

1. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ некоторые подмножества Ω , постройте минимальную σ -алгебру, включающую $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$

Для построения такой алгебры (назовем ее F) выполним минимальные требования:

1. $\emptyset \in F \implies F = \{\emptyset, A_1, \dots, A_n, \dots\}$.
2. $A \in F \implies \bar{A} \in F$. $F = \{\emptyset, \Omega, A_1, \bar{A}_1, \dots, A_n, \bar{A}_n, \dots\}$.
3. $A_1, A_2, \dots \in F \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in F$. Т.е. в F войдут всевозможные 2, 3, ..., n , ... элементные объединения различных подмножеств из A_1, \dots, A_n, \dots .

2. Доказать, что алгебра, порожденная системой A_1, \dots, A_n , где $A_i \subset \Omega$, $i = 1, \dots, n$ состоит в общем случае из 2^{2^n} элементов. Найти пример системы множеств, когда это не так.

Как показано в предыдущей задаче, такая алгебра будет в себя включать $\emptyset, \Omega, A_1, A_2, \dots, A_n$ и всевозможные 2, 3, ..., n элементные объединения различных подмножеств из A_1, \dots, A_n .

3. Сейчас либо солнечно, либо дождь, либо пасмурно без дождя. Соответственно множество Ω состоит из трёх исходов, $\Omega = \{., .\}$. Джеймс Бонд пойман и привязан к стулу с завязанными глазами, но он может на слух отличать, идет ли дождь.

1. Как выглядит σ -алгебра событий, которые различает агент 007?

Агент может знать: идет дождь, не идет дождь - значит, σ -алгебра будет иметь вид $\{\text{дождь}, \{\text{пасмурно, солнечно}\}, \emptyset, \Omega\}$.

2. Как выглядит минимальная алгебра, содержащая $A = \{\emptyset\}$?

Пусть алгебра содержит A . Тогда она должна содержать дополнение к $A - \Omega$ и их объединение - Ω . Значит, минимальная алгебра, содержащая A , будет $\{\emptyset, \Omega\}$.

3. Сколько различных σ -алгебр можно придумать для данного Ω ?

- (a) Первое такое множество построено в первом пункте;
- (b) Второе - во втором;
- (c) Третью σ -алгебру можно построить, если предположить, что агент умеет различать только солнечно на улице или нет (например, потому что он стал вампиром). Тогда σ -алгебра будет иметь вид $\{\text{солнечно}, \{\text{пасмурно, дождь}\}, \emptyset, \Omega\}$;
- (d) Четвертая σ -алгебра строится аналогично первой и третьей - агент знает только то, что на улице пасмурно. Она будет такой: $\{\text{пасмурно}, \{\text{солнечно, дождь}\}, \emptyset, \Omega\}$;

(е) Предположим, что агент знает уже два состояния погоды - (Б.О.О.) солнечно или пасмурно. Тогда в σ -алгебру попадет их пересечение - $\{\text{пасмурно, солнечно}\}$ - и дополнение к пересечению - $\{\text{дождь}\}$. Значит, зная какие-то 2 состояния погоды, агент автоматически будет знать и 3-е. Поэтому это последняя различная σ -алгебра, которую можно построить на Ω :

$\{\text{солнечно, }\{\text{пасмурно, дождь}\}, \text{дождь, }\{\text{пасмурно, солнечно}\}, \text{пасмурно, }\{\text{солнечно, дождь}\}, \emptyset, \Omega\}$

Значит, таких монжеств всего 5.