

**PROBLEMAS DE MODELAGEM - 2024****Questão 8 - Planejamento do quadro de funcionários**

Considere uma empresa que fabrica um produto cuja demanda é tipicamente sazonal, isto é, ao longo do ano há fortes oscilações na demanda. Para operar neste mercado, a empresa pode utilizar os seguintes procedimentos:

- a) demitir operários no início de um mês;
- b) contratar operários no início de um mês;
- c) utilizar até 35 horas extras por mês de cada operário, cuja jornada normal mensal totaliza 175 horas;
- d) estocar o produto de um mês para o mês seguinte;
- e) retardar o atendimento de parte da demanda de um mês para o mês seguinte.

*Admita conhecidos:*

- f) o custo da demissão de um operário (despesa para atender a legislação trabalhista);
- g) o custo da contratação de um operário (treinamento);
- h) o custo médio do homem-hora extra;
- i) o custo de manter uma unidade do produto em estoque de um mês para o mês seguinte;
- j) a demanda em cada mês do próximo ano;
- k) o número de operários e a quantidade de produto em estoque ao fim deste ano;
- l) o salário mensal médio de um operário (sem incluir o adicional por horas extras);
- m) o número de homens-horas para fabricar uma unidade do produto;
- n) o desconto concedido por unidade do produto cuja entrega é retardada para o mês seguinte ao da demanda;
- o) o número máximo de unidades que podem ser mantidas em estoque de um mês para o mês seguinte;
- p) o estoque desejado ao fim do próximo ano.

Proponha um modelo matemático para definir o programa de produção e a política de recursos humanos da empresa para o próximo ano.

**Parâmetros**

$d_t$	Demanda do mês $t$
$e_{12}^f$	Estoque final desejado no mês 12
$c^E$	Custo de manter uma unidade do produto em estoque de um mês para o mês seguinte (\$)
$c^D$	Desconto concedido por unidade do produto cuja entrega é retardada para o mês seguinte ao da demanda (\$)
$c^P$	Custo de produção (\$/unidade)
$e^{Max}$	Estoque máximo
$c^{Con}$	Custo de contratação
$c^{Dem}$	Custo de demissão
$c^{HE}$	Custo médio de hora extra
$c^{Sal}$	Salário
$z_{12}^f$	Quadro de funcionários desejado no mês 12
$\alpha$	Quantidade de homens-hora para fabricar uma unidade do produto

## Variáveis de decisão

$x_t \geq 0$	Quantidade a ser produzida no mês t: 1...12
$e_t \geq 0$	Quantidade a ser estocada no mês t: 1...12
$e_0$	Estoque inicial (parâmetro)
$y_t \geq 0$	Quantidade a ser retardada (atrasada) no mês t: 1...12
$z_t^C \geq 0, int$	Quantidade contratada de funcionários no início do mês t: 1...12
$z_t^D \geq 0, int$	Quantidade demitida de funcionários no início do mês t: 1...12
$z_t \geq 0, int$	Quadro ativo de funcionários no mês t: 1...12 (variável dependente das demais)
$z_0$	Quadro ativo de funcionários no início do período de planejamento (parâmetro)
$z_t^{HE} \geq 0, int$	Quantidade de horas extras utilizadas no mês t: 1...12

## Restrições

Exemplo... Mês 3: demanda = 800

Como atender à demanda do mês 3?

- ➔ Produzir no mês 3
- ➔ Utilizar o estoque do mês 2
- ➔ Postergar (retardar) a produção do mês 3

O mesmo vale para todos os meses...

Mês 1:

$$e_0 + x_1 + y_1 = d_1 + e_1$$

Mês 2:

$$e_1 + x_2 + y_2 = d_2 + y_1 + e_2$$

Forma geral da restrição de demanda:

$$e_{t-1} + x_t + y_t = d_t + y_{t-1} + e_t \quad \forall t: 2 \dots 12$$

Restrição de estoque máximo:

$$e_t \leq e^{Max} \quad \forall t: 1 \dots 12$$

Estoque final:

$$e_{12} = e_{f12}$$

Não postergar a demanda do último mês:

$$y_{12} = 0$$

Balanco do quadro de funcionários:

Mês 1:

$$z_1 = z_0 + z_1^C - z_1^D$$

Forma geral da restrição do balanço de funcionários:

$$z_t = z_{t-1} + z_t^C - z_t^D \quad \forall t: 1 \dots 12$$

Total de horas produtivas:

- $175z_t$  – horas regulares de trabalho
- $z_t^{HE}$  – horas extras de trabalho


Restrição de horas extras:

$$z_t^{HE} \leq 35z_t \quad \forall t: 1 \dots 12$$

Quadro de funcionários ao final do ano:

$$z_t = z_{12}^f$$

Restrição de acoplamento / vínculo (*linking constraint*) entre x e z:

  $e_{t-1} + \frac{175z_t + z_t^{HE}}{\alpha} + y_t = d_t + y_{t-1} + e_t \quad \forall t: 2 \dots 12$   
Errado!

$$\begin{cases} x_t \leq \frac{175z_t + z_t^{HE}}{\alpha} & \forall t: 1 \dots 12 \\ e_{t-1} + x_t + y_t = d_t + y_{t-1} + e_t & \forall t: 2 \dots 12 \end{cases}$$

Não é “restrição formal:”

$$\sum_{t=1}^{12} x_t = \sum_{t=1}^{12} d_t + ef_{12} - e_0$$

### Função Objetivo

$$\min C = \sum_{t=1}^{12} (c^E e_t + c^D y_t + c^P x_t + c^{Sal} z_t + c^{Con} z_t^C + c^{Dem} z_t^D + c^{HE} z_t^{HE})$$

A parcela  $c^P x_t$  não precisa, em princípio, constar na função objetivo, por ser um “custo fixo” (já sabemos qual é a produção anual, e o correspondente custo total de produção).