# Лабораторная работа «ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

***Цели:***

1. Научиться составлять оптимизационные модели, находить оптимальное решение.
2. Освоить основные положения теории двойственности и их применение при решении задач
3. Научиться проводить содержательный послеоптимизационный анализ полученных результатов.

## *Контрольные вопросы*

1. Что называется задачей линейного программирования? Приведите примеры.
2. Что называется допустимым планом? Всегда ли он существует? Приведите примеры.
3. Что называется оптимальным планом? Всегда ли он существует? Приведите примеры.
4. Какие методы решения ЗЛП Вы знаете?
5. Какой смысл имеют переменные прямой и двойственной задач в задаче распределения ресурсов?
6. Какой смысл имеют дополнительные переменные в задаче распределения ресурсов? дополнительные переменные двойственной задачи?
7. Используя теорию двойственности, ответить на вопросы:
   - прямая задача имеет оптимальный план. Что можно сказать про решение двойственной?
   - некоторые переменные оптимального плана прямой задачи отличны от нуля. Что можно сказать про соответствующие ограничения двойственной задачи?
   - при изменении количества одного из ресурсов на единицу, как изменится оптимальное значение целевой функции?
8. Зная решение задачи распределения ресурсов, укажите дефицитные и избыточные ресурсы. Какой ресурс является наиболее ценным?

## *Ход работы*

Задачи распределения финансов, оборудования, сырья можно рассматривать как задачи распределения ресурсов.

**Формулировка задачи.** Выпускается продукция четырех типов П1, П2, П3, П4, для изготовления которой требуются ресурсы трех видов: трудовые, сырье, финансы. Норма расхода, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого типа продукции, и наличие располагаемого ресурса приведены в табл. 1.

Таблица 1

| Ресурс | Продукция | | | | Запас ресурса |
|---|---|---|---|---|---|
| | П1 | П2 | П3 | П4 | |
| Трудовые | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 |
| Сырье | 6 | 5 | 4 | 3 | 110 |
| Финансы | 4 | 6 | 10 | 13 | 100 |
| Прибыль | 60 | 70 | 120 | 130 | – |

**Задание.**

1. Составить математическую модель задачи. Объяснить экономический смысл переменных.

2. Составить математическую модель двойственной задачи. Объяснить экономический смысл двойственных переменных.

3. Найти оптимальный план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль.

4. Провести анализ оптимальных решений прямой и двойственной задач, используя отчеты трех типов (по результатам, по устойчивости, по пределам):

а) указать, какая продукция вошла в оптимальный план, и насколько невыгодно производство продукции, не вошедшей в оптимальный план,

б) указать дефицитные и избыточные ресурсы,

в) выписать оптимальное решение двойственной задачи,

г) указать наиболее дефицитный ресурс, исходя из оптимального решения двойственной задачи,

д) указать интервал устойчивости двойственных оценок,

5. Решить двойственную задачу. Сравнить решение с полученным в пункте 4.

6. Выяснить, как изменится выпуск продукции и значение целевой функции, при изменении каждого из имеющихся ресурсов на единицу. Оценить раздельные и суммарное изменения.

**Решение:**

**1.** Составим математическую модель задачи. Если возможен выпуск $n$ различных видов продукции, которые обозначим $\Pi_j$, где $\left(j=\overline{1,n}\right)$, а используемые для этого ресурсы (виды сырья, группы оборудования, рабочая сила различной квалификации, производственные площади, финансовые средства и т. д.) общим числом $m$, ограничены величинами $b_i$ где $\left(i=\overline{1,m}\right)$, то обычно построение модели начинают с определения ее переменных. В рассматриваемой задаче за переменные естественно принять объемы выпуска каждого из возможных видов продукции, которые традиционно обозначают $x_j$, где $\left(j=\overline{1,n}\right)$. Будем искать такой план выпуска продукции, который обеспечит максимальную прибыль $Z$. Это наиболее часто используемая, хотя далеко не единственная, трактовка поставленной задачи. Но преимущество математического подхода в том и состоит, что обеспечивается точность всех формулировок. В данном случае достаточно знать прибыль от производства единицы каждого вида продукции, которую обозначим $c_j$, где $\left(j=\overline{1,n}\right)$. Тогда получаем задачу:

Максимизировать $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$.

Осталось сформулировать ограничения, которые состоят в том, что:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Необходимый объем ресурсов}\\ \text{для производства всей продукции}\end{matrix}\right\}\le\left\{\begin{matrix}\text{Располагаемые}\\ \text{ресурсы}\end{matrix}\right\}.$$

Таким образом, пусть переменные $x_j$ – количество выпускаемой продукции $\Pi_j$, $j=\overline{1,4}$. Тогда математическая модель задачи имеет вид

$$z(x)=60x_1+70x_2+120x_3+130x_4\to\max$$

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4\le 16,\\ 6x_1+5x_2+4x_3+3x_4\le 110, \qquad x_j\ge 0, \quad j=\overline{1,4},\\ 4x_1+6x_2+10x_3+13x_4\le 100,\end{cases}$$

где $z(x)$ – целевая функция, которая определяет суммарную прибыль от реализации произведенной продукции, первые три неравенства описывают условия ограниченности имеющихся ресурсов, кроме того, переменные $x_j$, $j=\overline{1,4}$ не могут быть выражены отрицательными числами.

**2.** Составим математическую модель двойственной задачи. Для этого прямую задачу запишем в виде следующей таблицы

| Коэф-ты целевой функции $c_j$ | 60 | 70 | 120 | 130 | $\to \max$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| переменные | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | Знак неравенств | $b_i$ |
| $y_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | $\le$ | 16 |
| $y_2$ | 6 | 5 | 4 | 3 | $\le$ | 110 |
| $y_3$ | 4 | 6 | 10 | 13 | $\le$ | 100 |
| | $x_1 \ge 0$ | $x_2 \ge 0$ | $x_3 \ge 0$ | $x_4 \ge 0$ | | |

Согласно правилам построения двойственных задач, каждому ограничению прямой задачи соответствует переменная двойственной задачи, поэтому, исходя из экономического смысла можно сказать, что переменные двойственной задачи $y_i$, $i=\overline{1,3}$ – это оценки ресурсов (трудовых, сырья, финансов).

Двойственная задача имеет вид

$$f(y) = 16y_1 + 110y_2 + 100y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} y_1 + 6y_2 + 4y_3 \ge 60, \\ y_1 + 5y_2 + 6y_3 \ge 70, \\ y_1 + 4y_2 + 10y_3 \ge 120, \\ y_1 + 3y_2 + 12y_3 \ge 130, \end{cases} \quad y_i \ge 0,\ i=\overline{1,3}.$$

где $f(y)$ – целевая функция, которая определяет суммарную оценку ресурсов, неравенства системы показывают, что оценка ресурсов, затрачиваемых на производство единицы соответствующей продукции не меньше, чем прибыль от выпуска единицы этой продукции, кроме того, переменные $y_i$, $i=\overline{1,3}$ не могут быть выражены отрицательными числами.

**3. Алгоритм решения задачи.** Рассмотрим организацию вычислений на дополнительных аналогичных примерах.

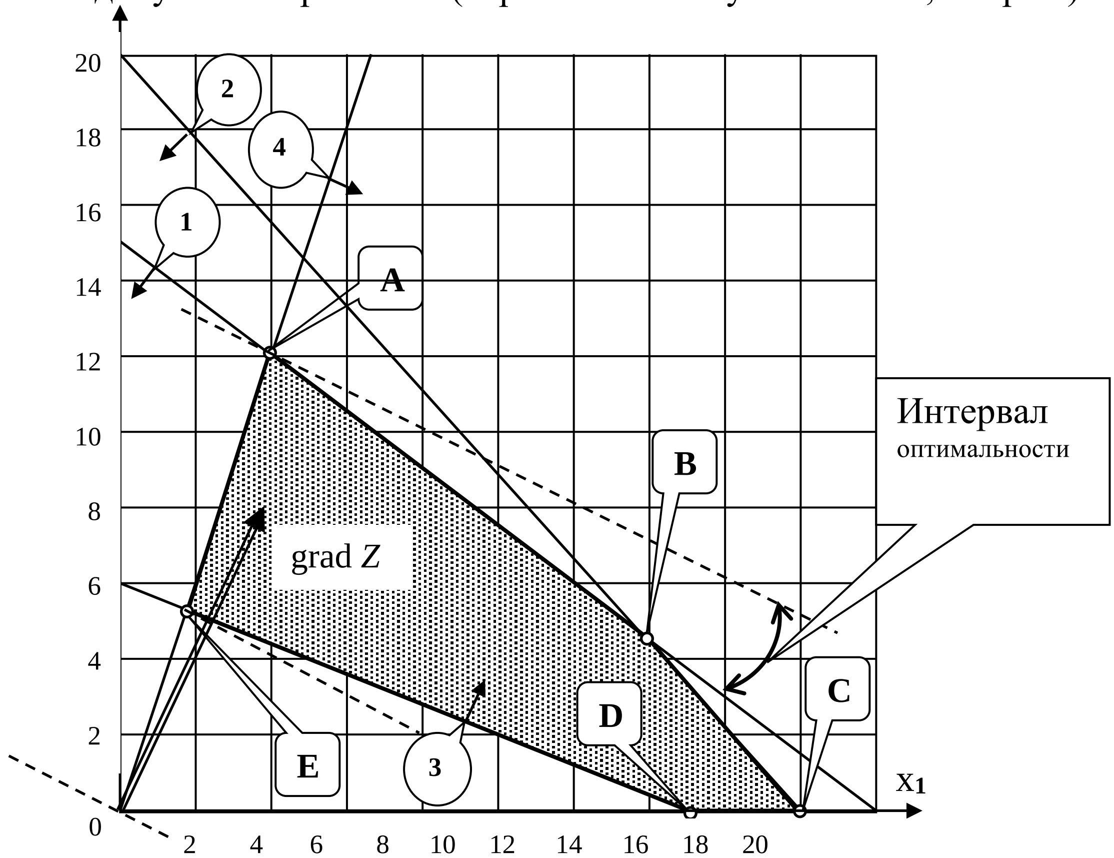
**Пример 1. Графический метод.** Пусть задана линейная модель следующего вида:

$$\max\ (\min)\ Z = 4x_1 + 8x_2$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3x_1 + 4x_2 \le 60 & (1) \\ 10x_1 + 9x_2 \le 180 & (2) \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 30 & (3) \\ 6x_1 - 2x_2 \ge 0 & (4) \end{array}\right\}.$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Каждое ограничение задает полуплоскость. При построении удобно нумеровать все заданные ограничения. Тогда легко проверять правильность построения как линий, так и области допустимых решений (пересечение полуплоскостей, см. рис.).




После построения вектора $grad\ Z = (4, 8)$, перемещая перпендикулярную к нему линию фиксированных значений функционала, найдем, что искомые экстремумы достигаются в точках:

$A(4;\ 12)$, $Z_{\mathbf{max}} = 120$ и $E(1{,}8;\ 5{,}3)$, $Z_{\mathbf{min}} = 49{,}4$.

**Пример 2. Симплекс-метод.** Пусть фирма может выпускать 3 вида продукции $\Pi_j$, где $\left(j = \overline{1,3}\right)$. При ее изготовлении используются три вида ресурсов (труд, сырье и оборудование), расход которых $b_i$, где $\left(i = \overline{1,3}\right)$, ограничен величинами $b_1 = 180, b_2 = 60$ и $b_3 = 120$. Затраты ресурса *i*-го вида на единицу продукции *j*-го вида составляют $a_{ij}$ единиц. Прибыль от производства единицы продукции *j*-го вида составляет $c_j$ единиц. Значения параметров приведены в таблице.

| Вид ресурса, *i* | Расход *i*-го ресурса на единицу *j*-ой продукции, $a_{ij}$ | | | Запас ресурса, $b_i$ |
|---|---|---|---|---|
| | $\Pi_1$ | $\Pi_2$ | $\Pi_3$ | |
| Труд | 6 | 2 | 5 | 180 |
| Сырье | | 2 | 4 | 60 |
| Оборудование | 5 | 2 | 5 | 120 |
| Прибыль, cj | 9 | 6 | 7 | |

Математическая модель задачи оптимизации производственного плана по величине прибыли примет вид

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3;$$

$$\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 180; \\ \quad 2x_2 + 4x_3 \le 60; \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 120; \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,3}). \end{array}\right\}$$

Преобразовывая модель к канонической форме и предпочтительному виду, получим:

$$\max Z = 9x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6;$$

$$\left.\begin{array}{l} 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 180; \\ \quad 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 60; \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_6 = 120; \\ x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,6}). \end{array}\right\}$$

Занесем условия задачи в симплексную таблицу. Значения базисных переменных $x_4, x_5$ и $x_6$ будут равны правым частям системы ограничений. Значение целевой функции для опорного плана вычисляется как скалярное произведение $\Delta_0 = \mathbf{c_Б b}$, где $\mathbf{c_Б}$ – вектор коэффициентов целевой функции при базисных переменных, а $\mathbf{b}$ – вектор значений базисных переменных. Оценки свободных переменных вычисляются по формуле $\Delta_j = \mathbf{c_Б A}_j - c_j \;\; (j = (\overline{1,3})$, где $\mathbf{A}_j$ вектор – столбец коэффициентов при переменной $x_j$.

| Номер итерации | *БП* | $\mathbf{c_Б}$ | $\mathbf{b}$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | Симплексные отношения |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 9 | 6 | 7 | 0 | 0 | 0 | |
| 0 | $x_4$ | 0 | 180 | 6 | 2 | 5 | 1 | 0 | 0 | 180/6 = 30 |
| | $x_5$ | 0 | 60 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | – |
| | $x_6$ | 0 | 120 | 5 | 2 | 5 | 0 | 0 | 1 | 120/5 = 24 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | |
| | | | 0 | –9 | –6 | –7 | 0 | 0 | 0 | |
| 1 | $x_4$ | 0 | 36 | 0 | –2/5 | –1 | 1 | 0 | –6/5 | – |
| | $x_5$ | 0 | 60 | 0 | 2 | 4 | 0 | 1 | 0 | 60/2 = 30 |
| | $x_1$ | 9 | 24 | 1 | 2/5 | 1 | 0 | 0 | 1/5 | 24/(2/5)=60 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | |
| | | | 216 | 0 | –2,4 | 2 | 0 | 0 | 1,8 | |
| 2 | $x_4$ | 0 | 48 | 1 | 0 | –1/5 | 1 | 1/5 | –6/5 | – |
| | $x_2$ | 6 | 30 | 0 | 1 | 2 | 0 | 1/2 | 0 | – |
| | $x_1$ | 9 | 12 | 0 | 0 | 1/5 | 0 | –1/5 | 1/5 | – |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | |
| | | | 288 | 0 | 0 | 6,8 | 0 | 1,2 | 1,8 | |

Для ввода в базис (при нулевой итерации) выберем переменную с максимальной по абсолютной величине отрицательной оценкой. Это переменная $x_1$. Соответствующий ей столбец называют разрешающим. В таблице он выделен затенением. Вычисленные симплексные отношения показывают максимально возможные значения для этой переменной, если учитывать только одно, соответствующее строке, ограничение. Для этой переменной второй вид ресурса не требуется $a_{12}=0$ и симплексное отношение во второй строке не вычисляется. Если бы получился отрицательный результат, то его также заменили бы прочерком.

Выберем в качестве разрешающей строки ту, для которой симплексное отношение минимально. В данном случае строка, соответствующая третьему ограничению, ограничивает максимальное значение переменной $x_1$ и, следовательно, будет разрешающей. Она выделена затенением, а элемент $a_{13}$, называемый разрешающим, – еще и жирным шрифтом.

Перейдем к нехудшему опорному плану, вводя в базис переменную $x_1$ (разрешающий столбец) вместо $x_6$ (разрешающая строка). По правилам симплексного преобразования элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент, который становится равным единице. Все остальные элементы разрешающего столбца для новой итерации равны нулю. Для продолжения пересчета элементов таблицы, включая значения базисных переменных и оценки, используется формула прямоугольников. Старое значение элемента умножаем на разрешающий элемент (первая диагональ) и отнимаем произведение элементов, образующих вторую диагональ прямоугольника. Результат делим на разрешающий элемент и записываем в таблицу для новой итерации. Например, новое значение переменной $x_4$ вычисляется как (180×5 – 120×6)/5 = 180 – 24×6 =36, новое значение коэффициента $a_{12}^{'}$ будет

$$\frac{5\times 2-6\times 2}{5}=-2/5\ ,$$

величина новой оценки $\Delta_2^{'}$ для переменной $x_2$ составит

$$\frac{5\times(-6)-(-9)\times 2}{5}=\frac{-30+18}{5}=\frac{-12}{5}=-2{,}4.$$

Прежде чем переходить к следующей итерации, следует для контроля правильности расчетов, вычислить оценки, используя приведенные выше формулы для $\Delta_0$ и $\Delta_j$, $j=\left(\overline{1{,}6}\right)$. В этих формулах участвуют все используемые числовые значения, поэтому случайные ошибки при ручном расчете будут своевременно обнаружены. При программной реализации на этой основе можно построить алгоритмы для коррекции погрешностей, возникающих из-за ограниченной точности вычислений, которые могут накапливаться при большом числе итераций.

Для рассматриваемой задачи на первой итерации только переменная $x_2$ имеет отрицательную оценку и, следовательно, должна быть включена в базис. Разрешающей строкой, как это видно из значений симплексных отношений, приведенных в таблице, будет вторая, поэтому переменную $x_5$ исключаем из базиса. После выполнения второй итерации получаем, что все оценки переменных положительны, а, следовательно, оптимальный по прибыли план найден.

Это вектор $\mathbf{x}^*=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(12,30,0,48,0,0)$, которому соответствует прибыль $Z^*=Z(\mathbf{x}^*)=288$. В этот оптимальный план вошла дополнительная переменная $x_4=48$, означающая, что такое количество единиц первого ресурса не используется в оптимальном плане. Переменные $x_5$ и $x_6$ равны нулю (в базис они не входят), следовательно, второй и третий ресурсы использованы полностью.

Таким образом, при применении симплексного метода не только находится оптимальный план, но и полезная для анализа задачи дополнительная информация, например, об объемах ресурсов, не используемых в этом плане. Вполне определенный экономический смысл имеют и оценки переменных, полученные при последней итерации. Его выяснение отложим до рассмотрения теории двойственности.

Компьютерные программы могут предусматривать и получение дополнительных отчетов. Полученный оптимальный план не предусматривает производство третьего вида продукции. Предположим, что по тем или иным причинам ее производство нужно обеспечить. Введение дополнительного ограничения на минимальный объем производства этой продукции приведет к снижению прибыли, значит в реальной действительности производство будет искать способы обойти это ограничение. Чтобы получить желаемый результат экономическими средствами, достаточно повысить прибыльность этой продукции (или снизить прибыльность других видов продукции). Например, при использовании *Excel* можно получить отчет об устойчивости решения по отношению к коэффициентам целевой функции. Очевидно, что для третьего вида продукции должно существовать такое минимальное значение величины прибыли, при котором эта продукция войдет в оптимальное решение. Удобнее получить это значение из дополнительного отчета, чем выполнять перебор вариантов.

**Пример 3. Теория двойственности.** Исходя из специализации и технологических возможностей предприятие может выпускать четыре вида продукции. Сбыт любого количества обеспечен. Для изготовления этой продукции используются трудовые ресурсы, полуфабрикаты и станочное оборудование. Общий объем ресурсов (в расчете на трудовую неделю), расход каждого ресурса на единицу выпускаемой продукции и прибыль, полученная за единицу продукции, приведены в таблице 2. Требуется определить план выпуска, доставляющий предприятию максимум прибыли.

Таблица 2

| Вид ресурса, *i* | | Выпускаемая продукция | | | | Запас ресурса |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | П$_1$ | П$_2$ | П$_3$ | П$_4$ | |
| $P_1$ | Трудовые ресурсы, чел.-ч. | 4 | 2 | 2 | 8 | 4800 |
| $P_2$ | Полуфабрикаты, кг | 2 | 10 | 6 | 0 | 2400 |
| $P_3$ | Станочное оборудование, станко-ч. | 1 | 0 | 2 | 1 | 1500 |
| Цена единицы продукции, ден. ед. | | 65 | 70 | 60 | 120 | |

Математическая модель прямой задачи:

$$\max Z = 65x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 120x_4;$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 \le 4800, \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 \le 2400, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 1500, \end{array}\right\}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,4}).$$

| Z | 65 | 70 | 60 | 120 | | max |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 4 | 2 | 2 | 8 | ≤ | 4800 |
| | 2 | 10 | 6 | 0 | | 2400 |
| | 1 | 0 | 2 | 1 | | 1500 |

Составим двойственную задачу. Транспонируем таблицу:

| f | 4800 | 2400 | 1500 | | min |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 2 | 1 | ≥ | 65 |
| | 2 | 10 | 0 | | 70 |
| | 2 | 6 | 2 | | 60 |
| | 8 | 0 | 1 | | 120 |

Математическая модель двойственной задачи:

$$\min f = 4800y_1 + 2400y_2 + 1500y_3;$$

$$\left.\begin{array}{l} 4y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 65, \\ 2y_1 + 10y_2 \ge 70, \\ 2y_1 + 6y_2 + 2y_3 \ge 60, \\ 8y_1 + y_3 \ge 120, \end{array}\right\}$$

$$y_j \ge 0, (i = \overline{1,3}).$$

Симплекс-методом решили прямую задачу: $x^* = (0;\, 0;\, 400;\, 500;\, 0;\, 0;\, 200)$, $Z^* = Z(x^*) = 84000$.

| Номер итера-ции | БП | $\mathbf{c_Б}$ | **b** | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | 65 | 70 | 60 | 120 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $x_5$ | 0 | 4800 | 4 | 2 | 2 | **8** | 1 | 0 | 0 |
| | $x_6$ | 0 | 2400 | 2 | 10 | 46 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | $x_7$ | 0 | 1500 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | $\Delta_7$ |
| | | | 0 | –65 | –70 | –60 | –120 | 0 | 0 | |
| 1 | $x_4$ | 120 | 600 | 1/2 | 1/4 | 1/4 | 1 | 1/8 | 0 | 0 |
| | $x_6$ | 0 | 2400 | 2 | 0 | 6 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | $x_7$ | 0 | 900 | 1/2 | -1/4 | 7/4 | 0 | –1/8 | 0 | 1 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | |
| | | | 72000 | -5 | -40 | -30 | 0 | 15 | 0 | 0 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | $x_4$ | 120 | 500 | 5/12 | -1/6 | 0 | 1 | 1/8 | -1/24 | 0 |
| | $x_3$ | 60 | 400 | 1/3 | 5/3 | 1 | 0 | 0 | 1/6 | 0 |
| | $x_7$ | 0 | 200 | -1/12 | -19,6 | 0 | 0 | –1/8 | -7/24 | 1 |
| | Оценки | | $\Delta_0$ | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | $\Delta_3$ | $\Delta_4$ | $\Delta_5$ | $\Delta_6$ | |
| | | | 84000 | 5 | 10 | 0 | 0 | 15 | 5 | 0 |
| Соответствующие переменные двойственной задачи | | | | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ |

Учитывая это соответствие, выписываем из индексной строки последней (2-й) итерации компоненты искомого оптимального плана $y^*$ = (15; 5; 0; 5; 10; 0; 0) — двойственные оценки.

В соответствии с теоремой min $f$ = max $Z$ = 84 000. Запишем это равенство в развернутой форме: $48000 \cdot 15 + 2400 \cdot 5 + 1500 \cdot 0 = 65 \cdot 0 + 70 \cdot 0 + 60 \cdot 400 + 120 \cdot 500$

Учитывая, что компоненты $y_1^* = 15, y_2^* = 5, y_3^* = 0$ представляют собой оценки ресурсов $P_1$, $P_2$, $P_3$, заключаем: при оптимальном плане оценка ресурсов, затраченных на выпуск продукции, совпадает с оценкой произведенной продукции. В этом состоит экономическое содержание теоремы.

Таким образом, оптимальность плана означает точное воплощение в оценке произведенной по этому плану продукции оценки всех израсходованных ресурсов, т. е. полное отсутствие непроизводительных затрат.

Найден оптимальный план $x^*$ = (0; 0; 400; 500; 0; 0; 200) выпуска продукции. При этом плане третье ограничение прямой задачи выполняется как строгое неравенство: 0 + 2400 + 500 = 1300 < 1500. Это означает, что расход ресурса $P_3$ меньше его запаса, т. е. ресурс $P_3$ избыточный. Именно поэтому в оптимальном плане $y^*$ = (15; 5; 0; 5; 10; 0; 0) двойственной задачи оценка $y_3^*$ этого ресурса равна нулю.

А вот оценки $y_1^*$ и $y_2^*$ ресурсов $P_1$ и $P_2$ выражаются положительными числами 15 и 5, что свидетельствует о дефицитности этих ресурсов: они при оптимальном плане используются полностью. В самом деле, ограничения по этим ресурсам выполняются как строгие равенства: 4·0 + 2·0 + 2·400 + 8·500 = 4800, 2·0+ 10·0 + 6·400 = 2400.

Поскольку 15 > 5, ресурс $P_1$ считается более дефицитным, чем ресурс $P_2$. Это мы подтвердим более убедительно позднее.

На основе теоремы 2 (о дополняющей нежесткости) нетрудно объяснить, почему не вошла в оптимальный план продукция $П_1$ и $П_2$: первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как строгие неравенства: 4 · 15 + 2 · 5 + 0 > 65, 2 · 15+ 10 · 5 > 70. Это означает, что оценки ресурсов, расходуемых на изготовление единицы продукции $П_1$ и $П_2$, превышают оценки единицы этой продукции. Понятно, что такую продукцию выпускать предприятию невыгодно. Что же касается продукции $П_3$ и $П_4$ ($x_3^* > 0, x_4^* > 0$), то выпуск ее оправдан, поскольку оценка израсходованных ресурсов совпадает с оценкой произведенной продукции: 2 · 15+ 6 · 5 + 2 · 0 = 60, 8 · 15 + 0 = 120.

Установлено, что ресурсы $P_1$ и $P_2$ являются дефицитными. В связи с этим на основе теоремы 3 можно утверждать, что на каждую единицу ресурса $P_i$, введенную дополнительно в производство, будет получена дополнительная выручка $\Delta_i Z$, численно равная $y_i^*$. В самом деле, при $\Delta b_1$ = 1 получаем $\Delta_1 Z$= $= y_i^* \Delta b_1$ = 15 · 1 = 15. По тем же причинам каждая дополнительная единица ресурса $P_2$ обеспечит прирост $\Delta_2 Z$ выручки, равный 5 ден. ед. Теперь становится понятно, почему ресурс $P_1$ считается более дефицитным по сравнению с ресурсом $P_2$: он может содействовать получению большей выручки.

Что же касается избыточного ресурса $P_3$, то увеличение его запаса не приведет к росту выручки, поскольку $\Delta_3\ Z = y_3\ \Delta b_3 = 0$. $\Delta b_3 = 0$. Из этих рассуждений следует, что оценки ресурсов позволяют совершенствовать план выпуска продукции.

Выясним экономический смысл оценок $y_4^*, y_5^*, y_6^*, y_7^*$ продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$. По оптимальному плану $x^* = (0;\ 0;\ 400;\ 500;\ 0;\ 0;\ 200)$ выпускать следует продукцию $П_3$ и $П_4$. Оценки $y_6^*$ и $y_7^*$ этих видов продукции равны нулю. Что это означает практически, станет ясно, если представить оценки в развернутой записи:

$$y_6^* = (2y_1^* + 6y_2^* + 2y_3^*) - 60 =$$

$$= (2\cdot 15 + 6\cdot 5 + 2\cdot 0) - 60 = 0, y_7^* = (8y_1^* + y_3^*) - 120 = (8\cdot 15 + 0) - 120 = 0.$$

Таким образом, нулевая оценка показывает, что эта продукция является неубыточной, поскольку оценка ресурсов, расходуемых на выпуск единицы такой продукции, совпадает с оценкой единицы изготовленной продукции.

Что же касается продукции $П_1$ и $П_2$, являющейся, как установлено ранее, убыточной, а потому и не вошедшей в оптимальный план, то для ее оценок $y_4^* = 5$ и $y_5^* = 10$ получаем:
$y_4^* = (y_1^* + 2y_2^* + y_3^*) - 65 = 70 - 65 = 5, y_5^* = (2y_1^* + 10y_2^*) - 70 = 80 - 70 = 10.$ Отсюда видно, что оценка убыточной продукции показывает, насколько будет снижать каждая изготовленная единица такой продукции достигнутый оптимальный уровень выручки.

Выясним состав двойственной оценки. Для этого рассмотрим, например, первый ресурс (его запас $b_1 = 4800$). Он дефицитен. Увеличение запаса этого ресурса на единицу приведет к дополнительному выпуску продукции, что увеличит выручку на $y_1^* = 15$ ден. ед. За счет чего? Возьмем соответствующий столбец $A_5 = (1/8;\ 0;\ -1/8)^т$ табл. Элементы его характеризуют изменение объемов выпуска продукции и остатка ресурса при увеличении первого ресурса на единицу, т. е. если заменить $b_1$ на $b_1' = b_1 + 1 = 4800 + 1 = 4801$, то выпуск продукции $П_4$ $x_4 = 500$ заменится на $x_4'^* = 500 + 1/8 = 500{,}125$; выпуск продукции $П_3$ $x_3^* = 400$ — на $x_3'^* = 400 + 0 = 400$. Резерв же третьего ресурса сократится до $x_7'^* = 200 - 1/8 = 199{,}875$. При этом выручка возрастет на $120 \cdot 1/8 + 60 \cdot 0 + 0 \cdot (-1/8) = 15$ ден. ед., что соответствует двойственной оценке первого ресурса. Аналогично, при увеличении второго ресурса на единицу выручка возрастет на $120 \cdot (-1/24) + 60 \cdot 1/6 + 0 \cdot (-7/24) = 5$ ден.ед., что соответствует двойственной оценке второго ресурса. Полученные равенства и показывают, какие составляющие образуют двойственные оценки.

Найдем коэффициент взаимозаменяемости ресурсов. В примере дефицитны трудовые ресурсы и полуфабрикаты. Если бы трудовые ресурсы уменьшили на единицу, то связанное с этим падение выручки (на 15 ден. ед.) можно было бы компенсировать увеличением полуфабрикатов на

$$\Delta b_2 = \frac{y_1^*}{y_2^*}\Delta b_1 = \frac{15}{5}\cdot 1 = 3.$$

Следовательно, обеспечив полуфабрикаты в объеме $b_2' = b_2 + \Delta b_2 = 2400 + 3 = 2403$ (кг), можно получить с трудовыми ресурсами $b_1' = b_i - \Delta b_1 = 4800 - 1 = 4799$ (чел.-ч) ту же выручку, что и при начальных ресурсах. В табл. представлены значения коэффициентов взаимозаменяемости для примера. Знак ∞ означает, что заменить уменьшение на единицу одного ресурса никаким увеличением другого невозможно.

| $i$ / $k$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1/3 | 0 |
| 2 | 3 | 1 | 0 |
| 3 | ∞ | ∞ | 1 |

Проанализируем целесообразность расширения ассортимента выпускаемой продукции и установление цены на новую продукцию. Пусть в условиях примера изучается вопрос о целесообразности выпуска продукции $П_5$ с характеристиками, представленными в табл.

Чтобы выпуск продукции $П_5$ был оправдан, оценка ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции $П_5$, должна быть не менее цены $c_5 = 95$.

| Вид ресурса, $i$ | | $П_1$ |
|---|---|---|
| $P_1$ | Трудовые ресурсы, чел.-ч. | 3 |
| $P_2$ | Полуфабрикаты, кг | 6 |
| $P_3$ | Станочное оборудование, станко-ч. | 8 |
| Цена единицы продукции, ден. ед. | | 95 |

Находим оценку затраченных ресурсов: $3 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 8 \cdot 0 = 75$. Поскольку $75 < 95$, выпускать продукцию $П_5$ целесообразно: каждая единица этой продукции принесет предприятию прибыль, равную $95 – 75 = 20$ ден. ед.

**4. (см. формулировку исходной задачи). Решение задачи на компьютере.** Для решения задачи средствами Excel рекомендуется использовать надстройку **Поиск решения**. Для ее подключения в Excel 2007/2010/2013/2016 следует выбрать **Файл**>**Параметры**>**Надстройки**>**Перейти**>**Поиск решения.** После этого **Поиск решения** появится в меню **Данные.**

Следует сделать форму и ввести исходные данные (рис. 1).

Далее осуществляется ввод зависимостей из математической модели (рис. 2). Чтобы получить значение целевой функции в ячейке F4, воспользуемся функцией **СУММПРОИЗВ**. Выбираем **Мастер Функций** и вызываем математическую функцию СУММПРОИЗВ. На экране появится диалоговое окно. В **массив 1** вести строку со значениями переменных, т. е. B$3:E$3 (знак $ ставим для того, чтобы адрес строки ячеек не менялся при копировании формул). Заметим, что в указанных ячейках B3:E3, которые на рис. 7 выделены серым цветом, по окончании решения задачи будет находиться оптимальное решение. В **массив 2** ввести адрес строки коэффициентов целевой функции, т. е. B4:E4. В ячейке будем иметь значение 0, согласно введенной формуле.


F4 = =СУММПРОИЗВ(B$3:E$3;B4:E4)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | ПЕРЕМЕННЫЕ | | | | | | | |
| 2 | имя | x1 | x2 | x3 | x4 | | | | | | |
| 3 | знач | | | | | | | | | | |
| 4 | коэф.цел. ф. | 60 | 70 | 120 | 130 | 0 | - значение целевой функции | | | | |
| 5 | | | | ОГРАНИЧЕНИЯ | | | | | | | |
| 6 | вид | | | | | лев.ч. | знак | пр.ч. | | | |
| 7 | Трудовые | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | <= | 16 | | | |
| 8 | Сырье | 6 | 5 | 4 | 3 | 0 | <= | 110 | | | |
| 9 | Финансы | 4 | 6 | 10 | 13 | 0 | <= | 100 | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | |

Рис. 1

Заметим, что все диалоговые окна адреса ячеек удобно вводить не с клавиатуры, а протаскивая мышь по ячейкам, чьи адреса следует ввести. Далее копируем формулу из ячейки F4 в столбец «левые части ограничений». На рис. 2 показано какие формулы должны быть введены в указанные ячейки.

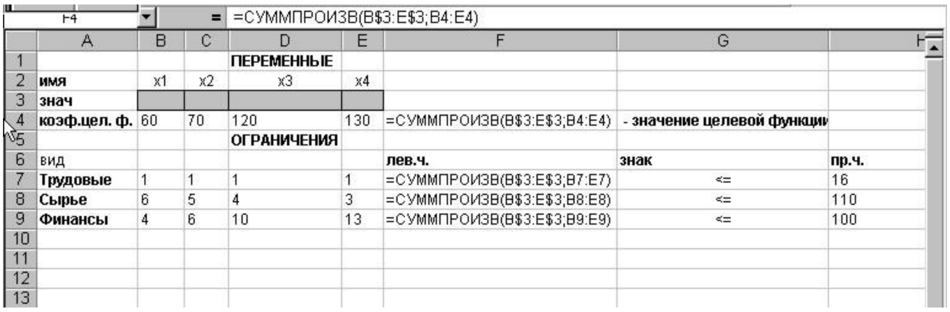



Рис. 2

**Решение задачи** (рис. 3). Курсор в ячейку F4. Командой **Поиск решения** из меню **Сервис (**Excel 2003**)** либо **Данные (**Excel 2007/2010/2013/2016**)** откроем диалоговое окно **Поиск решения** и занесем в него необходимые данные:

*Установить целевую функцию* – адрес ячейки, отведенной под значение целевой функции, т. е. $F$4;

*Равной* – максимальному значению;

*Изменяя ячейки* – адреса изменяемых значений переменных, т. е. $B$3:$E$3;

*Ограничения* – **Добавить…**

На экране появится диалоговое окно *Добавление ограничения.*

Вводим ограничения по ресурсам $F$7≤$H$7 **Добавить;** $F$8≤$H$8 **Добавить;** $F$9≤$H$9. По окончании ввода данных нажать **ОК**.

Можно добавить все ограничения сразу, так как они имеют одинаковый знак ограничений ≤.

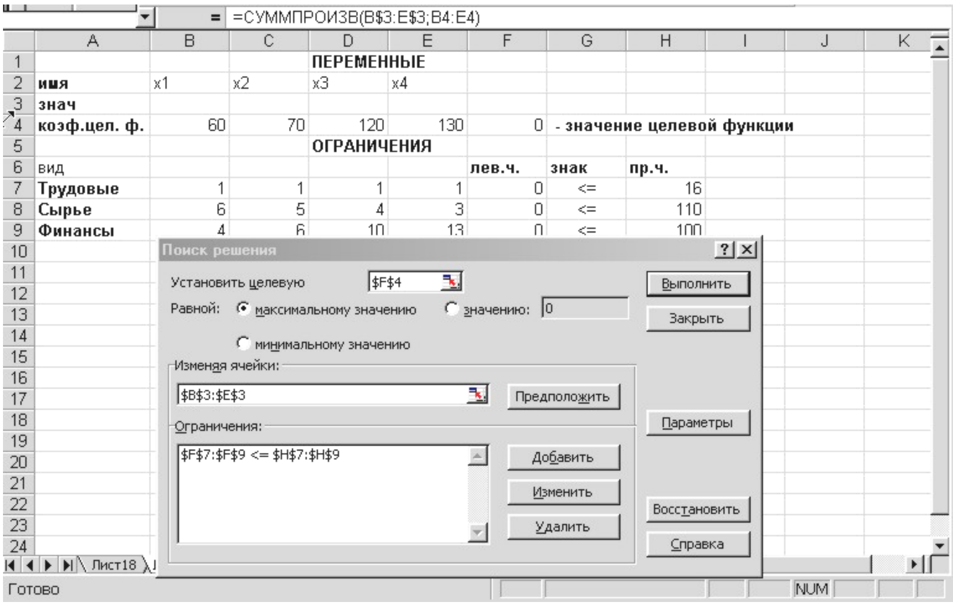



Рис. 3

Командой **Параметры** вызываем диалоговое окно **Параметры** и устанавливаем флажки: **Линейная модель, Неотрицательные значения, Автоматическое масштабирование** (рис. 4). **ОК**.

Возвращаемся в диалоговое окно **Поиск решения** и, щелкнув по кнопке **Выполнить,** находим оптимальное решение задачи. На экране появится диалоговое окно **Результаты поиска решения** (рис. 5). В ячейках B3:E3 имеем оптимальное решение задачи $X^{\text{opt}} = (10;0;6;0)$, максимальное значение целевой функции – в ячейке F4 $z(X^{\text{opt}}) = 1320$.

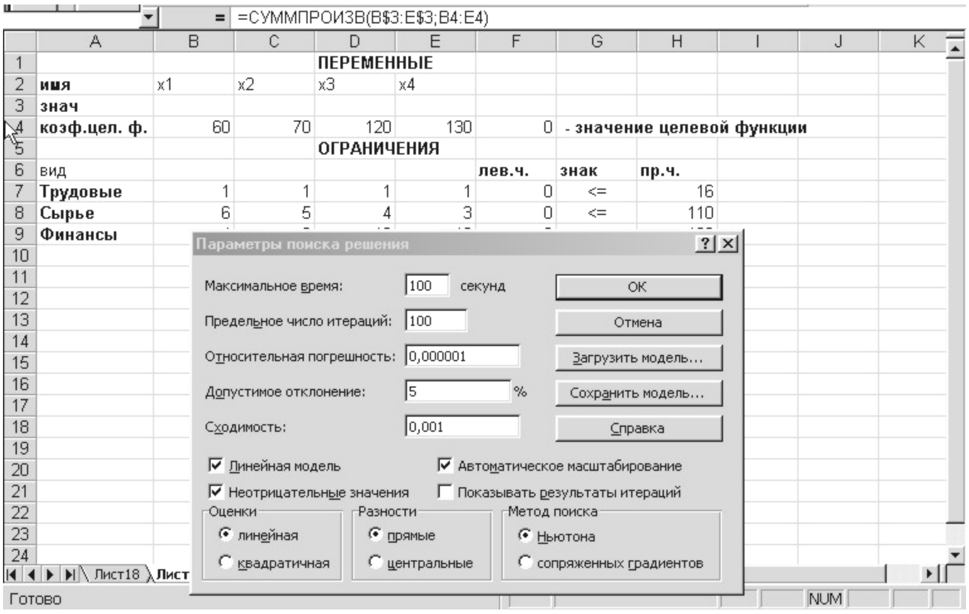



Рис. 4

Таким образом, согласно оптимальному плану следует выпускать продукцию П1 и П3, в количествах 10 ед. и 6 ед. соответственно. Продукцию П2 и П4 выпускать не следует. Ограничения говорят о том, что первый и третий ресурсы израсходованы полностью, а второго ресурса осталось 26 ед.

При этом будет получена максимальная прибыль в количестве 1320 ден. ед.

Если задача не имеет решения или данные введены неверно (целевая функция не ограничена или система ограничений несовместна), то выдается сообщение: «Значения целевой ячейки не сходятся».

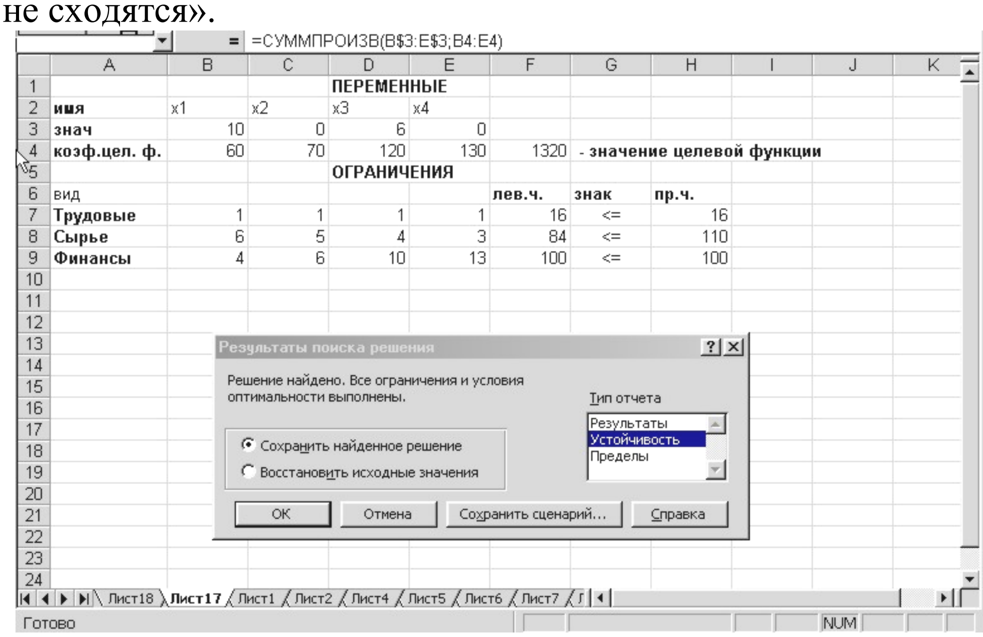



Рис. 5

**5. Анализ оптимального решения.** Анализ оптимального решения начинается после успешного решения задачи, когда на экране появляется окно **Результат поиска решения.** Решение найдено (рис. 5). С помощью этого диалогового окна можно вызвать отчеты трех типов: результаты; устойчивость; пределы.

Вызов отчета осуществляется по следующему алгоритму.

На экране: диалоговое окно **Результат поиска решения.** Решение найдено (рис. 5). Установить курсор на тип вызываемого отчета. Например: отчет по устойчивости. **ОК**. На экране: вызванный отчет на новом листе, на ярлычке которого указано название отчета.

Установить курсор на ярлычок с названием отчета и щелкнуть левой кнопкой мыши. На экране: вызванный отчет (см. рис. 6). Можно сразу выделить все три типа отчетов (по устойчивости, по пределам и по результатам).

**Отчет по устойчивости.** Отчет состоит из двух таблиц. Первая приводит следующие значения для переменных: результат решения задачи; нормировочную стоимость, т. е. дополнительные двойственные переменные, которые показывают, насколько изменяется целевая функция при принудительном включении единицы этой продукции в оптимальное решение; коэффициенты целевой функции; предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Во второй таблице приводятся аналогичные значения для ограничений: величина использованных ресурсов; теневая цена, т. е. двойственные оценки, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу; значения приращения ресурсов, при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Согласно полученным данным $Y^{\text{opt}} = (20;0;10;0;10;0;20)$. Первые три значения (берем из графы «теневая цена» отчета по устойчивости) показывают оценки ресурсов (трудовые, сырье, финансы). Наиболее дефицитным является первый ресурс (так как его оценка наибольшая, при изменении количества ресурса на единицу в пределах интервала устойчивости прибыль изменится на 20), менее дефицитным является третий ресурс (финансы). Второй ресурс (сырье) дефицитным не является (его оценка равна 0).

Последние четыре значения (берем из графы нормировочная стоимость с противоположным знаком) показывают, какую продукцию выгодно выпускать, а какую – нет. Согласно полученным данным при выпуске единицы продукции П4 целевая функция уменьшится на 20 ед., а при выпуске единицы второй продукции – на 10 ед.

Microsoft Excel 8.0a Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [ЛР-№3.xls]Лист17
Отчет создан: 08.05.05 13:20:18

Изменяемые ячейки

| Ячейка | Имя | Результ. значение | Нормир. стоимость | Целевой Коэффициент | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $B$3 | знач x1 | 10 | 0 | 60 | 40 | 12 |
| $C$3 | знач x2 | 0 | -10 | 70 | 10 | 1E+30 |
| $D$3 | знач x3 | 6 | 0 | 120 | 30 | 13,33333333 |
| $E$3 | знач x4 | 0 | -20 | 130 | 20 | 1E+30 |

Ограничения

| Ячейка | Имя | Результ. значение | Теневая Цена | Ограничение Правая часть | Допустимое Увеличение | Допустимое Уменьшение |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$7 | Трудовые лев.ч. | 16 | 20 | 16 | 3,545454545 | 6 |
| $F$8 | Сырье лев.ч. | 84 | 0 | 110 | 1E+30 | 26 |
| $F$9 | Финансы лев.ч. | 100 | 10 | 100 | 60 | 36 |

Лист18 | Отчет по устойчивости 1 | Лист17 | Лист1 | Лист2 | Лист4

Готово NUM

Рис. 6

Интервал устойчивости для 1-го ресурса (трудовые ресурсы) имеет вид (16-6;16+3,545). Значения берем из столбцов «допустимое увеличение», «допустимое уменьшение», «ограничение, правая часть».

**Отчет по результатам.** Отчет состоит из трех таблиц. В первой таблице приводятся сведения о целевой функции. В столбце **Исходно** приведены значения целевой функции до начала вычислений. Во второй таблице приводятся значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи. В третьей показываются результаты оптимального решения для ограничений и граничных условий.

**Отчет по пределам.** В нем показано, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедшей в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения.

Если же задача линейного программирования решения не имеет, то выдается сообщение: Поиск не может найти подходящего решения.