过点$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$，那么平面方程可写为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+x_2}{2}+tX_1+uX_2 \\ y=\dfrac{y_1+y_2}{2}+tY_1+uY_2 \\ z=\dfrac{z_1+z_2}{2}+tZ_1+uZ_2 \end{cases}$$

8． 已知两条异面直线l_1,l_2，证明：连接l_1上任一点和l_2上任一点的线段的中点的轨迹的公垂线段的垂直平分面。

解： 取l_1为z轴，l_1,l_2的公垂线为x轴，x轴的正半轴与l_2相交于$P(d,0,0)$. 公垂线段OP的垂直平分面经过点$\left(\frac{d}{2},0,0\right)$，且与公垂线垂直，因此$(1,0,0)$为其法向量. 所以公垂线段的垂直平分面方程为$x-\frac{d}{2}=0$.

设l_2的方向向量v_2为(X,Y,Z)，它满足$1\cdot X+0\cdot Y+0\cdot Z=0$，即$X=0$. 那么$l_2$的方程为：$\frac{x-d}{0}=\frac{y}{Y}=\frac{z}{Z}$，于是$l_2$上任意一点$M_2$的坐标为$(d,tY,tZ)$. l_1上任意一点M_1的坐标为$(0,0,z)$. 因此M_1M_2的中点的坐标为$\left(\frac{d}{2},\frac{tY}{2},\frac{tZ+z}{2}\right)$. 由于$t,z$均可取任意实数，所以中点轨迹方程为$x=\frac{d}{2}$.

9． 在直角坐标系中，点P不在坐标平面上，从P到xOz,xOy平面分别作垂线，垂足为M,N，设直线OP与平面的夹角分别为$\theta,\alpha,\beta,\gamma$，则

$$\csc^2\theta=\csc^2\alpha+\csc^2\beta+\csc^2\gamma$$

证明： 设P点的坐标为：(x,y,z)，由已知，$xyz\neq0$. 那么M,N的坐标分别为：$(x,0,z),(x,y,0)$. 平面ONM的法向量为：$\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON}=(-yz,xz,xy)$，于是

$$\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON}>\right|=\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{y^2z^2+x^2z^2+x^2y^2}}$$

$$\sin\alpha = \left|\cos < \overrightarrow{OP}, e_3 >\right| = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\sin\beta = \left|\cos < \overrightarrow{OP}, e_1 >\right| = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\sin\gamma = \left|\cos < \overrightarrow{OP}, e_2 >\right| = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

代入 $\csc^2\theta = \csc^2\alpha + \csc^2\beta + \csc^2\gamma$ 中可知该式成立，证毕.

习题 3.1

1．求下列球面的中心和半径。

（1）$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$.

（2）$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$.

解：（1）$x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=(x-6)^2+(y+2)^2+(z-3)^2-49=0$.

所以此球面的中心为：$(6,-2,3)$，半径为：7.

（2）$x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2-36=0$.

所以此球面的中心为：$(1,-2,3)$，半径为：6.

2．求下列球面的方程。

（1）以点 $A(1,0,3)$，$B(2,-1,4)$ 的连线为直径。

（2）过点 $(1,-1,1),(1,2,-1),(2,3,0)$ 和坐标原点。

（3）过点 $(1,2,5)$，与三个坐标平面相切。

（4）过点 $(2,-4,3)$，且包含圆：

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ z=0 \end{cases}.$$

解：（1）所求球面的直径：$d=|AB|=\sqrt{(2-1)^2+(-1-0)^2+(4-3)^2}=\sqrt{3}$.

中心 $O(a,b,c)$ 为线段 AB 的中点：$a=\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2},b=\dfrac{0-1}{2}=\dfrac{-1}{2},c=\dfrac{3+4}{2}=\dfrac{7}{2}$，所以中心坐标为 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{-1}{2},\dfrac{7}{2}\right)$，那么所求球面方程为：$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$.

（2）设所求球面方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$，把球面上的四点代入方程可得：

$$\begin{cases} (1-a)^2+(-1-b)^2+(1-c)^2=r^2 \\ (1-a)^2+(2-b)^2+(-1-c)^2=r^2 \\ (2-a)^2+(3-b)^2+(0-c)^2=r^2 \\ (0-a)^2+(0-b)^2+(0-c)^2=r^2 \end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{7}{4},b=1,c=\dfrac{3}{4},r=\dfrac{\sqrt{74}}{4}$.

那么所求球面方程为：$\left(x-\frac{7}{4}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{37}{8}$.

（3）因为所求球面和三个坐标平面相切，那么可设所求球面方程为

$$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2=r^2.$$

又知球面过点$(1,2,5)$，代入方程可得：$(1-r)^2+(2-r)^2+(5-r)^2=r^2$，解得：$r=3,r=5$，那么所求球面方程为：

$$(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=9 \text{ 或 } (x-5)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=25.$$

（4）设所求球面方程为$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$，因为已知圆$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ z=0 \end{cases}$在球面上，所以该圆方程满足球面方程，立即得：$a=0,b=0,r^2=5$，又知球面过点$(2,-4,3)$，代入球面方程解得$c=4$，那么所求球面方程为$x^2+y^2+(z-4)^2=21$.

3． 过球面上一点与此点所作半径相垂直的平面叫做切面，给定球面

$$x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z-20=0$$

求过球面上一点$(2,4,2)$的切面方程。

解： 由球面方程可得球面的中心为$(-1,2,-2)$，那么过点$(2,4,2)$的半径的方向向量为$(3,2,4)$，因为所求平面与此半径垂直，那么可设所求平面为$3x+2y+4z+d=0$，又知该平面过点$(2,4,2)$，代入平面方程解得$d=-22$，那么所求平面为$3x+2y+4z-22=0$.

4．平面 $Ax+By+Cz+D=0,(A>0;B,C,D<0)$与三个坐标平面组成一个四面体，求内切于这个四面体的球面方程。

解： 因为已知平面π与z轴的交点为$\left(0,0,-\frac{D}{C}\right)$，且平面$\pi$的一个法向量为$(A,B,C)$，由法向量的方向可知所求球面的球心必在第八卦限，又因为球面与三个坐标平面相切，于是可设球心坐标为$(r,-r,-r)$，其中r为球的半径。那么由球心到平面的距离等于半径可得：

$$\frac{|Ar-Br-Cr+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=r, \quad (1)$$

因为球心和原点在平面的同侧，那么由$D<0$可知（1）式绝对值中的式子应和D同号，那么可以解得

$r=\dfrac{D}{B+C-A-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

那么所求球面方程为：

$$(x-r)^2+(y+r)^2+(z+r)^2=r^2\text{，其中 } r=\frac{D}{B+C-A-\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

5． 求下列圆的中心和半径。

（1） $\begin{cases} x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0 \\ 2x+y+z+1=0 \end{cases}$

（2） $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$

解：（1）设所求圆的圆心为 (a,b,c)，半径为 r，由该圆的方程可知它是由平面 $2x+y+z+1=0$ 在球 $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$ 上截取而来，已知球的球心为 $(6,-2,3)$，半径为 $R=7$，已知平面的法向量为 $(2,1,1)$，那么圆心为过点 $(6,-2,3)$ 且方向向量为 $(2,1,1)$ 的直线与已知平面 $2x+y+z+1=0$ 的交点，即：

$$\begin{cases} \dfrac{x-6}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{1} \\ 2x+y+z+1=0 \end{cases}$$

解得 $\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{13}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，即为所求圆的圆心。

另外，所求圆的半径 r，已知球的半径 $R=7$，球心到已知平面的距离 $d=\dfrac{|2\times 6-2+3+1|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\dfrac{14}{\sqrt{6}}$，满足方程 $R^2=r^2+d^2$，代入已知量可解得所求圆的半径为 $r=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

（2）由球面方程可知球心为：$(0,0,0)$，球半径为 R，平面的法向量为：(A,B,C)，那么过球心作垂直于平面的直线：

$$\begin{cases} x = \lambda A \\ y = \lambda B \\ z = \lambda C \end{cases}$$

代入平面方程可得：

$$\lambda\left(A^2 + B^2 + C^2\right) + D = 0$$

解得：$\lambda = \dfrac{-D}{A^2 + B^2 + C^2}$.

那么可得圆心坐标为：$\left(\dfrac{-AD}{A^2 + B^2 + C^2}, \dfrac{-BD}{A^2 + B^2 + C^2}, \dfrac{-CD}{A^2 + B^2 + C^2}\right)$

又因为球心到平面的距离为：$\dfrac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

所以圆半径为：$r = \sqrt{R^2 - \left(\dfrac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{R^2\left(A^2 + B^2 + C^2\right) - D^2}{A^2 + B^2 + C^2}}$.

6．求过三点$(3,0,0)$，$(0,2,0)$，$(0,0,1)$的圆的方程。

解： ∵三点决定的平面的方程为：$\begin{vmatrix} x-0 & 3-0 & 0-0 \\ y-2 & 0-2 & 2-0 \\ z-0 & 0-0 & 0-1 \end{vmatrix} = 0$，

化简为：$2x + 3y + 6z - 6 = 0$.

设过三点的球面球心为$\left(x_0, y_0, z_0\right)$，则

$$\sqrt{\left(3 - x_0\right)^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2} = \sqrt{{x_0}^2 + \left(2 - y_0\right)^2 + {z_0}^2} = \sqrt{{x_0}^2 + {y_0}^2 + \left(1 - z_0\right)^2}$$

化简得：$-6x_0 + 8 = -4y_0 + 3 = -2z_0$，可令$x_0 = 1$，$y_0 = \dfrac{1}{4}$，$z_0 = -1$，

所以球半径可求得：$R = \sqrt{(1-3)^2 + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{9}{4}$.

所以球面方程为：$(x-1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{4}\right)^2 + (z+1)^2 = \dfrac{81}{16}$.

所以圆的方程可表示为：$\begin{cases} (x-1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{4}\right)^2 + (z+1)^2 = \dfrac{81}{16} \\ 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \end{cases}$.

7． 证明曲线

$$\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = 4\sin t \\ z = 5\cos t \end{cases}$$

是一个圆，并求该圆的中心和半径。

证明： 由曲线参数方程消去参数 t 可得 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$，为一个球面，并且易得 x, y 的关系式 $4x - 3y = 0$，为一个平面，那么曲线表示的是一个圆，是一个球面和一个平面的交线：

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ 4x - 3y = 0 \end{cases}$$

因为球面中心为原点，满足平面 $4x - 3y = 0$ 方程，也就是说球面中心在平面上，那么所求圆的圆心和半径都和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 相同，即圆心为原点，半径为 5。

8． 证明：曲线

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{1+t^2+t^4} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2+t^4} \\ z = \dfrac{t^3}{1+t^2+t^4} \end{cases}, (-\infty < t < +\infty)$$

表示一条球面曲线，并且求它所在的球面。

证明： 由曲线参数方程消去参数 t 可得 $x^2 + y^2 + z^2 = y$，即曲线上的点满足方程：$x^2 + y^2 + z^2 = y$，而 $x^2 + y^2 + z^2 = y$ 表示的是中心为 $\left(0, \dfrac{1}{2}, 0\right)$，半径为 $\dfrac{1}{4}$ 的球面，所以曲线表示一条球面曲线，它所在的球面为 $x^2 + y^2 + z^2 = y$.

9． 求旋转面的方程。

(1) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{1}$ **绕** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ **旋转**

(2) $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-1}$ **绕** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ **旋转**

(3) $x - 1 = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{3}$ **绕** z **轴旋转**

(4) $x - 1 = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z}{3}$ **绕** $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-2}$ **旋转**

（5）$\begin{cases} z=ax+b \\ z=cy+d \end{cases}(a,b,c,d\neq 0)$**绕** z **轴旋转**

（6）$\begin{cases} 4x^2+9y^2=36 \\ z=0 \end{cases}$**绕** x **轴旋转**

（7）$\begin{cases} (x-2)^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$**绕** y **轴旋转**

（8）$\begin{cases} xy=a^2 \\ z=0 \end{cases}$ **绕这个曲线的渐近线旋转**

（9）$\begin{cases} y=x^3 \\ z=0 \end{cases}$ **绕** y **轴旋转**

（10）$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=x^2 \end{cases}$**绕** z **轴旋转**

解：（1）由题意知轴过点 $(0,0,1)$，且方向向量为 $v=(1,-1,2)$，设 (x_0,y_0,z_0) 为母线上一点，母线绕轴旋转后点为 (x,y,z)，那么有下式成立：

$$\begin{cases} \dfrac{x_0-1}{1}=\dfrac{y_0+1}{-1}=\dfrac{z_0-1}{2} \\ \left|(x_0,y_0,z_0-1)\times(1,-1,2)\right|=\left|(x,y,z-1)\times(1,-1,2)\right| \\ (x_0-x,y_0-y,z_0-z)\cdot(1,-1,2)=0 \end{cases}$$

消去 x_0,y_0,z_0 得到旋转面的方程：$(2y+z-1)^2+(2x-z+1)^2+(x+y)^2=8$，

化简为 $5x^2+5y^2+2z^2+2xy+4yz-4xz+4x-4y-4z-6=0$.

（2）由题意知轴过点 $(0,0,1)$，且方向向量为 $v=(1,-1,2)$，设 (x_0,y_0,z_0) 为母线上一点，母线绕轴旋转后点为 (x,y,z)，那么有下式成立：

$$\begin{cases} \dfrac{x_0}{2}=\dfrac{y_0}{1}=\dfrac{z_0-1}{-1} \\ \left|(x_0,y_0,z_0-1)\times(1,-1,2)\right|=\left|(x,y,z-1)\times(1,-1,2)\right| \\ (x_0-x,y_0-y,z_0-z)\cdot(1,-1,2)=0 \end{cases}$$

消去 x_0,y_0,z_0 得到旋转面的方程：

$$40x^2+40y^2+142z^2-68xy-136yz+136xz-136x+136y-284z+142=0.$$

（3）由题意知轴过原点，且方向向量为 $v=(0,0,1)$，设 (x_0,y_0,z_0) 为母线上一点，母线绕轴旋转后点为 (x,y,z)，那么有下式成立：

$$\begin{cases} x_0-1=\dfrac{y_0}{-3}=\dfrac{z_0}{3} \\ x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \\ (x-x_0,y-y_0,z-z_0)\cdot(0,0,1)=0 \end{cases}$$

消去 x_0,y_0,z_0 得到旋转面的方程：

$$9x^2+9y^2-10z^2-6z-9=0.$$

（4）由题意知轴过原点，且方向向量为 $v=(2,1,-2)$，设 (x_0,y_0,z_0) 为母线上一点，母线绕轴旋转后点为 (x,y,z)，那么有下式成立：

$$\begin{cases} x_0-1=\dfrac{y_0}{-3}=\dfrac{z_0}{-3} \\ \left|(x_0,y_0,z_0)\times(2,1,-2)\right|=\left|(x,y,z)\times(2,1,-2)\right| \\ (x_0-x,y_0-y,z_0-z)\cdot(2,1,-2)=0 \end{cases}$$

消去 x_0,y_0,z_0 得到旋转面的方程：

$$27x^2-30y^2+27z^2+76xy-76yz-152xz-180x-90y+180z+153=0.$$

（5）由题意知轴过原点，且方向向量为 $v=(0,0,1)$，设 (x_0,y_0,z_0) 为母线上一点，母线绕轴旋转后点为 (x,y,z)，那么有下式成立：

$$\begin{cases} z_0=ax_0+b \\ z_0=cy_0+d \\ \left|(x_0,y_0,z_0)\times(0,0,1)\right|=\left|(x,y,z)\times(0,0,1)\right| \\ (x_0-x,y_0-y,z_0-z)\cdot(0,0,1)=0 \end{cases}$$

消去 x_0,y_0,z_0 得到旋转面的方程：

$$c^2a^2(x^2+y^2)-27(c^2+a^2)z^2+2(c^2b+a^2d)z-c^2b^2-a^2d^2=0.$$

（6）由题意知轴过原点，且方向向量为 $v=(1,0,0)$，设 (x_0,y_0,z_0) 为母线上一点，母线绕轴旋转后点为 (x,y,z)，那么有下式成立：

$$\begin{cases} 4x_0^2+9y_0^2=36 \\ z_0=0 \\ \left|(x_0,y_0,z_0)\times(1,0,0)\right|=\left|(x,y,z)\times(1,0,0)\right| \\ (x_0-x,y_0-y,z_0-z)\cdot(1,0,0)=0 \end{cases}$$

消去 x_0,y_0,z_0 得到旋转面的方程：

$$4x^2+9\left(z^2+y^2\right)=36.$$

（7）由题意知轴过原点，且方向向量为 $v=(0,1,0)$，设 (x_0,y_0,z_0) 为母线上一点，母线绕轴旋转后点为 (x,y,z)，那么有下式成立：

$$\begin{cases} (x_0-2)^2+y_0^2=1 \\ z_0=0 \\ \left|(x_0,y_0,z_0)\times(0,1,0)\right|=\left|(x,y,z)\times(0,1,0)\right| \\ (x_0-x,y_0-y,z_0-z)\cdot(0,1,0)=0 \end{cases}$$

消去 x_0,y_0,z_0 得到旋转面的方程：

$$x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2-10x^2+6y^2-10z^2+9=0.$$

（8）显然这条曲线的渐近线为 x 轴和 y 轴，那么它绕 x 轴旋转得到的方程就是把 y 换成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$，所以方程为：$x^2\left(y^2+z^2\right)=a^4$，它绕 y 轴旋转得到的方程就是把 x 换成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，所以方程为：$y^2\left(x^2+z^2\right)=a^4$.

（9）曲线绕 y 轴旋转得到的方程就是把 x 换成 $\pm\sqrt{x^2+z^2}$，所以方程为：$y^2=\left(x^2+z^2\right)^3$.

（10）由题意知轴过原点，且方向向量为 $v=(0,0,1)$，设 (x_0,y_0,z_0) 为母线上一点，母线绕轴旋转后点为 (x,y,z)，那么有下式成立：

$$\begin{cases} {x_0}^2+{y_0}^2=1 \\ z_0=x_0^2 \\ \left|(x_0,y_0,z_0)\times(0,0,1)\right|=\left|(x,y,z)\times(0,0,1)\right| \\ (x_0-x,y_0-y,z_0-z)\cdot(0,0,1)=0 \end{cases}$$

消去 x_0,y_0,z_0 得：

$$x^2+y^2=1$$

又由原曲线可知 z 的取值范围是 $-1\le z\le 1$，那么旋转面的方程为 $x^2+y^2=1$，$-1\le z\le 1$.

10． 证明 $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ **表示一个旋转面，并且求它的母线和转轴。**

证明： 它是由母线 $\begin{cases} z=\dfrac{1}{x^2} \\ y=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而来，或者由母线 $\begin{cases} z=\dfrac{1}{y^2} \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而来.

11． 适当选取坐标系，求下列轨迹的方程。

（1）到两定点距离之比等于常数的点的轨迹；

（2）到两定点距离之和等于常数的点的轨迹；

（3）到定平面和定点等距离的点的轨迹.

解： （1）选取右手直角坐标系使得两定点 A,B 的坐标分别为 $(a,0,0),(-a,0,0)$，设 $\left|\overrightarrow{MA}\right|=k\left|\overrightarrow{MB}\right|$，$k\geq 0$，当 $k=0$ 时，$\left|\overrightarrow{MA}\right|=0\cdot\left|\overrightarrow{MB}\right|$，那么动点 M 的轨迹为一个点 A；当 $k=1$ 时，由 $\left|\overrightarrow{MA}\right|=\left|\overrightarrow{MB}\right|$ 可求得轨迹为一个平面：$x=0$；当 $k\neq 0,1$ 时轨迹为一个球面，$\left|\overrightarrow{MA}\right|=k\left|\overrightarrow{MB}\right|$ 由可求得其方程为：

$$\left(x+\frac{k^2+1}{k^2-1}a\right)^2+y^2+z^2=\frac{4k^2a^2}{\left(k^2-1\right)^2}.$$

（2）选取右手直角坐标系使得两定点 A,B 的坐标分别为 $(a,0,0),(-a,0,0)$，设到两定点的距离之和为 $2b$，若 $b>a>0$，则由 $\left|\overrightarrow{MA}\right|+\left|\overrightarrow{MB}\right|=2b$ 可求得所求点的轨迹方程为：

$$\left(b^2-a^2\right)x^2+y^2+z^2=b^2\left(b^2-a^2\right)$$

若 $b=a$，则点的轨迹为线段 AB，它在 x 轴上，且 x 的取值范围为 $[-a,a]$，那么其方程可写为：

$$\begin{cases} -a\leq x\leq a \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

若 $b<a$，显然轨迹不存在。

（3）以定平面为 xOy 平面，建立右手直角坐标系，使定点 A 的坐标为 $(0,0,a)$，设所求点为 $M(x,y,z)$，那么由 $\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}=|z|$ 可得所求点的轨迹为：

$$x^2+y^2-2az+a^2=0.$$

习题 3.2

1． 求半径为 2 ，对称轴为 $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ 的圆柱面方程.

解： 因为对称轴向量为 $(1,2,3)$，过点 $(0,0,0)$，那么圆柱面方程为：

$$\frac{\left|(x-0,y-0,z-0)\times(1,2,3)\right|}{\left|(1,2,3)\right|}=2$$

化简得：$13x^2+10y^2+5z^2+4xy+12yz+6zx-56=0$.

2． 设圆柱面的对称轴为：

$$\begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=-3-2t \end{cases}$$

且已知点 $M_1(1,-2,1)$ 在这个圆柱面上，求这个圆柱面方程.

解： 因为对称轴向量为 $(1,2,-2)$，过点 $(0,1,-3)$，那么圆柱面方程为：

$$\frac{\left|(x-0,y-1,z+3)\times(1,2,-2)\right|}{\left|(1,2,-2)\right|}=\frac{\left|(1-0,-2-1,1+3)\times(1,2,-2)\right|}{\left|(1,2,-2)\right|}$$

求得 $r=\dfrac{\sqrt{65}}{3}$.

圆柱面方程为：$8x^2+5y^2+5z^2-4xy+8yz+4zx+16x+14y+22z-39=0$.

3． 已知圆柱面的三条母线为：

$$x=y=z,x+1=y=z-1,x-1=y+1=z$$

求这个圆柱面的方程.

解： 已知母线的方向向量为：$v(1,1,1)$，则过原点与母线垂直的平面 π 的方程为 $x+y+z=0$，

设 π 与三条母线的交点分别为 A_1,A_2,A_3，那么由

$$\begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=0 \end{cases},\begin{cases} x+1=y=z-1 \\ x+y+z=0 \end{cases},\begin{cases} x-1=y+1=z \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

可求得 $A_1(0,0,0),A_2(-1,0,1),A_3(1,-1,0)$，

设平面 π 截圆柱所得的圆所在球的方程为：$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

由于 A_1, A_2, A_3 满足此球的方程，那么

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=r^2 \\ (-1-a)^2+b^2+(1-c)^2=r^2 \\ (1-a)^2+(-1-b)^2+c^2=r^2 \end{cases}$$

可令 $a=0$ ，可解得以上方程组的一组解：$a=0, b=-1, c=1, r=\sqrt{2}$ ，

则点 $D(0,-1,1)$ 在所求圆柱面的对称轴上，而且圆柱面的半径为 $\sqrt{2}$ ，所以圆柱面上的点 $M(x,y,z)$ 满足

$$\frac{\left|\overrightarrow{MD}\times v\right|}{|v|}=r$$

代入已知条件化简可得圆柱面方程为：

$$x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz+3y-3z=0.$$

4． 求柱面方程.

（1）准线为 $\begin{cases} y^2=2z \\ x=0 \end{cases}$ **，母线平行于 x 轴.**

（2）准线为 $\begin{cases} xy=4 \\ z=0 \end{cases}$ **，母线方向为 $(1,-1,1)$.**

（3）准线为 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ 2x^2+2y^2+z^2=2 \end{cases}$ **，母线方向为：$(-1,0,1)$.**

（4）准线为 $\begin{cases} x=y^2+z^2 \\ x=2z \end{cases}$ **，母线垂直于准线所在的平面.**

解： （1）设 $M(x,y,z)$ 为柱面上任意一点，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为准线上一点，母线平行于 x 轴，所以可设母线方向为 $(1,0,0)$ ，那么由题意得：

$$\begin{cases} {y_0}^2=2z_0 \\ x_0=0 \\ x_0=x+t \\ y_0=y \\ z_0=z \end{cases}$$

消去 x_0, y_0, z_0, t 得所求柱面方程为：$y^2-2z=0$.

（2）设 $M(x,y,z)$ 为柱面上任意一点，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为准线上一点，母线方向为 $(1,-1,1)$，那么由题意得：

$$\begin{cases} x_0 y_0 = 4 \\ z_0 = 0 \\ x_0 = x+t \\ y_0 = y-t \\ z_0 = z+t \end{cases}$$

消去 x_0, y_0, z_0, t 得所求柱面方程为：$(x-z)(y+z)=4$.

（3）设 $M(x,y,z)$ 为柱面上任意一点，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为准线上一点，那么由题意得：

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \\ 2x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 2 \\ x = x_0 + u(-1) \\ y = y_0 \\ z = z_0 + u \end{cases}$$

消去 x_0, y_0, z_0 得：

$$\begin{cases} (x+u)^2 + y^2 + (z-u)^2 = 1 \\ 2(x+u)^2 + 2y^2 + (z-u)^2 = 2 \end{cases}$$

消去 u 可得所求柱面方程：

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xz - 1 = 0.$$

（4）由准线方程可知其所在平面为 $x=2z$，那么母线方向向量即为平面 $x=2z$ 的法向量 $(1,0,-2)$，设 $M(x,y,z)$ 为柱面上任意一点，$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为准线上一点，那么由题意得：

$$\begin{cases} x_0 = y_0^2 + z_0^2 \\ x_0 = 2z_0 \\ x = x_0 + u \\ y = y_0 \\ z = z_0 - 2u \end{cases}$$

消去 x_0, y_0, z_0 得：

$$\begin{cases} x-u = y^2 + (z+2u)^2 \\ x-u = 2(z+2u) \end{cases}$$

消去 u 可得所求柱面方程：

$$4x^2 + 25y^2 + z^2 + 4xz - 20x - 10z = 0.$$

5． 求准线为

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

的圆柱面的方程，这样的圆柱面有几个.

解： 设母线的方向向量为：$v(1,b,c)$，所求圆柱面半径为 r，在准线上取三点 $M_1(2,0,0), M_2(0,1,0), M_3\left(1,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，又已知所求圆柱面的对称轴过点 $M_0(0,0,0)$，那么由准线上的点到对称轴的距离等于半径可列方程组：

$$\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\times v\right|}{|v|}=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_2}\times v\right|}{|v|}=\frac{\left|\overrightarrow{M_0M_3}\times v\right|}{|v|}=r$$

由上式可解得：$b=0, c=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}, r=1$.

那么由 $\dfrac{\left|\overrightarrow{MM_0}\times v\right|}{|v|}=r$ 可得两个符合题意的圆柱面方程：

$$4y^2+\left(x\pm\sqrt{3}z\right)^2=4.$$

6． 求顶点坐标为 $(1,2,3)$，轴与平面 $2x+2y-z+1=0$ 垂直，母线与轴夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 的圆锥面的方程.

解：设 (x,y,z) 为所求锥面上的点，已知轴的方向向量为 $(2,2,-1)$，母线与轴夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$，那么 (x,y,z) 满足方程：

$$\frac{\left|(x-1,y-2,z-3)\cdot(2,2,-1)\right|}{\left|(x-1,y-2,z-3)\right|\left|(2,2,-1)\right|}=\cos\frac{\pi}{6}$$

化简得圆锥面方程为：

$$43x^2+43y^2+31z^2+32xy-16xz-16yz-102x-156y-136z+378=0.$$

7． 求顶点为 $(1,2,4)$，轴与平面 $2x+2y+z=0$ 垂直，且经过点 $(3,2,1)$ 的圆锥面的方程.

解： 设 (x,y,z) 为所求锥面上的点，已知轴的方向向量为 $(2,2,1)$，那么 (x,y,z) 满足方程：

$$\frac{\left|(x-1,y-2,z-4)\cdot(2,2,1)\right|}{\left|(x-1,y-2,z-4)\right|\left|(2,2,1)\right|}=\frac{\left|(3-1,2-2,1-4)\cdot(2,2,1)\right|}{\left|(3-1,2-2,1-4)\right|\left|(2,2,1)\right|}$$

化简得圆锥面方程为：

$$51x^2+51y^2+12z^2+104xy+52xz+52yz-518x-516y-252z+1279=0.$$

8．给定球面 $x^2+y^2+z^2+2x-4y+4z-20=0$，求以 $(2,6,10)$ 为顶点的切锥面方程.

解： 由球面方程可知该球面的中心为：$D(-1,2,-2)$，半径为：$r=\sqrt{29}$，已知球面的切锥面为圆锥面，因为 $A(2,6,10)$ 为其顶点，则对称轴为 AD，那么其母线与轴的夹角 α 满足关系式：$\sin\alpha=\dfrac{r}{\left|\overrightarrow{AD}\right|}$.

那么可设 (x,y,z) 为所求锥面上的点，已知轴的方向向量为 $\overrightarrow{AD}=(-3,-4,-12)$，那么 (x,y,z) 满足方程：

$$\frac{\left|(x-2,y-6,z-10)\cdot(-3,-4,-12)\right|}{\left|(x-2,y-6,z-10)\right|\left|(-3,-4,-12)\right|}=\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

解得圆锥面方程为：

$$131x^2+124y^2-4z^2-24xy-72xz-96yz+340x-480y+800z-2900=0.$$

9．求锥面方程.

（1）顶点为 $(4,0,-3)$，准线为 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1\\ z=0\end{cases}$

（2）顶点为原点，准线为 $\begin{cases}x^2-\dfrac{y^2}{4}=1\\ z=-5\end{cases}$

（3）顶点为原点，准线为 $\begin{cases}x^2+y^2=3\\ x^2+y^2+2z-5=0\end{cases}$

（4）顶点为 $(0,0,2R)$，准线为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2Rz\\ ax+by+cz+d=0\end{cases}$

解：（1）设 (x_1,y_1,z_1) 为准线上一点，那么所求锥面上一点 (x,y,z) 满足方程

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^{\ 2}}{25}+\dfrac{y_1^{\ 2}}{9}=1 \\ z_1=0 \\ x_1=4+(x-4)t \\ y_1=0+(y-0)t \\ z_1=-3+(z+3)t \end{cases}$$

消去 x_1, y_1, z_1, t 可得所求锥面方程为 $9x^2+25y^2-9z^2+24xz-150z-225=0$.

（2）设 (x_1, y_1, z_1) 为准线上一点，那么所求锥面上一点 (x, y, z) 满足方程

$$\begin{cases} x_1^{\ 2}-\dfrac{y_1^{\ 2}}{4}=1 \\ z_1=-5 \\ x_1=0+(x-0)t \\ y_1=0+(y-0)t \\ z_1=0+(z-0)t \end{cases}$$

消去 x_1, y_1, z_1, t 可得所求锥面方程为 $100x^2-25y^2-4z^2=0$.

（3）设 (x_1, y_1, z_1) 为准线上一点，那么所求锥面上一点 (x, y, z) 满足方程

$$\begin{cases} x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}=3 \\ x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+2z_1-5=0 \\ x_1=0+(x-0)t \\ y_1=0+(y-0)t \\ z_1=0+(z-0)t \end{cases}$$

消去 x_1, y_1, z_1, t 可得所求锥面方程为 $x^2+y^2-3z^2=0$.

（4）设 (x_1, y_1, z_1) 为准线上一点，那么所求锥面上一点 (x, y, z) 满足方程

$$\begin{cases} x_1^{\ 2}+y_1^{\ 2}+z_1^{\ 2}=2Rz_t \\ ax_1+by_1+cz_1+d=0 \\ x_1=0+(x-0)t \\ y_1=0+(y-0)t \\ z_1=2R+(z-2R)t \end{cases}$$

消去 x_1, y_1, z_1, t 可得所求锥面方程为：

$$(2Rc+d)(x^2+y^2)+dz^2-2Raxz-2Rbyz+4R^2ax+4R^2by-4Rdz+4R^2d=0$$

10．已知锥面 S 的顶点为 $(2,5,4)$，S 与 yOz 平面的交线为一圆，这个圆的圆心为 $(0,1,1)$，半径为 2，求这个锥面方程.

解： 因为 S 与 yOz 平面的交线为一圆心为 $(0,1,1)$，半径为 2 的圆，它的方程可写为：

$$\begin{cases}(y-1)^2+(z-1)^2=4\\ x=0\end{cases}$$

那么这个圆即为所求锥面的一条准线，那么可设 (x_1,y_1,z_1) 为准线上一点，那么所求锥面上一点 (x,y,z) 满足方程：

$$\begin{cases}(y_1-1)^2+(z_1-1)^2=4\\ x_1=0\\ x_1=2+(x-2)t\\ y_1=5+(y-5)t\\ z_1=4+(z-4)t\end{cases}$$

化简可得这个锥面方程为：$21x^2+4y^2+4z^2-16xy-12xz+44x-8y-8z-8=0$.

11．已知球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外切柱面的母线垂直于平面 $x+y-2z-5=0$，求这个柱面方程。

解： 已知母线垂直于平面 $x+y-2z-5=0$，所以母线方向为 $v(1,1,-2)$，点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 在已知球面的外切柱面上，当且仅当点在一条母线上，并且这条母线与球面有重合的两个交点。

因为过 $M(x_0,y_0,z_0)$ 方向为 $v(1,1,-2)$ 的母线为：

$$\begin{cases}x=x_0+t\\ y=y_0+t\\ z=z_0-2t\end{cases},$$

求它与球面的交点可得方程：$6t^2+(2x_0+2y_0-4z_0)t+x_0^2+y_0^2+z_0^2-1=0$

由于母线和球面只有一个交点，那么上式只能有一个解，所以 $M(x_0,y_0,z_0)$ 满足一下方程：

$$(2x_0+2y_0-4z_0)^2-24(x_0^2+y_0^2+z_0^2-1)=0$$

化简得：$5x_0{}^2+5y_0{}^2+2z_0{}^2-2x_0y_0+4x_0z_0+4y_0z_0-6=0$

由于 $M(x_0,y_0,z_0)$ 为球面的外切柱面上任意一点，那么由 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的任意性可得所求柱面方程为：$5x^2+5y^2+2z^2-2xy+4xz+4yz-6=0$.

12． 证明：球面的外切柱面是圆柱面。

证明： 设以球心为原点，建立右手直角坐标系，则球面方程为：$x^2+y^2+z^2=r^2$，设外切柱面的母线方向为：(l,m,n)，在外切柱面上任取一点$M(x_0,y_0,z_0)$，则过$M(x_0,y_0,z_0)$的母线的参数方程为：$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$，该直线和球面的交点可求得：

$$(x_0+lt)^2+(y_0+mt)^2+(z_0+nt)^2=r^2 \text{ ，}$$

化简为：$(lt)^2+(mt)^2+(nt)^2+2x_0lt+2y_0mt+2z_0nt+x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-r^2=0$

因为该柱面为外切柱面，所以它与球面只有重合的两个交点，那么以上关于t的方程的判别式为零，即：

$(2x_0l+2y_0m+2z_0n)^2-4(l^2+m^2+n^2)(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2-r^2)=0$

化简为：$(ly_0-mx_0)^2+(ny_0-mz_0)^2+(lz_0-nx_0)^2=r^2(l^2+m^2+n^2)$

因为$M(x_0,y_0,z_0)$为任意点，那么方程可写为：

$$(ly-mx)^2+(ny-mz)^2+(lz-nx)^2=r^2(l^2+m^2+n^2)$$

此为圆柱面。

13． 过x轴和y轴分别作动平面，交角α是常数，求交线的轨迹方程，并且证明它是一个锥面。

解： 在交线上任意取一点$M(x,y,z)$，由点M和x轴决定的平面π_1的法向量$n_1=e_1\times\overrightarrow{OM}$，由$M$与$y$轴决定的平面$\pi_2$的法向量$n_2=e_2\times\overrightarrow{OM}$，由于$n_1,n_2$的夹角$\alpha$为常数，那么：

$$\cos\alpha=\frac{|n_1\cdot n_2|}{|n_1||n_2|}=\frac{\left|\left(e_1\times\overrightarrow{OM}\right)\cdot\left(e_2\times\overrightarrow{OM}\right)\right|}{\left|\left(e_1\times\overrightarrow{OM}\right)\right|\left|\left(e_2\times\overrightarrow{OM}\right)\right|}=\frac{|(0,z,y)\cdot(z,0,-x)|}{|(0,z,y)||(z,0,-x)|}=\frac{|xy|}{\sqrt{z^2+y^2}\sqrt{z^2+x^2}}$$

化简可得：$(z^2+x^2)(z^2+y^2)=(1+\tan^2\alpha)x^2y^2$，这是$x,y,z$的 4 次齐次方程，所以它是一个以原点为定点的锥面。

习题 3.3

1． 已知椭球面的对称轴与坐标轴重合，且通过椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1 \\ z=0 \end{cases}$$

以及点 $M\left(1,2,\sqrt{23}\right)$，求这个椭球面的方程。

解： 可设这个对称轴与坐标轴重合的椭球面为 $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c}=1$，因为椭圆 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 在这个椭球面上，可得 $a=9,b=16$，又点 $M\left(1,2,\sqrt{23}\right)$ 在这个椭球面上，代入方程可得：

$$\frac{1^2}{9}+\frac{2^2}{16}+\frac{\sqrt{23}^2}{c}=1$$

解得 $c=36$，那么这个椭球面的方程为：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{36}=1$.

2． 已知椭圆抛物面的顶点为原点，对称平面为 xOz 面和 yOz 面，且过点 $(1,2,5)$ 和 $\left(\dfrac{1}{3},-1,1\right)$，求这个椭圆抛物面的方程。

解： 因为这个椭圆抛物面的顶点为原点，对称平面为 xOz 面和 yOz 面，所以可设其方程为：

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=2z$$

把点 $(1,2,5)$ 和 $\left(\dfrac{1}{3},-1,1\right)$ 代入所设方程可得：

$$\begin{cases} \dfrac{1^2}{a}+\dfrac{2^2}{b}=2\times 5 \\ \dfrac{\left(1/3\right)^2}{a}+\dfrac{1^2}{b}=2 \end{cases}$$

解得 $a=\dfrac{5}{18},b=\dfrac{5}{8}$，那么这个椭圆抛物面的方程为 $\dfrac{18x^2}{5}+\dfrac{8y^2}{5}=2z$.

3． 已知马鞍面的鞍点为原点，对称平面为 xOz 面和 yOz 面，且过点 $(1,2,0)$ 和 $\left(\dfrac{1}{3},-1,1\right)$，求这个马鞍面的方程。

解： 可设所求马鞍面方程为：$\frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z$，因为马鞍面过点$(1,2,0)$和$\left(\frac{1}{3},-1,1\right)$，代入方程可得：

$$\begin{cases}\frac{1^2}{a}-\frac{2^2}{b}=2\times 0\\ \frac{\left(1/3\right)^2}{a}-\frac{1^2}{b}=2\times 1\end{cases}$$

解得$a=-\frac{5}{72},b=-\frac{5}{18}$，所以所求马鞍面方程为：$-\frac{72x^2}{5}+\frac{18y^2}{5}=2z$.

4． 求经过两条抛物线：

$$\begin{cases}x^2-6y=0\\ z=0\end{cases},\begin{cases}z^2+4y=0\\ x=0\end{cases}$$

的二次曲面的方程。

解： 因为所求二次曲面上的两条抛物线不在同一平面上，所以所求曲面定是马鞍面，因为这两条抛物线的对称轴都是y轴，那么可设所求马鞍面方程为：$\frac{x^2}{a}-\frac{z^2}{b}=2y$，由$\begin{cases}x^2-6y=0\\ z=0\end{cases}$在所求马鞍面上，可得$a=3$，由$\begin{cases}z^2+4y=0\\ x=0\end{cases}$在所求马鞍面上，可得$b=2$，那么所求马鞍面方程为：$\frac{x^2}{3}-\frac{z^2}{2}=2y$.

5． 给定方程

$$\frac{x^2}{a^2-k}+\frac{y^2}{b^2-k}+\frac{z^2}{c^2-k}=1,(a>b>c>0)$$

问当k取异于a^2,b^2,c^2的各种实数值时，它表示怎样的曲面？

解： 因为$a>b>c>0$，所以当$k<c^2$时，x^2,y^2,z^2的系数都是正数，那么它表示的就是椭球面；当$c^2<k<b^2$时，x^2,y^2的系数都是正数，z^2前的系数是负数，那么它表示的就是单叶双曲面；当$b^2<k<a^2$时，x^2的系数是正数，y^2,z^2前的系数是负数，那么它表示的就是双叶双曲面；当$a^2<k$时，x^2,y^2,z^2的系数都是负数，那么它表示的就是虚椭球面。

6． 适当选取坐标系，求下列轨迹的方程。

（1）当两定点距离之差等于常数的点的轨迹；

（2）到一定点和一定平面（定点不在定平面上）距离之比等于常数的点的轨迹；

（3）设有一个固定平面和垂直于它的一条定直线，求到定平面与到定直线的距离相等的点的轨迹；

（4）求与两给定直线等距离的点的轨迹，已知两直线之间的距离为 a ，夹角为 α 。

解：（1）取直角坐标系使得两定点 A, B 的坐标分别为 $(a,0,0),(-a,0,0)$ ，设动点为 $M(x,y,z)$ ，设 $\left|\overrightarrow{MA}\right|-\left|\overrightarrow{MB}\right|=\pm k$ ，其中 $k\geq 0$ ，由三角不等式可知 $k\leq 2a$ ，

当 $0<k<2a$ 时，由 $\left|\overrightarrow{MA}\right|-\left|\overrightarrow{MB}\right|=\pm k$ 可得所求轨迹方程为：

$$\frac{4x^2}{k^2}+\frac{4y^2}{k^2-4a^2}+\frac{4z^2}{k^2-4a^2}=1$$

这是双叶双曲面。

当 $k=2a$ 时，由 $\left|\overrightarrow{MA}\right|-\left|\overrightarrow{MB}\right|=\pm 2a$ 可得所求轨迹方程为： $y^2+z^2=0$ ，且 $x\geq a$ 或者 $x\leq -a$ ，这是 x 轴去掉区间 $(-a,a)$。

当 $k=0$ 时， $\left|\overrightarrow{MA}\right|-\left|\overrightarrow{MB}\right|=0$ 可得所求轨迹方程为： $x=0$ ，这是 yOz 平面。

（2）以定平面为 xOy 平面，建立直角坐标系，使定点 A 的坐标为 $(0,0,a)$ ，设比值为 $k(k\geq 0)$ ，所求点为 $M(x,y,z)$ ，那么 $\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}=k|z|$

当 $k=0$ 时，由 $\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}=0\cdot|z|$ ，所以此时轨迹为一点 A

当 $k=1$ 时，由 $\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}=|z|$ ，可得轨迹方程为： $x^2+y^2+a^2-2az=0$

当 $k\neq 0,1$ 时，由 $\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}=k|z|$ 可得轨迹方程为：

$$x^2+y^2+\left(1-k^2\right)\left(z-\frac{a}{1-k^2}\right)^2=\frac{a^2k^2}{1-k^2}$$

此时当 $0<k<1$ 时，为椭球面，当 $k>1$ 时，为双叶双曲面。

（3）以定点平面为 xOy 平面，以定直线为 z 轴，建立直角坐标系，设动点为 $M(x,y,z)$ ，那么由它到平面的距离等于到直线的距离可得： $\sqrt{x^2+y^2}=|z|$ ，化简可得 $x^2+y^2-z^2=0$ ，这是二次锥面。

（4）以两条给定直线 l_1, l_2 的公垂线为 z 轴，公垂线段的中点为原点，让 x 轴与 l_1, l_2 的夹角相等，建立直角坐标系，则 l_1, l_2 分别经过点 $A_1\left(0,0,\frac{a}{2}\right), A_2\left(0,0,-\frac{a}{2}\right)$ ，它们的方向向量分别为 $v_1\left(\cos\frac{\alpha}{2},-\sin\frac{\alpha}{2},0\right), v_2\left(\cos\frac{\alpha}{2},\sin\frac{\alpha}{2},0\right)$ ，所以由动点到两直线的距离相等可得：

$$xy\sin\alpha=z\alpha$$

当$\alpha=0$时，为xOy平面；当$0<\alpha\le\dfrac{\pi}{2}$时，为双曲抛物面。

7． 设一个定点与一条二次曲面不在同一平面上，证明：以定点为定点，以这条二次曲面为准线的锥面是二次曲面。

证明： 可令该定点为原点，以过原点，平行于已知二次曲面的平面为xOy平面，建立直角坐标系，那么可设已知二次曲面方程为：

$$\begin{cases} ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0 \\ z=h \end{cases}$$

其中，a,b,c,d,e,f为实数，h为实数表示原点到已知二次曲面所在平面的距离，那么由此二次曲面为准线，以原点为定点的锥面方程可求得：

$$\begin{cases} a{x_1}^2+b{y_1}^2+cx_1y_1+dx_1+ey_1+f=0 \\ z_1=h \\ x_1=xt \\ y_1=yt \\ z_1=zt \end{cases}$$

化简可得：$ah^2x^2+bh^2y^2+ch^2xy+dhxz+ehyz+fz^2=0$，此为二次曲面，证毕。

8． 有椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的中心O任意引三条相互垂直的射线，与曲面分别交于P_1,P_2,P_3，设$\left|\overrightarrow{OP_i}\right|=r_i, i=1,2,3$，证明：

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

证明： 设$\overrightarrow{OP_i}^0$为$\overrightarrow{OP_i}$方向的单位向量，$\alpha_i=<\overrightarrow{OP_i}^0,e_1>,\beta_i=<\overrightarrow{OP_i}^0,e_2>$，$\gamma_i=<\overrightarrow{OP_i}^0,e_3>$，$i=1,2,3$，其中$e_1,e_2,e_3$是原直角坐标系中的基向量。

于是$\overrightarrow{OP_i}^0=(\cos a_i,\cos\beta_i,\cos\gamma_i)$，$\overrightarrow{OP_i}=r_i\overrightarrow{OP_i}^0$，$i=1,2,3$，又由于$\overrightarrow{OP_i}$两两垂直，那么$\left[O;\overrightarrow{OP_1}^0,\overrightarrow{OP_2}^0,\overrightarrow{OP_3}^0\right]$也为一个直角坐标系，从而$(\cos\alpha_1,\cos\alpha_2,\cos\alpha_3)$是$e_1$在这个新的直角坐标系中的方向余弦，因此有$\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3=1$，同理$\cos\beta_1+\cos\beta_2+\cos\beta_3=1$，$\cos\gamma_1+\cos\gamma_2+\cos\gamma_3=1$，那么由椭球面方程可得：

$$\frac{r_i^2\cos^2\alpha_i}{a^2}+\frac{r_i^2\cos^2\beta_i}{b^2}+\frac{r_i^2\cos^2\gamma_i}{c^2}=1\text{ , }i=1,2,3$$

所以有：$\frac{\cos^2\alpha_i}{a^2}+\frac{\cos^2\beta_i}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma_i}{c^2}=\frac{1}{r_i^2}$，$i=1,2,3$

那么三个等式相加可得：$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\cos^2\alpha_i}{a^2}+\frac{\cos^2\beta_i}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma_i}{c^2}\right)=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\sum_{i=1}^{3}\frac{1}{r_i^2}$

9． 证明：用通过坐标轴的平面和椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,(a>b>c>0)$$

相截时，有且仅有两条截口曲线是圆，并说明这两张截面的位置。

证明：当用过 x 轴的平面去截椭球面时，截得的曲线肯定过 $(\pm a,0,0)$，若解得的是圆，那么圆的半径肯定是 a，并且圆心在原点，而椭球面上除了 $(\pm a,0,0)$ 的所有点离原点的距离都小于 a，所以用过 x 轴的平面去截椭球面，截口都不是圆。

用过 z 轴的平面去截椭球面时，截得的曲线肯定过 $(0,0,\pm c)$，若解得的是圆，那么圆的半径肯定是 c，并且圆心在原点，而椭球面上除了 $(0,0,\pm c)$ 的所有点离原点的距离都大于 c，所以用过 z 轴的平面去截椭球面，截口都不是圆。

用过 y 轴的平面去截椭球面时，截得的曲线肯定过 $(0,\pm b,0)$，若解得的是圆，那么圆的半径肯定是 b，并且圆心在原点，那么圆方程为：

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=b^2\\ Ax+Bz=0\end{cases}$$

设 $M(x_0,y_0,z_0)$ 为圆上任意一点，那么 $y_0^{\ 2}=b^2-z_0^{\ 2}-x_0^{\ 2}$ ......(1)

这点又在椭球面上，所以 $\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{y_0^{\ 2}}{b^2}+\frac{z_0^{\ 2}}{c^2}=1$ ......(2)

把(1) 代入(2)可得：$\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}+\frac{b^2-x_0^{\ 2}-z_0^{\ 2}}{b^2}+\frac{z_0^{\ 2}}{c^2}=1$，化简得：$\frac{x_0^{\ 2}}{a^2}-\frac{x_0^{\ 2}}{b^2}+\frac{z_0^{\ 2}}{c^2}-\frac{z_0^{\ 2}}{b^2}=0$

又因为 $M(x_0,y_0,z_0)$ 在过 y 轴的平面上，那么 $Ax_0+Bz_0=0$，所以 $x_0=-\frac{B}{A}z_0$ 代入上式可得：

$\left(\frac{B}{A}\right)^2\frac{z_0^{\ 2}}{a^2}-\left(\frac{B}{A}\right)^2\frac{z_0^{\ 2}}{b^2}+\frac{z_0^{\ 2}}{c^2}-\frac{z_0^{\ 2}}{b^2}=0$，解得 $\left(\frac{B}{A}\right)^2=\left(\frac{a}{c}\right)^2\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}$。

所以用过y轴的平面$x \pm \frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}z=0$去截椭球面时，得到的截口是圆。

习题 3.4

1． 求单叶双曲面$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$的过点$(2,3,-4)$的母线。

解： 因为单叶双曲面是直纹面，它的直母线都可以表示为：

$$\begin{cases}\mu\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{4}\right)+\nu\left(1+\frac{y}{3}\right)=0\\ \mu\left(1-\frac{y}{3}\right)+\nu\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{4}\right)=0\end{cases} \text{和} \begin{cases}\mu\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{4}\right)+\nu\left(1-\frac{y}{3}\right)=0\\ \mu\left(1+\frac{y}{3}\right)+\nu\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{4}\right)=0\end{cases}$$

把点$(2,3,-4)$代入上式可解得所求母线为：

$$\begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{z}{4}=0\\ 1-\frac{y}{3}=0\end{cases} \text{和} \begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{z}{4}+\frac{y}{3}-1=0\\ \frac{y}{3}-\frac{x}{2}+\frac{z}{4}+1=0\end{cases}$$

2． 求直线族

$$\frac{x-\lambda^2}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-\lambda}{0}$$

所形成的曲面。

解： 由直线族方程消去参数λ可得：$\frac{x-z^2}{1}=\frac{y}{-1}$，即：$x+y-z^2=0$，它是抛物柱面。

3．求与下列三条直线同时共面的直线所产生的曲面。

$$l_1:\begin{cases}x=1\\ y=z\end{cases} \quad l_2:\begin{cases}x=-1\\ y=-z\end{cases} \quad l_3:\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{5}$$

解：设与已知直线同时共面的直线为：$l:\frac{x-x_0}{X}=\frac{y-y_0}{Y}=\frac{z-z_0}{Z}$，由$l$和$l_1,l_2,l_3$共面可得：

$$\begin{vmatrix}x_0-1 & 0 & X\\ y_0 & 1 & Y\\ z_0 & 1 & Z\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}x_0+1 & 0 & X\\ y_0 & 1 & Y\\ z_0 & -1 & Z\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}x_0-2 & -3 & X\\ y_0+1 & 4 & Y\\ z_0+2 & 5 & Z\end{vmatrix}=0$$

化简可得：

$$\begin{cases}(y_0-z_0)X-(x_0-1)Y+(x_0-1)Z=0\\(-y_0-z_0)X-(-x_0-1)Y+(x_0+1)Z=0\\(5y_0-4z_0-3)X-(5x_0+3z_0-4)Y+(4x_0+3y_0-5)Z=0\end{cases}$$

可将以上方程组看成X,Y,Z的三元一次方程组，那么该方程组定有非零解，那么它的系数行列式等于零，即：

$$\begin{vmatrix}y_0-z_0 & -(x_0-1) & x_0-1\\ -y_0-z_0 & -(-x_0-1) & x_0+1\\ 5y_0-4z_0-3 & -(5x_0+3z_0-4) & 4x_0+3y_0-5\end{vmatrix}=0$$

化简得：$x_0{}^2+y_0{}^2-z_0{}^2=1.$

因为(x_0,y_0,z_0)在所求曲面上，它能代表所有曲线上的点，那么曲面方程就是

$$x^2+y^2-z^2=1.$$

4． 求所有与直线

$$l_1:\frac{x-6}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{2}\quad l_2:\frac{x}{3}=\frac{y-8}{2}=\frac{z+4}{-2}$$

都共面，且与平面

$$\pi:2x+3y-5=0$$

平行的直线所构成的曲面方程。

解： 设与已知直线同时共面的直线为：$l:\dfrac{x-x_0}{X}=\dfrac{y-y_0}{Y}=\dfrac{z-z_0}{Z}$，由$l$和$l_1,l_2$共面可得：

$$\begin{vmatrix}x_0-6 & 3 & X\\ y_0 & 2 & Y\\ z_0-1 & 2 & Z\end{vmatrix}=0\text{和}\begin{vmatrix}x_0 & 3 & X\\ y_0-8 & 2 & Y\\ z_0+4 & -2 & Z\end{vmatrix}=0$$

化简可得：$(2y_0-2z_0+2)X-(2x_0-3z_0-9)Y+(2x_0-3y_0-12)Z=0$ ......(1)

和$(-2y_0-2z_0+8)X-(-2x_0-3z_0-12)Y+(2x_0-3y_0+24)Z=0$ ......(2)

再由l和π平行可得：$2X+3Y=0$ ......(3)

可将(1)(2)(3)看成X,Y,Z的三元一次方程组，那么该方程组定有非零解，那么它的系数行列式等于零，即：

$$\begin{vmatrix}2y_0-2z_0+2 & -(2x_0-3z_0-9) & 2x_0-3y_0-12\\ -2y_0-2z_0+8 & -(-2x_0-3z_0-12) & 2x_0-3y_0+24\\ 2 & 3 & 0\end{vmatrix}=0$$

化简得：$4x_0^2-9y_0^2+6z_0^2+27y_0-108z_0-72=0$.

因为(x_0,y_0,z_0)在所求曲面上，它能代表所有曲线上的点，那么曲面方程就是

$$4x-9y+6z+27y-108z-72=0.$$

5． 设有直线l_1和l_2，它们的方程分别是：

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{2}+3t \\ y=-1+2t \\ z=-t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=3t \\ y=2t \\ z=0 \end{cases}$$

求所有由l_1和l_2上有相同参数t值的点的连线所构成的曲面方程。

解： l_1上的点为：$\left(\dfrac{3}{2}+3t,-1+2t,-t\right)$，$l_2$上的点为：$(3t,2t,0)$，其中$t$是任意给定的一个实数,那么有相同的参数的两个直线的点的连线的方向向量为：$\left(\left(\dfrac{3}{2}+3t-3t\right),(-1+2t-2t),(-t-0)\right)$，那么该连线的方程为：$\dfrac{x-3t}{\frac{3}{2}}=\dfrac{y-2t}{-1}=\dfrac{z}{-t}$，消去$t$可得：$\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}=2z$，这就是所求曲面的方程，它是马鞍面。

6． 证明：马鞍面同族的所有直母线都平行于同一个平面，并且同族的任意两条直母线异面。

证明： 考虑马鞍面$\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$的一族直母线：

$$\begin{cases} \left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)+2\lambda=0 \\ z+\lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=0 \end{cases} \quad \text{......(1)}$$

任意给定一个λ_0值，得到这个族中的一条直母线l_{λ_0}，它在平面π_{λ_0}：$\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)+2\lambda_0=0$上，因为平面$\pi_0$：$\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}=0$平行于$\pi_{\lambda_0}$，那么$l_{\lambda_0}$平行于$\pi_0$，由$\lambda_0$的任意性可知该族的所有直母线都

平行于π_0。

任意取这族中的两条直线$l_{\lambda_1},l_{\lambda_2},\lambda_1\neq\lambda_2$，那么$\pi_{\lambda_1}//\pi_{\lambda_2}$，由$\lambda_1\neq\lambda_2$得$\pi_{\lambda_1},\pi_{\lambda_2}$不重合，从而$l_{\lambda_1},l_{\lambda_2}$不相交，由(1)可求出$l_{\lambda_1},l_{\lambda_2}$的方向向量为：$\left(\sqrt{p},-\sqrt{q},-2\lambda_i\right),i=1,2$，那么$l_{\lambda_1},l_{\lambda_2}$不平行，从而$l_{\lambda_1},l_{\lambda_2}$异面，由$l_{\lambda_1},l_{\lambda_2}$的任意性可知该族的任意两条直母线异面。

同理可知另一个母线族：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)+2\lambda=0\\ z+\lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=0\end{cases}$$

的所有直母线都平行于同一个平面，并且该族的任意两条直母线异面。

7． 证明：马鞍面异族的任意两条直母线必相交。

证明： 在马鞍面$\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$的第一族直母线：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)+2\lambda=0\\ z+\lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=0\end{cases}$$

中任取一条直线l_{λ_1} ,它的方向向量可求得：$v_1:\left(\sqrt{p},-\sqrt{q},-2\lambda_1\right)$,它经过点$M_1\left(-\lambda_1\sqrt{p},-\lambda_1\sqrt{q},0\right)$,

在第二族直母线：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)+2\lambda=0\\ z+\lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=0\end{cases}$$

中任意取一条直线l_{λ_2}，它的方向向量为$v_2:\left(\sqrt{p},\sqrt{q},-2\lambda_2\right)$，过点$M_2\left(-\lambda_2\sqrt{p},\lambda_2\sqrt{q},0\right)$，那么计算

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot v_1\times v_2=\left((\lambda_1-\lambda_2)\sqrt{p},(\lambda_2+\lambda_1)\sqrt{q},0\right)\cdot\left(\sqrt{p},\sqrt{q},-2\lambda_1\right)\times\left(\sqrt{p},\sqrt{q},-2\lambda_2\right)=0$$

所以l_{λ_1} l_{λ_2}共面，又v_1,v_2不共线，那么可知l_{λ_1} l_{λ_2}相交，又由l_{λ_1} l_{λ_2}的任意性，可得马鞍面异族的任意两条直母线必相交。

8． 证明：单叶双曲面同族中的任意三条直母线都不平行于同一平面。

证明：单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$的一个母线族为：

$$\begin{cases}\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu\left(1+\frac{y}{b}\right)=0\\ \mu\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0\end{cases}$$

其中，μ,ν不全为零，那么可设μ不为零，那么可求得该母线族的方向向量为：$\left(a\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right),2b\frac{\nu}{\mu},-c\left(1+\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\right)$，考虑这个母线族的任意三个直母线：$I_1(\mu_1,\nu_1),I_2(\mu_2,\nu_2),I_3(\mu_3,\nu_3)$，它们的方向向量为

$$w_i=\left(a\left(1-\frac{\nu_i^2}{\mu_i^2}\right),2b\frac{\nu_i}{\mu_i},-c\left(1+\frac{\nu_i^2}{\mu_i^2}\right)\right),i=1,2,3$$

那么$w_1\times w_2\cdot w_3=4abc\left(\frac{\nu_1}{\mu_1}\frac{\nu_3^2}{\mu_3^2}+\frac{\nu_2}{\mu_2}\frac{\nu_1^2}{\mu_1^2}+\frac{\nu_3}{\mu_3}\frac{\nu_2^2}{\mu_2^2}-\frac{\nu_1}{\mu_1}\frac{\nu_2^2}{\mu_2^2}-\frac{\nu_2}{\mu_2}\frac{\nu_3^2}{\mu_3^2}-\frac{\nu_3}{\mu_3}\frac{\nu_1^2}{\mu_1^2}\right)\neq 0$，所以这个母线族中任意三条母线不平行于同一平面。

同理可证明另一族直线$\begin{cases}\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu\left(1-\frac{y}{b}\right)=0\\ \mu\left(1+\frac{y}{b}\right)+\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0\end{cases}$

9． 证明：单叶双曲面同族的两条直母线异面。

证明：单叶双曲面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$的两个母线族为：

$$\mathrm{I}=\begin{cases}\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu\left(1+\frac{y}{b}\right)=0\\ \mu\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0\end{cases}，\mathrm{II}=\begin{cases}\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu\left(1-\frac{y}{b}\right)=0\\ \mu\left(1+\frac{y}{b}\right)+\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0\end{cases}$$

首先考虑I族中的母线，该族母线的方向向量为：$\left(a\left(1-\frac{\nu^2}{\mu^2}\right),2b\frac{\nu}{\mu},-c\left(1+\frac{\nu^2}{\mu^2}\right)\right)$，任取两条同

族的母线，它们的方向向量为 $n_i\left(a\left(1-\frac{\nu_i^{\ 2}}{\mu_i^{\ 2}}\right),2b\frac{\nu_i}{\mu_i},-c\left(1+\frac{\nu_i^{\ 2}}{\mu_i^{\ 2}}\right)\right),i=1,2$，令 $z=0$ 可求得两条直线上的两点 $M_i(x_i,y_i)=\left(a\frac{-2\frac{\nu_i}{\mu_i}}{1+\frac{\nu_i^{\ 2}}{\mu_i^{\ 2}}},b\frac{1-\frac{\nu_i^{\ 2}}{\mu_i^{\ 2}}}{1+\frac{\nu_i^{\ 2}}{\mu_i^{\ 2}}}\right),i=1,2$，计算

$$n_1\times n_2\cdot(M_1-M_2)=2abc\left(\frac{\nu_1}{\mu_1}-\frac{\nu_2}{\mu_2}\right)^2\neq 0$$

那么 I 族中的任意两条母线异面，同样可讨论 II 族中的母线。

10． 证明：单叶双曲面异族的两条直母线共面。

证明：单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 的两个母线族为：

$$\begin{cases}\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu\left(1+\frac{y}{b}\right)=0\\ \mu\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0\end{cases},\quad \begin{cases}\mu\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu\left(1-\frac{y}{b}\right)=0\\ \mu\left(1+\frac{y}{b}\right)+\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0\end{cases}$$

在两组直线族中任取两条直线：

$$\begin{cases}\mu_1\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu_1\left(1+\frac{y}{b}\right)=0\\ \mu_1\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0\end{cases},\quad \begin{cases}\mu_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu_2\left(1-\frac{y}{b}\right)=0\\ \mu_2\left(1+\frac{y}{b}\right)+\nu_2\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0\end{cases}$$

只要证明以上四个平面交于一点即可。

考虑 $\begin{cases}\mu_1\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu_1\left(1+\frac{y}{b}\right)=0\\ \mu_1\left(1-\frac{y}{b}\right)+\nu_1\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0\\ \mu_2\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)+\nu_2\left(1-\frac{y}{b}\right)=0\end{cases}$，解得：$\begin{cases}\frac{x}{a}=\frac{-\mu_1^{\ 2}-\nu_1^{\ 2}}{2\nu_1\mu_1}+\frac{\mu_1^{\ 2}-\nu_1^{\ 2}}{2\nu_1\mu_1}\frac{\nu_1\mu_1-\nu_2\mu_2}{\mu_1\nu_2+\nu_1\mu_2}\\ \frac{y}{b}=\frac{\nu_1\mu_1-\nu_2\mu_2}{\mu_1\nu_2+\nu_1\mu_2}\\ \frac{z}{c}=\frac{\mu_1^{\ 2}-\nu_1^{\ 2}-\left(\mu_1^{\ 2}+\nu_1^{\ 2}\right)\frac{\nu_1\mu_1-\nu_2\mu_2}{\mu_1\nu_2+\nu_1\mu_2}}{2\nu_1\mu_1}\end{cases}$

代入 $\mu_2\left(1+\frac{y}{b}\right)+\nu_2\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=0$ 化简可得等式成立，那么两组直线族中任取两条直线交于一点，则命题得证。

11． 求马鞍面的正交直母线的交点轨迹。

解： 设马鞍面方程为：$\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=2z$，由第六题可知马鞍面同族直母线异面，由第七题可知异族两直母线必相交，所以正交的直母线为异族的。

要求两族直线的交点那么联立两族直线可得：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)+2\lambda_2=0 & (1)\\ z+\lambda_2\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=0 & (2)\\ \left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}+\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)+2\lambda_1=0 & (3)\\ z+\lambda_1\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}}-\dfrac{y}{\sqrt{q}}\right)=0 & (4)\end{cases}$$

那么可解得：$z=2\lambda_1\lambda_2$，$\dfrac{x}{\sqrt{p}}=-\lambda_1-\lambda_2$，$\dfrac{y}{\sqrt{q}}=\lambda_2-\lambda_1$......(5)

由两族直线的方程可解得它们的方向向量分别为：$v_1:\left(\sqrt{p},-\sqrt{q},-2\lambda_1\right)$，$v_2:\left(\sqrt{p},\sqrt{q},-2\lambda_2\right)$，由它们正交可得：

$$\left(\sqrt{p},-\sqrt{q},-2\lambda_1\right)\cdot\left(\sqrt{p},\sqrt{q},-2\lambda_2\right)=0$$

即 $p-q+4\lambda_1\lambda_2=0$.

所以把（5）消去中的参数消去可得马鞍面的正交直母线的交点轨迹为：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{p}-\dfrac{y^2}{q}=q-p\\ z=\dfrac{q-p}{2}\end{cases}$$

12． 给定单叶双曲面 S：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\qquad(a,b,c>0)$$

求经过 S 上一点 $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$，沿方向 (X,Y,Z) 的直线是 S 的直母线的条件；由此证明：经过 S 上每一点恰有两条直母线。

证明： 过点 $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$，方向为 (X,Y,Z) 的直线为：

$$\begin{cases} x = x_0 + Xt \\ y = y_0 + Yt \\ z = z_0 + Zt \end{cases}$$

要使得它为 S 的直母线，那么它要与 S 有无穷多个交点，把它和 S 方程联立可解得：

$$\frac{(x_0 + Xt)^2}{a^2} + \frac{(y_0 + Yt)^2}{b^2} - \frac{(z_0 + Zt)^2}{c^2} = 1$$

考虑到 $M_0(x_{0,}y_0, z_0)$ 在 S 上,所以化简可得：

$$\left(\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} - \frac{Zz_0}{c^2}\right)t = 0$$

要使得直线在 S 上，那么上面关于 t 的方程要有无数多个解，所以必须以下条件成立：

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = \frac{Z^2}{c^2}, \qquad \frac{Xx_0}{a^2} + \frac{Yy_0}{b^2} = \frac{Zz_0}{c^2}$$

要求过 $M_0(x_{0,}y_0, z_0)$ 的母线，解以上关于 X, Y, Z 的方程，因为 $Z \neq 0$ ，那么可令 $Z = c$ ，解

得：$\dfrac{Y}{b} = \dfrac{2\dfrac{z_0 y_0}{cb} \pm \dfrac{x_0}{a}}{2\left(\dfrac{y_0}{b}\right)^2 + 2\left(\dfrac{x_0}{a}\right)^2}$ ，$\dfrac{X}{a} = \dfrac{\dfrac{z_0}{c} - \dfrac{Yy_0}{b^2}}{\dfrac{x_0}{a}}$ ，

所以过 $M_0(x_{0,}y_0, z_0)$ 恰有两个方向的直线是 S 的母线。

13． 证明：单叶双曲面的每条直母线都与腰椭圆相交。

证明： 考虑单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的直线族

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) + \nu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) = 0 \\ \mu\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) + \nu\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = 0 \end{cases}$$

中的任意一条直线 l，它与 xOy 平面的交点为：

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) + \nu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) = 0 \\ \mu\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) + \nu\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

解得：交点坐标为：$\left(\dfrac{-2\mu\nu a}{\mu^2+\nu^2},\dfrac{(\mu^2-\nu^2)b}{\mu^2+\nu^2},0\right)$，

求$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$与$xOy$的交线为椭圆：$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$

任取不全为零的μ,ν，$\left(\dfrac{-2\mu\nu a}{\mu^2+\nu^2},\dfrac{(\mu^2-\nu^2)b}{\mu^2+\nu^2},0\right)$都满足腰椭圆方程$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$,那么由$\mu,\nu$的任意性可得该直线族的任意一条直线都与腰椭圆相交。同样可证明单叶双曲面的另一族直线。所以命题成立。

14．设l_1,l_2是异面直线，它们都与xOy面相交，证明：与l_1,l_2都共面并且与xOy面平行的直线所组成的曲面是马鞍面。

证明： 设l_i与xOy平面的交点为$M_i,i=1,2$，不妨设原点O是线段M_1M_2的中点，于是，可设$M_1(a,0,0),M_2(a,0,0)$,设l_i的方向向量为$v_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i),i=1,2$,设直线$l$与$l_i$共面且与$xOy$平行,则$l$的方向向量为$v(\alpha,\beta,0)$，在$l$上任取一点$M_0(x,y,z)$，因为$l$与$l_i$共面，所以$\overrightarrow{M_0M_i}\cdot v_i\times v=0,i=1,2$,即$-(x-a)\gamma_i\beta+y\alpha\gamma_i+z(\alpha_i\beta-\alpha\beta_i)=0,i=1,2$,消去$\alpha,\beta$可得关于$x,y,z$的方程$\dfrac{z\alpha_1-(x-a)\gamma_1}{y\gamma_1-z\beta_1}=\dfrac{z\alpha_2-(x-a)\gamma_2}{y\gamma_2-z\beta_2}$，因为$l_1,l_2$异面，所以$v_i(\alpha_i,\beta_i,\gamma_i),i=1,2$不成比例，那么得到的是$x,y,z$的二次方程，这个曲面是由直线生成，那么它肯定是直纹面，可以验证它不是柱面，锥面，单叶双曲面，那么它一定是马鞍面。

15．设三条直线l_1,l_2,l_3两两异面，且平行于同一平面，证明：与l_1,l_2,l_3都相交的直线所组成的曲面是马鞍面。

证明： 建立直角坐标系，使得l_1为x轴，过l_1与l_2平行的平面为xOy平面，l_1与l_2的公垂线为z轴，那么l_1的方程为$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{0}$......(1)

设l_2过点$M_2(0,0,d)$方向向量为$v_2(a,1,0)$，那么l_2的方程为$\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-d}{0}$......(2)

设l_3的方向向量为$v_3(b,1,0)$，设l_3与xOy平面的交点为$M_3(c,0,h)$，那么l_3的方程为

$$\frac{x-c}{b}=\frac{y}{1}=\frac{z-h}{0}\ldots\ldots(3)$$

设直线l与l_1交于点$A_1(\lambda,0,0)$，与l_2交于点$A_2(u_1,u_2,d)$，与l_3交于点$A_3(w_1,w_2,h)$，则l的方向向量为$(u_1-\lambda,u_2,d)$，也为$(w_1-\lambda,w_2,h)$，从而

$$k(u_1-\lambda,u_2,d)=(w_1-\lambda,w_2,d)\ldots\ldots(4)$$

那么$k=\dfrac{h}{d}$，由(1)(2)(3)(4)可解得$u_1=\dfrac{a(d-h)}{h(b-a)}\lambda-\dfrac{cda}{h(b-a)}$，$u_2=\dfrac{d-h}{h(b-a)}\lambda-\dfrac{cd}{h(b-a)}$，

那么l的方程为$\dfrac{x-\lambda}{u_1-\lambda}=\dfrac{y}{u_2}=\dfrac{z}{d}$，消去$\lambda$可得$l$上的点满足的方程为

$$dxz-\alpha_1 y=\alpha_2 yz-\alpha_3 z^2$$

其中，$\alpha_1=\dfrac{d^2h(b-a)}{d-h-cd},\alpha_2=\dfrac{ad^2-dbh}{d-h-cd},\alpha_3=\dfrac{cda}{h(b-a)}$，这个曲面是由直线生成，那么它肯定是直纹面，可以验证它不是柱面，锥面，单叶双曲面，那么它一定是马鞍面。

习题 4.1

1．对平行四边形 $ABCD$ 取仿射坐标系 I 为 $\left[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]$，$\mathrm{II}$ 为 $\left[C;\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right]$，求 I 到 II 的点的坐标变换公式，并且求 $A,D,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DB}$ 的 I 坐标和 II 坐标。

解： 设平行四边形 $ABCD$ 的边长为 $AB=a,BC=b$，那么在坐标系 I 中，A,B,C,D 点的坐标分别为：$(0,0),(a,0),(a,b),(0,b)$，向量 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$ 的坐标分别为：$(a,b),(-a,b)$，那么 I 到 II 的点的坐标变换公式为：$\begin{cases}x=ax'-ay'+a\\ y=bx'+by'+b\end{cases}$，向量变换公式为：$\begin{cases}x=ax'-ay'\\ y=bx'+by'\end{cases}$。

那么 $A,D,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DB}$ 的 I 坐标分别为：$(0,0),(0,b),(a,0),(0,b),(a,-b),$

II 坐标为：$(-1,0),\left(\dfrac{b}{2}-1,\dfrac{b}{2}\right),\left(\dfrac{a}{2},-\dfrac{a}{2}\right),\left(\dfrac{b}{2},\dfrac{b}{2}\right),\left(\dfrac{a+b}{2},\dfrac{b-a}{2}\right),$

2．设 $ABCDEF$ 为正六边形，取仿射坐标系 I 为 $\left[A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AF}\right]$，$\mathrm{II}$ 为 $\left[D;\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DF}\right]$，求 I 到 II 的点的坐标变换公式和向量变换公式，求 $\overrightarrow{CF},\overrightarrow{BE}$ 的 I 坐标和 II 坐标。

解： 设 $ABCDEF$ 边长为 1，那么 D,B,F 在 I 中的坐标为 $(2,2),(1,0),(0,1)$，那么 $\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DF}$ 在 I 中的坐标为 $(-1,-2),(-2,-1)$，那么那么 I 到 II 的点的坐标变换公式为：$\begin{cases}x=-x'-2y'+2\\ y=-2x'-y'+2\end{cases}$，向量变换公式为：$\begin{cases}x=-x'-2y'\\ y=-2x'-y'\end{cases}$，

由于 C,E 的 I 坐标分别为：$(2,1),(1,2)$，那么 $\overrightarrow{CF},\overrightarrow{BE}$ 的 I 坐标分别为：$(-2,0),(0,2)$；II 坐标为：$\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right),\left(-\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3}\right)$

3．设仿射坐标系 I 到 II 的点的坐标变换公式为：

$$\begin{cases}x=-y'+3\\ y=x'-2\end{cases}$$

（1）求 II 的原点的 I 坐标，II 的基向量 e_1',e_2' 的 I 坐标；求 I 的原点的 II 坐标，I 的基向量 e_1',e_2' 的 II 坐标；

（2）求直线$l_1: 2x-y+1=0$在坐标系II中的方程；

（3）求直线$l_2: 3x'+2y'-5=0$在坐标系I中的方程。

解： 仿射坐标系I到II的点的坐标变换公式为：$\begin{cases} x=0x'-y'+3 \\ y=x'+0y'-2 \end{cases}$，仿射坐标系$\mathrm{II}$到$\mathrm{I}$的点的坐标变换公式为：$\begin{cases} x'=0x+y+2 \\ y'=-x+0y+3 \end{cases}$，

（1）II的原点的I坐标为$(3,-2)$，II的基向量e_1', e_2'的I坐标为$(0,1),(-1,0)$；求I的原点的II坐标为$(2,3)$，I的基向量e_1', e_2'的II坐标为$(0,-1),(1,0)$；

（2）直线$l_1: 2x-y+1=0$在坐标系II中的方程为：$2(-y'+3)-(x'-2)+1=0$，化简为$-x'-2y'+9=0$

（3）求直线$l_2: 3x'+2y'-5=0$在坐标系I中的方程为：$3(y+2)+2(-x+3)-5=0$化简为$-2x+3y+7=0$

习题 4.3

1．在直角坐标系Oxy中，以直线$l: 4x-3y+12=0$为新坐标系的x'轴，取通过点$A(1,-3)$且垂直于l的直线为y'轴，写出点的坐标变换公式；并求直线$l_1: 3x-2y+5=0$在新坐标系中的方程。

解： 过点$A(1,-3)$且垂直于l的直线为：$3x+4y+9=0$，它与l的交点为$(-3,0)$，为新坐标系中的原点，$l: 4x-3y+12=0$与原坐标系中的x轴的夹角满足$\tan\theta=\dfrac{4}{3}$，那么从旧坐标系到新坐标系的点的坐标变换公式为：$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

$l_1: 3x-2y+5=0$在新坐标系中的方程为：$x'-18y'+20=0$

2．设x'轴和y'轴在原直角坐标系中的方程分别为：

$$12x-5y-2=0, 5x+12y-29=0$$

写出点的坐标变换公式；并且求点 $A(-2,0)$ 的新坐标。设某椭圆的长轴和短轴分别在 x' 轴和 y' 轴上，其长，短半轴的长分别为 $3,2$ ，求这个椭圆在原坐标系中的方程。

解： $12x-5y-2=0, 5x+12y-29=0$ 的交点为：$(1,2)$，x' 和 x 的夹角满足 $\tan\theta=\frac{12}{5}$，那么从旧坐标系到新坐标系的点的坐标变换公式为：$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{13} & -\frac{12}{13}\\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，所以 $\begin{pmatrix}\frac{5}{13} & \frac{12}{13}\\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$,那么点 $A(-2,0)$ 的新坐标为 $(-3,2)$,长轴和短轴分别在 x' 轴和 y' 轴上，其长，短半轴的长分别为 $3,2$ 的椭圆在新坐标系中的方程为：$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$，那么它在原坐标系中的方程为：$1296x^2+801y^2-1592x-2604y-600xy-2684=0$

3． 如果坐标系 I 和 II 都是右手直角坐标系，且 II 的原点 O' 的 I 坐标是 $(1,2)$，e_1 到 e_1' 的转角是 $\frac{\pi}{3}$，求 I 的原点 O 的 II 坐标以及直线 $l: x-y=1$ 在 II 中的方程。

解： 由已知条件可知从 I 到 II 的点的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

那么 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$，那么 I 的原点 O 的 II 坐标为 $\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$，

$l: x-y=1$ 在 II 中的方程为 $\left(1-\sqrt{3}\right)x'-\left(1+\sqrt{3}\right)y'-4=0$

4． 作直角坐标变换，已知点 $A(6,-5), B(1,-4)$ 的新坐标分别为 $(1,-3),(0,2)$，求点的坐标变换公式。

解： 设原坐标系到新坐标系的点的坐标变换公式为：$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$，把 A,B 两点的新旧坐标代入上面公式可得：

$$\begin{pmatrix}6\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\text{和}\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$

解得 $a=\dfrac{37}{13},b=\dfrac{-62}{13},\sin\theta=\dfrac{12}{13},\cos=\dfrac{5}{13}$，那么原坐标系到新坐标系的点的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{13} & -\frac{12}{13}\\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{37}{13}\\ \frac{-62}{13}\end{pmatrix}$$

5．在直角坐标系 Oxy 中，已知三点 $A(2,1),B(-1,2),C(1,-3)$，如果将坐标原点移到 B 点，并且坐标轴旋转角度 $\alpha=\arg\tan\dfrac{3}{4}$，求点的坐标变换公式，并且求 A,B,C 在新坐标系中的坐标。

解： 由题意可知点的坐标变换公式为：$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$，那么有：

$$\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

把 A,B,C 坐标代入上式可得它们在新坐标系中的坐标分别为：$\left(\dfrac{9}{5},-\dfrac{13}{5}\right),(0,0),\left(-\dfrac{7}{5},-\dfrac{26}{5}\right)$

6． 设新旧坐标系都是右手直角坐标系，坐标变换公式为：

（1）$\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'+5\\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'-3\end{cases}$ （2）$\begin{cases}x'=-y+3\\ y'=x-2\end{cases}$

其中 $(x,y),(x',y')$ 分别表示同一个点的旧坐标与新坐标，求新坐标系的原点的旧坐标，并且求坐标轴旋转的角 θ。

解：（1）新坐标系的原点为：$(x',y')=(0,0)$，代入变换公式可得：$(x,y)=(5,-3)$ 即为新坐标系原点的就坐标。因为 $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$，所以 $\theta=\dfrac{5\pi}{4}$。

（2）坐标变换公式可化为：$\begin{cases}x=y'+2\\ y=-x'+3\end{cases}$，新坐标系的原点为：$(x',y')=(0,0)$，代入变换公式可得:

$(x,y)=(2,3)$即为新坐标系原点的就坐标。因为$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，所以$\theta=\dfrac{3\pi}{2}$。

7． 已知一曲线在给定的右手直角坐标系中的方程为：

$$y=4x^2-8x+5$$

试作一直角坐标变换，使这条曲线的新方程中不含有x的一次项以及常数项，并且作图。

解： 曲线方程可化为：$y-1=4(x-1)^2$，那么可以作直角变换$\begin{cases}x=x'+1\\ y=y'+1\end{cases}$，这个变换是把原坐标系的原点移到$(1,1)$这点，并且坐标轴不动，这个曲线在新坐标系中的方程是$y'=4x'^2$它是抛物线。

8． 求分式线性函数

$$y=\frac{2x+3}{x+4}$$

的图像，并且绘图。

解： 该函数可化为$y-2=\dfrac{-5}{x+4}$，作直角变换$\begin{cases}x=x'-4\\ y=y'+2\end{cases}$，这个变换是把原坐标系的原点移到$(-4,2)$这点，并且坐标轴不动，那么这个函数在新坐标系中的方程是$y'=\dfrac{-5}{x'}$。它是以x',y'轴为渐近线的等轴双曲线。

9．在右手直角坐标系Oxy中，设一抛物线的对称轴是：$x-y-z=0$，顶点是$(4,2)$，焦点是$(2,0)$，求它的方程。

解： 因为顶点$(4,2)$在对称轴上，那么代入对称轴方程可得：$z=2$。可设$x-y-z=0$为新坐标系的x轴，方向指向右上方，顶点$(4,2)$为新坐标系的原点，过原点垂直于$x-y-z=0$的直线为y轴，方向指向左上方，建立右手直角坐标系。因为新坐标系的x轴与旧坐标系的x轴的夹角θ满足$\tan\theta=1$，那么从旧坐标系到新坐标系的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\ 2\end{pmatrix}$$

那么可解出$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-4\\ y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$，即$\begin{cases}x'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y-6)\\ y'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y+2)\end{cases}$ ......(1)

由于所求抛物线在新坐标系中的方程为：$y'^2=-8\sqrt{2}x'$ ......(2)

由(1)(2)可得：$x^2+y^2-2xy+12x+20y-92=0$为所求抛物线在旧坐标系中的方程。

10． 已知一条抛物线的准线的方程为$x-y+2=0$，焦点为$F(2,0)$，求这个抛物线方程。

解： 由抛物线的准线和焦点可知抛物线的顶点为$(1,1)$，那么可令$y=x$为新坐标系的x轴，$(1,1)$为新坐标系的原点，新坐标系的y轴垂直于x轴且与x轴满足右手坐标系。那么抛物线在新坐标系中的方程为：$x'^2=-4\sqrt{2}y'$，从坐标系I到新坐标系II的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

即$\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$，化简代入$x'^2=-4\sqrt{2}y'$可得原坐标系中的抛物线方程为：

$$x^2+y^2+2xy-12x+4y+4=0$$

11． 在右手直角坐标系Oxy中，已知一个椭圆的长轴和短轴分别在直线$l_1:x+y=0$和$l_2:x-y+1=0$上，并且这个椭圆的半轴长为$a=2,b=1$，求这个椭圆的方程。

解： 因为直线$l_1:x+y=0$和$l_2:x-y+1=0$的交点可求得为$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，那么设$l_2:x-y+1=0$为新坐标系的$x$轴，方向指向右上方，$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$为新坐标系的原点，$l_1:x+y=0$为$y$轴，方向指向左上方，建立右手直角坐标系。因为新坐标系的x轴与旧坐标系的x轴的夹角θ满足$\tan\theta=1$，那么从旧坐标系到新坐标系的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

那么可解出$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+\frac{1}{2} \\ y-\frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$，即$\begin{cases} x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y-1) \end{cases}$......(1)

由于所求抛物线在新坐标系中的方程为：$\frac{y'^2}{4}+\frac{x'^2}{1}=1$......(2)

由(1)(2)可得：$5x^2+5y^2+6xy+2x-2y-7=0$为所求椭圆在旧坐标系中的方程。

12． 在右手直角坐标系Oxy中，求经过点$A(-2,-1),B(0,-2)$，并且长轴和短轴分别在直线$l_1: x-y+1=0$和$l_2: x+y+1=0$上的椭圆方程。

解： 因为直线$l_1: x-y+1=0$和$l_2: x+y+1=0$的交点可求得为$(-1,0)$，那么设$l_1: x-y+1=0$为新坐标系的x轴，方向指向右上方，$(-1,0)$为新坐标系的原点，$l_2: x+y+1=0$为y轴，方向指向左上方，建立右手直角坐标系。因为新坐标系的x轴与旧坐标系的x轴的夹角θ满足$\tan\theta=1$，那么从旧坐标系到新坐标系的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

那么可解出$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$，即$\begin{cases} x'=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+1) \\ y'=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y-1) \end{cases}$......(1)

由于所求抛物线在新坐标系中的方程为：$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$......(2)

由(1)(2)可得：$\frac{(x+y+1)^2}{a^2}+\frac{(-x+y-1)^2}{b^2}=2$，由于椭圆过点$A(-2,-1),B(0,-2)$，那么可解得：$a^2=2,b^2=6$，那么所求椭圆在旧坐标系中的方程为：

$$x^2+y^2+xy+2x+y-2=0.$$

13． 在右手直角坐标系Ⅰ中，设两直线l_i：

$$A_i x + B_i y + C_i = 0, i = 1,2$$

互相垂直，取l_1, l_2为右手直角坐标系II的$O'y', O'x'$轴，试求II到I的点的坐标变换公式。

解： 设点M的I坐标为(x, y)，II坐标为(x', y')，因为l_1, l_2为右手直角坐标系II的$O'y', O'x'$轴，那么在坐标系I中，点M到l_1的距离就等于M在II中的y'坐标，若$A_1 x + B_1 y + C_1 > 0$，那么M在l_1的右侧M在II中的y'坐标应取负值，反之应取正值；点M到l_2的距离就等于M在II中的x'坐标，若$A_2 x + B_2 y + C_2 > 0$，那么M在l_2的右侧M在II中的x'坐标应取正值，反之应取负值，所以有：

$$\begin{cases} x' = \mp \dfrac{1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\left(A_1 x + B_1 y + C_1\right) \\ y' = \pm \dfrac{1}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\left(A_2 x + B_2 y + C_2\right) \end{cases}$$

为II到I的点的坐标变换公式。

习题 4.4

1． 设$OABC$为四面体，L, M, N依次是ΔABC的三边AB, BC, CA的中点，取

$$\mathrm{I}\left[O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right], \mathrm{II}\left[O; \overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}\right]$$

（1）求I到II的点的坐标变换公式和向量的坐标变换公式，再求II到I的点的坐标变换公式和向量的坐标变换公式；

（2）求$A, B, C, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$的$\mathrm{II}$坐标。

解： （1）在I中，点A, B, C的坐标为：$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$，那么点$L, M, N$在$\mathrm{I}$中的坐标为$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$，两个坐标系的原点相同，那么$\mathrm{I}$到$\mathrm{II}$的点的坐标变换公式和向量的坐标变换公式一样，都为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

II到I的点的坐标变换公式和向量的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

即：$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

（2）因为点 A,B,C 的 I 坐标为：$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$，由 II 到 I 的点的坐标变换公式可得点 A,B,C 的 II 坐标为：$(1,-1,1),(1,1,-1),(-1,1,1)$，那么 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 的 II 坐标为：$(0,2,-2),(-2,2,0)$

2．设 $\mathrm{I}[O;e_1,e_2,e_3],\mathrm{II}[O';e_1',e_2',e_3']$ 都是右手直角坐标系，已知 O' 的坐标是 $(2,1,2)$，e_1' 与 $\overrightarrow{O'O}$ 同向，$O'y'$ 轴与 Oy 轴交于点 $A(0,9,0)$，e_2' 与 $\overrightarrow{O'A}$ 同向，求 I 到 II 的点的坐标变换公式。

解： 由题意可得在 I 中，O' 的坐标是 $(2,1,2)$，e_1' 与 $\overrightarrow{O'O}$ 同向，那么 e_1' 与向量 $(-2,-1,-2)$ 重合，所以 e_1' 的 I 坐标为 $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)$，$e_2'$ 与 $\overrightarrow{O'A}$ 同向，那么 e_2' 与向量 $(-2,8,-2)$ 重合，那么 e_2' I 坐标为 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{6},\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$，$e_3'$ 的方向与 e_1' e_2' 垂直，那么计算 $e_1'\times e_1'=(9,0,-9)$，那么 e_3' I 坐标为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，所以 I 到 II 的点的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3． 在右手直角坐标系 $\mathrm{I}[O;e_1,e_2,e_3]$ 中，已给三个互相垂直的平面

$$\pi_1: x+y+z-1=0, \pi_2: x-z+1=0, \pi_3: x-2y+z+2=0,$$

确定新的坐标系 $\mathrm{II}[O';e_1',e_2',e_3']$ 使得 $\pi_1\pi_2\pi_3$ 分别为 $y'O'z',z'O'x',x'O'y'$ 坐标面，且 O 在新坐标

系的第一挂限内，求I到II的点的坐标变换公式。

解： 要使得$\pi_1\pi_2\pi_3$分别为$y'O'z', z'O'x', x'O'y'$坐标面，那么只要

$$x' = k_1(x+y+z-1) = 0, y' = k_2(x-z+1) = 0, z' = k_3(x-2y+z+2) = 0,$$

那么$k_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, k_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, k_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$，那么从$\mathrm{I}$到$\mathrm{II}$的点的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \mp\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \mp\frac{1}{\sqrt{2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mp\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mp\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

要使得O在新坐标系的第一挂限内，那么就要使得O'在原坐标系的第三挂限内，即当$x' = y' = z' = 0$

时， $x<0, y<0, z<0$，那么从I到II的点的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

4．在右手直角坐标系$Oxyz$中，曲面S的方程为

（1） $(2x+y+z)^2 - (x-y-z)^2 = y-z$

（2） $9x^2 - 25y^2 + 16z^2 - 24xz + 80x - 60z = 0$

试判断S是什么曲面？

解：（1）作直角坐标变换：

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{6}}(2x+y+z) \\ y' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x-y-z) \\ z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y-z) \end{cases}$$

那么曲面S变为：$6x'^2 - 3y'^2 = \sqrt{2}z'$，则它是马鞍面。

（2）为了消去交叉项，我们可以先作直角变换：

$$\begin{cases} x=\frac{1}{5}(4x'-3z') \\ y=y' \\ z=\frac{1}{5}(3x'+4z') \end{cases}$$

那么原方程变为：$-25y^2+25z^2+28x-96z=0$

配方可看出该曲面是马鞍面。

5．画出下列曲面的简图，这些曲面在右手直角坐标系 $Oxyz$ 中的方程分别为：

（1） $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z=1$ **；（2）** $x^2+2xy+y^2+z^2=1$ **；（3）** $z=xy$ **；（4）** $z=xy-x-y-2$ **.**

6．设 $\mathrm{I}[O;e_1,e_2],\mathrm{II}[O';e_1',e_2']$ **都是夹角为** ω **的同定向的斜角坐标系（即** $|e_i|=|e_i'|=1,i=1,2$ **；** $<e_1,e_2>=<e_1',e_2'>=\omega$ **），且** e **到** e_1' **的转角为** $\frac{\pi}{2}$ **，求** I **到** II **的点的坐标变换公式。**

解： 由于 I 和 II 的原点相同，e_1' e_2' 在 I 中的坐标分别为 $\left(-\cot\omega,\frac{1}{\sin\omega}\right),\left(-\frac{1}{\sin\omega},\cot\omega\right)$，那么 I 到 II 的点的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\cot\omega & -\frac{1}{\sin\omega} \\ \frac{1}{\sin\omega} & \cot\omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

7．已知 $\mathbf{e}\perp\mathbf{r},|\mathbf{e}|=1$ **，将** $\mathbf{r}$ **绕** $\mathbf{e}$ **右旋角度** θ **得** $\mathbf{r}_1$ **，试用** $\mathbf{e},\mathbf{r},\theta$ **表示** $\mathbf{r}_1$ **。**

解： $\mathbf{r}_1$ 在 $\mathbf{r},\mathbf{e}\times\mathbf{r}$ 所确定的平面上，$\mathbf{r},\mathbf{e}\times\mathbf{r}$ 垂直，$\mathbf{r}_1$ 和 $\mathbf{r}$ 的角为 θ，那么

$$\mathbf{r_1}=(\cos\theta)\mathbf{r}+(\sin\theta)\mathbf{e}\times\mathbf{r}$$

8．给定三点 $O,A,P(O\neq A)$ **，将** P **绕** $\overrightarrow{OA}$ **右旋角度** θ **得到** P_1 **，试用** $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP},\theta$ **表示** $\overrightarrow{OP_1}$ **。**

解： 过 P 作平面 π 与 OA 垂直，设 OA 与 π 交于点 B，于是 $\overrightarrow{BP}$ 绕 $\overrightarrow{OA}$ 右旋角度 θ 得到 $\overrightarrow{BP_1}$，那么利用上题结果可得：$\overrightarrow{OP_1}=(\cos\theta)\overrightarrow{OP}+\frac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|^2}(1-\cos\theta)\overrightarrow{OA}+\frac{\sin\theta}{\left|\overrightarrow{OA}\right|}\left|\overrightarrow{OA}\right|\times\overrightarrow{OP}$。

9． 将右手直角坐标系 $\mathrm{I}[O;e_1,e_2,e_3]$ **绕方向** $v(1,1,1)$ **右旋** $\dfrac{\pi}{3}$ **，原点不动，得坐标系** $\mathrm{II}[O;e_1',e_2',e_3']$ **，求** I **到** II **的点的坐标变换公式。**

解： 利用上题结果，那么可求得 $e_i'=\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)e_i+\dfrac{e_i\cdot\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|^2}\left(1-\cos\dfrac{\pi}{3}\right)\vec{v}+\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{3}}{\left|\vec{v}\right|}\left|\vec{v}\right|\times e_i, i=1,2,3$，

由于 $v(1,1,1)=e_1+e_2+e_3$，那么 $e_1'=\dfrac{2}{3}e_1+\dfrac{2}{3}e_2-\dfrac{1}{3}e_3$， $e_1'=-\dfrac{1}{3}e_1+\dfrac{2}{3}e_2+\dfrac{2}{3}e_3$，

$e_1'=\dfrac{2}{3}e_1-\dfrac{1}{3}e_2+\dfrac{2}{3}e_3$，那么 I 到 II 的点的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3}\\ \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3}\\ -\dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} & \dfrac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

10． 在直角坐标系中，若 xOy **平面上的曲面**

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$$

是椭圆（双曲线，抛物线），问二次曲面

$$z=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0$$

是什么曲面？

解： 若曲面方程表示的是在 xOy 平面上的椭圆，那么可以通过转轴和移轴把它化为标准方程：

$\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=1$，那么相应的二次曲面可化为：$\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}-1=z$，可令 $z'=z+1$，最后得

$\dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}=z'$，它是椭圆抛物面；同样当曲面方程表示的是在 xOy 平面上的双曲线和抛物线时，二次曲面表示的是双曲抛物面和抛物柱面.

11． 如果

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$$

则曲面

$$(a_1x+b_1y+c_1z)^2+(a_2x+b_2y+c_2z)^2+(a_3x+b_3y+c_3z)^2=1$$

是什么曲面？

解： 因为$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$，那么可作仿射坐标变换：$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$，那么曲面可化为：$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$，它是椭球面.

12． 证明：在直角坐标系 $Oxyz$ 中，顶点在原点的二次锥面有三条互相垂直的直母线的充要条件是

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$$

证明： 所给的二次锥面的方程可写成 $X^t AX = 0$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

作直角坐标变换 $X = TX'$，其中 T 是正交矩阵，则二次锥面在新坐标系中的方程为 $X'^t\left(T^t AT\right)X' = 0$，用 $\mathrm{Tr}\left(A\right)$ 表示矩阵 A 的主对角线上元素之和，则

$$\mathrm{Tr}\left(A\right) = \mathrm{Tr}\left(T^t AT\right) \text{......(1)}$$

充分性. 若 $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$，即 $\mathrm{Tr}\left(A\right) = 0$，作直角坐标变换 $X = TX'$，把二次锥面方程化成标准方程：

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} - \frac{z'^2}{c^2} = 0 \text{......(2)}$$

于是得 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0$，代入（2）中得

$$\frac{x'^2 - z'^2}{a^2} + \frac{y'^2 - z'^2}{b^2} = 0 \text{......(3)}$$

考虑直线 $L: \begin{cases} x' = lt \\ y' = mt \\ z' = nt \end{cases}$，代入（3）可得

$$t^2\left[\frac{l^2 - n^2}{a^2} + \frac{m^2 - n^2}{b^2}\right] = 0 \text{......(4)}$$

L 为二次锥面的直母线当且仅当 t^2 的系数为零，即

$$\frac{l^2-n^2}{a^2}+\frac{m^2-n^2}{b^2}=0 \text{......(5)}$$

那么 $l=m=n=1$ 时，(5) 成立，因此过原点且方向为 $(1,1,1)$ 的直线 L_1 是二次锥面 S 的一条直母线，

下面求与 L_1 垂直的另一条直母线 L_2，设求直母线的方向向量为 (l',m',n')，那么由两个母线 L_1 L_2 垂直可得 $l'+m'+n'=0$，那么 $n'^2=l'^2+m'^2+2l'm'$，代入 (5) 可得 $\frac{-m'^2-2m'l'}{a^2}+\frac{-l'^2-2m'l'}{b^2}=0$，令 $m'=\frac{1}{a^2+b^2}$，可解得 l' 满足二次方程 $a^2l'^2+2l'+\frac{b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=0$，可取 l' 的一个解：$l'=\frac{1}{a^2}\left(-1+\sqrt{1-\frac{a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}}\right)$，那么方向向量为 $(l',m',n')=\left(\alpha,\frac{1}{a^2+b^2},-\alpha-\frac{1}{a^2+b^2}\right)$，其中 $\alpha=\frac{1}{a^2}\left(-1+\sqrt{1-\frac{a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}}\right)$ 且过原点的直线为所求直母线，

下面求与 L_1 L_2 垂直的另一条直母线 L_3，把 L_1 L_2 做外积，可得一个向量 $\left(-\alpha-\frac{2}{a^2+b^2},2\alpha+\frac{1}{a^2+b^2},\frac{1}{a^2+b^2}-\alpha\right)$，其中 $\alpha=\frac{1}{a^2}\left(-1+\sqrt{1-\frac{a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}}\right)$，下证明该向量即为所求向量，即该向量满足 (5)，把该向量代入 (5)，化简可得 α 的方程：$a^2\alpha^2+2\alpha+\frac{b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}=0$，那么 $\alpha=\frac{1}{a^2}\left(-1+\sqrt{1-\frac{a^2b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}}\right)$ 满足方程，即以该向量我方向向量，过原点的直线是 S 的直母线，

那么我们找到了三条相互垂直的母线，充分性得证。

必要性. 以二次锥面 S 的三条互相垂直的直母线为新坐标系的 x' 轴 y' 轴 z' 轴，设这个直角坐标变换公式为 $X=TX'$，则新坐标系中方程为 $X'^t\left(T^tAT\right)X'=0$。设 $T^tAT=\left(b_{ij}\right)$，因为新坐标为 $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ 的三个点都在 S 上，所以得出 $b_{11}=b_{22}=b_{33}=0$，从而

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=\mathrm{Tr}(A)=\mathrm{Tr}\left(T^tAT\right)=0$$

13． 设 l_1 和 l_2 是两条不垂直的异面直线，分别通过 l_1 和 l_2 作两个互相垂直的平面，证明交线的轨迹是单叶双曲面。

证明： 设 l_1 为坐标系的 x 轴，过 l_1 且平行于 l_2 的平面为 xOy 平面，那么可知 l_1 过原点且方向向量为

$(1,0,0)$，可设设 l_2 过点 $M(0,0,a)$ 方向向量为 $(b,c,0)$，因为 l_1 l_2 不垂直，那么 $ab \neq 0$

若点 $M_0(x,y,z)$ 满足题设条件，那么 M_0 与 l_1 决定的平面 π_1 与 M_0 与 l_2 决定的平面 π_2 垂直，也就是说这两个平面的法向量的内积为零，π_1 的法向量为 $\overrightarrow{OM_0} \times (1,0,0) = (0,-z,y)$，$\pi_2$ 的法向量为 $\overrightarrow{MM_0} \times (b,c,0) = (c(z-a),-b(z-a),by-cx)$，两者内积为零可知 $M_0(x,y,z)$ 满足方程：

$bz^2 - abz + by^2 - cxy = 0$，即 $b\left(z-\dfrac{a}{2}\right)^2 + b\left(y-\dfrac{c}{2b}x\right)^2 - \dfrac{c^2}{4b}x^2 = \dfrac{ba^2}{2}$，做仿射坐标变换

$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - \dfrac{c}{2b}x \\ z' = z - \dfrac{a}{2} \end{cases}$，那么上式化为 $bz'^2 + by'^2 - \dfrac{c^2}{4b}x'^2 = \dfrac{ba^2}{2}$，那么它为单叶双曲面。

14．设 $\mathrm{I}[O;e_1,e_2,e_3]$，$\mathrm{II}[O';e_1',e_2',e_3']$ 是有相同的原点的右手直角坐标系，则 I 到 II 的坐标变换可分三个阶段来完成：

(i) $\begin{cases} x = x''\cos\psi - y''\sin\psi \\ y = x''\sin\psi + y''\cos\psi \\ z = z'' \end{cases}$ **(ii)** $\begin{cases} x'' = x''' \\ y'' = y'''\cos\theta - z'''\sin\theta \\ z'' = y'''\sin\theta + z'''\cos\theta \end{cases}$ **(iii)** $\begin{cases} x''' = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y''' = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ z''' = \mathrm{z}' \end{cases}$

其中角 ψ,θ,φ 称为欧拉角，它们完全确定了 I 到 II 的坐标变换，试指出这三个阶段的坐标变换是这么作的？角 ψ,θ,φ 各是哪个角？试写出用 ψ,θ,φ 表示的 I 到 II 的点的坐标变换公式。

解： 首先，(i) 表示的变换是坐标系 I 的 z 轴不动，x,y 轴绕 z 轴右旋角度 ψ，得到坐标系 I'，

(ii) 表示的是坐标系 I' 的 x 轴不动，y,z 轴绕 x 轴右旋角度 θ，得到坐标系 I''，

(iii) 表示的变换是坐标系 I'' 的 z 轴不动，x,y 轴绕 z 轴右旋角度 φ，得到坐标系 II。

令

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \cos\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi\sin\varphi & \sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi & -\sin\varphi\sin\psi + \cos\theta\cos\psi\cos\varphi & \cos\varphi\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta\cos\psi & \cos\theta \end{pmatrix} = A$$

由 (i)(ii)(iii) 公式可得 II 到 I 的点的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

由 A 的每一行元素的平方和等于 1，每两行对应元素的乘积之和等于零，那么 A 为正交矩阵，

那么用 ψ, θ, φ 表示的 I 到 II 的点的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

习题 5.1

1. 通过直角坐标变换确定下列二次方程表示的曲线的类型，形状和位置，并且画图。

（1）$11x^2+6xy+3y^2-12x-12y-12=0$；

（2）$5x^2+12xy-22x-12y-19=0$；

（3）$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0$；

（4）$3x^2+4xy+2y^2+8x+4y+6=0$；

（5）$x^2+xy-2y^2-11x-y+28=0$；

（6）$9x^2-8xy+24y^2-32x-16y+138=0$；

（7）$6x^2+12xy+y^2-36x-6y=0$；

（8）$4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0$。

解：（1）计算 $ctg2\theta=\dfrac{11-3}{6}=\dfrac{4}{3}=\dfrac{1-tg^2\theta}{2tg\theta}$ ，得 $tg\theta=\dfrac{1}{3},-3$ ，取 $tg\theta=\dfrac{1}{3}$ ，θ 为锐角，则

$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}},\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ ，

所以 $a_{11}'=a_{11}+a_{12}tg\theta=12,a_{22}'=a_{22}-a_{12}tg\theta=2$ ，

$\begin{pmatrix}a_1'\\a_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{\sqrt{10}}&\dfrac{1}{\sqrt{10}}\\\dfrac{-1}{\sqrt{10}}&\dfrac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{-24}{\sqrt{10}}\\\dfrac{-12}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}$ ，$a_0'=a_0=-12$ ，

做转轴 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{\sqrt{10}}&\dfrac{-1}{\sqrt{10}}\\\dfrac{1}{\sqrt{10}}&\dfrac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ 后，得 $6x'^2+y'^2-\dfrac{24}{\sqrt{10}}x'-\dfrac{12}{\sqrt{10}}y'-6=0$ ，这个是椭圆型曲线。配方可得 $6\left(x'-\dfrac{2}{\sqrt{10}}\right)^2+\left(y'-\dfrac{6}{\sqrt{10}}\right)^2-12=0$ ，

做移轴 $x^*=x'-\dfrac{2}{\sqrt{10}},y^*=y'-\dfrac{6}{\sqrt{10}}$ ，得到新方程为 $6x^{*2}+y^{*2}-12=0$ ，这是个椭圆，总的坐

标变换公式为：$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{-1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* + \frac{2}{\sqrt{10}} \\ y^* + \frac{6}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

（2）计算 $ctg2\theta = \frac{5}{12} = \frac{1-tg^2\theta}{2tg\theta}$，得 $tg\theta = \frac{2}{3}, \frac{-3}{2}$，取 $tg\theta = \frac{2}{3}$，θ 为锐角，则

$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{13}}, \cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$，

所以 $a'_{11} = a_{11} + a_{12}tg\theta = 9, a'_{22} = a_{22} - a_{12}tg\theta = -4$，

$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-45}{\sqrt{13}} \\ \frac{4}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$，$a'_0 = a_0 = -19$，

做转轴 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 后，得 $9x'^2 - 4y'^2 - \frac{90}{\sqrt{13}}x' + \frac{8}{\sqrt{13}}y' - 19 = 0$，这个是双曲

型曲线。配方可得 $9\left(x' - \frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2 - 4\left(y' - \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 - 36 = 0$，

做移轴 $x^* = x' - \frac{5}{\sqrt{13}}, y^* = y' - \frac{1}{\sqrt{13}}$，得到新方程为 $9x^{*2} - 4y^{*2} - 36 = 0$，这是个双曲线，总

的坐标变换公式为：$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* + \frac{5}{\sqrt{13}} \\ y^* + \frac{1}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

（3）计算 $ctg2\theta = 0$，取 $\theta = \frac{\pi}{4}, tg\theta = 1$， θ 为锐角，则 $\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $a'_{11} = a_{11} + a_{12}tg\theta = 0, a'_{22} = a_{22} - a_{12}tg\theta = 2$，

$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$，$a'_0 = a_0 = 25$，

做转轴$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$后，得$2y'^2-8\sqrt{2}x'+2\sqrt{2}y'+25=0$，这个是抛物型曲线。

配方可得$2\left(y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-8\sqrt{2}x'+24=0$，

做移轴$x^*=x'-\frac{3}{\sqrt{2}}, y^*=y'+\frac{\sqrt{2}}{2}$，得到新方程为$y^{*2}-4\sqrt{2}x^*=0$，这是个抛物线，总的坐标

变换公式为：$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^*+\frac{3}{\sqrt{2}} \\ y^*-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

（4）计算$ctg2\theta=\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}=\frac{1-tg^2\theta}{2tg\theta}$，得$tg\theta=t=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$，取$tg\theta=t=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$，

θ为锐角，则$\sin\theta=s=\frac{\sqrt{17}-1}{\sqrt{\left(\sqrt{17}-1\right)^2+16}}, \cos\theta=c=\frac{4}{\sqrt{\left(\sqrt{17}-1\right)^2+16}}$，

所以$a'_{11}=a_{11}+a_{12}t=3+2t, a'_{22}=a_{22}-a_{12}t=2-2t$，

$\begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4c+2s \\ -4s+2c \end{pmatrix}$，$a'_0=a_0=6$，

做转轴$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$后，得

$(3+2t)x'^2+(2-2t)y'^2+2(4c+2s)x'+2(-4s+2c)y'-6=0$，这个是椭圆型曲线。配方

可得$(3+2t)\left(x'+\frac{4c+2s}{3+2t}\right)^2+(2-2t)\left(y'+\frac{-4s+2c}{2-2t}\right)^2=0$，

做移轴$x^*=x'+\frac{4c+2s}{3+2t}, y^*=y'+\frac{-4s+2c}{2-2t}$，得到新方程为$(3+2t)x^{*2}+(2-2t)y^{*2}=0$，

$3+2t, 2-2t$同号，所以这是一个点，总的坐标变换公式为：$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^*-\frac{4c+2s}{3+2t} \\ y^*-\frac{-4s+2c}{2-2t} \end{pmatrix}$

（5）计算 $ctg2\theta=\frac{1+2}{1}=3=\frac{1-tg^2\theta}{2tg\theta}$，得 $tg\theta=-3\pm\sqrt{10}$，取 $tg\theta=t=\sqrt{10}-3$，θ 为锐角，则 $\sin\theta=s=\frac{\sqrt{10}-3}{\sqrt{\left(\sqrt{10}-3\right)^2+1}},\cos\theta=c=\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{10}-3\right)^2+1}}$，

所以 $a_{11}'=a_{11}+a_{12}tg\theta=1+t,a_{22}'=a_{22}-a_{12}tg\theta=-2-t$，

$$\begin{pmatrix}a_1'\\a_2'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&s\\-s&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{11}{2}c-\frac{1}{2}s\\\frac{11}{2}s-\frac{1}{2}c\end{pmatrix}，a_0'=a_0=28，$$

做转轴 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&-s\\s&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ 后，得

$\left(1+t\right)x'^2+\left(-2-t\right)y'^2-\left(\frac{11}{2}c+\frac{1}{2}s\right)x'+\left(\frac{11}{2}s-\frac{1}{2}c\right)y'+28=0$，这个是双曲型曲线。配方可得 $\left(1+t\right)\left(x'-\frac{1}{2}\frac{\frac{11}{2}c+\frac{1}{2}s}{1+t}\right)^2+\left(-2-t\right)\left(y'+\frac{1}{2}\frac{\frac{11}{2}s-\frac{1}{2}c}{-2-t}\right)^2=0$，

做移轴 $x^*=x'-\frac{1}{2}\frac{\frac{11}{2}c+\frac{1}{2}s}{1+t},y^*=y'+\frac{1}{2}\frac{\frac{11}{2}s-\frac{1}{2}c}{-2-t}$，得到新方程为 $\left(1+t\right)x^{*2}+\left(-2-t\right)y^{*2}-12=0$，由于 $1+t,-2-t$ 异号，所以这是一对相交直线，总的坐标变换公式为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c&-s\\c&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^*+\frac{1}{2}\frac{\frac{11}{2}c+\frac{1}{2}s}{1+t}\\y^*-\frac{1}{2}\frac{\frac{11}{2}s-\frac{1}{2}c}{-2-t}\end{pmatrix}$$

（6）计算 $ctg2\theta=\frac{9-24}{-8}=\frac{15}{8}=\frac{1-tg^2\theta}{2tg\theta}$，得 $tg\theta=\frac{1}{4},-4$，取 $tg\theta=\frac{1}{4}$，θ 为锐角，则

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{17}},\cos\theta=\frac{4}{\sqrt{17}}$，

所以 $a_{11}'=a_{11}+a_{12}tg\theta=8,a_{22}'=a_{22}-a_{12}tg\theta=25$，

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{-1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -16 \\ -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-72}{\sqrt{17}} \\ \frac{-16}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$$，$a_0'=a_0=138$，

做转轴 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{-1}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 后，得 $8x'^2+25y'^2-\frac{156}{\sqrt{17}}x'-\frac{32}{\sqrt{17}}y'+138=0$，这个是椭圆型曲线。配方可得 $8\left(x'-\frac{9}{\sqrt{17}}\right)^2+25\left(y'-\frac{16}{25\sqrt{17}}\right)^2+138-\frac{648}{17}-\frac{256}{425}=0$，所以这是个虚椭圆，

做移轴 $x^*=x'-\frac{9}{\sqrt{17}},y^*=y'-\frac{16}{\sqrt{17}}$，得到新方程为 $8x^{*2}+25y^{*2}+138-\frac{648}{17}-\frac{256}{425}=0$，

总的坐标变换公式为：$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} & \frac{-1}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}} & \frac{4}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^*+\frac{9}{\sqrt{17}} \\ y^*+\frac{16}{\sqrt{17}} \end{pmatrix}$

（7）计算 $ctg2\theta=\frac{6-1}{12}=\frac{5}{12}=\frac{1-tg^2\theta}{2tg\theta}$，得 $tg\theta=\frac{2}{3},-\frac{3}{2}$，取 $tg\theta=\frac{2}{3}$，θ 为锐角，则

$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{13}},\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{13}}$，

所以 $a_{11}'=a_{11}+a_{12}tg\theta=10,a_{22}'=a_{22}-a_{12}tg\theta=-3$，

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{2}{\sqrt{13}} \\ \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -18 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-60}{\sqrt{13}} \\ \frac{-27}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$，$a_0'=a_0=0$，

做转轴 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 后，得 $10x'^2-3y'^2-\frac{120}{\sqrt{13}}x'+\frac{54}{\sqrt{13}}y'=0$，这个是双曲型曲线。配方可得 $10\left(x'-\frac{6}{\sqrt{13}}\right)^2-3\left(y'-\frac{9}{\sqrt{13}}\right)^2-\frac{117}{13}=0$，

做移轴 $x^* = x' - \frac{6}{\sqrt{13}}, y^* = y' - \frac{9}{\sqrt{13}}$，得到新方程为 $10x^{*2} - 3y^{*2} - \frac{117}{13} = 0$，所以这是个双曲线，总的坐标变换公式为：$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \\ \frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* + \frac{6}{\sqrt{13}} \\ y^* + \frac{9}{\sqrt{13}} \end{pmatrix}$

（8）计算 $ctg2\theta = \frac{4-1}{-4} = \frac{3}{-4} = \frac{1 - tg^2\theta}{2tg\theta}$，得 $tg\theta = 2, -\frac{1}{2}$，取 $tg\theta = 2$，θ 为锐角，则 $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$，

所以 $a_{11}' = a_{11} + a_{12}tg\theta = 0, a_{22}' = a_{22} - a_{12}tg\theta = 5$，

$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-15}{\sqrt{5}} \\ \frac{-5}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$，$a_0' = a_0 = 7$，

做转轴 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 后，得 $5y'^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}x' - \frac{10}{\sqrt{5}}y' + 7 = 0$，这个是抛物型曲线。配方可得 $5\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{30}{\sqrt{5}}x' + 6 = 0$，

做移轴 $x^* = x' - \frac{\sqrt{5}}{5}, y^* = y' - \frac{1}{\sqrt{5}}$，得到新方程为 $y^{*2} - \frac{6}{\sqrt{5}}x^* = 0$，这是个抛物线，总的坐标变换公式为：$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* + \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y^* + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

2. 给定方程

$$\left(A_1x + B_1y + C_1\right)^2 + \left(A_2x + B_2y + C_2\right)^2 = 1$$

试经过适当坐标变换把上述方程化成标准形式，并且指出此方程表示什么曲线。

解： 作直角坐标变换：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\left(A_1x + B_1y + C_1\right) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\left(A_2x + B_2y + C_2\right) \end{cases}$$

则原方程可以化为$\dfrac{x'^2}{\lambda^2} + \dfrac{y'^2}{\mu^2} = 1$，其中$\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \mu = \dfrac{1}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$，这是椭圆。

习题 5.2

1. 判断下列二次曲线的类型，并且确定其形状。

（1）$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$

（2）$x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$

（3）$5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$

（4）$5x^2 - 16xy + 29y^2 + 10x - 34y + 9 = 0$

（5）$x^2 + xy - 2y^2 - 11x - y + 28 = 0$

（6）$8x^2 + 8xy + 2y^2 - 6x - 3y - 5 = 0$

解：（1）解不变量$I_1 = a_{11} + a_{22} = 8, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = -9, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = 81$，所以该曲线为双曲线，解特征方程$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$可得$\lambda_1 = 9, \lambda_2 = -1$，所以方程可以化简为$\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + \dfrac{I_3}{I_2} = 0$，即$9x^{*2} - y^{*2} - 9 = 0$

（2）解不变量$I_1 = a_{11} + a_{22} = 2, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = -16$，所以该曲线为抛物线，所以方程可以化简为$I_1 y^{*2} \pm 2\sqrt{\dfrac{-I_3}{I_2}}x^* = 0$，即$y^{*2} \pm 2\sqrt{2}x^* = 0$

（3）解不变量$I_1 = a_{11} + a_{22} = 10, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 9, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = -81$，所以该曲线

为椭圆，解特征方程 $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$ 可得 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = 1$，所以方程可以化简为

$\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + \frac{I_3}{I_2} = 0$，即 $9x^{*2} + y^{*2} - 9 = 0$

（4）解不变量 $I_1 = a_{11} + a_{22} = 34, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 81, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = 324$，所以该曲线为虚椭圆，解特征方程 $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$ 可得 $\lambda_{1,2} = 17 \pm 4\sqrt{13}$，所以方程可以化简为

$\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + \frac{I_3}{I_2} = 0$，即 $\left(17 + 4\sqrt{13}\right)x^{*2} + \left(17 - 4\sqrt{13}\right)y^{*2} + 4 = 0$

（5）解不变量 $I_1 = a_{11} + a_{22} = -1, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = -\frac{9}{4}, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = 0$，所以该曲线为一对相交直线，解特征方程 $\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$ 可得 $\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{10}}{2}$，所以方程可以化简为

$\lambda_1 x^{*2} + \lambda_2 y^{*2} + \frac{I_3}{I_2} = 0$，即 $\frac{-1 + \sqrt{10}}{2} x^{*2} + \frac{-1 - \sqrt{10}}{2} y^{*2} + 4 = 0$

（6）解不变量 $I_1 = a_{11} + a_{22} = 10, I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = 0, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = 0$，解半不变量

$K_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \frac{-245}{4}$，所以该曲线为一对平行直线，方程可以化简为

$I_1 y^{*2} + \frac{K_1}{I_1} = 0$，即 $10y^{*2} - \frac{245}{40} = 0$

2. 当 λ 取何值时，方程

$$\lambda x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y - 3 = 0$$

表示一对直线？

解： 方程表示一对直线的充要条件是

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda - 4 = 0, I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = -4\left(\lambda - 4\right) = 0$$

即$\lambda=4$。

3. 按参数λ的值讨论下列曲线的类型。

（1）$\left(1+\lambda^2\right)\left(x^2+y^2\right)-4\lambda xy+2\lambda\left(x+y\right)+2=0$；

（2）$x^2-4xy+4y^2+8y+3+2\lambda\left(-2xy-x-1\right)=0$。

解：（1）解出$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1+\lambda^2 & -2\lambda\\ -2\lambda & 1+\lambda^2\end{vmatrix}=\left(1-\lambda^2\right)^2$，

所以当$\lambda=1$时，$I_2=0$，$I_3=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_1\\ a_{12} & a_{22} & a_2\\ a_1 & a_2 & a_0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=-8\neq0$，所以它是抛物线；

当$\lambda=-1$时，$I_2=0$，$I_3=\begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0$，$K_1=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=4>0$，所以它是抛物线；

当$\lambda^2\neq1$时，$I_2>0$，是椭圆型曲线，$I_1=a_{11}+a_{22}=2\left(1+\lambda^2\right)>0$，

$I_3=\begin{vmatrix}1+\lambda^2 & -2\lambda & \lambda\\ -2\lambda & 1+\lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & 2\end{vmatrix}=2\left(1-2\lambda\right)\left(\lambda^2+2\lambda+1\right)$（第三列乘以$\dfrac{\lambda}{2}$，把第三行留下最后一个元素，按第三行展开）。所以$\lambda>\dfrac{1}{2}$且$\lambda\neq1$时，$I_1,I_3$异号，它是椭圆；$\lambda=\dfrac{1}{2}$时，$I_3=0$，它是一个点；$\lambda<\dfrac{1}{2}$且$\lambda\neq-1$时，$I_1,I_3$同号，它是虚椭圆。

（2）解出$I_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2-2\lambda\\ -2-2\lambda & 4\end{vmatrix}=4\left(1-\left(1+\lambda\right)^2\right)$

所以当$\lambda=0$时，$I_2=0$，$I_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 4 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{vmatrix}=-16\neq0$，所以它是抛物线；

当$\lambda=-2$时，$I_2=0$，$I_3=0$，$k_1>0$，它是一对虚平行直线；

当$-2<\lambda<0$时，$I_2>0$，它是椭圆型曲线。当$-1<\lambda<0$时，I_1,I_3异号，它是椭圆；当$-2<\lambda<-1$时，I_1,I_3同号，它是虚椭圆；当$\lambda=-1$时，$I_3=0$，它是一个点；

当$\lambda<-2,\lambda>0$时，$I_2<0$，它是双曲型曲线。当$\lambda>1,0<\lambda<1,\lambda<-2$时，$I_3\neq0$，它是

双曲线；当$\lambda=1$时，$I_3=0$，它是相交直线。

4. 证明：二次方程（5.1）表示一个圆的充要条件是$I_1^2=4I_2, I_1I_3<0$。

证明：按照不变量方法，二次方程（5.1）表示一个椭圆的充要条件是$I_2>0, I_1, I_3$异号，且（5.1）可化简为

$$\lambda_1 x^{*2}+\lambda_2 y^{*2}+\frac{I_3}{I_2}=0 \quad (*)$$

其中λ_1, λ_2是方程$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$的两个实根，

而椭圆是圆的充要条件是（*）式中的$\lambda_1=\lambda_2$，所以有$I_1^2=4I_2$。

5. 证明：二次方程（5.1）表示等轴双曲线或者两条相互垂直的直线的充要条件是$I_1=0$。

证明：按照不变量方法，二次方程（5.1）表示双曲线或者一对相交直线的充要条件是$I_2<0$，且（5.1）可化简为

$$\lambda_1 x^{*2}+\lambda_2 y^{*2}+\frac{I_3}{I_2}=0 \quad (*)$$

其中λ_1, λ_2是方程$\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$的两个实根，

而双曲线等轴和相交直线垂直的充要条件是$\lambda_1=-\lambda_2$，所以有$I_1=0$。

6. 设二次方程（5.1）表示一对平行直线，证明：这对平行直线间的距离为：

$$d=\sqrt{-\frac{4K_1}{I_1^2}}$$

证明：按照不变量方法，二次方程（5.1）表示一对平行直线的充要条件是$I_2=0, I_3=0, K_1<0$，且（5.1）可化简为

$$I_1 y^{*2}+\frac{K_1}{I_1}=0 \quad (*)$$

且（*）式表示的一对平行直线间的距离为$d=\sqrt{-\frac{4K_1}{I_1^2}}$，而坐标变换不改变原图形的相对形状，所以$d=\sqrt{-\frac{4K_1}{I_1^2}}$也是二次方程（5.1）表示的一对平行直线间的距离。

7. 证明：抛物线满足 $I_1 I_3 < 0$。

证明：因为二次方程（5.1）表示抛物线的充要条件是 $I_2 = 0, I_3 \neq 0$，且方程可通过转轴和移轴化简为

$$I_1 y^{*2} \pm 2\sqrt{\frac{-I_3}{I_1}} x^* = 0 \text{（*）}$$

所以对（*）式有 $I_1 I_3 < 0$，而 I_1, I_3 是不变量，所以抛物线满足 $I_1 I_3 < 0$。

习题 5.3

1．求直线

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$$

与下列二次曲线的交点。

（1） $2x^2 - 2xy + \dfrac{3}{2}y^2 - 2x = 0$ **；**

（2） $x^2 - y^2 - x - y + 1 = 0$**。**

解：(1)联立方程组 $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ 2x^2 - 2xy + \dfrac{3}{2}y^2 - 2x = 0 \end{cases}$ 解得 $24t^2 + 20t + 19 = 0$，所以它们没有交点，只有两个虚交点。

(2) 联立方程组 $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 2t \\ x^2 - y^2 - x - y + 1 = 0 \end{cases}$ 解得 $5t^2 + 11t + 3 = 0$，解得

$t_1 = \dfrac{-11 + \sqrt{61}}{10}, t_2 = \dfrac{-11 - \sqrt{61}}{10}$，则它们的交点为：

$$\left(\frac{-13 + 3\sqrt{61}}{10}, \frac{-32 + 2\sqrt{61}}{10} \right), \left(\frac{-13 - 3\sqrt{61}}{10}, \frac{-32 - 2\sqrt{61}}{10} \right)$$

2. 下列二次曲线有没有渐近方向？若有，则求出它们。

（1） $x^2 - 3xy - 10y^2 + 6x - 8y = 0$ **；**

（2） $x^2 + xy - 2y^2 - 11x - y + 28 = 0$ **；**

(3) $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$ **；**

(4) $8x^2+8xy+2y^2-6x-3y-5=0$**。**

解：(1) 求解$\phi(\mu,\upsilon)=\mu^2-3\mu\upsilon-10\upsilon^2=0$可得它的两个渐近方向是：$(5,1),(-2,1)$；

(2) 求解$\phi(\mu,\upsilon)=\mu^2+\mu\upsilon-2\upsilon^2=0$可得它的两个渐近方向是：$(1,1),(-2,1)$；

(3) 求解$\phi(\mu,\upsilon)=\mu^2+2\mu\upsilon+\upsilon^2=0$可得它只有一个渐近方向是：$(-1,1)$；

(4) 求解$\phi(\mu,\upsilon)=8\mu^2+8\mu\upsilon+2\upsilon^2=0$可得它只有一个渐近方向是：$(-1,2)$。

3. 求下列二次曲线的对称中心。

(1) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+1=0$ **；**

(2) $2x^2-4xy+2y^2+11=0$ **；**

(3) $4x^2+4xy+y^2-10x-5y+6=0$ **；**

(4) $x^2-2xy+y^2-3x+2y-11=0$**。**

解：(1) 求解$\begin{cases}F_1=5x-4y-9=0\\F_1=5y-4x-9=0\end{cases}$，可得$(1,1)$为该曲线的对称中心；

(2) 求解$\begin{cases}F_1=y-2=0\\F_1=x+1=0\end{cases}$，可得$(-1,2)$为该曲线的对称中心；

(3) 求解$\begin{cases}F_1=4x+2y-5=0\\F_1=y+2x-\dfrac{5}{2}=0\end{cases}$，可得$4x+2y-5=0$为该曲线的中心直线；

(4) 求解$\begin{cases}F_1=x-y-3=0\\F_1=y-x+1=0\end{cases}$，无解，所以该曲线无对称中心。

4. 当λ,μ满足什么条件时，二次曲线

$$x^2+6xy+\lambda y^2+3x+\mu y-4=0$$

(1)　有唯一对称中心；
(2)　没有对称中心；
(3)　有一条中心直线。

解：$I_2=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda-9, I_3=\begin{vmatrix}1 & 3 & \frac{3}{2}\\ 3 & \lambda & \frac{\mu}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{\mu}{2} & -4\end{vmatrix}=-\frac{100}{9}(2\lambda+\mu-27)(2\lambda-\mu-9)$

所以当$\lambda\neq 9$时，$I_2\neq 0$，该曲线有唯一一对对称中心；

当$\lambda=9,\mu=9$时，$I_2=0,I_3=0$，该曲线有无穷多个对称中心；

当$\lambda=9,\mu\neq 9$时，$I_2=0,I_3\neq 0$，该曲线没有对称中心。

5. 若方程（5.1）表示一条直线型曲线，写出中心是原点的条件。

解：方程（5.1）表示一条中心型曲线的充要条件是：$I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2\neq 0$，且要使得它的中心是原点，

那么$\begin{cases}F_1=a_{11}x+a_{12}y+a_1=0\\ F_1=a_{12}x+a_{22}y+a_2=0\end{cases}$只有零解，因为该方程组的系数行列式不为零，那么只有$a_1=a_2=0$，

所以只要满足$I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2\neq 0$，$a_1=a_2=0$，则命题成立。

6. 设二次曲线S过点$(2,3),(4,2),(-1,-3)$，且以点$(0,1)$为中心，求S的方程。

解：设S是方程为：$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$，$F_1=a_{11}x+a_{12}y+a_1$，

$F_2=a_{12}x+a_{22}y+a_2$，用待定系数法求解其系数：因为S过点$(2,3),(4,2),(-1,-3)$且以点$(0,1)$为中心，所以：

$$4a_{11}+12a_{12}+9a_{22}+4a_1+6a_2+a_0=0$$
$$16a_{11}+16a_{12}+4a_{22}+8a_1+4a_2+a_0=0$$
$$a_{11}+6a_{12}+9a_{22}-2a_1-6a_2+a_0=0$$
$$a_{12}+a_1=0$$
$$a_{22}+a_2=0$$

解得所求方程为$-2xy+2x+8=0$

习题 5.4

1. 求下列二次曲线的对称轴。

（1）$5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$**；**

（2） $2xy-4x+2y-3=0$ **；**

（3） $x^2-4xy+4y^2-5x+6=0$ **。**

解：（1）因为 $I_1=10, I_2=9, I_3=-81$ ，所以这是椭圆，解特征方程 $\lambda^2-10\lambda+9=0$ 可得 $\lambda_1=1, \lambda_2=9$ ，代替 $\begin{cases}(a_{11}-\xi)\mu+a_{12}\upsilon=0\\ a_{12}\mu+(a_{22}-\xi)\upsilon=0\end{cases}$ 中的 ξ ，解得 $\mu_1:\upsilon_1=1:-1, \mu_2:\upsilon_2=1:1$ ，它们都不是渐近方向，那么代入 $\mu F_1+\upsilon F_2=0$ ，可解得两条对称轴的方程是：

$$x-y=0, x+y-2=0$$

（2）因为 $I_1=0, I_2=-1, I_3=-1$ ，所以这是双曲线，解特征方程 $\lambda^2-1=0$ 可得 $\lambda_1=1, \lambda_2=-1$ ，代替 $\begin{cases}(a_{11}-\xi)\mu+a_{12}\upsilon=0\\ a_{12}\mu+(a_{22}-\xi)\upsilon=0\end{cases}$ 中的 ξ ，解得 $\mu_1:\upsilon_1=1:1, \mu_2:\upsilon_2=-1:1$ ，它们都不是渐近方向，那么代入 $\mu F_1+\upsilon F_2=0$ ，可解得两条对称轴的方程是：

$$x+y-1=0, x-y+3=0$$

（3）因为 $I_1=5, I_2=0, I_3=-25$ ，所以这是抛物线，解特征方程 $\lambda^2-5\lambda=0$ 可得 $\lambda_1=0, \lambda_2=5$ ，代替 $\begin{cases}(a_{11}-\xi)\mu+a_{12}\upsilon=0\\ a_{12}\mu+(a_{22}-\xi)\upsilon=0\end{cases}$ 中的 ξ ，解得 $\mu_1:\upsilon_1=2:1, \mu_2:\upsilon_2=-1:2$ ， $\mu_1:\upsilon_1=2:1$ 是渐近方向，那么把 $\mu_2:\upsilon_2=-1:2$ 代入 $\mu F_1+\upsilon F_2=0$ ，可解得已条对称轴的方程是：

$$x-2y-\frac{1}{2}=0$$

2. 若 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_0=0$ **表示椭圆或者双曲线，证明：对称轴是**

$$a_{12}\left(x^2-y^2\right)-\left(a_{11}-a_{22}\right)xy=0$$

证明：由于 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_0=0$ 表示椭圆或者双曲线，那么 $I_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2\neq 0$ ，所以由 $\begin{cases}F_1=a_{11}x+a_{12}y=0\\ F_2=a_{12}x+a_{22}y=0\end{cases}$ 只有唯一零解，可知曲线的对称中心为原点。

设曲线的特征根是 λ_1,λ_2 ，那么代替 $\begin{cases}(a_{11}-\xi)\mu+a_{12}\upsilon=0\\ a_{12}\mu+(a_{22}-\xi)\upsilon=0\end{cases}$ 中的 ξ 可解得相应的主方向是：

$a_{12}:(\lambda_1-a_{11}),a_{12}:(\lambda_2-a_{11})$ ，

由主方向可得曲线的对称轴方程 $a_{12}F_1+(\lambda_1-a_{11})F_2=0,a_{12}F_1+(\lambda_2-a_{11})F_2=0$ ，两式左端相乘可得

$$\left(a_{12}F_1+(\lambda_1-a_{11})F_2\right)\left(a_{12}F_1+(\lambda_2-a_{11})F\right)_2=0$$ ，(*)

因为 λ_1,λ_2 是特征根，即为方程 $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$ 的解，所以 $\lambda_1\lambda_2=I_2,\lambda_1+\lambda_2=I_1$ ，代入（*）式化简可得 $a_{12}I_2\left(a_{12}\left(x^2-y^2\right)-(a_{11}-a_{22})xy\right)=0$ ，所以

$$a_{12}\left(x^2-y^2\right)-(a_{11}-a_{22})xy=0$$

3. 若方程（5.1）表示一条抛物线，证明：顶点是原点的充要条件是：

$$a_{11}a_1^2+a_{12}a_2^2+2a_{12}a_1a_2=0,a_0=0$$

证明：抛物线 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_1x+2a_2y+a_0=0$ （5.1）的顶点是原当且仅当原点在抛物线上且在对称轴上，所以有 $(0,0)$ 满足（5.1），即 $a_0=0$ ，且抛物线曲线有一个渐近方向：$\mu:\lambda=-a_{12}:a_{11}=-a_{22}:a_{12}$ ，所以与之对应的非渐近方向为：$(a_{11},a_{12})=(a_{12},a_{22})$ 可得对称轴为 $a_{12}(a_{11}x+a_{12}y+a_1)+a_{22}(a_{12}x+a_{22}y+a_2)=0$ 或者写为 $a_{11}(a_{11}x+a_{12}y+a_1)+a_{12}(a_{12}x+a_{22}y+a_2)=0$ ，把 $(0,0)$ 代入可得 $a_1(a_{11}a_1+a_{12}a_2)+a_2(a_{12}a_2+a_{12}a_1)=a_{11}a_1^2+a_{12}a_2^2+2a_{12}a_1a_2=0$ 。

4. 求曲线 $4xy-5y^2+2x+6y+1=0$ 的通过点 $(-4,2)$ 的直径和它的共轭直径。

解：已知曲线共轭于方向 (μ,λ) 的直径的方程为：$\mu(2y+1)+\lambda(2x-5y+3)=0$ ，已知它通过点 $(-4,2)$ ，代入直径方程可解得 $(\mu,\lambda)=(3,1)$ ，那么直径方程为 $2x+y+6=0$ ，此直径方向为 $(\mu_1,\lambda_1)=(1,-2)$ ，那么共轭于此方向的直径为 $-4x+12y-5=0$ 。

5. 证明：圆的任意一对共轭直径彼此垂直。

证明：设圆的方向为 $x^2+y^2=r^2$ ，那么共轭于方向 (μ_1,λ_1) 的直径方程为 $\mu_1x+\lambda_1y=0$ ，此直径的

方向为$\left(\lambda_1,-\mu_1\right)$，共轭于$\left(\lambda_1,-\mu_1\right)$的直径方程为$\lambda_1 x-\mu_1 y=0$，所以由$\left(\mu_1,\lambda_1\right)$的任意性可知命题成立。

6. 证明：椭圆的任意一对共轭半径（即共轭直径上有中点到椭圆上一点的距离）的长度的平方和是一常数。

证明：设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，它的对称中心为原点，任意$\left(\mu,\upsilon\right)$都是非渐近方向，那么共轭于方向$\left(\mu,\upsilon\right)$的直径为$\mu F_1+\upsilon F_2=\mu\left(\frac{1}{a^2}x\right)+\upsilon\left(\frac{1}{b^2}y\right)=0$，该直径的方向为$\left(-\frac{\upsilon}{b^2},\frac{\mu}{a^2}\right)$，求它与椭圆的交点$\begin{cases}\mu\left(\frac{1}{a^2}x\right)+\upsilon\left(\frac{1}{b^2}y\right)=0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}y_1^2=\frac{b^4\mu^2}{b^2\mu^2+a^2\upsilon^2}\\ x_1^2=\frac{a^4\upsilon^2}{a^2\upsilon^2+b^2\mu^2}\end{cases}$

共轭于$\left(-\frac{\upsilon}{b^2},\frac{\mu}{a^2}\right)$的直径为$-\frac{\upsilon}{b^2}\left(\frac{1}{a^2}x\right)+\frac{\mu}{a^2}\left(\frac{1}{b^2}y\right)=0$，即$-\upsilon x+\mu y=0$，求它与椭圆的交点$\begin{cases}-\upsilon x+\mu y=0\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_2^2=\frac{a^2b^2\mu^2}{b^2\mu^2+a^2\upsilon^2}\\ y_2^2=\frac{a^2b^2\upsilon^2}{a^2\upsilon^2+b^2\mu^2}\end{cases}$，

所以$r_1^2+r_2^2=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2=a^2+b^2$。

7. 椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的一条弦在点$\left(2,1\right)$被平分，求出这条弦的斜率。

解：该椭圆的对称中心是原点，所以直径都过原点，设弦的方向为$\left(\mu,\upsilon\right)$，那么共轭于此方向的直径过点原点和$\left(2,1\right)$，那么它的方程为$y=\frac{1}{2}x$，又为$\mu F_1+\upsilon F_2=\mu\left(\frac{1}{9}x\right)+\upsilon\left(\frac{1}{4}y\right)=0$，解得$\left(\mu,\upsilon\right)=\left(9,-8\right)$，所以该弦的斜率为$\frac{-8}{9}$。

8. 求双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$的被点$\left(5,1\right)$平分的弦与曲线的两个交点。

解：该双曲线的对称中心是原点，所以直径都过原点，设弦的方向为$\left(\mu,\upsilon\right)$，那么共轭于此方向的直径过

点原点和 $(5,1)$，那么它的方程为 $y=\frac{1}{5}x$，又为 $\mu F_1+\upsilon F_2=\mu\left(\frac{1}{9}x\right)+\upsilon\left(-\frac{1}{4}y\right)=0$，解得 $(\mu,\upsilon)=(9,20)$，所以弦方程为 $y-1=\frac{20}{9}(x-5)$，进而可解得它与双曲线的交点。

9. 证明：抛物型曲线的直径的方向一定是它的渐近方向。

证明：设抛物型曲线方程为 $y^2=2px$ 或者 $y^2=a$，于是渐近方向为 $(a_{22},-a_{12})=(1,0)$，任取一个非渐近方向 (μ_1,υ_1)，那么共轭于此方向的直径为 $\mu_1F_1+\upsilon_1F_2=0$，即 $\mu_1(-p)+\upsilon_1 y=0$ 或者 $\mu_1 0+\upsilon_1 y=0$，它们的方向都是 $(1,0)$，与渐近方向一样。

10. 证明：对于抛物线，沿渐近方向的每一条直线都是它的直径。

证明：设抛物线方程为 $y^2=2px$，渐近方向为 $(1,0)$，沿着渐近方向的直线方向为 $y=b$，考虑方向 $(b,2p)$，因为 $p\neq 0$，所以 $(b,2p)$ 和 $(1,0)$ 不共线，那么 $(b,2p)$ 不是渐近方向，共轭于方向 $(b,2p)$ 的直径方程为 $b(-2p)+2py=0$，即 $y=b$。

11. 证明：对于中心型曲线，过中心且沿非渐近方向的直线都是它的直径。

证明：中心型曲线的方程可设为 $\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3=0$，则 $F_1=\lambda_1x, F_2=\lambda_2y$，所以其对称中心为原点，任取一个非渐近方向 (μ_1,υ_1)，过中心沿着此方向的直线 l_1 方程为：$y=\frac{\upsilon_1}{\mu_1}x$，设 l_2 是共轭于此方向的共轭直径，那么 l_2 方程为 $\mu_1F_1+\upsilon_1F_2=0$，即 $\mu_1\lambda_1x+\upsilon_1\lambda_2y=0$，那么 l_2 的方向为 $(-\upsilon_1\lambda_2,\mu_1\lambda_1)$，所以共轭与 l_2 方向的直径方程为 $-\upsilon_1\lambda_2F_1+\mu_1\lambda_1F_2=0$，即 $-\upsilon_1\lambda_2\lambda_1x_1+\mu_1\lambda_1\lambda_2y=0$，也就是 l_1 的方程。

12. 直接由方程的系数确定下列二次曲线的类型，形状和位置，并且画图。

(1) $6xy+8y^2-12x-26y+11=0$

(2) $x^2+2xy+y^2-8x+4=0$

(3) $5x^2+8xy+5y^2-18x-18y+9=0$

(4) $x^2-4xy+4y^2+8y+3=0$

解：（1）求解不变量：$I_1=8,I_2=-9,I_3=81$，所以该曲线是双曲线。

解特征方程：$\lambda^2-8\lambda-9=0$，得$\lambda_1=9,\lambda_2=-1$，所以可得化简后的方程为$\dfrac{x^{*2}}{1}-\dfrac{y^{*2}}{9}=1$

求对称中心：$\begin{cases}3y-6=0\\3x+8y-13=0\end{cases}$，得对称中心为$\left(-1,2\right)$，

求对称轴：把$\lambda_1=9,\lambda_2=-1$代入$\begin{cases}\left(-\xi\right)\mu+3\upsilon=0\\3\upsilon+\left(8-\xi\right)\upsilon=0\end{cases}$，可得方向为$\mu_1:\upsilon_1=1:3$，$\mu_2:\upsilon_2=-3:1$，又对称轴过对称中心，那么可得对称轴为$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{3},\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y-2}{1}$，化简后得：$3x-y+5=0,x+3y-5=0$。

（2）求解不变量：$I_1=2,I_2=0,I_3=-16$，所以该曲线是抛物线。

所以可得化简后的方程为$y^{*2}=2\sqrt{2}x^*$，

求渐近方向：解方程$\mu^2+2\mu\upsilon+\upsilon^2=0$，得渐近方向为$\mu:\upsilon=-1:1$

求对称轴：解特征方程：$\lambda^2-2\lambda=0$，得$\lambda_1=0,\lambda_2=2$，把$\lambda_1=0,\lambda_2=2$代入$\begin{cases}\left(1-\xi\right)\mu+\upsilon=0\\\upsilon+\left(1-\xi\right)\upsilon=0\end{cases}$，可得方向为$\mu_1:\upsilon_1=-1:1$，$\mu_2:\upsilon_2=1:1$（不是渐近方向），那么可得对称轴为$1\left(x+y-4\right)+1\left(x+y\right)=0$，化简后得：$x+y-2=0$。

顶点：求曲线和对称轴的交点：$\begin{cases}x^2+2xy+y^2-8x+4=0\\x+y-2=0\end{cases}$，解得顶点为$\left(1,1\right)$

开口方向：曲线和y轴的交点：$\begin{cases}x^2+2xy+y^2-8x+4=0\\x=0\end{cases}$，无解，所以抛物线开口向右。

（3）求解不变量：$I_1=10,I_2=9,I_3=-81$，所以该曲线是椭圆。

解特征方程：$\lambda^2-10\lambda+9=0$，得$\lambda_1=1,\lambda_2=9$，所以可得化简后的方程为$\dfrac{x^{*2}}{9}+\dfrac{y^{*2}}{1}=1$

求对称中心：$\begin{cases}5x+4y-9=0\\4x+5y-9=0\end{cases}$，得对称中心为$\left(1,1\right)$，

求对称轴：把 $\lambda_1=1,\lambda_2=9$ 代入 $\begin{cases}(5-\xi)\mu+4\upsilon=0\\4\upsilon+(5-\xi)\upsilon=0\end{cases}$，可得方向为 $\mu_1:\upsilon_1=-1:1$，$\mu_2:\upsilon_2=1:1$，又对称轴过对称中心，那么可得对称轴为 $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1}{1},\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{1}$，化简后得：$x+y-2=0,x-y=0$。

（4）求解不变量：$I_1=5,I_2=0,I_3=-16$，所以该曲线是抛物线。

所以可得化简后的方程为 $y^{*2}=\dfrac{8\sqrt{5}}{25}x^*$，

求渐近方向：解方程 $\mu^2-4\mu\upsilon+4\upsilon^2=0$，得渐近方向为 $\mu:\upsilon=2:1$

求对称轴：解特征方程：$\lambda^2-5\lambda=0$，得 $\lambda_1=0,\lambda_2=5$，把 $\lambda_1=0,\lambda_2=5$ 代入 $\begin{cases}(1-\xi)\mu-2\upsilon=0\\-2\upsilon+(4-\xi)\upsilon=0\end{cases}$，可得方向为 $\mu_1:\upsilon_1=2:1$，$\mu_2:\upsilon_2=1:-2$（不是渐近方向），那么可得对称轴为 $1(x-2y)-2(-2x+4y+4)=0$，化简后得：$5x-10y-8=0$。

顶点：求曲线和对称轴的交点：$\begin{cases}x^2-4xy+4y^2+8y+3=0\\5x-10y-8=0\end{cases}$，解得顶点为 $\left(\dfrac{9}{20},\dfrac{-23}{40}\right)$

开口方向：曲线和 y 轴的交点：$\begin{cases}x^2-4xy+4y^2+8y+3=0\\x=0\end{cases}$，有解，所以抛物线开口向右。

13. 求经过点 $(-2,-1)$ 和 $(0,-2)$，且以直线

$$x+y+1=0\text{，}x-y+1=0$$

为对称轴的二次曲线的方程。

解：用坐标变换求曲线方程。令当前直角坐标系为 II 坐标系，以 $x+y+1=0$，$x-y+1=0$ 分别做 x 轴和 y 轴的直角坐标系为 I 坐标系，由于 II 坐标系的原点在 I 坐标系中的坐标为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，I 坐标系的 x 轴到 II 坐标系的 x 轴的转角为 $\dfrac{\pi}{2}$，所以 I 坐标系到 II 坐标系的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

点 $A(-2,-1)$ 和 $B(0,-2)$ 在 I 坐标系中的坐标为 $A_1\left(0,-\sqrt{2}\right), B_1\left(\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，那么在 I 坐标系中过 A_1, B_1 且对称轴为 x 轴和 y 轴的二次曲线可求得为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$，利用坐标变换可得该曲线在 II 坐标系中的方程为 $\frac{(x'-y'+1)^2}{12}+\frac{(x'+y'+1)^2}{4}=1$，化简可得 $x'^2+x'y'+y'^2+2x'+y'-2=0$，即为所求方程。

14. 设一条二次曲线 S 经过两条二次曲线

$$x^2+xy-2y^2+6x-1 \text{ 和 } 2x^2-y^2-x-y=0$$

的四个交点，并且还经过 $(2,-2)$，求 S 的方程。

解：求出二次曲线 $x^2+xy-2y^2+6x-1$ 和 $2x^2-y^2-x-y=0$ 的四个交点，可以通过待定系数法求出 S 的方程。

习题 5.5

1. 求下列二次曲线在指定处的切线方程和发现方程。

（1）在椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的点 (x_0,y_0) 处；

（2）在双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上的点 (x_0,y_0) 处；

（3）在抛物线 $y^2=2px$ 上的点 (x_0,y_0) 处；

解：（1）$F_1=\frac{x}{a^2}, F_2=\frac{y}{b^2}$，所以切线为 $(x-x_0)\frac{x_0}{a^2}+(y-y_0)\frac{y_0}{b^2}=0$；

法线为 $\frac{(x-x_0)}{x_0}a^2=\frac{(y-y_0)}{y_0}b^2$

（2）$F_1=\frac{x}{a^2}, F_2=-\frac{y}{b^2}$，所以切线为 $(x-x_0)\frac{x_0}{a^2}-(y-y_0)\frac{y_0}{b^2}=0$；

法线为$\frac{(x-x_0)}{x_0}a^2=-\frac{(y-y_0)}{y_0}b^2$

（3）$F_1=-p,F_2=y$，所以切线为$(x-x_0)(-p)+(y-y_0)y_0=0$；

法线为$\frac{(x-x_0)}{-p}=\frac{(y-y_0)}{y_0}$

2. 求下列二次曲线的经过所给点的切线方程。

（1）$3x^2+4xy+5y^2-7x-8y-3=0$**，点**$(2,1)$**；**

（2）$5x^2+7xy+y^2-x+2y=0$**，原点；**

（3）$5x^2+6xy+5y^2=8$**，点**$(0,2\sqrt{2})$**；**

（4）$2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$**，点**$(0,2)$**；**

解：（1）点$(2,1)$在曲线上，由$F_1=3x+2y-\frac{7}{2},F_2=2x+5y-4$可知过$(2,1)$的切线为$(x-x_0)F_1+(y-y_0)F_2=0$，即$9x+10y-28=0$

（2）点$(0,0)$在曲线上，由$F_1=5x+\frac{7}{2}y-\frac{1}{2},F_2=\frac{7}{2}x+y+1$可知过$(2,1)$的切线为$(x-x_0)F_1+(y-y_0)F_2=0$，即$x-2y=0$

（3）$F(0,2\sqrt{2})=32$，所以点$(0,2\sqrt{2})$不在曲线上，由$F_1=5x+3y,F_2=3x+5y$，$\phi=5x^2+6xy+5y^2$，得$F_1(0,2\sqrt{2})=6\sqrt{2},F_2(0,2\sqrt{2})=10\sqrt{2}$，

$\phi(x-0,y-2\sqrt{2})=5x^2+6x(y-2\sqrt{2})+5(y-2\sqrt{2})^2$，

那么由$[(x-x_1)F_1(x_1,y_1)+(y-y_1)F_2(x_1,y_1)]^2-\phi(x-x_1,y-y_1)F(x_1,y_1)=0$

得$11x^2-6x(y-2\sqrt{2})-5(y-2\sqrt{2})^2=0$，分解因式可得

$[11x+5(y-2\sqrt{2})][x-y+2\sqrt{2}]=0$，因为$\phi(-5,11)\neq 0,\phi(1,1)\neq 0$，所以过$(0,2\sqrt{2})$的切线为$x-y+2\sqrt{2}=0,11x+5(y-2\sqrt{2})=0$

（4）$F(0,2)=-9$，所以点$(0,2)$不在曲线上，由$F_1=2x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2},F_2=-\frac{1}{2}x-y-1$，

$\phi=2x^2-xy-y^2$，得$F_1(0,2)=-\dfrac{3}{2},F_2(0,2)=-3$，

$\phi(x-0,y-2)=2x^2-x(y-2)-(y-2)^2$，

那么由$\left[(x-x_1)F_1(x_1,y_1)+(y-y_1)F_2(x_1,y_1)\right]^2-\phi(x-x_1,y-y_1)F(x_1,y_1)=0$

得$x^2=0$，因为$\phi(0,1)\neq 0$，所以过$(0,2)$的切线为$x=0$

3. 求曲线$4x^2-4xy+y^2-2x+1=0$的过点$M_0(1,3)$的切线和法线方程。

解： 点$M_0(1,3)$在曲线上，由$F_1=4x-2y-1,F_2=-2x+y$可知过$M_0(1,3)$的切线为

$(x-1)(4-6-1)+(y-3)(-2+3)=0$，即$3x-y=0$；法线为$\dfrac{(x-1)}{(4-6-1)}+\dfrac{(y-3)}{(-2+3)}=0$，

即$x+3y-1=0$。

4. 求下列二次曲线的切线方程，并且求出切点坐标。

（1）$x^2+4xy+3y^2-5x-6y+3=0$的切线平行于$x+4y=0$；

（2）$x^2+xy+y^2=3$的切线平行于x轴。

解：（1）设切点为$M_0(x_0,y_0)$，那么由$F_1=x+2y-\dfrac{5}{2},F_2=2x+3y-3$可知过$M_0(x_0,y_0)$的切线方程为$(x-x_0)\left(x_0+2y_0-\dfrac{5}{2}\right)+(y-y_0)(2x_0+3y_0-3)=0$，它平行于$x+4y=0$可知$x,y$前的系数成比例且$M_0(x_0,y_0)$满足曲线方程，所以解得$(x_0,y_0)=(-4,3),(1,1)$，切线为$\dfrac{x+4}{-4}=\dfrac{y-3}{1},\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y-1}{1}$。

（2）设切点为$M_0(x_0,y_0)$，那么由$F_1=x+\dfrac{1}{2}y,F_2=\dfrac{1}{2}x+y$可知过$M_0(x_0,y_0)$的切线方程为$(x-x_0)\left(x_0+\dfrac{1}{2}y_0\right)+(y-y_0)\left(\dfrac{1}{2}x_0+y_0\right)=0$，它平行于$x$轴可知$x_0+\dfrac{1}{2}y_0=0$且$M_0(x_0,y_0)$满足曲线方程，所以解得$(x_0,y_0)=(-1,2),(1,-2)$，切线为$y\pm 2=0$。

5. 证明：过二次曲线与它的一条直径的交点的切线一定平行于此直径的共轭方向。

证明： 设二次曲线与它的一条直径的交点为$M_0(x_0,y_0)$，则过$M_0(x_0,y_0)$的切线的方向为

$\left(-F_2\left(x_0,y_0\right),F_1\left(x_0,y_0\right)\right)$，设直径的共轭方向为$\left(\mu,\upsilon\right)$，那么直径的方程为$\mu F_1\left(x_0,y_0\right)+\upsilon F_2\left(x_0,y_0\right)=0$，所以$\dfrac{\mu}{\upsilon}=\dfrac{-F_2\left(x_0,y_0\right)}{F_1\left(x_0,y_0\right)}$，所以$\left(\mu,\upsilon\right)$与切线的方向平行。

6. 已知方程$\left(A_1x+B_1y+C_1\right)^2+2\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0$，其中

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0, A_1A_2+B_1B_2=0$$

证明：(1) 它表示抛物线；

(2) 直线$A_2x+B_2y+C_2=0$是它的对称轴；

(3) 直线$A_1x+B_1y+C_1=0$是它过顶点的切线。

证明： 因为$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\neq 0, A_1A_2+B_1B_2=0$，所以可做直角坐标变换

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\left(A_2x+B_2y+C_2\right) \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\left(A_1x+B_1y+C_1\right) \end{cases}$$

新方程为$\left(A_1^2+B_1^2\right)y'^2+2\sqrt{A_2^2+B_2^2}x'=0$，那么由新方程可得

(1) 它表示抛物线；

(2) 它的对称轴为$x'=\dfrac{1}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\left(A_2x+B_2y+C_2\right)=0$，即$A_2x+B_2y+C_2=0$

(3) 它的过顶点的切线为$y'=\dfrac{1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}\left(A_1x+B_1y+C_1\right)=0$，即$A_1x+B_1y+C_1=0$

7. 证明：抛物线$y^2=2px$的切点为$\left(x_1,y_1\right)$的切线与x轴的交点为$\left(-x_1,0\right)$。

证明： 抛物线$y^2=2px$过切点$\left(x_1,y_1\right)$的切线方程为$\left(x-x_1\right)\left(-p\right)+y_1\left(y-y_1\right)=0$，它与$x$轴的交点为$\left(-x_1,0\right)$。

8. 从椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的两个焦点$F_1F_2$分别作它的任意切线的垂线，垂足记为$T_1T_2$，证明：$T_1$的轨迹

和 T_2 的轨迹是以原点为中心的同一个圆。

证明： 椭圆上任取一点 $M_0\left(x_0,y_0\right)$，过 $M_0\left(x_0,y_0\right)$ 的切线方向为 $\left(-\frac{y_0}{b^2},\frac{x_0}{a^2}\right)$，切线方程为

$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$，与切线垂直的方向为 $\left(\frac{x_0}{a^2},\frac{y_0}{b^2}\right)$，由此可得经过左焦点 F_1 且与切线垂直的方程，和切线方程联立可得两直线的交点 T_1 满足方程为 $x^2+y^2=a^2$；同理可得 T_2 满足的方程。

9. 证明：两条边都与椭圆相切的直角的顶点 $\left(x_0y_0\right)$ 的轨迹是一个圆。

证明： 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，过 $M_0\left(x_0,y_0\right)$ 作椭圆的切线，设切线方程为 $\left(\mu,\upsilon\right)$，则 μ,υ 满足方程 $\left[\mu F_1\left(x_0,y_0\right)+\upsilon F_2\left(x_0,y_0\right)\right]^2-\phi\left(\mu,\upsilon\right)F\left(x_0,y_0\right)=0$ (*)，由于两条切线相互垂直，由此它们的方向 $\left(\mu_1,\upsilon_1\right),\left(\mu_2,\upsilon_2\right)$ 满足 $\frac{\upsilon_1}{\mu_1}\frac{\upsilon_2}{\mu_2}=-1$，由 (*)，以及根与系数的关系可得 x_0,y_0 满足方程

$x_0^2+y_0^2=a^2+b^2$

10. 证明：两条边与抛物线相切的直角的顶点位于准线上，而连接切点的直线通过焦点。

证明： 设抛物线方程为 $y^2=2px$ 与 9 题一样方法可得两条边与抛物线相切的直角的顶点 $M_0\left(x_0,y_0\right)$ 位于准线上，即 $x_0=-\frac{p}{2}$，设过 $M_0\left(x_0,y_0\right)$ 的两条切线的切点分别为 $M_1\left(x_1,y_1\right)$，$M_2\left(x_2,y_2\right)$，那么可得过 $M_0\left(x_0,y_0\right)$ 的切线方程为

$$\left[-p\left(x+\frac{p}{2}\right)+y_0\left(y-y_0\right)\right]^2-\left(y-y_0\right)^2\left(y_0^2-2px_0\right)=0$$

如果焦点在切点 $M_1\left(x_1,y_1\right)$，$M_2\left(x_2,y_2\right)$ 的连线上，则可以推出 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$；反之亦然。利用过抛物线 $y^2=2px$ 上一点 $M_i\left(x_i,y_i\right)$ 的切线与 x 轴的交点为 $\left(-x_i,0\right)$，可得 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，由此得证切点的连线经过焦点。

11. 已知三角形 ABC，E 是 AB 中点，抛物线与 CA,CB 分别在 A,B 相切，证明 EC 与抛物线的对

称轴平行。

证明： 设抛物线方程为 $y^2=2px$，设 A,B,C 坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_0,y_0)$，不妨设 $y_1>0,y_2<0$，那么由双曲线和三角形的位置关系可得 $x_0<0$，则 CE 平行于 x 轴当且仅当 $y_1+y_2=2y_0$，即 $x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}=\dfrac{2y_0^2}{p}$。

经过 C 点的切线方程可计算得 $\left[-p(x-x_0)+y_0(y-y_0)\right]^2-(y-y_0)^2(y_0^2-2px_0)=0$，利用 $(-x_i,0)$ 在切线上，可得 $x_1+x_2=\dfrac{2y_0^2}{p}-2x_0;x_1x_2=x_0^2$，因此 $x_1+x_2-2\sqrt{x_1x_2}=\dfrac{2y_0^2}{p}$。

12. 求下列双曲线的渐近线，并且求曲线在以渐近线为坐标轴的坐标系中的方程。

(1) $12x^2-7xy-12y^2-17x+31y-13=0$

(2) $6x^2+5xy-6y^2-39x+26y-13=0$

解：（1）由 $\phi(\mu,\upsilon)=12\mu^2-7\mu\upsilon-12\upsilon^2=0$ 可得渐近方向为 $(-3,4),(4,3)$，且由方程可得 $F_1=12x-\dfrac{7}{2}y-\dfrac{17}{2},F_2=-\dfrac{7}{2}x-12y+\dfrac{31}{2}$，所以渐近线方程为 $a_{11}\mu_i^2+2a_{12}\mu_i^2\upsilon_i^2+a_{22}\upsilon_i^2=0,i=1,2$，代入已知量可得两条渐近方程为

$$4x+3y-7=0,3x-4y+1=0$$

（2）由 $\phi(\mu,\upsilon)=6\mu^2+5\mu\upsilon-6\upsilon^2=0$ 可得渐近方向为 $(2,3),(-3,2)$，且由方程可得 $F_1=6x+\dfrac{5}{2}y-\dfrac{39}{2},F_2=\dfrac{5}{2}x-6y+13$，所以渐近线方程为 $a_{11}\mu_i^2+2a_{12}\mu_i^2\upsilon_i^2+a_{22}\upsilon_i^2=0,i=1,2$，代入已知量可得两条渐近方程为

$$3x+2y=0,2x+3y-13=0$$

13. 证明：若方程（5.1）表示一条双曲线，则它的渐近线分别与方程 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$ 代表的两条相交直线平行。

证明： 双曲线的渐近方向 (μ,υ) 满足 $a_{11}\mu^2+2a_{12}\mu\upsilon+a_{22}\upsilon^2=0$，因为方程 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$ 代表的两条直线过原点，可设其的方向分别为 $(\mu_1,\upsilon_1),(\mu_2,\upsilon_2)$，那么这

两条直线为 $\frac{x}{y}=\frac{\mu_1}{\upsilon_1},\frac{x}{y}=\frac{\mu_2}{\upsilon_2}$ ，所以 $a_{11}\mu_i^2+2a_{12}\mu_i^2\upsilon_i^2+a_{22}\upsilon_i^2=0,i=1,2$ ，所以双曲线的渐近方向和这两条直线的方向一样。

14. 证明：若 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+a_0=0$ 表示一条双曲线，则它的渐近线是 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$。

证明： 计算曲线的对称中心：$\begin{cases}F_1=a_{11}x+a_{12}y=0\\F_2=a_{12}x+a_{22}y=0\end{cases}$，所以该曲线的对称中心为原点，所以它的渐近线过原点，由 13 题结果可知它的渐近线是 $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2=0$。

15. 证明：若方程 $AB\left(x^2-y^2\right)-\left(A^2-B^2\right)xy=C$ 中，$C\neq0$ ，A,B 不全为零，则它表示一条双曲线，并且求出它的渐近线。

证明： 计算方程的不变量可得 $I_2<0,I_3\neq0$ ，那么该曲线是双曲线，所以由 14 题的结果可知它的渐近线为 $AB\left(x^2-y^2\right)-\left(A^2-B^2\right)xy=0$ ，即 $Ax+By=0,Bx-Ay=0$。

16. 证明：双曲线上的点到它的渐近线的距离的乘积等于常数。

证明： 设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ，则它的对称中心是原点，所以它的渐近线是 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ **，即** $bx-ay=0,bx+ay=0$ ，设点 $M\left(x_0,y_0\right)$ 是所设双曲线上的点，那么 $M\left(x_0,y_0\right)$ 到两条渐近线的距离的乘积为：

$$d_1d_2=\frac{\left|bx_0-ay_0\right|\left|bx_0+ay_0\right|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\left|b^2x_0^2-a^2y_0^2\right|}{a^2+b^2}$$

考虑到 $\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$ ，所以 $d_1d_2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$。

17. 给定方程 $\left(A_1x+B_1y+C_1\right)^2-\left(A_2x+B_2y+C_2\right)^2=1$ ，其中 $A_1B_2-A_2B_1\neq0$ ，证明它表示一条双曲线，并且求出它的渐近线。

证明： 计算该方程的不变量 $I_2=-\left(A_1B_2-A_2B_1\right)^2<0$ ，所以它是双曲型曲线，设它的渐近方向是 $\left(\mu,\upsilon\right)$ ，从 $\phi\left(\mu,\upsilon\right)=0$ 可解得 $\left(\mu,\upsilon\right)$ 等于 $\left(B_1+B_2,-A_1-A_2\right),\left(B_1-B_2,-A_1+A_2\right)$ ，所以渐近

线方程为 $\mu_i F_1 + \upsilon_i F_2 = 0, i = 1, 2$ ，即

$$\left(A_1 \pm A_2\right)x + \left(B_1 \pm B_2\right)y + \left(C_1 \pm C_2\right) = 0$$

将这两条渐近线方程的左端相乘得到的 x, y 的多项式与给定方程不相同，所以给定的二次曲线是双曲线，不是一对相交直线。