1. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ некоторые подмножества Ω, постройте минимальную σ-алгебру, включающую $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$

Такая σ-алгебра получится, если в исходное множество добавить пустое и чередовать действия: 1) взять дополнения элементов, результат которых ещё не лежит во множестве -> 2) взять всевозможные пересечения, результат которых ещё не лежит во множестве -> 3) взять дополнение к получившимся множествам, результат которых ещё не лежит во множестве -> 4) взять всевозможные объединения получившихся элементов, результат которых ещё не лежит во множестве -> 1) - до тех пор, пока на каком-то шаге не добавятся новые элементы.

2. Доказать, что алгебра, порожденная системой $A_1, \ldots, A_n$, где $A_i \subset \Omega,\ i = 1, \ldots, n$ состоит в общем случае из 2^{2^n} элементов. Найти пример системы множеств, когда это не так.

Рассмотрим число $\sum_{k=0}^{2^n} C_{2^n}^k = 2^{2^n}$. Здесь 2^n отоброжает мощность булеана множества $\{A_1, \ldots, A_n\}$, k - количество элементов, которые будут участвовать в логических операциях, например для $k = 2$ будет такая конструкция: $A_i * A_j$, где $A_i, A_j \in \{A_1, \overline{A_1}, \ldots, A_n, \overline{A_n}\}$, $*$ - логическая операция. Таким образом получаем мощность σ-алгебры $\sigma(A_1, \ldots, A_n)$.

В задаче нет никаких ограничений на $A_1, \ldots, A_n$, поэтому я выберу их так: $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$. В σ-алгебре получится 4 элемента, а не 2^{2^n} элементов.

3. Сейчас либо солнечно, либо дождь, либо пасмурно без дождя. Соответственно множество Ω состоит из трёх исходов, $\Omega = \{,,\}$. Джеймс Бонд пойман и привязан к стулу с завязанными глазами, но он может на слух отличать, идет ли дождь.

1. **Как выглядит σ-алгебра событий, которые различает агент 007?**

   Агент может знать: идет дождь, не идет дождь - значит, σ-алгебра будет иметь вид $\{$дождь$, \{$пасмурно, солнечно$\}, \emptyset, \Omega\}$.

2. **Как выглядит минимальная алгебра, содержащая $A = \{\emptyset\}$?**

   Пусть алгебра содержит A. Тогда она должна содержать дополнение к $A - \Omega$ и их объединение - Ω. Значит, минимальная алгебра, содержащая A, будет $\{\emptyset, \Omega\}$.

3. **Сколько различных σ-алгебр можно придумать для данного Ω?**

   (a) Первое такое множество построено в первом пункте;

   (b) Вторoe - во втором;

   (c) Третью σ-алгебру можно построить, если предположить, что агент умеет различать только солнечно на улице или нет (например, потому что он стал вампиром). Тогда σ-алгебра будет иметь вид $\{$солнечно$, \{$пасмурно, дождь$\}, \emptyset, \Omega\}$;

(d) Четвертая σ-алгебра строится аналогично первой и третьей - агент знает только то, что на улице пасмурно. Она будет такой: $\{$пасмурно, $\{$солнечно, дождь$\}$, $\emptyset, \Omega\}$;

(e) Предположим, что агент знает уже два состояние погоды - (Б.О.О.) солнечно или пасмурно. Тогда в σ-алгебру попадет их пересечение - $\{$пасмурно, солнечно$\}$ - и дополнение к пересечению - $\{$дождь$\}$. Значит, зная какие-то 2 состояния погоды, агент автоматически будет знать и 3-е. Поэтому это последняя различная σ-алгебра, которую можно построить на Ω :

$\{$солнечно, $\{$пасмурно, дождь$\}$, дождь, $\{$пасмурно, солнечно$\}$, пасмурно, $\{$солнечно, дождь$\}$, $\emptyset, \Omega\}$

Значит, таких монжеств всего 5.

4. Монеточка подкидывается бесконечное число раз: X_n равно 1, если при n-ом подбрасывании выпал орел, и 0, если решка. И ничего другого выпасть не может. Определим несколько σ-алгебр: $F_n = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n), H_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots)$

1. **Приведите по два нетривиальных (т.е. Ω и $\emptyset$ не называть) примера такого события A, что:**

   - $A \in F_{2021}$: В F_{2021} будет содержаться событие "при первом подбросе монетки выпал орёл"т.е. $X_1 = 1$, т.к. если это не так, то дополнение к "при первом подбросе монетки выпала решка"всё равно будет лежать в сигма-алгебре - это пример первого события;

     Также в F_{2021} будет событие "в промежутке между 42 и 101 всегда выпадал орел"т.е. $\{X_{42} = 1, X_{43} = 1, \ldots, X_{101} = 1\}$, т.к. объединение этих событий, либо их дополнений, должно лежать в сигма-алгебре - это 2 пример;

   - $A \notin F_{2021}$: В данном случае нам известны исходы на 2021 подбрасываниях, но ничего не известно насчет $X_{2023} = A$ - поэтому это пример такого события;

     Также ничего не известно о множестве $\{X_{2024}, X_{2024}, \ldots, X_{2042}\} = A$ - это второй такой пример;

   - A лежит в каждой H_n: событие "хотя бы раз выпала решка"лежит в каждой H_n, т.к. даже если всегда выпадал орел, дополнение к каждому из этих событий - выпала решка - должно быть в σ-алгебре;

     Также событие "решка выпала бесконечное число раз"лежит в каждой H_n, т.к. монетка подбрасывается бесконечное количество раз и если откинуть конечное число n брасаний на бесконечность это никак не повлияет.

2. **В какие из упомянутых σ-алгебр входят события:**

- $X_{45} > 0$: F_n, $\forall n \in N \backslash \{1, 2, \ldots, 44\}$; H_n, $\forall n \in \{1, 2, \ldots, 45\}$;
- $X_{45} > X_{2021}$: F_n, $\forall n \in N \backslash \{1, 2, \ldots, 2020\}$; H_n, $\forall n \in \{1, 2, \ldots, 45\}$;
- $X_{45} > X_{2021} > X_{15}$: $min(X_{15}) = 0 \wedge X_{2023} \in \{0, 1\} \implies X_{2023} = 1, X_{45} > 1 > 0$, но $X_{45} \in \{0, 1\} \implies$ такое событие не могло случиться, значит оно невозможное, т.е. это $\emptyset$. $\emptyset$ входит в любую σ-алгебру.

3. **Упростите выражения:**

- $F_{11} \cap F_{25} = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_{11}) \cap \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_{25}) = \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_{11}) = F_{11}$ - потому что F_{11} полностью содержится в F_{25} из построения σ-алгебры;
- $F_{11} \cup F_{25} = F_{25}$ - потому что F_{11} полностью содержится в F_{25} из построения σ-алгебры;
- $H_{11} \cap H_{25} = \sigma(X_{11}, X_{12}, X_{13}, \ldots, X_{25}, X_{26}, \ldots) \cap \sigma(X_{25}, X_{26}, X_{27}, \ldots) = H_{25}$ - из построяние следует, что H_{25} лежит в H_{11};
- $H_{11} \cup H_{25} = H_{11}$.