

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ
РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ
В СКРЕЩЁННЫХ ПОЛЯХ**

Сметанин Григорий

Содержание

Введение	2
1 Теоретическая часть	3
1.1 Основные уравнения движения	3
1.2 Характер движения в скрещённых полях	3
1.3 Преобразование полей и физический смысл трёх режимов	3
2 Численное моделирование	4
2.1 Результаты моделирования	4
3 Сравнение с нерелятивистским дрейфом	8

Введение

Цель работы — смоделировать движение заряженной частицы в скрещённых электрическом и магнитном полях с учётом релятивистской динамики, рассмотреть три режима в зависимости от соотношения между напряжённостью электрического и магнитного полей и сравнить релятивистское движение с классическим нерелятивистским дрейфом.

В работе численно исследуются три случая:

1. Электрическое поле меньше магнитного: $E < cB$;
2. Электрическое и магнитное поля равны по модулю: $E = cB$;
3. Электрическое поле больше магнитного: $E > cB$.

Для численного решения используется **метод Рунге–Кутты четвёртого порядка точности (RK4)**. Этот метод обеспечивает точное интегрирование систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Метод Рунге–Кутты основан на поэтапном вычислении промежуточных значений производной функции и усреднении их с определёнными весами. Для уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), \quad y(t_0) = y_0,$$

шаг интегрирования Δt выполняется по формулам:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(y_n, t_n), \\ k_2 &= f\left(y_n + \frac{\Delta t}{2}k_1, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right), \\ k_3 &= f\left(y_n + \frac{\Delta t}{2}k_2, t_n + \frac{\Delta t}{2}\right), \\ k_4 &= f(y_n + \Delta t k_3, t_n + \Delta t), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{aligned} \tag{1}$$

Усреднение в формуле (1) уменьшает ошибку шага до $O(\Delta t^5)$, а полная погрешность решения имеет порядок $O(\Delta t^4)$.

В задаче о движении заряженной частицы этот метод применяется к системе уравнений:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \frac{q}{m\gamma} \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{v}}{c^2} \right) \end{pmatrix}.$$

1 Теоретическая часть

1.1 Основные уравнения движения

Рассмотрим заряженную частицу с зарядом q и массой m , движущуюся со скоростью \mathbf{v} в электрическом и магнитном полях \mathbf{E} и \mathbf{B} . Общий закон Лоренца имеет вид:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2)$$

где \mathbf{p} — импульс частицы. В релятивистской форме

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3)$$

Ускорение $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ выражается как:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m\gamma} \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})}{c^2} \right). \quad (4)$$

Для численного моделирования уравнения (2) и (4) представляются в виде системы шести обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m\gamma} \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})\mathbf{v}}{c^2} \right). \end{cases} \quad (5)$$

1.2 Характер движения в скрещённых полях

Наши электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны:

$$\mathbf{E} = (E, 0, 0), \quad \mathbf{B} = (0, 0, B).$$

В зависимости от отношения E и cB рассмотрим три режима:

- **Магнитодоминированный режим** ($E < cB$).
- **Критический режим** ($E = cB$).
- **Электродоминированный режим** ($E > cB$).

1.3 Преобразование полей и физический смысл трёх режимов

Электрическое и магнитное поля зависят от выбора инерциальной системы отсчёта. При переходе в систему, движущуюся со скоростью \mathbf{u} относительно лабораторной, они преобразуются по формулам Лоренца:

$$\mathbf{E}' = \gamma_u (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma_u^2}{\gamma_u + 1} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})}{c^2}, \quad \gamma_u = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Для полей $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ можно выбрать скорость

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2},$$

при которой $\mathbf{E}' = 0$. Такое преобразование возможно только при $E < cB$, так как тогда $u = E/B < c$. В этой системе наблюдается лишь магнитное поле, и частица вращается вокруг линий \mathbf{B} , что соответствует устойчивому дрейфу.

При $E = cB$ требуемая скорость компенсации равна c , а при $E > cB$ она превышает скорость света, что делает устранение электрического поля невозможным. Следовательно, при $E \geq cB$ движение становится нестационарным и сопровождается непрерывным ростом энергии частицы.

2 Численное моделирование

Для исследования движения была выполнена численная интеграция системы (4). Расчёты выполнены в языке программирования Python при помощи библиотек NumPy и Matplotlib. В качестве тестовой частицы рассматривался электрон:

$$q = -1.602 \times 10^{-19} \text{ Кл}, \quad m = 9.109 \times 10^{-31} \text{ кг.}$$

а начальные условия:

$$\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0), \quad \mathbf{v}_0 = (10^6, 0, 0) \text{ м/с.}$$

На каждом шаге времени вычислялись координаты $\mathbf{r}(t)$, скорость $\mathbf{v}(t)$ и фактор Лоренца

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}}.$$

Графики траекторий строились в проекции xy , а также строилась зависимость $\gamma(t)$, отражающая изменение энергии частицы.

2.1 Результаты моделирования

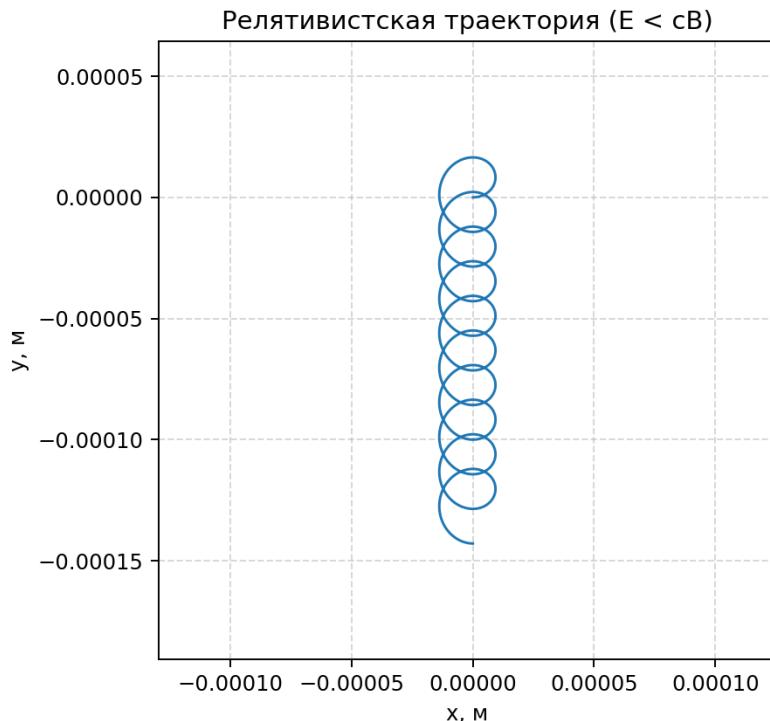


Рис. 1: Траектория частицы при $E = 10^5$, $B = 0.5$.

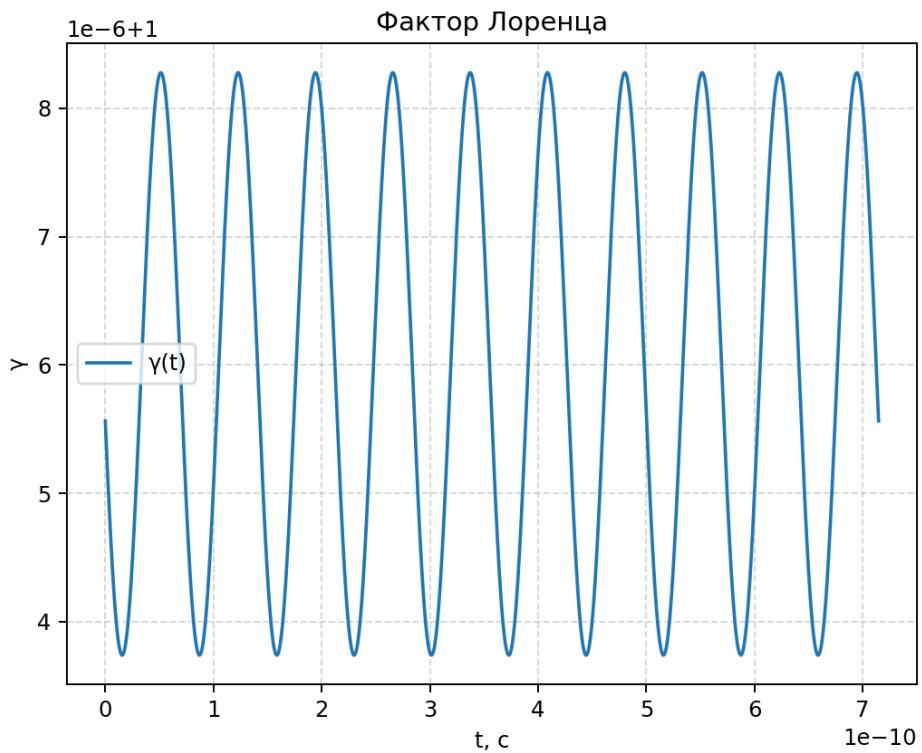


Рис. 2: Зависимость фактора Лоренца $\gamma(t)$ при $E = 10^5, B = 0.5$.

Случай $E < cB$.

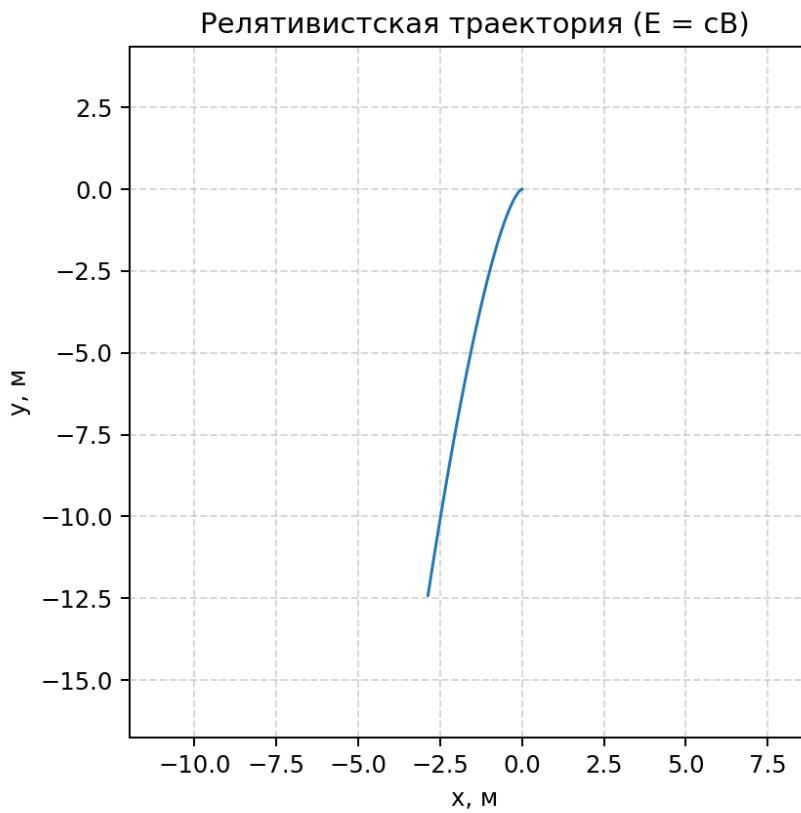


Рис. 3: Траектория частицы при $E = cB, B = 0.05$.

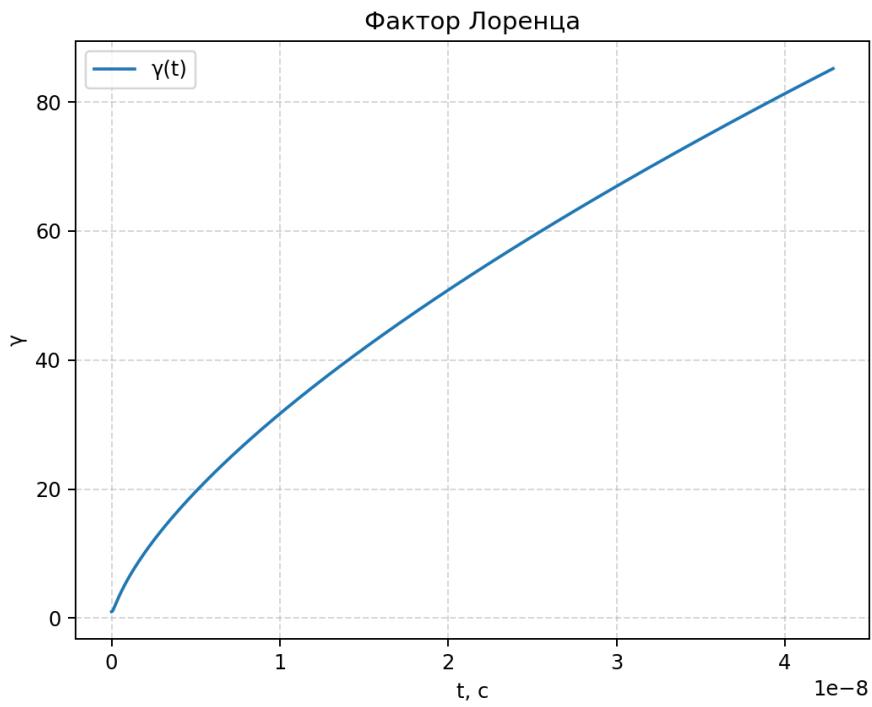


Рис. 4: Изменение фактора Лоренца $\gamma(t)$ при $E = cB, B = 0.05$.

Случай $E = cB$. При равенстве модулей полей частица испытывает ускорение вдоль направления $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$. На графике траектории видно постепенное выпрямление движения и рост $\gamma(t)$.

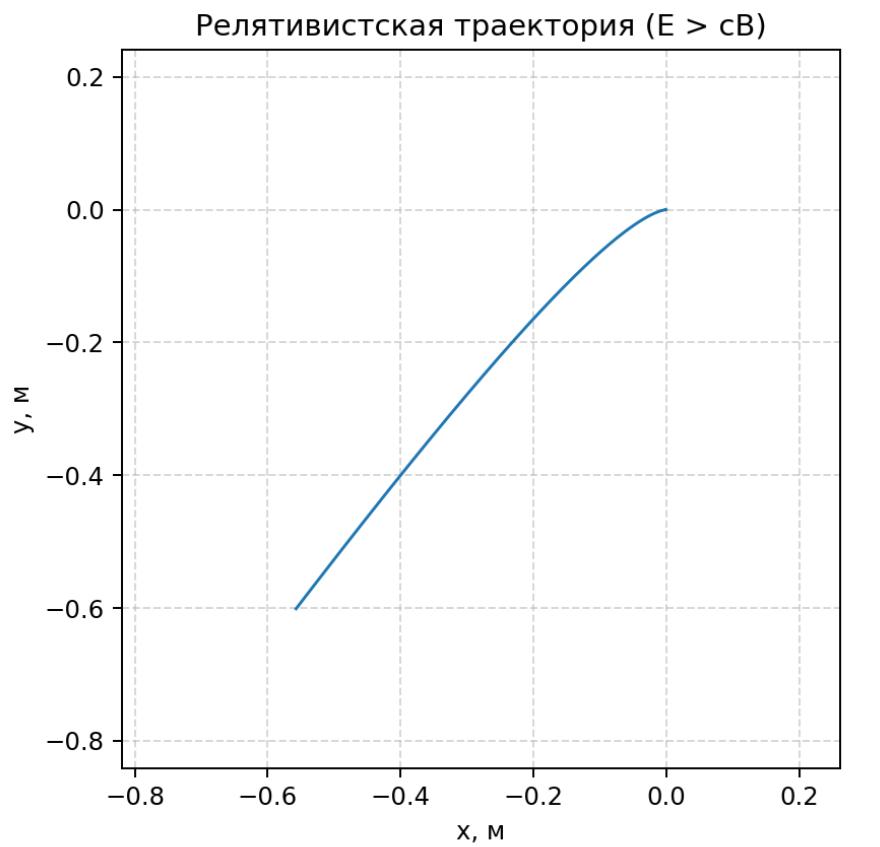


Рис. 5: Траектория частицы при $E = 1.2cB, B = 0.05$.

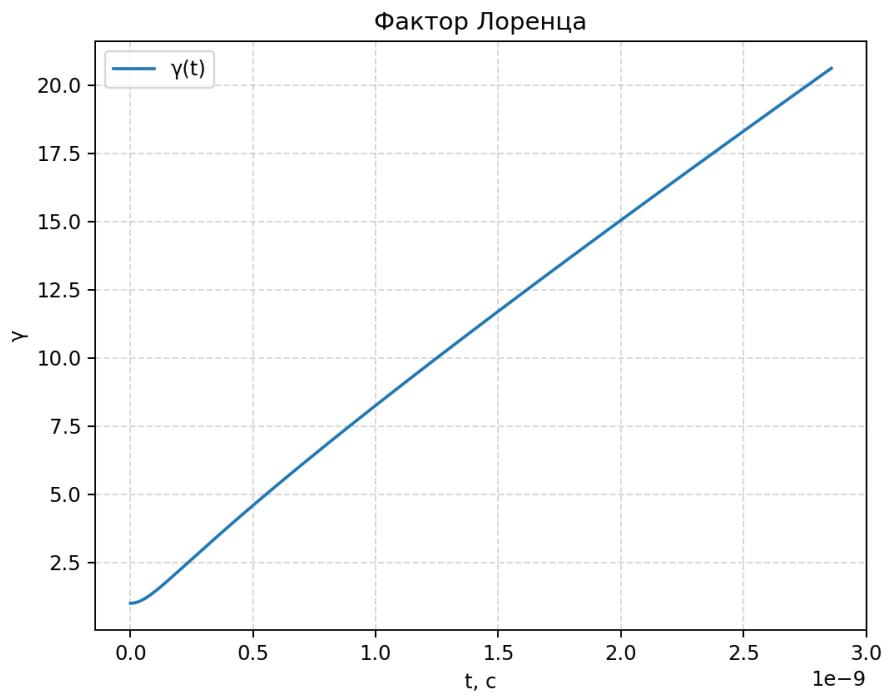


Рис. 6: Изменение фактора Лоренца $\gamma(t)$ при $E = 1.2cB, B = 0.05$.

Случай $E > cB$. Электрическое поле доминирует, и частица разгоняется почти прямо вдоль \mathbf{E} , лишь слегка отклоняясь под действием \mathbf{B} . В этом режиме $\gamma(t)$ растёт быстрее.

3 Сравнение с нерелятивистским дрейфом

Для контроля корректности модели был рассмотрен предельный нерелятивистский случай ($v \ll c$). При тех же значениях E и B траектория частицы имеет форму спирали с постоянным дрейфом, который хорошо совпадает с аналитическим выражением

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

Таким образом, релятивистская модель корректно воспроизводит классическую динамику при малых скоростях и даёт ожидаемое отклонение при приближении скорости к световой.