

Zkouška

Úvod

- Příklad: Technika důkazu indukcí a sporem
 - věta: Prvočísel je nekonečně mnoho.
 - důkaz sporem
 - kdyby p_1, \dots, p_n byla všechna prvočísla
 - $\zeta := p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$
 - $(\zeta + 1) \bmod p_i = 1 \implies \zeta + 1$ není dělitelné žádným prvočíslem a je větší než všechna $p_i \implies \zeta + 1$ by také muselo být prvočíslo \nexists
 - věta: $\forall n \in \mathbb{N} : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
 - důkaz indukcí podle n
 - $2^0 = 2^1 - 1$
 - indukční krok
 - IP: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
 - chceme: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$
 - z IP: $2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1 \quad \square$
- Definice: Operace s čísly: sumy, produkty, horní a dolní celá část
 - prázdná suma se rovná nule, prázdný produkt jedné
 - horní celá část se značí $\lceil x \rceil$, zaokrouhluje nahoru
 - dolní celá část se značí $\lfloor x \rfloor$, zaokrouhluje dolů
- Definice: Množinové operace: rovnost, inkluze, sjednocení, průnik, rozdíl, symetrická diference, potence (množina podmnožin), mohutnost (počet prvků)
 - symetrická diference $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
 - potence $2^A := \{B \mid B \subseteq A\}$
- Definice: Uspořádané k -tice a kartézský součin
 - uspořádaná dvojice (x, y)
 - lze zavést pomocí klasických množin jako $\{\{x\}, \{x, y\}\}$

- uspořádaná k-tice (x_1, \dots, x_k)
- kartézský součin $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
 - $A^k := \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_k$

Relace

- Definice: Relace mezi množinami, relace na množině
 - (binární) relace mezi množinami X, Y je podmnožina $X \times Y$
 - relace na množině X je podmnožina X^2
 - značení – pro relaci R mezi $X, Y : xRy \equiv (x, y) \in R$
- Příklad: Příklady relací: prázdná, univerzální, diagonální
 - prázdná \emptyset
 - univerzální $X \times Y$
 - diagonální $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$, např. rovnost $x = y$
- Definice: Operace s relacemi: inverze, skládání
 - inverze
 - k relaci R mezi X, Y lze definovat inverzní relaci R^{-1} mezi Y, X , přičemž $R^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$
 - skládání
 - pro relaci R mezi X, Y a relaci S mezi Y, Z lze definovat složenou relaci $T = R \circ S$ mezi X, Z
 - $xTz \equiv \exists y \in Y : xRy \wedge ySz$
 - $R \circ \Delta_Y = R, \quad \Delta_X \circ R = R$
 - značení skládání funkcí: $(f \circ g)(x) = g(f(x))$
- Definice: Funkce (zobrazení) a jejich druhy: prosté (injektivní), na (surjektivní), vzájemně jednoznačné (bijektivní)
 - funkce z množiny X do množiny Y je relace A mezi X a Y t. ž. $(\forall x \in X)(\exists! y \in Y) : xAy$
 - funkce $f : X \rightarrow Y$ je...
 - prostá (injektivní) $\equiv \nexists x, x' \in X : x \neq x' \wedge f(x) = f(x')$
 - na Y (surjektivní) $\equiv (\forall y \in Y)(\exists x \in X) : f(x) = y$

- vzájemně jednoznačná (bijektivní)
 $\equiv (\forall y \in Y)(\exists! x \in X) : f(x) = y$
 - taková funkce je tedy prostá i „na“
 - k takové funkci existuje inverzní funkce f^{-1} z Y do X
- Definice: Vlastnosti relací: reflexivita, symetrie, antisymetrie, transitivita
 - relace R na X je...
 - reflexivní $\equiv \forall x \in X : xRx$
 - $\Delta_X \subseteq R$
 - symetrická $\equiv \forall x, y \in X : xRy \implies yRx$
 - $R = R^{-1}$
 - antisymetrická $\equiv \forall x, y \in X : xRy \wedge yRx \implies x = y$
 - $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_X$
 - tranzitivní $\equiv \forall x, y, z \in X : xRy \wedge yRz \implies xRz$
 - $R \circ R \subseteq R$
- Definice: Ekvivalence, ekvivalenční třída, rozklad množiny
 - relace R na X je ekvivalence $\equiv R$ je reflexivní & symetrická & tranzitivní
 - např. rovnost čísel, rovnost mod K , geometrická podobnost
 - ekvivalenční třída prvku $x \in X : R[x] = \{y \in X \mid xRy\}$
 - množinový systém $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ je rozklad množiny $X \equiv$
 - $\forall A \in \mathcal{S} : A \neq \emptyset$
 - $\forall A, B \in \mathcal{S} : A \neq B \implies A \cap B = \emptyset$
 - $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = X$
- Věta: Vztah mezi ekvivalencemi a rozklady
 - věta
 - (1) $\forall x \in X : R[x] \neq \emptyset$
 - (2) $\forall x, y \in X : \text{buď } R[x] = R[y], \text{ nebo } R[x] \cap R[y] = \emptyset$
 - (3) $\{R[x] \mid x \in X\}$ (množina všech ekvivalenčních tříd) určuje ekvivalenci R jednoznačně
 - důkaz

- (1) ekvivalence je reflexivní, tedy nutně platí $x \in R[x]$, tudíž je ta ekvivalenční třída neprázdná
- (2) dokážeme, že pokud nejsou disjunktní, tak se rovnají
 - platí $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$
 - dokazujeme $R[x] = R[y]$, stačí nám $R[x] \subseteq R[y]$
(opačnou inkluzi lze dokázat podobným způsobem)
 - víme $\exists t \in R[x] \cap R[y]$
 - tedy platí xRt, tRx, yRt, tRy
 - chceme $\forall a \in R[x] : a \in R[y]$
 - dále aplikujeme tranzitivitu
 - $aRx \wedge xRt \implies aRt$
 - $aRt \wedge tRy \implies aRy$
- (3) na základě ekvivalenčních tříd lze jednoznačně určit, zda jsou prvky x a y ekvivalentní, neboť stačí najít ekvivalenční třídu obsahující y a zjistit, zda je v této třídě také x

Uspořádání

- Definice: Uspořádání částečné a lineární, uspořádaná množina, ostré uspořádání
 - relace R na množině X je (částečné) uspořádání $\equiv R$ je reflexivní & antisymetrická & tranzitivní
 - (částečně) uspořádaná množina (X, R)
 - zkráceně ČUM
 - R je (částečné) uspořádání na X
 - prvky $x, y \in X$ jsou porovnatelné $\equiv xRy \vee yRx$
 - uspořádání je lineární $\equiv \forall x, y \in X$ porovnatelné
 - (všechny prvky množiny jsou navzájem porovnatelné)
 - částečné uspořádání (nebo pouze uspořádání) je obecný pojem, některá taková uspořádání jsou navíc lineární
 - ostré uspořádání – každému uspořádání \leq na X přiřadíme relaci $<$ na X : $a < b \equiv a \leq b \wedge a \neq b$

- pozor – ostré uspořádání není speciálním případem uspořádání (protože není reflexivní)
- vlastnosti ostrého uspořádání – ireflexivní, antisymetrické, tranzitivní
- Příklady uspořádání: dělitelnost, inkluze podmnožin, lexikografické
 - dělitelnost (\mathbb{N}^+, \mid)
 - $2 \nmid 4$
 - 4, 6 neporovnatelné
 - dělitelnost na reálných čísel (bez nuly) není uspořádání, protože $(-1) \mid 1 \wedge 1 \nmid (-1)$ (není antisymetrické)
 - inkluze $(2^X, \subseteq)$
 - $\{1\} \subseteq \{1, 3\}$
 - $\{1, 2\}, \{2, 3\}$ neporovnatelné
 - lexikografické uspořádání
 - abeceda: (X, \leq)
 - Df: (X^2, \leq_{lex})
 - $(a_1, a_2) \leq_{lex} (b_1, b_2) \equiv a_1 < b_1 \vee (a_1 = b_1 \wedge a_2 \leq b_2)$
 - (X^k, \leq_{lex})
 - (X^*, \leq_{lex})
 - X^* – konečné posloupnosti prvků z X
 - pokud je slovo krátké, doplníme ho mezerami ze začátku abecedy
- Definice: Hasseův diagram, relace bezprostředního předchůdce
 - Hasseův diagram graficky zachycuje vztahy mezi prvky ČUM (porovnatelné prvky jsou spojeny, větší prvky jsou výše)
 - x je bezprostředním předchůdcem y v uspořádání \leq $\equiv x < y \wedge (\nexists z : x < z \wedge z < y)$
- Definice: Minimální/maximální a nejmenší/největší prvek
 - prvek $x \in X$ je nejmenší $\equiv \forall y \in X : x \leq y$
 - prvek $x \in X$ je minimální $\equiv \nexists y \in X : y < x$
 - x je nejmenší $\implies x$ je minimální
 - v Hassově diagramu

- z minimálního prvku dolů nevede žádná spojnice
- nejmenší prvek je nejniž v diagramu, existuje do něj cesta z libovolného jiného prvku
- Věta: Konečná neprázdná uspořádaná množina má minimální a maximální prvek
 - důkaz
 - zvolíme $x_1 \in X$ libovolně
 - buď je x_1 minimální, nebo $\exists x_2 < x_1$
 - buď je x_2 minimální, nebo $\exists x_3 < x_2$
 - atd.
 - po konečně mnoha krocích nalezneme minimální prvek, protože jinak by X měla nekonečně mnoho různých prvků, což je spor s konečností
- Definice: Řetězec a antiřetězec
 - pro (X, \leq) ČUM:
 - $A \subseteq X$ je řetězec $\equiv \forall a, b \in A : a, b$ jsou porovnatelné
 - $A \subseteq X$ je antiřetězec (nezávislá množina) $\equiv \nexists a, b$ různé & porovnatelné
- Definice: parametry α a ω
 - $\omega(X, \leq)$ je délka nejdelšího řetězce = maximum z délek řetězců (výška uspořádání)
 - $\alpha(X, \leq)$ je délka nejdelšího antiřetězce (šířka uspořádání)
- Věta: O Dlouhém a Širokém
 - věta: pro každou konečnou ČUM (X, \leq) platí $\alpha(X, \leq) \cdot \omega(X, \leq) \geq |X|$
 - důkaz: TODO

Kombinatorické počítání

- Věta: Počet funkcí mezi množinami
 - věta: počet $f : N \rightarrow M = m^n$
 - pro $|N| = n, |M| = m; \quad m, n > 0$

- důkaz indukcí podle n
 - $n = 1 \quad \# f = m = m^1$
 - $n \rightarrow n + 1$
 - $(n+1)$ -prvková N , m -prvková M
 - zvolíme $x \in N$
 - $f' : N \setminus \{x\} \rightarrow M$
 - podle IP existuje m^n funkcí f'
 - zadat zobrazení f je totéž jako zadat hodnotu $f(x) \in M$ plus zobrazení f'
 - hodnotu $f(x)$ lze zvolit m způsoby
 - celkem tedy $m^n \cdot m = m^{n+1}$
- jiný způsob důkazu – pro každé x existuje m možností, počet x je n
- Věta: Počet prostých funkcí mezi množinami
 - věta: počet prostých $f : N \rightarrow M = m^n$ (viz klesající mocnina níže)
 - důkaz indukcí podle n
 - podobně jako předchozí důkaz
 - $n \rightarrow n + 1$
 - $f' : N \setminus \{x\} \rightarrow M \setminus \{f(x)\}$
 - podle IP existuje $(m - 1)^n$ funkcí f'
 - hodnotu $f(x)$ lze zvolit m způsoby
 - celkem tedy $(m - 1)^n \cdot m = m^{n+1}$
 - jiný způsob důkazu – pro první x existuje m možností, pro každé další o jednu méně, počet x je n
- Definice: Klesající mocnina
 - $m^n = \underbrace{m \cdot (m - 1) \cdot (m - 2) \cdot \dots \cdot (m - n + 1)}_n$
- Definice: Charakteristická funkce podmnožiny
 - pro podmnožinu A množiny X definujeme zobrazení $c_A : X \rightarrow \{0, 1\}$
 - $c_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in A \\ 0 & \text{pokud } x \notin A \end{cases}$

- Věta: Počet všech podmnožin
 - věta: $|2^N| = 2^{|N|}$
 - důkaz: počet podmnožin = počet charakteristických funkcí = $2^{|N|}$
- Věta: Počet podmnožin sudé a liché velikosti
 - věta: Necht' $X \neq \emptyset$ je konečná množina, pak počet podmnožin \mathcal{S} sudé velikosti se rovná počtu podmnožin \mathcal{L} liché velikosti, což se rovná 2^{n-1} .
 - důkaz
 - víme, že $\mathcal{S} \cup \mathcal{L} = 2^X$
 - stačí $|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}|$
 - sestrojíme $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{L}$ bijekci
 - zvolíme si $a \in X$
 - $f(S) := S \triangle \{a\}$ (prvek a přidáme nebo odebereme, podle toho, zda je prvkem S , nebo není)
 - $f(S) \in \mathcal{L}$
 - f má inverzi $f^{-1} = f$
- Věta: Počet permutací na množině
 - definice: $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$
 - věta: na množině $[n]$ existuje $n!$ permutací (podobně na každé n -prvkové množině)
 - důkaz: počet prostých funkcí $[n] \rightarrow [n] = n^n = n!$
- Věta: Počet uspořádaných k -tic bez opakování a k -prvkových podmnožin
 - počet uspořádaných k -tic $|X^k| = |X|^k$, lze jej totiž vyjádřit jako počet funkcí $f : [k] \rightarrow X$
 - u uspořádaných k -tic bez opakování hledáme prosté funkce, tedy $|X|^{\underline{k}}$
 - pomocí „počítání dvěma způsoby“ odvodíme vzorec pro neuspořádané k -tice (k -prvkové podmnožiny)
 - uspořádaných k -tic bude $k!$ -krát víc než těch neuspořádaných (každou neuspořádanou k -tici lze $k!$ způsoby lineárně uspořádat)

- z toho vyplývá, že k -prvkových podmnožin (neuspořádaných k -tic) bude $\frac{|X|^k}{k!}$
- Definice: Notace pro množinu všech k -prvkových podmnožin
 - $\binom{X}{k}$... množina všech k -prvkových podmnožin množiny X
- Definice: Kombinační číslo (binomický koeficient), Pascalův trojúhelník
 - kombinační číslo (binomický koeficient) $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n^k}{k!}$
 - Pascalův trojúhelník – n roste shora dolů, k zleva doprava
- Věta: Základní vlastnosti kombinačních čísel
 - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$... každé k -prvkové podmnožině přiřadíme její doplněk
 - $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$
 - zvolíme jeden prvek a a rozdělíme všechny k -prvkové podmnožiny podle toho, zda obsahují a , nebo ne
- Binomická věta
 - věta: $(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$
 - důkaz
 - jeden člen výsledného součtu – součin n věcí, z nichž každá bude x nebo y
 - z každé závorky vyberu x nebo y
 - výsledkem je člen $x^{n-k} y^k$
 - takových členů tam bude $\binom{n}{k}$
- Věta: Princip inkluze a exkluze
 - věta: (pro konečné množiny)

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

- důkaz
 - pro prvek x ve sjednocení spočítáme příspěvky k levé (vždy 1) a pravé straně
 - nechť x patří do právě t množin
 - průniky k -tic

- $k > t \dots$ přispěje 0
- $k \leq t \dots$ přispěje $(-1)^{k+1} \binom{t}{k}$
 - vybíráme k -tice množin z t -množin, do kterých prvek patří
 - minus jednička vychází ze vzorce
- chceme $\sum_{k=1}^t (-1)^{k+1} \binom{t}{k} = 1$
- lze upravit na $\sum_{k=1}^t (-1)^k \binom{t}{k} = -1$
- z binomické věty $0 = (1 - 1)^t = \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} (-1)^k$
- tedy bez prvního členu se součet rovná -1 \square
- druhý důkaz – pomocí charakteristických funkcí
- Příklad: Problém šatnářky: počet permutací bez pevného bodu
 - Šatnářka n pánům vydá náhodně n klobouků (které si předtím odložili v šatně). Jaká je pravděpodobnost, že žádný pán nedostane od šatnářky zpět svůj klobouk?
 - jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolená permutace nebude mít žádný pevný bod
 - každá z $n!$ permutací je stejně pravděpodobná
 - $s(n) \dots$ počet permutací bez pevného bodu
 - pravděpodobnost je rovna $s(n)/n!$
 - $S_n \dots$ množina všech permutací
 - $A_i = \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i\}$
 - $A = \bigcup_{i=1}^n A_i \dots$ (množina všech „špatných“ permutací)
 - musíme vyjádřit velikosti průniků
 - permutací s k pevnými body je $(n - k)!$
 - (protože permutují všechny prvky kromě těch pevných)
 - dosazením do principu inkluze a exkluze vyjde

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n - k)!$$
 - $\binom{n}{k}$ vyplývá z počtu prvků druhé sumy
 - $\binom{n}{k} (n - k)! = \frac{n!}{k!}$
 - $|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$
 - $|A| = n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \right)$

- $\check{s}(n) = n! - |A| = n! \cdot \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$
 - zavorka konverguje k e^{-1}
 - zavorka odpovd prvdpodobnosti v problmu atnřky
- $\check{s}(n) = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$
- prvdpodobnost ... $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1}$
- Vta: Odhad faktoriálu: $n^{n/2} \leq n! \leq ((n+1)/2)^n$
 - věta: Pro kařd $n \geq 1$ platí $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.
 - lemma: AG nerovnost $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
 - $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$
 - $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$
 - $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
 - $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
- důkaz
 - $(n!)^2$ lze přerovnat jako $(1 \cdot n)(2 \cdot (n-1)) \dots ((n-1) \cdot 2)(n \cdot 1)$
 - to se rovná $\prod_{i=1}^n i(n+1-i)$
 - zvolíme-li v AG nerovnosti $a = i, b = n+1-i$, dostáváme
 - $\sqrt{i(n+1-i)} \leq \frac{i+n+1-i}{2} = \frac{n+1}{2}$
 - z toho vyplývá

$$n! = \prod_{i=1}^n \sqrt{i(n+1-i)} \leq \prod_{i=1}^n \frac{n+1}{2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

- pro důkaz druhé nerovnosti uvařme součin $i(n+1-i)$
- pro $i = 1$ a $i = n$ je roven n
- pro ostatní i máme součin dvou čísel, z nichř vtř je alespoň $\frac{n}{2}$ a menř je alespoň 2, tedy součin je také nejméně n
- platí tedy $i(n+1-i) \geq n$
- tudř

$$(n!)^2 = \prod_{i=1}^n i(n+1-i) \geq \prod_{i=1}^n n = n^n$$

- tedy platí $n! \geq n^{\frac{n}{2}}$
- Věta: Odhad kombinačního čísla: $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq n^k$
 - horní odhad zřejmý z toho, že kombinační číslo lze zapsat jako $\frac{n^k}{k!}$
 - dolní odhad dokážeme pomocí $\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i}$
 - $\frac{n-i}{k-i} \geq \frac{n}{k}$, což dokážeme:
 - $kn - ki \geq kn - in$
 - $in \geq ki$
 - $n \geq k$, což platí
- Věta: Odhad prostředního kombinačního čísla:
$$4^n / (2n + 1) \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$$
 - věta: $\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$
 - kombinačních čísel v jednom řádku Pascalova trojúhelníku je $2n + 1$
 - odhadujeme prostřední – tedy největší z nich
 - $\frac{4^n}{2n+1}$ je průměr všech kombinačních čísel v řádku
 - 4^n je jejich součet

Grafy

- Definice: Graf, vrchol, hrana, $V(G)$, $E(G)$
 - Graf je (V, E) , kde V je konečná neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.
 - Lze značit jako $G = (V, E)$. Potom $V(G)$ je množina vrcholů a $E(G)$ je množina hran.
- Definice: Standardní grafy: úplný, prázdný, cesta, kružnice
 - úplný graf K_n
 - $V(K_n) := [n]$
 - $E(K_n) := \binom{V(K_n)}{2}$
 - prázdný graf E_n
 - $V(E_n) := [n]$
 - $E(E_n) = \emptyset$

- cesta P_n
 - $V(P_n) := \{0, \dots, n\}$
 - $E(P_n) := \{\{i, i+1\} \mid 0 \leq i < n\}$
 - délka cesty se měří v počtu hran
- kružnice/cyklus C_n
 - $n \geq 3$
 - $V(C_n) := \{0, \dots, n-1\}$
 - $E(C_n) := \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \leq i < n\}$
- Definice: Bipartitní graf, úplný bipartitní graf
 - bipartitní graf
 - partity grafu – jednotlivé „strany“
 - Df: Graf (V, E) je bipartitní $\equiv \exists L, P \subseteq V$ t. ž.:
 - $L \cup P = V$
 - $L \cap P = \emptyset$
 - $\forall e \in E : |e \cap L| = 1 \quad (\wedge |e \cap P| = 1)$
 - nebo $E(G) \subseteq \{\{x, y\} \mid x \in L, y \in P\}$
 - úplný bipartitní $K_{m,n}$
 - každý prvek nalevo je spojený s každým napravo
 - prvky na jedné straně mezi sebou nejsou spojeny
- Definice: Isomorfismus grafů
 - grafy jsou izomorfní \equiv existuje bijekce, která zachovává vlastnost být spojen hranou
 - v podstatě stačí přejmenovat vrcholy a dostaneme dva stejné grafy
 - značení \cong
 - \cong je ekvivalence na libovolné množině grafů
 - neexistuje množina všech grafů (protože neexistuje množina všech množin)
- Definice: Stupeň vrcholu, k-regulární graf, skóre grafu
 - stupeň vrcholu – počet hran, kterých se účastní daný vrchol
 - graf je k-regulární, pokud je stupeň všech vrcholů grafu roven k

- skóre grafu = posloupnost stupňů vrcholů (až na pořadí) → jakmile dvěma grafům vyjde jiné skóre, nemohou být izomorfní
- Věta: Vztah mezi součtem stupňů a počtem hran, princip sudosti
 - věta: Pro každý graf (V, E) platí $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$.
 - důkaz: každá hrana spojuje dva vrcholy (do součtu stupňů přispívá $2 \times$)
 - důsledek: princip sudosti
 - součet stupňů je sudý \implies počet vrcholů lichého stupně je sudý
- Věta o skóre
 - věta: Posloupnost $D = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ pro $n \geq 2$ je skóre grafu $\iff D' = d'_1, \dots, d'_{n-1}$ je skóre grafu $\wedge 0 \leq d_n \leq n - 1$.
 - přičemž $d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n \end{cases}$
 - poznámka: pro $n = 1$ je posloupnost D skóre $\iff d_1 = 0$
 - důkaz \Leftarrow
 - předpokládám existenci G'
 - vytvořím G doplněním vrcholu v_n a hran k d_n posledním vrcholům v grafu G'
 - tak vznikne graf G se skórem D
 - důkaz \implies
 - předpokládejme, že D je skóre grafu
 - uvažme množinu \mathcal{G} všech grafů se skórem D
 - pomocné tvrzení: v množině \mathcal{G} existuje graf G_0 , v němž je vrchol v_n spojen s posledními d_n vrcholy
 - stačí dokázat pomocné tvrzení
 - pokud $d_n = n - 1$ (tedy v_n je spojen se všemi ostatními vrcholy), vyhovuje pomocnému tvrzení kterýkoliv graf z \mathcal{G} a jsme hotovi
 - jinak definujeme $j(G)$, což je index toho z vrcholů nespojených s v_n , který má největší index
 - buď G_0 graf, pro něž je $j(G)$ nejmenší možné

- dokážeme, že $j(G_0) = n - d_n - 1$
- pro spor předpokládejme, že $j > n - d_n - 1$
- vrchol v_n je spojen s d_n vrcholy, takže musí existovat $i < j$ takové, že v_i je spojen s v_n
- vzhledem k tomu, že $\deg(v_i) \leq \deg(v_j)$, existuje vrchol v_k , který je spojený hranou s v_j , ale nikoli s v_i
- lze vytvořit G' , kde přepneme hrany
 - v G_0 jsou spojeny vrcholy s indexy $j, k; i, n$
 - v G' tyto hrany nahradíme hranami $j, n; i, k$
 - skóre zůstane zachováno, ale $j(G')$ je nižší než $j(G_0)$, což je spor
- Definice: Podgraf, indukovaný podgraf
 - graf $G' = (V', E')$ je podgrafem grafu $G = (V, E)$ (značíme $G' \subseteq G \equiv V' \subseteq V \wedge E' \subseteq E$)
 - graf $G' = (V', E')$ je indukovaným podgrafem grafu $G = (V, E) \equiv V' \subseteq V \wedge E' = E \cap \binom{V'}{2}$
 - „podgraf indukovaný množinou vrcholů“
 - $G[A] := (A, E(G) \cap \binom{A}{2})$, kde $A \subseteq V(G)$
- Definice: Cesta, kružnice, sled a tah v grafu
 - cesta v grafu
 - v grafu existuje podgraf izomorfní s P_n pro nějaké n
 - $G' \subseteq G : G' \cong P_n$
 - v grafu existuje určitá posloupnost navzájem různých vrcholů a hran
 - $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$
 - v_0, \dots, v_n jsou navzájem různé vrcholy
 - e_1, \dots, e_n jsou hrany
 - $\forall i : e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$
 - kružnice v grafu
 - v grafu existuje podgraf izomorfní s C_n pro nějaké n
 - $G' \subseteq G : G' \cong C_n$

- v grafu existuje posloupnost navzájem různých vrcholů a hran
 - $(v_0, e_0, v_1, e_1, \dots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_0)$
 - v_0, \dots, v_{n-1} jsou navzájem různé vrcholy
 - e_0, \dots, e_{n-1} jsou hrany
 - $\forall i : e_i = \{v_i, v_{(i+1) \bmod n}\}$
- sled v grafu (walk) – můžou se opakovat vrcholy i hrany
 - $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_n, v_n)$
 - $\forall i : e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$
- tah v grafu – můžou se opakovat vrcholy, hrany ne
- Definice: Souvislý graf, relace dosažitelnosti (ekvivalence), komponenty souvislosti
 - graf G je souvislý $\equiv \forall u, v \in V(G) : \text{existuje cesta v } G \text{ s krajními vrcholy } u, v$
 - dosažitelnost v G je relace \sim na $V(G)$ t. ž. $u \sim v \equiv \text{existuje cesta v } G \text{ s krajními vrcholy } u, v$
 - relace \sim je ekvivalence
 - tranzitivita se dokazuje pomocí dvou posloupností vrcholů ($x \sim y$ a $y \sim z$) a následně zvolení nejzazšího vrcholu z posloupnosti $y \sim z$, který je obsažen v posloupnosti $x \sim y$ a v tomto vrcholu se posloupnosti slepí (přičemž části za ním v první posloupnosti a před ním v druhé posloupnosti se ustříhnou)
 - komponenty souvislosti jsou podgrafy indukované třídami ekvivalence \sim
 - komponenty jsou souvislé
 - graf je souvislý \iff má 1 komponentu
- Věta: Dosažitelnost sledem je totéž jako dosažitelnost cestou
 - lemma: $\exists \text{ cesta mezi } u, v \iff \exists \text{ sled mezi } u, v$
 - důkaz \implies triviální
 - důkaz \impliedby
 - uvažme sled S

- kdyby se ve sledu neopakovaly vrcholy, je to cesta
- pokud $v_k = v_l$, kde $k < l$, vyřizneme část sledu mezi nimi \rightarrow stále máme sled, který je kratší než ten původní
- opakujeme, dokud S není cesta
- Definice: Matice sousednosti
 - matice sousednosti $A(G)$ grafu G
 - matice $n \times n$ nul a jedniček
 - při očíslování vrcholů $v_1, \dots, v_n \in V(G)$
 - $A_{ij} := [\{v_i, v_j\} \in E]$
 - definice: indikátor $[\psi]$ je 0/1 podle platnosti výroku ψ
 - tzn. $A_{ij} = 1$, pokud spolu v_i, v_j tvoří hranu (jinak 0)
 - A je symetrická, součty řádků/sloupců jsou stupně vrcholů
- Věta: Počet sledů délky k lze získat z k -té mocniny matice sousednosti
 - lemma: $A_{ij}^t = \#$ sledů délky t z v_i do v_j
 - důkaz: indukcí podle t
 - $t = 1$... hrana = sled délky 1
 - $t \rightarrow t + 1$
 - $A_{ij}^{t+1} = (A^t A)_{ij} = \sum_k A_{ik}^t A_{kj}$
 - A_{ik}^t ... (z IP) počet sledů délky t z v_i do v_k
 - A_{kj} ... tvoří v_k, v_j hranu?
 - suma se tedy rovná součtu počtu sledů délky t z v_i do v_k pro ta k , kde v_k, v_j tvoří hranu
 - to se rovná počtu sledů délky $t + 1$ z v_i do v_j
- Definice: Vzdálenost v grafu (grafová metrika)
 - vzdálenost (grafová metrika) v souvislém grafu G
 - $d_G : V^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 - $d_G(u, v) := \min.$ z délek (počtu hran) všech cest mezi u, v
 - vlastnosti metriky (funkce je metrika = chová se jako vzdálenost)
 - $d_G(u, v) \geq 0$
 - $d_G(u, v) = 0 \iff u = v$

- platí trojúhelníková nerovnost

$$d_G(u, w) \leq d_G(u, v) + d_G(v, w)$$
- $d_G(v, u) = d_G(u, v)$
- Věta: Trojúhelníková nerovnost pro vzdálenost
 - $\forall u, v, w \in V(G) : d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$
- Definice: Grafové operace: přidání/odebrání vrcholu/hrany, dělení hrany, kontrakce hrany
 - přidání vrcholu, přidání hrany, smazání hrany – vždy pouze úprava odpovídající množiny
 - odebrání vrcholu – musím odebrat odpovídající hrany
 - výsledný graf je podgraf indukovaný množinou všech vrcholů bez toho odebíraného
 - $G - v = G[V \setminus \{v\}]$
 - dělení hrany (pomocí nového vrcholu): $G \% e$
 - $G \% e = (V \cup \{x\}, E \setminus \{\{u, v\}\} \cup \{\{u, x\}, \{v, x\}\})$
 - kontrakce hrany: $G.e$
 - z vrcholů odebereme u, v , přidáme x
 - z hran odebereme hranu u, v , v hranách s u nebo v nahradíme daný vrchol vrcholem x
- Definice: Otevřený a uzavřený eulerovský tah
 - eulerovský tah obsahuje všechny vrcholy a hrany grafu
 - tah může být uzavřený (končí, kde začal), nebo otevřený
 - graf je eulerovský \equiv existuje v něm uzavřený eulerovský tah
- Věta o existenci uzavřeného eulerovského tahu
 - věta: graf G je eulerovský $\iff G$ je souvislý a každý jeho vrchol má sudý stupeň
 - důkaz \implies
 - souvislost plyne z dosažitelnosti libovolných dvou vrcholů po eulerovském tahu (tah je speciální případ sledu – když někde vede sled, tak tam vede i cesta)
 - kdykoliv jsme vrchol navštívili, vstupujeme a vystupujeme do něj po jiných hranách (hrany incidentní s v rozdělíme do

disjunktních dvojic $\implies \deg(v)$ je sudý)

- důkaz \Leftarrow
 - uvážíme nejdelší tah T (respektive jeden z nejdelších tahů)
 - sporem dokážeme, že T je uzavřený
 - kdyby nebyl uzavřený, obsahuje lichý počet hran incidentních s počátečním vrcholem v
 - v má sudý stupeň \implies existuje nepoužitá hrana incidentní s v
 - T lze prodloužit o nepoužitou hranu \implies existuje delší tah \hookrightarrow
 - sporem dokážeme, že T obsahuje všechny hrany
 - kdyby pro nějaké u tah T neobsahoval hranu $\{u, v\}$
 - (vrchol v nemusí být na tahu T)
 - při nějakém průchodu vrcholem u lze uzavřený tah rozpojit a na jeho konec přidat hranu $\{u, v\}$, čímž vznikne delší tah \hookrightarrow
 - sporem dokážeme, že T obsahuje všechny vrcholy
 - mějme vrchol $v \notin T$
 - zvolíme $u \in T$ libovolně
 - graf je souvislý \implies existuje cesta P mezi u, v
 - tedy musí existovat „nenakreslená“ hrana spojující „nakreslený“ a „nenakreslený“ vrchol
 - formálně $\exists r, s \in P : r \in T, s \notin T, \{r, s\} \in E(G)$
 - to je stejná situace jako v předchozím sporu \hookrightarrow
- Definice: Orientovaný graf, podkladový graf, vstupní a výstupní stupeň, vyváženost vrcholu
 - orientovaný graf ... $(V, E) : E \subseteq V^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in V\}$
 - nepovolíme smyčky (v podstatě zakážeme diagonálu na relaci)
 - podkladový graf je neorientovaný graf založený na tom původním orientovaném

- pro orientovaný $G = (V, E)$ existuje podkladový $G^0 = (V, E^0)$, kde $\{u, v\} \in E^0 \equiv (u, v) \in E \vee (v, u) \in E$
- vstupní a výstupní stupeň $\deg^{\text{in}}, \deg^{\text{out}}$ (hrany vedoucí do vrcholu / z vrcholu)
- vrchol je vyvážený $\equiv \deg^{\text{in}}(v) = \deg^{\text{out}}(v)$
- graf je vyvážený \equiv všechny vrcholy jsou vyvážené
- součet vstupních stupňů = součet výstupních stupňů = počet hran
- Definice: Silná a slabá souvislost orientovaných grafů
 - orientovaný graf je slabě souvislý \equiv jeho podkladový graf je souvislý
 - o. graf je silně souvislý \equiv existuje orientovaná cesta mezi každými dvěma vrcholy
 - silná souvislost \implies slabá souvislost
- Věta: Uzavřené eulerovské tahy v orientovaných grafech
 - věta: pro orientovaný graf G platí: (1) G je vyvážený a slabě souvislý \iff (2) G je eulerovský \iff (3) G je vyvážený a silně souvislý
 - důkaz
 - $3 \implies 1$ ✓
 - $2 \implies 3$
 - vyváženost – hran dovnitř je v každém vrcholu stejně jako hran ven
 - silná souvislost – pro každou dvojici vrcholů existuje orientovaný tah $u \rightarrow v \implies$ existuje orientovaná cesta $u \rightarrow v$
 - $1 \implies 2$
 - stejný princip jako u věty o existenci uzavřeného eulerovského tahu v neorientovaném grafu
 - sudý stupeň vrcholu v podstatě odpovídá vyváženosti vrcholu

Stromy

- Definice: Strom, les, list
 - strom je souvislý graf bez kružnic (= acyklický)
 - les je acyklický graf
 - list je vrchol stupně 1
 - strom o jednom vrcholu nemá žádný list
- Lemma o koncovém vrcholu
 - lemma: Každý strom s aspoň 2 vrcholy má aspoň 1 list (respektive aspoň dva listy).
 - důkaz
 - necht' P je nejdelší cesta ve stromu
 - dokážeme, že koncové vrcholy cesty P jsou listy
 - kdyby z koncového vrcholu v vedla hrana do vrcholu, který neleží na cestě P , dala by se cesta P o tuto hranu prodloužit, což by byl spor s tím, že jde o nejdelší cestu
 - kdyby z koncového vrcholu v vedle hrana do vrcholu, který leží na cestě P , byla by v grafu kružnice, což by byl spor s acykličností stromu
 - tudíž musí být oba koncové vrcholy listy
- Lemma o trhání listů
 - lemma: Je-li v list grafu G , pak G je strom, právě když $G - v$ je strom.
 - důkaz \implies
 - $G - v$ je souvislý, protože pokud mezi dvěma vrcholy existovala cesta v G , tak existuje i v $G - v$, neboť list nikdy není vnitřním vrcholem cesty
 - $G - v$ je acyklický, protože odstraněním vrcholu a hrany nemůže vzniknout kružnice
 - jiná formulace: kdyby $C \subseteq G - v \subseteq G$, pak $C \subseteq G$ (kružnice by existovala v původním grafu, což by byl spor)
 - důkaz \impliedby

- G je souvislý, protože přidáním listu nerozbiju cestu a díky tranzitivitě dosažitelnosti je nový list v dosažitelný ze všech vrcholů grafu stejně jako jeho soused s , ke kterému jsme v připojili
- G je acyklický, protože list se nemůže účastnit kružnice, takže pokud $G - v$ neměl kružnici, tak ani G nemá kružnici
- Věta: Pět ekvivalentních charakteristik stromu
 - pro graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:
 1. G je souvislý a acyklický (strom)
 2. mezi vrcholy u, v existuje právě jedna cesta (jednoznačně souvislý)
 3. G je souvislý a po smazání libovolné jedné hrany už nebude souvislý (minimální souvislý)
 4. G je acyklický a po přidání libovolné jedné hrany vznikne cyklus (maximální acyklický)
 5. G je souvislý a platí pro něj Eulerova formule

$$|E(G)| = |V(G)| - 1$$
 - důkaz
 - $1 \implies 2$
 - indukcí otrháváním listů
 - IP: $G - l$ je strom $\implies G - l$ je jednoznačně souvislý
 - dokážeme, že G je jednoznačně souvislý
 - přidání listu nevytvoří nové cesty mezi vrcholy, které byly už v $G - l$, protože list nemůže být vnitřním vrcholem cesty
 - každá cesta do l vede přes souseda s
 - jelikož v původním grafu do souseda existovala právě jedna cesta mezi libovolným v a sousedem s , musí existovat právě jedna cesta mezi libovolným v a listem l
 - existuje bijekce mezi l, v -cestami v G a s, v -cestami v $G - l$
 - $1 \implies 3$

- podobná indukce
- $G - l$ je minimální souvislý
- minimální souvislost je zachována
 - když zruším hranu s, l , tak se to rozpadne
 - když zruším jinou hranu, tak se to rozpadne taky, protože $G - l$ by se rozpadlo a (nově přidaný) list není vrcholem žádné cesty
- $1 \implies 4$
 - opět indukce
 - když přidám hranu mezi vrcholy v $G - l$, tak to řeší IP
 - když přidám hranu mezi l a vrcholem v $G - l$, tak vzniká cyklus
 - protože G je souvislý, tudíž mezi l a libovolným jiným vrcholem už nějaká cesta existuje
- $1 \implies 5$
 - indukcí podle $n := |V(T)|$
 - $n = 1 \quad 0 = |E(T)| = |V(T)| - 1 = 1 - 1$
 - $n \rightarrow n + 1$
 - T je strom na $n + 1$ vrcholech
 - T má list
 - $T' := T - l$ je strom na n vrcholech
 - z IP: $|E(T')| = n - 1$
 - vrácení l zvýší počet hran i vrcholů o 1
 - takže $|E(T)| = |E(T')| + 1 = n = (n + 1) - 1 \quad \square$
- $2 \implies 1$
 - obměnou, tedy $\neg 1 \implies \neg 2$
 - když graf není souvislý, tak není jednoznačně souvislý
 - když graf není acyklický, tak má kružnici, přičemž mezi vrcholy na kružnici neexistuje jednoznačná cesta
- $3 \implies 1$
 - obměnou, tedy $\neg 1 \implies \neg 3$
 - když graf není souvislý, tak není minimální souvislý

- když má kružnici, tak není minimální souvislý, protože můžu odstranit hranu na kružnici a souvislost se zachová
- $4 \implies 1$
 - obměnou, tedy $\neg 1 \implies \neg 4$
 - když není acyklický, není maximální acyklický
 - když není souvislý, můžu přidat hranu (most) a nevytvořím kružnici, takže graf nemohl být maximální acyklický
- $5 \implies 1$
 - dokážeme, že souvislý graf splňující Eulerovu formuli má list
 - součet stupňů je roven dvojnásobku počtu hran
 - $\sum \deg(v_i) = 2|E| = 2n - 2$ (z Eulerovy formule)
 - průměrný stupeň $= \frac{2n-2}{n} < 2$
 - graf je souvislý a netriviální, takže alespoň jeden vrchol musí mít stupeň 1 \implies graf má list
 - důkaz indukcí podle $n := |V(G)|$
 - $n = 1$ platí triviálně (graf je strom, takže implikace platí)
 - $n \rightarrow n + 1$
 - mějme graf G , který splňuje (5) a má list v – viz výše
 - $G - v$ pořád splňuje (5)
 - podle IP je $G - v$ strom
 - $\implies G$ je strom
- Definice: Kostra grafu
 - kostra grafu je podgraf, který obsahuje všechny vrcholy původního grafu a je to strom
- Věta: Graf má kostru, právě když je souvislý.
 - lemma: G má kostru $\iff G$ je souvislý
 - \implies

- kostra je strom, strom je souvislý, každé dva vrcholy jsou spojené cestou
- kostra je podgrafem G , takže tyto cesty existují i v G , tudíž i G je souvislý
- \Longleftrightarrow
 - G je souvislý
 - když je acyklický, tak mám kostru
 - když není acyklický, tak odebírám hrany na cyklech tak dlouho, dokud není acyklický, čímž dostanu kostru

Rovinné kreslení grafů

- Definice: Rovinné nakreslení grafu a jeho stěny (neformálně)
 - (nakreslení grafu, aby se hrany nekřížily)
 - vrcholy = body v rovině (navzájem různé)
 - hrany = křivky, které se neprotínají a jejich společnými body jsou jejich společné vrcholy
 - definice křivky
 - $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 - spojitá, prostá
 - = oblouk
 - stěny nakreslení
 - části, na které nakreslení grafu rozděljuje rovinu
 - stěnou je i vnější stěna (zbytek roviny)
 - hranice stěny – skládá se z hran
 - hranice stěny je nakreslení uzavřeného sledu
- Definice: Rovinný graf, topologický graf
 - graf je rovinný, pokud má alespoň jedno rovinné nakreslení
 - topologický graf je uspořádaná dvojice (graf, nakreslení)
- Příklad: K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.
 - K_5 – nakreslíme K_4 (jeden vrchol doprostřed, ostatní kolem něj) a hledáme, kam umístit pátý vrchol (zjistíme, že to nejde)

- podobně $K_{3,3}$
- lze dokázat pomocí vět o maximálních počtech hran
- Věta: Hranice stěny je nakreslením uzavřeného sledu (bez důkazu).
- Definice: Stereografická projekce
 - máme rovinu, na ní je položena sféra (koule) tak, že se jí dotýká právě v jednom bodě (ten označím jako jižní pól)
 - vedu polopřímku ze severního pólu skrz promítaný bod, průsečík s rovinou dává obraz daného bodu
 - tak dostávám spojitou bijekci mezi sférou (bez severního pólu) a \mathbb{R}^2
- Věta: Graf jde nakreslit do roviny, právě když jde nakreslit na sféru.
 - důkaz: stereografická projekce je bijekce mezi sférou bez severního pólu a rovinou
- Příklad: Vnější stěnu lze zvolit.
 - vnější stěna se pozná podle toho, že obsahuje severní pól
 - když sféru pootočím, tak vnější stěnu můžu zvolit
- Kuratowského věta (bez důkazu): Graf je nerovinný, právě když obsahuje podgraf izomorfní s dělením K_5 nebo $K_{3,3}$.
- Věta: Eulerova formule pro souvislé rovinné grafy ($v+f=e+2$)
 - věta: Necht' G je souvislý graf nakreslený do roviny,
 $v := |V(G)|$, $e := |E(G)|$, $f :=$ počet stěn nakreslení, potom
 $v + f = e + 2$.
 - důkaz: indukcí podle e
 - $e = v - 1$ (G je strom)
 - $f = 1$
 - $v + 1 = v - 1 + 2$ ✓
 - $e - 1 \rightarrow e$
 - mějme graf G s e hranami
 - zvolím si libovolnou hranu x na kružnici
 - $G' := G - x$
 - $v' = v$, $e' = e - 1$, $f' = f - 1$
 - z IP: $v' + f' = e' + 2$

- po dosazení: $v + f - 1 = e - 1 + 2$
- k oběma stranám přičteme jedničku
- $v + f = e + 2 \quad \square$
- Věta: Maximální rovinný graf je triangulace.
 - (pokud má aspoň 3 vrcholy)
 - definice: maximální rovinný graf je rovinný graf, který přidáním libovolné hrany přestane být rovinný
 - G musí být souvislý – kdyby nebyl, tak můžu spojit komponenty (pomocí vrcholů na hranici stěny, v níž leží komponenta) a graf nepřestane být rovinný, což je spor s maximální rovinností
 - hranicí stěny je kružnice \implies je to \triangle
 - kdyby nebyl, tak na kružnici jsou nesousední vrcholy, které můžu spojit a graf nepřestane být rovinný
 - hranicí stěny není kružnice
 - nějaký vrchol na hranici se opakuje
 - tento vrchol můžu odstranit \rightarrow hranice se rozpadne na komponenty \rightarrow vrcholy v různých komponentách můžu spojit bez ztráty rovinnosti
- Věta: Maximální počet hran rovinného grafu
 - počet hran maximálního rovinného grafu
 - každá stěna přispěje třemi hranami
 - každá hrana patří ke dvěma stěnám
 - počítáme „strany hran“: $3f = 2e$
 - $f = \frac{2}{3}e$
 - $v + \frac{2}{3}e = e + 2$
 - $e = 3v - 6$
 - věta: V každém rovinném grafu s aspoň 3 vrcholy je $|E| \leq 3|V| - 6$.
 - důkaz
 - doplníme do G hrany, až získáme maximální rovinný G'
 - $e' = 3v - 6$ (vrcholy nepřidáváme)
 - $e \leq e' = 3v - 6$

- důsledek
 - průměrný stupeň vrcholu v rovinném grafu je menší než 6
 - $\sum \deg(\xi) = 2e \leq 6v - 12$
 - průměrný stupeň $\leq \frac{6v-12}{v} < 6$
- Věta: V rovinném grafu existuje vrchol stupně nejvýše 5.
 - viz věta a důsledek výše
 - kdyby měly všechny vrcholy stupeň alespoň šest, tak by průměrný stupeň nemohl být ostře menší než 6
- Věta: Počet hran a vrchol nízkého stupně v rovinných grafech bez trojúhelníků
 - maximální rovinné grafy bez trojúhelníků mají stěny čtvercové, pětiúhelníkové, nebo to může být strom ve tvaru hvězdy
 - pro čtvercově stěny platí $4f = 2e$, pro pětiúhelníkové $5f = 2e$
 - obecně $4f \leq 2e \rightarrow f \leq \frac{1}{2}e$
 - $v + \frac{1}{2}e \geq e + 2$
 - $e \leq 2v - 4$
 - průměrný stupeň $\leq \frac{4v-8}{v} < 4$
 - existuje vrchol stupně max. 3

Barvení grafů

- Definice: Obarvení grafu k barvami, barevnost
 - obarvení grafu G k barvami (k -obarvení) je $c : V(G) \rightarrow [k]$ t. ž. kdykoli $\{x, y\} \in E(G)$, pak $c(x) \neq c(y)$
 - barevnost $\chi(G)$ grafu $G := \min k : \exists k\text{-obarvení grafu } G$
 - pozorování: kdykoli $H \subseteq G$, pak $\chi(H) \leq \chi(G)$
- Příklad: Barevnost úplných grafů, cest a kružnic
 - úplné grafy ... $\chi(K_n) = n$
 - cesty ... $\chi(P_n) = 2$ pro $n \geq 1$
 - sudé kružnice ... $\chi(C_{2k}) = 2$
 - liché kružnice ... $\chi(C_{2k+1}) = 3$

- Věta: Ekvivalentní tvrzení: graf má barevnost nejvýše 2, graf je bipartitní, graf neobsahuje lichou kružnici.
 - věta: $\chi(G) \leq 2 \iff G \text{ je bipartitní} \iff G \text{ neobsahuje lichou kružnici}$
 - důkaz barevnosti bipartitních grafů
 - jednu partitu obarvím jednou barvou, druhou druhou barvou
 - barvy určují partity
 - důkaz barevnost \iff lichá kružnice
 - \implies máme dokázáno obměnou (když má lichou kružnici, nejde obarvit dvěma barvami)
 - \impliedby
 - kdyby G byl nesouvislý: obarvíme po komponentách
 - jinak: necht' T je kostra grafu G , pak existuje obarvení kostry (dvěma barvami)
 - sporem: kdyby existovala hrana, které tohle obarvení přiřklo stejné barvy koncových vrcholů, pak v grafu existuje lichá kružnice (spor)
 - mezi stejnobarevnými vrcholy bude cesta sudé délky, protože mají stejnou barvu a jsou ve stromě
 - tedy spojením stejnobarevných vrcholů vznikne lichá kružnice
- Věta: Barevnost \geq klikovost
 - definice: klikovost grafu $\kappa(G)$ je maximální k takové, že v grafu jako podgraf existuje úplný graf K_k
 - $\chi(G) \geq \kappa(G)$
 - zjevně platí
- Příklad: Princip barvení indukcí: stromy jsou 2-obarvitelné, rovinné grafy 6-obarvitelné
 - barvení stromu
 - strom rozdělíme do vrstev podle vzdálenosti od kořenu v
 - $c(x) = (d(v, x) \bmod 2) + 1$

- tvrzení: každý strom je 2-obarvitelný
- důkaz: indukcí podle počtu vrcholů (základní případ pro 1 vrchol), postupně přidáváme (odebrané) listy, listu dáváme opačnou barvu než má vrchol, kam ho připojujeme, tedy $c(l) = 3 - c'(s)$
- barvení rovinného grafu – viz následující věta
- Věta: Barevnost \leq maximální stupeň + 1
 - definice: graf G je k -degenerovaný $\equiv \exists \leq$ lineární uspořádání na $V(G)$ t. ž. $\forall v \in V(G) : |\{u < v \mid \{u, v\} \in E(G)\}| \leq k$
 - vrcholy lze uspořádat tak, že z každého vrcholu doleva vede nejvýše k hran
 - vrcholy skládám zprava doleva tak, jak je odtrhávám
 - stromy 1-deg., rovinné 5-deg., rovinné bez trojúhelníků 3-deg.
 - $\Delta := \max \deg(v) \dots$ graf je Δ -degenerovaný
 - graf je k -degenerovaný $\implies \chi \leq k + 1$
 - barvím zleva, nejvýše k barev může být zakázáno
- Věta o 5 barvách
 - věta: Pro každý rovinný graf G platí $\chi(G) \leq 5$.
 - první důkaz: indukcí podle $|V|$
 - pro $|V| \leq 5$ triviální
 - $n - 1 \rightarrow n$
 - necht' v je vrchol s minimálním stupněm (nejvýše pět)
 - $G' := G - v$, podle IP existuje 5-obarvení c' grafu G'
 - pokud na sousedech v v obarvení c' jsou použity max. 4 barvy, tak tu pátou můžeme použít na vrchol v
 - co když má každý soused jinou barvu
 - A je maximální souvislý podgraf indukovaný vrcholy áčkové a céčkové barvy, do kterých existuje cesta ze souseda a přes vrcholy áčkové a céčkové barvy
 - pokud soused $c \notin A$

- prohodíme barvy v A
 - tím pádem áčková barva se uvolní pro v
- pokud soused $c \in A$
 - použiju stejný trik pro b a d
 - soused b je obalený kružnicí mezi a a c , takže nehrozí, že by byl spojený s d
- tzv. Kempeho řetězce
- druhý důkaz: indukcí podle $|V|$
 - máme vrchol stupně 5
 - musí existovat dva sousedi toho grafu, kteří nejsou spojeni hranou (jinak bychom dostali K_5)
 - můžu vytvořit rovinný $G' = G - v + \{x, y\}$ (nahradím vrchol hranou – bez ztráty rovinnosti)
 - můžu vytvořit rovinný $G'' = G' \cdot \{x, y\}$ (kontrakce hrany – zachovává rovinnost)
 - G'' obarvíme indukcí \rightarrow dostaneme obarvení $c'' \rightarrow c$
obarvení $G - v$ (v němž se barvy x a y rovnají) \rightarrow existuje volná barva pro v
- Věta o 4 barvách (bez důkazu): Pro každý rovinný graf G platí $\chi(G) \leq 4$.

Pravděpodobnost

- Definice: Pravděpodobnostní prostor diskrétní, konečný, klasický
 - pravděpodobnostní prostor
 - Ω = množina elementárních jevů
 - $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ = množina jevů
 - $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ = pravděpodobnost
 - náš pravděpodobnostní prostor je diskrétní, konečný a klasický
 - diskrétní pravděpodobnostní prostor
 - Ω je konečná nebo spočetná (tedy spočetně nekonečná, existuje bijekce do \mathbb{N})

- $\mathcal{F} = 2^\Omega$
- $P(J) = \sum_{x \in J} P(\{x\})$
 - stačí určit pravděpodobnosti elementárních jevů
 - tedy jev nastává, když nastane kterýkoli z jeho elementárních jevů
- $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$
- klasický pravděpodobnostní prostor ... $P(J) = \frac{|J|}{|\Omega|}$
 - všechny elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost
- konečný pravděpodobnostní prostor ... Ω je konečná
- Definice: Jev elementární, jev složený, pravděpodobnost jevu
 - elementární jev = výsledek náhodného pokusu
 - složený jev = množina elementárních jevů
 - pravděpodobnost jevu ... $P(J) = \sum_{x \in J} P(\{x\})$
- Příklad: Jev se také dá popsat logickou formulí.
 - např. $P[\text{padlo sudé číslo}]$
- Příklad: Bertrandův paradox s kartičkami
 - tři kartičky, jedna je z obou stran červená, druhá modrá, třetí má jednu stranu červenou a druhou modrou
 - vybereme náhodnou kartičku
 - otočíme ji náhodnou stranou nahoru
 - horní strana je červená
 - jaká je pravděpodobnost toho, že dolní strana je také červená
 - pravděpodobnostní prostor: ČČ, ČČ, MM, MM, ČM, MČ
 - tři možnosti, z nich dvě chceme, takže $\frac{2}{3}$
- Definice: Podmíněná pravděpodobnost
 - podmíněná pravděpodobnost jevu $A \subseteq \Omega$ za podmínky $B \subseteq \Omega$, přičemž $P(B) \neq 0$
 - $P[A|B] := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
 - počítání s pravděpodobnostmi
 - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
- doplněk do množiny elementárních jevů ... \bar{B}
- $P[A|B] \cdot P(B) = P(A \cap B)$
- $P[A|\bar{B}] \cdot P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B})$
- $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$
- pozorování:

$$P[A|B] \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P[B|A] \cdot P(A)$$
- Věta o úplné pravděpodobnosti (věta o rozboru případů)
 - věta: Pro $A \in \Omega$, B_1, \dots, B_k rozklad Ω t. ž. $\forall i : P(B_i) \neq 0$ platí

$$P(A) = \sum_i P[A|B_i] \cdot P(B_i).$$
 - důsledek: řetězové pravidlo

$$P(A \cap B \cap C) = P[A|B \cap C] \cdot P(B \cap C) = P[A|B \cap C] \cdot P[B|C] \cdot P(C)$$
- Bayesova věta
 - věta: Necht' A je jev s $P(A) \neq 0$, B_1, \dots, B_k rozklad Ω na jevy s $P(B_i) \neq 0$ pro všechna i . Potom $P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i] \cdot P(B_i)}{\sum_j P[A|B_j] \cdot P(B_j)}$.
- Definice: Jevy nezávislé a po dvou nezávislé
 - nezávislost dvou jevů
 - jevy A, B jsou nezávislé \equiv
 - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
 - $P[A|B] \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$
 - $\iff P(B) = 0 \vee P[A|B] = P(A)$
 - jevy jsou po 2 nezávislé, pokud pro libovolnou dvojici z množiny jevů platí, že se pravděpodobnost průniku rovná součinu pravděpodobností
 - lze zobecnit na jevy po k nezávislé
 - jevy jsou nezávislé \equiv pro každé $k \geq 2$ jsou po k nezávislé
- Definice: Součin pravděpodobnostních prostorů, projekce
 - součin pravděpodobnostních prostorů $(\Omega_1, 2^{\Omega_1}, P_1)$ a $(\Omega_2, 2^{\Omega_2}, P_2)$ je $(\Omega_1 \times \Omega_2, 2^{\Omega_1 \times \Omega_2}, P)$, kde

$$P(A) := \sum_{(a_1, a_2) \in A} P_1(a_1) \cdot P_2(a_2), \text{ přičemž } A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$$
 - jev lze promítnout na jednu z os – dostaneme hodnotu jednoho prvku z n-tice jevů

- jevy v různých prostorech jsou navzájem nezávislé
- Definice: Náhodná veličina
 - náhodná veličina je funkce z Ω do \mathbb{R}
 - každému elementárnímu jevu přiřadí číselnou hodnotu
- Příklad: Logické formule s náhodnými veličinami dávají jevy.
 - např. $P[X < 3]$, kde X je počet jedniček v n hodech mincí
- Definice: Střední hodnota
 - střední hodnota náhodné veličiny X je

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$$
 - v klasickém pravděpodobnostním prostoru je to aritmetický průměr $\mathbb{E}[X] = \frac{\sum X(\omega)}{|\Omega|}$
- Věta o linearitě střední hodnoty
 - věta: Necht' X, Y jsou náhodné veličiny a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ a $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha \mathbb{E}[X]$.
 - důkaz
 - $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X + Y] &= \sum_{\omega \in \Omega} (X + Y)(\omega) \cdot P(\omega) \\ &= \sum (X(\omega) \cdot P(\omega) + Y(\omega) \cdot P(\omega)) \\ &= \sum X(\omega) \cdot P(\omega) + \sum Y(\omega) \cdot P(\omega) \end{aligned}$$
 - násobení konstantou se dokáže podobně (dosazením do sumy)
- Definice: Indikátor náhodného jevu
 - indikátor jevu \equiv náhodná veličina, která nabývá hodnoty 0, nebo 1, podle toho, zda daný jev nastal
- Příklad: Použití indikátorů k výpočtu střední hodnoty
 - n hodů mincí
 - X = celkový počet jedniček, chceme $\mathbb{E}[X]$
 - X_i = kolikrát je na i -té pozici jednička (1×/0×)
 - $X = \sum_i X_i \rightarrow \mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X_i]$
 - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{2} \rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{n}{2}$

Různé

- Věta: Erdősovo-Szekeresovo lemma o monotónních posloupnostech
- Příklad: Existence de Bruijnovy posloupnosti (konstrukce pomocí orientovaných eulerovských tahů)
- Příklad: Klasifikace platónských těles pomocí rovinných grafů