Développement d ’un code Navier-Stokes par une méthode de projection

Equations du problème

- Forme conservative des équations de NS

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{t}} + \dfrac{\partial \mathbf{u}^2}{\partial \mathbf{x}} + \dfrac{\partial \mathbf{uv}}{\partial \mathbf{y}} = -\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{x}} + \boldsymbol{\nu}\left(\dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}^2}\right) \\ \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{t}} + \dfrac{\partial \mathbf{uv}}{\partial \mathbf{x}} + \dfrac{\partial \mathbf{v}^2}{\partial \mathbf{y}} = -\dfrac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{y}} + \boldsymbol{\nu}\left(\dfrac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}^2}\right) \end{cases}$$

Méthode de projection

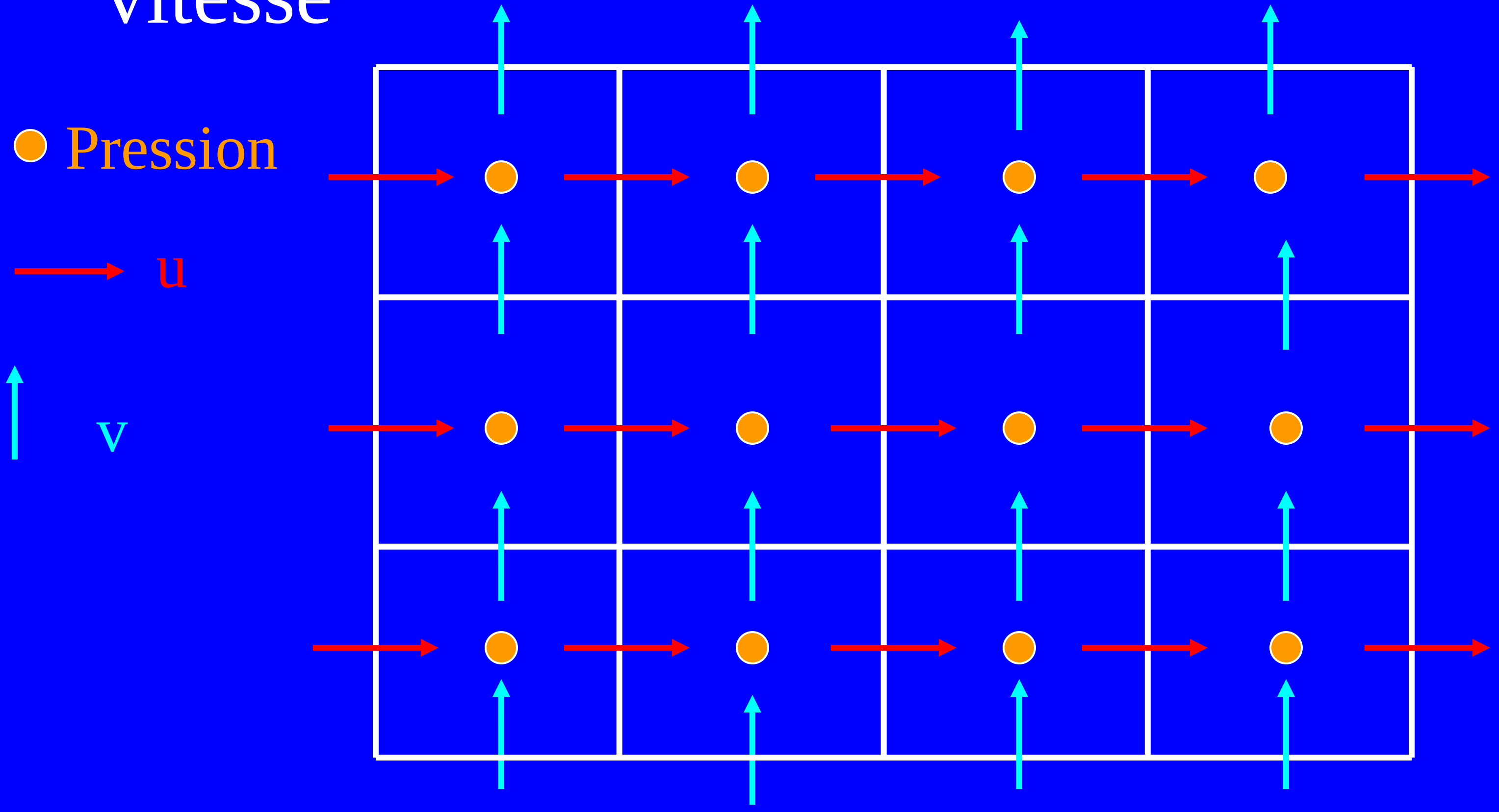
Etape de prédiction

$$\begin{cases} \dfrac{\mathbf{u}^{*}-\mathbf{u}^{n}}{\Delta t}+\nabla(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})^{n}=\nu\nabla\cdot\mathbf{D}^{n} \\ \dfrac{\mathbf{u}^{n+1}-\mathbf{u}^{*}}{\Delta t}=-\nabla p^{n+1} \end{cases}$$

Etape de correction
pour assurer la divergence
nulle

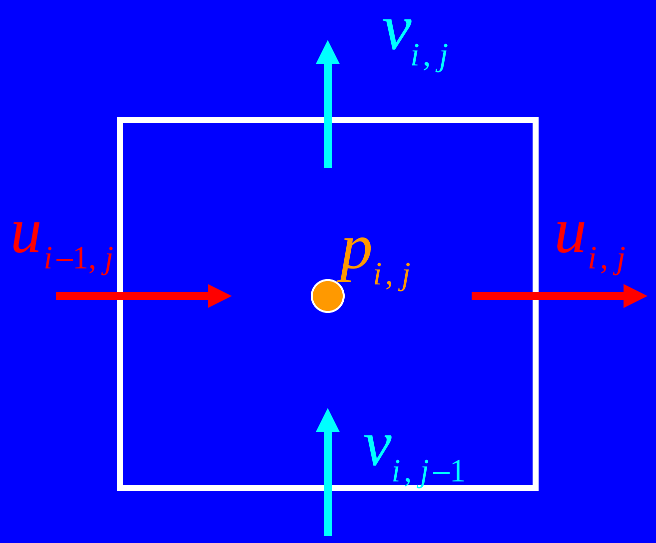
Maillages décalés

- On utilisera des maillages décalés pression-vitesse

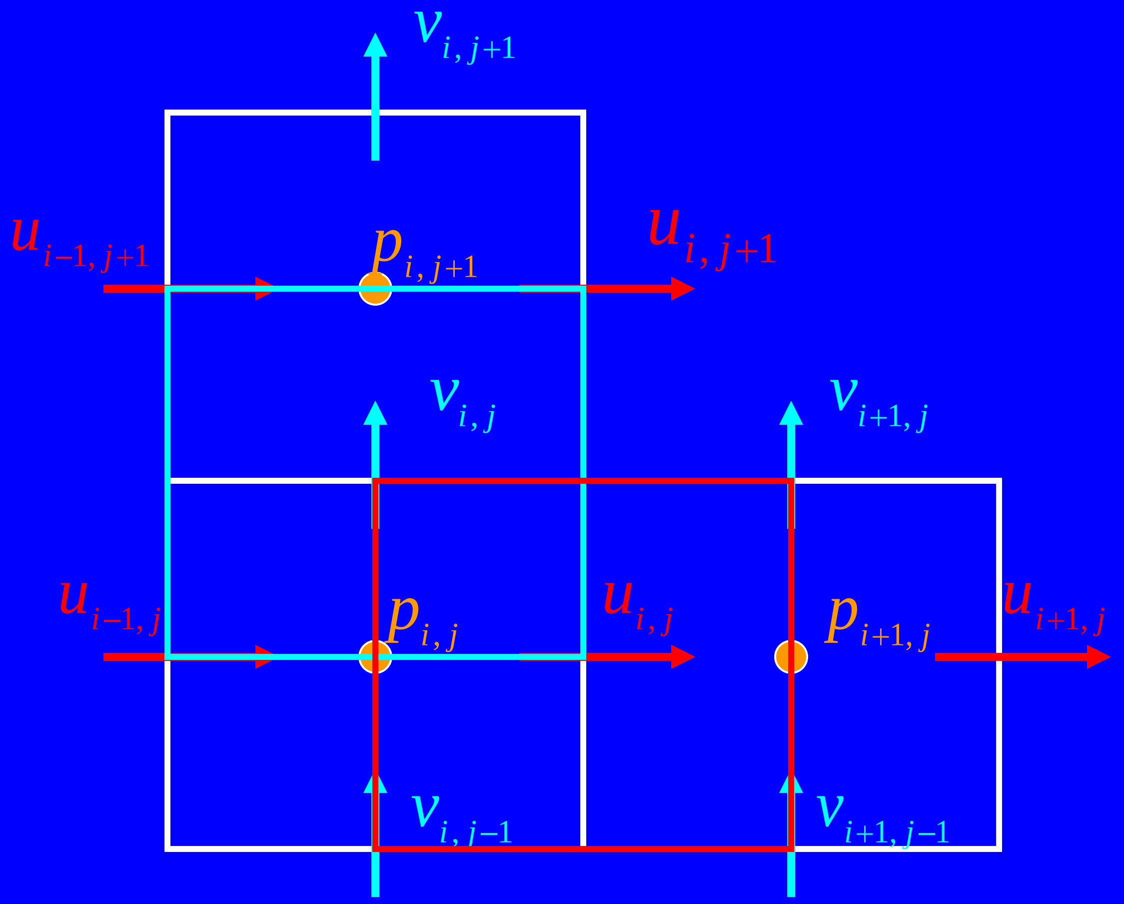


Notations pour les inconnues

- Convention pour les indices des différentes grandeurs



Approche volumes finis



Schémas pour la convection

- Forme conservative

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u\Phi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v\Phi\right) = SM \text{ avec } \begin{cases} \Phi = u \\ \Phi = v \end{cases}$$

Forme discrète avec intégration en temps explicite Euler

$$\frac{\Phi_{i,j}^{n+1}-\Phi_{i,j}^{n}}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x}\left(\tilde{u}_{i+1/2,j}\Phi_{i+1/2,j}-\tilde{u}_{i-1/2,j}\Phi_{i-1/2,j}\right)$$

$$+\frac{1}{\Delta y}\left(\tilde{v}_{i,j+1/2}\Phi_{i,j+1/2}-\tilde{v}_{i,j-1/2}\Phi_{i,j-1/2}\right)=SM$$

Avec $\tilde{u}_{i+1/2,j}$ vitesse de convection à l 'interface i+1/2,j

Avec $\tilde{v}_{i,j+1/2}$ vitesse de convection à l 'interface i,j+1/2

Avec $\tilde{u}_{i-1/2,j}$ vitesse de convection à l 'interface i-1/2,j

Avec $\tilde{v}_{i,j-1/2}$ vitesse de convection à l 'interface i,j-1/2

Equation de la vitesse u

$$\frac{\mathbf{u}_{i,j}^{n+1}-\mathbf{u}_{i,j}^{n}}{\Delta \mathbf{t}}+\frac{1}{\Delta \mathbf{x}}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2,j}\mathbf{u}_{i+1/2,j}-\tilde{\mathbf{u}}_{i-1/2,j}\mathbf{u}_{i-1/2,j}\right)$$

$$+\frac{1}{\Delta \mathbf{y}}\left(\tilde{\mathbf{v}}_{i,j+1/2}\mathbf{u}_{i,j+1/2}-\tilde{\mathbf{v}}_{i,j-1/2}\mathbf{u}_{i,j-1/2}\right)=\mathbf{SM}$$

Evaluation des vitesses de convection pour l 'équation de u

- Pour les vitesses de convection $\tilde{u}_{i+1/2,j}$ et $\tilde{u}_{i-1/2,j}$ on prendra simplement

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}+1/2,\mathbf{j}} = \frac{\mathbf{u}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} + \mathbf{u}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}+1,\mathbf{j}}}{2} \qquad \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}-1/2,\mathbf{j}} = \frac{\mathbf{u}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}-1,\mathbf{j}} + \mathbf{u}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}{\mathbf{2}}$$

- Pour les vitesses de convection $\tilde{v}_{i,j+1/2}$ et $\tilde{v}_{i,j-1/2}$ on prendra

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}+1/2} = \frac{\mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} + \mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}+1,\mathbf{j}}}{2} \qquad \tilde{v}_{i,j-1/2} = \frac{v^{n}_{i,j-1} + v^{n}_{i+1,j-1}}{2}$$

Equation de la vitesse v

$$\frac{\mathbf{v}_{i,j}^{n+1}-\mathbf{v}_{i,j}^{n}}{\Delta t}+\frac{1}{\Delta x}\left(\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2,j}\mathbf{v}_{i+1/2,j}-\tilde{\mathbf{u}}_{i-1/2,j}\mathbf{v}_{i-1/2,j}\right)$$

$$+\frac{1}{\Delta y}\left(\tilde{\mathbf{v}}_{i,j+1/2}\mathbf{v}_{i,j+1/2}-\tilde{\mathbf{v}}_{i,j-1/2}\mathbf{v}_{i,j-1/2}\right)=\mathrm{SM}$$

Evaluation des vitesses de convection pour l 'équation de v

- Pour les vitesses de convection $\tilde{v}_{i,j+1/2}$ et $\tilde{v}_{i,j-1/2}$ on prendra

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}+1/2} = \frac{\mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} + \mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}+1}}{2} \qquad \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}-1/2} = \frac{\mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}-1} + \mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}}{2}$$

- Pour les vitesses de convection $\tilde{u}_{i+1/2,j}$ et $\tilde{u}_{i-1/2,j}$ on prendra

$$\tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}+1/2,\mathbf{j}} = \frac{\mathbf{u}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}} + \mathbf{u}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}+1}}{2} \qquad \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}-1/2,\mathbf{j}} = \frac{\mathbf{u}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}-1,\mathbf{j}} + \mathbf{u}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}-1,\mathbf{j}+1}}{2}$$

Schéma numérique upwind pour u

- Sur l 'interface i+1/2,j : $$\begin{array}{l} \text{si } \tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2,j} \geq 0 \text{ alors } \mathbf{u}_{i+1/2,j} = \mathbf{u}^n_{i,j} \\ \text{sinon } \mathbf{u}_{i+1/2,j} = \mathbf{u}^n_{i+1,j} \end{array}$$
- Sur l 'interface i-1/2,j : $$\begin{array}{l} \text{si } \tilde{\mathbf{u}}_{i-1/2,j} \geq 0 \text{ alors } \mathbf{u}_{i-1/2,j} = \mathbf{u}^n_{i-1,j} \\ \text{sinon } \mathbf{u}_{i-1/2,j} = \mathbf{u}^n_{i,j} \end{array}$$
- Sur l 'interface i,j+1/2 : $$\begin{array}{l} \text{si } \tilde{\mathbf{v}}_{i,j+1/2} \geq 0 \text{ alors } \mathbf{u}_{i,j+1/2} = \mathbf{u}^n_{i,j} \\ \text{sinon } \mathbf{u}_{i,j+1/2} = \mathbf{u}^n_{i,j+1} \end{array}$$
- Sur l 'interface i,j-1/2 : $$\begin{array}{l} \text{si } \tilde{\mathbf{v}}_{i,j-1/2} \geq 0 \text{ alors } \mathbf{u}_{i,j-1/2} = \mathbf{u}^n_{i,j-1} \\ \text{sinon } \mathbf{u}_{i,j-1/2} = \mathbf{u}^n_{i,j} \end{array}$$

Schéma numérique upwind pour v

- Sur l 'interface i+1/2,j : $\text{si } \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}+1/2,\mathbf{j}} \geq 0 \text{ alors } \mathbf{v}_{\mathbf{i}+1/2,\mathbf{j}} = \mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$
  $\text{sinon } \mathbf{v}_{\mathbf{i}+1/2,\mathbf{j}} = \mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}+1,\mathbf{j}}$

- Sur l 'interface i-1/2,j : $\text{si } \tilde{\mathbf{u}}_{\mathbf{i}-1/2,\mathbf{j}} \geq 0 \text{ alors } \mathbf{v}_{\mathbf{i}-1/2,\mathbf{j}} = \mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i}-1,\mathbf{j}}$
  $\text{sinon } \mathbf{v}_{\mathbf{i}-1/2,\mathbf{j}} = \mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$

- Sur l 'interface i,j+1/2 : $\text{si } \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}+1/2} \geq 0 \text{ alors } \mathbf{v}_{\mathbf{i},\mathbf{j}+1/2} = \mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$
  $\text{sinon } \mathbf{v}_{\mathbf{i},\mathbf{j}+1/2} = \mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}+1}$

- Sur l 'interface i,j-1/2 : $\text{si } \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}-1/2} \geq 0 \text{ alors } \mathbf{v}_{\mathbf{i},\mathbf{j}-1/2} = \mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}-1}$
  $\text{sinon } \mathbf{v}_{\mathbf{i},\mathbf{j}-1/2} = \mathbf{v}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$

Schéma numérique centré pour u

- Sur l 'interface i+1/2,j : $$\mathbf{u}_{i+1/2,j} = \frac{\mathbf{u}^n_{i,j} + \mathbf{u}^n_{i+1,j}}{2}$$
- Sur l 'interface i-1/2,j : $$\mathbf{u}_{i-1/2,j} = \frac{\mathbf{u}^n_{i-1,j} + \mathbf{u}^n_{i,j}}{2}$$
- Sur l 'interface i,j+1/2 : $$\mathbf{u}_{i,j+1/2} = \frac{\mathbf{u}^n_{i,j} + \mathbf{u}^n_{i,j+1}}{2}$$
- Sur l 'interface i,j-1/2 : $$\mathbf{u}_{i,j-1/2} = \frac{\mathbf{u}^n_{i,j-1} + \mathbf{u}^n_{i,j}}{2}$$

Schéma numérique centré pour v

- Sur l 'interface i+1/2,j : $$v_{i+1/2,j} = \frac{v_{i,j}^n + v_{i+1,j}^n}{2}$$
- Sur l 'interface i-1/2,j : $$v_{i-1/2,j} = \frac{v_{i-1,j}^n + v_{i,j}^n}{2}$$
- Sur l 'interface i,j+1/2 : $$v_{i,j+1/2} = \frac{v_{i,j}^n + v_{i,j+1}^n}{2}$$
- Sur l 'interface i,j-1/2 : $$v_{i,j-1/2} = \frac{v_{i,j-1}^n + v_{i,j}^n}{2}$$

Traitement des termes visqueux

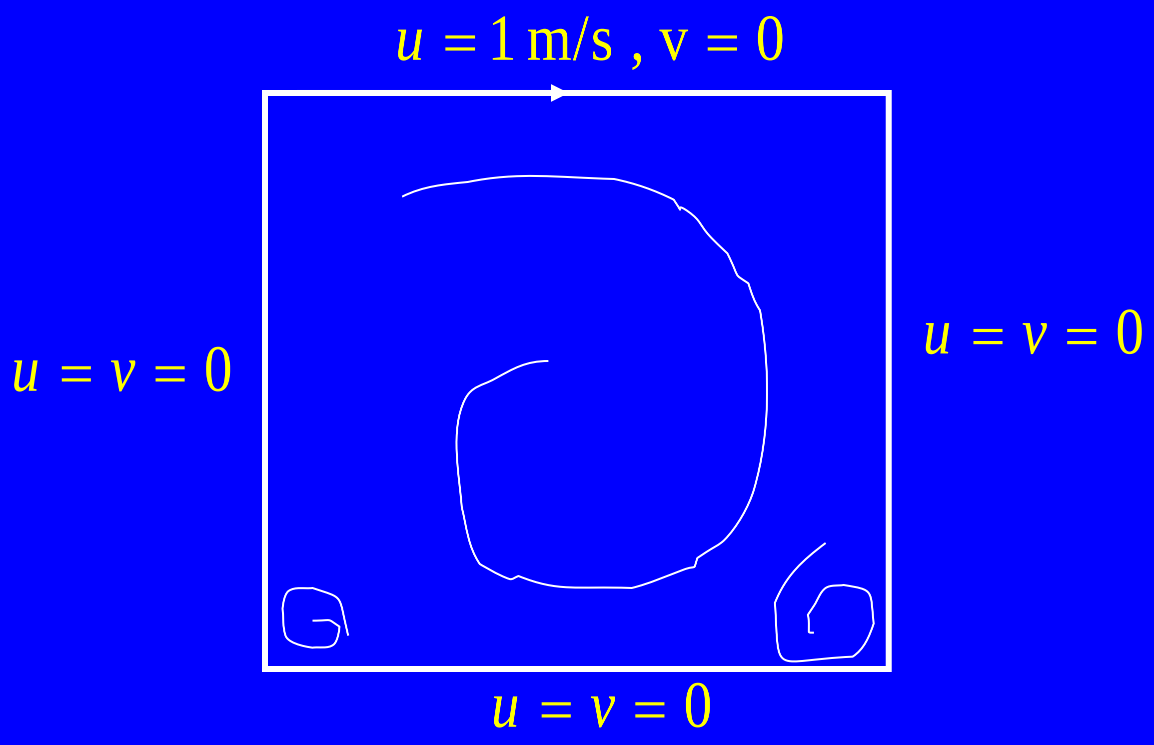
- On utilisera un schéma centré classique du second ordre :

- Pour u : $$\nu\left(\frac{u^n_{i+1,j}-2u^n_{i,j}+u^n_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right)+\nu\left(\frac{u^n_{i,j+1}-2u^n_{i,j}+u^n_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right)$$

- Pour v : $$\nu\left(\frac{v^n_{i+1,j}-2v^n_{i,j}+v^n_{i-1,j}}{\Delta x^2}\right)+\nu\left(\frac{v^n_{i,j+1}-2v^n_{i,j}+v^n_{i,j-1}}{\Delta y^2}\right)$$

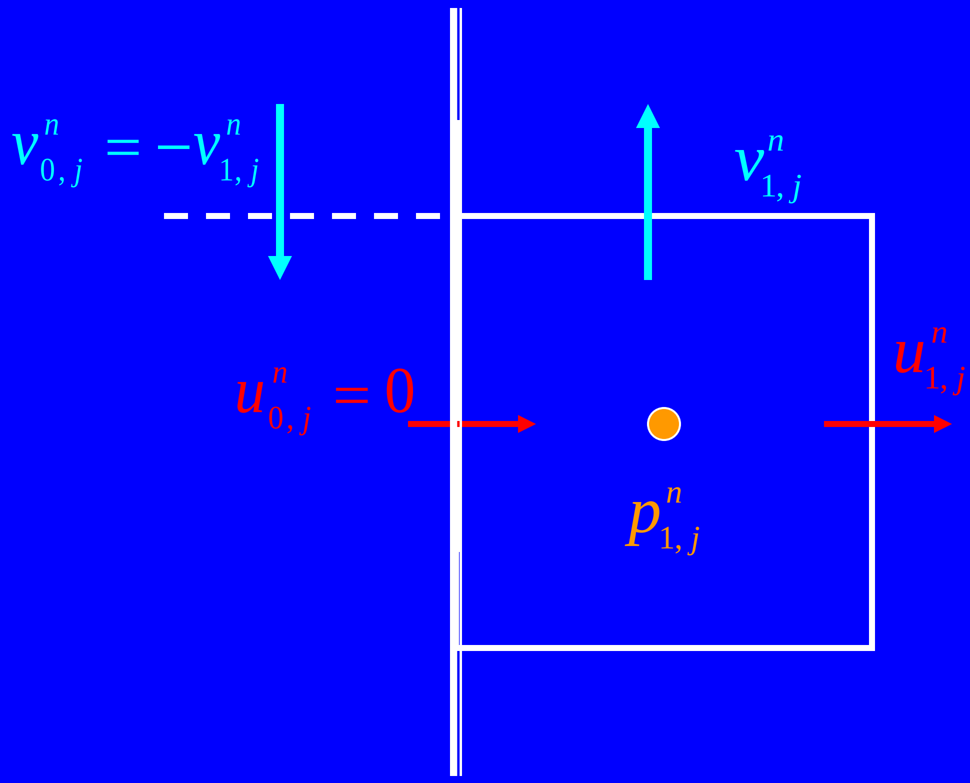
Conditions aux limites sur la vitesse

- Ici on s ’intéresse au cas de la cavité entraînée 2D de forme carrée et de 1m de coté
- Adhérence aux parois



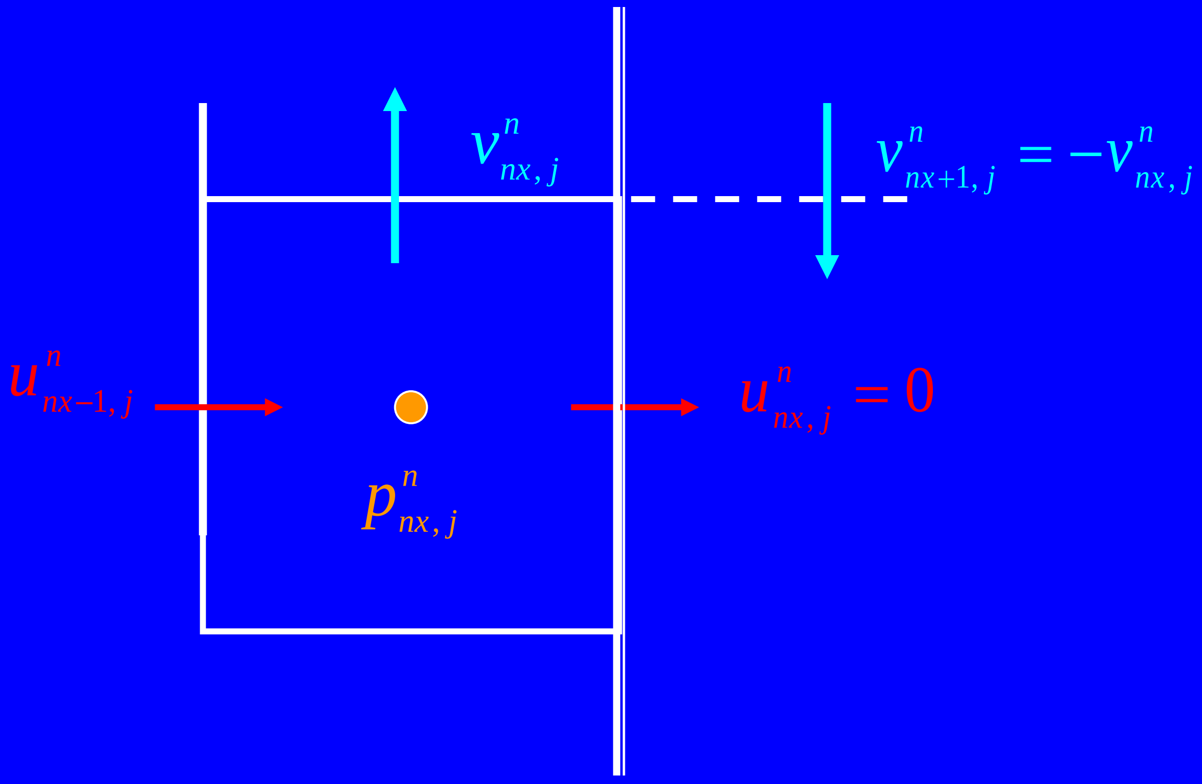
Implémantation des conditions aux limites pour les maillages décalés

- Cas de la paroi verticale gauche:



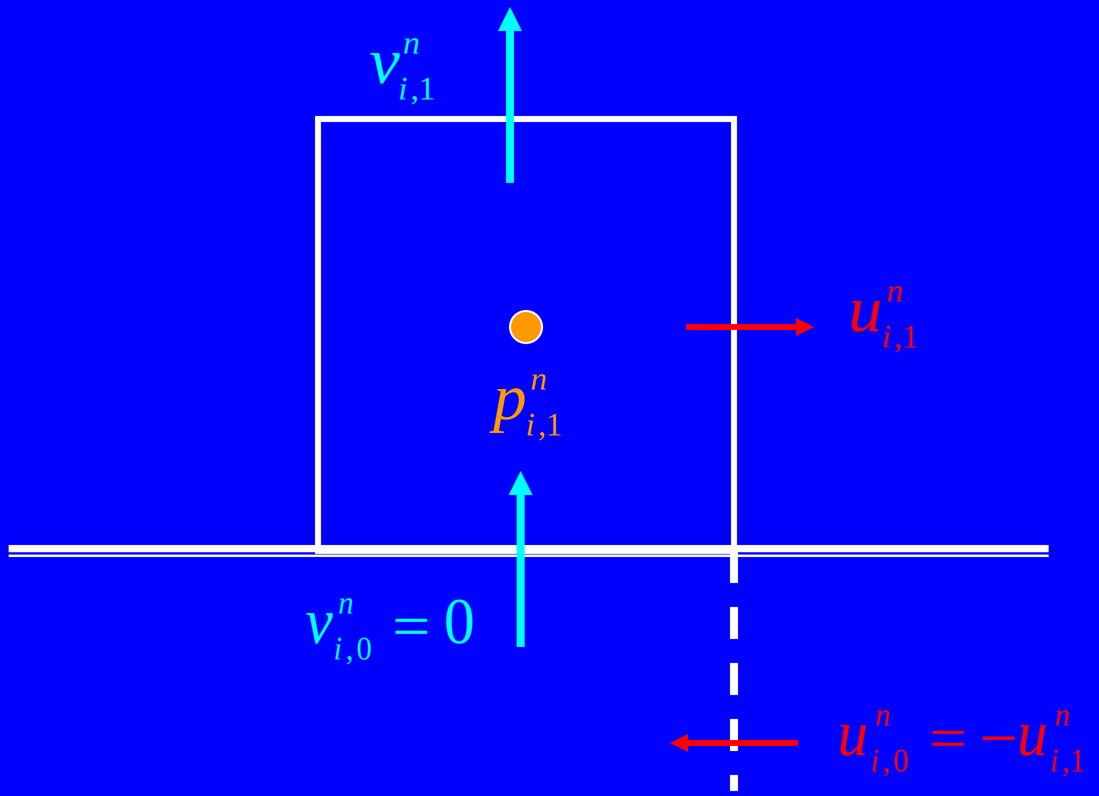
Implémantation des conditions aux limites pour les maillages décalés

- Cas de la paroi verticale droite:



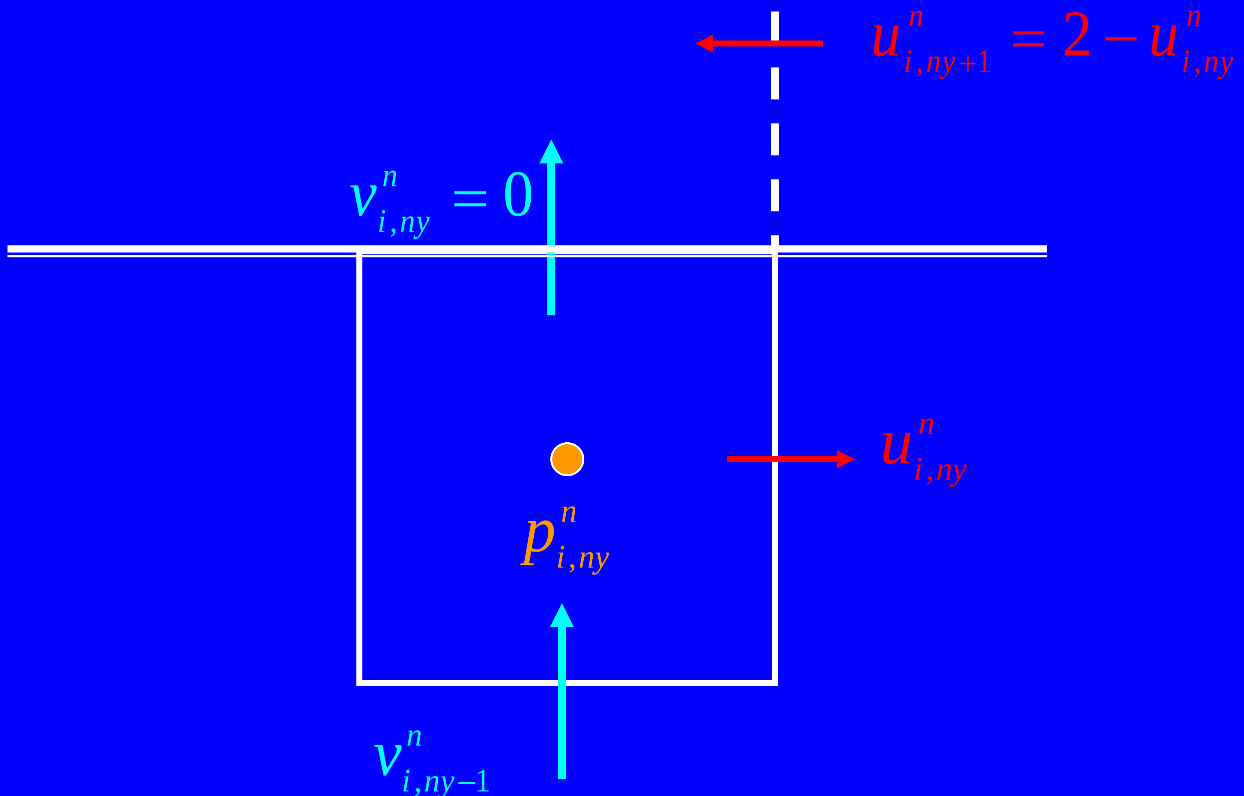
Implémantation des conditions aux limites pour les maillages décalés

- Cas de la paroi horizontale basse:



Implémantation des conditions aux limites pour les maillages décalés

- Cas de la paroi horizontale haute:



Remarques

- Ces conditions aux limites s ’appliquent pour les vitesses à l ’instant courant et aussi pour les vitesses étoilées de l ’étape prédicteur de la méthode de projection

Discrétisation de l 'équation de pression 1

- L 'étape de correction pour la méthode de projection s 'écrit :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{*}}{\Delta t} = -\nabla p^{n+1}$$

- En prenant la divergence de cette équation on a :

$$\frac{\nabla \cdot \mathbf{u}^{*}}{\Delta t} = \Delta p^{n+1}$$

Discrétisation de l 'équation de pression 2

- Sous forme discrète on obtient :

$$\left(\frac{\mathbf{p}_{i+1,j}^{n+1}-2\mathbf{p}_{i,j}^{n+1}+\mathbf{p}_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \mathbf{x}^{2}}\right)+\left(\frac{\mathbf{p}_{i,j+1}^{n+1}-2\mathbf{p}_{i,j}^{n+1}+\mathbf{p}_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \mathbf{y}^{2}}\right)=\frac{1}{\Delta \mathbf{t}}\left(\frac{\mathbf{u}_{i,j}^{*}-\mathbf{u}_{i-1,j}^{*}}{\Delta \mathbf{x}}+\frac{\mathbf{v}_{i,j}^{*}-\mathbf{v}_{i,j-1}^{*}}{\Delta \mathbf{y}}\right)$$

- Les conditions aux limites sur la pression sont de type Neumann homogènes:

$$\frac{\partial p}{\partial n}=0 \text{ sur les quatres parois de la boite}$$

Implémantation des conditions aux limites pour la pression

$$\text{Paroi verticale gauche} : p_{0,j}^{n+1} = p_{1,j}^{n+1}$$

$$\text{Paroi verticale droite} : p_{nx+1,j}^{n+1} = p_{nx,j}^{n+1}$$

$$\text{Paroi horizontale basse} : p_{i,0}^{n+1} = p_{i,1}^{n+1}$$

$$\text{Paroi horizontale haute} : p_{i,ny+1}^{n+1} = p_{i,ny}^{n+1}$$

Résolution de l ’équation de pression

- On remarquera qu ’avec les conditions aux limites données la matrice est singulière, elle a un déterminant nul
- La solution est donc connue à une constante près
- On va utiliser une méthode itérative pour calculer la solution numérique pour résoudre : $AX = B$

Résolution de l ’équation de pression

- Si on a un maillage NXxNY, la matrice du système à résoudre est creuse (5 bandes) et de dimension (NXxNY)x(NXxNY)
- Le vecteur inconnu X a pour dimension NXxNY
- Le second membre B pour dimension NXxNY

Résolution de l ’équation de pression

- Generation de la matrice de l ’équation de pression : utiliser la subroutine matgen_cavite.f

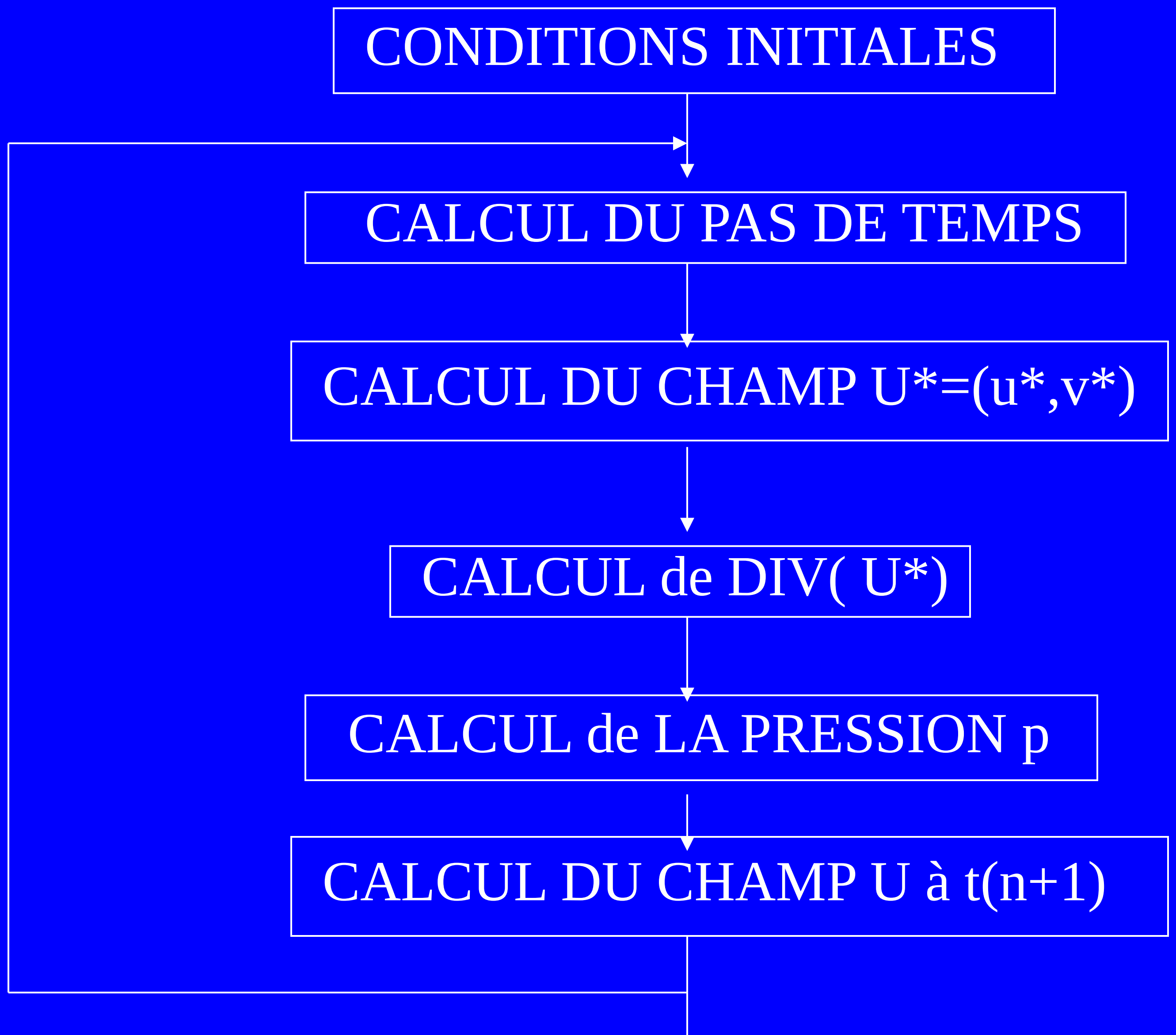
- Résolution de l ’équation de pression : utiliser la subroutine ICCG2 dans le fichier Solveur.f90

Résolution de l 'équation de pression

- Afin d 'obtenir l 'unicité de la solution du système: $AX = B$
  on modifiera le second membre par :

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{sum} = 0\\
&\mathrm{do}\ j = 1, ny\\
&\quad \mathrm{do}\ i = 1, nx\\
&\qquad \mathrm{sum} = \mathrm{sum} + B(i, j)\\
&\quad \mathrm{enddo}\\
&\mathrm{enddo}\\
&\mathrm{sum} = \mathrm{sum}/(nx \times ny)\\
&\mathrm{do}\ j = 1, ny\\
&\quad \mathrm{do}\ i = 1, nx\\
&\qquad B(i, j) = B(i, j) - \mathrm{sum}\\
&\quad \mathrm{enddo}\\
&\mathrm{enddo}
\end{aligned}
$$

ALGORITHME GENERAL



Conditions de stabilité

- Schéma upwind pour la convection, centré pour la diffusion:

$$\Delta t = \frac{1}{2((\max|u|/dx + \max|v|/dy) + 2\nu(1/dx^2 + 1/dy^2))}$$

Conditions de stabilité

- Schéma centré pour la convection, schéma centré pour la diffusion:

$$\Delta t = \frac{1}{2((\max|u|/dx + \max|v|/dy) + 2\nu(1/dx^2 + 1/dy^2))}$$