Лабораторная работа «ТЕОРИЯ ИГР»

Цели:

1. Изучить основные понятия матричных игр, статистических игр
2. Научиться пользоваться MS Excel при решении и анализе матричных игр

Контрольные вопросы

1. Что называется игрой? Партией? Ходом? Стратегией?
2. Как находится верхняя и нижняя чистая цена игры в матричной игре?
3. Всегда ли матричная игра имеет решение в чистых стратегиях?
4. Что называется оптимальным решением матричной игры?
5. Какие методы упрощения матричных игр Вы знаете?
6. Какие стратегии в матричной игре называются чистыми, а какие смешанными?
7. Какие методы решения матричных игр вы знаете?
8. Чем отличаются проблемы теории игр от проблем теории оптимизации?
9. На основании какого утверждения возможно сведение матричной игры к паре симметричных задач линейного программирования?
10. Какая существует связь между решениями пары симметричных задач линейного программирования и решением матричной игры?
11. Любую ли матричную игру, заданную платежной матрицей, можно свести к паре задач линейного программирования?

Пример составления платежной матрицы

Пусть после нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование может оказаться в одном из следующих состояний:

1-ое — требуется профилактический ремонт;

2-ое — следует заменить отдельные детали и узлы;

3-е — требуется капитальный ремонт.

В зависимости от состояния оборудования руководство предприятия может принять следующие решения:

I. отремонтировать оборудование силами заводских специалистов, что потребует затрат 6, 8, 15 денежных единиц для каждого состояния оборудования;

II. пригласить специалистов со стороны, при этом расходы составят 7, 10, 14 денежных единиц;

III. заменить оборудование новым, что приведет к затратам соответственно 16, 19, 20 денежных единиц.

Составьте игровую схему, выявите участников игры и их стратегии. Составьте платежную матрицу.

Решение.

Представим рассматриваемую ситуацию в виде игры — математической модели конфликта, рассматриваемого в условиях неопределенности, исход которого заранее не известен. Одним из участников игры является руководство предприятия, заинтересованное в минимизации потерь — игрок A. Вторым участником игры является «природа» (совокупность объективных неопределенных факторов) — игрок Π, приводящий промышленное оборудование в то или иное состояние. Такие игры относятся к *играм с «природой»*, в которых первый игрок старается действовать осмотрительно, а второй — случайно.

Руководство предприятия может принять одно из трех решений (стратегий):

$A_1 = \{\textit{отремонтировать оборудование силами заводских специалистов}\}$,

$A_2 = \{\textit{пригласить специалистов со стороны}\}$,

$A_3 = \{\textit{заменить оборудование новым}\}$.

Для «природы» в рассматриваемой ситуации возможны три стратегии (состояния):

$П_1 = \{\textit{требуется профилактический ремонт}\}$,

$П_2 = \{\textit{следует заменить отдельные детали и узлы}\}$,

$П_3 = \{\textit{требуется капитальный ремонт}\}$.

В теории игр обычно говорят о выигрыше и максимизации выигрыша, поэтому опишем данную игровую ситуацию с минимизацией потерь в терминах выигрыша. Для этого поставим знак минус перед всеми числовыми значениями затрат на ремонт и замену оборудования, данными в условии. Если игрок A принимает i-ю стратегию A_i при j-ом состоянии «природы» $П_j$, то он получит выигрыш a_{ij}. Например, руководство принимает решение $A_2 = \{\textit{пригласить специалистов со стороны}\}$, если $П_3 = \{\textit{требуется капитальный ремонт}\}$, значит, его выигрыш $a_{23} = -14$. Матрица $A = (a_{ij})$ называется *платежной матрицей*.

	$П_1$	$П_2$	$П_3$
A_1	–6	–8	–15
A_2	–7	–10	–14
A_3	–16	–19	–20

Пример решения матричной игры с заданной платежной матрицей

Матричная игра задана платежной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 13 & 6 \\ 1 & 11 & 8 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 2 \\ 10 & 1 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Указать возможные чистые стратегии сторон;
2. Рассматривая матричную игру как игру с природой, выяснить, какое решение целесообразно принять при следующих предположениях:

а) о вероятностях ничего определенного сказать нельзя (воспользоваться критериями Вальда, Сэвиджа и Гурвица (параметр критерия Гурвица равен 0,5)).

б) накопленный опыт показывает, что вероятности состояний природы, равны соответственно 0,3; 0,1; 0,2; 0,1; 0,3 (воспользоваться критерием Байеса);

в) имеющийся опыт свидетельствует, что все четыре возможных состояния равновероятны (критерий Лапласа);

3. Решить матричную игру путем сведения ее к задаче линейного программирования:

а) составить математическую модель прямой и двойственной задачи

б) найти их оптимальные планы

в) выписать оптимальные стратегии игроков и цену игры.

Решение:

1. У игрока ***A*** 4, а у игрока ***П*** 5 возможных чистых стратегий:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A$_1$	0	0	0	13	6
A$_2$	1	11	8	6	2
A$_3$	2	4	3	5	2
A$_4$	10	1	8	1	5

2. Часто приходится принимать решение, не имея достаточной информации. Если эта неопределенность не связана с сознательным противодействием противника, а определяется внешними условиями, которыми мы не можем управлять, но от которых зависит эффективность выбранной нами стратегии, то такие ситуации принято называть *статистическими играми*, или *играми с природой*.

Природа безразлична к нашему выигрышу, следовательно, ни одно ее возможное состояние нельзя отбросить. Смешанная стратегия может иметь смысл только при многократном повторении игры. Результаты игры будем представлять платежной матрицей, обозначая возможные состояния природы $П_j$. С учетом здравого смысла и практической целесообразности сформулированы ряд критериев, которые образуют логическую схему принятия решения. Для принятия решения кроме платежной матрицы используется *матрица рисков,* элементы которой есть разности между максимально возможным выигрышем при j-м состоянии природы и выигрышем при использовании нами i-й стратегии. Иначе говоря, это упущенная нами из-за невозможности предсказать состояние природы выгода.

Платежная матрица имеет вид:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\min\limits_j a_{ij}$	$\max\limits_j a_{ij}$	По Гурвицу ($\lambda = 0{,}5$)
A$_1$	0	0	0	13	6	0	13	6,5
A$_2$	1	11	8	6	2	1	11	6
A$_3$	2	4	3	5	2	2	5	3,5
A$_4$	10	1	8	1	5	1	10	5,5
$b_j = \max\limits_i a_{ij}$	10	11	8	13	6			

тогда элементы матрицы рисков $r_{ij} = b_j - a_{ij}$ и получаем:

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\max\limits_j r_{ij}$	$\min\limits_j r_{ij}$	По Гурвицу ($\lambda = 0{,}5$)
A$_1$	10-0=10	11	8	0	0	11	0	5,5
A$_2$	10-1=9	0	0	7	4	9	0	4,5
A$_3$	10-2=8	7	5	8	4	8	4	6
A$_4$	10-10=0	10	0	12	1	12	0	6

а) В условиях полной неопределенности используются следующие критерии:

максиминный критерий Вальда. Находим максимум из минимумов и соответствующую ему стратегию. Природа рассматривается как противодействующая сторона. Это стратегия крайнего пессимизма. Для приведенного примера нам следует выбрать $\mathbf{A}_3$ (при этом минимальный гарантированный выигрыш равен 2);

критерий Сэвиджа (минимаксного риска). Выбирается стратегия, обеспечивающая минимум риска при самых неблагоприятных условиях (минимизируем максимальный риск). Это также крайний пессимизм, но по отношению к величине риска. В рассматриваемом примере это также $\mathbf{A}_3$ (при этом максимальный возможный риск равен 8);

максимаксный критерий. Выбирается стратегия, при которой возможно получение максимального выигрыша. Это – безоглядный оптимизм, иногда на него делают ставку в безвыходном положении. В данном случае это $\mathbf{A}_1$ (при этом максимальный возможный выигрыш равен 13);

критерий Гурвица (пессимизма – оптимизма) – это промежуточный выбор между крайним пессимизмом и безудержным оптимизмом. Стратегия выбирается в соответствии со значением

$$\max_i(\lambda \min_j a_{ij} + (1-\lambda)\max_j a_{ij}),$$

где λ – коэффициент пессимизма $(0 \le \lambda \le 1)$. При крайних значениях этого коэффициента получим соответственно минимаксный и максимаксный критерии. При использовании этого критерия часто принимают значение параметра $\lambda = 0{,}5$ или $\lambda = 0{,}6$. Можно критерий Гурвица применить и к матрице рисков, тогда он примет вид:

$$\min_i(\lambda \max_j r_{ij} + (1-\lambda)\min_j r_{ij}).$$

Лучшими стратегиями оказываются A_1 – для матрицы выигрышей и A_2 – для матрицы рисков (при этом возможный выигрыш равен 6,5, а возможный риск равен 4,5 соответственно).

Если бы результаты применения различных критериев совпадали, то мы имели бы основание для выбора стратегии. Однако есть основание сократить область выбора, опуская стратегию $\mathbf{A}_4$. Окончательное же решение зависит от склонности и готовности к риску лица, принимающего решения. Стратегия $\mathbf{A}_1$ перспективна, хотя и несколько рискованна, стратегии $\mathbf{A}_2$ и $\mathbf{A}_3$ представляются более осторожными. В подобной ситуации уместно поставить задачу сбора дополнительных статистических данных или проведения экспериментов для оценки вероятностей возможных состояний природы. Экономически такая работа будет оправдана, если затраты на ее проведение будут меньше ожидаемого выигрыша от уточнения стратегии.

б) Предположим, что вероятности состояний природы q_j, $j = \overline{1,n}$ известны и занесены в платежную матрицу и матрицу рисков.

Платежная матрица

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\overline{a_i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j$
$\mathbf{A}_1$	0	0	0	13	6	3,1
$\mathbf{A}_2$	1	11	8	6	2	4,2
$\mathbf{A}_3$	2	4	3	5	2	2,7
$\mathbf{A}_4$	10	1	8	1	5	6,3
q_j	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	

Матрица рисков

	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	$\overline{r_i} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij} q_j$
$\mathbf{A}_1$	10	11	8	0	0	5,7
$\mathbf{A}_2$	9	0	0	7	4	4,6
$\mathbf{A}_3$	8	7	5	8	4	6,1
$\mathbf{A}_4$	0	10	0	12	1	2,5
q_j	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	

В этом случае пользуются критерием Байеса для выбора стратегии, максимизирующей средний выигрыш $\max \overline{a_i}$, или минимизируют средний риск $\min \overline{r_i}$. Для принятых значений вероятности в обоих случаях предпочтительной оказывается стратегия $\mathbf{A}_4$.

в) Если объективные оценки состояний природы отсутствуют, но нет оснований предпочесть одно состояние другому, то можно принять их равными, полагая $q_j = 1/n$. Такой подход называют *принципом недостаточного основания Лапласа*. Легко убедиться, что в этом случае лучшие результаты дает стратегия $\mathbf{A}_2$.

3. а) В данной игре $\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = 2 \neq \beta = \min_j \max_i a_{ij} = 6$ и игру следует решать в смешанных стратегиях. Т.к. цена игры v>0 (α<v<β), задачу можно сразу свести к задаче линейного программирования.

Замечание! Если цена игры может оказаться отрицательна, то, прежде чем сводить игру к задаче линейного программирования, требуется, для получения положительной цены игры, прибавить ко всем элементам платежной матрицы одно и тоже положительное число. После получения ответа это число отнимают от новой цены игры.

Математическая модель задачи для игрока ***П***:

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \to max$$

$$\begin{cases} 13y_4 + 6y_5 \le 1, \\ y_1 + 11y_2 + 8y_3 + 6y_4 + 2y_5 \le 1, \\ 2y_1 + 4y_2 + 3y_3 + 5y_4 + 2y_5 \le 1, \\ 10y_1 + y_2 + 8y_3 + y_4 + 5y_5 \le 1 \end{cases} \quad y_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5},$$

Математическая модель задачи для игрока ***A***:

$$z(x)=x_1+x_2+x_3+x_4\to min$$

$$\begin{cases} x_2+2x_3+10x_4\ge 1, \\ 11x_2+4x_3+x_4\ge 1, \\ 8x_2+3x_3+8x_4\ge 1, \qquad x_j\ge 0, \quad j=\overline{1,4}, \\ 13x_1+6x_2+5x_3+x_4\ge 1, \\ 6x_1+2x_2+2x_3+5x_4\ge 1, \end{cases}$$

б) Найдем оптимальную смешанную стратегию q^* игрока ***П***. Для этого воспользуемся **Поиском решения.** Получим:

0,010703	0,059633	0	0	0,166667	0,237003

0	0	0	13	6	1	<=	1
1	11	8	6	2	1	<=	1
2	4	3	5	2	0,593272	<=	1
10	1	8	1	5	1	<=	1

Отсюда y^* = (0,010703; 0,059633; 0; 0; 0,166667), $f(y)$ =0,237003.

Для нахождения оптимальной смешанной стратегии игрока ***A*** также можно воспользоваться **Поиском решения,** однако решение для двойственной задачи можно найти и из отчета по устойчивости. Получим:

Теневая Цена
0,062691131
0,082568807
0
0,091743119

Отсюда x^* = (0,062691131; 0,082568807; 0; 0,091743119), $z(x)$ =0,237003.

в) Остается вычислить цену игры v и компоненты q_j оптимальной смешанной стратегии: $v = 1/f$ = 1/0,237003=4,219355; $q_1 = v\ y_1$ =4,219355 · 0,010703= 0,045161; q_2 =0,251613; q_3 =0; q_4 =0; q_5 =0,703226. Итак, $\boldsymbol{q^*}$ **= (0,045161; 0,251613; 0; 0; 0,703226)**. Аналогично, $p_1 = v\ x_1$ =4,219355 · 0,062691131=0,264516; p_2 =0,348387; p_3 =0; p_4 = 0,387097. Таким образом, оптимальной для игрока А является смешанная стратегия $\boldsymbol{p^*}$ **= (0,264516; 0,348387; 0; 0,387097)**. Легко проверить, сумма компонент каждой из оптимальных смешанных стратегий p^* и q^* равна единице, а цена игры ***v*=4,219**, действительно, лежит между α=2 и β= 6.