2. Ребята решили сыграть в тайного санту. Они написали свои имена на бумажках и сложили в шляпу, а сейчас вытягивают имена человека, кому они будут дарить подарок. Какова вероятность того, что никто не вытянет свое же имя?

Пусть n - количество ребят, пронумеруем их от 1 до n. Предположим, что по имени можно однозначно определить ребенка.

$$perm = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$$

i - номер ребенка, который вытягивает бумажку,
k_i - номер ребенка, чье имя написано на бумажке.

Переформулируем условие задачи: необходимо найти вероятность такой перестановки perm, что элемент $i \neq k_i$, $\forall i \in \overline{1..n}$. Такая перестановка - перестановка без неподвижных точек, и их число равно субфакториалу: $!n = n! * \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Количество всех перестановок - n!. Значит, необходимая вероятность

$$P(n) = \frac{!n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

.

3. Из чисел 1,2,...,N случайно выбирается число a. Найти вероятность P того, что: (Найти для каждого случая $\lim_{N\to\infty} P_N$)

- **число a не делится ни на a_1 ни на a_2, где a_1 и a_2 — фиксированные натуральные взаимно простые числа;**

  Пусть $c_1 = [\frac{N}{a_1}]$(целая часть $\frac{N}{a_1}$), $c_2 = [\frac{N}{a_2}]$ - они отображают, какое количество чисел между 1 и N делятся на a_1 и a_2, соответственно.

  Тогда $P_N = \frac{N-c_1}{N} * \frac{N-c_2}{N}$.

$$\lim_{N\to\infty} P_N = \lim_{N\to\infty}(\frac{N-c_1}{N} * \frac{N-c_2}{N}) \geq [\text{т.к. } c_1 \leq \frac{N}{a_1},\, c_2 \leq \frac{N}{a_2}] \geq \lim_{N\to\infty}(\frac{N-\frac{N}{a_1}}{N} * \frac{N-\frac{N}{a_2}}{N}) = \\ = (1-\frac{1}{a_1}) * (1-\frac{1}{a_2})$$

$$\lim_{N\to\infty} P_N = \lim_{N\to\infty}(\frac{N-c_1}{N} * \frac{N-c_2}{N}) \leq [\text{т.к. } c_1 \geq \frac{N}{a_1} - 1,\, c_2 \geq \frac{N}{a_2} - 1] \leq \\ \leq \lim_{N\to\infty}(\frac{N-\frac{N}{a_1}+1}{N} * \frac{N-\frac{N}{a_2}+1}{N}) = (1-\frac{1}{a_1}) * (1-\frac{1}{a_2})$$

  Значит, $P_N \to_{N\to\infty} (1-\frac{1}{a_1}) * (1-\frac{1}{a_2})$;

- **число a не делится ни на какое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_k$, где числа a_i — натуральные и попарно взаимно простые**

  Аналогичные рассуждения: находим c_i, $\forall i \in \overline{1..k}$

  Тогда $P_N = \frac{N-c_1}{N} * \frac{N-c_2}{N} * \ldots * \frac{N-c_k}{N}$.

  Также оценив пределы, по лемме о 2х миллиционерах получаем:

  $P_N \to_{N\to\infty} (1-\frac{1}{a_1}) * (1-\frac{1}{a_2}) * \ldots * (1-\frac{1}{a_k})$.