

# Mémoire de Stage de M2

## PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Michel BERTHIER, *et al.*

---

Master MIX - Université de La Rochelle

2024 - 2025

# TABLES DES MATIÈRES

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<hr/>	
<b>PARTIE I — DÉCOMPOSITION DES SIGNAUX MULTIVARIÉE</b>	<b>2</b>
<hr/>	
<b>I — Analyse temps-fréquence</b>	<b>2</b>
1.1 Les base des l'analyse temps-fréquence	2
1.1.1 Distribution de l'énergie en temps et fréquence	3
1.1.2 Fréquence instantanée et covariance	5
1.2 Transformée en signal analytique	7
1.2.1 Le problème de signaux réels et comment le résoudre	7
1.2.2 Propriétés et interprétations des signaux analytiques	9
<b>II — Généralisation au signaux multivariés</b>	<b>11</b>
2.1 Phase et fréquence instantanée de signal multivaré	11
2.2 Cas bivarié et trivarié	12
<hr/>	
<b>PARTIE II — BROUILLON</b>	<b>14</b>
<hr/>	
<b>I — Comprendre la phase dynamique</b>	<b>14</b>
1.1 Réflexion autour du produit hermitien	14
1.2 Écritures et interprétations	15
<b>II — Description des signaux multivariés</b>	<b>16</b>
2.1 Version Lilly [4, 6]	16
2.2 Mon blabla	16
<b>III — Vrac</b>	<b>18</b>
3.1 Random stuff ready pour rédac (+labeled)	18
3.2 Bilan des formules	18
3.3 Thoughts	19
3.4 Point de vue des variétés ?	19

# Introduction

Index des notations :

OBJET/FONCTIONS	NOTATIONS
distribution de Dirac	$\delta$
indicatrice de $E$	$\mathbb{1}_E$
fonction signe	$\text{sign}(x)$
Fourier	$\mathcal{F}[x], \hat{x}$
Transfo en SA	$\mathcal{A}[x], \mathbf{x}_+$
Transfo de Hilbert	$\mathcal{H}[x]$
conjugué	$\bar{x}$
produit hermitien (resp. scalaire)	$\langle x   y \rangle$ (resp. $\langle x, y \rangle$ )
espérance et variance de $f$ suivant $\rho$	$\mathbb{E}_\rho[f(t)] \ \mathbb{V}_\rho[f(t)]$

*tab. 1 — Table des notations mathématiques*

---

## PARTIE I

---

### DÉCOMPOSITION DES SIGNAUX MULTIVARIÉE

---

## I — Analyse temps-fréquence

INTRO DE LA SOUS-SECTION 1.1 — *Malgré ce que l'énoncé de la problématique laisse entendre, dans toute la suite nous travaillerons avec des signaux à valeur de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}^n$  plutôt que  $\mathbb{R}^n$ . Il y a de très bonne raison à la transformation des signaux réels en complexes et c'est sera l'objet de cette première sous-section.*

### 1.1 Les base des l'analyse temps-fréquence

Cette partie reprends, dans les grandes lignes, les propos de COHEN dans son livre Time frequency analysis [2]

Dans l'étude de signaux, la transformée de Fourier est un outil standard puisqu'il donne accès à tout l'information fréquentielle de ce dernier. Ce gain d'information n'est pas gratuit pour autant puisqu'on perd avec tout notion de temporalité. Pourtant dans bien des cas, une information instantanée, dépendante en temps, est plus pertinente.

C'est par exemple le cas dans l'étude de la langue oral (bon terme ?). Le sens d'une phrase ne vient pas du signal, *i.e.* la voix, tout entier mais plutôt de ses valeurs locales. Lorsque l'on prononce le mot "*fleur*", c'est l'enchaînement des sons associés au "*f*", "*l*", "*eu*", *etc.* qui est important et non la structure global du signal. On pourrait également cité l'effet Döppler qui permet, entre autre, de savoir si un émetteur s'éloigne ou se rapproche. Dans ce cadre, le passage d'un signal de hautes à basses fréquences (typiquement d'un son aigu à un son grave) indique que la source, qui se rapprochait, s'est mise à s'éloigner : c'est la variation de fréquence en cours du temps qui est porteuse d'information.

Pour avoir une notion de fréquence instantanée, il serait utile de pouvoir écrire tout signal réel  $x$  sous la forme :

$$x(t) = a(t) \cos \phi(t) \tag{1}$$

où  $a$  correspondrait à l'*amplitude instantanée* du signal et  $\phi$  sa *phase instantanée*. Le problème d'une telle décomposition est que, si elle existe bel et bien, elle n'est en revanche pas unique. L'exemple le plus simple étant le cas  $x(t) = \sin(t)$  qui se représente, entre autre, par les pairs :

$$(a(t), \phi(t)) = (1, t + \pi/2) \quad (a(t), \phi(t)) = (\sin(t), 0) \quad (a(t), \phi(t)) = (2 \sin(t/2), t/2)$$

Pour avoir unicité de cette décomposition, il nous faut donc une contrainte sur  $(a, \phi)$ . Une approche serait de voir  $x$  comme la partie réelle du signal complexe :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z_x(t) = a(t)e^{i\phi(t)} \implies x(t) = \Re z_x(t)$$

Dans ce cas on aurait bien unicité de  $a$  et  $\phi$  par rapport à  $z_x$  (son amplitude et sa phase) mais cela ne fait

que déplacer le problème puisque  $z_x$  n'est pas mieux défini : Il y a une liberté totale quant au choix sa partie imaginaire. Pour motiver la définition de  $z_x$ , sont rappeler quelques outils d'analyse temps-fréquence.

### 1.1.1 Distribution de l'énergie en temps et fréquence

Dans toute cette sous-section, on considérera  $x$  un signal complexe et on notera  $\hat{x}$  ou  $\mathcal{F}[x]$  sa transformée de Fourier (dont on supposera quelle existe, ici on supposera au moins  $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x(t) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \nu & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \end{array} \quad \mathcal{F}[x] = \hat{x}$$

**DÉFINITION 1 (DENSITÉS D'ÉNERGIE)** — Étant donnée un signal complexe  $x$ , la *densité d'énergie*  $\rho$  de  $x$  est donnée par le carré de son module. De même on définit  $\varrho$  la *densité d'énergie spectrale* :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \rho : t & \longmapsto & |x(t)|^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \varrho : \nu & \longmapsto & |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array} \quad (2)$$

La valeur  $\rho(t)$  correspond à la puissance déployée pour émettre le signal à l'instant  $t$  et  $\varrho(\nu)$  à l'énergie associée à la fréquence  $\nu$  sur tout le signal.

La transformée étant une isométrie de l'espace  $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , si  $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , alors l'énergie totale du signal est indépendante de la représentation de ce dernier (temporelle ou spectrale) :

$$E(x) := \|x\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varrho(\nu) d\nu = \|\hat{x}\|_2^2 \quad (3)$$

Par exemple, si  $x(t) = e^{2\pi i \nu_0 t}$ , alors  $\hat{x}(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$ . Dans ce cas, on a les densités :

$$\rho(t) = 1 \qquad \varrho(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$$

Du point de vu temporel, le signal est émis avec une puissance régulière, mais le fait que  $\varrho$  soit un dirac indique que toute l'énergie du signal est concentré en une unique fréquence  $\nu_0$ .

**DÉFINITION 2 (DURÉE ET LARGEUR DE BANDE)** — L'espérance ces densités, pour peu qu'elles existent, sont notées :

$$\mathbb{E}_{\rho}[t] := \int_{\mathbb{R}} t |x(t)|^2 dt \qquad \mathbb{E}_{\varrho}[\nu] := \int_{\mathbb{R}} \nu |\hat{x}(\nu)|^2 d\nu$$

Si un signal est localisé temporellement, alors la première espérance/moyenne donne une idée de l'instant d'émission du signal. Si *a contrario*, le signal est localisé en fréquence, la seconde espérance peut s'interpréter comme la fréquence "dominante" du le signal, ou plus généralement comme sa *fréquence moyenne*.

En particulier, et ce sera important pour la suite, dans le cas des signaux réels, l'espérance de  $\varrho$  est toujours nulles.

On note de même les variances (toujours à condition d'existence) :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\rho}[t] &:= \mathbb{E}_{\rho} \left[ (t - \mathbb{E}_{\rho}[t])^2 \right] & \mathbb{V}_{\varrho}[\nu] &:= \mathbb{E}_{\varrho} \left[ (\nu - \mathbb{E}_{\varrho}[\nu])^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_{\rho} [t^2] - \mathbb{E}_{\rho} [t]^2 & &= \mathbb{E}_{\varrho} [\nu^2] - \mathbb{E}_{\varrho} [\nu]^2 \end{aligned}$$

Les écart-types associés sont plus facilement interprétable. Le premier est appelé *durée d'émission* du signal, puisqu'il renseigne l'étalement temporelle du signal ; et le second *largeur de bande (fréquentielle)* puisque, lui, renseigne l'étalement fréquentielle.

Ces espérances, et plus généralement les moments de  $\rho$  (resp.  $\varrho$ ), s'écrivent en fonction des dérivées  $\hat{x}$  (resp.  $x$ ) via ce que Cohen appelle le "calculation trick" [2] :

PROPOSITION 1 (“CALCULATION TRICKS” DE [2]) — Si le signal est  $n$  fois dérivable et que la densité d’énergie spectrale associée  $\varrho$  admet un moment d’ordre  $n$ , alors ce moment est donnée par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_\varrho [\nu^n] = \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt = \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \left\langle x, \frac{d^n}{dt^n} x \right\rangle \quad (4)$$

Avec les hypothèses analogues, les moments de  $\rho$  s’écrivent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_\rho [t^n] = \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu) \frac{d^n}{d\nu^n} \overline{\hat{x}(\nu)} d\nu = \left( \frac{1}{2i\pi} \right)^n \left\langle \hat{x}, \frac{d^n}{d\nu^n} \hat{x} \right\rangle \quad (5)$$

### Démonstration

À supposer que les intégrales existes et que le théorème de Fubini s’applique, on a  $\forall n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho [\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \nu^n \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu^n \hat{x}(\nu) \overline{\hat{x}(\nu)} d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \nu^n \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} e^{2i\pi\nu t'} dt' d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \end{aligned}$$

Ici, on remarque que :

$$\begin{aligned} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} &= \nu^{n-1} \frac{1}{-2i\pi} \frac{d}{dt} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \\ &= \nu^{n-2} \frac{1}{(-2i\pi)^2} \frac{d^2}{dt^2} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{dt^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \end{aligned}$$

Ce qui permet, en jouant sur les ordres d’intégrations et les propriétés du Dirac, d’obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho [\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{dt^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \left( \frac{1}{-2i\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}[1](t-t') dt dt' \\ &= \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt dt' \\ &= \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt' dt \\ &= \left( \frac{i}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt \end{aligned}$$

... a moins que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varrho[\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{dt^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}[1](t-t') dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dt^n} x(t) \delta(t-t') dt dt' \\
&= \left( \frac{-1}{-2i\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dt'^n} x(t') \overline{x(t')} dt' \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt
\end{aligned}$$

### 1.1.2 Fréquence instantanée et covariance

On notera dans toute la suite, sauf précision, l'amplitude et phase de  $x$  (resp.  $\hat{x}$ ) :

$$x(t) = a(t)e^{i\phi(t)} \quad \text{resp.} \quad \hat{x}(\nu) = \alpha(\nu)e^{i\psi(\nu)}$$

Les fonctions  $a$  et  $\phi$  (resp.  $\alpha$  et  $\psi$ ) héritent des régularités de  $x$  (resp.  $\hat{x}$ ) et on a :

$$\rho = |x|^2 = a^2 \quad \varrho = |\hat{x}|^2 = \alpha^2$$

**PROPOSITION 2** — Si  $\varrho$  admet une espérance et que  $x$  est dérivable, alors on a l'égalité :

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho[\phi'] \quad (6)$$

#### Démonstration

Avec le hypothèses de la proposition 1 précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \frac{i}{2\pi} \rho(t) dt \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x'(t)} dt = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i\phi(t)} (\overline{a'(t) e^{i\phi(t)} + i a(t) \phi'(t) e^{i\phi(t)}}) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i\phi(t)} (a'(t) e^{-i\phi(t)} - i a(t) \phi'(t) e^{-i\phi(t)}) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) (a'(t) - i a(t) \phi'(t)) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \phi'(t) a(t)^2 dt
\end{aligned}$$

On peut se convaincre que le premier terme doit être nul car l'espérance doit être réelle. On peut

s'en assurer par le calcul en notant que c'est l'inégale d'une dérivée :

$$\int_{\mathbb{R}} a'(t)a(t)dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (a^2)'(t)dt = \frac{1}{2} \rho(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Ce qui donne bien :

$$\mathbb{E}_{\varrho}[\nu] = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a'(t)a(t)dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \phi'(t)a(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t)\rho(t)dt$$

**DÉFINITION 3** — La dérivée  $\phi'$  est appelé *fréquence instantanée* du signal  $x$ . Le terme est justifié par l'équation (6) précédente : C'est une fonction dont la moyenne en temps correspond à la fréquence moyenne de  $x$ .

Pour mieux de convaincre du bien fondé de cette interprétation, deux choses. D'une part, pour un signal classique de la forme  $\cos(2\pi\nu t + \varphi)$  ou  $e^{i(2\pi\nu t + \varphi)}$ , la fréquence est clairement identifié par  $\nu$ , que l'on peut voir comme dérivée de la phase<sup>1</sup> :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt}(2\pi\nu t + \varphi)$$

D'autre part, on peut fait le même jeu avec la largeur de bande qu'avec la fréquence moyenne. Cela donne :  
2

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\varrho}[\nu] &= \frac{1}{4\pi^2} \int a'(t)dt + \frac{1}{4\pi^2} \left( \int \phi'(t)^2 \rho(t)dt - \left( \int \phi'(t)\rho(t)dt \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_{\rho} \left[ \frac{a'}{a} \right] + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_{\rho}[\phi'] \end{aligned}$$

On constate deux composantes (qui, par ailleurs, sont des variances purement temporelle). La première ne porte que sur l'amplitude du signal, et inversement, l'amplitude n'apparaît que sur la première. Il donc cohérent que le terme restant (là où apparaît  $\phi'$  !) porte l'information fréquentielle du signal.

À noter tout de même, que **REMARQUE SUR LE PRINCIPE D'INCERTITUDE !!!!**

Afin de clairement expliciter le problème des signaux réels pour l'analyse temps-fréquence, est introduit une dernier outils :

**DÉFINITION 4 (COVARIANCE)** — Étant données deux variables aléatoire  $X$  et  $Y$ , leur covariance, qui mesure une forme de corrélation entre  $X$  et  $Y$ , est donnée par la différence :

$$\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Outil qui à tout a fait sa place dans le cadre de l'analyse temps-fréquence. Seulement, les distributions associées au temps et à la fréquence ne sont pas les mêmes et le terme  $\mathbb{E}[XY]$  n'est donc pas défini. Pour y remédier on se repose sur l'interprétation de  $\phi'$  : puisque qu'il correspond à une description temporelle de la fréquence, elle est associée à  $\rho$ . On définit alors la *covariance du signal  $x$*  comme le différence :

$$\text{Cov}(x) := \mathbb{E}_{\rho}[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_{\rho}[t]\mathbb{E}_{\varrho}[\nu] = \mathbb{E}_{\rho}[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_{\rho}[t]\mathbb{E}_{\rho}[\phi'(t)] \quad (7)$$

Les concepts de base de l'analyse temps-fréquence étant posés, voyons à présent les problèmes que posent les signaux réels.

<sup>1</sup> Le facteur  $2\pi$  s'assure que l'on parle bien de fréquence, question d'unité. Sans,  $\nu$  correspondait à une pulsation et en définissant la transformée de Fourier en terme de pulsation (i.e. sans le facteur  $2\pi$  dans l'exponentielle), alors la formule (6) n'aurait pas de facteur  $2\pi$  non plus. En clair, c'est une question de cohérence.

<sup>2</sup> L'on a même (mais je sais pas quoi en faire) :

$$\mathbb{V}_{\varrho}[\nu] = 1/4\pi^2 \mathbb{V}_{\rho}[\ln(a)'] + 1/4\pi^2 \mathbb{V}_{\rho}[\phi']$$



## 1.2 Transformée en signal analytique

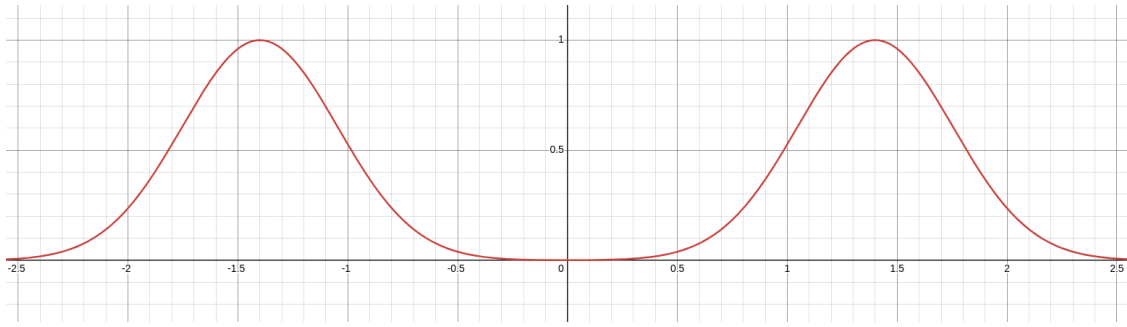
### 1.2.1 Le problème de signaux réels et comment le résoudre

Les outils de mesures ayant la fâcheuse tendance à fournir des données réelles, ce sont les signaux réels les plus étudiés. Pourtant, cette propriété rend les outils d'analyse temps-fréquence développés plus haut, si non obsolète, au moins compliqué à interpréter.

Tout vient du fait que si  $x$  est réel alors son spectre est à symétrie hermitienne et sa densité spectrale  $\varrho$  symétrique :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R} &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{x}(-\nu) = \overline{\hat{x}(\nu)} \\ &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \varrho(-\nu) = \varrho(\nu) \end{aligned}$$

Comme dit plus tôt, cela implique que la fréquence moyenne de tout signal réel est nulle (intégrale d'une fonction impaire). Ce qui, en plus de ne pas être très instructif, n'est pas cohérent avec l'interprétation physique qu'on voudrait faire cette moyenne. Par exemple, si  $\varrho$  prend la forme ci-dessous (*fig. 1.1*), alors il serait plus naturelle de demander à ce que la fréquence moyenne se trouve autour de 1,4. De même, la largeur de bande spectrale ne correspond plus à l'étalement de chaque gaussienne, mais plutôt à leur espacement.



*fig. 1.1 — Exemple de densité spectrale d'un signal réel ESP A 1,4*

Même problème avec la covariance qui sera toujours nulle pour les signaux réels. De là en conclure que la fréquence instantanée de n'importe quel signal réel est toujours décorrélée du temps serait, pour le moins, insatisfaisant.

Pour résoudre les problèmes liés à la fréquence moyenne et la largeur de bande, il suffirait de ne conserver que la partie positive du signal. On s'intéresserait alors au signal transformée  $\mathcal{A}[x]$  tel que :

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x}$$

où  $\mathbb{1}_E$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $E$  et où le facteur 2 permet de conserver l'énergie du signal. Avec la transformée de Fourier inverse, ce nouveau signal s'écrit alors :

$$\mathcal{A}[x] = \mathcal{F}^{-1}[2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x}] = 2\mathcal{F}^{-1}[\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] * x$$

La transformée inverse de cette indicatrice (qui n'est autre que la fonction de Heavyside) n'est pas définie au sens classique, mais l'est au sens des distributions. Pour l'écrire, on introduit la distribution suivante :

**DÉFINITION 5 (VALEUR PRINCIPALE DE CAUCHY)** — On appelle *valeur principale de Cauchy* la distribution, notée  $\text{vp} \frac{1}{x}$ , telle que :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle &= \int_0^t \frac{\varphi(t)}{t} dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt \end{aligned} \quad (8)$$

Ici  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  est l'espace de Schwartz des fonctions  $C^\infty$  à décroissance rapide et la limite en  $\varepsilon$  assure que

l'intégrale (impropre) converge bien. Sa valeur est également appelée *valeur principale* de l'intégrale.

La distribution  $\text{vp} \frac{1}{x}$  est la valeur principale de la fonction inverse dans le sens où son produit avec l'identité donne 1 ( $\langle \text{id}_{\mathbb{R}} \times \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \text{id}_{\mathbb{R}} \times \varphi \rangle = 1$ ) mais avec des propriétés d'intégration supplémentaires. Entre autre :

PROPRIÉTÉ 1 — La transformée de Fourier de la valeur principale de Cauchy est donnée, au sens des distributions, par :

$$\mathcal{F} \left[ \text{vp} \frac{1}{x} \right] = -i\pi \text{sign} \quad (9)$$

On en déduit la transformée de Fourier inverse :

$$\mathcal{F}^{-1} [2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] = \mathcal{F}^{-1} [1 + \text{sign}] = \delta + \frac{i}{\pi} \text{vp} \frac{1}{x} \quad (10)$$

### Démonstration

juste pour le plaisir. Par définition, la transformée de Fourier de la valeur principale est telle que,  $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F} \left( \text{vp} \frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle &= \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \hat{\varphi} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\varphi}(\nu)}{\nu} d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\hat{\varphi}(\nu) - \hat{\varphi}(-\nu)}{\nu} d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \left( \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2i\pi\nu t} dt - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{2i\pi\nu t} dt \right) d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) (e^{-2i\pi\nu t} - e^{2i\pi\nu t}) dt d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} -2i\varphi(t) \sin(2\pi\nu t) dt d\nu \\ &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\nu t)}{\nu} d\nu dt \end{aligned}$$

En posant  $u = 2\pi\nu t \text{sign}(t)$  (le signe de  $t$  assure que l'on ait le même signe dans et hors du sin), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F} \left[ \text{vp} \frac{1}{x} \right], \varphi \right\rangle &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_0^{+\infty} \text{sign}(t) \frac{\sin(u)}{u} du dt \\ &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \frac{\pi}{2} \text{sign}(t) dt \\ &= \langle -i\pi \text{sign}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

DÉFINITION 6 (TRANSFORMÉE EN SA ET DE HILBERT) — On définit alors la *transformée en signal analytique* (SA) du tout signal  $x$  par l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \mathcal{A}[x] := 2x * \mathcal{F}^{-1}[\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] : & t & \longmapsto x(t) + \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds \end{array} \quad (11)$$

Par construction, on a bien  $\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x}$ , et on dira plus généralement de tout signal dont le spectre est réel positif que c'est un *signal analytique*.

L'intégral à droite de (11) est appelée *transformée de Hilbert* du signal. Elle est notée :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{H}[x] : t &\longmapsto \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds = \frac{1}{\pi} \left( \text{vp} \frac{1}{x} \right) * x \end{aligned} \quad (12)$$

Par souci de commodité, plutôt que redéfinir tout le vocabulaire développé plus haut (fréquence moyenne, temps moyen, *etc.*) pour les signaux réel via la transformation  $\mathcal{A}$ , dans la suite du mémoire on travaillera directement avec  $\mathcal{A}[x]$ .

### 1.2.2 Propriétés et interprétations des signaux analytiques

Dans les cas des signaux réels, la transformée de Hilbert est à valeur dans  $\mathbb{R}$ . Aussi, la transformée  $\mathcal{A}[x]$  à pour partie réelle  $x$  et pour partie imaginaire  $\mathcal{H}[x]$ . Sous forme exponentielle, cela donne :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} \implies \begin{cases} x(t) = a(t) \cos \phi(t) \\ \mathcal{H}[x](t) = a(t) \sin \phi(t) \end{cases}$$

On obtient alors on décomposition de  $x$  en une paire  $(a, \phi)$  telle que discuté plus haut.

**DÉFINITION 7 (AMPLITUDE ET PHASE INSTANTANÉE)** — On définit ainsi l'*amplitude instantanée*  $a_x$  et la *phase instantanée*  $\phi_x$  de tout signal  $x$  comme étant respectivement l'amplitude et la phase de  $\mathcal{A}[x]$  :

$$a_x = |\mathcal{A}[x]| \quad \phi_x = \arg(\mathcal{A}[x]) \quad (13)$$

Il est important de noter que si un signal est présenté sous la forme  $x = a \cos \phi$ , rien n'implique que  $a$  et  $\phi$  corresponde à l'amplitude et la phase instantanée du signal. Si ce n'est pas le cas, c'est que cette décomposition n'était "pas la bonne" en cela qu'elles ne s'interprètent pas comme l'on aimerait.

Pour comprendre comment cette transformation "sélectionne" la fréquence instantanée, détaillons le cas où  $x$  s'écrit comme produit de deux signaux pures (fig. 1.2) :

$$x(t) = \cos(2\pi\nu_1 t) \cos(2\pi\nu_2 t)$$

On montre sans mal<sup>3</sup> que si  $\nu_1 \geq \nu_2$ , alors la transformée en SA de  $x$  s'écrit :

$$\mathcal{A}[x] = \cos(2\pi\nu_1 t) e^{2i\pi\nu_2 t}$$

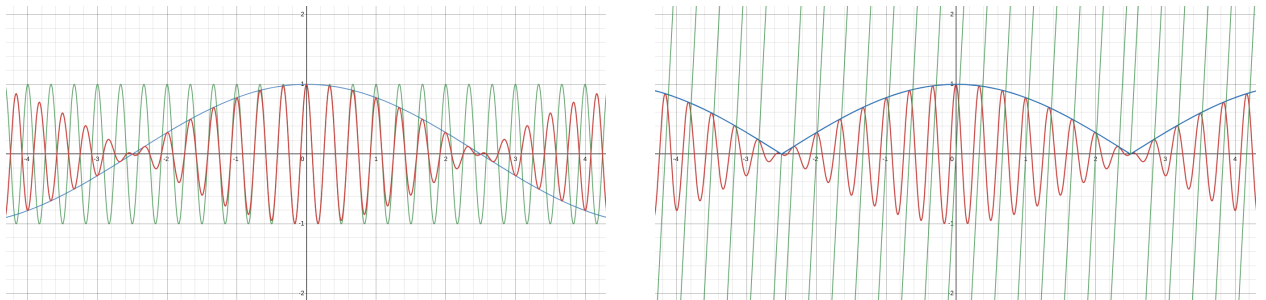


fig. 1.2 — Représentation graphique du signal  $x$  (rouge) avec  $\nu_1 = 3$  et  $\nu_2 = 0.1$ . Sur l'image de gauche, avec signaux de fréquences pures (bleu et vert). Sur l'image de droite, avec son amplitude (bleu) et sa phase instantanée (vert). Les discontinuités de la phase sont dû à l'arrondi à  $2\pi$  près de l'argument de  $\mathcal{A}[x]$  et à la façon dont il est calculé lorsque le signal s'annule (mise à 0). Voir [ici](#) pour un graphique dynamique.

Le signal  $\mathcal{A}[x]$  n'est ici pas sous forme exponentielle à proprement parler puisque le cosinus peut être négatif (pour s'y ramener, il suffit de passer le cos en valeur absolue et d'ajouter  $\pm\pi$  à l'argument) mais l'avantage de

<sup>3</sup> $\hat{x}$  est donné par 4 Diracs, en ne gardant que ce non nul sur  $\mathbb{R}^+$  on obtient le spectre de  $\mathcal{A}[x]$  et il reste plus qu'à inverser la transformée de Fourier.

cette forme est qu'elle fait clairement apparaître les fréquences  $\nu_{1,2}$ . En particulier, la fréquence instantanée du signal est la plus grande des deux fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . La plus petite, elle, se retrouve dans l'amplitude. Ce résultat est rassurant en cela qu'il est plus naturel de voir le cosinus de basse fréquence comme modulant celui de haute fréquence que l'inverse comme on le voit sur la première image de la figure 1.2.

Aussi, en mettant les hautes fréquences du signal dans la fréquence instantanée, on s'assure de limiter les variations de l'amplitude. Cela apporte bien plus de contrainte en terme de décomposition  $(a_x, \phi_x)$ , en cela que si l'inverse étant vrai, alors toutes les fréquences pourraient être envoyées dans l'amplitude, ce qui laisserait la phase invariante.

Cela étant dit, lorsque l'on fait varier  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , le résultat n'est pas toujours si intuitif. C'est notamment le cas lorsque les deux deviennent de plus en plus proche :

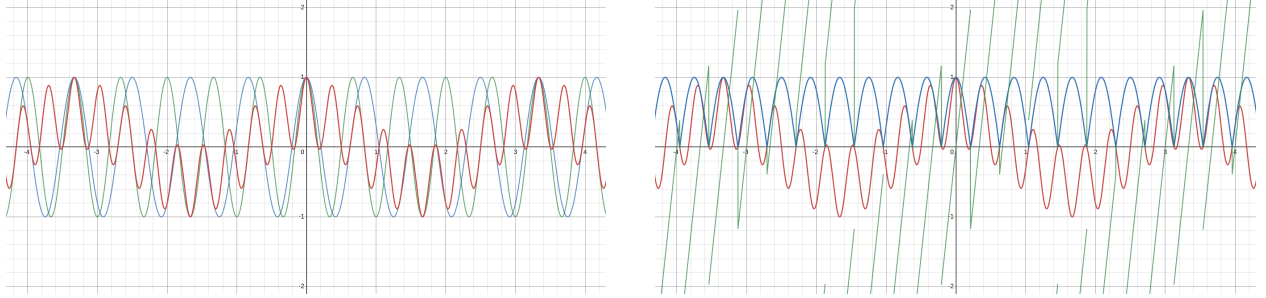


fig. 1.3 — Idem que pour la figure 1.2 précédente, avec cette fois  $\nu_1 = 1.5$  et  $\nu_2 = 1.3$ .

C'est vraiment bizarre parce que c'est vraiment pas ce à quoi on s'attendrait, ce serait beaucoup mieux d'avoir d'avoir un truc du genre :

$$a_x(t) = \frac{|\cos 2\pi(\nu_1 - \nu_2)t| + 1}{2}$$

:(((

**THÉORÈME DE BEDROSIAN** — Dans sa forme la plus générale, le théorème de Bedrosian énonce que donnée si deux fonctions  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  sont telles l'une des trois assertions est vraie :

- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda, +\infty[, \text{supp } \hat{g} \subset [\lambda, +\infty[$
- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset ]-\infty, \lambda], \text{supp } \hat{g} \subset ]-\infty, -\lambda]$
- $\exists \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda_1, \lambda_2], \text{supp } \hat{g} \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda_2, \lambda_1]$

alors la transformée de Hilbert de leur produit est donnée par la formule :

$$\text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda_1, \lambda_2], \text{supp } \hat{g} \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda_2, \lambda_1] \implies \mathcal{H}[fg] = f\mathcal{H}[g] \quad (14)$$

**COROLLAIRE 1.1** — En particulier, le signal  $x$  d'amplitude (resp. phase) instantanée  $a_x$  (resp.  $\phi_x$ ) est tel que  $a_x \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\cos \phi_x \in L^2(\mathbb{R})$ , sous les mêmes conditions pour le théorème 1, on a :

$$\mathcal{H}[x] = a_x \mathcal{H}[\cos(\phi_x)] \quad \text{et} \quad \mathcal{H}[\cos(\phi_x)] = \sin(\phi_x)$$

- théorème de Bedrosian [7]
- cas AM-FM

## II — Généralisation au signaux multivariés

### 2.1 Phase et fréquence instantanée de signal multivaré

Dans la suite, ce qui va nous intéresser, ce sont les signaux multivariés :

**Faudra parler des propriétés du trucs un peu, genre la différence pour fourier des images et des multivarées ( $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  vs  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ )**

**+ quelques propriétés pour les cas SA, y'a moyen que ca soit pas inintéressant**

Toujours dans l'optique d'une analyse temps-fréquence de ces signaux, on voudrait pouvoir écrire tout signal  $\mathbf{x}$  sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\varphi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\varphi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix}$$

La phase ainsi isolée correspond à la phase instantanée du signal et sa dérivée, (à  $2\pi$  près) à la fréquence instantanée. Là encore, cette phase existe mais sans unicité puisqu'il suffit de poser, pour tout  $\varphi \in \mathbb{R}$  :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \varphi_i = \arg(x_i) - \varphi$$

Il faut donc une contrainte supplémentaire sur  $\varphi$ . Cette fois-ci, elle ne pourra pas simplement venir des spectres  $\hat{x}_i$  puisque, d'une part ils ont déjà été exploités par  $\mathcal{A}$ . Mais aussi et surtout parce qu'elle doit tenir compte des liens implicites qui existe entre chacune des composantes du signal. **Est-ce que ca pourrait venir de l'équation (18) ?**

## VRAC

**DÉFINITION 8 (FOURIER DE SIGNAL MULTIVARIÉ)** — La transformée de Fourier “faible” d'un signal multivaré est définie comme la transformée de Fourier composante par composante du signal :

$$\mathcal{F}[\mathbf{x}] = \left( \mathcal{F}[x_i] \right)_{1 \leq i \leq n}$$

**REMARQUE** — En posant (suivant les notations ci-dessus)  $a = \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\|^2$ ,  $\mathbf{x}$  s'écrit :

$$\mathbf{x}(t) = e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\varphi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\varphi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \alpha_1(t)e^{i\varphi_1(t)} \\ \alpha_2(t)e^{i\varphi_2(t)} \\ \vdots \\ \alpha_n(t)e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix}$$

avec  $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{S}^{n-1}$ .  $\alpha$  est donc définie à une rotation près et en notant cette rotation  $R_\Theta$ ,  $\psi$  s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1(t)} & & & \\ & e^{i\varphi_2(t)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix} R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \\ &= a(t)e^{i\varphi(t)} e^{i \text{Diag}(\varphi_i(t))} R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \text{Diag}(e^{i\varphi_i(t)}) R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 2.2 Cas bivarié et trivarié

On a un signal bivarié  $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$  qu'on transforme (voir ??) soit la forme :

$$\mathbf{x}_+(t) = \begin{pmatrix} x_+(t) \\ y_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ a_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

À côté de ça, on a les ellipses modulées :

$$z(t) = e^{i\theta} (a(t) \cos \phi(t) + ib(t) \sin \phi(t)) = A(t)e^{i\theta} (\sin \chi(t) \cos \phi(t) + i \sin \chi(t) \sin \phi(t)) \in \mathbb{C}$$

Qui sous forme vectoriel se réécrit :

$$z(t) = e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \end{pmatrix} = A(t)e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad R_{\theta} \in \text{SO}_2(\mathbb{R}) \quad (15)$$

Pour avoir la désinscription de  $\mathbf{x}$  en terme d'ellipse, il suffit donc de poser :<sup>4</sup>

$$z_x(t) = z(t) \iff \begin{pmatrix} a_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ a_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} = A(t)e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix}$$

Ensuite, on pose :

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ e^{i\phi_+} \\ a_- e^{i\phi_-} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_+ + iy_+ \\ x_+ - iy_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} 2\phi &= \phi_+ + \phi_- & a &= A \cos \chi = a_+ + a_- \\ 2\theta &= \phi_+ - \phi_- & b &= A \sin \chi = a_+ - a_- \end{aligned}$$

et on en déduit :

$$A = \sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2} \quad \begin{aligned} \cos \chi &= \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2}} \\ \sin \chi &= \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2}} \end{aligned}$$

Ce qui donne *in fine* (super osef) :

$$\begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} = e^{i\frac{\phi_+ + \phi_-}{2}} R_{\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}} \begin{pmatrix} a_+ + a_- \\ -i(a_+ - a_-) \end{pmatrix}$$

L'équation (15) se généralise très bien, il suffit d'augmenter la taille de  $R_{\theta} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$  et de lui donner le vecteur étendu :<sup>5</sup>

$$z_x(t) = \begin{pmatrix} x_{1+}(t) \\ \vdots \\ x_{n+}(t) \end{pmatrix} = e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A(t)e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

<sup>4</sup>C'est la version analytique du la version vectorielle de l'ellipse !

<sup>5</sup>Sachant que le vecteur contenant  $a$  et  $b$  est principalement nul, on peut réécrire le produit ne considérant que les deux premières colonnes de  $R_{\theta}$ .

Maintenant, la question est de savoir comment généraliser la transformation en  $(z_+, z_-)$  pour obtenir les paramètres  $(A, \phi, R_\theta, \chi)$  dans ce cas...  
 Pour généraliser le procédé, on peut noter que :

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} U \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} \quad \text{avec } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{U}(2)$$

Ce qui ramène à se demander comment généraliser  $U$  à  $\text{SU}(n)$ . Le problème est que  $U$  est indépendant de tout les paramètres  $(A, \phi, R_\theta, \chi)$  et sa généralisation est vraiment pas évidente sachant qu'on que le formule avec  $n = 2...$  et pour  $n = 3$  ca devient déjà chaud (pour rappelle  $\dim \text{SO}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$  et donc  $\theta \in \mathbb{R}^n$ , ce qui rend le problème de pire en pire à mesure qu'on augmente  $n$ ).

---

## PARTIE II

---

### BROUILLON

---

## I — Comprendre la phase dynamique

### 1.1 Réflexion autour du produit hermitien

Soit  $x, y \in \mathbb{C}^n$  des vecteurs complexes et  $X, Y \in \mathbb{R}^{2 \times n}$  leur versions réelles. On note  $x^j$  sa  $j^{eme}$  composante complexe et  $x_1$  (resp.  $x_2$ ) le vecteur composé de ses parties réelles (resp. imaginaires) :

$$x = (x^j)_j = x_1 + ix_2 = (x_1^j)_j + i(x_2^j)_j$$

On a deux façon d'écrire le produit hermitien (canonique) de  $x$  avec  $y$ .

La première :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x_1 + ix_2, y_1 + iy_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - i\langle x_1, y_2 \rangle + i\langle x_2, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + i(\langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle) \\ &= \sum_j x_1^j y_1^j + x_2^j y_2^j + i \left( \sum_j x_2^j y_1^j - x_1^j y_2^j \right) \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle + i \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle X, Y \rangle + i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} Y \right\rangle \end{aligned}$$

Cette formule peut s'interpréter en disant que le produit hermitien encode le produit scalaire entre  $X$  et  $Y$  et le produit scalaire de  $X$  avec les vecteurs  $y^j = (y_1^j, y_2^j)$  auquel on aurait appliqué une rotation de  $90^\circ$  (rotation qui, par ailleurs, correspond à la multiplication par  $i$  dans le plan complexe). Moralement,  $\langle x, y \rangle = 0$  demande une orthogonalité de  $X$  à un plan, ce qui fait sens puisque cela tient compte du fait que les  $x^j, y^j$  sont complexes (donc de dimension 2 en tant que  $\mathbb{R}$ -e.v.).

Pour les connaisseurs, on retrouve l'égalité "produit hermitien = produit scalaire  $-i$  forme symplectique" !! Voir [plan proj complexe](#) et [variété kählérienne](#)

On a aussi l'écriture (quand-même moins clair) :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + i(\langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle) \\ &= \sum_j x_1^j y_1^j + x_2^j y_2^j + i \sum_j (x_2^j y_1^j - x_1^j y_2^j) \\ &= \sum_j \langle X^j, Y^j \rangle - i \sum_j \det(X^j, Y^j) \end{aligned}$$



Cette formule dit que les parties réelles et imaginaires du produit  $\langle x, y \rangle$  encodent respectivement “l’orthogonalité moyenne” et la “linéarité moyenne” entre les familles de vecteurs  $X^j \in \mathbb{R}^2$  et  $Y^j \in \mathbb{R}^2$ . L’orthogonalité d’une part parce que le produit scalaire s’annule en cas d’orthogonalité (no shit), la linéarité d’autre part car le déterminant s’annule en cas de colinéarité et moyenne car se sont des sommes sur  $j$ .  **$\langle x, y \rangle = 0$  ne dit pas que les vecteurs sont à la fois colinéaire et orthogonaux parce que ce sont des valeurs moyennes (i.e. annuler une somme ne veut pas dire que chacun des termes sont nuls).**

Si maintenant on s’intéresse au cas  $y = x$ , on a  $\forall h \in \mathbb{C}^n$  :

$$\begin{aligned}\langle x + h, x + h \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle + \langle h, h \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \overline{\langle x, h \rangle} + \langle h, h \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\Re\langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle\end{aligned}$$

Donc si  $x \in \mathbb{C}^n$  est fonction d’un paramètre  $t$ , l’égalité  $\langle x, \dot{x} \rangle = \frac{1}{2}\partial_t \langle x, x \rangle$  du cas réel devient :

$$\langle x, \dot{x} \rangle = \frac{1}{2}\partial_t \langle x, x \rangle + i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \dot{X} \right\rangle \quad (16)$$

En particulier, quand bien-même  $x$  serait de norme constante, on aurait toujours un degré de liberté pour  $\langle x, \dot{x} \rangle$  :

$$\|x\| = c \implies \langle x, \dot{x} \rangle = i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \dot{X} \right\rangle$$

## 1.2 Écritures et interprétations

- Tout le monde introduit la phase dynamique par la formule :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) := -\Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds \quad (17)$$

- Première chose, avec (16), on a encore :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) = \int_{t_0}^t \frac{\langle \psi(s), \omega \dot{\psi}(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds$$

A.k.a. la phase dynamique porte l’information symplectique (cumulée). Présenté ainsi, est-ce que la phase totale/géométrique porte l’information “riemannienne” (géométrique donc WINK WINK) ?

- En terme de fréquence, si  $\psi$  est de norme 1, alors (mais c’est vraiment pas dit que l’intégrale converge dans ce cas) :

$$\|\psi(t)\| = 1 \implies \Phi_{\text{dyn}}(\psi, -\infty, +\infty) = i \int_{\mathbb{R}} \langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle ds = \pm 2\pi \int_{\mathbb{R}} \nu |\hat{\psi}(\nu)|^2 d\nu = \pm 2\pi \mathbb{E}_{|\hat{\psi}|^2} [\nu]$$

- Lilly [6] propose de d’écrire  $\psi$  avec une phase isolé  $\varphi$  de sorte que :

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} = e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\varphi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\varphi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix}$$

Et avec un peu de travail (qui sera développé), on obtient que le mieux c’est de poser :

$$\varphi'(t) := -\frac{\Im m \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle}{\|\psi(t)\|^2} = \frac{\sum_i \phi'_i(t) a_i(t)}{\sum_i a_i(t)}$$

On voit donc que la phase dynamique est donnée par le cumule des fréquences instantanées, ou comme le différentiel de phase de  $\psi$  :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) = -\Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds = \int_{t_0}^t \varphi'(s) ds = \varphi(t) - \varphi(t_0)$$

- Avec les mêmes notations, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle &= \left\langle \left( a_i(t) e^{i(\varphi(t) + \varphi_i(t))} \right)_i \middle| \left( (a'_i(t) + i(\varphi'(t) + \varphi'_i(t)) a_i(t)) e^{i(\varphi(t) + \varphi_i(t))} \right)_i \right\rangle \\
&= \sum_i a_i(t) \left( a'_i(t) - i(\varphi'(t) + \varphi'_i(t)) a_i(t) \right) \\
&= \sum_i a_i(t) a'_i(t) - i \sum_i (\varphi'(t) + \varphi'_i(t)) a_i(t)^2 \\
&= \sum_i a_i(t) a'_i(t) - i \varphi'(t) \sum_i a_i(t)^2 - i \sum_i \varphi'_i(t) a_i(t)^2 \\
&= \sum_i a_i(t) a'_i(t) - i \varphi'(t) \|a(t)\|^2 - i \sum_i \varphi'_i(t) a_i(t)^2
\end{aligned}$$

Avec  $a = {}^t(a_1, \dots, a_n) = |\psi\rangle$  et  $\|a\| = \|\psi\|$ . On a donc :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) &= \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s) \|a(s)\|^2}{\|a(s)\|^2} ds + \sum_i \int_{t_0}^t \frac{\varphi'_i(s) a_i(s)^2}{\|a(s)\|^2} ds \\
&= \Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) + \sum_i \mathbb{E}_{|\psi_i|^2 / \|\psi\|^2} [\mathbb{1}_{[t_0, t]} \varphi'_i]
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\sum_i \mathbb{E}_{\frac{|\psi_i|^2}{\|\psi\|^2}} [\mathbb{1}_{[t_0, t]} \varphi'_i] = 0 \quad (18)$$

- Quoi qu'il en soit, de toute ces formules il ressort que la phase dynamique ne regarde que *la* phase/fréquence instantanée de  $\psi$  (et un peu son amplitude aussi mais c'est secondaire) et (je crois) donne une contrainte sur *les* phases  $\varphi_i$

## II — Description des signaux multivariés

### 2.1 Version Lilly [4, 6]

- On veut écrire  $\mathbf{x}$  sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = a(t) e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t) e^{i\phi_1(t)} \\ a_2(t) e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t) e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix}$$

- Lilly explique comment obtenir  $\phi$  dans le cas général (faut revoir ça parce que meh quand-même)
- Sauf que ce  $\phi$  c'est lié à la phase dynamique est pas du tout à polarisation du signal. Pourtant c'est dans la polar qu'on a la phase géo.
- Quoi qu'il en soit, les cas dim 2 et 3 c'est fait [5, 4, 3]

### 2.2 Mon blabla

PVD OPTIMISATION — Lilly [6, p. 602/3] obtient la phase instantanée en minimisant l'erreur d'ordre 1 :

$$\min_{\omega} \|\tilde{x}(t, \omega)\|^2$$

Ce qui lui donne :

$$\omega_x(t) = \phi(t)/\tau = -\frac{\Im m \langle x, x' \rangle}{\|x\|^2}$$

QUESTION : est-ce qu'on peut tout avoir en minimisant la bonne quantité ? (oui, principe de

moindre action fr)

**PROPOSITION 3** — Les signaux bivariés se décrivent très simplement à l'aide des quaternions. En considérant  $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  la base canonique des quaternions  $\mathbb{H}$ , on peut voir  $\psi$  comme étant à valeur dans  $\mathbb{C}_j^n$  ( $\mathbb{C}_j := \mathbb{R} \times \mathbf{j}\mathbb{R}$ ), de sorte que :

$$\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \exists a, \theta, \chi, \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \psi(t) = a(t)e^{i\theta(t)}e^{-\mathbf{k}\chi(t)}e^{\mathbf{j}\varphi(t)}$$

Sous cette forme, les paramètres  $a$  et  $\varphi$  s'interprètent respectivement comme l'amplitude et la phase instantanée du signal. Les deux paramètres restant contrôlent l'ellipticité ( $\chi$ ) et l'orientation ( $\theta$ ) de l'ellipse de polarisation instantanée. C'est-à-dire l'ellipse que suit le signal à l'instant  $t$ .

Dit autrement, à tout instant  $t$ ,  $\psi(t)$  est vu comme un point d'une ellipse dont la taille est caractérisée par  $a(t)$ , l'ellipticité par  $\chi(t)$  et l'orientation par  $\theta(t)$ .  $\phi(t)$  permet lui de situer  $\varphi(t)$  sur cette ellipse.

*Le problème de cette représentation est qu'elle se généralise mal aux signaux plus que 2-variés et, à notre connaissance, il n'existe pas d'extensions des quaternions à de plus haute dimension. voir Proposition 4 et 5, équations (20), (21) et (22)*

Il est évident que cette représentation est présente bien plus de paramètres que nécessaire, puisque deux devraient suffire. Pour autant, elle permet de mieux **je sais quoi mais c'est sur qu'il y'a une raison**. Si cette représentation se généralise mal parce qu'elle demanderait d'avoir une extension de  $\mathbb{H}$ , sont interprétations graphique, elle, se généralise très bien. Par exemple, en dimension 3, alors l'ellipse devient un ellipsoïde. L'amplitude reste de dimension 1 parce qu'elle ne fait que contrôler la taille de cet ellipsoïde, mais les autres paramètres eux doivent être de dimension 2. L'ellipsoïde à besoin de deux angles pour être orienté, possède deux degrés d'ellipticité et ces points sont déterminés par deux angles.

**PROPOSITION 4** — Plus généralement, tout signal multivarié  $\psi$  est (*devrait être*) caractérisé par quatre paramètres (donc  $1 + (n-1)(\frac{n}{2} - 2)$  scalaires) :

$$a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \quad \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/2, \pi/2]^{\frac{n(n-1)}{2}}) \quad \chi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/4, \pi/4]^{n-1}) \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi]^{n-1})$$

À bien y réfléchir, décrire un ellipsoïde dans l'espace, c'est exactement de quoi font les matrices symétriques définies positives. Donc on pourrait tout à fait remplacer les informations  $(a, \theta, \chi)$  par une matrice symétrique positive de dimension  $n$ . Il ne resterait alors plus que  $\varphi$  qui, de toute façon ne devrait pas trop être lié aux autres paramètres.

Enfin, sûrement que si parce que y'a un monde pour  $\varphi = 0_{\mathbb{R}}^n$  et c'est le reste des paramètres qui fait le travail. Mais clairement c'est pas intéressant comme description. L'idée serait plutôt décrire le signal  $\psi$  en minimisant les variations de  $(a, \theta, \chi)$ . Ça appelle clairement à chercher que dans l'espace de Siegel mais pas seulement, parce que c'est pas juste des chemins chez Siegel qui nous intéressent.

Ou alors c'est le jeu de jauge qui fait qu'on tue  $\varphi$  ? auquel cas tout les jours Siegel.

*BTW, les quaternions c'est fait pour décrire les rotations et c'est (quasiment) ce qu'on fait avec, donc aller chercher dans un espace de matrices pour généraliser le principe c'est pas déconnant. D'ailleurs, vu que c'est pas exactement ce qu'on fait avec, dans quelle mesure c'est pas le cas et est-ce qu'on exploite vraiment la structure des quaternions ?*

**PROPOSITION 5** — Autre approche : un signal multivarié étant moralement un chemin de  $\mathbb{R}^n$ , son graphe est une variété (plongée) de dimension 1. Sachant cela, si en chaque instant on veut définir l'ellipsoïde sur laquelle elle repose à un instant  $t$ , il est moral que cette ellipsoïde soit en fait une ellipse puisque c'est elle-même une variété de dimension 1.

Partant de là, on aurait toujours  $a$ ,  $\chi$  et  $\phi$  pour la décrire et seulement  $\theta$  gagnerait en dimension pour pouvoir orienter l'ellipse dans les  $n$  axes.  $\psi$  serait alors la donnée de  $3 + \frac{n(n-1)}{2}$  paramètres :

$$a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \quad \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi]^{\frac{n(n-1)}{2}}) \quad \chi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/4, \pi/4]) \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi])$$

On aurait beaucoup moins de paramètres et c'est quand-même bien. En même temps ça paraît plus contraignant comme modèle. Pour comparer les deux, il faudrait voir comment les deux se décomposent

dans le cas d'un signal qui ne varierait sur une ellipsoïde fixe. *i.e.* dans un cas où  $\theta, \chi$  de la proposition 4 varie pas alors que ceux de la proposition 5 si.

### III — Vrac

#### 3.1 Random stuff ready pour rédac (+labeled)

DÉFINITION 9 (SIGNAL MULTIVARIÉ) — Un *signal multivarié*, ou *n-varié*, est un vecteur composé de  $n \in \mathbb{N}^*$  signaux  $x_i$ . Si  $n = 2$ , alors on parle de signal *bivarié*.

Dans la continuité de ce qui à été dit dans la sous-section 1.2.1, dans le cas des signaux réels, on s'intéressera au vecteur composé des transformées en SA (eq. 11, déf. 6) des  $x_i$ . **Au moins dans toute cette section**, un tel signal sera noté :

$$\mathbf{x}_+(t) : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathcal{A}[x_1] \\ \mathcal{A}[x_2] \\ \vdots \\ \mathcal{A}[x_n] \end{pmatrix} \end{array}$$

On supposera que chaque composante  $x_i$  de  $\mathbf{x}$  aura autant de régularité et de condition d'intégrabilité que nécessaire (**il vaudra préciser lesquelles à un moment**).

DÉFINITION 10 — Ainsi, il reste tout un degré de liberté au produit  $\langle x, \dot{x} \rangle$  même si  $x \in \mathbb{S}^{2n}$ . En intégrant ce degré de liberté supplémentaire, c'est-à-dire en tenant compte de son évolution sur la période  $[t_0, t]$ , l'on obtient ce qui est appeler le *phase dynamique* :

$$\Phi_{\text{dyn}} := \Phi_{\text{dyn}}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Im m \langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle ds$$

Elle dynamique en cela qu'elle est propre au variation de  $\psi$  et qu'elle considère tout l'évolution de  $\psi$  : ça dynamique.

DÉFINITION 11 (CONNEXION DE BERRY) — On appelle *connexion de Berry* le champ de forme linéaire :

$$\forall \psi \in \mathcal{M}, \quad A_\psi : \quad \begin{array}{ccc} T_\psi \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & \Im m \langle \psi(s) | \phi(s) \rangle \end{array} \quad (19)$$

**Elle a rien d'une connexion par contre :/**

#### 3.2 Bilan des formules

- Les phases de  $\psi$  entre les instants  $t_0$  et  $t$  :

$$\Phi_{\text{tot}}(\psi, t_0, t) := \arg \langle \psi(t_0) | \psi(t) \rangle = \arctan \left( - \frac{\langle \psi(t_0), \omega \psi(t) \rangle}{\langle \psi(t_0), \psi(t) \rangle} \right) \quad (20)$$

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) := \Im m \int_{t_0}^t \langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle ds \quad (21)$$

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) := \Phi_{\text{tot}}(\psi, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) \quad (22)$$

- (conservative) Équation Schrödinger et de Liouville-von Neumann ( $h(R)$  : Hamiltonien des paramètres  $R, W$  : opérateurs statistique ) [1, p.6] :

$$i \frac{d\psi(t)}{dt} = h(R)\psi(t) \quad (23)$$

$$i \frac{dW(t)}{dt} = [h(R), W(t)] \quad [\cdot, \cdot] = \text{commutateur ?} \quad (24)$$

- Moment angulaire (viteuf)  $\forall z \in \mathbb{C}$  :

$$M(t) = \Re(iz\bar{z}') = -\Im mz\bar{z}' \quad \text{thoughts ?} \quad (25)$$

### 3.3 Thoughts

- D'où sort l'interprétation géométrique + son lien avec quaternions (prop. 3)
- Lien avec l'eq de Schrödinger (l'intérêt de  $H$  et  $K$  + d'où ils sortent)
- La "Berry connection" c'est une vraie connexion ? elle est où la covariance alors ?

- 
- 
- "horizontal lift" : pourquoi horizontal ? en quel sens ? (parce que fibré)
  - Fréquence de Rubi
  - Matrice/base de Pauli et généralisation, groupe  $SU(n)$  (un peu de quantique ?)
  - Monopole de Dirac + lien avec la phase géo (un peu d'électro-magnétisme ?)
  - Invariant de Bargmann + série de Dyson

### 3.4 Point de vue des variétés ?

- Wikipédia dit : " La théorie des fibrés principaux recouvre la théorie des fibrés vectoriels, de leurs orientations, de leurs structures riemanniennes, de leurs structures symplectiques, etc. "
- Choix de l'action de groupe pour la jauge (la fibre oui) :  $U(1)$  *a priori*

- 
- 
- Lien avec Siegel : assez clair avec la visualisation des ellipses, beaucoup moins avec les Hilberts même si  $|\psi\rangle\langle\psi| \in \text{Siegel}$  *a priori*
  - "Symplectique" (meaning + intérêt ?) si tu savais...
  -

## TABLE DES FIGURES

1.1	Exemple de densité spectrale d'un signal réel ESP A 1,4 . . . . .	7
1.2	Représentation graphique du signal $x$ (rouge) avec $\nu_1 = 3$ et $\nu_2 = 0.1$ . Sur l'image de gauche, avec signaux de fréquences pures (bleu et vert). Sur l'image de droite, avec son amplitude (bleu) et sa phase instantanée (vert). Les discontinuités de la phase sont dû à l'arrondi à $2\pi$ près de l'argument de $\mathcal{A}[x]$ et à la façon dont il est calculé lorsque le signal s'annule (mise à 0). Voir <a href="#">ici</a> pour un graphique dynamique. . . . .	9
1.3	Idem que pour la figure 1.2 précédente, avec cette fois $\nu_1 = 1.5$ et $\nu_2 = 1.3$ . . . . .	10

## TABLE DES CODES

## RÉFÉRENCES

- [1] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [2] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [3] J. LEFEVRE, *Polarization analysis and optimization geometry*.
- [4] J. LILLY AND S. OLHEDE, *Bivariate Instantaneous Frequency and Bandwidth*, IEEE Transactions on Signal Processing, 58 (2010), pp. 591–603.
- [5] J. M. LILLY AND J.-C. GASCARD, *Wavelet ridge diagnosis of time-varying elliptical signals with application to an oceanic eddy*, Nonlinear Processes in Geophysics, 13 (2006), pp. 467–483.
- [6] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [7] M. VENOUZIOU AND H. ZHANG, *Characterizing the Hilbert transform by the Bedrosian theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 338 (2008), pp. 1477–1481.