复数的引进

复数的引进

一元二次方程：

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

在实数范围内无解。为了使这个方程有解，把数的概念扩大，引进虚数单位$i = \sqrt{-1}$

复数的引进

一元二次方程：

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

在实数范围内无解。为了使这个方程有解，把数的概念扩大，引进虚数单位$i = \sqrt{-1}$

- 满足条件:$i^2 = -1$
- 能和普通实数一样进行运算，服从实数范围内原来成立的那些基本运算法则

复数的引进

一元二次方程：

$$x^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

在实数范围内无解。为了使这个方程有解，把数的概念扩大，引进虚数单位$i = \sqrt{-1}$

- 满足条件:$i^2 = -1$
- 能和普通实数一样进行运算，服从实数范围内原来成立的那些基本运算法则

方程(1)有两个解$x = \pm i$，且任意代数方程的解都可以用

$$a + bi(a, b \in \mathbb{R})$$

这种形式的数表示出来

复数的概念

定义： 称形如$z = x + iy$的数为**复数**，其中x, y是任意实数，分别称为z的实部和虚部，记为

$$x = Rez,\ y = Imz$$

复数的概念

定义： 称形如$z = x + iy$的数为**复数**，其中x, y是任意实数，分别称为z的实部和虚部，记为

$$x = Rez,\ y = Imz$$

- 当$Imz = 0$时，$z = Rez + i \cdot 0 = x$为实数，即复数z为实数$\Leftrightarrow Imz = 0$
- 当$Rez = 0$时，$z = Imz \cdot i$，称为纯虚数，即复数z为纯虚数$\Leftrightarrow Rez = 0$

复数的概念

相等： 复数$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$相等指的是实部和虚部分别相等，即

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

复数的概念

相等： 复数$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$相等指的是实部和虚部分别相等，即

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

若一个复数的实部和虚部都为零，则称此复数等于0.

复数的概念

相等： 复数$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$相等指的是实部和虚部分别相等，即

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

若一个复数的实部和虚部都为零，则称此复数等于0.

共轭:称复数$x + iy, x - iy$是相互共轭的，如果其中一个用z表示，则另一个用$\bar{z}$表示。

复数的概念

相等： 复数$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$相等指的是实部和虚部分别相等，即

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

若一个复数的实部和虚部都为零，则称此复数等于0.

共轭:称复数$x + iy, x - iy$是相互共轭的，如果其中一个用z表示，则另一个用$\bar{z}$表示。

注:(1)实数的共轭仍为实数;

复数的概念

相等： 复数$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$相等指的是实部和虚部分别相等，即

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

若一个复数的实部和虚部都为零，则称此复数等于0.

共轭:称复数$x + iy, x - iy$是相互共轭的，如果其中一个用z表示，则另一个用$\bar{z}$表示。

注:(1)实数的共轭仍为实数;

(2)两个复数不可比较大小。

复数的运算

复数的运算

加减法: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

复数的运算

加减法: $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

乘法: 按多项式的乘法法则进行，只须把结果中的i^2换成-1，即

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

复数的运算

加减法:$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

乘法:按多项式的乘法法则进行，只须把结果中的i^2换成-1，即

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + i x_1 y_2 + i y_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

- 当$z = x + iy$时，$z\overline{z} = x^2 + y^2$
- 称非负实数$\sqrt{x^2 + y^2}$为复数z的模，记为$|z|$，则$z\overline{z} = |z|^2$.

复数的运算

加减法:$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

乘法:按多项式的乘法法则进行，只须把结果中的i^2换成-1，即

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \end{aligned}$$

- 当$z = x + iy$时，$z\overline{z} = x^2 + y^2$
- 称非负实数$\sqrt{x^2 + y^2}$为复数z的模，记为$|z|$，则$z\overline{z} = |z|^2$.

除法:$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} (z_2 \neq 0)$

复数的运算

加减法:$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

乘法:按多项式的乘法法则进行，只须把结果中的i^2换成-1，即

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

- 当$z = x + iy$时，$z\overline{z} = x^2 + y^2$
- 称非负实数$\sqrt{x^2 + y^2}$为复数z的模，记为$|z|$，则$z\overline{z} = |z|^2$.

除法:$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} (z_2 \neq 0)$

注:定义$z^{-1} = \frac{1}{z} (z \neq 0)$，则$\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$.

运算性质

设z_1, z_2, z_3为复数，则

运算性质

设z_1, z_2, z_3为复数，则

- **交换律：** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$

运算性质

设z_1, z_2, z_3为复数，则

- **交换律：** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$
- **结合律：** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

运算性质

设z_1, z_2, z_3为复数，则

- **交换律：** $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$
- **结合律：** $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
- **分配律：** $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3, (z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

运算性质

设z_1, z_2, z_3为复数，则

- 交换律：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, z_1 z_2 = z_2 z_1$
- 结合律：$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
- 分配律：$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3, (z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$

共轭复数的运算性质:

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z + \overline{z} = 2Rez, z - \overline{z} = 2Imzi$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- $z\overline{z} = (Rez)^2 + (Imz)^2 = |z|^2$

例1 对于两个复数z_1, z_2，求证：$z_1 z_2 = 0$的充要条件是z_1与z_2中至少一个为零。

例1 对于两个复数z_1, z_2，求证：$z_1 z_2 = 0$的充要条件是z_1与z_2中至少一个为零。

例2 证明实系数多项式的复根必成对出现。

复平面

在平面上建立直角坐标系Oxy，则平面上的点与复数全体可建立一一对应

$$(x, y) \leftrightarrow z = x + iy$$

当平面上的点代表复数时，就称这个平面为复平面。

复平面

在平面上建立直角坐标系Oxy，则平面上的点与复数全体可建立一一对应

$$(x, y) \leftrightarrow z = x + iy$$

当平面上的点代表复数时，就称这个平面为**复平面**。

复数的向量表示：任意复数$z = x + iy$在复平面上都有一个点$Z(x, y)$与之对应；以原点为起点，Z为终点连接OZ，则向量$\overrightarrow{OZ}$与复数z一一对应。

复平面

在平面上建立直角坐标系Oxy，则平面上的点与复数全体可建立一一对应

$$(x, y) \leftrightarrow z = x + iy$$

当平面上的点代表复数时，就称这个平面为**复平面**。

复数的向量表示： 任意复数$z = x + iy$在复平面上都有一个点$Z(x, y)$与之对应；以原点为起点，Z为终点连接OZ，则向量$\overrightarrow{OZ}$与复数z一一对应。

Z点的位置也可以用它的极坐标r和φ表示

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

r就是复数z的模，φ称为复数z的辐角，记为:$r = |z|, \varphi = Argz$

辐角的性质

- 对$z \neq 0$，z有无穷多个辐角，辐角的全部值为:

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

其中$\arg z \in (-\pi, \pi]$称为复数z的**辐角主值**。

辐角的性质

- 对$z \neq 0$，z有无穷多个辐角，辐角的全部值为:

$$\mathrm{Arg} z = \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

  其中$\arg z \in (-\pi, \pi]$称为复数z的**辐角主值**。
- 当$z = 0$时，其辐角是任意的

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & z\text{在第一、四象限} \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & z\text{在第二象限} \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} & z\text{在第三象限} \end{cases}$$

辐角的性质

- 对$z \neq 0$，z有无穷多个辐角，辐角的全部值为:

$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

  其中$\arg z \in (-\pi, \pi]$称为复数z的**辐角主值**。
- 当$z = 0$时，其辐角是任意的

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{y}{x} & z\text{在第一、四象限} \\ \pi + \mathrm{arctg}\frac{y}{x} & z\text{在第二象限} \\ -\pi + \mathrm{arctg}\frac{y}{x} & z\text{在第三象限} \end{cases}$$

- **复数的三角式：** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

辐角的性质

- 对$z \neq 0$，z有无穷多个辐角，辐角的全部值为:
$$\mathrm{Arg}z = \arg z + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$$
其中$\arg z \in (-\pi, \pi]$称为复数z的**辐角主值**。
- 当$z = 0$时，其辐角是任意的

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\frac{y}{x} & z\text{在第一、四象限} \\ \pi + \mathrm{arctg}\frac{y}{x} & z\text{在第二象限} \\ -\pi + \mathrm{arctg}\frac{y}{x} & z\text{在第三象限} \end{cases}$$

- **复数的三角式：** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- **复数的指数式：** $z = re^{i\varphi}$，其中$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$(**欧拉公式**)

复数四则运算的几何意义

- **加减法**:其实就是平面上向量的加减，满足平行四边形法则

复数四则运算的几何意义

- **加减法**:其实就是平面上向量的加减，满足平行四边形法则
- **乘法**：$z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$，即两个复数乘积是这样一个复数：它的模等于两复数模的乘积，它的辐角等于两复数辐角之和。即

$$|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$$

复数四则运算的几何意义

- 加减法:其实就是平面上向量的加减，满足平行四边形法则
- 乘法：$z_1z_2 = r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$，即两个复数乘积是这样一个复数：它的模等于两复数模的乘积，它的辐角等于两复数辐角之和。即

$$|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$$

- 除法：$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$，即两个复数的商是这样一个复数：它的模等于两复数模的商，它的辐角等于两复数辐角之差。即

$$|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg}z_1 - \mathrm{Arg}z_2$$

复数的乘方和开方

- **乘方:**设$z = re^{i\varphi}$，则有$z^n = r^n e^{in\varphi}$

复数的乘方和开方

- **乘方:** 设 $z = re^{i\varphi}$，则有 $z^n = r^n e^{in\varphi}$
- **德·莫弗(De.Moivre)公式:** $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

复数的乘方和开方

- **乘方:**设$z=re^{i\varphi}$，则有$z^n=r^ne^{in\varphi}$
- **德·莫弗(De.Moivre)公式:**$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$
- **开方:**设$z=re^{i\theta}$为复数，n为正整数，若复数w满足$w^n=z$，则称w为z的一个n次方根，记作$w=\sqrt[n]{z}$

复数的乘方和开方

- **乘方:**设$z=re^{i\varphi}$，则有$z^n=r^ne^{in\varphi}$
- **德·莫弗(De.Moivre)公式:**$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$
- **开方:**设$z=re^{i\theta}$为复数，n为正整数，若复数w满足$w^n=z$，则称w为z的一个n次方根，记作$w=\sqrt[n]{z}$
  - 若$z=0$，则方程只有唯一解$w=0$

复数的乘方和开方

- **乘方:** 设$z = re^{i\varphi}$，则有$z^n = r^n e^{in\varphi}$
- **德·莫弗(De.Moivre)公式:** $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
- **开方:** 设$z = re^{i\theta}$为复数，n为正整数，若复数w满足$w^n = z$，则称w为z的一个n次方根，记作$w = \sqrt[n]{z}$
  - 若$z = 0$，则方程只有唯一解$w = 0$
  - 若$z \neq 0$，则方程有n个根$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \cdots, n-1$

复数的乘方和开方

- **乘方:**设$z = re^{i\varphi}$，则有$z^n = r^n e^{in\varphi}$
- **德·莫弗(De.Moivre)公式:**$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
- **开方:**设$z = re^{i\theta}$为复数，n为正整数，若复数w满足$w^n = z$，则称w为z的一个n次方根，记作$w = \sqrt[n]{z}$
  - 若$z = 0$，则方程只有唯一解$w = 0$
  - 若$z \neq 0$，则方程有n个根$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \cdots, n-1$
  - 若$z = 1$，则称$\varepsilon_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \cdots, n-1$为$n$次单位根

复数的乘方和开方

- **乘方:**设$z = re^{i\varphi}$，则有$z^n = r^n e^{in\varphi}$
- **德·莫弗(De.Moivre)公式:**$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
- **开方:**设$z = re^{i\theta}$为复数，n为正整数，若复数w满足$w^n = z$，则称w为z的一个n次方根，记作$w = \sqrt[n]{z}$
  - 若$z = 0$，则方程只有唯一解$w = 0$
  - 若$z \neq 0$，则方程有n个根$w_k = \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \cdots, n-1$
  - 若$z = 1$，则称$\varepsilon_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \cdots, n-1$为$n$次单位根
  - 若$(k, n) = 1$，则称ε_k为n次单位原根

复数的乘方和开方

- **乘方:** 设$z=re^{i\varphi}$，则有$z^n=r^ne^{in\varphi}$
- **德·莫弗(De.Moivre)公式:** $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$
- **开方:** 设$z=re^{i\theta}$为复数，n为正整数，若复数w满足$w^n=z$，则称w为z的一个n次方根，记作$w=\sqrt[n]{z}$
    - 若$z=0$，则方程只有唯一解$w=0$
    - 若$z\neq 0$，则方程有n个根$w_k=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},k=0,1,\cdots,n-1$
    - 若$z=1$，则称$\varepsilon_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}},k=0,1,\cdots,n-1$为$n$次单位根
    - 若$(k,n)=1$，则称ε_k为n次单位原根

例3 求$\sqrt[3]{-8}$的全部值。

复数的乘方和开方

- **乘方:** 设$z=re^{i\varphi}$，则有$z^n=r^ne^{in\varphi}$
- **德·莫弗(De.Moivre)公式:** $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$
- **开方:** 设$z=re^{i\theta}$为复数，n为正整数，若复数w满足$w^n=z$，则称w为z的一个n次方根，记作$w=\sqrt[n]{z}$
  - 若$z=0$，则方程只有唯一解$w=0$
  - 若$z\neq 0$，则方程有n个根$w_k=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}},k=0,1,\cdots,n-1$
  - 若$z=1$，则称$\varepsilon_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}},k=0,1,\cdots,n-1$为$n$次单位根
  - 若$(k,n)=1$，则称ε_k为n次单位原根

例3 求$\sqrt[3]{-8}$的全部值。

例4 设$z=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)$，求$\sqrt[4]{z}$。

单位根的性质

单位根的性质

性质1: n次单位根ε_j的模为1，即$|\varepsilon_j| = 1$。

单位根的性质

性质1: n次单位根ε_j的模为1，即$|\varepsilon_j| = 1$。

性质2: 两个n次单位根ε_j和ε_k的乘积仍为n次单位根，且$\varepsilon_j\varepsilon_k = \varepsilon_{j+k}$。

单位根的性质

性质1: n次单位根ε_j的模为1，即$|\varepsilon_j| = 1$。

性质2: 两个n次单位根ε_j和ε_k的乘积仍为n次单位根，且$\varepsilon_j\varepsilon_k = \varepsilon_{j+k}$。

推论1: 若k被n除余数为r，则$\varepsilon_k = \varepsilon_r$。

单位根的性质

性质1: n次单位根ε_j的模为1，即$|\varepsilon_j| = 1$。

性质2: 两个n次单位根ε_j和ε_k的乘积仍为n次单位根，且$\varepsilon_j \varepsilon_k = \varepsilon_{j+k}$。

推论1: 若k被n除余数为r，则$\varepsilon_k = \varepsilon_r$。

推论2: 对$\forall j, m \in \mathbb{Z}$，$\varepsilon_j^{-1} = \varepsilon_{-j}$，$\varepsilon_j^m = \varepsilon_{jm}$。

单位根的性质

性质1: n次单位根ε_j的模为1，即$|\varepsilon_j| = 1$。

性质2: 两个n次单位根ε_j和ε_k的乘积仍为n次单位根，且$\varepsilon_j\varepsilon_k = \varepsilon_{j+k}$。

推论1: 若k被n除余数为r，则$\varepsilon_k = \varepsilon_r$。

推论2: 对$\forall j, m \in \mathbb{Z}$，$\varepsilon_j^{-1} = \varepsilon_{-j}$，$\varepsilon_j^m = \varepsilon_{jm}$。

推论3: 任何一个单位根都可以写成ε_1的幂，即$\varepsilon_j = \varepsilon_1^j$。

单位根的性质

性质1: n次单位根ε_j的模为1，即$|\varepsilon_j| = 1$。

性质2: 两个n次单位根ε_j和ε_k的乘积仍为n次单位根，且$\varepsilon_j\varepsilon_k = \varepsilon_{j+k}$。

推论1: 若k被n除余数为r，则$\varepsilon_k = \varepsilon_r$。

推论2: 对$\forall j, m \in \mathbb{Z}$，$\varepsilon_j^{-1} = \varepsilon_{-j}$，$\varepsilon_j^m = \varepsilon_{jm}$。

推论3: 任何一个单位根都可以写成ε_1的幂，即$\varepsilon_j = \varepsilon_1^j$。

问: 任一单位根是否还可以写成其它单位根的幂？

单位根的性质

性质1: n次单位根ε_j的模为1，即$|\varepsilon_j| = 1$。

性质2: 两个n次单位根ε_j和ε_k的乘积仍为n次单位根，且$\varepsilon_j\varepsilon_k = \varepsilon_{j+k}$。

推论1: 若k被n除余数为r，则$\varepsilon_k = \varepsilon_r$。

推论2: 对$\forall j, m \in \mathbb{Z}$，$\varepsilon_j^{-1} = \varepsilon_{-j}$，$\varepsilon_j^m = \varepsilon_{jm}$。

推论3: 任何一个单位根都可以写成ε_1的幂，即$\varepsilon_j = \varepsilon_1^j$。

问: 任一单位根是否还可以写成其它单位根的幂?

推论4: 一个n次单位根的共轭仍为一个n次单位根。

单位根的性质

性质1: n次单位根ε_j的模为1，即$|\varepsilon_j| = 1$。

性质2: 两个n次单位根ε_j和ε_k的乘积仍为n次单位根，且$\varepsilon_j\varepsilon_k = \varepsilon_{j+k}$。

推论1: 若k被n除余数为r，则$\varepsilon_k = \varepsilon_r$。

推论2: 对$\forall j, m \in \mathbb{Z}$，$\varepsilon_j^{-1} = \varepsilon_{-j}$，$\varepsilon_j^m = \varepsilon_{jm}$。

推论3: 任何一个单位根都可以写成ε_1的幂，即$\varepsilon_j = \varepsilon_1^j$。

问: 任一单位根是否还可以写成其它单位根的幂?

推论4: 一个n次单位根的共轭仍为一个n次单位根。

注: 所有虚的n次单位根都是成对共轭。

单位根的性质

性质1: n次单位根ε_j的模为1，即$|\varepsilon_j| = 1$。

性质2: 两个n次单位根ε_j和ε_k的乘积仍为n次单位根，且$\varepsilon_j\varepsilon_k = \varepsilon_{j+k}$。

推论1: 若k被n除余数为r，则$\varepsilon_k = \varepsilon_r$。

推论2: 对$\forall j, m \in \mathbb{Z}$，$\varepsilon_j^{-1} = \varepsilon_{-j}$，$\varepsilon_j^m = \varepsilon_{jm}$。

推论3: 任何一个单位根都可以写成ε_1的幂，即$\varepsilon_j = \varepsilon_1^j$。

问: 任一单位根是否还可以写成其它单位根的幂?

推论4: 一个n次单位根的共轭仍为一个n次单位根。

注: 所有虚的n次单位根都是成对共轭。

推论5: 对$\forall j, k \in \mathbb{Z}$，$\varepsilon_j^k = \varepsilon_k^j$。

单位根的性质

性质3: 设$m \in \mathbb{Z}$,$A = 1 + \varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m + \cdots + \varepsilon_{n-1}^m$,当$n|m$时,$A = n$,否则$A = 0$。

单位根的性质

性质3: 设$m \in \mathbb{Z}$,$A = 1 + \varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m + \cdots + \varepsilon_{n-1}^m$,当$n|m$时,$A = n$,否则$A = 0$。

推论6: $\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j = 0$。

单位根的性质

性质3: 设$m \in \mathbb{Z}$,$A = 1 + \varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m + \cdots + \varepsilon_{n-1}^m$,当$n|m$时,$A = n$,否则$A = 0$。

推论6: $\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j = 0$。

推论7: 设$\varepsilon_k \neq 1$，则$\sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_k^j = 0$。

单位根的性质

性质3: 设$m \in \mathbb{Z}$,$A = 1 + \varepsilon_1^m + \varepsilon_2^m + \cdots + \varepsilon_{n-1}^m$,当$n|m$时,$A = n$,否则$A = 0$。

推论6: $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j = 0$。

推论7: 设$\varepsilon_k \neq 1$,则$\sum\limits_{j=0}^{n-1} \varepsilon_k^j = 0$。

性质4: 全部n次单位根将复平面上的单位圆n等分。

数环与数域

定义: 若非空数集R中任两个数的和、差、积均仍属于R，则称R是一个数环。

数环与数域

定义: 若非空数集R中任两个数的和、差、积均仍属于R，则称R是一个数环。

定义: 设P是至少包含0,1两个数的数集，若P中任意两个数的和、差、积、商(除数不为0)均仍属于P，则称P是一个数域。

数环与数域

定义: 若非空数集R中任两个数的和、差、积均仍属于R，则称R是一个数环。

定义: 设P是至少包含0,1两个数的数集，若P中任意两个数的和、差、积、商(除数不为0)均仍属于P，则称P是一个数域。

思考: 数环与数域有何联系和区别?

数环与数域

定义: 若非空数集R中任两个数的和、差、积均仍属于R，则称R是一个数环。

定义: 设P是至少包含0,1两个数的数集，若P中任意两个数的和、差、积、商(除数不为0)均仍属于P，则称P是一个数域。

思考: 数环与数域有何联系和区别?

性质: 任一数域都包含有理数域，即有理数域是最小数域。

数环与数域

定义: 若非空数集R中任两个数的和、差、积均仍属于R，则称R是一个数环。

定义: 设P是至少包含0,1两个数的数集，若P中任意两个数的和、差、积、商(除数不为0)均仍属于P，则称P是一个数域。

思考: 数环与数域有何联系和区别?

性质: 任一数域都包含有理数域，即有理数域是最小数域。

思考: 有没有最小的数环?

例1 除了$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$外，是否还有其它数环？

例1 除了$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$外，是否还有其它数环？

例2 能否举一个有限个元素的数环的例子？

例1 除了$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$外，是否还有其它数环？

例2 能否举一个有限个元素的数环的例子？

注:仅含数0的数环是唯一的有限数环,即非零数环必为一个无限数集。

例1 除了$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$外，是否还有其它数环？

例2 能否举一个有限个元素的数环的例子？

注:仅含数0的数环是唯一的有限数环,即非零数环必为一个无限数集。

例3 证明：若数环$R\neq 0$，则R必包含无限多个子环。

例1 除了$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$外，是否还有其它数环？

例2 能否举一个有限个元素的数环的例子？

注:仅含数0的数环是唯一的有限数环,即非零数环必为一个无限数集。

例3 证明：若数环$R\neq 0$，则R必包含无限多个子环。

例4 设P是至少含有两个数的数集，证明：若P中任两个数的差与商(除数不为0)仍属于P，则P必为数域。

例1 除了$\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$外，是否还有其它数环？

例2 能否举一个有限个元素的数环的例子？

注:仅含数0的数环是唯一的有限数环,即非零数环必为一个无限数集。

例3 证明：若数环$R\neq 0$，则R必包含无限多个子环。

例4 设P是至少含有两个数的数集，证明：若P中任两个数的差与商(除数不为0)仍属于P，则P必为数域。

例5 $\mathbb{Q}$与$\mathbb{R}$之间是否有别的数域？$\mathbb{R}$与$\mathbb{C}$之间呢？

例6 设m是任意给定的正有理数，证明：

(1)$\mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \{a + b\sqrt{m} | a, b \in \mathbb{Q}\}$是一个数域;

(2)$\mathbb{Q}(\sqrt{m})$是有理数域的充要条件是m为一个有理数的完全平方。

例6 设m是任意给定的正有理数，证明：

(1)$\mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \{a + b\sqrt{m} | a, b \in \mathbb{Q}\}$是一个数域;

(2)$\mathbb{Q}(\sqrt{m})$是有理数域的充要条件是m为一个有理数的完全平方。

例7 设F_1和F_2是两个数域，问：$F_1 \cap F_2$是否为数域?$F_1 \cup F_2$呢?

例6 设m是任意给定的正有理数，证明：

(1)$\mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \{a + b\sqrt{m} | a, b \in \mathbb{Q}\}$是一个数域;

(2)$\mathbb{Q}(\sqrt{m})$是有理数域的充要条件是m为一个有理数的完全平方。

例7 设F_1和F_2是两个数域，问：$F_1 \cap F_2$是否为数域?$F_1 \cup F_2$呢?

例8 包含$\sqrt{2}$的最小数环是什么？这个数环是否作成数域? 若不能，那么包含$\sqrt{2}$的最小数域又是什么?

例6 设m是任意给定的正有理数，证明：

(1)$\mathbb{Q}(\sqrt{m})=\{a+b\sqrt{m}|a,b\in\mathbb{Q}\}$是一个数域;

(2)$\mathbb{Q}(\sqrt{m})$是有理数域的充要条件是m为一个有理数的完全平方。

例7 设F_1和F_2是两个数域，问：$F_1\cap F_2$是否为数域?$F_1\cup F_2$呢?

例8 包含$\sqrt{2}$的最小数环是什么？这个数环是否作成数域? 若不能，那么包含$\sqrt{2}$的最小数域又是什么?

例9 包含$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$的最小数环是什么？这个数环是否作成数域? 若不能，那么包含$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$的最小数域又是什么?

例6 设m是任意给定的正有理数，证明：

(1)$\mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \{a + b\sqrt{m} | a, b \in \mathbb{Q}\}$是一个数域;

(2)$\mathbb{Q}(\sqrt{m})$是有理数域的充要条件是m为一个有理数的完全平方。

例7 设F_1和F_2是两个数域，问：$F_1 \cap F_2$是否为数域?$F_1 \cup F_2$呢?

例8 包含$\sqrt{2}$的最小数环是什么？这个数环是否作成数域? 若不能，那么包含$\sqrt{2}$的最小数域又是什么?

例9 包含$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$的最小数环是什么？这个数环是否作成数域? 若不能，那么包含$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$的最小数域又是什么?

注： 上例可推广至任意两个互异素数的情形。