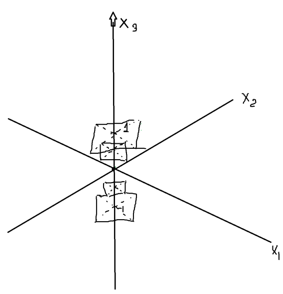
1. Изобразить единичный шар B[0, 1] в пространстве $\langle X, \rho\rangle$

4. $X = \mathbb{R}^3, \rho(x, y) = max\{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, |x_3 - y_3| \}$

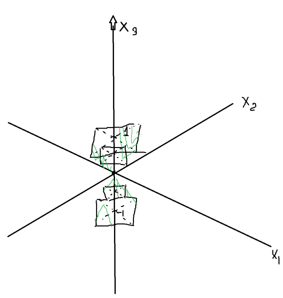
$B[0, 1] = \{x \in R^3 : \rho(x, 0) \leqslant 1\}$

$$\rho(x,0) = \begin{cases} |x_1| + |x_2|, \text{ если } |x_1| + |x_2| \geq |x_3| \\ |x_3| \text{ , если } |x_1| + |x_2| < |x_3| \end{cases}$$

Рассмотрим $|x_1| + |x_2| = |x_3|$. Проанализируем равенство с помощью фиксации одной из координат. Пусть x_3 - константа. Тогда получается равенство $|x_1| + |x_2| =$ c - это ромб, площадь которого увеличивается с увеличением c. Т.к. $\rho \leq 1$, наибольшее значение достигается при $c \in \{-1, 1\}$. Схематические изобразим так:



Осталось понять, как выглядит объект "сбоку". Для этого зафиксируем другую координату, например, x_2, назовем её $k, 1 \geq k \geq 0$. Получается $|x_1| +$ k $= |x_3|$. Это 2 "галки "вершины"которых перемещаются вдоль оси в зависимости от значения k. Схематические изобразим так:



4. Привести примеры метрических пространств, в которых существуют шары

2. совпадающие с множеством своих центров;

Пусть $X \in \mathbb{N}, r = \frac{1}{2}, \rho(x, y) = |x - y|$, тогда $B[a, r] = \{x \in \mathbb{N} : \rho(x, a) \leqslant r\}$

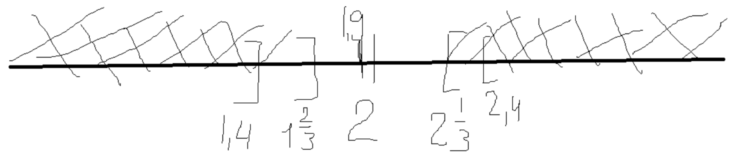
Т.к. a $\in \mathbb{N}$, шар будет содержать только натуральные числа - свои центры.

3. $B(x_1, r_1)$ **и** $B(x_2, r_2)$**, такие что** $B(x_1, r_1) \subset B(x_2, r_2)$**, но** $r_1 > r_2$;

Пусть $X \in \mathbb{R}, r_1 = 3, r_2 = 2, \rho(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{|x-y|}, \text{ если } x \neq y \\ |x + y|, \text{ если } x = y \end{cases}$, тогда

$B[2,3] = \{x \in \mathbb{R} : \rho(x,2) \leqslant 3\}$ и $B[1.9,2] = \{x \in \mathbb{R} : \rho(x,1.9) \leqslant 2\}$.

Эти множества можно изобразить так:



4. $\{B[x_n, r_n]\}_{n=1}^{\infty}, \forall n \in \mathbb{N} : B[x_{n+1}, r_{n+1}] \subset B[x_n, r_n]$**, при этом их пересечение пусто** $\cap_{n=1}^{\infty} B[x_n, r_n] = \emptyset$.

Пусть X = (1, 2], $\rho(x,y) = |x-y|, B[x_n, r_n] = \{x \in X : \rho(x, 1+\frac{1}{2^n}) \leqslant \frac{1}{2^n}\}$. Очевидно, что $\forall n \in \mathbb{N} : B[x_{n+1}, r_{n+1}] \subset B[x_n, r_n]$, т.к. радиус становится всё меньше и меньше. Если пересечь все такие множества, получится $\emptyset$, потому что при стремлении $n \to \infty$ центр окружности будет стремиться к 1, $x_n \to 1$, что не входит в заданное множество X, значит, шар будет состоять только из одного элемента - $\emptyset$.