Zkouška

Úvod

- Příklad: Technika důkazu indukcí a sporem
  - věta: Prvočísel je nekonečně mnoho.
  - důkaz sporem
    - kdyby $p_1, \dots, p_n$ byla všechna prvočísla
    - $\zeta := p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$
    - $(\zeta + 1) \bmod p_i = 1 \implies \zeta + 1$ není dělitelné žádným prvočíslem a je větší než všechna $p_i \implies \zeta + 1$ by také muselo být prvočíslo ↯
  - věta: $\forall n \in \mathbb{N} : 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
  - důkaz indukcí podle n
    - $2^0 = 2^1 - 1$
    - indukční krok
      - IP: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$
      - chceme: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1$
      - z IP: $2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1 \quad \square$
- Definice: Operace s čísly: sumy, produkty, horní a dolní celá část
  - prázdná suma se rovná nule, prázdný produkt jedné
  - horní celá část se značí $\lceil x \rceil$, zaokrouhluje nahoru
  - dolní celá část se značí $\lfloor x \rfloor$, zaokrouhluje dolů
- Definice: Množinové operace: rovnost, inkluze, sjednocení, průnik, rozdíl, symetrická diference, potence (množina podmnožin), mohutnost (počet prvků)
  - symetrická diference $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
  - potence $2^A := \{B \mid B \subseteq A\}$
- Definice: Uspořádané k-tice a kartézský součin
  - uspořádaná dvojice (x, y)
    - lze zavést pomocí klasických množin jako $\{\{x\}, \{x, y\}\}$

    - uspořádaná k-tice $(x_1, \dots, x_k)$
- kartézský součin $A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$
    - $A^k := \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k}$

Relace

- Definice: Relace mezi množinami, relace na množině
    - (binární) relace mezi množinami X, Y je podmnožina $X \times Y$
    - relace na množině X je podmnožina X^2
    - značení – pro relaci R mezi X, Y : $xRy \equiv (x, y) \in R$
- Příklad: Příklady relací: prázdná, univerzální, diagonální
    - prázdná $\emptyset$
    - univerzální $X \times Y$
    - diagonální $\Delta_X := \{(x, x) \mid x \in X\}$, např. rovnost $x = y$
- Definice: Operace s relacemi: inverze, skládání
    - inverze
        - k relaci R mezi X, Y lze definovat inverzní relaci R^{-1} mezi Y, X, přičemž $R^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}$
    - skládání
        - pro relaci R mezi X, Y a relaci S mezi Y, Z lze definovat složenou relaci $T = R \circ S$ mezi X, Z
        - $xTz \equiv \exists y \in Y : xRy \land ySz$
        - $R \circ \Delta_Y = R, \quad \Delta_X \circ R = R$
        - značení skládání funkcí: $(f \circ g)(x) = g(f(x))$
- Definice: Funkce (zobrazení) a jejich druhy: prosté (injektivní), na (surjektivní), vzájemně jednoznačné (bijektivní)
    - funkce z množiny X do množiny Y je relace A mezi X a Y t. ž. $(\forall x \in X)(\exists! y \in Y) : xAy$
    - funkce $f : X \to Y$ je…
    - prostá (injektivní) $\equiv \nexists x, x' \in X : x \neq x' \land f(x) = f(x')$
    - na Y (surjektivní) $\equiv (\forall y \in Y)(\exists x \in X) : f(x) = y$

- vzájemně jednoznačná (bijektivní) $\equiv (\forall y \in Y)(\exists! x \in X) : f(x) = y$
  - taková funkce je tedy prostá i „na"
  - k takové funkci existuje inverzní funkce f^{-1} z Y do X
- Definice: Vlastnosti relací: reflexivita, symetrie, antisymetrie, transitivita
  - relace R na X je…
  - reflexivní $\equiv \forall x \in X : xRx$
    - $\Delta_X \subseteq R$
  - symetrická $\equiv \forall x, y \in X : xRy \implies yRx$
    - $R = R^{-1}$
  - antisymetrická $\equiv \forall x, y \in X : xRy \land yRx \implies x = y$
    - $R \cap R^{-1} \subseteq \Delta_X$
  - tranzitivní $\equiv \forall x, y, z \in X : xRy \land yRz \implies xRz$
    - $R \circ R \subseteq R$
- Definice: Ekvivalence, ekvivalenční třída, rozklad množiny
  - relace R na X je ekvivalence $\equiv$ R je reflexivní & symetrická & tranzitivní
    - např. rovnost čísel, rovnost mod K, geometrická podobnost
  - ekvivalenční třída prvku $x \in X : R[x] = \{y \in X \mid xRy\}$
  - množinový systém $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ je rozklad množiny $X \equiv$
    - $\forall A \in \mathcal{S} : A \neq \emptyset$
    - $\forall A, B \in \mathcal{S} : A \neq B \implies A \cap B = \emptyset$
    - $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = X$
- Věta: Vztah mezi ekvivalencemi a rozklady
  - věta
    - (1) $\forall x \in X : R[x] \neq \emptyset$
    - (2) $\forall x, y \in X$: buď $R[x] = R[y]$, nebo $R[x] \cap R[y] = \emptyset$
    - (3) $\{R[x] \mid x \in X\}$ (množina všech ekvivalenčních tříd) určuje ekvivalenci R jednoznačně
  - důkaz

- (1) ekvivalence je reflexivní, tedy nutně platí $x \in R[x]$, tudíž je ta ekvivalenční třída neprázdná
- (2) dokážeme, že pokud nejsou disjunktní, tak se rovnají
  - platí $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$
  - dokazujeme $R[x] = R[y]$, stačí nám $R[x] \subseteq R[y]$ (opačnou inkluzi lze dokázat podobným způsobem)
  - víme $\exists t \in R[x] \cap R[y]$
    - tedy platí xRt, tRx, yRt, tRy
  - chceme $\forall a \in R[x]$: $a \in R[y]$
  - dále aplikujeme tranzitivitu
  - $aRx \wedge xRt \implies aRt$
  - $aRt \wedge tRy \implies aRy$
- (3) na základě ekvivalenčních tříd lze jednoznačně určit, zda jsou prvky x a y ekvivalentní, neboť stačí najít ekvivalenční třídu obsahující y a zjistit, zda je v této třídě také x

Uspořádání

- Definice: Uspořádání částečné a lineární, uspořádaná množina, ostré uspořádání
  - relace R na množině X je (částečné) uspořádání $\equiv$ R je reflexivní & antisymetrická & tranzitivní
  - (částečně) uspořádaná množina (X, R)
    - zkráceně ČUM
    - R je (částečné) uspořádání na X
  - prvky $x, y \in X$ jsou porovnatelné $\equiv xRy \vee yRx$
  - uspořádání je lineární $\equiv \forall x, y \in X$ porovnatelné
    - (všechny prvky množiny jsou navzájem porovnatelné)
  - částečné uspořádání (nebo pouze uspořádání) je obecný pojem, některá taková uspořádání jsou navíc lineární
  - ostré uspořádání – každému uspořádání $\leq$ na X přiřadíme relaci $<$ na X: $a < b \equiv a \leq b \wedge a \neq b$

- pozor – ostré uspořádání není speciálním případem uspořádání (protože není reflexivní)
    - vlastnosti ostrého uspořádání – ireflexivní, antisymetrické, tranzitivní
- Příklady uspořádání: dělitelnost, inkluze podmnožin, lexikografické
  - dělitelnost $(\mathbb{N}^+, \backslash)$
    - $2\backslash 4$
    - $4, 6$ neporovnatelné
    - dělitelnost na reálných čísel (bez nuly) není uspořádání, protože $(-1)\backslash 1 \wedge 1\backslash(-1)$ (není antisymetrické)
  - inkluze $(2^X, \subseteq)$
    - $\{1\} \subseteq \{1, 3\}$
    - $\{1, 2\}, \{2, 3\}$ neporovnatelné
  - lexikografické uspořádání
    - abeceda: $(X, \leq)$
    - Df: $(X^2, \leq_{lex})$
    - $(a_1, a_2) \leq_{lex} (b_1, b_2) \equiv a_1 < b_1 \vee (a_1 = b_1 \wedge a2 \leq b_2)$
    - $(X^k, \leq_{lex})$
    - $(X^*, \leq_{lex})$
      - X* – konečné posloupnosti prvků z X
    - pokud je slovo krátké, doplníme ho mezerami ze začátku abecedy
- Definice: Hasseův diagram, relace bezprostředního předchůdce
  - Hasseův diagram graficky zachycuje vztahy mezi prvky ČUM (porovnatelné prvky jsou spojeny, větší prvky jsou výše)
  - x je bezprostředním předchůdcem y v uspořádání $\leq$ $\equiv x < y \wedge (\nexists z : x < z \wedge z < y)$
    - značí se $x \lhd y$
- Definice: Minimální/maximální a nejmenší/největší prvek
  - prvek $x \in X$ je nejmenší $\equiv \forall y \in X : x \leq y$
  - prvek $x \in X$ je minimální $\equiv \nexists y \in X : y < x$
  - x je nejmenší $\implies$ x je minimální

    - v Hassově diagramu
        - z minimálního prvku dolů nevede žádná spojnice
        - nejmenší prvek je nejníž v diagramu, existuje do něj cesta z libovolného jiného prvku
- Věta: Konečná neprázdná uspořádaná množina má minimální a maximální prvek
    - důkaz
        - zvolíme $x_1 \in X$ libovolně
        - buď je x_1 minimální, nebo $\exists x_2 < x_1$
        - buď je x_2 minimální, nebo $\exists x_3 < x_2$
        - atd.
        - po konečně mnoha krocích nalezneme minimální prvek, protože jinak by X měla nekonečně mnoho různých prvků, což je spor s konečností
- Definice: Řetězec a antiřetězec
    - pro $(X, \leq)$ ČUM:
    - $A \subseteq X$ je řetězec $\equiv \forall a, b \in A : a, b$ jsou porovnatelné
    - $A \subseteq X$ je antiřetězec (nezávislá množina) $\equiv \nexists a, b$ různé & porovnatelné
- Definice: parametry α a ω
    - $\omega(X, \leq)$ je délka nejdelšího řetězce = maximum z délek řetězců (výška uspořádání)
    - $\alpha(X, \leq)$ je délka nejdelšího antiřetězce (šířka uspořádání)
- Věta: O Dlouhém a Širokém
    - věta: pro každou konečnou ČUM $(X, \leq)$ platí $\alpha(X, \leq) \cdot \omega(X, \leq) \geq |X|$
        - řetězec: $A \subseteq X : \forall a, b \in A : a \leq b \vee b \leq a$
        - antiřetězec: $A \subseteq X : \forall a, b \in A,\ a \neq b : \neg(a \leq b \vee b \leq a)$
        - maximální velikost řetězce … ω („výška“)
        - maximální velikost antiřetězce … α („šířka“)
        - důsledek věty: $\max(\alpha, \omega) \geq \sqrt{|X|}$
    - důkaz

- najdeme všechny minimální prvky → vrstva X_1
- smažu X_1, proces opakuju → najdu X_2
- tak postupuju dál, dokud nerozkrájím celou ČUM
- každá vrstva tvoří antiřetězec
- vrstvy jsou rozklad
- existuje množina taková, že každý prvek je z jiné vrstvy a dohromady tvoří řetězec
    - formálně $\exists\{q_1, \ldots, q_k\}$ řetězec t. ž. $\forall i : q_i \in X_i$
    - jak je to možné?
        - q_{i+1} je ve vrstvě X_{i+1}, protože nějaký prvek q_i je menší – ten je ve vrstvě X_i

Kombinatorické počítání

- Věta: Počet funkcí mezi množinami
    - věta: počet $f : N \to M = m^n$
        - pro $|N| = n, |M| = m; \quad m, n > 0$
    - důkaz indukcí podle n
        - $n = 1 \quad \# f = m = m^1$
        - $n \to n + 1$
            - (n+1)-prvková N, m-prvková M
            - zvolíme $x \in N$
            - $f' : N \setminus \{x\} \to M$
            - podle IP existuje m^n funkcí f'
            - zadat zobrazení f je totéž jako zadat hodnotu $f(x) \in M$ plus zobrazení f'
            - hodnotu $f(x)$ lze zvolit m způsoby
            - celkem tedy $m^n \cdot m = m^{n+1}$
    - jiný způsob důkazu – pro každé x existuje m možností, počet x je n
- Věta: Počet prostých funkcí mezi množinami
    - věta: počet prostých $f : N \to M = m^{\underline{n}}$ (viz klesající mocnina níže)

- důkaz indukcí podle n
  - podobně jako předchozí důkaz
  - $n \to n+1$
    - $f' : N \setminus \{x\} \to M \setminus \{f(x)\}$
    - podle IP existuje $(m-1)^{\underline{n}}$ funkcí f'
    - hodnotu $f(x)$ lze zvolit m způsoby
    - celkem tedy $(m-1)^{\underline{n}} \cdot m = m^{\underline{n+1}}$
- jiný způsob důkazu – pro první x existuje m možností, pro každé další o jednu méně, počet x je n
- Definice: Klesající mocnina
  - $m^{\underline{n}} = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)}_{n}$
- Definice: Charakteristická funkce podmnožiny
  - pro podmnožinu A množiny X definujeme zobrazení $c_A : X \to \{0,1\}$
  - $c_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } x \in A \\ 0 & \text{pokud } x \notin A \end{cases}$
- Věta: Počet všech podmnožin
  - věta: $|2^N| = 2^{|N|}$
  - důkaz: počet podmnožin = počet charakteristických funkcí = $2^{|N|}$
- Věta: Počet podmnožin sudé a liché velikosti
  - věta: Nechť $X \neq \emptyset$ je konečná množina, pak počet podmnožin $\mathcal{S}$ sudé velikosti se rovná počtu podmnožin $\mathcal{L}$ liché velikosti, což se rovná 2^{n-1}.
  - důkaz
    - víme, že $\mathcal{S} \cup \mathcal{L} = 2^X$
    - stačí $|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}|$
    - sestrojíme $f : \mathcal{S} \to \mathcal{L}$ bijekci
    - zvolíme si $a \in X$
    - $f(S) := S \triangle \{a\}$ (prvek a přidáme nebo odebereme, podle toho, zda je prvkem S, nebo není)
    - $f(S) \in \mathcal{L}$

- f má inverzi $f^{-1} = f$
- Věta: Počet permutací na množině
  - definice: $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$
  - věta: na množině $[n]$ existuje $n!$ permutací (podobně na každé n-prvkové množině)
  - důkaz: počet prostých funkcí $[n] \to [n] = n^{\underline{n}} = n!$
- Věta: Počet uspořádaných k-tic bez opakování a k-prvkových podmnožin
  - počet uspořádaných k-tic $|X^k| = |X|^k$, lze jej totiž vyjádřit jako počet funkcí $f : [k] \to X$
  - u uspořádaných k-tic bez opakování hledáme prosté funkce, tedy $|X|^{\underline{k}}$
  - pomocí „počítání dvěma způsoby“ odvodíme vzorec pro neuspořádané k-tice (k-prvkové podmnožiny)
  - uspořádaných k-tic bude k!-krát víc než těch neuspořádaných (každou neuspořádanou k-tici lze k! způsoby lineárně uspořádat)
  - z toho vyplývá, že k-prvkových podmnožin (neuspořádaných k-tic) bude $\frac{|X|^{\underline{k}}}{k!}$
- Definice: Notace pro množinu všech k-prvkových podmnožin
  - $\binom{X}{k}$ … množina všech k-prvkových podmnožin množiny X
- Definice: Kombinační číslo (binomický koeficient), Pascalův trojúhelník
  - kombinační číslo (binomický koeficient) $\binom{n}{k} := \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
  - Pascalův trojúhelník – n roste shora dolů, k zleva doprava
- Věta: Základní vlastnosti kombinačních čísel
  - $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ … každé k-prvkové podmnožině přiřadíme její doplněk
  - $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$
    - zvolíme jeden prvek a a rozdělíme všechny k-prvkové podmnožiny podle toho, zda obsahují a, nebo ne
- Binomická věta
  - věta: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$
  - důkaz

        - jeden člen výsledného součtu – součin n věcí, z nichž každá bude x nebo y
        - z každé závorky vyberu x nebo y
        - výsledkem je člen $x^{n-k}y^k$
        - takových členů tam bude $\binom{n}{k}$
- Věta: Princip inkluze a exkluze
    - věta: (pro konečné množiny)

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

    - důkaz
        - pro prvek x ve sjednocení spočítáme příspěvky k levé (vždy 1) a pravé straně
        - nechť x patří do právě t množin
        - průniky k-tic
            - $k > t$ … přispěje 0
            - $k \leq t$ … přispěje $(-1)^{k+1}\binom{t}{k}$
                - vybíráme k-tice množin z t-množin, do kterých prvek patří
                - minus jednička vychází ze vzorce
            - chceme $\sum_{k=1}^{t}(-1)^{k+1}\binom{t}{k} = 1$
            - lze upravit na $\sum_{k=1}^{t}(-1)^{k}\binom{t}{k} = -1$
            - z binomické věty $0 = (1-1)^t = \sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}(-1)^k$
            - tedy bez prvního členu se součet rovná -1 $\square$
    - druhý důkaz – pomocí charakteristických funkcí
- Příklad: Problém šatnářky: počet permutací bez pevného bodu
    - Šatnářka n pánům vydá náhodně n klobouků (které si předtím odložili v šatně). Jaká je pravděpodobnost, že žádný pán nedostane od šatnářky zpět svůj klobouk?
    - jaká je pravděpodobnost, že náhodně zvolená permutace nebude mít žádný pevný bod

    - každá z $n!$ permutací je stejně pravděpodobná
    - $š(n)$ … počet permutací bez pevného bodu
    - pravděpodobnost je rovna $š(n)/n!$
    - S_n … množina všech permutací
    - $A_i = \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i\}$
    - $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ … (množina všech „špatných“ permutací)
    - musíme vyjádřit velikosti průniků
        - permutací s k pevnými body je $(n-k)!$
        - (protože permutuji všechny prvky kromě těch pevných)
    - dosazením do principu inkluze a exkluze vyjde $|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)!$
        - $\binom{n}{k}$ vyplývá z počtu prvků druhé sumy
        - $\binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$
    - $|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! \cdot \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!}$
    - $|A| = n!(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!})$
    - $š(n) = n! - |A| = n! \cdot (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!})$
        - závorka konverguje k e^{-1}
        - závorka odpovídá pravděpodobnosti v problému šatnářky
    - $š(n) = n! \cdot \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$
    - pravděpodobnost … $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1}$
- Věta: Odhad faktoriálu: $n^{n/2} \leq n! \leq ((n+1)/2)^n$
    - věta: Pro každé $n \geq 1$ platí $n^{\frac{n}{2}} \leq n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$.
    - lemma: AG nerovnost $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
        - $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$
        - $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$
        - $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
        - $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
    - důkaz
        - $(n!)^2$ lze přerovnat jako $(1 \cdot n)(2 \cdot (n-1)) \ldots ((n-1) \cdot 2)(n \cdot 1)$
        - to se rovná $\prod_{i=1}^n i(n+1-i)$

- zvolíme-li v AG nerovnosti $a = i, b = n + 1 - i$, dostáváme
- $\sqrt{i(n+1-i)} \leq \frac{i+n+1-i}{2} = \frac{n+1}{2}$
- z toho vyplývá

$$n! = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{i(n+1-i)} \leq \prod_{i=1}^{n} \frac{n+1}{2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

- pro důkaz druhé nerovnosti uvažme součin $i(n+1-i)$
- pro $i = 1$ a $i = n$ je roven n
- pro ostatní i máme součin dvou čísel, z nichž větší je alespoň $\frac{n}{2}$ a menší je alespoň 2, tedy součin je také nejméně n
- platí tedy $i(n+1-i) \geq n$
- tudíž

$$(n!)^2 = \prod_{i=1}^{n} i(n+1-i) \geq \prod_{i=1}^{n} n = n^n$$

- tedy platí $n! \geq n^{\frac{n}{2}}$

- Věta: Odhad kombinačního čísla: $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq n^k$
  - horní odhad zřejmý z toho, že kombinační číslo lze zapsat jako $\frac{n^k}{k!}$
  - dolní odhad dokážeme pomocí $\binom{n}{k} = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{k-i}$
  - $\frac{n-i}{k-i} \geq \frac{n}{k}$, což dokážeme:
  - $kn - ki \geq kn - in$
  - $in \geq ki$
  - $n \geq k$, což platí
- Věta: Odhad prostředního kombinačního čísla: $4^n/(2n+1) \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$
  - věta: $\frac{4^n}{2n+1} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$
  - kombinačních čísel v jednom řádku Pascalova trojúhelníku je $2n + 1$
  - odhadujeme prostřední – tedy největší z nich

- $\frac{4^n}{2n+1}$ je průměr všech kombinačních čísel v řádku
- 4^n je jejich součet

Grafy

- Definice: Graf, vrchol, hrana, V(G), E(G)
  - Graf je (V, E), kde V je konečná neprázdná množina vrcholů a $E \subseteq \binom{V}{2}$ je množina hran.
  - Lze značit jako $G = (V, E)$. Potom $V(G)$ je množina vrcholů a $E(G)$ je množina hran.
- Definice: Standardní grafy: úplný, prázdný, cesta, kružnice
  - úplný graf K_n
    - $V(K_n) := [n]$
    - $E(K_n) := \binom{V(K_n)}{2}$
  - prázdný graf E_n
    - $V(E_n) := [n]$
    - $E(E_n) = \emptyset$
  - cesta P_n
    - $V(P_n) := \{0, \dots, n\}$
    - $E(P_n) := \{\{i, i+1\} \mid 0 \leq i < n\}$
    - délka cesty se měří v počtu hran
  - kružnice/cyklus C_n
    - $n \geq 3$
    - $V(C_n) := \{0, \dots, n–1\}$
    - $E(C_n) := \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \leq i < n\}$
- Definice: Bipartitní graf, úplný bipartitní graf
  - bipartitní graf
    - partity grafu – jednotlivé „strany“
    - Df: Graf (V, E) je bipartitní $\equiv \exists L, P \subseteq V$ t. ž.:
      - $L \cup P = V$
      - $L \cap P = \emptyset$
      - $\forall e \in E : |e \cap L| = 1 \quad (\wedge\ |e \cap P| = 1)$

- nebo $E(G) \subseteq \{\{x, y\} \mid x \in L, y \in P\}$
- úplný bipartitní $K_{m,n}$
  - každý prvek nalevo je spojený s každým napravo
  - prvky na jedné straně mezi sebou nejsou spojeny
- Definice: Isomorfismus grafů
  - grafy jsou izomorfní $\equiv$ existuje bijekce, která zachovává vlastnost být spojen hranou
  - v podstatě stačí přejmenovat vrcholy a dostaneme dva stejné grafy
  - značení $\cong$
  - $\cong$ je ekvivalence na libovolné množině grafů
    - neexistuje množina všech grafů (protože neexistuje množina všech množin)
- Definice: Stupeň vrcholu, k-regulární graf, skóre grafu
  - stupeň vrcholu – počet hran, kterých se účastní daný vrchol
  - graf je k-regulární, pokud je stupeň všech vrcholů grafu roven k
  - skóre grafu = posloupnost stupňů vrcholů (až na pořadí) → jakmile dvěma grafům vyjde jiné skóre, nemohou být izomorfní
- Věta: Vztah mezi součtem stupňů a počtem hran, princip sudosti
  - věta: Pro každý graf (V, E) platí $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$.
  - důkaz: každá hrana spojuje dva vrcholy (do součtu stupňů přispívá 2×)
  - důsledek: princip sudosti
    - součet stupňů je sudý $\implies$ počet vrcholů lichého stupně je sudý
- Věta o skóre
  - věta: Posloupnost $D = d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ pro $n \geq 2$ je skóre grafu $\iff$ $D' = d'_1, \ldots, d'_{n-1}$ je skóre grafu $\land\ 0 \leq d_n \leq n - 1$.
    - přičemž $d'_i = \begin{cases} d_i & \text{pro } i < n - d_n \\ d_i - 1 & \text{pro } i \geq n - d_n \end{cases}$
    - poznámka: pro $n = 1$ je posloupnost D skóre $\iff$ $d_1 = 0$
  - důkaz $\impliedby$

- předpokládám existenci G'
- vytvořím G doplněním vrcholu v_n a hran k d_n posledním vrcholům v grafu G'
- tak vznikne graf G se skórem D

- důkaz $\implies$
  - předpokládejme, že D je skóre grafu
  - uvažme množinu $\mathcal{G}$ všech grafů se skórem D
  - pomocné tvrzení: v množině $\mathcal{G}$ existuje graf G_0, v němž je vrchol v_n spojen s posledními d_n vrcholy
  - stačí dokázat pomocné tvrzení
  - pokud $d_n = n - 1$ (tedy v_n je spojen se všemi ostatními vrcholy), vyhovuje pomocnému tvrzeni kterýkoliv graf z $\mathcal{G}$ a jsme hotovi
  - jinak definujeme $j(G)$, což je index toho z vrcholů nespojených s v_n, který má největší index
  - buď G_0 graf, pro něž je $j(G)$ nejmenší možné
  - dokážeme, že $j(G_0) = n - d_n - 1$
  - pro spor předpokládejme, že $j > n - d_n - 1$
  - vrchol v_n je spojen s d_n vrcholy, takže musí existovat $i < j$ takové, že v_i je spojen s v_n
  - vzhledem k tomu, že $\deg(v_i) \leq \deg(v_j)$, existuje vrchol v_k, který je spojený hranou s v_j, ale nikoli s v_i
  - lze vytvořit G', kde přepneme hrany
    - v G_0 jsou spojeny vrcholy s indexy $j, k; i, n$
    - v G' tyto hrany nahradíme hranami $j, n; i, k$
    - skóre zůstane zachováno, ale $j(G')$ je nižší než $j(G_0)$, což je spor

- Definice: Podgraf, indukovaný podgraf
  - graf $G' = (V', E')$ je podgrafem grafu $G = (V, E)$ (značíme $G' \subseteq G$) $\equiv V' \subseteq V \wedge E' \subseteq E$
  - graf $G' = (V', E')$ je indukovaným podgrafem grafu $G = (V, E)$ $\equiv V' \subseteq V \wedge E' = E \cap \binom{V'}{2}$

    - „podgraf indukovaný množinou vrcholů"
    - $G[A] := (A, E(G) \cap \binom{A}{2})$, kde $A \subseteq V(G)$
- Definice: Cesta, kružnice, sled a tah v grafu
  - cesta v grafu
    - v grafu existuje podgraf izomorfní s P_n pro nějaké n
      - $G' \subseteq G : G' \cong P_n$
    - v grafu existuje určitá posloupnost navzájem různých vrcholů a hran
      - $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n)$
      - $v_0, \ldots, v_n$ jsou navzájem různé vrcholy
      - $e_1, \ldots, e_n$ jsou hrany
      - $\forall i : e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$
  - kružnice v grafu
    - v grafu existuje podgraf izomorfní s C_n pro nějaké n
      - $G' \subseteq G : G' \cong C_n$
    - v grafu existuje posloupnost navzájem různých vrcholů a hran
      - $(v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots, v_{n-1}, e_{n-1}, v_0)$
      - $v_0, \ldots, v_{n-1}$ jsou navzájem různé vrcholy
      - $e_0, \ldots, e_{n-1}$ jsou hrany
      - $\forall i : e_i = \{v_i, v_{(i+1) \bmod n}\}$
  - sled v grafu (walk) – můžou se opakovat vrcholy i hrany
    - $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n)$
    - $\forall i : e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$
  - tah v grafu – můžou se opakovat vrcholy, hrany ne
- Definice: Souvislý graf, relace dosažitelnosti (ekvivalence), komponenty souvislosti
  - graf G je souvislý $\equiv \forall u, v \in V(G)$: existuje cesta v G s krajními vrcholy u, v
  - dosažitelnost v G je relace $\sim$ na $V(G)$ t. ž. $u \sim v \equiv$ existuje cesta v G s krajními vrcholy u, v
    - relace $\sim$ je ekvivalence

        - tranzitivita se dokazuje pomocí dvou posloupností vrcholů $x \sim y$ a $y \sim z$ a následně zvolení nejzazšího vrcholu z posloupnosti $y \sim z$, který je obsažen v posloupnosti $x \sim y$ a v tomto vrcholu se posloupnosti slepí (přičemž části za ním v první posloupnosti a před ním v druhé posloupnosti se ustřihnou)
    - komponenty souvislosti jsou podgrafy indukované třídami ekvivalence $\sim$
        - komponenty jsou souvislé
        - graf je souvislý $\iff$ má 1 komponentu
- Věta: Dosažitelnost sledem je totéž jako dosažitelnost cestou
    - lemma: $\exists$ cesta mezi $u, v \iff \exists$ sled mezi u, v
    - důkaz $\implies$ triviální
    - důkaz $\impliedby$
        - uvažme sled S
        - kdyby se ve sledu neopakovaly vrcholy, je to cesta
        - pokud $v_k = v_l$, kde $k < l$, vyřízneme část sledu mezi nimi → stále máme sled, který je kratší než ten původní
        - opakujeme, dokud S není cesta
- Definice: Matice sousednosti
    - matice sousednosti $A(G)$ grafu G
    - matice $n \times n$ nul a jedniček
    - při očíslování vrcholů $v_1, \ldots, v_n \in V(G)$
    - $A_{ij} := [\{v_i, v_j\} \in E]$
        - definice: indikátor $[\psi]$ je 0/1 podle platnosti výroku ψ
        - tzn. $A_{ij} = 1$, pokud spolu v_i, v_j tvoří hranu (jinak 0)
    - A je symetrická, součty řádků/sloupců jsou stupně vrcholů
- Věta: Počet sledů délky k lze získat z k-té mocniny matice sousednosti
    - lemma: $A^t_{ij} =$ # sledů délky t z v_i do v_j
    - důkaz: indukcí podle t
        - $t = 1$ … hrana = sled délky 1
        - $t \to t + 1$

        - $A_{ij}^{t+1} = (A^t A)_{ij} = \sum_k A_{ik}^t A_{kj}$
            - A_{ik}^t ... (z IP) počet sledů délky t z v_i do v_k
            - A_{kj} ... tvoří v_k, v_j hranu?
        - suma se tedy rovná součtu počtu sledů délky t z v_i do v_k pro ta k, kde v_k, v_j tvoří hranu
        - to se rovná počtu sledů délky $t+1$ z v_i do v_j
- Definice: Vzdálenost v grafu (grafová metrika)
    - vzdálenost (grafová metrika) v souvislém grafu G
    - $d_G : V^2 \to \mathbb{R}$
    - $d_G(u, v) :=$ min. z délek (počtu hran) všech cest mezi u, v
    - vlastnosti metriky (funkce je metrika = chová se jako vzdálenost)
        - $d_G(u, v) \geq 0$
        - $d_G(u, v) = 0 \iff u = v$
        - platí trojúhelníková nerovnost $d_G(u, w) \leq d_G(u, w) + d_G(w, v)$
        - $d_G(v, u) = d_G(u, v)$
- Věta: Trojúhelníková nerovnost pro vzdálenost
    - $\forall u, v, w \in V(G) : d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$
- Definice: Grafové operace: přidání/odebrání vrcholu/hrany, dělení hrany, kontrakce hrany
    - přidání vrcholu, přidání hrany, smazání hrany – vždy pouze úprava odpovídající množiny
    - odebrání vrcholu – musím odebrat odpovídající hrany
        - výsledný graf je podgraf indukovaný množinou všech vrcholů bez toho odebíraného
            - $G - v = G[V \setminus \{v\}]$
    - dělení hrany (pomocí nového vrcholu): G % e
        - $G\%e = (V \cup \{x\}, E \setminus \{\{u, v\}\} \cup \{\{u, x\}, \{v, x\}\})$
    - kontrakce hrany: G.e
        - z vrcholů odebereme u, v, přidáme x
        - z hran odebereme hranu u, v, v hranách s u nebo v nahradíme daný vrchol vrcholem x

- Definice: Otevřený a uzavřený eulerovský tah
  - eulerovský tah obsahuje všechny vrcholy a hrany grafu
  - tah může být uzavřený (končí, kde začal), nebo otevřený
  - graf je eulerovský $\equiv$ existuje v něm uzavřený eulerovský tah
- Věta o existenci uzavřeného eulerovského tahu
  - věta: graf G je eulerovský $\iff$ G je souvislý a každý jeho vrchol má sudý stupeň
  - důkaz $\implies$
    - souvislost plyne z dosažitelnosti libovolných dvou vrcholů po eulerovském tahu (tah je speciální případ sledu – když někde vede sled, tak tam vede i cesta)
    - kdykoliv jsme vrchol navštívili, vstupujeme a vystupujeme do něj po jiných hranách (hrany incidentní s v rozdělíme do disjunktních dvojic $\implies$ $\deg(v)$ je sudý)
  - důkaz $\impliedby$
    - uvážíme nejdelší tah T (respektive jeden z nejdelších tahů)
    - sporem dokážeme, že T je uzavřený
      - kdyby nebyl uzavřený, obsahuje lichý počet hran incidentních s počátečním vrcholem v
      - v má sudý stupeň $\implies$ existuje nepoužitá hrana incidentní s v
      - T lze prodloužit o nepoužitou hranu $\implies$ existuje delší tah $\lightning$
    - sporem dokážeme, že T obsahuje všechny hrany
      - kdyby pro nějaké u tah T neobsahoval hranu $\{u, v\}$
        - (vrchol v nemusí být na tahu T)
      - při nějakém průchodu vrcholem u lze uzavřený tah rozpojit a na jeho konec přidat hranu $\{u, v\}$, čímž vznikne delší tah $\lightning$
    - sporem dokážeme, že T obsahuje všechny vrcholy
      - mějme vrchol $v \notin T$
      - zvolíme $u \in T$ libovolně

        - graf je souvislý $\implies$ existuje cesta P mezi u, v
        - tedy musí existovat „nenakreslená“ hrana spojující „nakreslený“ a „nenakreslený“ vrchol
        - formálně $\exists r, s \in P : r \in T, s \notin T, \{r, s\} \in E(G)$
        - to je stejná situace jako v předchozím sporu ↯
- Definice: Orientovaný graf, podkladový graf, vstupní a výstupní stupeň, vyváženost vrcholu
    - orientovaný graf … $(V, E) : E \subseteq V^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in V\}$
        - nepovolíme smyčky (v podstatě zakážeme diagonálu na relaci)
    - podkladový graf je neorientovaný graf založený na tom původním orientovaném
        - pro orientovaný $G = (V, E)$ existuje podkladový $G^0 = (V, E^0)$, kde $\{u, v\} \in E^0 \equiv (u, v) \in E \vee (v, u) \in E$
    - vstupní a výstupní stupeň $\deg^{\text{in}}, \deg^{\text{out}}$ (hrany vedoucí do vrcholu / z vrcholu)
    - vrchol je vyvážený $\equiv \deg^{\text{in}}(v) = \deg^{\text{out}}(v)$
    - graf je vyvážený $\equiv$ všechny vrcholy jsou vyvážené
    - součet vstupních stupňů = součet výstupních stupňů = počet hran
- Definice: Silná a slabá souvislost orientovaných grafů
    - orientovaný graf je slabě souvislý $\equiv$ jeho podkladový graf je souvislý
    - o. graf je silně souvislý $\equiv$ existuje orientovaná cesta mezi každými dvěma vrcholy
    - silná souvislost $\implies$ slabá souvislost
- Věta: Uzavřené eulerovské tahy v orientovaných grafech
    - věta: pro orientovaný graf G platí: (1) G je vyvážený a slabě souvislý $\iff$ (2) G je eulerovský $\iff$ (3) G je vyvážený a silně souvislý
    - důkaz
        - $3 \implies 1 \quad \checkmark$

- $2 \implies 3$
  - vyváženost – hran dovnitř je v každém vrcholu stejně jako hran ven
  - silná souvislost – pro každou dvojici vrcholů existuje orientovaný tah $u \to v \implies$ existuje orientovaná cesta $u \to v$
- $1 \implies 2$
  - stejný princip jako u věty o existenci uzavřeného eulerovského tahu v neorientovaném grafu
  - sudý stupeň vrcholu v podstatě odpovídá vyváženosti vrcholu

Stromy

- Definice: Strom, les, list
  - strom je souvislý graf bez kružnic (= acyklický)
  - les je acyklický graf
  - list je vrchol stupně 1
    - strom o jednom vrcholu nemá žádný list
- Lemma o koncovém vrcholu
  - lemma: Každý strom s aspoň 2 vrcholy má aspoň 1 list (respektive aspoň dva listy).
  - důkaz
    - nechť P je nejdelší cesta ve stromu
    - dokážeme, že koncové vrcholy cesty P jsou listy
    - kdyby z koncového vrcholu v vedla hrana do vrcholu, který neleží na cestě P, dala by se cesta P o tuto hranu prodloužit, což by byl spor s tím, že jde o nejdelší cestu
    - kdyby z koncového vrcholu v vedle hrana do vrcholu, který leží na cestě P, byla by v grafu kružnice, což by byl spor s acykličností stromu
    - tudíž musí být oba koncové vrcholy listy
- Lemma o trhání listů

- lemma: Je-li v list grafu G, pak G je strom, právě když $G - v$ je strom.
- důkaz $\implies$
  - $G - v$ je souvislý, protože pokud mezi dvěma vrcholy existovala cesta v G, tak existuje i v $G - v$, neboť list nikdy není vnitřním vrcholem cesty
  - $G - v$ je acyklický, protože odstraněním vrcholu a hrany nemůže vzniknout kružnice
    - jiná formulace: kdyby $C \subseteq G - v \subseteq G$, pak $C \subseteq G$ (kružnice by existovala v původním grafu, což by byl spor)
- důkaz $\impliedby$
  - G je souvislý, protože přidáním listu nerozbiju cestu a díky tranzitivitě dosažitelnosti je nový list v dosažitelný ze všech vrcholů grafu stejně jako jeho soused s, ke kterému jsme v připojili
  - G je acyklický, protože list se nemůže účastnit kružnice, takže pokud $G - v$ neměl kružnici, tak ani G nemá kružnici

- Věta: Pět ekvivalentních charakteristik stromu
  - pro graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:
    1. G je souvislý a acyklický (strom)
    2. mezi vrcholy u, v existuje právě jedna cesta (jednoznačně souvislý)
    3. G je souvislý a po smazání libovolné jedné hrany už nebude souvislý (minimální souvislý)
    4. G je acyklický a po přidání libovolné jedné hrany vznikne cyklus (maximální acyklický)
    5. G je souvislý a platí pro něj Eulerova formule $|E(G)| = |V(G)| - 1$
  - důkaz
    - $1 \implies 2$
      - indukcí otrháváním listů
      - IP: $G - l$ je strom $\implies$ $G - l$ je jednoznačně souvislý

        - dokážeme, že G je jednoznačně souvislý
        - přidání listu nevytvoří nové cesty mezi vrcholy, které byly už v $G - l$, protože list nemůže být vnitřním vrcholem cesty
        - každá cesta do l vede přes souseda s
        - jelikož v původním grafu do souseda existovala právě jedna cesta mezi libovolným v a sousedem s, musí existovat právě jedna cesta mezi libovolným v a listem l
            - existuje bijekce mezi l, v-cestami v G a s, v-cestami v $G - l$
    - $1 \implies 3$
        - podobná indukce
        - $G - l$ je mimimální souvislý
        - minimální souvislost je zachována
            - když zruším hranu s, l, tak se to rozpadne
            - když zruším jinou hranu, tak se to rozpadne taky, protože $G - l$ by se rozpadlo a (nově přidaný) list není vrcholem žádné cesty
    - $1 \implies 4$
        - opět indukce
        - když přidám hranu mezi vrcholy v $G - l$, tak to řeší IP
        - když přidám hranu mezi l a vrcholem v $G - l$, tak vzniká cyklus
            - protože G je souvislý, tudíž mezi l a libovolným jiným vrcholem už nějaká cesta existuje
    - $1 \implies 5$
        - indukcí podle $n := |V(T)|$
        - $n = 1 \quad 0 = |E(T)| = |V(T)| - 1 = 1 - 1$
        - $n \to n + 1$
            - T je strom na $n + 1$ vrcholech
            - T má list
            - $T' := T - l$ je strom na n vrcholech

        - z IP: $|E(T')| = n - 1$
        - vrácení l zvýší počet hran i vrcholů o 1
        - takže $|E(T)| = |E(T')| + 1 = n = (n+1) - 1 \quad \square$
- $2 \implies 1$
    - obměnou, tedy $\neg 1 \implies \neg 2$
    - když graf není souvislý, tak není jednoznačně souvislý
    - když graf není acyklický, tak má kružnici, přičemž mezi vrcholy na kružnici neexistuje jednoznačná cesta
- $3 \implies 1$
    - obměnou, tedy $\neg 1 \implies \neg 3$
    - když graf není souvislý, tak není minimální souvislý
    - když má kružnici, tak není minimální souvislý, protože můžu odstranit hranu na kružnici a souvislost se zachová
- $4 \implies 1$
    - obměnou, tedy $\neg 1 \implies \neg 4$
    - když není acyklický, není maximální acyklický
    - když není souvislý, můžu přidat hranu (most) a nevytvořím kružnici, takže graf nemohl být maximální acyklický
- $5 \implies 1$
    - dokážeme, že souvislý graf splňující Eulerovu formuli má list
        - součet stupňů je roven dvojnásobku počtu hran
        - $\sum \deg(v_i) = 2|E| = 2n - 2$ (z Eulerovy formule)
        - průměrný stupeň $= \frac{2n-2}{n} < 2$
        - graf je souvislý a netriviální, takže alespoň jeden vrchol musí mít stupeň 1 $\implies$ graf má list
    - důkaz indukcí podle $n := |V(G)|$
        - $n = 1$ platí triviálně (graf je strom, takže implikace platí)
        - $n \to n + 1$

        - mějme graf G, který splňuje (5) a má list v – viz výše
        - $G - v$ pořád splňuje (5)
        - podle IP je $G - v$ strom
        - $\implies G$ je strom
- Definice: Kostra grafu
    - kostra grafu je podgraf, který obsahuje všechny vrcholy původního grafu a je to strom
- Věta: Graf má kostru, právě když je souvislý.
    - lemma: G má kostru $\iff G$ je souvislý
    - $\implies$
        - kostra je strom, strom je souvislý, každé dva vrcholy jsou spojené cestou
        - kostra je podgrafem G, takže tyto cesty existují i v G, tudíž i G je souvislý
    - $\impliedby$
        - G je souvislý
        - když je acyklický, tak mám kostru
        - když není acyklický, tak odebírám hrany na cyklech tak dlouho, dokud není acyklický, čímž dostanu kostru

Rovinné kreslení grafů

- Definice: Rovinné nakreslení grafu a jeho stěny (neformálně)
    - (nakreslení grafu, aby se hrany nekřížily)
    - vrcholy = body v rovině (navzájem různé)
    - hrany = křivky, které se neprotínají a jejich společnými body jsou jejich společné vrcholy
        - definice křivky
            - $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$
            - spojitá, prostá
            - = oblouk

- stěny nakreslení
    - části, na které nakreslení grafu rozděluje rovinu
    - stěnou je i vnější stěna (zbytek roviny)
    - hranice stěny – skládá se z hran
    - hranice stěny je nakreslení uzavřeného sledu
- Definice: Rovinný graf, topologický graf
  - graf je rovinný, pokud má alespoň jedno rovinné nakreslení
  - topologický graf je uspořádaná dvojice (graf, nakreslení)
- Příklad: K_5 a $K_{3,3}$ nejsou rovinné.
  - K_5 – nakreslíme K_4 (jeden vrchol doprostřed, ostatní kolem něj) a hledáme, kam umístit pátý vrchol (zjistíme, že to nejde)
  - podobně $K_{3,3}$
  - lze dokázat pomocí vět o maximálních počtech hran
- Věta: Hranice stěny je nakreslením uzavřeného sledu (bez důkazu).
- Definice: Stereografická projekce
  - máme rovinu, na ní je položená sféra (koule) tak, že se jí dotýká právě v jednom bodě (ten označím jako jižní pól)
  - vedu polopřímku ze severního pólu skrz promítaný bod, průsečík s rovinou dává obraz daného bodu
  - tak dostávám spojitou bijekci mezi sférou (bez severního pólu) a $\mathbb{R}^2$
- Věta: Graf jde nakreslit do roviny, právě když jde nakreslit na sféru.
  - důkaz: stereografická projekce je bijekce mezi sférou bez severního pólu a rovinou
- Příklad: Vnější stěnu lze zvolit.
  - vnější stěna se pozná podle toho, že obsahuje severní pól
  - když sféru pootočím, tak vnější stěnu můžu zvolit
- Kuratowského věta (bez důkazu): Graf je nerovinný, právě když obsahuje podgraf izomorfní s dělením K_5 nebo $K_{3,3}$.
- Věta: Eulerova formule pro souvislé rovinné grafy (v+f=e+2)
  - věta: Nechť G je souvislý graf nakreslený do roviny, $v := |V(G)|, e := |E(G)|, f :=$ počet stěn nakreslení, potom

$v + f = e + 2.$

- důkaz: indukcí podle e
  - $e = v - 1$ (G je strom)
    - $f = 1$
    - $v + 1 = v - 1 + 2 \quad \checkmark$
  - $e - 1 \to e$
    - mějme graf G s e hranami
    - zvolím si libovolnou hranu x na kružnici
    - $G' := G - x$
    - $v' = v, \quad e' = e - 1, \quad f' = f - 1$
    - z IP: $v' + f' = e' + 2$
    - po dosazení: $v + f - 1 = e - 1 + 2$
    - k oběma stranám přičteme jedničku
    - $v + f = e + 2 \quad \square$
- Věta: Maximální rovinný graf je triangulace.
  - (pokud má aspoň 3 vrcholy)
  - definice: maximální rovinný graf je rovinný graf, který přidáním libovolné hrany přestane být rovinný
  - G musí být souvislý – kdyby nebyl, tak můžu spojit komponenty (pomocí vrcholů na hranici stěny, v níž leží komponenta) a graf nepřestane být rovinný, což je spor s maximální rovinností
  - hranicí stěny je kružnice $\implies$ je to $\triangle$
    - kdyby nebyl, tak na kružnici jsou nesousední vrcholy, které můžu spojit a graf nepřestane být rovinný
  - hranicí stěny není kružnice
    - nějaký vrchol na hranici se opakuje
    - tento vrchol můžu odstranit → hranice se rozpadne na komponenty → vrcholy v různých komponentách můžu spojit bez ztráty rovinnosti
- Věta: Maximální počet hran rovinného grafu
  - počet hran maximálního rovinného grafu
    - každá stěna přispěje třemi hranami

- každá hrana patří ke dvěma stěnám
    - počítáme „strany hran“: $3f = 2e$
    - $f = \frac{2}{3}e$
    - $v + \frac{2}{3}e = e + 2$
    - $e = 3v - 6$
  - věta: V každém rovinném grafu s aspoň 3 vrcholy je $|E| \leq 3|V| - 6$.
  - důkaz
    - doplníme do G hrany, až získáme maximální rovinný G'
    - $e' = 3v - 6$ (vrcholy nepřidáváme)
    - $e \leq e' = 3v - 6$
  - důsledek
    - průměrný stupeň vrcholu v rovinném grafu je menší než 6
      - $\sum \deg(\xi) = 2e \leq 6v - 12$
      - průměrný stupeň $\leq \frac{6v-12}{v} < 6$
- Věta: V rovinném grafu existuje vrchol stupně nejvýše 5.
  - viz věta a důsledek výše
  - kdyby měly všechny vrcholy stupeň alespoň šest, tak by průměrný stupeň nemohl být ostře menší než 6
- Věta: Počet hran a vrchol nízkého stupně v rovinných grafech bez trojúhelníků
  - maximální rovinné grafy bez trojúhelníků mají stěny čtvercové, pětiúhelníkové, nebo to může být strom ve tvaru hvězdy
  - pro čtvercově stěny platí $4f = 2e$, pro pětiúhelníkové $5f = 2e$
  - obecně $4f \leq 2e \to f \leq \frac{1}{2}e$
  - $v + \frac{1}{2}e \geq e + 2$
  - $e \leq 2v - 4$
  - průměrný stupeň $\leq \frac{4v-8}{v} < 4$
  - existuje vrchol stupně max. 3

Barvení grafů

- Definice: Obarvení grafu k barvami, barevnost
  - obarvení grafu G k barvami (k-obarvení) je $c : V(G) \to [k]$ t. ž. kdykoli $\{x, y\} \in E(G)$, pak $c(x) \neq c(y)$
  - barevnost $\chi(G)$ grafu $G := \min k : \exists$ k-obarvení grafu G
  - pozorování: kdykoli $H \subseteq G$, pak $\chi(H) \leq \chi(G)$
- Příklad: Barevnost úplných grafů, cest a kružnic
  - úplné grafy ... $\chi(K_n) = n$
  - cesty ... $\chi(P_n) = 2$ pro $n \geq 1$
  - sudé kružnice ... $\chi(C_{2k}) = 2$
  - liché kružnice ... $\chi(C_{2k+1}) = 3$
- Věta: Ekvivalentní tvrzení: graf má barevnost nejvýše 2, graf je bipartitní, graf neobsahuje lichou kružnici.
  - věta: $\chi(G) \leq 2 \iff G$ je bipartitní $\iff G$ neobsahuje lichou kružnici
  - důkaz barevnosti bipartitních grafů
    - jednu partitu obarvím jednou barvou, druhou druhou barvou
    - barvy určují partity
  - důkaz barevnost $\iff$ lichá kružnice
    - $\implies$ máme dokázáno obměnou (když má lichou kružnici, nejde obarvit dvěma barvami)
    - $\impliedby$
      - kdyby G byl nesouvislý: obarvíme po komponentách
      - jinak: nechť T je kostra grafu G, pak existuje obarvení kostry (dvěma barvami)
        - sporem: kdyby existovala hrana, které tohle obarvení přiřklo stejné barvy koncových vrcholů, pak v grafu existuje lichá kružnice (spor)
        - mezi stejnobarevnými vrcholy bude cesta sudé délky, protože mají stejnou barvu a jsou ve stromě
        - tedy spojením stejnobarevných vrcholů vznikne lichá kružnice

- Věta: Barevnost ≥ klikovost
    - definice: klikovost grafu $\kappa(G)$ je maximální k takové, že v grafu jako podgraf existuje úplný graf K_k
    - $\chi(G) \geq \kappa(G)$
    - zjevně platí
- Příklad: Princip barvení indukcí: stromy jsou 2-obarvitelné, rovinné grafy 6-obarvitelné
    - barvení stromu
        - strom rozdělíme do vrstev podle vzdálenosti od kořenu v
        - $c(x) = (d(v, x) \bmod 2) + 1$
        - tvrzení: každý strom je 2-obarvitelný
        - důkaz: indukcí podle počtu vrcholů (základní případ pro 1 vrchol), postupně přidáváme (odebrané) listy, listu dáváme opačnou barvu než má vrchol, kam ho připojujeme, tedy $c(l) = 3 - c'(s)$
    - barvení rovinného grafu – viz následující věta
- Věta: Barevnost ≤ maximální stupeň + 1
    - definice: graf G je k-degenerovaný $\equiv \exists \leq$ lineární uspořádání na $V(G)$ t. ž. $\forall v \in V(G) : |\{u < v \mid \{u, v\} \in E(G)\}| \leq k$
        - vrcholy lze uspořádat tak, že z každého vrcholu doleva vede nejvýše k hran
        - vrcholy skládám zprava doleva tak, jak je odtrhávám
        - stromy 1-deg., rovinné 5-deg., rovinné bez trojúhelníků 3-deg.
        - $\Delta := \max \deg(v)$ … graf je Δ-degenerovaný
    - graf je k-degenerovaný $\implies \chi \leq k + 1$
        - barvím zleva, nejvýše k barev může být zakázáno
- Věta o 5 barvách
    - věta: Pro každý rovinný graf G platí $\chi(G) \leq 5$.
    - první důkaz: indukcí podle $|V|$
        - pro $|V| \leq 5$ triviální
        - $n - 1 \to n$

        - nechť v je vrchol s minimálním stupněm (nejvýše pět)
        - $G' := G - v$, podle IP existuje 5-obarvení c' grafu G'
        - pokud na sousedech v v obarvení c' jsou použity max. 4 barvy, tak tu pátou můžeme použít na vrchol v
        - co když má každý soused jinou barvu
            - A je maximální souvislý podgraf indukovaný vrcholy áčkové a céčkové barvy, do kterých existuje cesta ze souseda a přes vrcholy áčkové a céčkové barvy
            - pokud soused $c \notin A$
                - prohodíme barvy v A
                - tím pádem áčková barva se uvolní pro v
            - pokud soused $c \in A$
                - použiju stejný trik pro b a d
                - soused b je obalený kružnicí mezi a a c, takže nehrozí, že by byl spojený s d
        - tzv. Kempeho řetězce
    - druhý důkaz: indukcí podle $|V|$
        - máme vrchol stupně 5
        - musí existovat dva sousedi toho grafu, kteří nejsou spojeni hranou (jinak bychom dostali K_5)
        - můžu vytvořit rovinný $G' = G - v + \{x, y\}$ (nahradím vrchol hranou – bez ztráty rovinnosti)
        - můžu vytvořit rovinný $G'' = G'. \{x, y\}$ (kontrakce hrany – zachovává rovinnost)
        - G'' obarvíme indukcí → dostaneme obarvení c'' → c obarvení $G - v$ (v němž se barvy x a y rovnají) → existuje volná barva pro v
- Věta o 4 barvách (bez důkazu): Pro každý rovinný graf G platí $\chi(G) \leq 4.$

Pravděpodobnost

- Definice: Pravděpodobnostní prostor diskrétní, konečný, klasický
  - pravděpodobnostní prostor
    - Ω = množina elementárních jevů
    - $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ = množina jevů
    - $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ = pravděpodobnost
    - náš pravděpodobnostní prostor je diskrétní, konečný a klasický
  - diskrétní pravděpodobnostní prostor
    - Ω je konečná nebo spočetná (tedy spočetně nekonečná, existuje bijekce do $\mathbb{N}$)
    - $\mathcal{F} = 2^\Omega$
    - $P(J) = \sum_{x \in J} P(\{x\})$
      - stačí určit pravděpodobnosti elementárních jevů
      - tedy jev nastává, když nastane kterýkoli z jeho elementárních jevů
    - $P(\emptyset) = 0, \quad P(\Omega) = 1$
    - klasický pravděpodobnostní prostor … $P(J) = \frac{|J|}{|\Omega|}$
      - všechny elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost
    - konečný pravděpodobnostní prostor … Ω je konečná
- Definice: Jev elementární, jev složený, pravděpodobnost jevu
  - elementární jev = výsledek náhodného pokusu
  - složený jev = množina elementárních jevů
  - pravděpodobnost jevu … $P(J) = \sum_{x \in J} P(\{x\})$
- Příklad: Jev se také dá popsat logickou formulí.
  - např. $P[\text{padlo sudé číslo}]$
- Příklad: Bertrandův paradox s kartičkami
  - tři kartičky, jedna je z obou stran červená, druhá modrá, třetí má jednu stranu červenou a druhou modrou
  - vybereme náhodnou kartičku
  - otočíme ji náhodnou stranou nahoru
  - horní strana je červená

- jaká je pravděpodobnost toho, že dolní strana je také červená
  - pravděpodobnostní prostor: ČČ, ČČ, MM, MM, ČM, MČ
  - tři možnosti, z nich dvě chceme, takže $\frac{2}{3}$
- Definice: Podmíněná pravděpodobnost
  - podmíněná pravděpodobnost jevu $A \subseteq \Omega$ za podmínky $B \subseteq \Omega$, přičemž $P(B) \neq 0$
  - $P[A|B] := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
  - počítání s pravděpodobností
    - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
    - $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
    - doplněk do množiny elementárních jevů … $\bar{B}$
    - $P[A|B] \cdot P(B) = P(A \cap B)$
    - $P[A|\bar{B}] \cdot P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B})$
    - $P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = P(A)$
    - pozorování: $P[A|B] \cdot P(B) = P(A \cap B) = P(B \cap A) = P[B|A] \cdot P(A)$
- Věta o úplné pravděpodobnosti (věta o rozboru případů)
  - věta: Pro $A \in \Omega,\ B_1, \ldots, B_k$ rozklad Ω t. ž. $\forall i : P(B_i) \neq 0$ platí $P(A) = \sum_i P[A|B_i] \cdot P(B_i)$.
  - důsledek: řetězové pravidlo $P(A \cap B \cap C) = P[A|B \cap C] \cdot P(B \cap C) = P[A|B \cap C] \cdot P[B|C] \cdot P(C)$
- Bayesova věta
  - věta: Nechť A je jev s $P(A) \neq 0$, $B_1, \ldots, B_k$ rozklad Ω na jevy s $P(B_i) \neq 0$ pro všechna i. Potom $P[B_i|A] = \frac{P[A|B_i] \cdot P(B_i)}{\sum_j P[A|B_j] \cdot P(B_j)}$.
- Definice: Jevy nezávislé a po dvou nezávislé
  - nezávislost dvou jevů
    - jevy A, B jsou nezávislé $\equiv$
      - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
      - $P[A|B] \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B)$
    - $\iff P(B) = 0 \lor P[A|B] = P(A)$

- jevy jsou po 2 nezávislé, pokud pro libovolnou dvojici z množiny jevů platí, že se pravděpodobnost průniku rovná součinu pravděpodobností
    - lze zobecnit na jevy po k nezávislé
    - jevy jsou nezávislé $\equiv$ pro každé $k \geq 2$ jsou po k nezávislé
- Definice: Součin pravděpodobnostních prostorů, projekce
  - součin pravděpodobnostních prostorů $(\Omega_1, 2^{\Omega_1}, P_1)$ a $(\Omega_2, 2^{\Omega_2}, P_2)$ je $(\Omega_1 \times \Omega_2, 2^{\Omega_1 \times \Omega_2}, P)$, kde $P(A) := \sum_{(a_1,a_2)\in A} P_1(a_1) \cdot P_2(a_2)$, přičemž $A \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2$
  - jev lze promítnout na jednu z os – dostaneme hodnotu jednoho prvku z n-tice jevů
  - jevy v různých prostorech jsou navzájem nezávislé
- Definice: Náhodná veličina
  - náhodná veličina je funkce z Ω do $\mathbb{R}$
  - každému elementárnímu jevu přiřadí číselnou hodnotu
- Příklad: Logické formule s náhodnými veličinami dávají jevy.
  - např. $P[X < 3]$, kde X je počet jedniček v n hodech mincí
- Definice: Střední hodnota
  - střední hodnota náhodné veličiny X je $\mathbb{E}[X] := \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) \cdot P(\omega)$
  - v klasickém pravděpodobnostním prostoru je to aritmetický průměr $\mathbb{E}[X] = \frac{\sum X(\omega)}{|\Omega|}$
- Věta o linearitě střední hodnoty
  - věta: Nechť X, Y jsou náhodné věličiny a $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$ a $\mathbb{E}[\alpha X] = \alpha\mathbb{E}[X]$.
  - důkaz
    - $\mathbb{E}[X+Y] = \sum_{\omega\in\Omega}(X+Y)(\omega) \cdot P(\omega)$ $= \sum(X(\omega) \cdot P(\omega) + Y(\omega) \cdot P(\omega))$ $= \sum X(\omega) \cdot P(\omega) + \sum Y(\omega) \cdot P(\omega)$
    - násobení konstantou se dokáže podobně (dosazením do sumy)
- Definice: Indikátor náhodného jevu

    - indikátor jevu $\equiv$ náhodná veličina, která nabývá hodnoty 0, nebo 1, podle toho, zda daný jev nastal
- Příklad: Použití indikátorů k výpočtu střední hodnoty
    - n hodů mincí
    - $X =$ celkový počet jedniček, chceme $\mathbb{E}[X]$
    - $X_i =$ kolikrát je na i-té pozici jednička (1×/0×)
    - $X = \sum_i X_i \to \mathbb{E}[X] = \sum_i \mathbb{E}[X_i]$
    - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{2} \to \mathbb{E}[X] = \frac{n}{2}$

Různé

- Věta: Erdősovo-Szekeresovo lemma o monotónních podposloupnostech
    - lemma: Nechť $x_1, \ldots, x_{n^2+1}$ je posloupnost nazvájem různých čísel. Potom existuje vybraná podposloupnost délky $n+1$, která je ostře monotónní (rostoucí nebo klesající).
    - důkaz
        - definujme relaci $\preceq$ na množině indexů $\{1, \ldots, n^2+1\}$
        - $i \preceq j \equiv i \leq j \land x_i \leq x_j$
        - pozorování: $\preceq$ je ČU
            - řetězec je rostoucí pp. (podposloupnost)
            - antiřetězec je klesající pp.
        - z věty O Dlouhém a Širokém plyne $\alpha \cdot \omega \geq n^2 + 1$
            - nemůže nastat $\alpha \leq n \land \omega \leq n$
            - $\implies \alpha \geq n+1 \lor \omega \geq n+1$
- Příklad: Existence de Bruijnovy posloupnosti (konstrukce pomocí orientovaných eulerovských tahů)
    - neprobráno, nebude zkoušeno
- Příklad: Klasifikace platónských těles pomocí rovinných grafů
    - platónské těleso = konvexní pravidelný mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a zároveň z každého vrcholu vychází stejný počet hran

- příklad
    - vezmu osmistěn, opíšu mu sféru
    - z těžiště budu promítat vrcholy na sféru
    - vznikne rovinný graf
- hledám rovinný graf
    - každá stěna má právě k hran, $3 \leq k$
    - graf je d-regulární, $d \leq 5$
- lze sestrojit duální graf – prohodí se nám k a d
    - $3 \leq k \leq 5$
    - $3 \leq d \leq 5$
- Eulerova formule: $v + f = e + 2$
    - $kf = 2e, \quad dv = 2e$
    - vyjádříme f, v dosadíme do E. f.
    - $\frac{2e}{d} + \frac{2e}{k} = e + 2$
    - vydělím 2e
    - $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$
    - tedy pravá strana rovnice bude $\in (\frac{1}{2}, 1]$
        - z toho plyne, že $\min(d, k) = 3$
- tabulka možných parametrů – d, k vymýšlím podle podmínek, zbytek dopočítávám ze vzorců; jiná platónská tělesa nemohou existovat

d	k		e	v	f	
3	3		6	4	4	čtyřstěn
3	4		12	8	6	krychle
3	5		30	20	12	dvanáctistěn
4	3		12	6	8	osmistěn
5	3		30	12	20	dvacetistěn