Теоретическая механика

Бригада №1

2024 г.

Содержание

1 Семинар 1 **3**

1.1 Свойства векторов: 3

1.2 Операции над векторами: 4

1.3 Линейные зависимости между векторами: 6

1.4 Произведения двух векторов: 7

2 Семинар 2 **8**

2.1 Производная вектора постоянного модуля 8

2.1.1 Вектор-функция скалярного аргумента 8

2.1.2 Производная вектора по скалярному аргументу 8

2.1.3 Правила дифференцирования вектора по скаляру. 9

2.1.4 Свойства производной от вектора по скалярному аргументу 9

2.1.5 Производная вектора постоянного модуля 9

2.1.6 Направление производной вектора постоянного модуля 9

2.2 Понятия кривизны и радиуса кривизны 10

2.3 Примеры 10

1 Семинар 1

Основы векторного исчисления

Вектор - количественная характеристика, имеющая не только числовую величину, но и направление.
Вектор - направленный прямолинейный отрезок.
Скаляр - всякое действительное число.

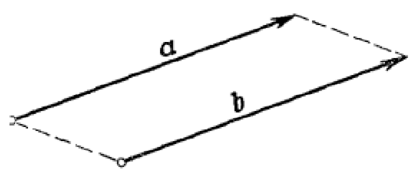
Зачем нужны вектора?

1. Векторные представления адекватно передают суть многих понятий и закономерностей геометрии и физики.
2. В векторном исчислении достигается единство аналитического и геометрического методов исследования, благодаря чему векторные формулы и вывода отличаются сжатостью, ясностью и наглядностью.
3. Векторные формулы, выражающие физические закономерности, не зависят от выбора той или иной координатной системы, т.е. имеют инвариантный характер и отражают сущность явления в чистом виде.

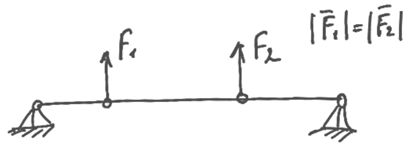
1.1 Свойства векторов:

- **Равенство векторов.** В векторной алгебре два вектора называются равными, если они имеют одинаковые длины и одинаковые направления.
  При этом два вектора считаются одинаково направленными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых и направлены в одну сторону. Таким образом два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ считаются равными, если один из нихъ путём параллельного переноса можно совместить с другим так, что совпадут их начала и концы.
  Для обозначения равенства двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ употребляется знак равенства:

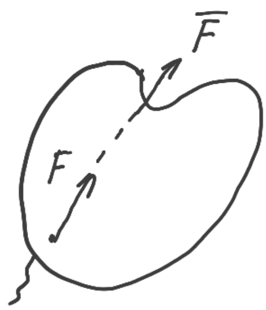
$$\vec{a} = \vec{b}$$



- **Скользящие и приложенные векторные величины.**
  Если векторная величина определяется численной мерой, направлением и точкой приложения, то она называется *приложенной.*



Если векторная величина определеяется численной мерой, направлением и прямой линией, имеющей это направление, то она называется *скользящей.*



Если векторная величина определяется численной мерой и направлением, то она называется *свободной.* У такой величины нет физического смысла.

- **Модуль вектора.** *Модуль вектора* - скалярная величина, равная его длине при условии, что выбрана определённая единица измерения.

$$|\vec{a}| = a$$

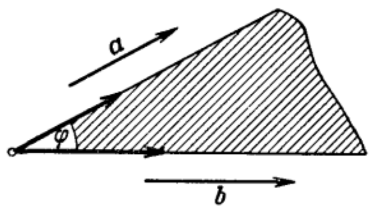
Нулевой вектор - вектор называется нулевым тогда и только тогда, когда его модуль равен нулю.

- **Орт вектора.** *Ортом* данного вектора называется вектор, который направлен одинаково с данным вектором и имеет модуль, равный единице.

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

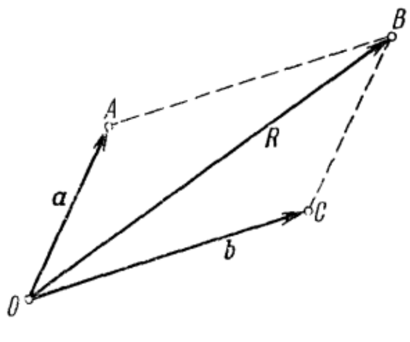
Следствие: равные векторы имеют равные орты.

- **Угол между векторами.** *Угол между векторами* - меньшая часть плоскости, ограниченная двумя лучами, исходящими из одной точки и направленными одинаково с данными векторами. $0 < \phi < \pi$



1.2 Операции над векторами:

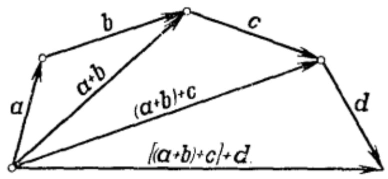
1. **Сумма двух векторов.** *Суммой* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является третий вектор $\vec{R}$, соединяющий начало первого слагаемого вектора $\vec{a}$ с концом второго слагаемого при условии, что начало второго слагаемого совмещено с концом первого. Результат сложения не зависит от того, в какой точке пространства помещено начало первого слагаемого.



Операция нахождения суммы векторов называется *сложением.* Для обозначения употребляется плюс:

$$\vec{R} = \vec{a} + vecb$$

2. **Сумма более чем двух векторов.** Сложение многих векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ ... совершается последовательно: сначала $\vec{a}$ и $\vec{b}$, затем к сумме $\vec{a}+\vec{b}$ прибавляется $\vec{c}$ и тд.



Правило многоугольника: суммой нескольких векторов является вектор, соединяющий начало первого слагаемого вектора с концом последнего при условии, что начало каждого последующего вектора совмещено с концом предыдщего.
Законы сложения:

(a) *Закон сочетательности.* Сумма не изменится, если любую группу последовательных слагаемых заменить их суммой:
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

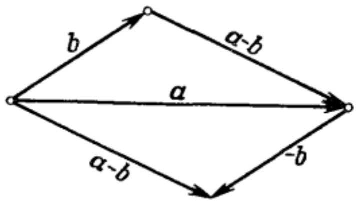
(b) *Закон переместительности.* От перестановки мест слагаемых сумма не меняется:
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

3. **Модуль суммы.** Модуль суммы векторов не превосходит суммы модулей слагаемых:
$$|\vec{a}+\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

Замечание: Если слагаемые векторы имеют одинаковые направления, то модуль суммы равен сумме модулей:
$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|+|\vec{b}|$$

Если два слагаемых вектора имеют противоположные направления, то модуль их суммы равен разности модулей, причём из большего модуля вычитается меньший:
$$|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}|-|\vec{b}|$$

4. **Вычитание векторов.** Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, из которых первый именуется *уменьшаемым*, а второй - *вычитаемым*, называется сумма уменьшаемого вектора и вектора, противоположного вычитаемому.
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$



Противоположный вектор - вектор, имеющий модуль, равный исходному, но противоположное направление.
Сумма двух противоположных векторов равна нулю:
$$\vec{a}+(-\vec{a})=0$$

Вектор, противоположный противоположному, совпадает с исходным:
$$-(-\vec{a})=\vec{a}$$

5. **Вычитание как операция, обратная сложению.** Из вычитания векторов видно, что $\vec{b}+(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}$, т.е. сумма разности и вычитаемого вектора равна уменьшаемому вектору.
Операция вычитания векторов есть операция, обратная сложению: при её помощи по сумме $\vec{a}$ и одному слагаемому $\vec{b}$ находится второе слагаемое $\vec{a}-\vec{b}$.

6. **Умножение вектора на скаляр.** Умножение вектора на целое положительное число n можно считать как сложение вектора n раз.
Произведением вектора и скаляра называется новый вектор, который имеет:
   (a) модуль, равный произведению модуля умножаемого вектора на абсолютную величину скаляря;
   (b) направление, одинаковое с умножаемым вектором, если скаляр положительный, и противоположно, если скаляр отрицательный.

   Произведение вектора $\vec{a}$ и скаляра λ обозначается $\vec{a}\lambda$ или $\lambda\vec{a}$, таким образом:
$$|\lambda\vec{a}| = |\vec{a}\lambda| = |\lambda| * |\vec{a}|$$
   Замечание: из определения следует, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из множителей равен нулю:
$$\lambda * \vec{0} = \vec{0}; 0 * \vec{a} = \vec{0}$$
   Законы умножения вектора на скаляр:
   (a) *Закон сочетательности для скалярных множителей.* Последовательное умножение вектора на несколько скалярных множителей равносильно умножению вектора на произведение этих множителей:
$$\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$$
   (b) *Закон двоякой распределительности.* Умножение суммы векторов на скаляр, а также умножение суммы скаляров на вектор можно производить почленно:
$$(\vec{a} + \vec{b})\lambda = \vec{a}\lambda + \vec{b}\lambda$$
$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$$
7. **Деление вектора на скаляр.** Деление вектора на скаляр определяется как умножение этого вектора на обратный скаляр:
$$\frac{\vec{a}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\vec{a}$$
8. **Выражение вектора серез его модуль и орт.** Если умножить орт вектора на модуль вектора, то получится сам вектор:
$$\vec{a} = a * \vec{a}_0$$
9. **Линейная комбинация.** Если над векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ выполнять действия сложения, вычитания, умножения на скаляр, то в результате любого числа таких действий получается вектор вида
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d}$$
   представляющий собой *линейную комбинацию* исходных векторов.

1.3 Линейные зависимости между векторами:

1. **Линейно зависимые вектора.** Вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ являются линейно зависимыми, если между ними выполняется соотношение вида:
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \delta\vec{d} = 0$$
2. **Коллениарные вектора.** Вектора называются коллениарными, если они параллельны одной прямоы. Нулевой вектор считается коллениарным любому вектору.
Теорема. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.
Следствие. Если между двумя неколлениарными векторами выполняется линейное соотношение
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0$$
   то оба скалярных коэффициента должны равняться нулю.
3. **Компланарыне векторы.** Векторы называются компланарными, если они параллельны одной плоскости. Нулевой вектор считается компланарным любой системе компланарынх векторов.
Теорема. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.
Следствие. Если между тремя некомпланарными векторами выполняется линейное соотношение
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$$
   то все три скалярных коэффициента должны равняться нулю.

1.4 Произведения двух векторов:

1. **Скалярное произведение двух векторов.** Скалярное произвеление двух векторов называется произвеление их модулей на косинус угла между ними.

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos\phi$$

Равенство скалярного произведения нулю. Скалярное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогла, когда хотя бы один из перемножаемых векторов равен нулю или когда эти вектора перпендикулярны, т.е. условием перпендикулярности ненулевых векторов является равенство нулю их скалярного произведение.
Законы скалярного умножения:

   (a) *Закон переместительности.* Скалярное произведение не меняется от перестановки множителей

$$\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$$

   (b) *Закон распределительности.* Скалярное умножение вектора на сумму векторов можно производить почленно, т.е.

$$\vec{a} * (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} * \vec{b} + \vec{a} * \vec{c}$$

   Лемма. Скалярное произведение равно произведения модуля одного вектора на проекцию другого на первый:

$$\vec{p} * \vec{q} = p * np_{\vec{p}}\vec{q}$$

   (c) *Закон сочетательности относительно скалярных множителей.* Скалярное произвеление не изменится, если скалярный множитель вынести за скобки:

$$(\lambda\vec{a}) * \vec{b} = \lambda(\vec{a} * \vec{b})$$

2. **Векторное произведение двух векторов.** Векторным произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{N}$, который:

   (a) имеет модуль, численно ранвый площади параллелограмма, построенного на перемножаемых векторах;

   (b) направлен перпендикулярно к перемножаемым векторам в ту сторону, откуда наименьший поворот первого множителя, совмещающий его направление с направлением второго множителя, виде происходящим против хода часовой стрелки(правило правой руки).

$$\vec{a} \times \vec{b}$$
$$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Модуль векторого произведения:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin\phi$$

Условия равенства нулю векторого произведения. Векторное произведение двух векторов равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из перемножаемых векторов равен нулю или когда эти вектора коллинеарны.
Законы векторного умножения:

   (a) *Закон противопереместительности.* При перестановке множителей векторное произведение меняет только свой знак

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

   (b) *Закон распределительности.* Векторное умножение вектора на сумму векторов можно производить почленно

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

   (c) *Закон сочетательности относительно скалярных множителей.* Скалярный множитель можно вынести за зак векторного произведения

$$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$$

2 Семинар 2

2.1 Производная вектора постоянного модуля

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Производная функции в общем виде:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

2.1.1 Вектор-функция скалярного аргумента

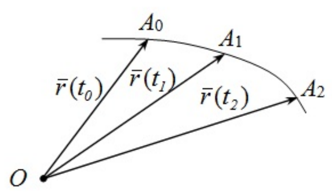
Рассмотрим вектор-функцию, зависящую от скаляра $\vec{r}=\vec{r}(t)$.
В координатном виде данная функция может быть задана как

$$r_x=r_x(t), r_y=r_y(t), r_z=r_z(t)$$

Таким образом и сам вектор может быть задан через главные орты:

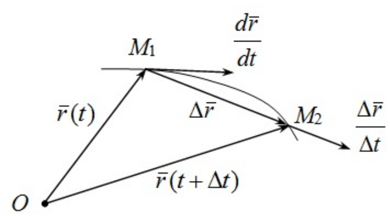
$$\vec{r}(t)=r_x(t)\cdot\vec{i}+r_y(t)\cdot\vec{j}+r_z(t)\cdot\vec{k}$$

Годограф вектора. Годографом вектора, зависящего от скаляра, называется кривая, которую описывает конец вектора-функции, когда его начало помещено в 0.



2.1.2 Производная вектора по скалярному аргументу

Производная вектора. Производной вектора по его скалярному аргументу называется предел отношения приращения вектора к соответствующему приращению скалярного аргумента, когда приращение этого аргумента стремится к нулю.



Найдём отношение приращения вектора к приращению аргумента.

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

При стремлении $\Delta t\to 0$:

$$\frac{d\vec{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

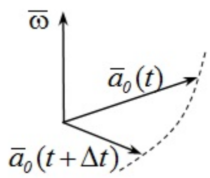
$$\dot{\vec{r}}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

Геометрический смысл производной вектора. Производная вектора по его скалярному аргументу есть вектор, направленной по касательной к годографу исходного вектора в рассматриваемой точке.
Замечание. Производная направлена по касательной в ту сторону, куда перемещается конец вектора, когда параметр растёт.

Механический смысл производной вектора. Производная радиус-вектора движущейся точки по времени есть скорость этой точки в данный момент.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \dot{r}$$

Замечание. Производную вектора можно всегда рассматривать как скорость конца вектора при условии, что его начало всегда находится в фиксированной точке, а аргумент рассматривается как время.



2.1.3 Правила дифференцирования вектора по скаляру.

1. определение производной вектора по скаляру совпадает с обычным определением;
2. теоремы о пределах векторных вращений не отличаются от обычных теорем о пределах;
3. векторные алгебраические операции подчиняются законам алгебры.

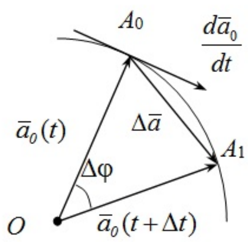
2.1.4 Свойства производной от вектора по скалярному аргументу

1. Если вектор $\vec{a}$ постоянен, т.е. не меняет со временем ни модуля, ни направления, то $\frac{d\vec{a}}{dt} = 0$;
2. $\frac{d}{dt}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$, $\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b} + \frac{d\vec{b}}{dt} \cdot \vec{a}$
3. Если аргументом вектора $\vec{a}$ является сложна функция $S = S(t)$, т.е. $\vec{a} = \vec{a}(S(t))$, $\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt}$

2.1.5 Производная вектора постоянного модуля

Будем рассматривать вектор $\vec{a}(t)$, который является переменным, но постоянным по модулю. Т.е.:

1. $|\vec{a}(t)| = const \neq 0$
2. $\vec{a}(t + \Delta t)$ и $\vec{a}(t)$ неколлинеарны хотя бы в некоторых точка t в пределах его одз.



2.1.6 Направление производной вектора постоянного модуля

(Годограф вектора с постоянным модулем выглядит как окружность.)

Доказательство1. Запишем скалярное произведение двух векторов $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 = const$, возьмём производную от левой части:

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{a}) = \frac{d}{dt}(a^2)$$

Распишем подробнее производную:

$$\dot{\vec{a}} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \dot{(\vec{a})} = 0$$

$$2\dot{\vec{a}} \cdot \vec{a} = 0$$

Из чего следует, что вектора $\vec{a}$ и $\dot{\vec{a}}$ перпендикулярны, т.е. $\cos(\vec{a}; \dot{\vec{a}}) = \pm\frac{\pi}{2}$

Доказательство2. У нас есть годограф вектора $\vec{a}$. Если модуль вектора равен константе $|\vec{a}| = const$, то модуль годографа вектора постоянен => Годограф это окружность или часть окружности. И таким образом касательная $\dot{\vec{r}}(t)$ перпендикулярна радиусу $\vec{r}(t)$ по свойству окружности.

Модуль вектора $\vec{a}(t)$.

$$\Delta\vec{a} = \vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)$$

$$|\Delta\vec{a}| = \Delta a = 2a\sin\phi$$

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{2a\sin\Delta\phi}{\Delta t}$$

По определению модуль производной:

$$|\dot{\vec{a}}| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta a}{\Delta t} = a\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\Delta\phi}{\Delta t} = a\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\Delta\phi}{\Delta\phi}\cdot\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = a\cdot\lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{\sin\Delta\phi}{\Delta\phi}\cdot\lim_{\Delta\to 0}\frac{2\Delta\phi}{\Delta t} = a\cdot\lim_{\Delta t\to}\frac{\Delta\psi}{\Delta t} = a\cdot\dot{\psi}$$

$\dot{\vec{a}} : |\dot{\vec{a}}| = a\cdot\dot{\psi}$, где $\dot{\psi}$ - скорость поворота вектора.
Так как $\dot{\psi} = \omega$ перпендикулярна плоскости годографа, то можно сказать, что

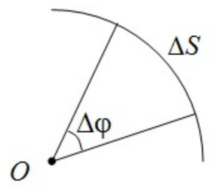
$$\dot{\vec{a}} = \vec{a}\times\vec{\omega}$$

Введём вектор $\vec{k} = \vec{a}_o \times \dot{\vec{a}}_o$, $\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{k}$, где k - скорость поворота орт-вектора.

2.2 Понятия кривизны и радиуса кривизны

Пускай есть некоторый радиус $\vec{r}$, тогда кривизной радиуса в точке называют величину K.

$$K = \lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta S} = \frac{d\phi}{dS}$$



Радиус кривизны ρ – обратная величина к кривизне.

$$\rho = \frac{1}{K} = \frac{dS}{d\phi}$$

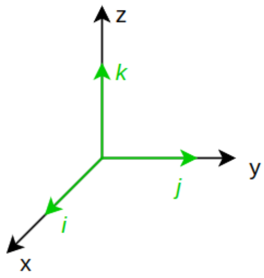
2.3 Примеры

Пример1

Пускай есть вектор $\vec{b}(t) = 1\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} + 3\cdot\vec{k}$ в декартовой системе координат. Как у этого вектора найти $\dot{\vec{b}}(t)$? Является ли этот вектор переменным, т.е. зависит ли он от t?
Решение: Нет, соответственно $\dot{\vec{b}}(t) = 0$, а модуль $|\vec{b}| = 14$.

Пример2

$\vec{b}(t) = \cos(\omega_0 t)\vec{i} + \sin(\omega_0 t)\vec{j}$. $t = 0$, $\vec{\omega}$, $\dot{\vec{b}}$ – ?
Решение: $\dot{\vec{b}}(t) = -\omega_0\cdot\sin(\omega_0 t)\vec{i} + \omega_0\cdot\cos(\omega_0 t)\vec{j}$; $|\vec{b}| = \omega_0$
$\frac{d\vec{i}}{dt} = 0$, $\frac{d\vec{j}}{dt} = 0$



Пример3

$|\vec{b}| = \sin(\omega_0 t)\vec{i} + \cos(\omega_0 t)\vec{j}$, $|\vec{b}| = 1$, $\dot{\vec{b}}$, $\vec{\omega}$ – ? при t = 0

Решение:

$$t = \frac{\pi}{4\omega_0} \cdot k, k \in Z$$

$$\dot{\vec{b}} = \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t)\vec{i} - \omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t)\vec{j}$$

$$|\dot{\vec{b}}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\phi, \vec{\omega} \perp \vec{b}$$

$$|\dot{\vec{b}}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{b}|$$

откуда

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_0^2 \cdot \cos^2(\omega t) + \omega_0^2 \cdot \sin^2(\omega t)} = \omega_0\sqrt{\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)} = \omega_0$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\omega_0^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t) + \omega_0^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t)} = \omega_0\sqrt{\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)} = \omega_0$$

$$|\dot{\vec{b}}| = \omega_0^2$$

$$|\vec{\omega}| = \frac{|\dot{\vec{b}}|}{|\vec{b}|} = \omega_0$$

Пример 4

$$\vec{b}(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \vec{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \vec{j}$$

при $t = 0$.

$|\dot{\vec{b}}|, |\vec{\omega}|$ – ?

Решение:

$$\dot{\vec{b}}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}(t^2+1)} \cdot \vec{i} - \frac{t}{\sqrt{t^2+1}(t^2+1)} \cdot \vec{j}$$

$$|\dot{\vec{b}}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\phi, \vec{\omega} \perp \vec{b}$$

откуда

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_i^2 + b_j^2} = \sqrt{\frac{1}{(t^2+1)^3} + \frac{t^2}{(t^2+1)^3}} = \sqrt{\frac{t^2+1}{(t^2+1)^3}} = \frac{1}{|t^2+1|}$$