

CAC 40 STOCK ANALYSE PORTFOLIO OPTIMIZATION USING VAR AND CVAR

| Presented By

| **Grégoire Sarsat**



Tables des matières

Tables des matières.....	1
1. Introduction.....	2
2. Choix des actifs.....	3
3. Optimisation du portefeuille.....	4
3.1. Outils utilisés.....	4
3.1.1. Fonctions utilisées.....	4
3.1.2. Formules utilisées.....	5
3.2. Résolution.....	5
4. Une approche différente de la VAR.....	7
4.1. Étapes pour implémenter l'Expected Shortfall (CVAR).....	7
4.2. Étapes pour implémenter le VaRSR.....	7
4.3 Résultats Obtenus.....	8
Conclusion.....	10
Bibliographie.....	11

1. Introduction

Dans des travaux précédents, nous avons étudié la distribution du capital par simulation de rendements futurs, ainsi que l'optimisation du rendement d'un portefeuille tout en respectant certaines contraintes.

Dans ce projet, nous allons fusionner ces deux approches afin de créer un environnement de travail intégré qui nous permettra d'optimiser la Value at Risk (VaR) de notre portefeuille. Pour cela, nous nous appuierons sur les simulations de rendements futurs basées sur les performances des actifs.

Nous commencerons par travailler avec un ensemble de 28 actifs principaux du CAC 40 [\[1\]](#), puis nous appliquerons un processus de sélection afin de constituer un portefeuille optimal en termes de VaR. Faute de posséder des ordinateurs quantiques nous devons nous contenter de prendre 4 actions dans notre approche par la minimisation de la corrélation. Enfin, nous analyserons les résultats obtenus avant d'explorer des scénarios avec des paramètres plus avancés que ceux pris en compte par la VaR. Notre raisonnement derrière ce travail est le fruit d'une réflexion qui a pris plusieurs jours pour mûrir, on a donc décidé de laisser le code de la première partie intacte pour pouvoir être comparé à celui de la seconde partie.

2.Choix des actifs

Nous commencerons le projet avec les 28 principaux actifs du CAC 40, car travailler sur ces actifs permet d'optimiser la gestion en réduisant la complexité tout en conservant une bonne représentativité de l'indice. Ils offrent une meilleure liquidité, avec des volumes de transactions élevés et une volatilité maîtrisée, facilitant l'exécution des ordres. Étant donné que les grandes entreprises du CAC 40 contribuent majoritairement à ses performances, cette sélection permet de capter l'essentiel des tendances du marché. Elle simplifie également l'analyse fondamentale et technique en se concentrant sur les titres les plus pertinents. Enfin, cette approche répond aux contraintes réglementaires et limite l'exposition aux actifs moins liquides et plus volatils, assurant ainsi une gestion plus efficace et sécurisée.

Dans le cadre de ce projet, nous procédons à un tri visant à identifier les quatre actifs présentant, en moyenne, la plus faible corrélation avec les autres. Les actifs sélectionnés sont Orange, Atos, Sanofi et Danone.

Ces entreprises opèrent chacune dans des secteurs distincts, Orange évolue dans les télécommunications, Atos dans les services informatiques, Sanofi dans les biotechnologies et l'industrie pharmaceutique et Danone dans l'agroalimentaire, et Sodexo dans les services. Cependant toutes ces entreprises opèrent dans des secteurs dits "défensifs", c'est-à-dire des industries qui sont moins sensibles aux cycles économiques :

- **Sanofi** : Secteur pharmaceutique, lié aux soins de santé, un domaine essentiel qui conserve une demande stable, même en période de crise économique. [2]
L'entreprise fait partie des 20 plus grandes entreprises pharmaceutiques mondiales. En 2023, les grandes entreprises pharmaceutiques, y compris Sanofi, représentaient plus de 50 % du marché mondial des médicaments, estimé à environ 1 100 milliards de dollars.
- **Danone** : Secteur alimentaire, avec des produits de consommation courante qui restent nécessaires en tout temps. [3] Danone détient une part significative du marché mondial dans les produits laitiers et la nutrition infantile. [4] On retrouvera souvent cet actif quelle que soit notre approche de choix car il a enregistré la performance la plus solide du CAC 40 sur l'an passé. [Code] cf. 1
- **Orange** : Secteur des télécommunications, un service de base indispensable qui ne subit pas de fluctuations majeures de la demande. [5]
- **Atos** : Le cas d'Atos est spécial car dans la sélection des actifs aux rendements décorrélés, l'algorithme prend des titres en baisse si tous les autres ont tendance à augmenter. L'entreprise a annoncé en octobre 2022 la scission d'une partie de son activité historique informatique et infogérance et a licencié 50 000 personnes, faisant baisser son titre de 30%. Les actionnaires n'approuvent pas ce projet le titre n'a fait que perdre en valeur depuis avec une chute de presque 90% de sa valeur en 1 an. [6] [7]

3. Optimisation du portefeuille

La VaR a été introduite dans les années 1980 par la banque Bankers Trust sur les marchés financiers américains et a été principalement démocratisée par la banque JP Morgan dans les années 1990.

La Value at Risk (VaR) représente la perte maximale qu'un investisseur pourrait subir sur la valeur d'un actif ou d'un portefeuille d'actifs financiers, avec une probabilité donnée et sur un horizon temporel spécifique.

En d'autres termes, il s'agit de la pire perte anticipée sur une période déterminée, pour un certain niveau de confiance.

La VaR peut également être interprétée comme un quantile de la distribution des pertes et profits liés à la détention d'un actif ou d'un portefeuille sur cette même période. [\[8\]](#)

3.1. Outils utilisés

Dans cette section, nous optimisons nos quatre actifs au sens de la VaR. Il s'agit des actifs ayant, en moyenne, la plus faible corrélation avec les autres composants du CAC 40 : Orange, Atos, Sanofi et Danone.

Nous devons respecter plusieurs contraintes, telles que :

1. Pour chaque scénario de rendement simulé, la perte associée (pondérée par les allocations des actifs) doit être inférieure ou égale à la variable Y (VaR), ajustée par une pénalité C (qui vaut 100), si l'actif est sélectionné, ce qui est indiqué par la variable binaire y (1 pour un scénario de perte, 0 sinon).
2. La somme des variables binaires y doit être inférieure ou égale à une fraction ε (epsilon = 5 %) du nombre total de scénarios N .
3. La somme des pondérations doit être égale à 100 %.

L'objectif est de minimiser la VaR et d'obtenir les allocations de nos actifs.

Il n'y aura pas de contraintes sur la vente à découvert, c'est-à-dire qu'elle est autorisée.

3.1.1. Fonctions utilisées

La librairie **yfinance** est un module Python permettant notamment de récupérer la base de données des prix de clôture sur une certaine période, à l'aide de la classe **yfinance.Ticker**.

La librairie **pylab** va nous permettre d'effectuer des manipulations numériques.

La librairie **PuLP** sera utilisée dans cette démarche. Il s'agit d'une bibliothèque Python permettant de définir et de résoudre des problèmes d'optimisation linéaire et mixte.

- La classe **pulp.LpVariable** dans la bibliothèque PuLP sert à définir des variables de décision dans un problème d'optimisation. Ces variables représentent les inconnues du problème que l'on cherche à déterminer en résolvant l'optimisation.
- La classe **pulp.LpProblem** dans la bibliothèque PuLP permet de définir et modéliser un problème d'optimisation linéaire, comme la minimisation de la VaR du portefeuille à l'aide de **pulp.LpMinimize**.

3.1.2. Formules utilisées

La formule pour le calcul du rendement espéré du portefeuille sera la suivante :

$$Rdt_p = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot Rdt_i$$

avec x_i la pondération de l'actif i et Rdt_i le rendement espéré de l'actif i .

La volatilité du portefeuille sera calculée de la manière suivante :

$$Var_p = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot Var(Rdt_i) + \sum_{i=1}^4 \sum_{j \neq i}^4 x_i \cdot x_j \cdot Cov(Rdt_i, Rdt_j)$$

la variance du portefeuille

$$\sigma_p = \sqrt{Var_p}$$

La décomposition de Cholesky permet d'écrire la matrice de variance-covariance V sous la forme :

$$V = L' \cdot L$$

où L est une matrice triangulaire inférieure. Sous Python, on peut utiliser la fonction `pylab.linalg.cholesky()` pour obtenir L .

La formule pour le calcul d'un vecteur scénario :

$$R = Rdt \cdot T + L$$

où Rdt est le vecteur de rendement moyen et T est un vecteur normal centré-réduit de dimension 4 (obtenu à l'aide de la fonction `pylab.normal()`).

3.2. Résolution

On obtient le tableau suivant :

Actifs	Orange	Atos	Sanofi	Danone
Rendements espérés moyens	0,0071%	-0,5620%	0,0344%	0,1105%
Volatilités	0,8806%	7,9297%	1,6257%	0,7974%
Pondérations	38,2778%	3,4331%	-4,0789%	62,3680%

Tableau récapitulatif des performances du portefeuille A du 01/10/2023 au 01/10/2024

Voici l'une des solutions possibles, avec $\gamma = 0,7897\%$. La vente à découvert n'ayant pas été interdite pour cet exercice, on s'est permis de prendre une position de $-4,0789\%$ pour Sanofi.

Le rendement quotidien espéré du portefeuille est de 0,0510 %, et la volatilité journalière est de 0,6757 %. La pondération majoritaire est attribuée à Danone avec 62,3680 %, suivie d'Orange avec 38,2778 %.

On pourrait refaire un tableau en excluant Atos, car cet actif présente un rendement négatif, ce qui ne le rend pas intéressant dans le cadre de l'investissement.

Voici les résultats obtenus :

Actifs	Orange	Atos	Sanofi	Danone
Rendements espérés moyens	0,0071%	-0,5620%	0,0344%	0,1105%
Volatilités	0,8806%	7,9297%	1,6257%	0,7974%
Pondérations	58,3571%	0,0000%	3,5758%	38,0671%

Tableau récapitulatif des performances du portefeuille B du 01/10/2023 au 01/10/2024

Nous avons un γ de 0,7482 %. Le rendement quotidien espéré du portefeuille de 0,0475 %, et une volatilité de 0,6723 %. La pondération majoritaire se trouve cette fois-ci dans Orange avec 58,3571 %, suivie de Danone avec 38,0671 %.

Nous avons respectivement une VaR de 0,7897 % et de 0,7482 % pour les portefeuilles A et B, elle indique que la perte maximale journalière, avec un certain niveau de confiance, est d'environ 0,7897 % (resp. 0,7482 %) de la valeur du portefeuille.

Cette différence de pondérations peut s'expliquer par le facteur aléatoire de la simulation des scénarios, cette concentration sur ces deux actifs est surtout due à leur faible volatilité des actifs (car moins de risque de perte importante).

Un code python avec une fonction qui classe la volatilité des actifs du CAC 40 sur une période donnée est disponible pour vérifier. [\[Code\]](#)

En changeant la période d'un an, on retrouve à chaque fois les mêmes entreprises qui ont des actifs aux rendements les moins volatils mais malheureusement moins rentables.

Cette approche basée sur la VAR permet de limiter au maximum les pertes mais une faible volatilité est malheureusement associée à une faible espérance de gains comparée aux autres actifs, surtout en période haussière. Comme expliqué dans le dernier devoir, la période 2023 - 2024 que nous avons choisie a été marquée par la diminution des pressions inflationnistes. Cela a conduit à une stabilisation des taux d'intérêt, ce qui a favorisé les actifs risqués, notamment les actions. Avec l'atténuation des craintes d'une récession mondiale post-Covid, les gestionnaires de fonds ont commencé à réorienter massivement leurs investissements vers les actions. Cette réallocation coïncidait avec la publication des résultats financiers des entreprises françaises, qui ont été exceptionnellement bons. Par effet boule de neige cela a attiré d'importants flux de capitaux étrangers, contribuant à une hausse significative des prix des actifs du CAC 40.

Ce mécanisme haussier ne synergise pas bien avec la décorrélation des actions. En plus, modifier la fenêtre de cotation aboutit simplement à un nouveau portefeuille combinant les actions les moins corrélées et les rendements les plus stables. Nous avons donc décidé d'ajouter des nouveaux paramètres pour affiner les contraintes et maximiser la rentabilité.

4. Une approche différente de la VAR

La VaR se concentre uniquement sur la minimisation des risques, sans prendre en compte le rendement attendu des actifs. Cela peut amener à sélectionner des actifs qui minimisent le risque à court terme, mais qui sont peu rentables à long terme. **L'optimisation basée uniquement sur la VaR pourrait donc conduire à un portefeuille trop conservateur.**

Dans le cadre d'une gestion de portefeuille, il est crucial de maximiser le rendement ajusté au risque, et non de simplement minimiser la perte extrême.

Une autre limite est l'absence de sous-additivité, en effet la VaR d'un portefeuille combiné peut être supérieure à la somme des VaR des sous-portefeuilles individuels. De plus, dans le cas d'un nombre fini de scénarios, la VaR est une fonction non lisse (avec dérivées continues de tous les ordres), non convexe (il existe des configurations de portefeuilles où l'ajout de certaines positions peut augmenter de façon imprévisible la VaR) et multi-extrême en ce qui concerne les positions, (plusieurs ou minima et maxima locaux) ce qui rend difficile son contrôle et son optimisation sur un grand nombre d'échantillons.

Pour résoudre cette limitation, d'autres mesures de risque plus robustes et cohérentes ont été proposées, comme l'**Expected Shortfall (ES)**, qui est sous-additive. Cette nouvelle mesure couplée au ratio de sharpe on peut obtenir un portefeuille de niveau olympique. On s'est basé sur les travaux de deux études *Robust Portfolio Optimization with Value-At-Risk Adjusted Sharpe Ratios* [9] et *ALGORITHMS FOR OPTIMIZATION OF VALUEAT-RISK* [10].

4.1. Étapes pour implémenter l'Expected Shortfall (CVAR)

La **CVaR** mesure la perte moyenne dans ces scénarios extrêmes où la perte dépasse la VaR. En d'autres termes, c'est la moyenne des pires pertes au-delà du seuil de la VaR. Elle est calculée et utilisée comme une contrainte dans l'optimisation. Le processus est basé sur la génération de plusieurs scénarios de rendement via des simulations, puis la **CVaR** est calculée comme une moyenne des pires pertes au-delà de la **VaR**. Comme ce sont des simulations, il y a beaucoup de chances qu'utiliser le même code donne des résultats différents sur la pondération. Par souci de présentation et par manque de puissance de calcul nous n'avons pas sorti tous les scénarios de pondération finale possibles.

4.2. Étapes pour implémenter le VaRSR

Le **VaR-SR** modifie la formule du **Sharpe ratio** en utilisant la **VaR** comme mesure du risque au lieu de la simple volatilité. Cela permet de prendre en compte le **risque de perte extrême** (les événements rares mais graves), plutôt que de simplement se baser sur la volatilité qui ne fait pas la distinction entre les pertes extrêmes et les fluctuations modérées.

$$VaR\ SR = ((Rp - Rf) / VAR) - \gamma$$

Avec R_p le rendement moyen du portefeuille, R_f le rendement du marché (fixé à 0 par sécurité) et γ , la CVAR

Un VaR-SR élevé signifie que le portefeuille a un rendement excédentaire important par rapport aux risques extrêmes (mesurés par la VaR). Cela indique que le portefeuille génère de bons rendements tout en étant relativement résilient aux pertes importantes.

Un VaR-SR faible signifie que, bien que le portefeuille puisse générer des rendements, il est également très exposé aux pertes extrêmes. Le portefeuille pourrait donc ne pas être optimal en termes de gestion des risques de pertes sévères.

4.3 Résultats Obtenus

On a donc modifié le code pour obtenir un outil qui compare des portefeuilles de t actifs avec le choix de choisir ces actifs en minimisant la corrélation de leur rendement ou en prenant tout simplement les t actifs avec le ratio de Sharpe le plus haut. Après la sélection, l'algorithme prend la meilleure allocation pour minimiser la Conditional Value at Risk, et donne le Var SR pour donner une idée supplémentaire à l'investisseur de la solidité du portefeuille. [\[Code\]](#) cf.3

Lorsque l'on choisit le ratio de Sharpe comme critère de choix dans la console et sélectionne 4 actifs on obtient cette répartition.

Actifs	Danone	Schneider Electric S.E.	Saint-Gobain	Michelin
Annualized Return	0,001105	0,001839	0,001803	0,00108
Volatilité	0,007974	0,015209	0,015338	0,010618
Pondération	59%	15%	10%	16%
Cvar	0,015217314			
VaRSR	0,182871			

Tableau récapitulatif des performances du portefeuille C du 01/10/2023 au 01/10/2024

Seul Danone est resté présent en raison de sa performance rentable et très peu volatile sur la période. Le portefeuille affiche un rendement quotidien espéré de 0,1179% et une volatilité journalière de 0.653%. Ces caractéristiques sont plus solides que celles du portefeuille de la partie 1 avec une rentabilité deux fois supérieure pour un niveau de risque inférieur. On peut maintenant observer le portefeuille avec les actions moins corrélées pour comparer la CVAR et la VAR ajustée au RS.

Actifs	Orange	Atos	Sanofi	Danone
Annualized Return	0,000071	-0,00562	0,000344	0,001105
Volatilité	0,008806	0,079297	0,016257	0,007974
Pondération	34%	1%	7%	58%
Cvar	0,015864347			
VaRSR	0,081133			

Tableau récapitulatif des performances du portefeuille D du 01/10/2023 au 01/10/2024

Le rendement espéré du portefeuille de la partie 1 est 0,0510 %, et la volatilité journalière est de 0,6757 %, tandis que cette nouvelle version qui minimise la moyenne des valeurs de pertes extrêmes donne un rendement espéré de 0,0624% et une volatilité de portefeuille de 0,6435%.

En comparant les deux portefeuilles on voit que le VaRSR est nettement supérieur au portefeuille qui choisit les actions avec le ratio de Sharpe. Il permet à la fois un rendement supérieur pour chaque unité de risque extrême, et prend moins de risques pour un rendement similaire à un autre portefeuille de marché. Le portefeuille D quant à lui affiche un VaRSR 0,1 points inférieur au C, ce qui signifie qu'il prend plus de risques pour générer son rendement, ou qu'il aurait des rendements relativement faibles par rapport aux risques extrêmes qu'il encourt.

De plus, la mesure de la perte moyenne au-delà de la VAR du portefeuille D est supérieure à celle du C, ce qui renforce encore plus l'approche de sélection par le ratio de Sharpe.

Enfin, on a sorti un dernier portefeuille en supprimant Atos des actions sélectionnables pour tirer le meilleur de la neutralisation du risque par la décorrélation. On obtient ce portefeuille avec Sodexo à la place.

Actifs	Orange	Sanofi	Danone	Sodexo
Annualized Return	0,000071	0,000344	0,001105	0,000813
Volatilité	0,008806	0,008806	0,007974	0,012054
Pondération	29%	6%	65%	0%
Cvar	0,016880067			
VaRSR	0,097526			

Tableau récapitulatif des performances du portefeuille E du 01/10/2023 au 01/10/2024

Le portefeuille affiche 0,6656 % de volatilité et 0,0761% de rendement. Comme on pouvait s'y attendre, la suppression de l'action à rendement négatif augmente le VaRSR mais n'en fait pas un portefeuille compétitif pour autant. Le niveau de VAR conditionnelle est même supérieur à celui des portefeuilles C et D.

Conclusion

Pour conclure, la période la plus récente de 1 an que nous avons à disposition pour le CAC 40 montre une forte tendance haussière. Cette tendance a rendu l'approche habituelle de décorrélation obsolète car l'algorithme choisit des actions qui ne suivent pas les mêmes tendances. Cependant les indicateurs plus simples comme le ratio de Sharpe capturent bien la rentabilité naturelle de certaines actions dans ce contexte de marché bullish.

L'approche via le ratio de Sharpe permet de sélectionner les actions offrant le meilleur rendement ajusté au risque, indépendamment des corrélations, ce qui devient particulièrement utile dans des phases de marché où la tendance générale est haussière. Cependant, il est important de noter que cette stratégie peut sous-estimer les risques à long terme ou en cas de retournement de marché, où les corrélations peuvent à nouveau jouer un rôle clé.

Aujourd'hui, de plus en plus de gestionnaires d'actifs privilégient l'utilisation de la CVaR plutôt que la VaR pour évaluer le risque de leurs portefeuilles. La VaR, bien qu'utile, ne prend en compte que le seuil de perte maximal à un certain niveau de confiance, ignorant ce qui se passe dans les scénarios extrêmes. En revanche, la CVaR offre une vue plus complète en capturant la perte moyenne au-delà de ce seuil, rendant l'évaluation du risque plus précise et pertinente, notamment en période de crises ou de volatilité accrue.

Son intégration dans l'optimisation des portefeuilles reflète un virage dans la gestion des risques vers une approche plus prudente et réaliste, prenant en compte les événements extrêmes. Couplée au VaRSR, qui ajuste le rendement par rapport à ce risque extrême, elle permet aux gestionnaires d'actifs de mieux comparer les portefeuilles en termes de performance ajustée aux pertes, offrant ainsi une évaluation plus robuste et pertinente des portefeuilles dans des conditions de marché imprévisibles.

Bibliographie

[1] : [Composants ^FCHI | Capital-actions CAC 40 - Yahoo Finance](#)

[2] :

<https://www.spglobal.com/ratings/en/research/articles/240124-pharmaceutical-industry-2024-credit-outlook-is-stable-as-revenue-growth-mitigates-pressures-12971972>

[3] : <https://companiesmarketcap.com/food/largest-food-companies-by-market-cap/>

[4] :

<https://www.mordorintelligence.com/industry-reports/dairy-products-market/market-share>

[5] :

<https://companiesmarketcap.com/telecommunication/largest-telecommunication-companies-by-market-cap/>

[6] : https://www.theregister.com/2024/06/26/atos_restructure_deal_fails/

[7] :

<https://www.lesechos.fr/tech-medias/hightech/la-scission-datos-est-avancee-a-lete-2023-1866218>

[8] : https://www.abcbourse.com/apprendre/19_value_at_risk.html

[9] :

https://drive.google.com/file/d/15l8tDEMUMvxHk8flzA1S-DYmryMzJkkt/view?usp=drive_link

[10] :

https://drive.google.com/file/d/1PjDCzwqYWhT4l0Tflw17jp0Lm_xo99qi/view?usp=drive_link

[Code] :

<https://colab.research.google.com/drive/1QonXhQzZwdsE09XJPYXXJVMSjNVIMYGg?usp=sharing>

Le premier code permet de classer les entreprises du CAC 40 de la plus petite à la plus grande volatilité

Le second permet de créer un portefeuille décorrélé ou l'on minimise la VAR

Le troisième permet de créer un portefeuille qui minimise la CVAR sur des actifs choisis en fonction du ratio de Sharpe ou la décorrélation en fonction du choix de l'utilisateur, 1 pour la corrélation et 2 pour le ratio de Sharpe.

NB : rajouter la ligne "pip install pulp" si le package n'est pas dans l'environnement