数据结构--线段树

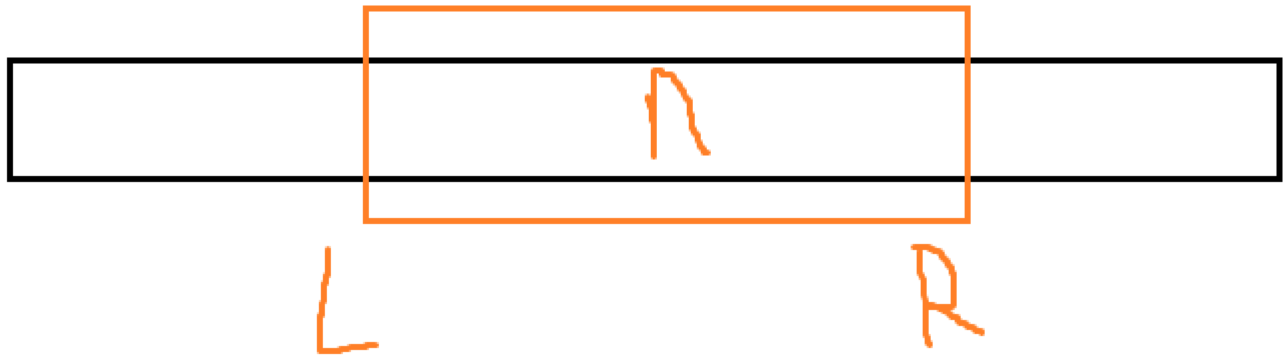
引入

给定一个数组，数组长度可能非常大。现在我们需要对数组里面的数据反反复复进行两个操作

- 求出某一个区间里面所有元素之和，(query操作)
- 修改某个元素的值，(update操作)

暴力解决

对区间[L,R]（长度为n）取和，并且更新一个元素i的值，采用暴力解决方法



可得

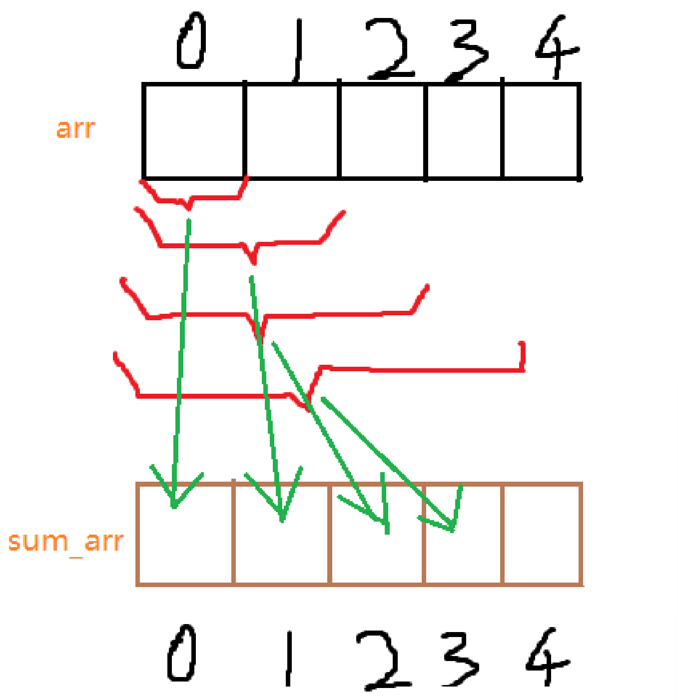
- query(L,R)时间复杂度为O(n)
- update(i)时间复杂度为O(1)

如果区间范围很大，再加上多次操作，暴力取和明显会超时，可以采用前缀和方式优化查询

sum_arr[0]=arr[0]

sum_arr[1]=arr[0]+arr[1]

sum_arr[2]=arr[0]+arr[1]+arr[2]



这样，假如我们想得到区间[2,4]的和，我们可以用sum_arr[4]-sum_arr[1]计算到

- query(L,R)时间复杂度减小为O(1)
- 因为改变一个值后，要同时更新后面的sum_arr数组，所以update(i)时间复杂度增大为O(n)

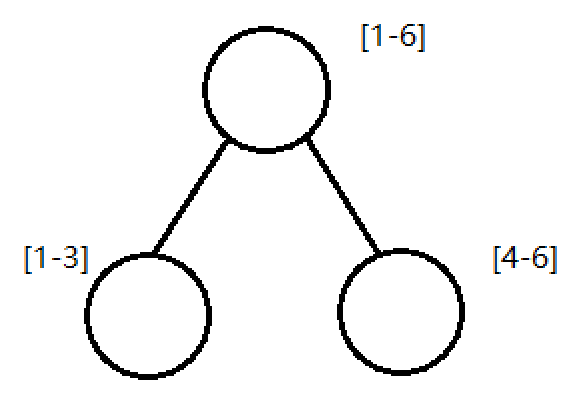
如果用线段树的话，我们可以将查询和更新的的时间复杂度都变为O(logn)

方法	query	update
暴力	O(n)	O(1)
前缀和	O(1)	O(n)
线段树	O(logn)	O(logn)

线段树构建

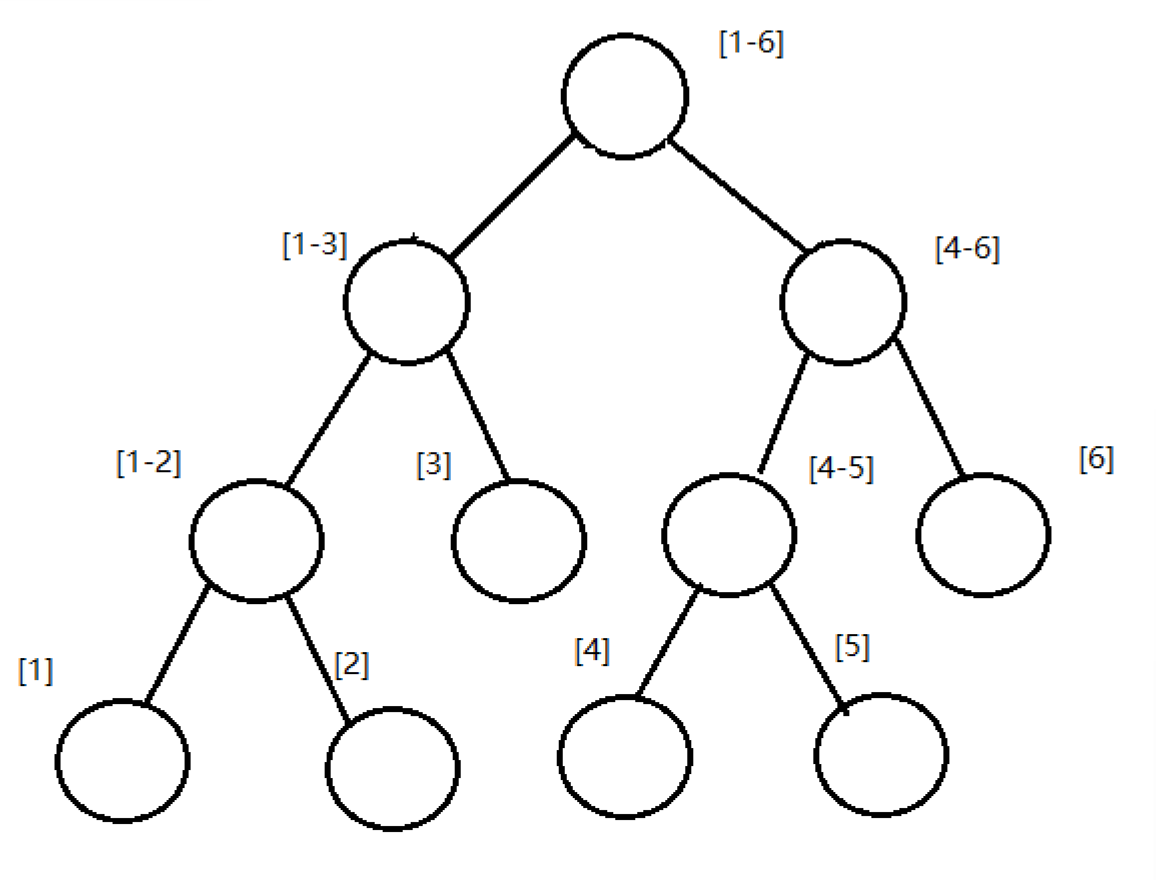
数组下标	1	2	3	4	5	6
数组元素	1	3	5	7	9	11

树根保存的是区间[1-6]中元素的和，其左孩子保存区间[1-3]所有元素的和，右孩子则是[4-6]



它将一个区间划分成一些单元区间，每个单元区间对应线段树中的一个叶结点。
其划分区间方法类似于二分

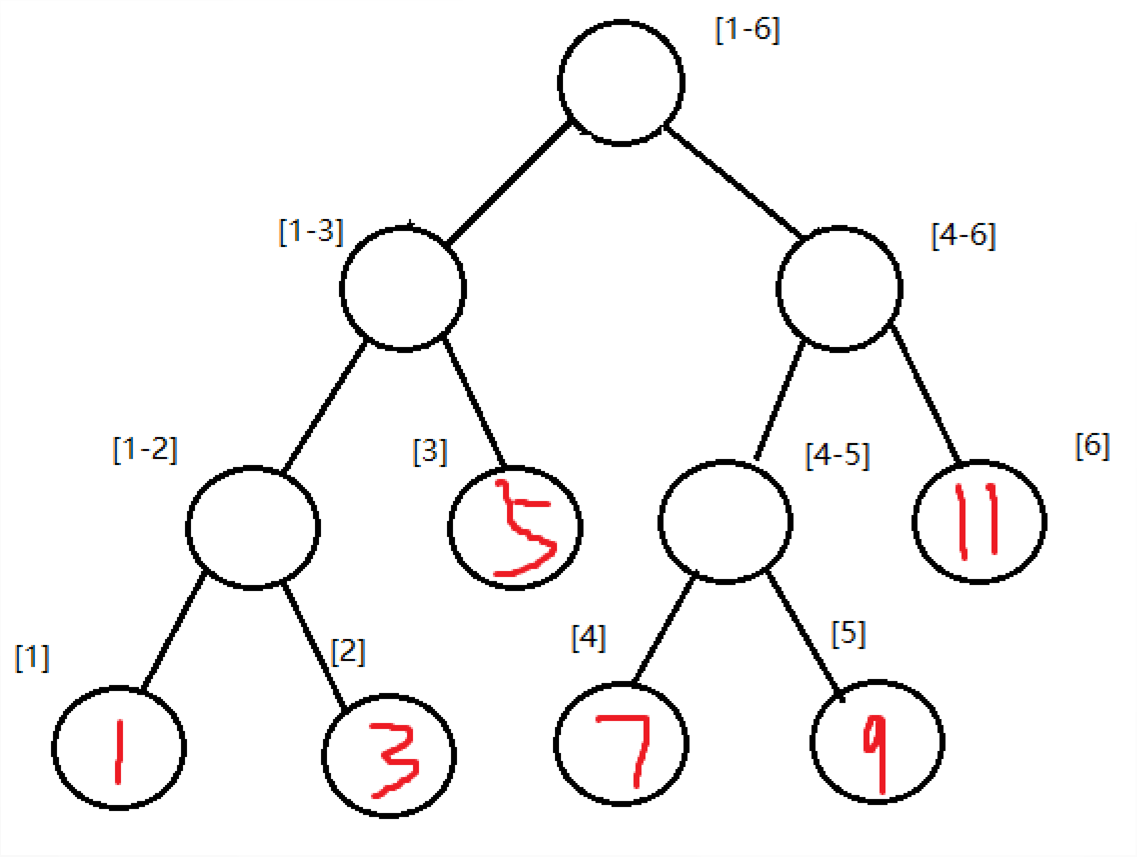
线段树构建



线段树构建

然后给每个叶子结点赋值

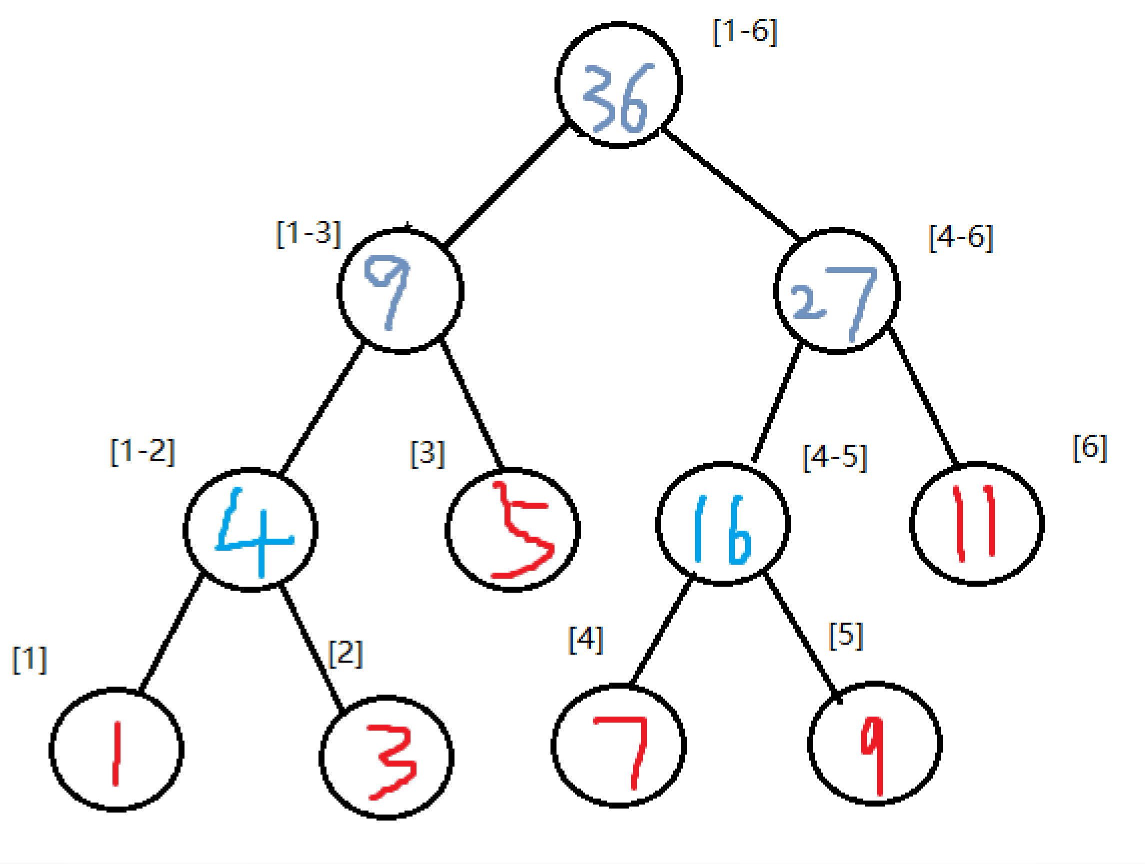
数组下标	1	2	3	4	5	6
数组元素	1	3	5	7	9	11



线段树构建

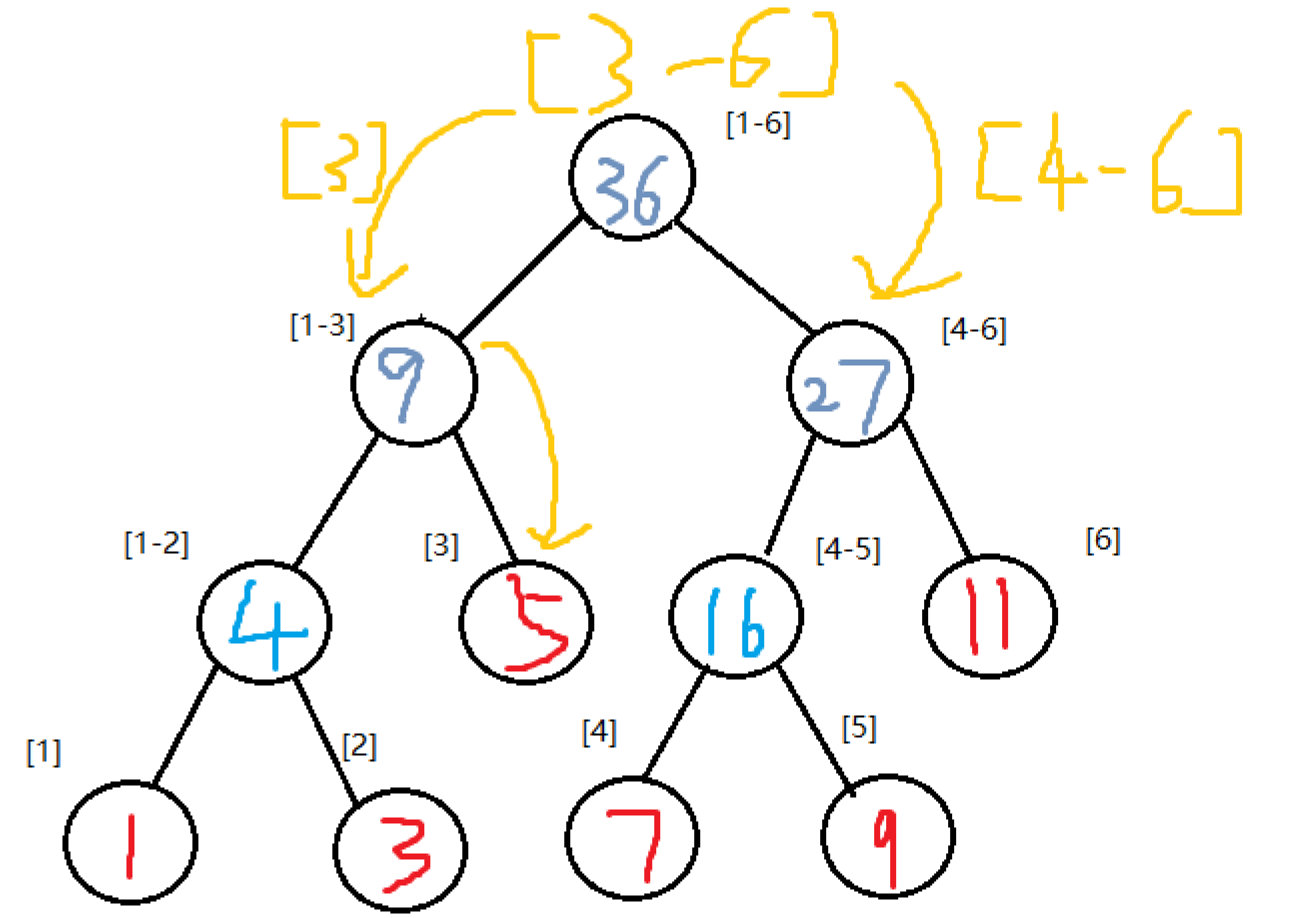
接着由孩子结点构成双亲结点

数组下标	1	2	3	4	5	6
数组元素	1	3	5	7	9	11



回到原题

如何找到[2-5]这个区间的和

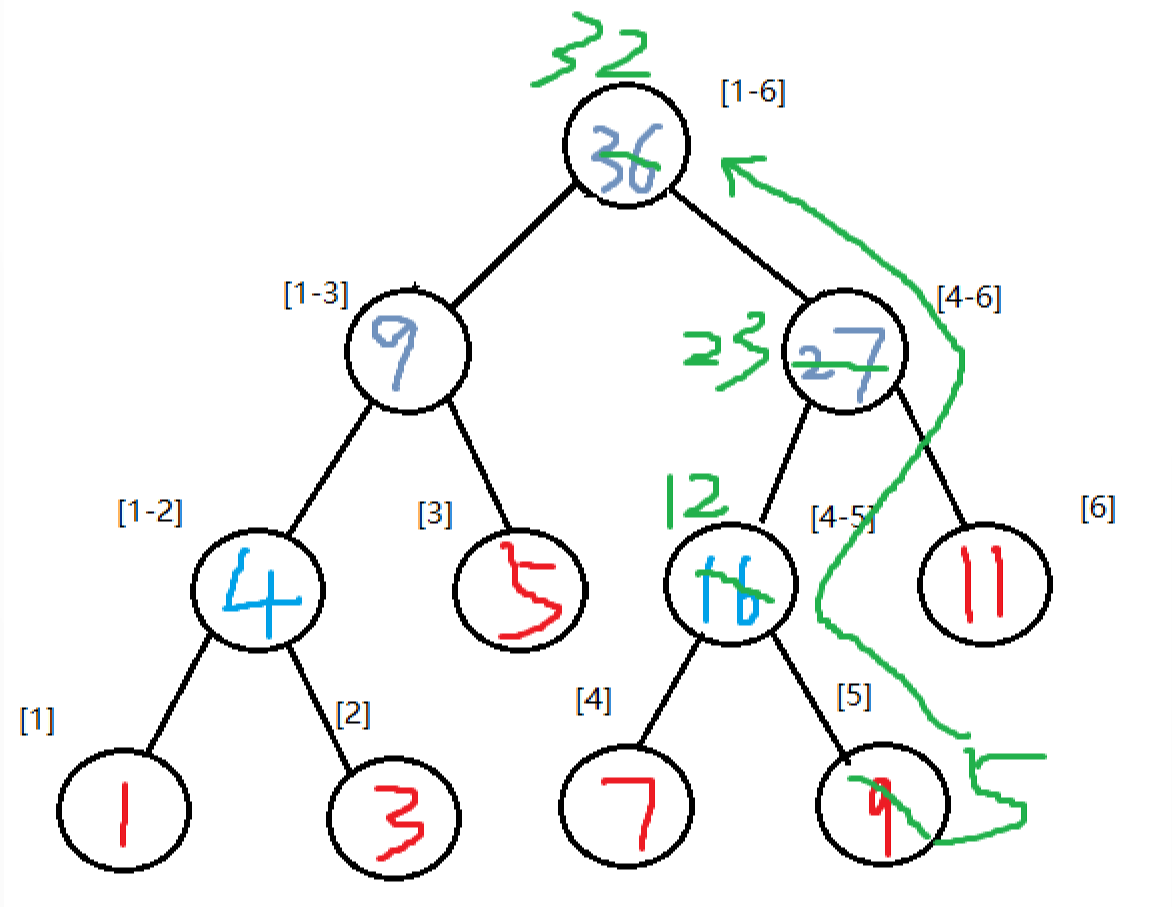


根节点记录的是[1-6]的和，可以把[3-6]分成两半，左边找的是[3],右边是[4-6]，右边可以直接得到[4-6]的和为27，而[3]可以通过[1-3]得到和为5，最终结果为27+5=32。

这样子可以省掉很多搜索的时间，最坏情况是把整棵树都搜索一遍，时间复杂度为O(logn)

回到原题

那么如何更新呢，假如我们想把第5个元素由9变成6



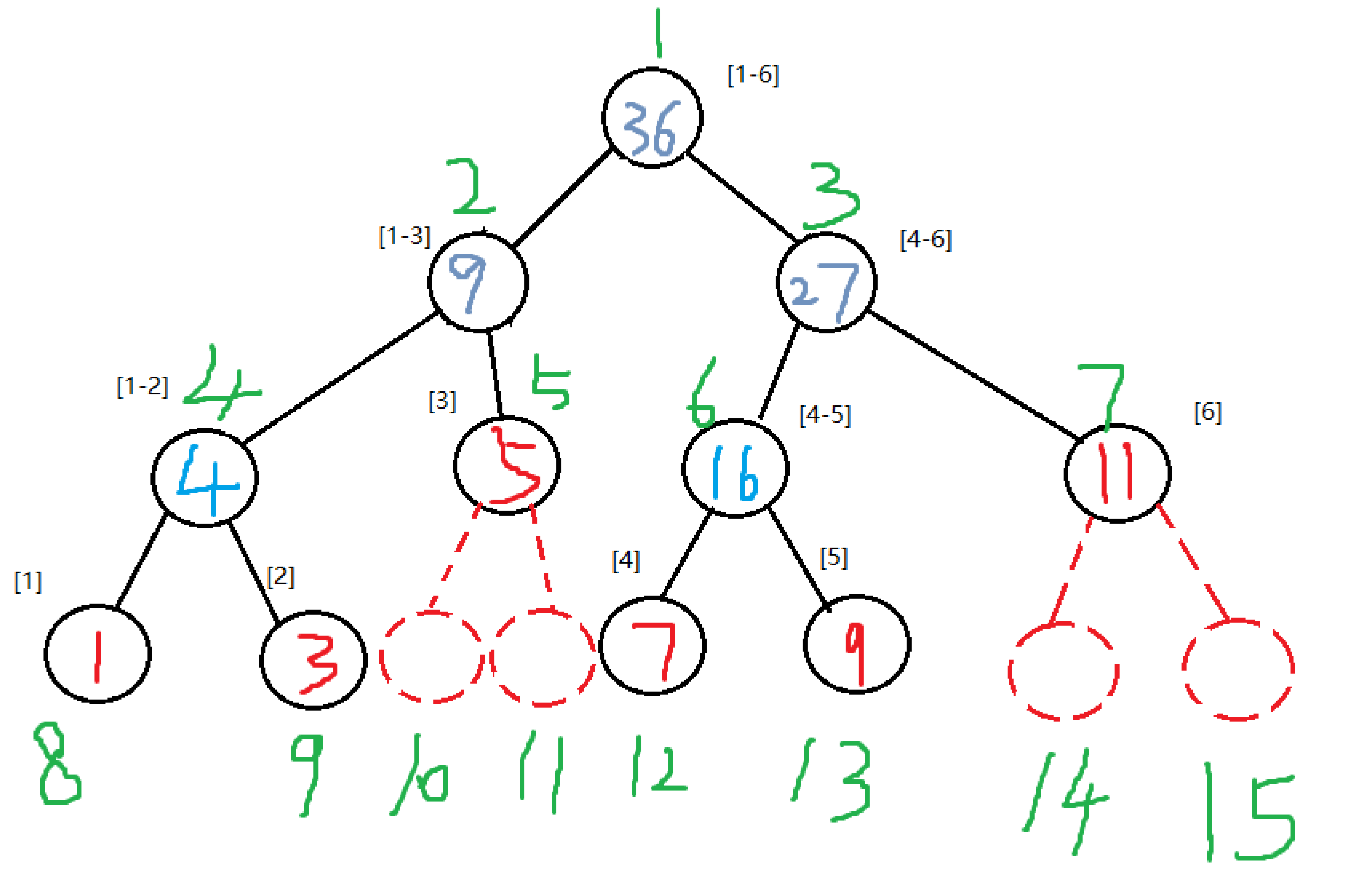
我们先找到9那个结点，然后把其值变为6，接着顺着一条路从下往上一直更新。

同样，更新的时间复杂度也是O(logn)

线段树的实现

由于线段树是用二叉树结构储存的，而且是近乎完全二叉树的，所以我使用了数组tree来存储

数组下标从1开始，同时添加虚结点使其变成完全二叉树



数组下标	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
数组元素	36	9	27	4	5	16	11	1	3	X	X	7	9	X	X

线段树的实现

树的结点的定义

```
struct node
{
    int value; //节点对应区间的权值（不唯一，也可以代表区间最大值等）
    int left, right; //区间[left, right]
};
struct node tree[1000];
int father[100]; //记录某个点的序号，方便查找对应的数组下标
```

建树

```
Build_tree(1, 1, 6);
//为区间[left, right]建立一个以top为祖先的线段树，top为根节点下标
void Build_tree(int top, int left, int right)
{
    tree[top].left = left; //写入第index个结点的左区间
    tree[top].right = right; //写入第index个结点的右区间
    tree[top].value = 0; //每个区间的值初始化为0

    if(left == right)   //区间长度为0时，赋值并且结束递归
    {
        tree[top].value = arr[left];
        father[left] = top;
        return;
    }
    int mid = (right + left) / 2; //取区间中点
    int left_node = top * 2; //左孩子下标
    int right_node = top * 2 + 1;  //右孩子下标
    Build_tree(left_node, left, mid);  //往左孩子方向继续建立线段树
    Build_tree(right_node, mid + 1, right);  //往右孩子方向继续建立线段树
    tree[top].value = tree[left_node].value + tree[right_node].value; //更新结点值为左右孩
}
```

更新

更新数组的第5个元素的值为6，直接在树里面更新该结点的值后，然后从父结点往上更新，直到更新到了根结点。

```
int main()
{
    tree[father[5]].value = 6;
    Update(father[5]);
}

void Update(int index)  //index为要修改那个点的数组下标
{
    int father_node = index / 2; //父结点下标
    int left_node = father_node * 2;    //左孩子下标
    int right_node = father_node * 2 + 1;    //右孩子下标
    tree[father_node].value = tree[left_node].value + tree[right_node].value; //更新值
    if(father_node == 1) //找到树的根结点，终止退出
        return;
    Update(father_node); //递归更新，由父结点往上找
}
```

查询

```
//从index开始查询，所以index一般为树的根结点,查询的区间是[L,R]，结果保留在ans里面
void Query(int index, int L, int R, int& ans){
    if(tree[index].left == L && tree[index].right == R) //找到了一个完全重合的区间
    {
        ans += tree[index].value;
        return;
    }
    int left_node = index*2;
        if(L <= tree[left_node].right) //左区间有涉及
    {
        if(R <= tree[left_node].right) //全包含于左区间，查询区间不变
                Query(left_node, L, R, ans);
        else //半包含于左区间，则查询区间拆分，左端点不变，右端点变为左孩子的右区间端点
                Query(left_node, L, tree[left_node].right, ans);
    }
    int right_node = left_node + 1;
    if(R >= tree[right_node].left) //右区间有涉及
    {
        if(L >= tree[right_node].left) //全包含于右区间，查询区间不变
                Query(right_node, L, R, ans);
        else //半包含于左区间，则查询区间拆分，与上同理
                Query(right_node, tree[right_node].left, R, ans);


    }
```

```cpp
#include <iostream>
using namespace std;

struct node{
    int value; //节点对应区间的权值（不唯一，也可以代表区间最大值等）
    int left, right; //区间[left, right]
};
struct node tree[1000];
int father[100]; //记录某个点的序号，方便查找对应的数组下标
int arr[] = {-1, 1, 3, 5, 7, 9, 11};

//为区间[left, right]建立一个以top为祖先的线段树，top为根节点下标
void Build_tree(int top, int left, int right){

    tree[top].left = left; //写入第index个结点的左区间
    tree[top].right = right; //写入第index个结点的右区间
    tree[top].value = 0; //每个区间的值初始化为0

    if(left == right){  //区间长度为0时，赋值并且结束递归

      tree[top].value = arr[left];
        father[left] = top;
        return;
    }
    int mid = (right + left) / 2; //取区间中点
    int left_node = top * 2; //左孩子下标
    int right_node = top * 2 + 1;  //右孩子下标
    Build_tree(left_node, left, mid);  //往左孩子方向继续建立线段树
    Build_tree(right_node, mid + 1, right);  //往右孩子方向继续建立线段树
    tree[top].value = tree[left_node].value + tree[right_node].value; //更新结点值为左右
}

void Update(int index){ //index为要修改那个点的数组下标
    int father_node = index / 2; //父结点下标
    int left_node = father_node * 2;   //左孩子下标
    int right_node = father_node * 2 + 1;   //右孩子下标
    tree[father_node].value = tree[left_node].value + tree[right_node].value; //更新值
    if(father_node == 1) //找到树的根结点，终止退出
      return;
    Update(father_node); //递归更新，由父结点往上找
}
```

```cpp
void Query(int index, int L, int R, int& ans){
    if(tree[index].left == L && tree[index].right == R){ //找到了一个完全重合的区间
        ans += tree[index].value;
        return;
    }
    int left_node = index*2;
    if(L <= tree[left_node].right){ //左区间有涉及

      if(R <= tree[left_node].right) //全包含于左区间，查询区间不变
          Query(left_node, L, R, ans);
        else //半包含于左区间，则查询区间拆分，左端点不变，右端点变为左孩子的右区间端点
          Query(left_node, L, tree[left_node].right, ans);
    }
    int right_node = left_node + 1;
    if(R >= tree[right_node].left){ //右区间有涉及
      if(L >= tree[right_node].left) //全包含于右区间，查询区间不变
          Query(right_node, L, R, ans);
        else //半包含于左区间，则查询区间拆分，与上同理
          Query(right_node, tree[right_node].left, R, ans);
    }
}
int main(){
    Build_tree(1, 1, 6); //建树
    tree[father[5]].value = 6; //修改第5个元素的值为6
    Update(father[5]);
    int ans = 0;
    Query(1, 3, 6, ans); //查询区间[3-6]的值
    cout << ans << endl;
    return 0;
}
```