2. Исследовать на экстремум функцию:
$f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$

$f'_x = 2x + y - \frac{4}{x} = 0$
$f'_y = 2y + x - \frac{10}{y} = 0$
Выражая x из второго уравнения и решая уравнение с y, получаем такие возможные точки экстремума:

$(x_0, y_0) \in \{(-1,-2),(1,2),(-\frac{4\sqrt{3}}{3}, \frac{5\sqrt{3}}{3}),(\frac{4\sqrt{3}}{3}, -\frac{5\sqrt{3}}{3})\}$. Но из-за ООФ логарифма точки, в которых хотя бы одна из координат ≤ 0, не подходят, поэтому возможная точка всего одна - $(x_0, y_0) = (1,2)$.
$f''_{xx} = 2 + \frac{4}{x^2}, f''_{xx}(1,2) = 6$
$f''_{yy} = 2 + \frac{10}{y^2}, f''_{yy}(1,2) = 4.5$
$f''_{xy} = f''_{yx} = 1, f''_{xy}(1,2) = 1$
Воспользуемся достаточным условием экстремума в точке:
$Q(a_1, a_2) = f''_{xx}(1,2)a_1a_1 + 2f''_{xy}(1,2)a_1a_2 + f''_{yy}(1,2)a_2a_2 =$
$= 6a_1a_1 + 2a_1a_2 + 4.5a_2a_2$
$\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 4.5 \end{vmatrix} = 26$
По критерию Сильвестра такая квадратичная форма положительно определена $\implies$ $(1,2)$ - точка локального минимума.

3.3. Найти экстремумы функции $u = u(x,y)$, заданной неявно

$x^2 + y^2 + u^2 - xu - yu + 2x + 2y + 2u - 2 = 0$ - продифференцируем обе части
$2xdx + 2ydy + 2udu - xdu - udx - ydu - udy + 2dx + 2dy + 2du = 0$
$(2x - u + 2)dx + (2y - u + 2)dy + (2u - x - y + 2)du = 0$
$du = \frac{u-2-2x}{2u-x-y+2}dx + \frac{u-2-2y}{2u-x-y+2}dy$
Из необходимого условия точки экстремума следует, что
$\frac{u-2-2x}{2u-x-y+2} = 0$ и $\frac{u-2-2y}{2u-x-y+2} = 0$
$x = \frac{u}{2} - 1$
$y = \frac{u}{2} - 1$
Подстановкой в исходное равенство x, y находим точки, в которых возможен экстремум:
$u(x_0, y_0) = -4 - 2\sqrt{6} \implies x_0 = y_0 = -3 - \sqrt{6}$
$u(x_1, y_1) = -4 + 2\sqrt{6} \implies x_1 = y_1 = -3 + \sqrt{6}$
Попробуем воспользоваться достаточным условием:
$d((2x - u + 2)dx + (2y - u + 2)dy + (2u - x - y + 2)du) = 0$
$[2dx^2 - dudx] + [2dy^2 - dudy] + [2du^2 - dxdu - dydu] + (2u - x - y + 2)d^2u = 0$
[Т.к. du = 0]$d^2u = \frac{2}{x+y-2-2u}dx^2 + \frac{2}{x+y-2-2u}dy^2$

Проверим найденные точки:

1. $u(x_0, y_0) = -4 - 2\sqrt{6} : d^2u = \frac{2}{[-3-\sqrt{6}]+[-3-\sqrt{6}]-2-2[-4-2\sqrt{6}]}dx^2 + \frac{2}{[-3-\sqrt{6}]+[-3-\sqrt{6}]-2-2[-4-2\sqrt{6}]}dy^2 =$
   $= \frac{1}{\sqrt{6}}dx^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}dy^2$
   $Q_{x_0y_0} = \frac{1}{\sqrt{6}}a_1^2 + \frac{1}{\sqrt{6}}a_2^2$ - положительно определена, значит, это точка локального минимума;

2. $u(x_1, y_1) = -4 + 2\sqrt{6} : d^2u = -\frac{1}{\sqrt{6}}dx^2 - \frac{1}{\sqrt{6}}dy^2$
   $Q_{x_1y_1} = -\frac{1}{\sqrt{6}}a_1^2 - \frac{1}{\sqrt{6}}a_2^2$ - отрицательно определена, значит, это точка локального максимума.