1. Пусть есть множество множеств $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\}\}$. Дополните эту систему до:

1. (Минимального полукольца) В полукольце должно быть пустое множество - $\emptyset \implies$ множество становится $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\emptyset\}$

   В полукольце есть пересечение любых двух элементов $\implies$ множество становится $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\emptyset,\{3,4\}\}$

   В полукольце для каждого элемента есть разбиение на элементы из полукольца $\implies$ множество становится

   $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\emptyset,\{3,4\},\{1,2\},\{5,6\}\}$ - это минимальное полукольцо.

2. (Минимального кольца) Любое кольцо - полукольцо.

   Значит $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\emptyset,\{3,4\},\{1,2\},\{5,6\}\}$ содержится и в кольце.

   Для любых двух элементов из кольца в кольце содержится их симметрическая разность $\implies$ множество становится

   $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\emptyset,\{3,4\},\{1,2\},\{5,6\},\{1,2,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$

3. (Минимальной алгебры) Полученное нами кольцо

   $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\emptyset,\{3,4\},\{1,2\},\{5,6\},\{1,2,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$

   является алгеброй.

   В данном случае единицей является элемент $\{1,2,3,4,5,6\}$ - он лежит во множестве и пересечение любого элемента с ним дает сам элемент.

2. Доказать, что:

1. Пересечение произвольной непустой системы колец является кольцом (возможно, состоящим лишь из пустого множества):

   Проверим, что это кольцо, опираясь на определение кольца:

   (a) Если во множестве есть элементы A, B, то в нем есть $A \cap B$:

   От противного: предположим, что в пересечение попали элементы A, B, но не $A \cap B$. Т.к. A, B лежат в пересечении, они принадлежат каждому из колец. Но если A, B лежат в кольце, то и $A \cap B$ лежит в кольце. Значит, в каждом кольце есть $A \cap B \implies$ в пересечение колец есть$A \cap B$. Получаем противоречие.

   (b) Если во множестве есть элементы A, B, то в нем есть $A \triangle B$:

   Также как и с предыдущим подпунктом - преположением от противного приходим к выводу, что если A, B лежат в пересечение, то и $A \triangle B$ лежит в пересчение колец.

(c) Отдельным пунктом выделим, что система не пуста:

Т.к. кольцо является и полукольцом, в нем есть $\emptyset$. Значит, и в пересечении колец будет лежать хотя бы $\emptyset$, ведь оно есть в каждом кольце.

2. Пересечение произвольной непустой системы σ-колец является σ-кольцом:

$\sigma-$кольцо - это кольцо с счетным объединением. Показано в пункте выше, что пересечение колец - кольцо. Осталось доказать, что полученное кольцо будет σ-кольцом.

От противного: пусть в кольце есть такое объединение $\cup_{n\in N} A_n \notin R$. Все элементы из пересечения есть в каждом из пересекаемых σ-колец, а в них $\cup_{n\in N} A_n \in R_i (R_i -$ кольца из пересечения). Значит, и $\cup_{n\in N} A_n$ войдет в пересечение. Приходим к противоречию.

3. Пересечение непустой (конечной) системы алгебр с одной и той же единицей является алгеброй:

Алгебра - кольцо с единицей. Уже доказано выше, что пересечение колец - кольцо. Т.к. единица(назовем ее E) в каждой алгебре одна и та же, она войдет и в пересечение. И в итоговом кольце E также будет едининцей:

От противного: если $\exists A$ из полученного кольца, такой что $A \cap E \neq A$, то этот элемент принадлежит и всем алгебрам. Но в них $A \cap E = A$ - что войдет и в пересечние. Получаем противоречие.

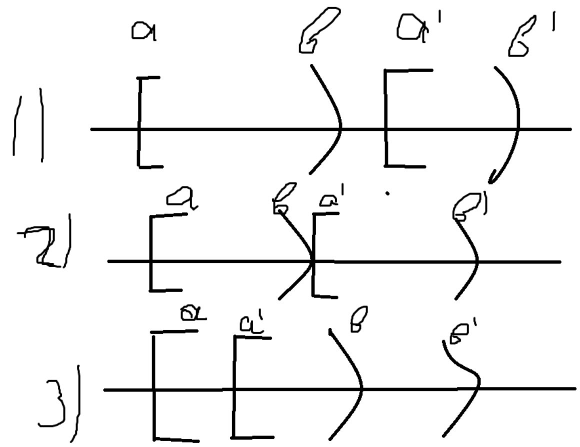
3. Доказать, что следующие множества являются полукольцами с единицей, и указать соответствующие единицы:

1. $\{[\alpha; \beta) | a \leq \alpha < \beta \leq b\} = S$ (включая пустой промежуток):

Докажем по определению, что это полукольцо:

(a) $\emptyset$ есть в этом множестве по условию - (включая пустой промежуток);

(b) Пересечение двух полуинтервалов выглядит следующим образом:



Т.е. если у двух полуинтервалов нет ни одной общей точки - их пересчение $\emptyset$; если одна из точек выколота, а другая - нет, то их пересечение также $\emptyset$; иначе в пересечение будет полуинтервал вида: $[c, d) \cap [c', d') = [max(c, c'), min(d, d'))$;

(c) Покажем, что для любого полуинтервала найдется разбиение:
От противного предположим, что $\exists[c, d) : a \leq c < d \leq b$, для которого не существует разбиения. $\exists m : m = \frac{c+d}{2}, m \in [c, d)$
(m $\neq$ d, т.к. это возможно только при $c = d$, что невозможно по условию) $\implies [c, m) \in S \wedge [m, d) \in S$ - но это разбиение для $[c, d)$, пришли к противоречию.

Единицей для S будет полуинтервал $[a, b)$, т.к. $[a, b) \in S \wedge \forall[c, d) \in S : [c, d) \cap [a, b) = [c, d)$, т.к. $[c, d) \cap [a, b) = [max(c, a), min(d, b))$ и по условию a - минимальный элемент, b - максимальный.

2. Система всех промежутков, вложенных в отрезок $[a; b]$.

Покажем, что это полукольцо:

(a) Пустое множество принадлежит $[a; b]$ по аналогии с предыдущим пунктом;

(b) Какие бы два промежутка из $[a; b]$ мы не выбрали, их пересечение будет лежать в $[a; b]$, потому что это будет либо пустое множество, либо промежуток вида $\{[,(\}max(c, c'), min(d, d')\{],)\}$ - по аналогии с предыдущим пунктом.

(c) Разбить промежутки мы можем по аналогии с предыдущим пунктом, только теперь нет ограничения на использование скобок: подойдет как разбиение {[,(}c,m), [m,d{],)}, так и {[,(}c,m], (m,d{],)}

Единицей будет являться весь отрезок [a,b].

4. Докажите, что множество всех промежутков с рациональными концами, содержащихся в отрезке $[0;\pi]$, - полукольцо. Почему не кольцо? Есть ли в нем единица?

Это множество можно выразить так: $S = \{$промежуток от a до b $|a, b \in Q \wedge 0 \leq a \leq b \leq \pi\}$.

По аналогии с предыдущим заданием докажем по определению, что это полукольцо:

1. $\emptyset$ принадлежит S:

2. Если мы пересечем два промежутка (от c до d, от a до b) с рациональными концами, то в пересечение получится либо пустое множество, либо промежуток, концевые точки которого будут равны max(c,a), min(d,b) - левая и правая соответственно - который также лежит в S по условию.

3. Для разбиения воспользуемся той же техникой, что и в предыдущем задании: выберем такую точку m на промежутка от a до b, что m = $\frac{a+b}{2} \implies m \in Q$. По условию как {[,(}a,m), [m,b{],)}, так и {[,(}a,m], (m,b{],)} лежат в S.

S не будет кольцом, потому нет симметричной разности, например:

$[0,1], [2,3] \in S$, но их симметричная разность $\{[0,1], [2,3]\} \notin S$.

В S нет единицы, т.к. в малой окрестности числа π лежит бесконечно много рациональных чисел, поэтому при любом выборе $[0,b]$ - "единицы- можно будет найти промежуток $[0,b'] : b', b \in Q, b' > b \implies [0,b] \cap [0,b'] = [0,b]$.

5. Пусть A — бесконечное множество, Y — система всех его не более чем счетных подмножеств. Доказать, что Y — σ-кольцо.

Докажем по определению:

1. Пересечение: если два подмножества из Y не более чем счетны, то и их пересечение не более чем счетно $\implies$ пересечение любых двух подмножеств лежит в Y.

2. Симетричная разность: если два подмножества из Y не более чем счетны, то и их симетричная разность не более чем счетна, т.к. каждому элементу из первого подмножества, невходящему в пересечение, мы можем присвоить нечетные номера, каждому элементу из второго, невходящему в пересечение, - четные. Значит, их симметричная разность лежит в Y.

3. Счетное объединение: Счетное объединение не более чем счетных множеств будет тоже счетным множеством $\implies$ будет находится в Y.

   Чтобы это доказать, нужно показать, что каждому элементу из объединения можно сопоставить какое-либо $n \in N$.

м-во				
A_1	1 a_1	3 a_2	6 a_3	...
A_2	2 в_1	5 в_2	9 в_3	...
A_3	4 c_1	8 c_2	13 c_3	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Элементы каждого из объединяемых множеств можно записать в строку и пронумеровать их по побочным диагоналям получившейся таблицы - точно также, как доказывается счетность рациональных чисел.