Association
mathématique
du Québec

Article

L-systèmes : les équations des plantes

Adrien Lessard, Sciences de l'éducation,
Université de Montréal
adrien.lessard@umontreal.ca

Résumé

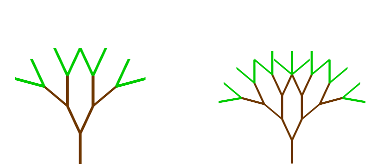
La qualité d'un modèle mathématique dépend de sa précision, mais aussi de sa simplicité. Aristid Lindenmayer, biologiste, a posé l'hypothèse que la nature fonctionne avec des règles simples comme celles des automates. Il s'est attarté particulièrement à la croissance de végétaux et a été aidé par Przemyslaw Prusinkiewicz, un informaticien qui a conçu des programmes pour visualiser les plantes et les arbres modélisés. Comment s'y prendre ? Utiliser des L-systèmes. Nous verrons leur fonctionnement, le vaste ensemble de possibilités qu'ils nous offrent, mais aussi leurs limites et des solutions pour rendre le modèle plus complet et réaliste. Nous construirons des végétaux tout au long de l'article à titre d'exemples.

1 Le fonctionnement des L-systèmes

Les L-systèmes (*Lindenmayer-systems*) font croître les végétaux de manière itérative, en appliquant répétitivement des règles de croissance précises. Celles-ci provoquent une réécriture de la chaîne de caractères qui décrit le végétal, la faisant grandir souvent de manière exponentielle. Les caractères peuvent ensuite être interprétés grâce à un ordinateur pour tracer le végétal.

Regardons la croissance d'une plante comme dans la figure 1. Nous voyons émerger une règle qui nous permet de construire l'étape suivante. À chaque étape nous remplaçons une branche terminale par trois branches dont deux terminales issues d'une même branche, comme dans le passage de 1(a) à 1(b). Nous avons donc deux types de branches : des branches inertes et des branches terminales qui subissent des transformations et auxquelles on associe un symbole de variable.

Il nous faut maintenant un langage pour exprimer la règle de croissance de notre plante. Pour cela, on aura besoin des symboles F, S, $+$, $-$, [et]. Sur ceux-ci sera appliquée récursivement une règle $R = \{F \mapsto S[+F][-F]\}$. Leur signification sera expliquée en détail à la section 1.1.



(a) ω_0 (b) ω_1 (c) ω_2 (d) ω_3 (e) ω_4

Figure 1 – Plante simple et ses cinq premiers états de croissance (pas à l'échelle)

L'état de départ de la plante, ω_0 (figure 1(a)), est représenté par le caractère F. À chaque état ω_i, il faut appliquer la règle de croissance $F \mapsto S[+F][-F]$ sur tous les F pour obtenir l'état ω_{i+1}. De cette manière, nous obtenons les prochains états de la plante (équations 1.1). Dans cet exemple et dans la plupart des L-systèmes, la croissance de la chaîne de caractères qui représente une plante se fait de manière exponentielle. L'usage d'un ordinateur est fortement recommandé.

$$\begin{cases} \omega_0 = F \\ \omega_1 = S[+F][-F] \\ \omega_2 = S[+S[+F][-F]][-S[+F][-F]] \\ \omega_3 = S[+S[+S[+F][-F]][-S[+F][-F]]][-S[+S[+F][-F]][-S[+F][-F]]] \end{cases} \tag{1.1}$$

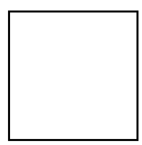
Pour comprendre la signification des symboles utilisés et leur effet sur l'apparence de la plante, nous utiliserons l'interprétation à pas de tortue.

1.1 L'interprétation à pas de « tortue »

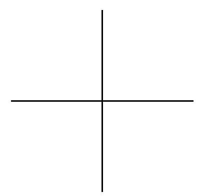
Aristid Lindenmayer utilise une analogie enfantine mais très efficace pour montrer comment interpréter une chaîne de caractères générée par des L-systèmes. On retrouve d'ailleurs cette analogie dans le langage *Logo* et dans le langage *Python*. Il s'agit d'une tortue bien spéciale à laquelle on fixe une craie, de sorte que lorsque la tortue avance, un trait se dessine sur le sol. Il s'agit ensuite de dicter très précisément à la tortue comment se déplacer dans l'espace, ce qui nous permet de dessiner le végétal voulu. Le tableau 1 donne la liste d'instructions courantes que peut recevoir la tortue.

F, S	Avancer d'une unité
$+$	Tourner à gauche d'un angle δ
$-$	Tourner à droite d'un angle δ
[	Enregistrer la position et l'orientation
]	Rétablir la positon et l'orientation

Tableau 1 – Instructions de base lors de l'interprétation à pas de tortue



(a) $F+F+F+F$



(b) $[F]-[F]-[F]-[F]$

Figure 2 – Deux exemples d'interprétation à pas de tortue

Dans le développement de la plante simple (équations 1.1), nous retrouvons un ensemble d'instructions pour la tortue. L'état ω_0 contient seulement l'instruction F, qui fait tracer une branche de longueur 1. L'état ω_1 commence aussi par une branche, S, suivie de deux ensembles d'instructions $[+F]$ et $[-F]$. L'un trace une branche à gauche, l'autre trace une branche à droite, respectivement. Nous remarquons que les constantes [et] encadrent le contenu d'une branche. À partir de l'état ω_2, nous voyons qu'il est possible d'imbriquer les symboles [et]. Ainsi, la tortue peut mémoriser une pile de positions et d'orientations avant de revenir à la première position enregistrée.

L'utilisation de deux symboles différents pour tracer une branche est importante dans cet exemple. F représente une branche fertile qui va donner naissance à d'autres branches. Le symbole S représente une branche stérile qui ne subira plus de transformation. Utiliser seulement des F aurait donné le même résultat visuel mais il y aurait eu superposition de branches, ce qui n'est pas valide en biologie. Dans la figure 1, les branches fertiles sont les branches terminales de la plante.

Nous pouvons aussi tracer des formes simples avec l'interprétation à pas de tortue. Par exemple, tracer un carré reviendrait à dire à la tortue $F+F+F+F$ avec $\delta=\frac{\pi}{2}$ (figure 2(a)). Tracer le symbole + se ferait avec les instructions $[F]-[F]-[F]-[F]$, sachant que $\delta=\frac{\pi}{2}$ (figure 2(b)).

1.2 Une définition plus formelle

Nous avons maintenant une bonne intuition de ce qu'est un L-système. La définition 1 précise la nature de chaque type de caractère et des règles de croissance.

Définition 1 *L-système de base*

Un L-système est une grammaire formelle $\{V,\ C,\ \omega_0,\ R\}$ *où*

- V *est un alphabet de variables ;*
- C *est un ensemble de symboles constants ;*
- ω_0 *est l'axiome de départ ;*
- R *est un ensemble de règles de croissance.*

Les équations 1.2 décrivent la plante vue plus tôt de manière plus formelle. Dans l'ensemble V, nous avons la variable F sur laquelle sera appliquée la règle de croissance. Les constantes S, $+$, $-$, [et] ont un sens lors de l'interprétation à pas de tortue, mais ne subiront pas de transformation par les règles de R. Ensuite, ω_0, l'état de départ, est une branche fertile, F. Nous terminons par l'unique règle de croissance, $F\mapsto S[+F][-F]$ vue précédemment. Il est à noter que la plupart des L-systèmes ont plus d'une règle.

$$\begin{cases} V=\{F\} \\ C=\{S,\ +,\ -,\ [,\ ]\} \\ \omega_0=F \\ R=\{F\mapsto S[+F][-F]\} \end{cases} \tag{1.2}$$

2 Construction de L-systèmes

Il existe deux idées générales pour construire des L-systèmes : le remplacement des segments et le remplacement des sommets.

2.1 Construction de L-systèmes par remplacement des segments

Définition 2 *Soit* $r\in R$ *une règle de croissance appliquée sur* $m\in V$*. Si la tortue trace une ligne lorsqu'elle interprète* m*, alors* r *est une* ***règle de croissance par remplacement des segments****.*

La plante construite plus tôt (équations 1.2) utilise le principe de remplacement des segments. En effet, la règle $F \mapsto S[+F][-F]$ s'applique sur F, qui trace une ligne.

Biologiquement, le principe de remplacement des segments a du sens avec des plantes pour lesquelles les branches changent de longueur au fil du temps. Par exemple, la règle $F \mapsto FF$ fait doubler de longueur de chaque branche. On peut observer ce phénomène sur certaines graminées dans un champ non entretenu.

En mathématiques, nous pouvons construire certaines figures fractales avec le remplacement des segments. Voici, par exemple, la construction du flocon de Koch par un L-système, où chaque segment se transforme en quatre segments, tel qu'illustré à la figure 3. Quelques itérations de cette figure fractale sont représentées à la figure 4. Dans l'interprétation à pas de tortue du flocon, la valeur de l'angle δ est $\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{cases} V = \{F\} \\ C = \{+,\ -\} \\ \omega_0 = F++F++F \\ R = \{F \mapsto F-F++F-F\} \end{cases} \tag{2.1}$$

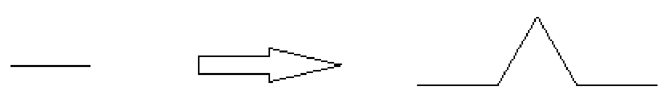
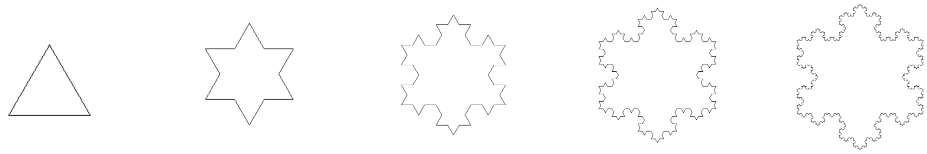


FIGURE 3 – Règle de croissance du flocon de Koch représentée graphiquement.

2.2 Construction de L-systèmes par remplacement des sommets

Un problème biologique survient lorsqu'on tente de remplacer, dans une plante, une branche non terminale par un ensemble de branches. Dans la plupart des cas, les nouvelles branches poussent à partir de l'extrémité des branches fertiles et non sur toute leur longueur. Plus précisément, les nouvelles branches émergent des bourgeons au bout des branches fertiles.

Le principe de construction de L-système par remplacement des sommets repose sur l'idée que les nouvelles structures d'un végétal poussent à partir de l'extrémité des anciennes structures.



(a) ω_0 (b) ω_1 (c) ω_2 (d) ω_3 (e) ω_4

FIGURE 4 – Croissance du flocon de Koch (pas à l'échelle)

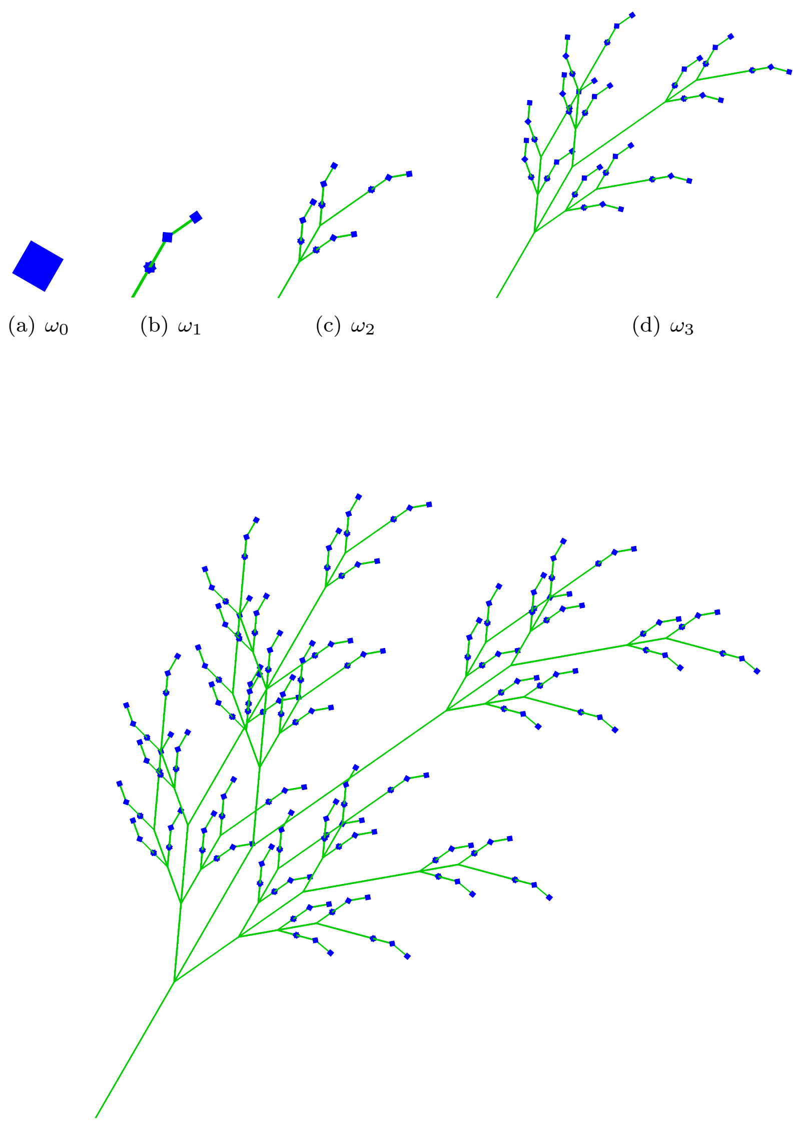
Définition 3 *Soit $r \in R$ une règle de croissance appliquée sur $m \in V$. Si la tortue ne bouge pas lorsqu'elle interprète m, alors r est une **règle de croissance par remplacement des sommets**. Souvent, $m = X$.*

Nous pouvons donc ajouter le bourgeon (variable) $X \in V$ à notre liste d'instructions de base lors de l'interprétation à pas de tortue.

Les équations 2.2 décrivent une plante un peu plus complexe qui utilise le remplacement des sommets dans une de ses règles.

$$\begin{cases} V = \{X\} \\ C = \{F,\ +,\ -,\ [,\ ]\} \\ \omega_0 = X \\ R = \{X \mapsto F[[-X][+X]]F[+FX] - X, F \mapsto FF\} \end{cases} \tag{2.2}$$

X représente un bourgeon et n'a pas d'effet lors de l'interprétation à pas de tortue. La première règle, $X \mapsto F + [[X] - X] - F[-FX] + X$, remplace un bourgeon par une structure qui en contient quatre, tous ayant des orientations et des positons différentes. La figure 5 montre les premières étapes de croissance de cette plante. À ω_1, il semble n'y avoir que trois bourgeons (carrés bleus). Si nous portons attention à la règle de croissance qui en génère quatre, on voit que deux des bourgeons sont superposés, mais n'ont pas la même orientation.



(a) ω_0 (b) ω_1 (c) ω_2 (d) ω_3

(e) ω_4

FIGURE 5 – Étapes de croissance d'une plante construite par remplacement des sommets (pas à l'échelle)

3 L-systèmes stochastiques

Pour ajouter du réalisme aux L-systèmes et refléter plus fidèlement la nature, il peut être intéressant de leur ajouter de la variabilité. En effet, si une personne veut modéliser une forêt entière, elle ne voudra pas que tous ses arbres soient des copies les uns des autres. Nous allons voir trois façons de jouer avec le hasard dans les L-systèmes stochastiques :

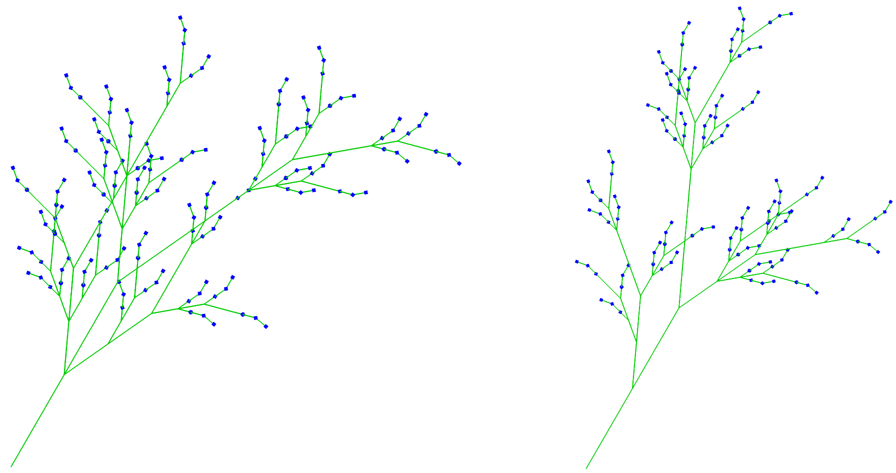
– varier l'angle δ (en radians) ;
– varier la longueur des segments ;
– varier les règles de croissance.

Introduire de la variation dans les angles est assez simple. Dans les exemples stochastiques qui suivent, l'angle est choisi au hasard dans un intervalle défini selon une loi de probabilité uniforme. Ainsi, la tortue a le choix de l'angle duquel elle va tourner.

Faire varier la longueur des segments peut se faire de manière semblable : au lieu de fixer la longueur d'un segment à 1, on laisse la tortue choisir la longueur suivant une loi de probabilité uniforme dans l'intervalle $[0,75;1,25]$. Le choix de la loi de probabilité et de l'intervalle est laissé au créateur du L-système.

Des variations d'angles et de longueurs peuvent être insuffisantes pour donner des résultats très variés. Il est possible, pour une même règle de croissance $r \in R$, de définir deux ou plusieurs possibilités, chacune d'entre elles ayant une probabilité d'occurrence. Par exemple, nous pouvons modifier la plante d'équations 2.2 pour obtenir la plante d'équations 3.1 en lui ajoutant de la variation (figure 6). De cette manière, chaque X a une chance sur deux de devenir $F[[-X][+X]]F[+FX]-X$ ou $F[X]F[-FX]+X$, et chaque F deviendra FF.

$$\begin{cases} V = \{X, F\} \\ C = \{+,\ -,\ [,\ ]\} \\ \omega_0 = X \\ R = \{X \xrightarrow{50\%} F[[-X][+X]]F[+FX]-X, \\ \qquad X \xrightarrow{50\%} F[X]F[-FX]+X, \\ \qquad F \to FF\} \\ \delta \in [\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{36}] \\ segment \in [0,75;1,25] \end{cases} \tag{3.1}$$



(a) (b)

Figure 6 – Deux plantes décrites par les équations 3.1

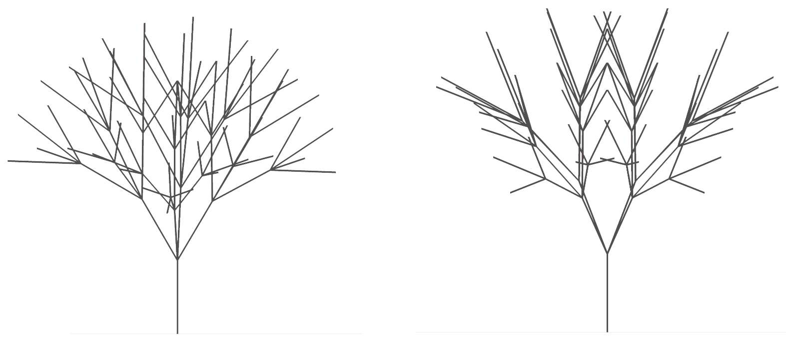
4 L-systèmes en 3D

Jusqu'à présent, nous avons vu comment modéliser des végétaux dans un espace à deux dimensions. Nous allons voir comment rajouter la dimension manquante pour améliorer le réalisme lors de la modélisation. Contrairement à ce que l'on pourrait penser, l'ajout de la troisième dimension se fait très aisément. Il suffit de rajouter quelques instructions pour la tortue. Le tableau 2 en fait la liste, avec les symboles constants de C associés.

$+$	Tourner à gauche (lacet) d'un angle δ
$-$	Tourner à droite (lacet) d'un angle δ
B	S'incliner vers (tangage) le bas d'un angle δ
H	S'incliner vers (tangage) le haut d'un angle δ
$<$	Rouler à gauche (roulis) d'un angle δ
$>$	Rouler à droite (roulis) d'un angle δ
$\vert$	Faire demi-tour

Tableau 2 – Instructions pour l'interprétation à pas de tortue en 3D

De manière plus formelle, soit un système de coordonnées centré à l'emplacement de la tortue. Celle-ci marche le long de l'axe x dans le plan xy. L'axe z est orthogonal au plan xy, dirigé



(a) (b)

FIGURE 7 – Une même plante en trois dimensions vue de deux angles différents

vers le « haut » de la tortue. Les symboles H et B se traduisent par une rotation autour de l'axe y, $<$ et $>$, par une rotation autour de l'axe x, et $+$ et $-$ par une rotation autour de l'axe z. Le symbole $|$ provoque une rotation de π radians autour de l'axe z. Ce dernier symbole est particulièrement utile si δ n'est pas commensurable avec 2π, auquel cas il est impossible de le remplacer par une série de $+$ ou de $-$ consécutifs.

Prenons un exemple assez simple qui pourra être amélioré plus tard. Soit un arbre où chaque bourgeon se développe en trois branches. Nous commencerons par une tige suivie d'un bourgeon : FX. Pour la règle de croissance, nous allons indiquer à la tortue de s'incliner vers le bas pour tracer la première des trois branches, puis de revenir au point de départ : $[BFX]$. Après avoir tourné d'un angle de $\frac{2\pi}{3}$ autour d'elle même ($>$), elle va s'incliner de nouveau vers le bas pour tracer la deuxième branche. Le processus se répète pour tracer la troisième branche. Nous avons donc la règle $X \to [BFX] > [BFX] > [BFX]$. Les équations 4.1 montrent la grammaire formelle de la plante et la figure 7 montre la plante à l'état ω_3 vue sous deux angles différents.

$$\begin{cases} V = \{X,\ F\} \\ C = \{>,\ B,\ [,\ ]\} \\ \omega_0 = FX \\ R = \{X \to [BFX] > [BFX] > [BFX]\} \\ \delta = \frac{2\pi}{3} \\ segment = 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

5 L-systèmes paramétriques

Les L-systèmes décrits dans les sections précédentes nous permettent de modéliser un grand ensemble de végétaux. Par contre, ils ne peuvent pas tout faire. En voici un exemple.

Nous voulons faire croître une plante en faisant pousser ses branches à différentes vitesses. Nous avons déjà vu la règle de croissance $F \to FF$ qui fait doubler la longueur de chaque segment. Nous pouvons aussi faire croître les branches de manière linéaire en introduisant une variable « point de croissance » G à l'extrémité de chaque branche et une règle $G \to FG$ qui fait allonger chaque segment de 1. Par contre, dans la nature, il arrive souvent que le rapport de longueur entre une même branche à l'état ω_{n+1} et l'état ω_n n'est pas entier. Une telle situation est impossible à modéliser avec les L-systèmes dont nous disposons. Pour résoudre ce problème, il faut utiliser des L-systèmes paramétriques. La règle 5.1 donne un aperçu du fonctionnement.

$$F(x) \to F(x \times constante) \tag{5.1}$$

Dans ce cas, la variable F devient la fonction $F(x)$ et son argument détermine la longueur du segment à tracer. Il est donc possible de modéliser des plantes avec des rapports de longueur non entiers entre chaque itération.

Définition 4 *L-système paramétrique*

Un L-système paramétrique est une grammaire formelle $\{V,\ F,\ C,\ \omega_0,\ R\}$ *où*

– V *est un alphabet de variables ;*
– F *est un ensemble de fonctions ;*
– C *est un ensemble de symboles constants ;*
– ω_0 *est l'axiome de départ ;*
– R *est un ensemble de règles de croissance.*

Une fonction dans l'ensemble F *peut avoir un nombre arbitraire d'arguments, pouvant déterminer différents éléments de modélisation, comme la longueur des segments, leur couleur, leur épaisseur ou l'angle de rotation.*

Une plante intéressante à modéliser en L-systèmes paramétriques est la fougère. La fougère de Barnsley (figure 8) est une figure fractale assez connue qui est l'attracteur d'un système de fonctions itérées. Il est aussi possible de la construire avec des L-systèmes.

Nous remarquons que les segments qui constituent la tige principale sont de plus en plus courts. Nous dirons que leur rapport de longueur est de 0,8 à chaque itération du L-système. De plus,

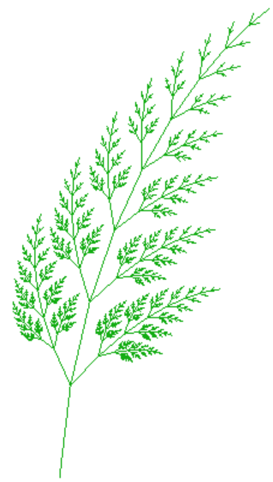


FIGURE 8 – Fougère de Barnsley

les segments des embranchements latéraux sont toujours plus courts que les segments à partir desquels ils poussent. Leur rapport de grandeur est 0,4. En utilisant le principe de construction de L-systèmes par remplacement des segments, on introduit le bourgeon (et la fonction) :

$$X(a) \rightarrow -(0{,}1)F(a)\ [+(0{,}5)X(0{,}4a)]\ [-(0{,}5)X(0{,}4x)]\ X(0{,}8a)\ . \tag{5.2}$$

Cette fonction fait pousser toute la fougère. Dans le membre de droite de la règle de croissance, nous voyons la fonction $X(0{,}8a)$ qui donne le rapport de longueur entre les segments consécutifs de la tige principale. Nous voyons aussi $X(0{,}4a)$ qui donne le rapport de longueur pour une pousse à gauche et pour une pousse à droite. Les signes $+$ et $-$ ne sont plus des constantes, mais des fonctions où l'argument donne l'angle de rotation en radians. La fonction $-(0{,}1)$ fait tourner la tortue de 0,1 radians vers la droite et crée la courbure de la tige principale de la fougère.

Un autre élément de modélisation important peut se faire avec des L-systèmes paramétriques. Chez les arbres, nous pouvons raisonnablement faire l'hypothèse que le rayon du tronc augmente de manière constante chaque année. Nous pouvons aisément garder en mémoire l'âge de chaque branche dans une fonction F augmentée d'un paramètre :

$$F(x,\ a) \rightarrow F(x \cdot constante, a+1)\ , \tag{5.3}$$

où x représente le rayon et a l'âge de la branche. Cette fonction contient deux informations : le fait que la longueur augmente chaque année et l'âge de la branche, ce qui permet à $F(x,\ a)$ de prendre des valeurs différentes pour différents a et un même x.

En récupérant l'âge dans chaque fonction F, nous pouvons calculer le diamètre de la branche qu'elle trace. La figure 9 montre un arbre simple où le rayon des branches (représenté par la largeur du trait) dépend de leur âge.

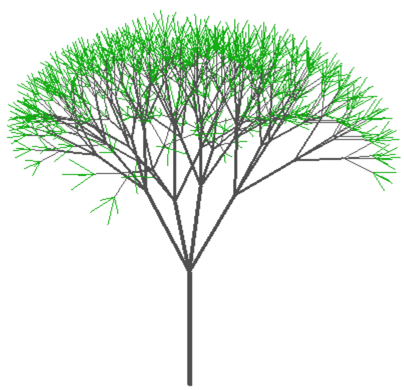


FIGURE 9 – Arbre où le rayon des branches dépend de leur âge

6 Autres éléments de modélisation

Ayant comme outils des L-systèmes paramétriques, il est possible de laisser aller son imagination. Le créateur de L-systèmes peut ajouter des éléments de modélisation spécifiques aux plantes qu'il construit. Par exemple, dans la forêt boréale québécoise, il faut tenir compte des chevreuils et du fait qu'ils mangent les bourgeons. Il faut donc, à chaque étape ω_i de croissance, ajouter une probabilité de mort à chaque bourgeon, et ce, jusqu'à la hauteur maximale que les chevreuils peuvent atteindre. Les éléments de modélisation qui suivent s'appliquent à un plus grand nombre de scénarios.

6.1 Tropisme

Pour augmenter le niveau de réalisme, il est possible de faire interagir un arbre ou une plante avec son environnement. Le *phototropisme* est un phénomène qui dirige la croissance d'un végétal vers les sources de lumière. Le *géotropisme*, lui, incite les plantes à pousser dans le sens

(a) Tropisme vers le bas, $\epsilon = 0,27$ (b) Tropisme latéral et vers le bas, $\epsilon = 0,1$

FIGURE 10 – Un même arbre et son ombre subissant des forces de tropisme différentes

contraire à la gravité. La gravité attire toutes les branches d'un arbre vers le sol tandis que le vent les pousse latéralement.

Nous allons joindre tous ces phénomènes et les résumer en un seul : le *tropisme*. Soit un vecteur $\vec{T} = \{t_x, t_y, t_z\}$ représentant une force appliquée sur les branches. Lors de l'interprétation à pas de tortue, avant de tracer une branche, la tortue est légèrement déviée de sa trajectoire dans la direction de $\vec{T}$. Si $\vec{D} = \{d_x, d_y, d_z\}$ représente la direction de la tortue, alors elle va dévier d'un angle

$$\alpha = \epsilon \mid \vec{T} \wedge \vec{D} \mid \tag{6.1}$$

vers $\vec{T}$, où $\epsilon \in [0,1]$ est la sensibilité de l'arbre à la force de tropisme et $\mid \vec{T} \wedge \vec{D} \mid$ est la longueur du produit vectoriel de $\vec{T}$ et $\vec{D}$, soit $\mid \vec{T} \mid\mid \vec{D} \mid \sin\beta$, où β est l'angle entre $\vec{T}$ et $\vec{D}$. Modifier l'orientation du vecteur $\vec{T}$ et la résistance de l'arbre peut avoir des effets diversifiés. La figure 10 montre le même arbre subissant des forces de tropisme différentes.

Il est aussi possible d'aller plus loin et d'ajouter des forces de tropisme spécifiques à chaque branche dans la fonction F, soit $F(x, a, \epsilon, t_x, t_y, t_z)$. Nous pourrions, par exemple, spécifier un tropisme vers le haut pour le tronc principal et un tropisme vers le bas pour les autres branches.

6.2 Feuilles

Tracer des feuilles dans un L-système est assez simple. Il s'agit de construire des polygones à n côtés délimités par autant de segments tracés lors de l'interprétation à pas de tortue. Il faut aussi délimiter ces groupes de segments avec des symboles particuliers pour préciser qu'il s'agit d'un polygone : $<$ et $>$. Ainsi, une feuille simple (précédée d'un segment) peut avoir une équation comme $F < [-F+F+F][+F-F-F] >$ (figure 11).

Cependant, utiliser la variable F pour décrire le contour d'une feuille comporte un problème. Ce symbole risque d'être affecté par une règle de croissance et nous risquons de nous retrouver avec des feuilles de taille démesurée. Pour éviter ce problème, nous pouvons introduire la constante f qui a la même interprétation que la variable F, mais qui n'est pas sujette à des règles de croissance. Ainsi, une feuille typique pourrait avoir comme équation $F < [-f+f+f][+f-f-f] >$.

Il est important de préciser que l'angle de rotation δ ne doit pas être variable lors de la construction d'une feuille pour que le polygone qui décrit son contour soit fermé. Il est proposé d'utiliser la moyenne des deux bornes de δ comme angle de rotation lors de la construction d'une feuille.

Nous terminons avec l'exemple d'une plante plus complexe et munie de feuilles (figure 12). Les équations 6.2 montrent sa grammaire formelle.

$$\begin{cases} V = \{X,\ F\} \\ C = \{f,\ +,\ -,\ [,\ ],\ <,\ >\} \\ \omega_0 = FX \\ R = \{X \xrightarrow{50\%} -f < [-f+f+f][+f-f-f] > F[[-X][+X]]F[+FX]-X, \\ \qquad X \xrightarrow{50\%} -f < [-f+f+f][+f-f-f] > F[-X]F[-FX]+X, \\ \qquad F \rightarrow FF\} \\ \delta \in [\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{36}] \end{cases} \tag{6.2}$$

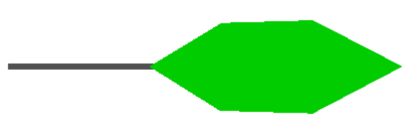


FIGURE 11 – Feuille de base : $F < [-F+F+F][+F-F-F] >$

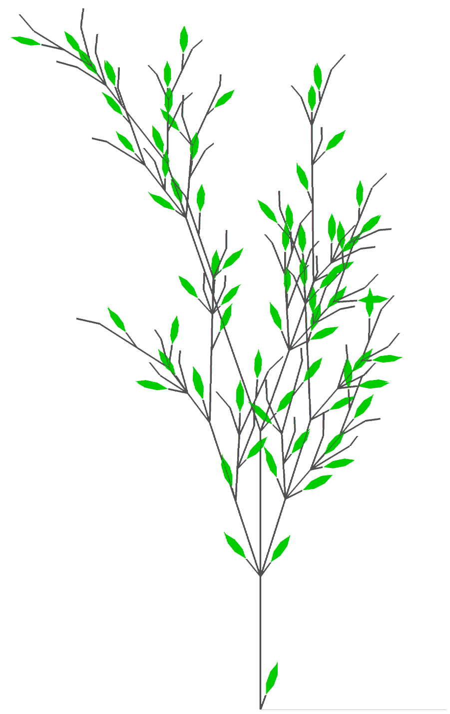


FIGURE 12 – L-système stochastique avec des feuilles

7 Conclusion

Ayant comme outil des L-systèmes de base, paramétriques ou à 3 dimensions, un utilisateur peut laisser libre cours à son imagination et créer une grande variété de végétaux fidèles à la nature. Les L-systèmes peuvent être manipulés pour ajouter autant d'éléments de modélisation que désiré. Aristid Lindenmayer a atteint son objectif : trouver un modèle basé sur des règles simples pour expliquer les phénomènes naturels autour de nous. Bien que son livre soit paru en 1990 [1], les L-systèmes restent utilisés de nos jours et produisent encore des résultats très près de la réalité.

Je tiens à remercier spécialement Christiane Rousseau pour tous les bons conseils et idées qu'elle m'a donnés durant la rédaction de cet article. Grand merci à tous mes relecteurs qui ont su apporter des commentaires pertinents !

Adrien Lessard, adrien.lessard@umontreal.ca

Références

[1] Lindenmayer, A. et Prusinkiewicz, P. (1990). *The algorithmic beauty of plants*. New-York, États-Unis : Springer-Verlag.

[2] Lessard, A. (2013). L-systèmes : les équations des plantes. *Accromαth*, volume 8, été-automne 2013, 22-27.