克莱姆(Cramer)法则

定理4: 若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

的系数矩阵$A = (a_{ij})_{n\times n}$的行列式$d = |A| \neq 0$,则线性方程组$(*)$有唯一解
$x_j = \frac{d_j}{d}, j = 1, 2, \cdots, n$,其中$d_j$是$A$中第$j$列换为常数项后所得矩阵的行列式。

克莱姆(Cramer)法则

定理4: 若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (*)$$

的系数矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$的行列式$d=|A|\neq 0$,则线性方程组$(*)$有唯一解 $x_j=\frac{d_j}{d}, j=1,2,\cdots,n$,其中$d_j$是$A$中第$j$列换为常数项后所得矩阵的行列式。

注: 克莱姆法则只适用于方程的个数与未知量的个数相等，并且其系数行列式不等于零的线性方程组。若一个线性方程组中方程的个数与未知量的个数不相等，或者虽相等但系数行列式等于零，克莱姆法则失效(或不能直接应用克莱姆法则)。

齐次线性方程组

定义: 常数项全为零的线性方程组称为**齐次线性方程组**，其总有一个解，称为**零解**，若还有其他解，称为**非零解**。

齐次线性方程组

定义: 常数项全为零的线性方程组称为**齐次线性方程组**，其总有一个解，称为**零解**，若还有其他解，称为**非零解**。

定理4: 若齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \tag{1}$$

的系数矩阵行列式$|A| \neq 0$,则它仅有零解.若它有非零解,则$|A| = 0$.

拉普拉斯(Laplace)定理

概念: k级子式，余子式，代数余子式。

拉普拉斯(Laplace)定理

概念: k级子式，余子式，代数余子式。

引理:行列式D的任一子式M与它的代数余子式A的乘积中的每一项是行列式D的展开式中的一项，而且符号也一致。

拉普拉斯(Laplace)定理

概念: k级子式，余子式，代数余子式。

引理:行列式D的任一子式M与它的代数余子式A的乘积中的每一项是行列式D的展开式中的一项，而且符号也一致。

定理6(Laplace定理):设在行列式D中任意取定了$k(1 \leq k \leq n-1)$行，由这k行元素所组成的一切k级子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式D。

行列式的乘法规则

定理7: 两个n级行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

的乘积等于一个n级行列式

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

其中c_{ij}是D_1的第i行元素分别与D_2的第j列的对应元素乘积之和:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

例1 设$s_k=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^k, k=0,1,2,\cdots$，计算如下行列式

$$(1)\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix};(2)\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

例1 设$s_k = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k, k = 0, 1, 2, \cdots$，计算如下行列式

$$(1)\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}; (2)\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n-1} & s_n & \cdots & s_{2n-2} & x^{n-1} \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

注: 将所求行列式表示为行列式的乘积，然后利用范德蒙行列式计算。

例2 设$f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$，$\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$为全部$n$次单位根，证明：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix}=\prod_{i=0}^{n-1} f(\varepsilon_i)$$

例2 设$f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$，$\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$为全部$n$次单位根，证明：

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_n & a_1 \end{vmatrix}=\prod_{i=0}^{n-1} f(\varepsilon_i)$$

注: 行列式乘积结合范德蒙行列式

例3 设a, b, c, d是不全为零的实数，证明如下方程组仅有零解：

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ bx_1 - ax_2 + dx_3 - cx_4 = 0 \\ cx_1 - dx_2 - ax_3 + bx_4 = 0 \\ dx_1 + cx_2 - bx_3 - ax_4 = 0 \end{cases}$$

例3 设a,b,c,d是不全为零的实数，证明如下方程组仅有零解：

$$\begin{cases} ax_1+bx_2+cx_3+dx_4=0 \\ bx_1-ax_2+dx_3-cx_4=0 \\ cx_1-dx_2-ax_3+bx_4=0 \\ dx_1+cx_2-bx_3-ax_4=0 \end{cases}$$

注: 由克莱姆法则，证明系数行列式不为0即可，可借助行列式乘积计算。

例3 设a, b, c, d是不全为零的实数，证明如下方程组仅有零解：

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ bx_1 - ax_2 + dx_3 - cx_4 = 0 \\ cx_1 - dx_2 - ax_3 + bx_4 = 0 \\ dx_1 + cx_2 - bx_3 - ax_4 = 0 \end{cases}$$

注: 由克莱姆法则，证明系数行列式不为0即可，可借助行列式乘积计算。

例4 设$D = |a_{ij}|$，证明：$\Delta_n = |A_{ij}| = D^{n-1}$，其中$A_{ij}$为$D$中元素$a_{ij}$的代数余子式。

例3 设a, b, c, d是不全为零的实数，证明如下方程组仅有零解：

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0 \\ bx_1 - ax_2 + dx_3 - cx_4 = 0 \\ cx_1 - dx_2 - ax_3 + bx_4 = 0 \\ dx_1 + cx_2 - bx_3 - ax_4 = 0 \end{cases}$$

注: 由克莱姆法则，证明系数行列式不为0即可，可借助行列式乘积计算。

例4 设$D = |a_{ij}|$，证明：$\Delta_n = |A_{ij}| = D^{n-1}$，其中$A_{ij}$为$D$中元素$a_{ij}$的代数余子式。

注: 利用行列式乘积和克莱姆法则。

例5 设行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \qquad (n \geq 2)$$

中的元素都是实数，而且至少有一个不等于零，证明：如果D的每个元素都等于它自己的代数余子式，则$D = 1$。

例5 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} \qquad (n \geq 2)$$

中的元素都是实数，而且至少有一个不等于零，证明：如果D的每个元素都等于它自己的代数余子式，则$D=1$。

注: 行列式展开结合行列式乘积