1.1. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $u = xln(xy)$.

$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}[\frac{\partial}{\partial y}\{xln(xy)\}] = \frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{y})] = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{y}) = 0.$

3.3. Найти частные производные первого и второго порядков функции: $u = f(x, xy, xyz)$;

$u = u(x, y, z)$. Найдем частные производные первого порядка:

- $u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1(x)'_x + f'_2(xy)'_x + f'_3(xyz)'_x = f'_1 + f'_2 y + f'_3 yz$;
- $u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = f'_1(x)'_y + f'_2(xy)'_y + f'_3(xyz)'_y = f'_1 0 + f'_2 x + f'_3 xz = f'_2 x + f'_3 xz$;
- $u'_z = \frac{\partial u}{\partial z} = f'_1(x)'_z + f'_2(xy)'_z + f'_3(xyz)'_z = f'_3 xy$;

f'_i, i обозначает аргумент, по которму дифференцируется $f = f(x_1, x_2, x_3)$, где $x_1(t_1, t_2, t_3), x_2(t_1, t_2, t_3), x_3(t_1, t_2, t_3)$;

$f'_1 = f'_1(x_1, x_2, x_3), f'_2 = f'_2(x_1, x_2, x_3), f'_3 = f'_3(x_1, x_2, x_3)$;

Найдем частные производные второго порядка (найдем только $u''_{xy}, u''_{xz}, u''_{yz}, u''_{xx}, u''_{yy}, u''_{zz}$, остальные равны найденным по теореме о равенстве смешанных производных):

- $u''_{xx} = (u'_x)'_x = (f'_1 + f'_2 y + f'_3 yz)'_x = [f''_{11}(x)'_x + f''_{12}(xy)'_x + f''_{13}(xyz)'_x] +$
  $+[(f''_{21}(x)'_x + f''_{22}(xy)'_x + f''_{23}(xyz)'_x)y + f'_2(y)'_x] + [(f''_{31}(x)'_x + f''_{32}(xy)'_x +$
  $+f''_{33}(xyz)'_x)(yz) + f'_3(yz)'_x] = [f''_{11} + f''_{12}y + f''_{13}yz] + [f''_{21}y + f''_{22}y^2 + f''_{23}y^2 z]$
  $+[f''_{31}yz + f''_{32}y^2 z + f''_{33}y^2 z^2]$;
- $u''_{yy} = (u'_y)'_y = (f'_2 x + f'_3 xz)'_y = [(f''_{21}(x)'_y + f''_{22}(xy)'_y + f''_{23}(xyz)'_y)x +$
  $+f'_2(x)'_y] + [(f''_{31}(x)'_y + f''_{32}(xy)'_y + f''_{33}(xyz)'_y)xz + f'_3(xz)'_y] =$
  $= [f''_{22}x^2 + f''_{23}x^2 z] + [f''_{32}x^2 z + f''_{33}x^2 z^2]$;
- $u''_{zz} = (u'_z)'_z = (f'_3 xy)'_z = [(f''_{31}(x)'_z + f''_{32}(xy)'_z + f''_{33}(xyz)'_z)xy + f'_3(xy)'_z] =$
  $= [f''_{33}x^2 y^2]$;
- $u''_{xy} = (u'_x)'_y = (f'_1 + f'_2 y + f'_3 yz)'_y = (f'_1)'_y + (f'_2 y)'_y + (f'_3 yz)'_y =$
  $= [f''_{11}(x)'_y + f''_{12}(xy)'_y + f''_{13}(xyz)'_y] + [(f''_{21}(x)'_y + f''_{22}(xy)'_y + f''_{23}(xyz)'_y)y +$
  $+f'_2(y)'_y] + [(f''_{31}(x)'_y + f''_{32}(xy)'_y + f''_{33}(xyz)'_y)yz + f'_3(yz)'_y] = [f''_{12}x + f''_{13}xz] +$
  $+[f''_{22}xy + f''_{23}xyz + f'_2] + [f''_{32}xyz + f''_{33}xyz^2 + f'_3 z]$;
- $u''_{xz} = (u'_x)'_z = (f'_1 + f'_2 y + f'_3 yz)'_z = (f'_1)'_z + (f'_2 y)'_z + (f'_3 yz)'_z =$
  $=$ [похожие преобразования] $= [f''_{13}xy] + [f''_{23}xy^2] + [f''_{33}xy^2 z + f'_3 y]$;
- $u''_{yz} = (u'_y)'_z = (f'_2 x)'_z + (f'_3 xz)'_z =$ [похожие преобразования]
  $= [f''_{23}x^2 y] + [f''_{33}x^2 yz + f'_3 x]$.

3.4. Найти частные производные первого и второго порядков функции: $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, если $u = f(x+y, xy)$;

Найдем $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(u'_y) = \frac{\partial}{\partial x}(f'_1(x+y)'_y + f'_2(xy)'_y) = \frac{\partial}{\partial x}(f'_1 + f'_2 x) =$
$= (f'_1 + f'_2 x)'_x = [f''_{11}(x+y)'_x + f''_{12}(xy)'_x] + [(f''_{21}(x+y)'_x + f''_{22}(xy)'_x)x + f'_2] =$
$= [f''_{11} + f''_{12}y] + [f''_{21}x + f''_{22}xy + f'_2]$.

4.2. Найти производные функции: $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ **в точке** $M(1,1)$ **в направлении, составляющем угол** α **с положительным направлением оси абсцисс.**

Пусть $A = (cosa, sina)$ - вектор направления. Найдем производную по направлению A в точке M: $f'_A(M) = f'_x(M)cosa + f'_y(M)sina =$
$= (2*1-1)cosa + (-1+2*1)sina = cosa + sina$, $a \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

При $a = \frac{\pi}{4}, A = (cos(\frac{\pi}{4}), sin(\frac{\pi}{4}))$ будет достигаться наибольшее значение функции производной (равное $\sqrt{2}$), т.к. a не может равняться $-\frac{\pi}{2}$, наименьшего значения производная не достигает. В направлении $A = (cos(-\frac{\pi}{4}), sin(-\frac{\pi}{4}))$ производная равна 0.