

## Лабораторная работа «ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

### *Цели:*

1. Научиться составлять оптимизационные модели, находить оптимальное решение.
2. Освоить основные положения теории двойственности и их применение при решении задач
3. Научиться проводить содержательный послеоптимизационный анализ полученных результатов.

### *Контрольные вопросы*

1. Что называется задачей линейного программирования? Приведите примеры.
2. Что называется допустимым планом? Всегда ли он существует? Приведите примеры.
3. Что называется оптимальным планом? Всегда ли он существует? Приведите примеры.
4. Какие методы решения ЗЛП Вы знаете?
5. Какой смысл имеют переменные прямой и двойственной задач в задаче распределения ресурсов?
6. Какой смысл имеют дополнительные переменные в задаче распределения ресурсов? дополнительные переменные двойственной задачи?
7. Используя теорию двойственности, ответить на вопросы:
  - прямая задача имеет оптимальный план. Что можно сказать про решение двойственной?
  - некоторые переменные оптимального плана прямой задачи отличны от нуля. Что можно сказать про соответствующие ограничения двойственной задачи?
  - при изменении количества одного из ресурсов на единицу, как изменится оптимальное значение целевой функции?
8. Зная решение задачи распределения ресурсов, укажите дефицитные и избыточные ресурсы. Какой ресурс является наиболее ценным?

### **ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ**

1. Составить математическую модель задачи. Объяснить смысл переменных.
2. Составить математическую модель двойственной задачи. Объяснить смысл двойственных переменных.
3. Найти оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль:
  - а) графически,
  - б) симплекс-методом,
  - в) на компьютере, например, используя надстройку «Поиск решения».
4. Провести анализ оптимальных решений прямой и двойственной задач, используя отчеты трех типов (по результатам, по устойчивости, по пределам):
  - а) указать, какая продукция вошла в оптимальный план, и насколько невыгодно производство продукции, не вошедшей в оптимальный план,
  - б) указать дефицитные и избыточные ресурсы,
  - в) выписать оптимальное решение двойственной задачи,

г) указать наиболее дефицитный ресурс, исходя из оптимального решения двойственной задачи,

д) указать интервал устойчивости двойственных оценок,

5. Решить двойственную задачу. Сравнить решение с полученным в пункте 4.

6. Выяснить, как изменится выпуск продукции и значение целевой функции, при изменении каждого из имеющихся ресурсов на единицу. Оценить отдельные и суммарные изменения.

### Варианты

**В 1.** Найти оптимальное сочетание посевов двух культур: пшеницы и гречихи. Эффективность возделывания названных культур (в расчете на 1 га) характеризуется показателями, значения которых приведены в таблице:

Показатель	Пшеница	Гречиха
Урожайность, ц	20	10
Затраты труда механизаторов, чел.-дней	1	2
Затраты ручного труда, чел.-дней	3	1
Прибыль, ден. ед.	4	10

Производственные ресурсы: 4000 га пашни, 5000 чел.-дней труда механизаторов, 9000 чел.-дней ручного труда. Критерий оптимальности – максимум прибыли.

**В 2.** На предприятии освоены две технологии производства основной продукции. Запасы потребляемых ресурсов, затраты их в течение месяца и объемы выпуска готовой продукции при каждой технологии за тот же период приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурса	Расход ресурса при технологии	
		№ 1	№ 2
P1	34	2	4
P2	16	4	1
P3	22	2	3
Прибыль, ден. ед.		7	3

Установить такое время работы предприятия по каждой технологии, при котором выпуск продукции будет максимальным, а расход ресурсов не превысит их наличия.

**В 3.** Для изготовления обуви двух моделей на фабрике используются два сорта кожи. Ресурсы рабочей силы и материала, затраты труда и материала для изготовления каждой пары обуви, а также прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурса	Затраты на одну пару по моделям	
		№ 1	№ 2
Рабочее время, чел.-ч	1000	1	2
Кожа 1-го сорта	500	3	1
Кожа 2-го сорта	1200	0	1
Прибыль, ден. ед.		50	40

Составить план выпуска обуви по ассортименту, максимизирующий прибыль.

**В 4.** На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 30 тыс. ден. ед. И помещение площадью в 45 м кв. Участок может быть оснащен машинами двух типов, характеристики которых приведены в таблице:

Марка машины	Стоимость машины, тыс. ден. ед.	Занимаемая площадь, м кв.	Производительность за смену, тыс. ед.
М1	6	9	8
М2	3	4	5

Найти оптимальный план приобретения машин, обеспечивающий новому производственному участку максимальную производительность.

**В 5.** Торговое предприятие реализует товары Т1, Т2, используя при этом площади торговых залов и время обслуживающего персонала. Затраты указанных ресурсов на продажу одной партии товара каждого вида, их объемы и прибыль, получаемая от реализации каждой партии товара, приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурса	Затраты ресурсов по товарам	
		Т1	Т2
Время, чел.-ч	370	0,5	0,7
Площадь, м кв.	90	0,1	0,3
Прибыль, ден. ед.		5	8

Найти оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую максимальную прибыль.

**В 6.** Завод при изготовлении деталей использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. Обработку деталей можно вести по технологиям I и II. Полезный фонд времени работы каждой группы оборудования (в станко-часах), затраты времени на изготовление детали (в часах) и прибыль от выпуска каждой детали приведены в таблице:

Оборудование	Фонд времени, ч	Технология	
		I	II
Токарное	37	3	1
Фрезерное	20	2	2
Сварочное	30	0	1
Прибыль, ден. ед.		11	6

Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

**В 7.** Имеются два проекта на строительство жилых домов. Расход стройматериалов, их запас и полезная площадь дома каждого проекта приведены в таблице:

Стройматериалы	Расход стройматериалов (м куб.) на один дом		Запас стройматериалов, м куб.
	I проекта	II проекта	
Кирпич силикатный	7	3	1365
Кирпич красный	6	3	1245
Пиломатериалы	1	2	650
Полезная площадь, м кв.	60	50	

Определить, сколько домов первого и второго проекта следует построить, чтобы полезная площадь была наибольшей.

**В. 8.** Магазин оптовой торговли реализует два вида продукции П1 и П2. Для этого используются два ограниченных ресурса — полезная площадь помещений, которая составляет 450 м<sup>2</sup>, и рабочее время работников магазина — 600 чел.-ч. Необходимо разработать план товарооборота, доставляющий максимум прибыли. Затраты ресурсов на реализацию и получаемая при этом прибыль представлены в таблице.

Ресурсы	Затраты ресурсов		Объем ресурса
	П1	П2	
Полезная площадь, м <sup>2</sup>	1,5	2	450
Рабочее время, чел.-ч	3	2	600
Прибыль, ден. ед.	50	65	

**В 9.** Исходя из специализации и своих технологических возможностей предприятие может выпускать два вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объем ресурсов (в расчете на трудовую неделю), расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и прибыль, полученная за единицу продукции, приведены в таблице. Требуется определить план выпуска, доставляющий предприятию максимум прибыли.

	Ресурсы	Выпускаемая продукция		Объем ресурсов
		П1	П2	
P1	Трудовые ресурсы, чел.-ч	4	2	4800
P2	Полуфабрикаты, кг	2	10	2400
P3	Станочное оборудование, станко-ч	1	0	1500
Цена единицы продукции, ден. ед.		65	70	

**В 10.** На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Вид корма	Кол-во ед. корма в сутки		Общее количество корма (кг)
	Лисица	песец	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
Прибыль от реализации одной шкурки, ден. ед.	16	12	

Определить, сколько лисиц и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок, была максимальной.

**В. 11.** На швейной фабрике для изготовления двух видов изделий (А и В) может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в табл. В ней же указаны имеющиеся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Артикул ткани	Нормы расхода ткани (м) на одно изделие вида		Общее количество ткани (м)
	А	В	
I	1	-	180
II	-	1	210
III	4	2	800
Цена одного изделия (у.е.)	9	6	

**В. 12.** Предприятие выпускает два вида продукции (А и В) и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на ед. прод. вида		Общий фонд рабочего времени (станко-ч)
	А	В	
Токарное	2	1	300
Фрезерное	1	-	70
Шлифовальное	1	2	340
Прибыль от реализации одного изделия, ден. ед.	8	6	

**В 13.** Торговое предприятие планирует организовать продажу двух видов товара (А и В), используя при этом только два вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 840 ч и площадь торгового зала 180 м<sup>2</sup>. При этом известны плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчете на единицу товаров и прибыль от их продажи, которые приведены в таблице. Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимум прибыли.

Показатели	Товар		Общее кол-во ресурсов
	А	В	
Расход рабочего времени на ед. товара (ч)	0,6	0,8	840
Использование площади торгового зала на единицу товара (м <sup>2</sup> )	0,1	0,2	180
Прибыль от продажи единицы товара	5	8	

**В 14.** За бригадой закреплено 210 га пашни. Трудовые ресурсы составляют 2500 чел.-дн., запас минеральных удобрений — 600 ц. С 1 га посева зерновых планируется получить 40 ц зерновых и 120 ц овощей. Для обеспечения такой урожайности на 1 га зерновых культур необходимо внести минеральных удобрений 2 ц, на 1 га овощных культур — 5 ц, а также затратить на 1 га посева зерновых — 7 чел.-дн., на 1 га овощных — 20 чел.-дн. Цены на зерновые и овощные составляют 45 и 20 ден. ед. за 1 ц. Найдите такое сочетание посевных площадей зерновых и овощных культур, которое обеспечило бы максимум денежных поступлений от реализации производственной продукции.

**В 15.** Торговое предприятие имеет ограниченные ресурсы: фонд рабочего времени — 25,7 тыс. чел.-ч, площадь торговых залов — 350 м<sup>2</sup>. Для обеспечения рентабельной работы

торгового предприятия издержки обращения не должны превышать 11,3 млн. р. Постройте математическую модель определения структуры товарооборота предприятия торговли при заданных объемах ресурсов на единицу товара, затратах ресурсов для получения максимальной прибыли. Исходные данные представлены в табл.

Показатель	Товарная группа, затраты на 1 т	
	мясо	молочные продукты
Фонд рабочего времени, чел.-ч.	130	320
Площадь торговых залов, м <sup>2</sup>	2	3,5
Издержки обращения, тыс. р.	70	130
Прибыль от продажи 1 т, млн. р.	0,125	0,24

**В 16.** Найти оптимальное сочетание посевов двух культур: пшеницы и гречихи. Эффективность возделывания названных культур (в расчете на 1 га) характеризуется показателями, значения которых приведены в таблице:

Показатель	Пшеница	Гречиха
Урожайность, ц	20	10
Затраты труда механизаторов, чел.-дней	1	2
Затраты ручного труда, чел.-дней	3	1
Прибыль, ден. ед.	4	10

Производственные ресурсы: 4000 га пашни, 5000 чел.-дней труда механизаторов, 9000 чел.-дней ручного труда. Критерий оптимальности – максимум прибыли.

**В 17.** На предприятии освоены две технологии производства основной продукции. Запасы потребляемых ресурсов, затраты их в течение месяца и объемы выпуска готовой продукции при каждой технологии за тот же период приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурса	Расход ресурса при технологии	
		№ 1	№ 2
P1	34	2	4
P2	16	4	1
P3	22	2	3
Прибыль, ден. ед.		7	3

Установить такое время работы предприятия по каждой технологии, при котором выпуск продукции будет максимальным, а расход ресурсов не превысит их наличия.

**В 18.** Для изготовления обуви двух моделей на фабрике используются два сорта кожи. Ресурсы рабочей силы и материала, затраты труда и материала для изготовления каждой пары обуви, а также прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурса	Затраты на одну пару по моделям	
		№ 1	№ 2
Рабочее время, чел.-ч	1000	1	2
Кожа 1-го сорта	500	3	1
Кожа 2-го сорта	1200	0	1
Прибыль, ден. ед.		50	40

Составить план выпуска обуви по ассортименту, максимизирующий прибыль.

**В 19.** На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 30 тыс. ден. ед. И помещение площадью в 45 м кв. Участок может быть оснащен машинами двух типов, характеристики которых приведены в таблице:

Марка машины	Стоимость машины, тыс. ден. ед.	Занимаемая площадь, м кв.	Производительность за смену, тыс. ед.
M1	6	9	8
M2	3	4	5

Найти оптимальный план приобретения машин, обеспечивающий новому производственному участку максимальную производительность.

**В 20.** Торговое предприятие реализует товары T1, T2, используя при этом площади торговых залов и время обслуживающего персонала. Затраты указанных ресурсов на продажу одной партии товара каждого вида, их объемы и прибыль, получаемая от реализации каждой партии товара, приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурса	Затраты ресурсов по товарам	
		T1	T2
Время, чел.-ч	370	0,5	0,7
Площадь, м кв.	90	0,1	0,3
Прибыль, ден. ед.		5	8

Найти оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую предприятию максимальную прибыль.

**В 21.** Завод при изготовлении деталей использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. Обработку деталей можно вести по технологиям I и II. Полезный фонд времени работы каждой группы оборудования (в станко-часах), затраты времени на изготовление детали (в часах) и прибыль от выпуска каждой детали приведены в таблице:

Оборудование	Фонд времени, ч	Технология	
		I	II
Токарное	37	3	1
Фрезерное	20	2	2
Сварочное	30	0	1
Прибыль, ден. ед.		11	6

Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

**В 22.** Имеются два проекта на строительство жилых домов. Расход стройматериалов, их запас и полезная площадь дома каждого проекта приведены в таблице:

Стройматериалы	Расход стройматериалов (м куб.) на один дом		Запас стройматериалов, м куб.
	I проекта	II проекта	
Кирпич силикатный	7	3	1365
Кирпич красный	6	3	1245
Пиломатериалы	1	2	650
Полезная площадь, м кв.	60	50	

Определить, сколько домов первого и второго проекта следует построить, чтобы полезная площадь была наибольшей.

**В. 23.** Магазин оптовой торговли реализует два вида продукции П1 и П2. Для этого используются два ограниченных ресурса — полезная площадь помещений, которая составляет 450 м<sup>2</sup>, и рабочее время работников магазина — 600 чел.-ч. Необходимо разработать план товарооборота, доставляющий максимум прибыли. Затраты ресурсов на реализацию и получаемая при этом прибыль представлены в таблице.

Ресурсы	Затраты ресурсов		Объем ресурса
	П1	П2	
Полезная площадь, м <sup>2</sup>	1,5	2	450
Рабочее время, чел.-ч	3	2	600
Прибыль, ден. ед.	50	65	

**В 24.** Исходя из специализации и своих технологических возможностей предприятие может выпускать два вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объем ресурсов (в расчете на трудовую неделю), расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и прибыль, полученная за единицу продукции, приведены в таблице. Требуется определить план выпуска, доставляющий предприятию максимум прибыли.

	Ресурсы	Выпускаемая продукция		Объем ресурсов
		П1	П2	
P1	Трудовые ресурсы, чел.-ч	4	2	4800
P2	Полуфабрикаты, кг	2	10	2400
P3	Станочное оборудование, станко-ч	1	0	1500
Цена единицы продукции, ден. ед.		65	70	

**В 25.** На звероферме могут выращиваться черно-бурые лисицы и песцы. Для обеспечения нормальных условий их выращивания используется три вида кормов. Количество корма каждого вида, которое должны ежедневно получать лисицы и песцы, приведено в таблице. В ней же указаны общее количество корма каждого вида, которое может быть использовано зверофермой, и прибыль от реализации одной шкурки лисицы и песца.

Вид корма	Кол-во ед. корма в сутки		Общее количество корма (кг)
	Лисица	песец	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
Прибыль от реализации одной шкурки, ден. ед.	16	12	

Определить, сколько лисич и песцов следует выращивать на звероферме, чтобы прибыль от реализации их шкурок, была максимальной.



**В. 26.** На швейной фабрике для изготовления двух видов изделий (А и В) может быть использована ткань трех артикулов. Нормы расхода тканей всех артикулов на пошив одного изделия приведены в табл. В ней же указаны имеющиеся в распоряжении фабрики общее количество тканей каждого артикула и цена одного изделия данного вида. Определить, сколько изделий каждого вида должна произвести фабрика, чтобы стоимость изготовленной продукции была максимальной.

Артикул ткани	Нормы расхода ткани (м) на одно изделие вида		Общее количество ткани (м)
	А	В	
<b>I</b>	1	-	180
<b>II</b>	-	1	210
<b>III</b>	4	2	800
<b>Цена одного изделия (у.е.)</b>	9	6	

**В. 27.** Предприятие выпускает два вида продукции (А и В) и использует три типа основного оборудования: токарное, фрезерное и шлифовальное. Затраты времени на изготовление единицы продукции для каждого из типов оборудования приведены в таблице. В ней же указаны общий фонд рабочего времени каждого из типов оборудования, а также прибыль от реализации одного изделия данного вида. Определить такой объем выпуска каждого из изделий, при котором общая прибыль от их реализации является максимальной.

Тип оборудования	Затраты времени (станко-ч) на ед. прод. вида		Общий фонд рабочего времени (станко-ч)
	А	В	
Токарное	2	1	300
Фрезерное	1	-	70
Шлифовальное	1	2	340
Прибыль от реализации одного изделия, ден. ед.	8	6	

**В 28.** Торговое предприятие планирует организовать продажу двух видов товара (А и В), используя при этом только два вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 840 ч и площадь торгового зала 180 м<sup>2</sup>. При этом известны плановые нормативы затрат этих ресурсов в расчете на единицу товаров и прибыль от их продажи, которые приведены в таблице. Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимум прибыли.

Показатели	Товар		Общее кол-во ресурсов
	А	В	
Расход рабочего времени на ед. товара (ч)	0,6	0,8	840
Использование площади торгового зала на единицу товара (м <sup>2</sup> )	0,1	0,2	180
Прибыль от продажи единицы товара	5	8	

**В 29.** За бригадой закреплено 210 га пашни. Трудовые ресурсы составляют 2500 чел.-дн., запас минеральных удобрений — 600 ц. С 1 га посева зерновых планируется получить 40 ц зерновых и 120 ц овощей. Для обеспечения такой урожайности на 1 га зерновых культур необходимо внести минеральных удобрений 2 ц, на 1 га овощных культур — 5 ц, а также

затратить на 1 га посева зерновых — 7 чел.-дн., на 1 га овощных — 20 чел.-дн. Цены на зерновые и овощные составляют 45 и 20 ден. ед. за 1 ц. Найдите такое сочетание посевных площадей зерновых и овощных культур, которое обеспечило бы максимум денежных поступлений от реализации производственной продукции.

**В 30.** Торговое предприятие имеет ограниченные ресурсы: фонд рабочего времени — 25 тыс. чел.-ч, площадь торговых залов — 350 м<sup>2</sup>. Для обеспечения рентабельной работы торгового предприятия издержки обращения не должны превышать 11 тыс. р. Постройте экономико-математическую модель определения структуры товарооборота предприятия торговли при заданных объемах ресурсов на единицу товара, затратах ресурсов для получения максимальной прибыли. Исходные данные представлены в табл.

Показатель	Товарная группа, затраты на 1 т	
	мясо	молочные продукты
Фонд рабочего времени, чел.-ч.	130	320
Площадь торговых залов, м <sup>2</sup>	2	3,5
Издержки обращения, р.	70	130
Прибыль от продажи 1 т, млн. р.	0,125	0,24