

Лабораторная работа «СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ»

Цели:

1. Изучить основные понятия сетевого планирования и управления
2. Освоить этапы построения сетевого графика и правила расчета его параметров
3. Научиться решать и анализировать задачу сетевого планирования с одновременной оптимизацией.

Контрольные вопросы

1. Что называется событием, работой, фиктивной работой?
2. Сформулируйте правила построения сетевых графиков.
3. Какие временные параметры сетевого графика Вы знаете?
4. Что называется ранним, поздним сроком свершения события, резервом времени события?
5. Что называется ранним, поздним сроком начала (окончания) работы, полным резервом времени?
6. Какие виды резервов времени Вы знаете?
7. Дайте определение критического пути.
8. Что называется линейным графиком (графиком Ганта)?
9. Как производится учет потребностей в ресурсах при выполнении комплекса работ?
10. Как производится оптимизация сетевого графика?

Пример нахождения основных параметров сетевого графика

Для организации производства и сбыта новой продукции необходимо выполнить комплекс работ. С этой целью создана группа из $R=10$ специалистов (см. таблицу). Составить сетевой график выполнения проекта. Найти ранние и поздние сроки свершения событий и их резервы времени. Определить критический путь. Определить ранние и поздние сроки начала и окончания работ. Найти резервы времени работ (четыре типа).

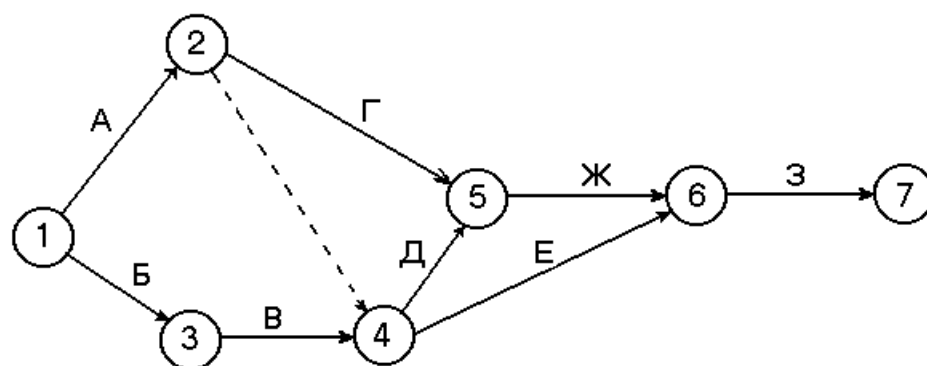
Таблица

Исходные данные проекта

Работа	Описание работы	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность, дн.	Число исполнителей
А	Разработка технических условий	—	4	6
Б	Эскизное проектирование	—	1	4
В	Техническое проектирование	Б	2	7
Г	Закупка необходимых комплектующих	А	3	5
Д	Изготовление деталей	А, В	5	6
Е	Согласование сроков поставки, заключение договоров	В	10	3
Ж	Сборка изделий	Г, Д	4	8
З	Отправка продукции потребителям	Е, Ж	2	6

Построить линейный график (календарный график, график Ганта) и график интенсивности использования ресурсов.

Решение. Составим сетевой график комплекса работ. Исходное событие (1) означает момент начала выполнения проекта. Работам А и Б не предшествуют никакие работы, следовательно, на графике они изображены дугами, выходящими из исходного события. Работе В предшествует работа Б, поэтому на графике дуга В непосредственно следует за дугой Б. Событию (2) означает момент окончания работы А, и начала работ, которым она предшествует. Работе Д предшествуют работы А и В. На графике эта зависимость отражена с помощью введения фиктивной работы (2, 4). Аналогично с учетом взаимосвязей изображаются на графике (рис. 5.6) все оставшиеся работы. Завершающее событие (7) означает момент выполнения всего проекта. Номера, присвоенные нами событиям (см. рисунок), соответствуют правилам ранжирования. Работу, соединяющую соседние события с номерами i и j , теперь будем обозначать (i, j) . В новых обозначениях работа В примет вид (3, 4), ее продолжительность $t_{34} = 4$.



Сетевой график

Ранним сроком $t_p(i)$ свершения события i называется самый ранний момент времени, к которому завершаются все предшествующие этому событию работы. Так как может быть несколько путей, предшествующих данному событию, то ранний срок свершения события определяется продолжительностью максимального предшествующего пути $t_p(i) = t[L_1(i)]$, где $L_1(i)$ – **максимальный предшествующий путь**. Ранний срок свершения события (7) совпадает с критическим временем: $t_p(7) = t_{кр}$.

Найдем ранний срок свершения каждого события:

$$t_{\delta}(1) = 0; \quad t_{\delta}(2) = t_{\delta}(1) + t_{12} = 0 + 4 = 4; \quad t_{\delta}(3) = t_{\delta}(1) + t_{13} = 1;$$

$$t_{\delta}(4) = \max \{t_{\delta}(2) + t_{24}, t_{\delta}(3) + t_{34}\} = \max \{4 + 0, 1 + 2\} = 4;$$

$$t_{\delta}(5) = \max \{t_{\delta}(2) + t_{25}, t_{\delta}(4) + t_{45}\} = \max \{4 + 3, 4 + 5\} = 9;$$

$$t_{\delta}(6) = \max \{t_{\delta}(4) + t_{46}, t_{\delta}(5) + t_{56}\} = \max \{4 + 10, 9 + 4\} = 14;$$

$$t_{\delta}(7) = t_{\delta}(6) + t_{67} = 16$$

Итак, завершающее 7–е событие может свершиться лишь на 16 день от начала разработки. Это минимальное время, за которое могут быть выполнены все работы проекта, оно определяется самым длинным полным путем. Ранний срок свершения события (7) совпадает с критическим временем: $t_{\delta}(7) = t_{кр}$.

Поздним сроком $t_{\pi}(i)$ свершения события i является самый поздний момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием, без превышения критического времени $t_{\text{кр}}$. Очевидно, что $t_{\pi}(i)$ определяется разностью между $t_{\text{кр}}$ и длиной максимального из последующих путей $L_2(i)$: $t_{\pi}(i) = t_{\text{кр}} - t[L_2(i)]$. Для событий критического пути ранний и поздний сроки свершения совпадают.

Найдем поздний срок свершения каждого события:

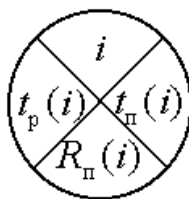
$$\begin{aligned} t_{\pi}(7) &= t_{\text{кр}} = 16; \quad t_{\pi}(6) = t_{\pi}(7) - t_{67} = 16 - 2 = 14; \quad t_{\pi}(5) = t_{\pi}(6) - t_{56} = 10; \\ t_{\pi}(4) &= \min\{t_{\pi}(5) - t_{45}, t_{\pi}(6) - t_{46}\} = \min\{10 - 5, 14 - 10\} = 4; \quad t_{\pi}(3) = t_{\pi}(4) - t_{34} = 2; \\ t_{\pi}(2) &= \min\{t_{\pi}(4) - t_{24}, t_{\pi}(5) - t_{25}\} = \min\{4 - 0, 10 - 3\} = 4; \quad t_{\pi}(1) = 0. \end{aligned}$$

Разность между поздним и ранним сроками свершения события составляет *резерв времени события* $R(i) = t_{\pi}(i) - t_p(i)$. Резервы критических событий равны 0.

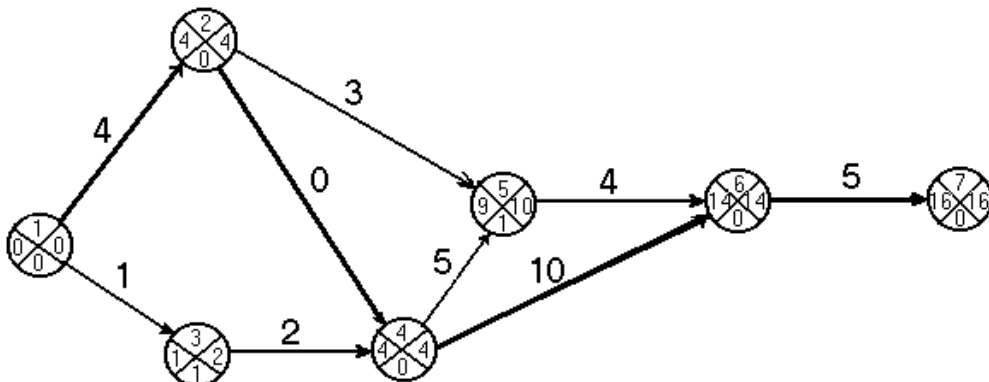
При расчете временных параметров вручную удобно проводить вычисления непосредственно на графе, воспользовавшись четырехсекторной схемой. В этом случае каждый кружок, обозначающий событие, делим на четыре сектора, в каждом из которых записываем следующую информацию:

1. Проставляем в верхних секторах номера событий (в соответствии с ранжированием).
2. Рассматривая события в порядке возрастания номеров, по входящим в данное событие работам определяем $t_p(i)$ и записываем в левом секторе.
3. Начиная с конечного события, для которого $t_{\pi}(n) = t_{\text{кр}}$ (n – номер конечного события), для каждого события по выходящим из него работам определяем $t_{\pi}(i)$ и записываем в правом секторе.
4. В нижнем секторе записываем резерв времени события $R(i)$.

Четырехсекторная схема расчетов:



Для нашего примера расчеты приведены на рисунке ниже.



Сетевой график

Критический путь

$$L_{\text{к}} = \{1-2-4-6-7\}.$$

Зная сроки свершения событий, можно определить **временные параметры работ**.

Ранний срок начала работы (i, j) равен раннему сроку свершения события i :

$$t_{\text{р}}(i, j) = t_{\text{р}}(i).$$

Ранний срок окончания работы (i, j) равен сумме раннего срока свершения начального события работы и ее продолжительности:

$$t_{\text{рн}}(i, j) = t_{\text{р}}(i) + t_{ij}.$$

Поздний срок окончания работы (i, j) совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события:

$$t_{\text{п}}(i, j) = t_{\text{п}}(j).$$

Поздний срок начала работы (i, j) равен разности между поздним сроком свершения ее конечного события и продолжительностью:

$$t_{\text{пн}}(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{ij}.$$

Так как сроки выполнения работ находятся в границах, определяемых $t_{\text{р}}(i, j)$ и $t_{\text{п}}(i, j)$, то они могут иметь разного вида резервы времени.

Полный резерв времени работы

$$R(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

Независимый (свободный) резерв времени работы

$$R(i, j) = t_{\text{р}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

Величина необходимого резерва показывает продолжительность вынужденного ожидания наступления конечного события данной работы.

Частный резерв времени работы первого вида $R'(i, j)$

$$R'(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

Частный резерв времени работы второго вида $R''(i, j)$

$$R''(i, j) = t_{\text{п}}(j) - t_{\text{р}}(i) - t_{ij}.$$

Например, для работы $(2; 5)$:

$$t_{\text{рн}}(2; 5) = t_{\text{р}}(2) = 4, \quad t_{\text{по}}(2; 5) = t_{\text{р}}(2) + t_{25} = 4 + 3 = 7, \quad t_{\text{пн}}(2; 5) = t_{\text{п}}(5) - t_{25} = 10 - 3 = 7.$$

Аналогичным образом рассчитываются временные параметры остальных работ.

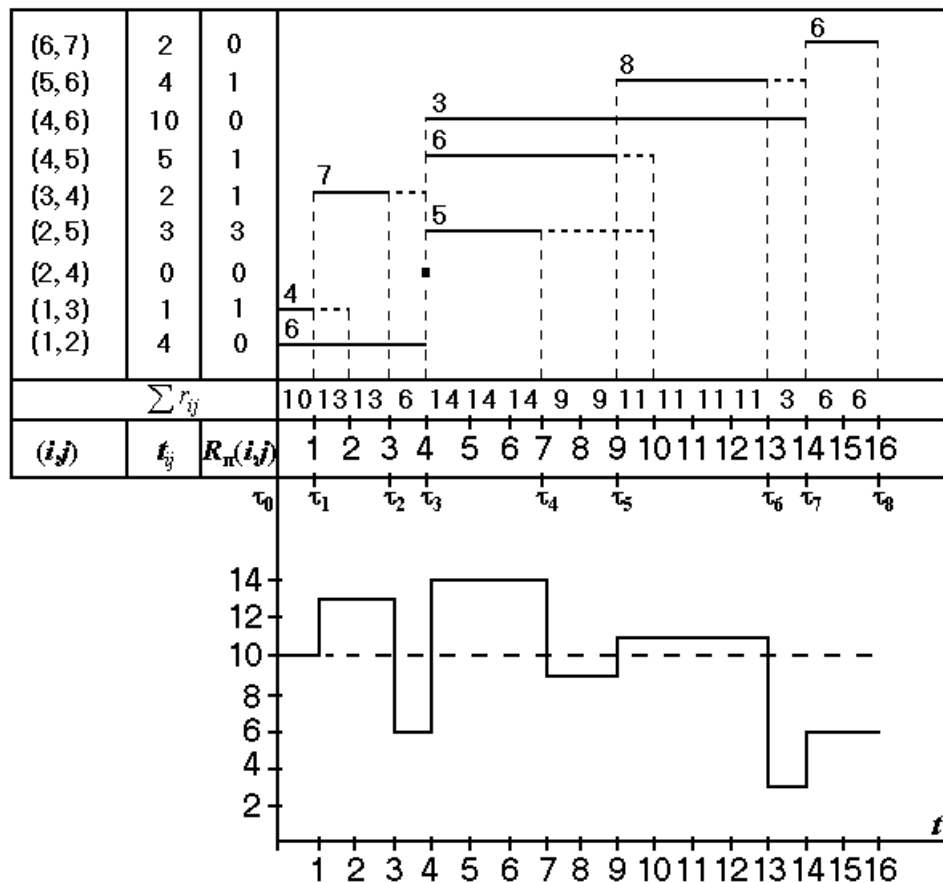
Вычисляем временные параметры работ примера и заносим результаты в таблицу:

Таблица

Временные параметры работ

(i, j)	t_{pn}	t_{po}	t_{no}	t_{nn}	R_i	R	R'	R''
(1, 2)	0	4	4	0	0	0	0	0
(1, 3)	0	1	2	1	1	0	1	0
(2, 4)	4	4	4	4	0	0	0	0
(2, 5)	4	7	10	7	3	2	3	2
(3, 4)	1	3	4	2	1	0	0	1
(4, 5)	4	9	10	5	1	0	1	0
(4, 6)	4	14	14	4	0	0	0	0
(5, 6)	9	13	14	10	1	0	0	1
(6, 7)	14	16	16	14	0	0	0	0

Построим линейный график (календарный график, график Ганта) и график интенсивности использования ресурсов:



На линейном графике (графике Ганта) изображается ранний срок начала каждой работы, ее продолжительность, а также полный резерв времени для каждой работы. По графику также можно определить работы, принадлежащие критическому пути (если полный резерв времени равен нулю, то событие принадлежит критическому пути).

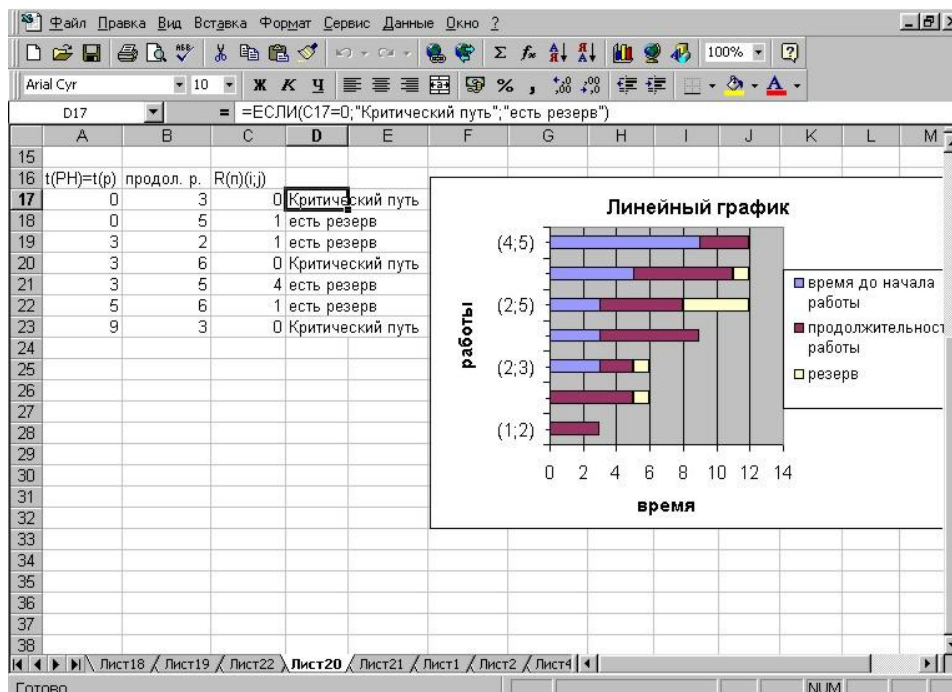
Построение диаграммы «Линейный график» с использованием компьютера

1. Щелкнуть курсором на кнопке Мастер диаграмм. На экране: окно **Мастер диаграмм** – шаг 1 (вид диаграммы).

Выбрать: **Линейчатая; Вид: Вид 2. Далее.**

2. На экране: окно Мастер диаграмм – шаг 2 (источник данных диаграммы) и вид выбранной диаграммы. **Диапазон:** вводим наши данные (три столбца: ранний срок начала каждой работы, ее продолжительность, а также полный резерв времени), **Ряд – подписи по оси X:** вводим столбец «Работы»: (1;2) – (4;5). **Далее.**

3. На экране: окно Мастер диаграмм – шаг 3 (параметры диаграммы). На этом шаге можно ввести легенду, а также название диаграммы и осей. Вводимый текст виден на экране. **Далее.**



4. На экране: окно Мастер диаграмм – шаг 4 (размещение диаграммы). Выбрать: **поместить диаграмму на имеющемся листе. Готово.**

5. На экране диаграмма.

Пример минимизации вложенных средств

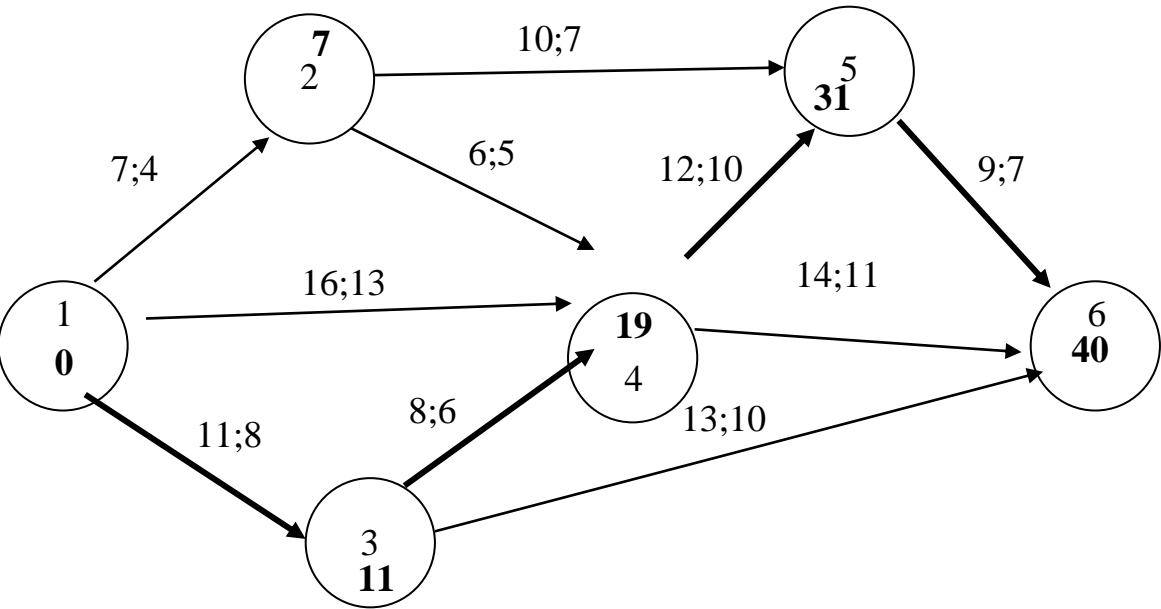
Проект представлен сетевым графиком. Для каждой работы известна ее продолжительность t_{ij} и минимально возможное время выполнения d_{ij} . Пусть задан срок выполнения проекта t_0 , а расчетное $t_{кр} > t_0$. Продолжительность выполнения работы (i,j) линейно зависит от суммы дополнительно вложенных средств x_{ij} и выражается соотношением: $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}$. Технологические коэффициенты k_{ij} известны.

Требуется найти такие t^H_{ij} , t^0_{ij} , x_{ij} , чтобы:

- срок выполнения всего комплекса работ не превышал заданной величины t_0 ;
- суммарное количество дополнительно вложенных средств было минимальным.;
- продолжительность выполнения каждой работы t'_{ij} была не меньше заданной величины d_{ij} .

Номер задачи	Параметры	Работы										Срок выполнения проекта t_0
		1,2	1,3	1,4	2,4	2,5	3,4	3,6	4,5	4,6	5,6	
*	t_{ij}	7	11	16	6	10	8	13	12	14	9	34
	d_{ij}	4	8	13	5	7	6	10	10	11	7	
	k_{ij}	0,1	0,3	0,2	0,05	0,25	0,2	0,12	0,5	0,08	0,02	

1 Запишем все данные на сетевой график и рассчитаем сроки свершения событий для варианта *.



Расчеты показали, что срок выполнения проекта $t_{кр} = 40$, т.е. превышает директивный срок $t_0 = 34$.

2. Составление математической модели задачи.

Обозначим суммы дополнительно вложенных средств x_{ij} .

Целевая функция имеет вид

$$f= x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{34} + x_{35} + x_{45} + x_{14} + x_{34} + x_{35} + x_{45} \text{ (min) } .$$

Запишем ограничения задачи:

а) срок выполнения проекта не должен превышать $t_0 = 34$:

$$t^o_{36} \leq 34; t^o_{46} \leq 34; t^o_{56} \leq 34;$$

б) продолжительность выполнения каждой работы должна быть не меньше минимально возможного времени:

$$\begin{aligned} t^o_{12} - t^H_{12} &\geq 4; & t^o_{34} - t^H_{34} &\geq 6; \\ t^o_{13} - t^H_{13} &\geq 8; & t^o_{36} - t^H_{36} &\geq 10; \\ t^o_{14} - t^H_{14} &\geq 13; & t^o_{45} - t^H_{45} &\geq 10; \\ t^o_{24} - t^H_{24} &\geq 5; & t^o_{46} - t^H_{46} &\geq 11; \\ t^o_{25} - t^H_{25} &\geq 7; & t^o_{56} - t^H_{56} &\geq 7; \end{aligned}$$

в) зависимость продолжительности работ от вложенных средств:

$$\begin{aligned} t_{12}^o - t_{12}^h &= 7 - 0,1x_{12}; & t_{13}^o - t_{13}^h &= 11 - 0,3x_{13}; \\ t_{14}^o - t_{14}^h &= 16 - 0,2x_{14}; & t_{24}^o - t_{24}^h &= 6 - 0,05x_{24}; \\ t_{25}^o - t_{25}^h &= 10 - 0,25x_{25}; & t_{34}^o - t_{34}^h &= 8 - 0,2x_{34}; \\ t_{36}^o - t_{36}^h &= 13 - 0,12x_{36}; & t_{45}^o - t_{45}^h &= 12 - 0,5x_{45}; \\ t_{46}^o - t_{46}^h &= 14 - 0,08x_{46}; & t_{56}^o - t_{56}^h &= 9 - 0,02x_{56}; \end{aligned}$$

г) время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей работы:

$$\begin{aligned} t_{12}^h &= 0; & t_{13}^h &= 0; & t_{14}^h &= 0; \\ t_{24}^h &\geq t_{12}^o; & t_{25}^h &\geq t_{12}^o; & t_{34}^h &\geq t_{13}^o; & t_{36}^h &\geq t_{13}^o; \\ t_{45}^h &\geq t_{14}^o; & t_{45}^h &\geq t_{24}^o; & t_{45}^h &\geq t_{34}^o; \\ t_{46}^h &\geq t_{14}^o; & t_{46}^h &\geq t_{24}^o; \\ t_{46}^h &\geq t_{34}^o; & t_{56}^h &\geq t_{25}^o; & t_{56}^h &\geq t_{45}^o; \end{aligned}$$

д) условие неотрицательности неизвестных:

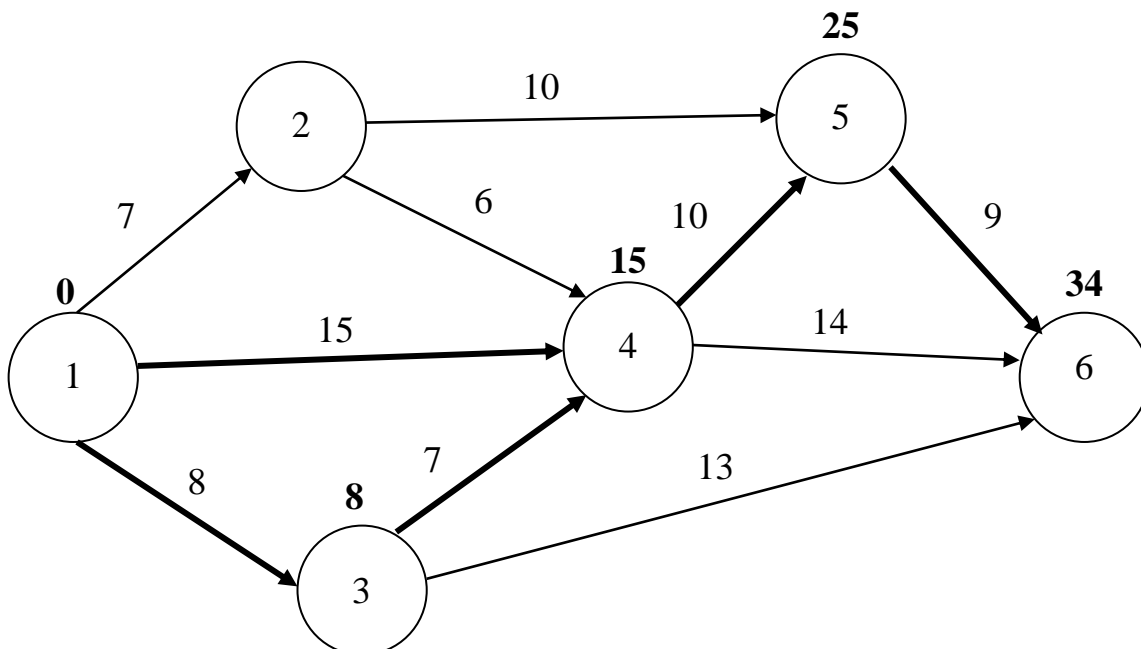
$$t_{ij}^h \geq 0, t_{ij}^o \geq 0, x_{ij} \geq 0, (i,j) \in \vec{e}.$$

3. Численное решение задачи:

Решив данную задачу (например, средствами EXCEL), получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} t_{12}^h &= 0; & t_{12}^o &= 7; & t_{13}^h &= 0; & t_{13}^o &= 8; & t_{14}^h &= 0; & t_{14}^o &= 15; \\ t_{24}^h &= 7; & t_{24}^o &= 13; & t_{25}^h &= 7; & t_{25}^o &= 17; \\ t_{34}^h &= 8; & t_{34}^o &= 15; & t_{36}^h &= 8; & t_{36}^o &= 21; \\ t_{45}^h &= 15; & t_{45}^o &= 25; & t_{56}^h &= 25; & t_{56}^o &= 34; \\ x_{12} &= 0; & x_{13} &= 10; & x_{14} &= 5; & x_{24} &= 0; & x_{25} &= 0; \\ x_{34} &= 5; & x_{36} &= 0; & x_{45} &= 4; & x_{46} &= 0; & x_{56} &= 0; \\ f_{\min} &= 24. \end{aligned}$$

Результаты представим на сетевом графике:



4. *Анализ полученных результатов.* Чтобы выполнить работы проекта за директивное время $t_0=34$, необходимо дополнительно вложить 24 ден.ед. При этом средства распределяются следующим образом: 10 ден.ед. – в работу (1,3), 5 ден.ед. – в работу (1,4), 5 ден.ед. – в работу (3,4) и 4 ден.ед. – в работу (4,5), что приведет к сокращению продолжительности работы (1,3) на 3 дня, работы (1,4) – на 1 день, работы (3,4) – на 1 день и работы (4,5) – на 2 дня. Сокращение срока реализации проекта за счет вложения дополнительных средств составит 6 ед. времени.

Пример минимизации времени выполнения всего комплекса работ

Проект представлен сетевым графиком. Для каждой работы известна ее продолжительность t_{ij} и минимально возможное время выполнения d_{ij} . Для сокращения срока реализации проекта выделено B ден.ед. Вложение дополнительных средств x_{ij} в работу (i,j) сокращает время ее выполнения до $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}$. Технологические коэффициенты k_{ij} известны.

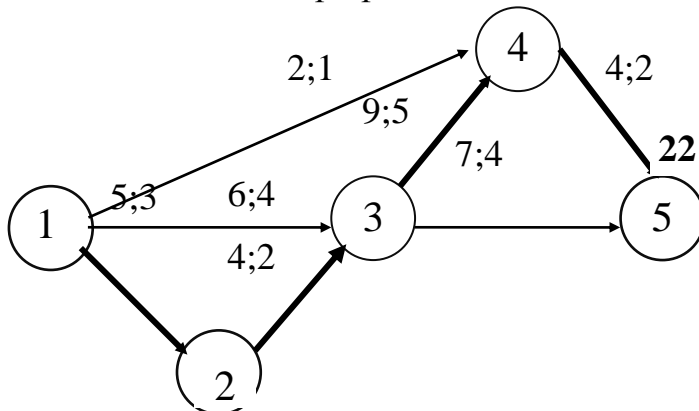
Требуется найти такие t^H_{ij} , t^0_{ij} , x_{ij} , чтобы:

- время выполнения всего комплекса работ было минимальным;
- количество используемых дополнительных средств не превышало B ден. ед.;
- продолжительность выполнения каждой работы была не меньше заданной величины d_{ij} .

Вариант	Параметры	Работы							Сумма средств B
		(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(3,4)	(3,5)	(4,5)	
*	t_{ij}	5	6	2	4	9	7	4	47
	d_{ij}	3	4	1	2	5	4	2	
	k_{ij}	0,5	0,2	0,3	0,25	0,4	0,2	0,1	

Решение:

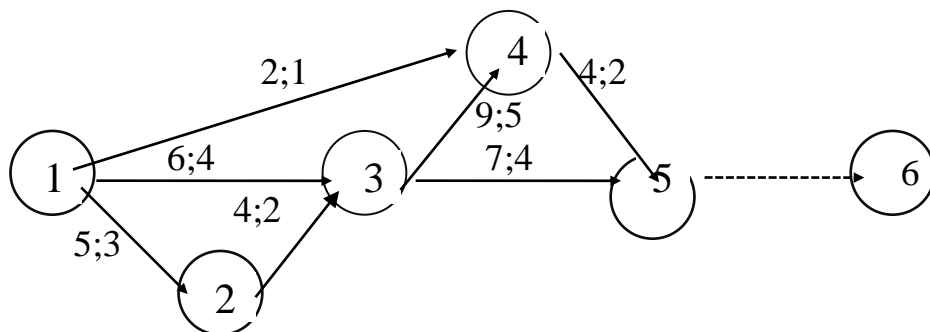
1. Запишем все данные на сетевой график.



По первоначальному условию $t_{кр} = 22$, т.е. проект может быть выполнен за 22 ед. времени.

2. Составление математической модели задачи.

Чтобы однозначно записать целевую функцию, добавим на сетевом графике фиктивную работу (5,6).



Целевая функция имеет вид

$$t_{кр} = t_{56}^0 \text{ (min) .}$$

Запишем ограничения задачи:

а) сумма вложенных средств не должна превышать их наличного количества:

$$x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{45} \leq 47;$$

б) продолжительность выполнения каждой работы должна быть не меньше минимально возможного времени:

$$\begin{aligned} t_{12}^0 - t_{12}^H &\geq 3; & t_{34}^0 - t_{34}^H &\geq 5; \\ t_{13}^0 - t_{13}^H &\geq 4; & t_{35}^0 - t_{35}^H &\geq 4; \\ t_{14}^0 - t_{14}^H &\geq 1; & t_{45}^0 - t_{45}^H &\geq 2; \\ t_{23}^0 - t_{23}^H &\geq 2; & t_{56}^0 - t_{56}^H &= 0; \end{aligned}$$

в) зависимость продолжительности работ от вложенных средств:

$$\begin{aligned} t_{12}^0 - t_{12}^H &= 5 - 0,5x_{12}; & t_{13}^0 - t_{13}^H &= 6 - 0,2x_{13}; \\ t_{14}^0 - t_{14}^H &= 2 - 0,3x_{14}; & t_{23}^0 - t_{23}^H &= 4 - 0,25x_{23}; \\ t_{34}^0 - t_{34}^H &= 9 - 0,4x_{34}; & t_{35}^0 - t_{35}^H &= 7 - 0,2x_{35}; \\ t_{45}^0 - t_{45}^H &= 4 - 0,1x_{45}; \end{aligned}$$

г) время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей работы:

$$\begin{aligned} t_{12}^H &= 0; & t_{13}^H &= 0; & t_{14}^H &= 0; & t_{23}^H &\geq t_{12}^0; \\ t_{34}^H &\geq t_{13}^0; & t_{34}^H &\geq t_{23}^0; \\ t_{35}^H &\geq t_{13}^0; & t_{35}^H &\geq t_{23}^0; \\ t_{45}^H &\geq t_{14}^0; & t_{45}^H &\geq t_{34}^0; \\ t_{56}^H &\geq t_{35}^0; & t_{56}^H &\geq t_{45}^0; \end{aligned}$$

д) условие неотрицательности неизвестных:

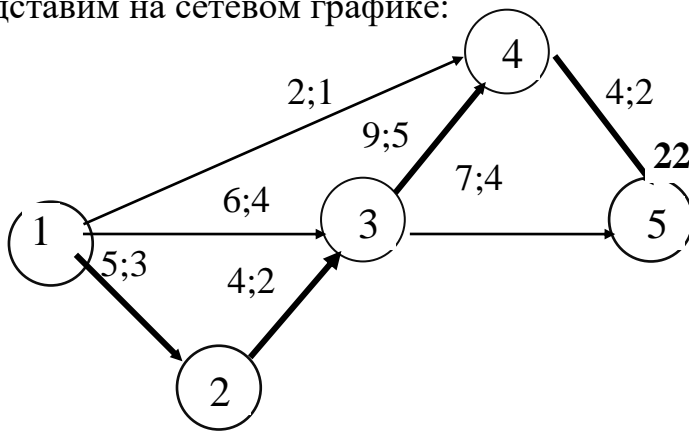
$$t_{ij}^H \geq 0, t_{ij}^O \geq 0, x_{ij} \geq 0, (i,j) \in \vec{e}.$$

5. Численное решение задачи:

Решив данную задачу (например, средствами EXCEL), получаем следующие результаты:

$$\begin{aligned} t_{12}^H &= 0; t_{12}^O = 3; t_{13}^H = 0; t_{13}^O = 3; t_{14}^H = 0; t_{14}^O = 2; \\ t_{23}^H &= 3; t_{23}^O = 3; t_{34}^H = 3; t_{34}^O = 8; t_{35}^H = 3; t_{35}^O = 10; \\ t_{45}^H &= 8; t_{45}^O = 10; t_{56}^H = 10; t_{56}^O = 10; \\ x_{12} &= 20; x_{13} = 0; x_{23} = 0; x_{14} = 0; x_{34} = 10; x_{35} = 0; x_{45} = 20, \\ t_{кр} &= 10. \end{aligned}$$

Результаты представим на сетевом графике:



5. Анализ полученных результатов. При дополнительном вложении 47 ден.ед., проект может быть выполнен за 10 ед. времени. При этом средства распределятся следующим образом: 20 ден.ед. – в работу (1,2), 10 ден.ед. – в работу (3,4) и 20 ден.ед. – в работу (4,5), что приведет к сокращению продолжительности работы (1,2). Сокращение срока реализации проекта за счет вложения дополнительных средств составит 8 ед. времени.