

# Mémoire de Stage de M2

## PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ... ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Pierre-Olivier AMBLARD, Julien FLAMANT & Michel  
BERTHIER

---

Master MIX – Université de La Rochelle

2024 – 2025

# TABLES DES MATIÈRES

Introduction & préambule . . . . .	1
<hr/>	
PARTIE I — APPLICATIONS ET GÉNÉRALISATION	3
<hr/>	
I — Calcul pratique de la phase géométrique . . . . .	3
II — Première application : ondes gravitationnelles . . . . .	4
III — Conclusion et perspectives . . . . .	5
<hr/>	
ANNEXES	7
<hr/>	
Annexes de la ?? . . . . .	7
Annexes de la partie ?? . . . . .	7
Table des figures & références . . . . .	7

TO DO DE LA FIN :

- intro partie III & fin de la partie Bargmann
- préambule compréhensible + table des notations
- tikz fig. 2.7 (interprétaiton phased)
- refaire plot partie III
- 2 plot partie 1
- Nettoyage codes et GitHub

# INTRODUCTION

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui nécessite beaucoup de contexte pour être mis en évidence. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant  $t$  d'un signal multivarié complexe (*i.e.* à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ )  $\mathbf{x}$  est donnée par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle - \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\mathbf{x}(t) \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{i\alpha(t)} \mathbf{x}(t)$$

Elle est également invariante par reparamétrisation et pour ces raisons, c'est une mesure qui est intrinsèquement liée à la trajectoire du signal dans l'espace, à sa géométrie.

La phase géométrique est un phénomène qui apparaît dans de nombreuses circonstances, en fonction desquelles elle peut changer de nom et de forme : phase de Pancharatnam, de Berry, d'Aharonov-Anandan, d'Aharonov-Bohm, angle de Hannay, *etc.*

Les articles [8, 27] en présentent quelques-unes et le livre “*Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*” [7] de Chruściński & Jamiolkowski en fait une description plus qu'extensive.

Du point de vue du traitement du signal en revanche, rien n'a été fait et ce n'est que récemment que Le Bihan, Flamant & Amblard s'y sont intéressés [20, 21]. L'objectif de ce mémoire est donc de décrire la phase géométrique dans le cadre du traitement du signal et de discuter de ses applications :

- Dans un premier temps (??), cette phase sera mise en évidence à travers des concepts d'analyse temps-fréquence, notamment la notion de fréquence instantanée qui sera présente tout au long de l'écrit. Suite à quoi elle sera explicitement calculée dans un cas particulier de signaux, déjà étudié par Le Bihan *et al.* [21] : les signaux AM-FM-PM. Cela permettra de mieux comprendre son comportement et permettra de motiver une description des signaux multivariés complexes dans l'esprit de l'analyse temps-fréquence.
- Cela mènera à travailler dans une variété dite fibrée principale,  $S^{2n-1}(\text{U}(1), \text{PC}^{n-1})$ , et la seconde partie de ce mémoire sera dédiée à son formalisme. Contrairement à l'état de l'art, les résultats seront présentés et, entre autres, l'accent sera mis sur l'intuition géométrique derrière les concepts abordés. Des résultats, connus par ailleurs, sur la phase géométrique seront redémontrés avec ce formalisme et avec, les notions de fréquences instantanées et de phase géométrique seront reformulées et réinterprétées.
- Enfin, dans une troisième partie, sera présenté un moyen de calculer la phase géométrique en pratique via l'invariant de Bargmann, tiré de [26] et déjà repris par Le Bihan *et al.* [21]. Suite à la phase géométrique de donnée simulées d'onde gravitationnelle sera calculer. Cela permettra, d'une part de montrer que la phase géométrique est bien une quantité mesurable en pratique, et d'autre part de donner des pistes d'applications à explorer dans la suite des travaux.

## \* PRÉAMBULE

*Juste des notes, même pas sur qu'il y ait vraiment besoin de garder ce préambule*

Généralités :

- Les références sont en fin de mémoire est en .bib sur le [GitHub](#)
- Idem pour les codes et un mot sur `pygeomphase`
- On va parler de géo diff et pour éviter de réécrire un livre, on va admettre beaucoup de résultats, on renvoi vers [19, 10] pour les bases et [24, 25, 2] pour toute ce qui est variété fibrée principales et variétés complexes.

Notations math :

- Convention sur le produit hermitien (conjugué à droite)
- les vecteurs seront en gras, leur dérivée en temps notée par un point (ex. :  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ) et celle des scalaires seront noté par un prime (ex. :  $a'(t)$ )

# PARTIE I

## APPLICATIONS ET GÉNÉRALISATION

- Comment on calcul  $\Phi_{\text{geo}}$  en pratique ?
- Application
- Conclusion sur le mémoire et perspective.

### I — Calcul pratique de la phase géométrique

Dans la ?? précédente, deux formulations de la phase géométrique ont été présentées. Cela dit, elles ne sont que très peu pertinentes pour le calcul de  $\Phi_{\text{geo}}$  en pratique car passant par des intégrales dans  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  qui ne s'écrivent explicitement qu'avec des coordonnées locales.

Une solution apporté par Rabei *et al.* [26] est de s'intéresser à une approximation polygonale du signal projeté dans  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ . C'est-à-dire de l'approcher par une suite de géodésiques concaténées les unes aux autres. Sachant que les mesures sont toujours de nature discrète, cette opération n'a pas vraiment de coût en pratique et permet d'exploiter les résultats de la ??, ??. Ainsi, en notant  $(\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq k}$  les  $k$  mesures du signal,  $\mathbf{x}_{i \rightarrow i+1}$  la géodésique reliant  $\mathbf{x}_i$  à  $\mathbf{x}_{i+1}$ , et  $\mathbf{x}$  la concaténation de toutes ces géodésiques, on a :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) \\
 &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k-1} \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_{i \rightarrow i+1}) \\
 &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k-1} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}_{i \rightarrow i+1}) - \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}_{i \rightarrow i+1}) \\
 &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k-1} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}_{i \rightarrow i+1}) \\
 &= \arg\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_1 \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \arg\langle \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_i \rangle
 \end{aligned}$$

```

 $(\mathbf{x}_n)_{0 \leq n \leq N}$  : signal
 $\mathbf{x} \leftarrow 2\mathcal{F}^{-1}[\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \mathcal{F}[\mathbf{x}]]$ 

 $\Phi_{\text{tot}} = 0$  : phase totale
 $\Phi_{\text{dyn}} = 0$  : phase dynamique
 $\Phi_{\text{geo}} = 0$  : phase géométrique

for  $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$  do
     $\Phi_{\text{tot}} \leftarrow \arg\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1 \rangle$ 
     $\Phi_{\text{dyn}} \leftarrow \Phi_{\text{dyn}} + \arg\langle \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n-1} \rangle$ 
     $\Phi_{\text{geo}} \leftarrow \Phi_{\text{tot}} - \Phi_{\text{dyn}}$ 
return  $\Phi_{\text{tot}}, \Phi_{\text{dyn}}, \Phi_{\text{geo}}$ 
end for

```

Cette formule, en plus d'être facilement implémentable, n'est que très peu coûteuse en temps de calcul. Aussi, elle est partiellement itérative, permettant d'obtenir un algorithme de calcul de  $\Phi_{\text{geo}}$  en tout point relativement efficace (cf. fig. 1.1). C'est cette formule qui est implémentée dans les codes disponibles sur le [GitHub](#).

fig. 1.1 — Pseudo-code du calcul des trois phases sur tout un signal  $\mathbf{x}$ , avec transformation en SA.

## II — Première application : ondes gravitationnelles

En relativité générale, la gravité n'est plus décrite comme une force mais comme une conséquence de la déformation de la métrique de l'espace-temps en fonction des masses qui s'y trouvent [28]. Cela a de multiples conséquences, comme par exemple le fait que la lumière puisse être déviée par les objets massifs, ce qui ne pouvait pas être le cas en mécanique Newtonienne et qui fût confirmé expérimentalement. Une autre prédiction de la relativité générale est l'existence d'onde gravitationnelle, qui sont dues à la propagation des déformations de l'espace-temps causées par le déplacement d'objet massif. Cela dit, mesurer de telles ondes n'est pas chose aisée et il a fallu attendre cent ans après l'article fondateur d'Einstein (1915) pour pouvoir les détecter (2015).

En plus de leur existence, la théorie de la relativité générale prédit que ces ondes doivent être polarisées, comme ça peut être le cas avec les ondes électromagnétiques ou sismiques. En revanche, il n'a pas encore été possible de confirmer que nos mesures présentent effectivement ces propriétés, que ce soit dû au niveau de bruit élevé des mesures ou à des difficultés techniques au niveau des capteurs. Mettre en évidence ces propriétés serait une validation expérimentale supplémentaire de la théorie d'Einstein et sur ce point la phase géométrique est un outil prometteur.

Avant d'y venir, revenons sur les mesures. Pour pouvoir détecter des ondes aussi discrètes, il est nécessaire de se tourner vers des objets à la fois massifs et en mouvement rapide, en l'occurrence des systèmes binaires de trous noirs (BBH, Binary Black Holes) en phase de "merge". C'est-à-dire deux étoiles massives, ici des trous noirs, en orbite l'une autour de l'autre et sur le point d'entrer en collision, comme le montre la figure 1.2 ci-dessous :

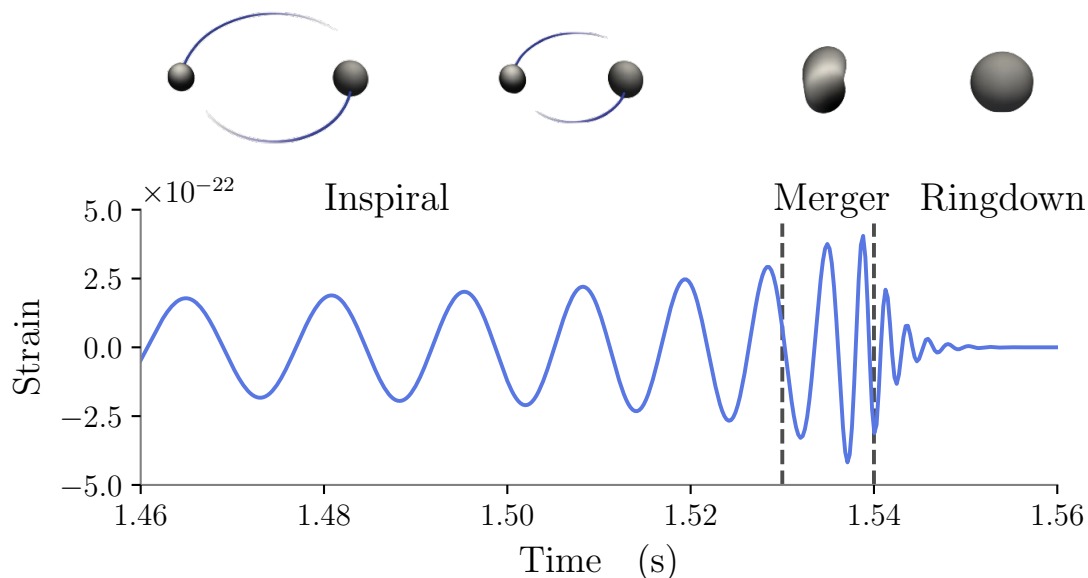


fig. 1.2 — Différentes étapes de la fusion de deux trous noirs. Figure tirée de [15, fig. 4].

Il est donc prédit que les ondes engendrées par ces phénomènes sont polarisées mais aussi, et surtout, qu'en fonction de l'alignement des axes de rotations des deux étoiles, l'état de polarisation de ces dernières doit varier au cours du temps. Chose qui doit pouvoir être mise en évidence par le calcul de la phase géométrique des ondes.

Pour cela, sont utilisés quatre jeux de données synthétiques et sans bruit avec des axes de rotations plus ou moins alignés et la figure 1.3 présente l'évolution des trois phases du signal dans chacun des cas.

Ces signaux étant à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , il a fallu les transformer en signaux analytiques pour pouvoir calculer leurs différentes phases. Cela suppose (cf. ??) qu'ils soient de type AM-FM-PM, ce qui n'est pas un problème au vu de l'allure des composantes  $h_+$  et  $h_\times$  des signaux. Ensuite, comme attendu, la phase géométrique de ces signaux n'est pas constante et devient de plus en plus changeante à mesure que la polarisation des ondes devient variable.

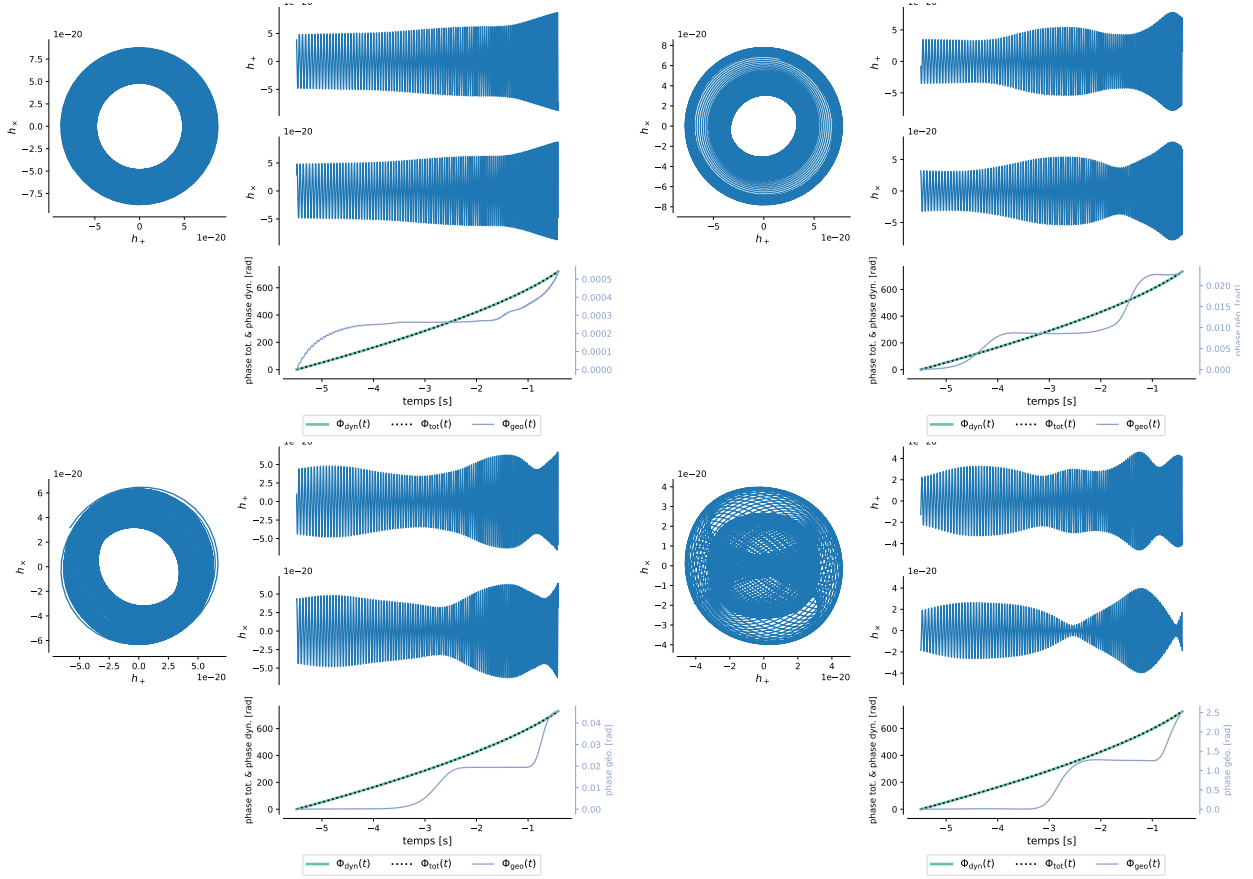


fig. 1.3 — Évolution de la phase géométrique sur des données simulées d'ondes gravitationnelles. Sur chaque graphique (de haut en bas et de gauche à droite) les spins des trous noirs sont de moins en moins alignés. Dans les parties hautes sont représentés les signaux simulés et, en dessous, le calcul des différentes phases.

Ces résultats, bien que très préliminaires, permettent déjà d'entrevoir les difficultés quant à la mesure de la phase géométrique :

D'abord, au début de chaque signal, elle présente un saut conséquent par rapport à ses valeurs et il semblerait qu'il soit très sensible à la valeur de départ du signal. Aussi, quand bien même ce saut ne semble pas se faire d'un multiple de  $\pi$ , il est probable que ce soit en partie lié au choix de représentant de  $\Phi_{\text{geo}}$  (qui est définie modulo  $2\pi$ ). Dans tous les cas, cela risque de poser problème pour une utilisation plus avancée.

Ensuite, même dans le pire des cas, la phase géométrique ne reste que très marginale par rapport aux deux autres, ce qui risque d'être un problème sur des mesures réelles, nécessairement bruitées.

### III — Conclusion et perspectives

Même si ce n'était pas l'objectif premier, s'intéresser à la phase géométrique a permis d'apporter un point de vue nouveau sur les signaux multivariés en terme de paramètres instantanés (amplitude, phase et polarisation).

Cela a permis, d'un côté, de mettre en lumière une subtile limite du modèle AM-FM-PM au niveau de l'interprétabilité de ces paramètres ( $\varphi, \theta, \chi$ ) et pourquoi il était nécessaire de passer par des notions de géométrie différentielle pour retrouver ces interprétations. De l'autre, cela a permis de donner une nouvelle interprétation, en terme de signal, à des outils déjà bien connus en mécanique quantique.

Il a été montré que la phase géométrique est une quantité qui se mesure effectivement en pratique et, même si ces interprétations géométriques laissent entendre que ses applications sont limitées, il n'est pas exclu qu'elle puisse avoir des applications en débruitage. Par exemple, si une onde mesurée n'est pas censée être à polarisation variable, une phase géométrique non nulle de ce dernier ne pourrait être due qu'à du

bruit. On pourrait alors imaginer des traitements qui se feraient uniquement sur le signal projeté sur  $PC^n$ , sans affecter sa phase dynamique/instantanée (ou inversement).

À l'inverse, il serait intéressant, notamment pour les ondes gravitationnelles, de voir dans quelle mesure la phase géométrique est résiliente au bruit. Par exemple, les arguments de la ??, ?? suggèrent que la phase dynamique est associée aux hautes fréquences du signal. La phase géométrique devrait alors être de plus basse fréquence, chose qui pourrait être mise en perspective avec les plages de fréquences favorisées par certaines sources de bruits.

Pour ce qui est des perspectives théoriques, il serait intéressant de voir dans quelle mesure la projection sur  $PC^n$  d'un signal multivarié peut être séparée en différents paramètres, comme c'est le cas pour les AM-FM-PM en bivarié (orientation et excentricité de l'ellipse de polarisation).

Enfin, il est connu que la phase géométrique se généralise aux Grassmanniennes, une généralisation des espaces projectifs complexes. Cela donne lieu à un nouveau type de phase géométrique, dite non-commutative, et c'est en partie pour cette raison que la ?? était aussi extensive sur le formalisme mathématique. Rentrer autant dans le formalisme devrait faciliter la généralisation des concepts mis en place, le tout en gardant autant que possible leurs interprétations.

En outre, un système de  $k$  capteurs mesurant un signal  $n$ -varié, semble être un cadre propice à l'apparition de cette phase non-commutative, ce qui donne déjà des perspectives d'applications.

Pour toutes ces raisons, la phase géométrique reste un outil avec du potentiel, bien que méconnu et qui, en toute vraisemblance, ferait un bon sujet de thèse.



---

## ANNEXES

---

### ANNEXES DE LA ??

### ANNEXES DE LA PARTIE ??

### TABLE DES FIGURES

1.1	Pseudo-code du calcul des trois phases sur tout un signal $\mathfrak{x}$ , avec transformation en SA. . . .	3
1.2	<b>DONE</b> Différentes étapes de la fusion de deux trous noir . . . . .	4
1.3	Évolution de la phase géométrique sur des données simulées d'ondes gravitationnelles . . . . .	5

### TABLE DES CODES

# RÉFÉRENCES

- [1] Y. AHARONOV AND J. ANANDAN, *Phase change during a cyclic quantum evolution*, Physical Review Letters, 58 (1987), pp. 1593–1596.
- [2] W. BALLMANN, *Lectures on Kähler Manifolds*, vol. 2 of ESI Lectures in Mathematics and Physics, EMS Press, 1 ed., July 2006.
- [3] M. V. BERRY, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 392 (1997), pp. 45–57. Publisher: Royal Society.
- [4] A. L. BESSE, *Manifolds all of whose Geodesics are Closed*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1978.
- [5] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [6] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [7] D. CHRUŚCIŃSKI AND A. JAMIOŁKOWSKI, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.
- [8] E. COHEN, H. LAROCQUE, F. BOUCHARD, F. NEJADSATTARI, Y. GEFEN, AND E. KARIMI, *Geometric phase from Aharonov–Bohm to Pancharatnam–Berry and beyond*, Nature Reviews Physics, 1 (2019), pp. 437–449.
- [9] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [10] M. DO CARMO, *Riemannian Geometry*, Mathematics (Boston, Mass.), Birkhäuser, 1992.
- [11] P. FACCHI, R. KULKARNI, V. I. MAN’KO, G. MARMO, E. C. G. SUDARSHAN, AND F. VENTRIGLIA, *Classical and Quantum Fisher Information in the Geometrical Formulation of Quantum Mechanics*, Physics Letters A, 374 (2010), pp. 4801–4803. arXiv:1009.5219 [quant-ph].
- [12] F. FAURE, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).
- [13] J. FLAMANT, *Une approche générique pour l’analyse et le filtrage des signaux bivariés*, these de doctorat, Ecole centrale de Lille, Sept. 2018.
- [14] J. FLAMANT, N. LE BIHAN, AND P. CHAINAIS, *Time–frequency analysis of bivariate signals*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 46 (2019), pp. 351–383.
- [15] P. FLORES, P.-O. AMBLARD, AND J. FLAMANT, *Damped ellipse decomposition for bivariate signals*.
- [16] H. HOPF, *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Mathematische Annalen, 104 (1931), pp. 637–665.
- [17] D. HUYBRECHTS, ed., *Complex Geometry: An Introduction*, Universitext, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [18] N. KAYBAN, *Riemannian Immersions and Submersions*.
- [19] J. LAFONTAINE, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [20] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [21] ———, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.

- [22] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [23] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [24] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.
- [25] PHAM MÂU QUÂN, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Monographies universitaires de mathématiques, Dunod, Paris, 1969.
- [26] E. M. RABEI, ARVIND, R. SIMON, AND N. MUKUNDA, *Bargmann Invariants and Geometric Phases - a Generalised Connection*, Physical Review A, 60 (1999), pp. 3397–3409. arXiv:quant-ph/9907080.
- [27] E. SJÖQVIST, *Geometric phases in quantum information*, International Journal of Quantum Chemistry, 115 (2015), pp. 1311–1326.
- [28] A. A. VANKOV, *Einstein's Paper: "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from General Relativity Theory"*.
- [29] S. WANG, *Simple proofs of the Bedrosian equality for the Hilbert transform*, Science in China Series A: Mathematics, 52 (2009), pp. 507–510.