1. Пусть есть множество множеств $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\}\}$. Дополните эту систему до:

1. (Минимального полукольца) В полукольце должно быть пустое множество - $\emptyset \implies$ множество становится $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\emptyset\}$

   В полукольце есть пересечение любых двух элементов $\implies$ множество становится $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\emptyset,\{3,4\}\}$

   В полукольце для каждого элемента есть разбиение на элементы из полукольца $\implies$ множество становится

   $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\emptyset,\{3,4\},\{1,2\},\{5,6\}\}$ - это минимальное полукольцо.

2. (Минимального кольца) Любое кольцо - полукольцо.

   Значит $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\emptyset,\{3,4\},\{1,2\},\{5,6\}\}$ содержится и в кольце.

   Для любых двух элементов из кольца в кольце содержится их симметрическая разность $\implies$ множество становится

   $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\emptyset,\{3,4\},\{1,2\},\{5,6\},\{1,2,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$

3. (Минимальной алгебры) Полученное нами кольцо

   $\{\{1,2,3,4\},\{3,4,5,6\},\emptyset,\{3,4\},\{1,2\},\{5,6\},\{1,2,5,6\},\{1,2,3,4,5,6\}\}$

   является алгеброй.

   В данном случае единицей является элемент $\{1,2,3,4,5,6\}$ - он лежит во множестве и пересечение любого элемента с ним дает сам элемент.

2. Доказать, что:

1. Пересечение произвольной непустой системы колец является кольцом (возможно, состоящим лишь из пустого множества):

   Проверим, что это кольцо, опираясь на определение кольца:

   (a) Если во множестве есть элементы A, B, то в нем есть $A \cap B$:

   От противного: предположим, что в пересечение попали элементы A, B, но не $A \cap B$. Т.к. A, B лежат в пересечении, они принадлежат каждому из колец. Но если A, B лежат в кольце, то и $A \cap B$ лежит в кольце. Значит, в каждом кольце есть $A \cap B \implies$ в пересечение колец есть$A \cap B$. Получаем противоречие.

   (b) Если во множестве есть элементы A, B, то в нем есть $A \triangle B$:

   Также как и с предыдущим подпунктом - преположением от противного приходим к выводу, что если A, B лежат в пересечение, то и $A \triangle B$ лежит в пересчение колец.

(c) Отдельным пунктом выделим, что система не пуста:

Т.к. кольцо является и полукольцом, в нем есть $\emptyset$. Значит, и в пересечении колец будет лежать хотя бы $\emptyset$, ведь оно есть в каждом кольце.

2. Пересечение произвольной непустой системы σ-колец является σ-кольцом:

3. Пересечение непустой (конечной) системы алгебр с одной и той же единицей является алгеброй:

   Алгебра - кольцо с единицей. Уже доказано выше, что пересечение колец - кольцо. Т.к. единица(назовем ее E) в каждой алгебре одна и та же, она войдет и в пересечение. И в итоговом кольце E также будет едининцей:

   От противного: если $\exists A$ из полученного кольца, такой что $A \cap E \neq A$, то этот элемент принадлежит и всем алгебрам. Но в них $A \cap E = A$ - что войдет и в пересечние. Получаем противоречие.