Vizsgatematika

Számítási módszerek a fizikában 1, 2025/26 I. félév

1. Komplex számok. Valós számok műveletei és axiómái. Komplex számok algebrai alakja. Komplex szám valós és képzetes része, konjugáltja, valamint abszolút értéke. Komplex számok összege, különbsége, szorzata és hányadosa. A rendezés nem általánosítható a komplex számtestre. Komplex sorozat és sor határértéke. Az exponenciális, a szinusz és a koszinusz függvény definíciója hatványsorral. Euler-formula.

2. Trigonometrikus függvények. Trigonometrikus függvények felírása exponenciálissal. Addíciós tételek trigonometrikus függvényekre. Arcsin és arccos definiálása. Algebrai alakban felírt komplex szám esetén a sin, cos, tg, sh, ch és th meghatározása. Az sh, ch és th definiálása, valamint addíciós tételek ezen függvényekre. Arsh, Arch függvények. Komplex szám trigonometrikus alakja és exponenciális alakja. Komplex számok szorzása és hatványozása exponenciális alakban. Komplex szám logaritmusa. Komplex szám komplex hatványra emelése. Komplex szám n-edik gyöke, ahol $n \in \mathbb{N}$.

3. Polinomok és a $\mathbb{K}^n$ vektortér. Komplex polinomok. Polinomok maradékos osztása. Az algebra alaptétele. Polinom gyökei és együtthatói közötti összefüggés. Lagrange-interpoláció. A $\mathbb{K}^n$ vektorainak összege, számszorosa és skaláris szorzata (koordinátákkal definiálva). Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség a $\mathbb{K}^n$ téren. Az $\mathbb{R}^n$ tér vektorai által bezárt szög.

4. Az $\mathbb{R}^3$ euklideszi tér. Az $\mathbb{R}^3$ térben skaláris, vektoriális és vegyes szorzat. Kronecker-delta, Levi–Civita-szimbólum. Az $\mathbb{R}^3$ térben a vektoriális szorzat és a vegyes szorzat felírása a Levi–Civita-szimbólummal. Az egyenes és a sík egyenlete. Pontok, egyenesek és síkok egymástól való távolsága. Adott síkra/egyenesre való vetítés/tükrözés és adott síkban való forgatás mátrixa az $\mathbb{R}^3$ tér kanonikus bázisában.

5. Vektortér. Absztrakt vektortér fogalma az $\mathbb{R}$ és a $\mathbb{C}$ számtest felett. Vektorok lineáris kombinációja, lineáris függetlensége és lineáris burka. Lineáris altér. Bázis. Dimenzió. Skaláris szorzás. Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség. Vektorok által bezárt szög. Norma. Minkowski-egyenlőtlenség. A $\mathbb{K}^n$ téren a $\|\cdot\|_p$ és a $\|\cdot\|_\infty$ norma. Skaláris szorzásból származó norma.

6. Skalárszorzatos vektortér. Gram–Schmidt-ortogonalizáció. Ortogonális, normált, ortonormált és teljes vektorrendszer. Vektor kifejtése ortonormált bázisban. Pitagorasz-tétel véges dimenzióban. Riesz-féle reprezentációs tétel véges dimenziós skalárszorzatos vektortereken. Négyzetes mátrix adjungáltja és az adjungálás tulajdonságai.

7. Lineáris leképezés. Lineáris leképezés. Lineáris leképezés képtere és magtere. Adott U és V vektorterek esetén $\mathrm{Lin}(U, V)$ is vektortér. Az U és a V vektortérben adott bázis esetén az $A \in \mathrm{Lin}(U, V)$ leképezés mátrixa. Mátrixok összege, számszorosa és szorzata. Kapcsolat a lineáris leképezések műveletei és a mátrixműveletek között. Lineáris leképezés rangja. Dimenziótétel. Négyzetes mátrix nyoma és a nyom tulajdonságai. Mátrix transzponáltja és a transzponálás tulajdonságai.

8. Determináns. Permutációk csoportja. Transzpozíció. Permutációkon értelmezett előjel függvény (ε). Mátrix determinánsa és a determináns alaptulajdonságai. Mátrix invertálása aldetermináns segítségével. Adjugált mátrix (adj(A)). Invertálhatóság jellemzése determinánssal.

9. Lineáris egyenletrendszerek. Lineáris egyenletrendszer felírása vektorral és lineáris leképezéssel. Elemi sorműveletek. Lineáris egyenletrendszer lépcsős alakja. Lineáris egyenletrendszer megoldása Gauss–Jordan-eliminációval. Mátrix invertálása Gauss–Jordan-eliminációval.

10. Spektrum és normális operátorok. Algebra, egységelemes algebra. Elem spektruma egységelemes algebrában. Jacobson-lemma. Az $A : V \to V$ lineáris leképezés sajátértéke, sajátvektora és sajátaltere. Mátrixalgebrában lévő elem spektruma. Mátrixok speciális típusai: önadjungált, normális, ortogonális, unitér, projekció, idempotens és nilpotens. Önadjungált, unitér és projekció spektruma. Polarizációs formula. Az $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ lineáris leképezés normálisságának, önadjungáltságának és unitérségének jellemzése skaláris szorzással.

11. Spektrálfelbontás. Normális operátor sajátvektorainak tulajdonságai. Normális operátor diagonalizálhatósága. Normális operátor spektrálfelbontása. Normális operátor függvényének értelmezése. Normális operátor önadjungáltáságának és unitérségének jellemzése a spektrummal.

12. Pozitív operátorok. Pozitív/negatív, pozitív/negatív definit és indefinit leképezés. Operátor pozitivitásának ekvivalens megfogalmazásai. Rendezés a pozitív operátorokon. A rendezés elemi tulajdonságai. Az n-monoton és az operátor monoton függvény.

13. Blokk-mátrixok és Sylvester tétele. Blokk mátrixok. Műveletek blokk mátrixokkal. A 2×2-es blokk-mátrix determinánsa invertálható bal felső sarok esetén. Sylvester-tétel.