

Mémoire de Stage de M2

PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Michel BERTHIER, *et al.*

Master MIX - Université de La Rochelle

2024 - 2025

TABLES DES MATIÈRES

| | |
|---|-----------|
| Introduction | 1 |
| Indexe des notations | 2 |
| <hr/> | |
| PARTIE I — DESCRIPTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE | 3 |
| <hr/> | |
| I — Prérequis mathématique | 3 |
| 1.1 Variété différentielle complexe | 3 |
| 1.2 Variété fibrée principale | 3 |
| 1.3 Espaces projectifs complexes | 4 |
| <hr/> | |
| PARTIE II — NOTES 'N' THOUGHTS | 6 |
| <hr/> | |
| I — Généralisation aux signaux multivariés | 6 |
| 1.1 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié | 6 |
| 1.2 Cas bivarié et trivarié | 9 |
| 1.2.1 Bivarié | 9 |
| 1.2.2 Trivarié | 10 |
| 1.3 Généralisation de ces formules au cas n -varié | 11 |
| II — Notes sur l'approche Géométrique | 13 |
| 2.1 Le plan du mémoire (trop long). | 13 |
| 2.2 Notes sur l'approche à avoir | 14 |
| 2.3 La vision de Bohm [1, fig. 4.3] | 15 |
| 2.4 La vision Mukunda & Simon [7, 8] | 16 |
| <hr/> | |
| PARTIE III — BROUILLON | 17 |
| <hr/> | |
| I — Intuition sur les fondamentaux | 17 |
| 1.1 Réflexion autour du produit hermitien | 17 |
| II — Description des signaux multivariés | 18 |
| 2.1 Cas bivarié et trivarié | 18 |
| 2.1.1 Bivarié | 18 |
| 2.1.2 Trivarié | 20 |
| 2.2 VRAC | 20 |
| 2.3 Mon blabla | 21 |
| III — Vrac | 22 |
| 3.1 Random stuff ready pour rédac (+labeled) | 22 |
| 3.2 Bilan des formules | 23 |
| 3.3 Thoughts | 23 |

Introduction

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent un peu partout en physique, dont l'étude est très instructive mais qui demande énormément de prérequis pour être expliqué proprement. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant t d'un signal ψ est donné par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) = \arg \langle \psi(t), \psi(t_0) \rangle + \Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \psi(s), \dot{\psi}(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de gauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\psi(t) \rightsquigarrow \psi'(t) = e^{i\alpha(t)} \psi(t)$$

Cette propriété rend la phase Φ_{geo} intrinsèquement liée à la géométrie de l'espace dans lequel évolue ψ , d'où son nom.

Cela étant dit, la phase géométrique a toujours été décrite dans le cadre de système dynamique régis par une EDP (généralement Schrödinger). L'objectif de ce mémoire sera donc de décrire ce phénomène pour un signal quelconque et ceux avec une approche géométrique.

Cela demandera de faire appel, entre autre, à des outils de variété différentielle complexe et fibrée principale. Et comme il serait inapproprié de considérer que le lecteur a toutes les bases nécessaires sur le sujet, des **nombreuses** annexes seront dédiées aux mathématiques utiles à cette fin.

Indexe des notations

| OBJET/FONCTIONS | NOTATIONS |
|--|--|
| Conjugué complexe | \bar{x} |
| Transposée (resp. adjoint) de la matrice A | tA (resp. A^\dagger) |
| Distribution de Dirac | δ |
| Indicatrice de E | $\mathbb{1}_E$ |
| Fonction signe | $\text{sign}(x)$ |
| Transformée de Fourier | $\mathcal{F}[x], \hat{x}$ |
| Transformée en SA | $\mathcal{A}[x], x_+$ |
| Transformée de Hilbert | $\mathcal{H}[x]$ |
| Produit hermitien (resp. scalaire) | $\langle x y \rangle$ (resp. $\langle x, y \rangle$) |
| Espérance et variance de f suivant ρ | $\mathbb{E}_\rho[f(t)], \mathbb{V}_\rho[f(t)]$ |
| Espace des fonctions p.p. de puissance p^{eme} intégrable à valeur de E dans F | $L^p(E, F)$ |
| Support d'une fonction f | $\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$ |
| Matrice de rotation de paramètre Θ (resp. d'angle θ en dimension 2) | R_Θ (resp. R_θ) |
| Ensemble des matrices symétrique (resp. anti-symétrique) | $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) |

ToDo de la ?? :

- rectifier la démo de la ?? (et mettre à jour la formule la où elle est utilisée)
- À quoi sert Bedrosian au juste ? ??
- Éventuellement ajouter que qu'part: "On parle éventuellement de signal AM-FM (amplitude modulated - frequency modulated)" ??
- Refaire les graphs en Tikz (?????????)

PARTIE I

DESCRIPTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE

I — Prérequis mathématique

1.1 Variété différentielle complexe

Pour mémoire, une variété différentielle de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) de dimension n est un espace topologique¹ \mathcal{M} (ou \mathcal{M}^n) munie d'un *atlas* $(\phi_i, U_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire un ensemble fini de pair d'ouvert $U_i \subset \mathcal{M}$ et d'application $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

- les U_i forme un recouvrement de la variété : $\bigcup_{i \in I} \phi_i(U_i) = \mathcal{M}$
- les ϕ_i sont des homéomorphismes sur leur image $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$.
- si l'intersection $U_i \cap U_j$ est non vide, alors $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)}$ est un C^k difféomorphisme sur son image.

\mathcal{M} sera une *variété différentielle complexe* si elle satisfait les propriétés ci-dessus où \mathbb{R}^n est remplacé par \mathbb{C}^n et où la condition de difféomorphisme est remplacé par la condition d'holomorphisme.

Une application $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ étant holomorphe si chacune de ses composantes vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \frac{\partial f}{\partial y^\nu}(x + iy) = i \frac{\partial f}{\partial x^\nu}(x + iy)$$

Les fonctions holomorphes étant automatiquement C^∞ , les variétés différentielles complexes sont toujours lisse, c'est-à-dire C^∞ . Aussi, \mathcal{M} est dite de dimension complexe n et dimension (réel) $2n$, notés :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) := n \qquad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) := \dim(\mathcal{M}) = 2n \qquad (1.1)$$

1.2 Variété fibrée principale

DÉFINITION 1 (VARIÉTÉ FIBRÉE LOCALEMENT TRIVIAL) — Étant donnée deux variétés différentielles P et B de même classe, une *fibration de base B et d'espace total P* et une application $\pi : P \rightarrow B$ telle qu'en tout point $x \in B$ de la base, il existe un voisinage $U_x \subset B$ et une variété différentielle F_x telle que $U_x \times F_x$ soit difféomorphe à $\pi^{-1}(U_x)$.

On dit de P que c'est une *variété fibrée*, un *espace fibré* ou tout simplement un *fibré* et $P_x := \pi^{-1}(U_x)$ est appelé *fibre de P au (ou au dessus du) point x* . Si de plus B est connexe, alors les fibres P_x sont toutes difféomorphes à un même F et on parle de *fibre type de P* .

L'idée derrière cette définition est de formaliser l'idée des espaces, comme le ruban de Möbius, qui

¹La topologie de \mathcal{M} doit vérifier des propriétés type séparable, dénombrable à l'infinie, etc., qui seront toutes admises dans la suite, voir par exemple

ressemble à un produit $F \times B$ (d'où la notation P) sans vraiment en être un (voir ??).

fig. 1.1 — représentation schématique d'une fibration du ruban de Möbius.

DÉFINITION 2 (FIBRÉ PRINCIPAUX) — Un fibré est dit *principal* Soit P et B deux variétés différentielles et (G, \times) un groupe de Lie. On dit que les trois forment une *variété fibrée principale* (VFP, ou plus simplement *fibré principal*) s'ils vérifient les propriétés suivantes :

- Le groupe de Lie G opère différentiellement à droite (ou à gauche) sur P via une application noté :

$$\begin{aligned} \phi : P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto \phi(p, g) := pg \end{aligned}$$

- Il existe une surjection différentiable $\pi : P \longrightarrow B$ telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}(\pi(p)) = pG$$

- En tout point $x_0 \in B$ il existe un voisinage $U \subset B$ de x_0 et un difféomorphisme $h : G \times U \longrightarrow \pi^{-1}(U) \subset P$ telle que :

$$\forall g, h \in G, \forall x \in B, \quad h(gh, x) = h(g, x)h \quad \text{et} \quad \pi \circ h(g, x) = x$$

On dit alors que B est la *base* de la VFP, que G est son *groupe structural* et xP/G est la *fibres de P en $x \in B$* . Une telle variété est notée $P(\phi, G, \pi, B)$ ou plus simplement $P(G, B)$.

PROPOSITION 1 — La $2n+1$ -sphère \mathbb{S}^{2n+1} est un espace fibré de base $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est de fibre type \mathbb{S}^1 , ou $U(1)$. La fibration étant la projection canonique :

$$\begin{aligned} \iota : \mathbb{S}^{2n+1} &\longrightarrow \mathbb{P}\mathbb{C}^n \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

On pose $P = \mathbb{C}^n$ et $G = \mathbb{U}(1)$ avec l'action à gauche évidente. On pose ensuite B définie par :

$$B = \left\{ \rho \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid \begin{array}{ll} \rho = \rho^\dagger & \rho \geq 0 \\ \rho^2 = \rho \operatorname{tr} \rho & \operatorname{tr} \rho > 0 \end{array} \right\}$$

Avec la surjection : $\pi : \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \longrightarrow B$
 $\psi \longmapsto \psi\psi^\dagger \quad (\text{ou } \bar{\psi}^t \psi)$

L'application h , elle associe un ψ tel que $\rho = \psi\psi^\dagger$ (il n'est pas unique dans P mais dans on est sur de son existence $\pi^{-1}(U)$). Le difficulté ca va être de s'assurer que h est différentiable (*i.e.* choisir le bon ψ pour qu'elle le soit)

B peut lui-même être munie d'une opération à gauche (librement, transitivement, blabla) via l'application :

$$\begin{aligned} \phi_B : B \times \mathbb{U}(n) &\longrightarrow B \\ (\rho, \eta) &\longmapsto \eta\rho\eta^\dagger \end{aligned}$$

Je ne sais pas à quoi ca peut servir mais dans le doute je note.

1.3 Espaces projectifs complexes

Les espaces projectifs complexes se construisent ainsi. On se place dans $\mathbb{C}^{n+1*} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n+1}}\}$ avec la relation d'équivalence, $\forall x, y \in \mathbb{C}^{n+1*}$:

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid x = \lambda y$$

L'espace projectif complexe, noté $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est l'espace quotient :

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1} = \mathbb{C}^{n+1*} / \mathbb{C}^* = \mathbb{C}^{n+1*} / \sim$$

En notant $[z]$ la classe de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ du représentant $z = (z^i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1*}$, on définit les ensembles et cartes, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$U_i = \left\{ [z] \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n \mid z^i \neq 0 \right\} \quad \phi_i : \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^i \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-i} \cong \mathbb{C}^n \\ [z] & \longmapsto & \frac{1}{z^i} (z_0, \dots, 1, \dots, z_n) \end{array} \quad (1.2)$$

L'ensemble d'arrivé $\phi_i(U_i)$ est de dimension n et s'assimile à \mathbb{C}^n mais, par souci de comodité, on restera dans \mathbb{C}^{n+1} . Cela permet d'écrire plus simplement les formules de changement de carte en évitant de devoir enlever et rajouter des coefficients :

$$\forall [z] \in U_i \cap U_j, \quad \phi_i \circ \phi_j^{-1}(z) = \frac{z^j}{z^i} z \quad (z^{i,j} \neq 0)$$

Les (U_i, ϕ_i) forme un atlas holomorphe sur l'espace projectif complexe, faisant de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ une variété complexe de dimension $\dim_{\mathbb{C}} = n$ (voir annexe ?? pour plus de détail).

PARTIE II

NOTES 'N' THOUGHTS

I — Généralisation aux signaux multivariés

DÉFINITION 3 (SIGNAL MULTIVARIÉ) — Un *signal multivarié*, ou *n-varié*, est un vecteur composé de $n \in \mathbb{N}^*$ signaux x_i . Si $n = 2$, alors on parle de signal *bivarié*. Dans la continuité de ce qui à été dit dans la ??, dans le cas des signaux réels, on s'intéressera au vecteur composé des transformées en SA (eq. ??, déf. ??) des x_i . **Au moins dans toute cette section**, un tel signal sera noté :

$$x_+(t) : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ & t \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathcal{A}[x_1] \\ \mathcal{A}[x_2] \\ \vdots \\ \mathcal{A}[x_n] \end{pmatrix} \end{array}$$

On supposera que chaque composante x_i de \mathbf{x} aura autant de régularité et de condition d'intégrabilité que nécessaire (**il vaudra préciser lesquelles à un moment**).

Le fait que \mathbf{x} soit à valeur dans \mathbb{C}^n impose un choix naturel de d'amplitude instantanée : sa norme. L'on notera alors dans tout la suite (sauf précision) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = a(t) \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\| = 1, \quad a \geq 0$$

Le choix de la phase instantanée, en revanche, n'est pas plus commode. Si l'on cherche à écrire \mathbf{x} sous la forme :

$$a(t)e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\psi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\psi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\psi_n(t)} \end{pmatrix}$$

alors n'importe quel choix de ϕ est valable, il suffit que $\psi_i = \phi_i - \phi$.

1.1 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié

Afin de contraindre ce choix, on s'inspire propriétés de la phase instantanée vu plus tôt pour en déduire deux approches :

- D'une part, l'espérance de la fréquence instantanée (ici vu comme dérivée à 2π près de la phase²) doit donner la fréquence moyenne au sens de Fourier, eq. (??).
- D'autre part, les conditions d'interprétation de la décomposition (a_x, ϕ_x) , ??, exige que les hautes fréquences du signal se retrouve dans la phase.

Pour cela on introduit les notations utiles au cas multivarié :

DÉFINITION 4 (DENSITÉ D'ÉNERGIE) — Étant donné un signal multivarié $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, les densités d'énergie de chaque composante x_i sont notées :

$$\begin{aligned} \rho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto |x_i(t)|^2 = a(t)^2 a_i(t)^2 \end{aligned} \qquad \varrho_i : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \nu &\longmapsto |\hat{x}_i(\nu)|^2 \quad (2.1)$$

Et les densités d'énergies associées au signal \mathbf{x} complet :

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) \end{aligned} \qquad \varrho : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \nu &\longmapsto \|\hat{\mathbf{x}}(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varrho_i(t) \quad (2.2)$$

La première approche, inspiré de [2] consiste donc de reprendre le “calculation trick” (??), pour en déduire la fréquence moyenne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \int_{\mathbb{R}} \nu \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) d\nu \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\varrho_i}[\nu] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'_i(t) \rho_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t)^2 \sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{i=1}^n \phi'_i a_i^2 \right] \end{aligned}$$

Ce qui mène à une première définition de la phase instantanée :

$$\phi = \int \sum_{i=1}^n \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds = \sum_{i=1}^n \int \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds \quad (2.3)$$

La seconde approche, fortement inspirée par les travaux de Lilly & Olhede [6], se base sur la discussion autour du théorème Bedrisan sur la séparation haute-basse fréquence du signal \mathbf{x} (??). Pour cela, l'on commence par faire apparaître la phase ϕ — pour l'instant inconnue — en écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\phi(t)} e^{-i\phi(t)} \mathbf{x}(t) := e^{i\phi(t)} \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

Si ϕ est bien choisie, alors $\tilde{\mathbf{x}}$ contient les informations associées à l'amplitude et la polarisation de \mathbf{x} . Or, la phase doit contenir les hautes fréquences du signal. Pour s'en assurer on demande, à l'inverse, que les basses fréquences du signal soit données par $\tilde{\mathbf{x}}$ en limitant ces variations. En clair, ϕ doit être choisi de sorte à minimiser la dérivée $\tilde{\mathbf{x}}'$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \underset{\alpha(t)}{\operatorname{argmin}} \|\tilde{\mathbf{x}}'(t)\|_2^2 = \underset{\alpha(t)}{\operatorname{argmin}} \left\| e^{-i\alpha} (\mathbf{x}' - i\alpha' \mathbf{x}) \right\|_2^2 = \underset{\alpha(t)}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}' - i\alpha' \mathbf{x}\|_2^2$$

²La pertinence de cette définition dans le cas multivarié sera discuté plus loin

La contrainte ne dépendant que de la dérivée α' , on se ramène à :

$$\min_{\alpha(t)} \|\tilde{\mathbf{x}}'(t)\|_2^2 = \min_{\alpha'(t)} \|\mathbf{x}'(t) - \alpha'(t)\mathbf{x}(t)\|_2^2$$

En rappelant que $\frac{d}{dx}\|f(x)\|_2^2 = 2\Re\langle f(x), f'(x) \rangle$, il vient que ce minimum³ est atteint par $\phi'(t)$ à condition que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi'} \|\mathbf{x}' - i\phi'\mathbf{x}\|_2^2 = 0 &\iff 0 = 2\Re\left\langle \mathbf{x}' - i\phi'\mathbf{x}, \frac{d}{d\phi'}(\mathbf{x}' - i\phi'\mathbf{x}) \right\rangle \\ &= 2\Re\langle \mathbf{x}' - i\phi'\mathbf{x}, -i\mathbf{x} \rangle \\ &= 2\Re\left(i\langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle\right) + 2\phi'\Re\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= -2\Im\langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle + 2\phi'\|\mathbf{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\phi' = \frac{\Im\langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \frac{-\Im\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \quad \text{et} \quad \phi = -\Im \int \frac{\langle \mathbf{x}(s), \mathbf{x}'(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds \quad (2.4)$$

Ce qui, sous forme exponentiel, se réécrit :

$$\begin{aligned} -\Im \frac{\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} &= -\Im \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t)a_i(t)e^{i\phi_i(t)} \overline{\left((aa_i)'(t) + a(t)a_i(t)i\phi_i'(t)\right)e^{i\phi_i(t)}} \\ &= -\Im \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t)a_i(t)(aa_i)'(t) - ia(t)^2a_i(t)^2\phi_i'(t) \\ &= -\frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n -a(t)^2a_i(t)^2\phi_i'(t) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(t)^2\phi_i'(t) \end{aligned}$$

Soit la même expression que (2.3) obtenue par le premier raisonnement.

(NOTATION À REPRENDRE (aa_i)) *Toujours avec les mêmes notations, une conséquence de l'équation (2.4) est que les fréquences ψ_i restantes sont de moyenne nulle dans le sens où :*

$$\sum_{i=1}^n \int \psi_i'(s)a_i(s)^2 ds = 0 \quad (2.5)$$

Moralement, ça revient juste à dire qu'en définissant ϕ suivant Lilly, on a ôté au ψ_i la phase moyenne pondérée et donc, tout naturellement, les nouvelles phase individuelles ψ_i sont centrés (à la même pondération près). Cela revient peut ou prou à la première équation (2.3).

Pour le montrer, il suffit de refaire le calcul de la phase instantanée :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}(t) | \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle &= \left\langle \left(a_i(t)e^{i(\phi(t)+\psi_i(t))} \right)_i \left| \left((a_i'(t) + i(\phi'(t) + \psi_i'(t))a_i(t))e^{i(\phi(t)+\psi_i(t))} \right)_i \right. \right\rangle \\ &= \sum_i a_i(t) \left(a_i'(t) - i(\phi'(t) + \psi_i'(t))a_i(t) \right) \\ &= \sum_i a_i(t)a_i'(t) - i \sum_i (\phi'(t) + \psi_i'(t))a_i(t)^2 \\ &= \sum_i a_i(t)a_i'(t) - i\phi'(t) \sum_i a_i(t)^2 - i \sum_i \psi_i'(t)a_i(t)^2 \\ &= \sum_i a_i(t)a_i'(t) - i\phi'(t)\|\mathbf{a}(t)\|^2 - i \sum_i \psi_i'(t)a_i(t)^2 \end{aligned}$$

³ L 'extremum obtenu est l'unique minimum puisque $t \mapsto \|at + b\|^2$ est strictement convexe pour $a \neq 0$.

Ce qui mène à :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s) \|a(s)\|^2}{\|a(s)\|^2} ds + \sum_i \int_{t_0}^t \frac{\varphi'_i(s) a_i(s)^2}{\|a(s)\|^2} ds \\ &= \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) + \sum_{i=1}^n \int \psi'_i(s) a_i(s)^2 ds\end{aligned}$$

1.2 Cas bivarié et trivarié

1.2.1 Bivarié

PROPOSITION 2 (PHASES DE SIGNAL AM–FM–PM) — Étant donné un signal bivarié AM–FM–PM \mathbf{x} , i.e. de la forme :

$$\mathbf{x} = ae^{i\varphi} R_\theta \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix} = a(t) e^{i\varphi} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \\ \sin \theta \cos \chi - i \cos \theta \sin \chi \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

la phase dynamique de \mathbf{x} est donnée par :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \int_{t_0}^t \dot{\varphi}(s) + \dot{\theta}(s) \sin 2\chi(s) ds = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\theta}(s) \sin 2\chi(s) ds \quad (2.7)$$

Soit une différence de phase φ mais avec un terme en plus. Donc φ ne doit (**doit?**) pas être interpréter comme la phase instantanée du signal, où du moins pas au sens donnée dans la sous-section 1.1.

La phase totale, elle, s'écrit :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arg \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin (\chi(t_0) + \chi(t)) \right) \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \left(\tan \Delta\theta \frac{\tan \chi(t_0) + \tan \chi(t)}{1 + \tan \chi(t_0) \tan \chi(t)} \right)\end{aligned} \quad (2.8)$$

ou $\Delta y = y(t) - y(t_0)$ pour $y = \varphi, \theta, \chi$. (**adapte signe démo**)

Démonstration de la proposition 2

Par souci de lisibilité, on note $\mathcal{U} = R_\theta \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix}$ de sorte que la dérivée de \mathbf{x} s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \dot{a}e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\dot{\varphi}e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix} + ae^{i\varphi}\dot{\chi} \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \chi + i \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \theta \sin \chi - i \cos \theta \cos \chi \end{pmatrix} \\ &= \dot{a}e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\dot{\varphi}e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + ae^{i\varphi}\dot{\chi} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}}\end{aligned}$$

Le produit hermitien $\langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle &= \left\langle ae^{i\varphi}\mathcal{U}, \dot{a}e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\dot{\varphi}e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + ae^{i\varphi}\dot{\chi} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}} \right\rangle \\ &= \left\langle a\mathcal{U}, \dot{a}\mathcal{U} + ia\dot{\varphi}\mathcal{U} + a\dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + a\dot{\chi} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}} \right\rangle \\ &= a\dot{a}\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle - ia^2\dot{\varphi}\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + a^2\dot{\theta} \left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} \right\rangle + ia^2\dot{\chi} \left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}} \right\rangle\end{aligned}$$

où les deux derniers produits hermitiens donnent :

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} \right\rangle &= -\mathcal{U}_1 \overline{\mathcal{U}_2} + \mathcal{U}_2 \overline{\mathcal{U}_1} \\
&= 2i \Im(\overline{\mathcal{U}_1} \mathcal{U}_2) \\
&= 2i \Im(\cos \theta \cos \chi - i \sin \theta \sin \chi) (\sin \theta \cos \chi - i \cos \theta \sin \chi) \\
&= 2i(-\cos^2 \theta \cos \chi \sin \chi - \sin^2 \theta \sin \chi \cos \chi) \\
&= -2i(\cos \chi \sin \chi + \sin \chi \cos \chi) \\
&= -i \sin 2\chi
\end{aligned}$$

$$\left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}} \right\rangle = -\mathcal{U}_1 \mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_2 \mathcal{U}_1 = 0$$

D'où, sachant que $\|\mathbf{x}\|^2 = a^2$ et $\|\mathcal{U}\| = 1$, la formule :

$$\begin{aligned}
-\frac{\Im \langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= -\frac{1}{a^2} \Im(a \dot{a} \langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle - i a^2 \dot{\varphi} \langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle - i a^2 \dot{\theta} \sin 2\chi) \\
&= \frac{1}{a^2} (a^2 \dot{\varphi} \|\mathcal{U}\|^2 + a^2 \dot{\theta} \sin 2\chi) \\
&= \dot{\varphi} + \dot{\theta} \sin 2\chi
\end{aligned}$$

Pour la phase totale, on note cette fois $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t) \rangle &= \langle a(t_0) e^{i\varphi(t_0)} R_{\theta(t_0)} \mathcal{V}(t_0), a(t) e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \mathcal{V}(t) \rangle \\
&= a(t_0) e^{i\varphi(t_0)} a(t) e^{-i\varphi(t)} \langle R_{\theta(t_0)} \mathcal{V}(t_0), R_{\theta(t)} \mathcal{V}(t) \rangle \\
&= a(t_0) a(t) e^{i(\varphi(t_0) - \varphi(t))} \langle \mathcal{V}(t_0), R_{\theta(t) - \theta(t_0)} \mathcal{V}(t) \rangle
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on note $\Delta y = y(t) - y(t_0)$, $y_1 = y(t_0)$ et $y_2 = (t)$ pour $y = \varphi, \theta, \chi$. Le produit hermitien à droite s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{V}(t_0), R_{\Delta\theta} \mathcal{V}(t) \rangle &= \begin{pmatrix} \cos \chi_1 & -i \sin \chi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Delta\theta \cos \chi_2 - i \sin \Delta\theta \sin \chi_2 \\ \sin \Delta\theta \cos \chi_2 + i \cos \Delta\theta \sin \chi_2 \end{pmatrix} \\
&= \cos \chi_1 (\cos \Delta\theta \cos \chi_2 - i \sin \Delta\theta \sin \chi_2) - i \sin \chi_1 (\sin \Delta\theta \cos \chi_2 + i \cos \Delta\theta \sin \chi_2) \\
&= \cos \Delta\theta (\cos \chi_1 \cos \chi_2 + \sin \chi_1 \sin \chi_2) - i \sin \Delta\theta (\cos \chi_1 \sin \chi_2 + \sin \chi_1 \cos \chi_2) \\
&= \cos \Delta\theta \cos \Delta\chi - i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2)
\end{aligned}$$

■

1.2.2 Trivarié

- Version de Lilly [5]

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_+(t) &= e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= a(t) e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.9}$$

avec :

$$R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc une amplitude / phase instantanée A / ϕ et une polarisation instantanée d'ellipse paramétrée par χ et orientée par la rotation $R_1 R_3 R_1$.

- On note d'abord que (Lefevre [4]) :

$$\begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \chi(t) & i \sin \chi(t) & 0 \\ -i \sin \chi(t) & \cos \chi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui, en terme de matrice de Gall-man (λ_i) (généralisation de la base de Pauli à $\mathbb{U}(3)$), devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_+(t) &= a(t) e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a(t) e^{i\phi(t)} e^{i\alpha\lambda_7} e^{i\beta\lambda_3} e^{i\theta\lambda_7} e^{-i\chi\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.3 Généralisation de ces formules au cas n -varié

PROPOSITION 3 (PHASE DE SIGNAL AM-FM-PM n -VARIÉ) — La formule 2.7 de la proposition 2 se généralise très bien à plus haute dimension. En écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = a(t) e^{i\varphi} R_{\Theta(t)} \mathcal{V}(t) \quad \text{où } R_{\Theta(t)} \in \text{SO}_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{V}(t) = \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

la phase dynamique de \mathbf{x} est donnée par :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \int_{t_0}^t \dot{\varphi}(s) + \sin 2\chi \langle \tilde{R}_{\Theta(s)} e_1, e_2 \rangle ds \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \sin 2\chi \langle \tilde{R}_{\Theta(s)} e_1, e_2 \rangle ds \end{aligned} \quad (2.11)$$

où $e_j = \delta_j^i \in \mathbb{R}^n$ et $\tilde{R}_{\Theta(t)}$ est la matrice anti-symétrique :

$$\tilde{R}_{\Theta(t)} = {}^t R_{\Theta(t)} \dot{R}_{\Theta(t)} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

En récrivant R_{Θ} comme composition d'une rotation R_{Λ} et d'une rotation R_{θ} de l'ellipse dans son plan, *i.e.* :

$$R_{\Theta} = R_{\Lambda} R_{\theta} = R_{\Lambda} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \\ & & \mathbb{O}_{n-2} \end{pmatrix}$$

alors la phase dynamique se réécrit encore :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\theta}(s) \sin 2\chi(s) ds + \int_{t_0}^t \sin 2\chi(s) \langle \tilde{R}_{\Lambda(s)} \tilde{e}_1(s), \tilde{e}_2(s) \rangle ds \quad (2.12)$$

où cette fois \tilde{e}_1 (resp. \tilde{e}_1) donne la direction du demi-grand (resp. -petit) axe de l'ellipse paramétrée par χ :

$$\tilde{e}_1 = R_\theta e_1 \qquad \tilde{e}_2 = R_\theta e_2$$

Démonstration

D'abord, on a la différentielle :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \dot{a}e^{i\varphi}R_\Theta\mathcal{V} + ia\dot{\varphi}e^{i\varphi}R_\Theta\mathcal{V} + ae^{i\varphi}\dot{R}_\Theta\mathcal{V} + ae^{i\varphi}R_\Theta\dot{\mathcal{V}} \\ &= (\dot{a} + ia\dot{\varphi})e^{i\varphi}R_\Theta\mathcal{V} + ae^{i\varphi}(\dot{R}_\Theta\mathcal{V} + R_\Theta\dot{\mathcal{V}}) \end{aligned}$$

où le vecteur $\dot{\mathcal{V}}$ se réécrit :

$$\dot{\mathcal{V}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\chi} \begin{pmatrix} -\sin \chi(t) \\ -i \cos \chi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = i\dot{\chi} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ & \mathbb{O}_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} := i\dot{\chi}J\mathcal{V}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} -\frac{\Im\langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \Im \left\langle ae^{i\varphi}R_\Theta\mathcal{V}, (\dot{a} + ia\dot{\varphi})e^{i\varphi}R_\Theta\mathcal{V} + ae^{i\varphi}(\dot{R}_\Theta\mathcal{V} + i\dot{\chi}R_\Theta J\mathcal{V}) \right\rangle \\ &= \dot{\varphi} + \Im \left\langle R_\Theta\mathcal{V}, \dot{R}_\Theta\mathcal{V} \right\rangle + \Im \left(i\dot{\chi} \left\langle R_\Theta\mathcal{V}, R_\Theta J\mathcal{V} \right\rangle \right) \\ &= \dot{\varphi} + \Im \left\langle R_\Theta\mathcal{V}, \dot{R}_\Theta\mathcal{V} \right\rangle + \dot{\chi} \Re \langle \mathcal{V}, J\mathcal{V} \rangle \end{aligned}$$

On montre, avec un calcul similaire à la démonstration de la proposition 2, que le dernier terme est nul. Le deuxième terme, lui, se réécrit en fonction de la base canonique (e_i) de \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \left\langle R_\Theta\mathcal{V}, \dot{R}_\Theta\mathcal{V} \right\rangle &= \left\langle R_\Theta(\cos \chi e_1 - i \sin \chi e_2), \dot{R}_\Theta(\cos \chi e_1 - i \sin \chi e_2) \right\rangle \\ &= \cos^2 \chi \left\langle R_\Theta e_1, \dot{R}_\Theta e_1 \right\rangle + \sin^2 \chi \left\langle R_\Theta e_2, \dot{R}_\Theta e_2 \right\rangle - i \cos \chi \sin \chi \left(\left\langle R_\Theta e_1, \dot{R}_\Theta e_2 \right\rangle - \left\langle R_\Theta e_2, \dot{R}_\Theta e_1 \right\rangle \right) \end{aligned}$$

Notons à présent que comme $R_{\Theta(t)} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$, la différentielle \dot{R}_Θ est à valeur dans le fibré tangent $\text{TSO}_n(\mathbb{R})$. Sachant que $\text{T}_{\Theta(t)}\text{SO}_n(\mathbb{R}) = R_{\Theta(t)}\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, la différentielle \dot{R}_Θ s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dot{R}_{\Theta(t)} \in \text{T}_{\Theta(t)}\text{SO}_n(\mathbb{R}) \iff \exists \tilde{R}_{\Theta(t)} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mid \dot{R}_{\Theta(t)} = R_{\Theta(t)}\tilde{R}_{\Theta(t)}$$

Cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned} -\frac{\Im\langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= \dot{\varphi} + \Im \left\langle R_\Theta\mathcal{V}, \dot{R}_\Theta\mathcal{V} \right\rangle = \dot{\varphi} - \cos \chi \sin \chi \left(\left\langle R_\Theta e_1, \dot{R}_\Theta e_2 \right\rangle - \left\langle R_\Theta e_2, \dot{R}_\Theta e_1 \right\rangle \right) \\ &= \dot{\varphi} - \frac{1}{2} \sin 2\chi \left(\left\langle e_1, \tilde{R}_\Theta e_2 \right\rangle - \left\langle {}^t\tilde{R}_\Theta e_2, e_1 \right\rangle \right) \\ &= \dot{\varphi} - \sin 2\chi \left\langle e_1, \tilde{R}_\Theta e_2 \right\rangle \\ &= \dot{\varphi} + \sin 2\chi \left\langle \tilde{R}_\Theta e_1, e_2 \right\rangle \end{aligned}$$

■

- Les quaternions ça se généralise trop mal (au dessus c'est les octinions, c'est un calvaire et ça va pas plus loin)
- Ca peut s'écrire en terme d'algèbre de Clifford (Lefevre [4])... pas dingue non plus (pb de dimension principalement)

- Les bases de $\mathbb{U}(n)$ paraît être le meilleur choix mais on a pas de “bonne base” pour de plus haute dimension.
- question : est-ce qu’on en a besoin pour la phase géométrique ? (transi vers une formulation géo diff-like ?)

II — Notes sur l’approche Géométrie

2.1 Le plan du mémoire (trop long)

I — Introduction du phénomène

1 — “En phase” de Pancharatnam

2 — Dessin de Bohm

- cas cyclique (plus intéressant qu’adiabatique)
- cadre quantique, on a Schrödinger (2.13)
- Explique le dessin de Bohm *fig. 2.2*
- Ils font un peu de géo diff [7, 1] mais nous on veut écrire ça propre

3 — On veut une description géo diff, on a besoin de quoi ?

- passage en complexe
- Espace : $\mathbb{U}(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n$
- fibré principal
- connexion
- holonomie

II — Préliminaire

1 — Transformation en SA

2 — Un peu de géo diff

2.1 — Variété complexe

2.2 — Holonomie et Bonnet-Gauss

2.3 — Fibré principaux

- C’est super relou les transports de structure mais nous on peut éviter le problème parce que c’est un produit et la fibre EST le groupe de Lie.
- lien avec les fibrés vectoriels (avec un mot sur les deux connexions ?)
- “universal $\mathbb{U}(1)$ principal bundle”

2.4 — Connexion

- Connexion sur fibré principal
- Connexion sur variété/fibré tangent (Levi-Civita)
- Lien entre les deux
- Courbure de la connexion ?

2.5 — Espace $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$

- “universal $\mathbb{U}(1)$ principal bundle”
- Connexion de Fubini-Study
- Séparation Fisher/phase géo
- $\text{Hol} = \mathbb{U}(n)$

III — Cœur du sujet

1 — On pose le cadre (très rapidement)

⋮

n — Cas des géodésiques

- n.1* — Invariant de Birgmann
- n.2* — Φ_{geo} comme 2-forme (et rien d'autre)
- n.3* — formule de l'air (Stokes & Birgmann)

IV — Généralisation à $\mathbb{U}((k) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n$?

TO DO

- Ecrire $\mathbb{U}(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ comme un fibré principale
- Explicité une connexion (A-A)
-

2.2 Notes sur l'approche à avoir

- Quel espace ? Pour la gauge invariance, c'est du $\mathbb{U}(1) \times X$ mais qui est X ?
 - les $\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger$ sont plus calculable mais isomorphe à l'espace projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, lequel des deux choisir ? (voir formalisme)
 - Y'a aussi les Grassmanniennes $G_{n,k}(\mathbb{K})$, mais $G_{n,1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}\mathbb{C}^n$
 - En somme, sûrement que $X = \mathbb{P}\mathbb{C}^n$ (à voir comment faire les changements d'espaces)
- Ensuite, comme on a un produit(-ish), on veut un côté fibré (sûrement principale)

A ce sujet, Wikipédia dit : “ La théorie des fibrés principaux recouvre la théorie des fibrés vectoriels, de leurs orientations, de leurs structures riemanniennes, de leurs structures symplectiques, etc. ” (sounds reaaaally good)
- Puis une métrique pour l'espace :
 - vu que c'est complexe j'y connais R
 - mettre la bonne connexion (A-A mais y'a aussi Fubini-Study)
 - si la connexion du fibré est équivalente à la connexion d'une variété, qu'est-ce qu'il se passe du côté de cette variété ? est-ce qu'on peut en déduire des choses ? (sûrement que non parce que $\mathbb{U}(1)$ est pas un e.v.)
- Phase géo \cong transport parallèle

Réponse : holonomie
- refs de GPT pour la connexion sur fibré :
 - Kobayashi & Nomizu - Foundations of Differential Geometry (vol. 1 & 2)
C'est la bible sur les connexions et fibrés principaux ! Chapitres sur les connexions dans les fibrés principaux et leur relation avec les connexions dans les fibrés vectoriels associés.
 - J. M. Lee - Introduction to Smooth Manifolds (Chapitre sur les connexions et les fibrés principaux).
Accessible et bien expliqué, en particulier sur le lien entre les connexions dans les fibrés vectoriels et les fibrés principaux.
 - S. Helgason - Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces
Approche plus avancée et lie bien la géométrie différentielle à la théorie des groupes de Lie.

Pour la géométrie projectives complexe :

- Kobayashi, Differential Geometry of Complex Vector Bundles
Introduction aux connexions sur les fibrés vectoriels complexes, crucial pour comprendre les métriques de Fubini-Study et les structures kählériennes.
- Huybrechts, Complex Geometry: An Introduction
Introduction aux variétés complexes et kählériennes, avec des applications aux espaces projectifs complexes.
- Gunning, Introduction to Complex Analysis and Geometry
Bon compromis entre analyse complexe et géométrie différentielle.
- Wells, Differential Analysis on Complex Manifolds
Bon livre pour le lien entre la géométrie différentielle et la géométrie projective

- Ballmann, Introduction to Kähler Geometry
Très bon pour comprendre l'aspect kählérien des variétés projectives.
- Voisin, Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry (vol. 1 & 2)
Référence avancée, mais incontournable si tu veux plonger dans la topologie des variétés projectives complexes.
- Improbable mais on sait jamais :
 - Spin-structure ? (c'est que $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ + pas sur que ça ait de l'intérêt parce que ça existe qu'en dimension impair)
 - Espace de Siegel ? (ellipse vs ellipsoïde tout ça tout ça)
- Autour de $\mathbb{U}(n)$: [Classif de \$\mathbb{U}\(n\)\$](#)

2.3 La vision de Bohm [1, fig. 4.3]

Dans cette sous-section, ψ sera toujours supposée pseudo-cyclique :

DÉFINITION 5 — Un signal ψ sera dit *cyclique* si à l'instant t , ψ reprend les mêmes valeurs qu'en t_0 :

$$\psi(t) = \psi(t_0)$$

Et ψ sera dit *pseudo-cyclique* s'il est cyclique à une transformation de gauge près :

$$\exists \theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \psi(t) = e^{i\theta(t)}\psi(t_0) \text{ et } \theta(t_0) = 0$$

On note \mathcal{C} le trajet effectué par ψ et \mathfrak{C} le projeté de ce trajet sur la base $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$. On note également $\tilde{\mathcal{C}}$ (resp. \mathcal{C}_c) le lift horizontal (resp. un lift cyclique) de \mathfrak{C} , et on lui associe la paramétrisation $\tilde{\psi}$ (resp. ϕ). En clair :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{ \psi(t) \in \mathbb{C}^n \mid t \in \mathbb{R} \} \\ \mathfrak{C} &= \{ \psi(t)\psi(t)^\dagger \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n \mid t \in \mathbb{R} \} \\ \tilde{\mathcal{C}} &= \{ \tilde{\psi}(t) \in \mathbb{C}^n \mid t \in \mathbb{R} \} & \tilde{\psi} \text{ horizontal lift} \\ \mathcal{C}_c &= \{ \phi(t) \in \mathbb{C}^n \mid t \in \mathbb{R} \} & \phi \text{ cyclique} \end{aligned}$$

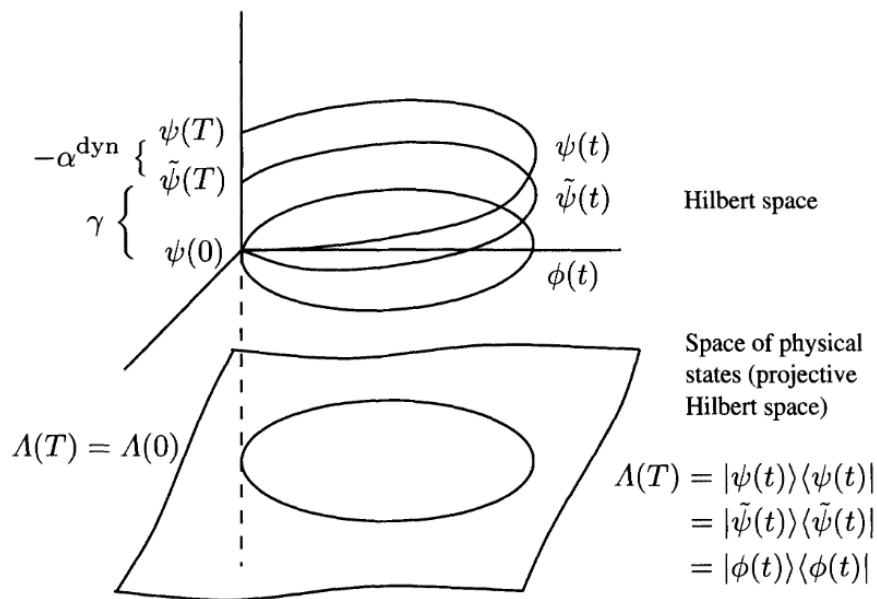


fig. 2.2 — Schéma de Bohm [1] sur les trois phases

Quand on dit que $\tilde{\psi}$ est l'*horizontal lift*, on sous entend que le fibré est munie d'une connexion. Suivant l'approche quantique, elle est de la forme :

$$\forall \eta \in \Gamma(\mathcal{M}), \quad \mathcal{A} := \int_{\gamma} \langle \eta, h(\eta) \rangle$$

où h est l'Hamiltonien de l'équation de Schrödinger (dont ψ est supposé solution) :

$$i \frac{d}{dt} \psi(t) = h(\psi(t)) \quad (2.13)$$

Mais on a le choix de h . En particulier, si on veut pas de contrainte, on peut toujours poser :

$$h = i \frac{d}{dt}$$

Est-ce qu'on a le droit ? (je vois pas pourquoi on pourrait pas) Et si on le fait, qu'est-ce que ça dit du point de vue mécha Hamiltonienne ? (*a priori* rien vue l'EDP)

Aussi, du pvd calculatoire / de la phase g , qu'est-ce qu'il se passe ? Typiquement, est-ce que y'a $\tilde{\psi}$ devient un ϕ ?

Aussi, chose remarquable, le fait que la phase géométrique soit invariante par gauge tranfo réapparaît dans le fait que ϕ ne soit pas définie à gauge tranfo près (sauf au bord). Par contre c'est étrange que

2.4 La vision Mukunda & Simon [7, 8]

- Mukunda & Simon[7, p. 10] partent des matrices de corrélation $\rho = \psi\psi^\dagger$ vérifiant (cas normé, p.50 pour le cas générale) :

$$\rho = \rho^\dagger \geq 0 \quad \rho^2 = \rho \quad \text{tr}(\rho) = 1 (= \|\rho\|^2)$$

et pose l'Hamiltonien (resp. l'énergie kiné) :

$$H = i(\dot{\psi}\psi^\dagger - \psi\dot{\psi}^\dagger - \langle \psi, \dot{\psi} \rangle) \quad \text{resp.} \quad K = \frac{d}{dt}(\psi\psi^\dagger) = \dot{\rho}$$

qui donne :

$$\frac{d}{dt} \psi = -iH\psi = (K + \langle \psi, \dot{\psi} \rangle)$$

K est "mieux" dans le sens où il est invariant par gauge-t. Aussi, comme c'est une dérivée d'une hermitienne elle est... hermitienne ? (mmmh).

Anyway, on peut poser avec la bonne gauge :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\psi} = K\tilde{\psi}$$

- Voir page 20 pour passer de Φ_{geo} au Birgmann invar
- La phase totale $\Phi_{\text{tot}}(\psi, t_0, t)$ est la phase dyn de la géodésique reliant $\psi(t)$ à $\psi(t_0)$ (ca commute ? surement pas)
En somme, la phase totale est complètement indépendante du chemin ψ , ce qui est rassurant puisque c'est ce qu'on attend la phase totale : qu'elle ne compare que les états $\psi(t_0)$ et $\psi(t)$.
- L'invariant de Birgmann à des propriétés sommatoires similaires à un calcul de volume... transition parfaite vers la formule de Stokes !!!
- SUPER IMPORTANT : [7, (8.6), p.51] pour l'originie/choix de Φ_{geo} !

PARTIE III

BROUILLON

I — Intuition sur les fondamentaux

1.1 Réflexion autour du produit hermitien

Soit $x, y \in \mathbb{C}^n$ des vecteurs complexes et $X, Y \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ leur versions réelles. On note x^j sa j^{eme} composante complexe et x_1 (resp. x_2) le vecteur composé de ses parties réelles (resp. imaginaires) :

$$x = (x^j)_j = x_1 + ix_2 = (x_1^j)_j + i(x_2^j)_j$$

On a deux façon d'écrire le produit hermitien (canonique) de x avec y .

La première :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x_1 + ix_2, y_1 + iy_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - i\langle x_1, y_2 \rangle + i\langle x_2, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + i(\langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle) \\ &= \sum_j x_1^j y_1^j + x_2^j y_2^j + i \left(\sum_j x_2^j y_1^j - x_1^j y_2^j \right) \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle + i \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle X, Y \rangle + i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} Y \right\rangle \end{aligned}$$

Cette formule peut s'interpréter en disant que le produit hermitien encode le produit scalaire entre X et Y et le produit scalaire de X avec les vecteurs $y^j = (y_1^j, y_2^j)$ auquel on aurait appliqué une rotation de 90° (rotation qui, par ailleurs, correspond à la multiplication par i dans le plan complexe). Moralement, $\langle x, y \rangle = 0$ demande une orthogonalité de X à un plan, ce qui fait sens puisque cela tient compte du fait que les x^j, y^j sont complexes (donc de dimension 2 en tant que \mathbb{R} -e.v.).

Pour les connaisseurs, on retrouve l'égalité "produit hermitien = produit scalaire $-i$ forme symplectique" !! Voir [plan proj complexe](#) et [variété kählérienne](#)

On a aussi l'écriture (quand-même moins clair) :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + i(\langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle) \\ &= \sum_j x_1^j y_1^j + x_2^j y_2^j + i \sum_j (x_2^j y_1^j - x_1^j y_2^j) \\ &= \sum_j \langle X^j, Y^j \rangle - i \sum_j \det(X^j, Y^j) \end{aligned}$$

Cette formule dit que les parties réelles et imaginaires du produit $\langle x, y \rangle$ encodent respectivement “l’orthogonalité moyenne” et la “linéarité moyenne” entre les familles de vecteurs $X^j \in \mathbb{R}^2$ et $Y^j \in \mathbb{R}^2$. L’orthogonalité d’une part parce que le produit scalaire s’annule en cas d’orthogonalité (no shit), la linéarité d’autre part car le déterminant s’annule en cas de colinéarité et moyenne car se sont des sommes sur j . **$\langle x, y \rangle = 0$ ne dit pas que les vecteurs sont à la fois colinéaire et orthogonaux parce que ce sont des valeurs moyennes (i.e. annuler une somme ne veut pas dire que chacun des termes sont nuls).**

Si maintenant on s’intéresse au cas $y = x$, on a $\forall h \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}\langle x + h, x + h \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle + \langle h, h \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \overline{\langle x, h \rangle} + \langle h, h \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\Re \langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle\end{aligned}$$

Donc si $x \in \mathbb{C}^n$ est fonction d’un paramètre t , l’égalité $\langle x, \dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \partial_t \langle x, x \rangle$ du cas réel devient :

$$\langle x | \dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \partial_t \langle x | x \rangle + i \left\langle X \left| \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \dot{X} \right. \right\rangle \quad (3.1)$$

En particulier, quand bien-même x serait de norme constante, on aurait toujours un degré de liberté pour $\langle x, \dot{x} \rangle$:

$$\|x\| = c \implies \langle x, \dot{x} \rangle = i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \dot{X} \right\rangle$$

II — Description des signaux multivariés

2.1 Cas bivarié et trivarié

2.1.1 Bivarié

- Avec la transformation :

$$\mathbf{x} \rightsquigarrow (e^{i\phi}, \mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger) \in \mathbb{U}(1) \times \text{PC}^1 - ish$$

On a :

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 S_i(t) \sigma_i \quad \begin{cases} S_0(t) = {}^t \mathbf{x} \overline{\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|^2 \\ S_1(t) = S_0(t) \cos 2\chi(t) \cos 2\theta(t) \\ S_2(t) = S_0(t) \cos 2\chi(t) \sin 2\theta(t) \\ S_3(t) = S_0(t) \sin 2\chi(t) \end{cases}$$

- En version quaternion (j fait office de i) [4] :

$$\mathbf{x}_+ = a(t) e^{i\theta} e^{-\mathbf{k}\chi} e^{j\phi} \quad (3.2)$$

Et les Stokes parameters sont donnée par :

$$\mathbf{x}_+ j \overline{\mathbf{x}_+} = S_0 + \mathbf{i} S_3 + j S_1 + \mathbf{k} S_2$$

Et le lien avec les σ_i se fait via (mais du coup les notations colles par :/) :

$$(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \rightsquigarrow (1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$$

- Et en version matrice de Pauli :

$$\mathbf{x}_+ = a(t) e^{i\phi} e^{i\theta \sigma_2} e^{-i\chi \sigma_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Plus de détail :

On a un signal bivarié $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ qu'on transforme (voir ??) soit la forme :

$$\mathbf{x}_+(t) = \begin{pmatrix} x_+(t) \\ y_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ a_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

À côté de ça, on a les ellipses modulées :

$$z(t) = e^{i\theta} (a(t) \cos \phi(t) + ib(t) \sin \phi(t)) = a(t)e^{i\theta} (\sin \chi(t) \cos \phi(t) + i \sin \chi(t) \sin \phi(t)) \in \mathbb{C}$$

Qui sous forme vectoriel se réécrit (**pourquoi ???**) :

$$z(t) = e^{i\phi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \end{pmatrix} = a(t)e^{i\phi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad R_{\theta} \in \text{SO}_2(\mathbb{R}) \quad (3.4)$$

Pour avoir la désinscription de \mathbf{x} en terme d'ellipse, il suffit donc de poser :⁴

$$\mathbf{x}_+(t) = z(t) \iff \begin{pmatrix} a_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ a_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} = A(t)e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix}$$

Ensuite, on pose :

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ e^{i\phi_+} \\ a_- e^{i\phi_-} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_+ + iy_+ \\ x_+ - iy_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} 2\phi &= \phi_+ + \phi_- & a &= A \cos \chi = a_+ + a_- \\ 2\theta &= \phi_+ - \phi_- & b &= A \sin \chi = a_+ - a_- \end{aligned}$$

et on en déduit :

$$A = \sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2} \quad \begin{aligned} \cos \chi &= \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2}} \\ \sin \chi &= \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2}} \end{aligned}$$

Ce qui donne *in fine* (super osef) :

$$\begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} = e^{i\frac{\phi_+ + \phi_-}{2}} R_{\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}} \begin{pmatrix} a_+ + a_- \\ -i(a_+ - a_-) \end{pmatrix}$$

L'équation (2.6) ce généralise très bien, il suffit d'augmenter la taille de $R_{\theta} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ et de lui donner le vecteur étendu :⁵

$$z_x(t) = \begin{pmatrix} x_{1+}(t) \\ \vdots \\ x_{n+}(t) \end{pmatrix} = e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A(t)e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

⁴C'est la version analytique du la version vectorielle de l'ellipse !

⁵Sachant que le vecteur contenant a et b est principalement nul, on peut réécrire le produit ne considérant que les deux premières colonnes de R_{θ} .

Maintenant, la question est de savoir comment généraliser la transformation en (z_+, z_-) pour obtenir les paramètres $(A, \phi, R_\theta, \chi)$ dans ce cas...
 Pour généraliser le procédé, on peut noter que :

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} U \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} \quad \text{avec } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{U}(2)$$

Ce qui ramène à se demander comment généraliser U à $\mathbb{U}(n)$. Le problème est que U est indépendant de tout les paramètres $(A, \phi, R_\theta, \chi)$ et sa généralisation est vraiment pas évidente sachant qu'on que le formule avec $n = 2...$ et pour $n = 3$ ca devient déjà chaud (pour rappelle $\dim \text{SO}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ et donc $\theta \in \mathbb{R}^n$, ce qui rend le problème de pire en pire à mesure qu'on augmente n).

2.1.2 Trivarié

- Version de Lilly [5]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_+(t) &= e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a(t) e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{avec :} \quad R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc une amplitude / phase instantanée A / ϕ et une polarisation instantanée d'ellipse paramétrée par χ et orientée par la rotation $R_1 R_3 R_1$.

- On note d'abord que (Lefevre [4]) :

$$\begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \chi(t) & i \sin \chi(t) & 0 \\ -i \sin \chi(t) & \cos \chi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui, en terme de matrice de Gall-man (λ_i) (généralisation de la base de Pauli à $\mathbb{U}(3)$), devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_+(t) &= a(t) e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a(t) e^{i\phi(t)} e^{i\alpha\lambda_7} e^{i\beta\lambda_3} e^{i\theta\lambda_7} e^{-i\chi\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2 VRAC

DÉFINITION 6 (FOURIER DE SIGNAL MULTIVARIÉ) — La transformée de Fourier “faible” d'un signal multivarié est définie comme la transformée de Fourier composante par composante du signal :

$$\mathcal{F}[\mathbf{x}] = \left(\mathcal{F}[x_i] \right)_{1 \leq i \leq n}$$

En posant (suivant les notations ci-dessus) $a = \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\|_2$, \mathbf{x} s'écrit :

$$\mathbf{x}(t) = e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\varphi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\varphi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \alpha_1(t)e^{i\varphi_1(t)} \\ \alpha_2(t)e^{i\varphi_2(t)} \\ \vdots \\ \alpha_n(t)e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{S}^{n-1}$. α est donc définie à une rotation près et en notant cette rotation R_Θ , ψ s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1(t)} & & & \\ & e^{i\varphi_2(t)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix} R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \\ &= a(t)e^{i\varphi(t)} e^{i\text{Diag}(\varphi_i(t))} R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \text{Diag}(e^{i\varphi_i(t)}) R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Faudra parler des propriétés des signaux multiva un peu, genre la différence pour fourier des images et des multivarées ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vs $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$)
- + quelques propriétés pour les cas SA, y'a moyen que ca soit pas inintéressant

2.3 Mon blabla

PROPOSITION 4 — Les signaux bivariés se décrivent très simplement à l'aide des quaternions. En considérant $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la base canonique des quaternions \mathbb{H} , on peut voir ψ comme étant à valeur dans $\mathbb{C}_{\mathbf{j}}^n$ ($\mathbb{C}_{\mathbf{j}} := \mathbb{R} \times \mathbf{j}\mathbb{R}$), de sorte que :

$$\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \exists a, \theta, \chi, \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \psi(t) = a(t)e^{i\theta(t)}e^{-\mathbf{k}\chi(t)}e^{\mathbf{j}\varphi(t)}$$

Sous cette forme, les paramètres a et φ s'interprètent respectivement comme l'amplitude et la phase instantanée du signal. Les deux paramètres restant contrôle l'ellipticité (χ) et l'orientation (θ) de l'ellipse de polarisation instantanée. C'est-à-dire l'ellipse que suit la signal à l'instant t .

Dit autrement, à tout instant t , $\psi(t)$ est vu comme une point d'une ellipse dont la taille est caractériser par $a(t)$, l'ellipticité par $\chi(t)$ et l'orientation par $\theta(t)$. $\phi(t)$ permet lui de situer $\varphi(t)$ sur cette ellipse.

Le problème de cette représentation est qu'elle se généralise mal aux signaux plus que 2-variés et, à notre connaissance, il n'existe pas d'extensions des quaternions à de plus haute dimension. voir propositions 5 et 6, équations (3.7), (3.8) et (3.9)

Il est évident que cette représentation est présent bien plus de paramètre que nécessaire, puisse que deux devrait suffire. Pour autant, elle permet de mieux **je sais quoi mais c'est sur qu'il y'a une raison**. Si cette représentation se généralise mal parce qu'elle demanderait d'avoir une extension de \mathbb{H} , sont interprétations graphique, elle, se généralise très bien. Par exemple, en dimension 3, alors l'ellipse devient une ellipsoïde. L'amplitude reste de dimension 1 parce qu'elle ne fait que contrôler la taille de cet ellipsoïde, mais les autres paramètres eux doivent être de dimension 2. L'ellipsoïde à besoin de deux angles pour être orienté, possède deux degrés d'ellipticité et ces points sont déterminés par deux angles.

PROPOSITION 5 — Plus généralement, tout signal multivarié ψ est (devrait être) caractérisé par

quatre paramètres (donc $1 + (n-1)(\frac{n}{2} - 2)$ scalaires) :

$$a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \quad \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/2, \pi/2]^{\frac{n(n-1)}{2}}) \quad \chi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/4, \pi/4]^{n-1}) \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi]^{n-1})$$

À bien y réfléchir, décrire un ellipsoïde dans l'espace, c'est exactement de que font les matrices symétriques définies positives. Donc on pourrait tout à fait remplacer les informations (a, θ, χ) par une matrice symétrique positive de dimension n . Il ne resterait alors plus que φ qui, de toute façon ne devrait pas trop être lié aux autres paramètres.

Enfin, sûrement que si parce que y'a un monde pour $\varphi = 0_{\mathbb{R}}^n$ et c'est le reste des paramètres qui fait le travail. Mais clairement c'est pas intéressant comme description. L'idée serait plutôt décrire le signal ψ en minimisant les variations de (a, θ, χ) . Ça appelle clairement à chercher que dans l'espace de Siegel mais pas seulement, parce que c'est pas juste des chemins chez Siegel qui nous intéresse.

Ou alors c'est le jeu de gauge qui fait qu'on tue φ ? auquel cas tout les jours Siegel.

BTW, les quaternions c'est fait pour décrire les rotations et c'est (quasiment) ce qu'on fait avec, donc aller chercher dans un espace de matrices pour généraliser le principe c'est pas déconnant. D'ailleurs, vu que c'est pas exactement ce qu'on fait avec, dans quelle mesure c'est pas le cas et est-ce qu'on exploite vraiment la structure des quaternions ?

PROPOSITION 6 — Autre approche : un signal multivarié étant moralement un chemin de \mathbb{R}^n , son graphe est une variété (plongée) de dimension 1. Sachant cela, si en chaque instant on veut définir l'ellipsoïde sur laquelle elle repose à un instant t , il est morale que cette ellipsoïde soit en fait une ellipse puisque c'est elle-même une variété de dimension 1.

Partant de là, on aurait toujours a , χ et ϕ pour la décrire et seulement θ gagnerait en dimension pour pouvoir orienter l'ellipse dans les n axes. ψ serait alors la données de $3 + \frac{n(n-1)}{2}$ paramètres :

$$a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \quad \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi]^{\frac{n(n-1)}{2}}) \quad \chi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/4, \pi/4]) \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi])$$

On aurait beaucoup moins de paramètre et c'est quand-même bien. En même temps ça paraît plus contraignant comme modèle. Pour comparer les deux, il faudrait voir comment les deux se décomposant dans le cas d'un signal qui ne varierait sur une ellipsoïde fixe. *i.e.* dans un cas où θ, χ de la proposition 5 varie pas alors que ceux de la proposition 6 si.

III — Vrac

3.1 Random stuff ready pour rédac (+labeled)

DÉFINITION 7 (SIGNAL MULTIVARIÉ) — Un *signal multivarié*, ou *n-varié*, est un vecteur composé de $n \in \mathbb{N}^*$ signaux x_i . Si $n = 2$, alors on parle de signal *bivarié*.

Dans la continuité de ce qui à été dit dans la ??, dans le cas des signaux réels, on s'intéressera au vecteur composé des transformées en SA (eq. ??, déf. ??) des x_i . **Au moins dans toute cette section**, un tel signal sera noté :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ x_+(t) : & t \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathcal{A}[x_1] \\ \mathcal{A}[x_2] \\ \vdots \\ \mathcal{A}[x_n] \end{pmatrix} \end{array}$$

On supposera que chaque composante x_i de \mathbf{x} aura autant de régularité et de condition d'intégrabilité que nécessaire (**il vaudra préciser lesquelles à un moment**).

DÉFINITION 8 — Ainsi, il reste tout un degré de liberté au produit $\langle x, \dot{x} \rangle$ même si $x \in \mathbb{S}^{2n}$. En intégrant ce degré de liberté supplémentaire, c'est-à-dire en tenant compte de son évolution sur la

période $[t_0, t]$, l'on obtient ce qui est appelé la *phase dynamique* :

$$\Phi_{\text{dyn}} := \Phi_{\text{dyn}}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Im m \langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle ds$$

Elle dynamique en cela qu'elle est propre au variation de ψ et qu'elle considère tout l'évolution de ψ : ça dynamique.

DÉFINITION 9 (CONNEXION DE BERRY) — On appelle *connexion de Berry* le champ de forme linéaire :

$$\forall \psi \in \mathcal{M}, \quad A_\psi : \begin{array}{ccc} T_\psi \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & \Im m \langle \psi(s) | \phi(s) \rangle \end{array} \quad (3.6)$$

Elle a rien d'une connexion par contre :/

3.2 Bilan des formules

- Les phases de ψ entre les instants t_0 et t :

$$\Phi_{\text{tot}}(\psi, t_0, t) := \arg \langle \psi(t_0) | \psi(t) \rangle = \arctan \left(- \frac{\langle \psi(t_0), \omega \psi(t) \rangle}{\langle \psi(t_0), \psi(t) \rangle} \right) \quad (3.7)$$

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) := \Im m \int_{t_0}^t \langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle ds \quad (3.8)$$

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) := \Phi_{\text{tot}}(\psi, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) \quad (3.9)$$

- (conservative) Équation Schrödinger et de Liouville-von Neumann ($h(R)$: Hamiltonien des paramètres R , W : opérateurs statistique) [1, p.6] :

$$i \frac{d\psi(t)}{dt} = h(R)\psi(t) \quad (3.10)$$

$$i \frac{dW(t)}{dt} = [h(R), W(t)] \quad [\cdot, \cdot] = \text{commutateur ?} \quad (3.11)$$

- Moment angulaire (viteuf) $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$M(t) = \Re e(i z \bar{z}') = -\Im m z \bar{z}' \quad \text{thoughts ?} \quad (3.12)$$

3.3 Thoughts

- Si la phase géo est la phase dyn - phase tot et est invariante as gauge t, est-ce que la phase tot correspond à la phase (dyn) entre t_0 et t suivant la géodesique ?
- La “Berry connection” c'est une vraie connexion ? elle est où la covariance alors ?

- “horizontal lift” : pourquoi horizontal ? en quel sens ? (parce que fibré)
- Fréquence de Rubi
- Matrice/base de Pauli et généralisation, groupe $SU(n)$ (un peu de quantique ?)
- Monopole de Dirac + lien avec la phase géo (un peu d'électro-magnétisme ?)
- Invariant de Bargmann + série de Dyson

TABLE DES FIGURES

| | |
|---|----|
| 2.2 Schéma de Bohm [1] sur les trois phases | 15 |
|---|----|

TABLE DES CODES

RÉFÉRENCES

- [1] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [2] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [3] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [4] J. LEFEVRE, *Polarization analysis and optimization geometry*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....] ; University of Melbourne, Dec. 2021.
- [5] J. M. LILLY, *Modulated Oscillations in Three Dimensions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 59 (2011), pp. 5930–5943.
- [6] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [7] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [8] ———, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. II. The Case of Unitary Group Representations*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 269–340.
- [9] S. WANG, *Simple proofs of the Bedrosian equality for the Hilbert transform*, Science in China Series A: Mathematics, 52 (2009), pp. 507–510.