

# Mémoire de Stage de M2

## PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Pierre-Olivier AMBLARD, Julien FLAMANT & Michel  
BERTHIER

---

Master MIX – Université de La Rochelle

2024 – 2025

# TABLES DES MATIÈRES

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>Préambule</b> . . . . .	<b>2</b>
<hr/>	
<b>PARTIE I — ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME</b>	<b>3</b>
<hr/>	
<b>I — Cadre d'étude</b> . . . . .	<b>3</b>
1.1 $\mathbb{PC}^n$ vue comme variété différentielle . . . . .	3
1.1.1 Rappels de géométrie différentielle et notations . . . . .	3
1.1.2 * $\mathbb{PC}^n$ comme variété différentielle . . . . .	4
1.2 $\mathcal{S}^{2n+1}$ comme fibré principal . . . . .	6
1.2.1 Définition générale . . . . .	6
1.2.2 Le fibré $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbb{PC}^n)$ . . . . .	8
1.3 Espaces horizontaux et connexion . . . . .	9
1.3.1 Définition général . . . . .	9
1.3.2 Choix de connexion sur $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbb{PC}^n)$ . . . . .	11
<b>II — * Interprétation des trois phases dans ce cadre</b> . . . . .	<b>12</b>
2.1 Fréquence instantanée et phase dynamique sur $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbb{PC}^n)$ . . . . .	12
2.2 Phase géométrique . . . . .	13
2.2.1 Cas des signaux projectivement cycliques . . . . .	13
2.2.2 * Généralisation à tout signal . . . . .	15
2.2.3 * La phase géométrique sur $\mathbb{PC}^n$ . . . . .	15

\* : PARTIELLEMENT TERMINÉE

\* : AU STADE DE NOTE

TOUT LES TEXTES EN ROUGES SONT DES NOTES

# INTRODUCTION

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui nécessite beaucoup de contexte pour être mis en évidence. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant  $t$  d'un signal multivarié complexe (*i.e.* à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ )  $\mathbf{x}$  est donné par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle - \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\mathbf{x}(t) \rightsquigarrow \psi'(t) = e^{i\alpha(t)} \mathbf{x}(t)$$

Elle est également invariante par reparamétrisation et pour ces raisons, c'est une mesure qui est intrinsèquement liée à la trajectoire du signal dans l'espace, à sa géométrie.

La phase géométrique est un phénomène qui apparaît dans de nombreuses circonstances, en fonction desquelles elle peut changer de nom et de forme : phase Pancharatnam, de Berry, d'Aharonov-Anandan, d'Aharonov-Bohm, angle de Hannay, *etc.*

L'article [5] de Cohen *et al.* en présente quelques unes et le livre “*Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*” [4] de Chruściński & Jamiołkowski en fait une description plus qu'extensive.

Du point de vue du traitement du signal en revanche, rien n'a été fait et ce n'est que récemment que Le Bihan, Flamant & Amblard s'y sont intéressés [10, 11]. L'objectif de ce mémoire est donc de décrire la phase géométrique dans le cadre du traitement du signal et de discuter de ses applications :

- Dans un premier temps (??), cette phase sera mise en évidence à travers des concepts d'analyse temps-fréquence, notamment la notion de fréquence instantanée qui sera présente tout au long de l'écrit. Suite à quoi elle sera explicitement calculée dans une cas particulier de signaux, déjà étudié par Le Bihan *et al.* [11] : les signaux AM-FM-PM. Cela permettra de mieux comprendre son comportement et permettra de motiver une description des signaux multivariés complexes dans l'esprit de l'analyse temps-fréquence.
- Cela mènera à travailler dans une variété dite fibrée principale,  $S^{2n-1}(\text{U}(1), \text{PC}^{n-1})$ , et la seconde partie de ce mémoire sera dédiée à son formalisme. Contrairement à l'état de l'art, les résultats seront présentés d'un point de vue de mathématicien plus que de physicien et, entre autre, l'accent sera mis sur l'intuition géométrique derrière les concepts abordés. Des résultats, connus par ailleurs, sur la phase géométrique seront redémontrés avec ce formalisme et avec, les notions de fréquences instantanées et de phase géométrique seront reformulée et réinterprétée.
- Enfin, dans une troisième partie, sera présenté un moyen de calculer la phase géométrique en pratique via l'invariant de Bargmann, tiré de [15] et déjà repris par Le Bihan *et al.* [11]. Seront ensuite discutées diverses applications *et là ça dépend d'à quel point j'ai le temps.*

## \* PRÉAMBULE

Généralités :

- Les références sont en fin de mémoire est en .bib sur le [GitHub](#)
- Idem pour les codes et un mot sur `pygeomphase`
- On va parler de géo diff et pour éviter de réécrire un livre, on va admettre beaucoup de résultats, on renvoi vers [9, 6] pour les bases et [13, 14, 2] pour toute ce qui est variété fibrée principales et variétés complexes.

Notations math :

- Convention sur le produit hermitien (conjugué à droite)
- les vecteurs seront le plus souvent en gras, leur dérivée en temps notée par un point (ex. :  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ) et celle des scalaires seront noté par un prime (ex. :  $a'(t)$ )

---

## PARTIE I

---

### ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME

---

note pour intro :

- $S^{2n-1}$  est semblable au produit  $U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$  mais que de façon local. C'est un exemple de variété fibré et de ce formalisme donc on aura besoin
- Aussi, par souci de comodité, on se placera dans  $\mathbb{C}^{n+1}$  et l'on notera la sphère unité de ce dernier :

$$\mathbb{S}^n := S^{2n+1}$$

- Tout le formalisme nécessaire sera exposé dans la section I, avec plus de détail technique en annexe et dans la section II seront décrites les différentes phases d'un point de vue géométrique.

## I — Cadre d'étude

Pour proprement poser le cadre, il nous faudra trois choses :

1. D'abord faire quelque rappel de géométrie différentielle, ne serait-ce que pour fixer les notations (*ss-sec. 1.1.1*), avec comme exemple le cas  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  (*ss-sec. 1.1.2*), qui sera utile plus loin.
2. Ensuite, seront définies les variétés fibrés principales, avec les outils de bases qui leurs sont associés (*ss-sec. 1.2.1*), puis  $U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n$  sera écrit comme telle (*ss-sec. 1.2.2*).
3. Enfin, il nous faudra définir une connexion sur ces fibrés, connexion qui seront, d'abord, définie de façon générale (*ss-sec. 1.3.1*), puis explicitée et interprétée dans le cas qui nous intéresse (*ss-sec. 1.3.2*).

### 1.1 $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ vue comme variété différentielle

#### 1.1.1 Rappels de géométrie différentielle et notations

Une variété différentielle se définit comme suit :

**DÉFINITION 1 (VARIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE)** — une variété différentielle de classe  $C^k$  de dimension  $n$  est un espace topologique  $\mathcal{M}$  munie d'un *atlas*  $\{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$ , c'est-à-dire un ensemble finie de pair d'ouvert  $U_i \subset \mathcal{M}$  et d'application  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

- les  $U_i$  forme un recouvrement de la variété :  $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathcal{M}$
- les  $\phi_i$  sont des homéomorphismes sur leur image  $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ .
- si l'intersection  $U_i \cap U_j$  est non vide, alors  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}$  est un  $C^k$  difféomorphisme sur son image.

A travers  $\phi_i$ , à tout point  $x \in U_i$  sont associées des *coordonnées locales*  $(x^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$ , c'est-à-dire les coef-

ficient de  $\phi_i(x)$  dans une base  $(e_\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Ces coordonnées sont dites locales car dépendantes du choix de la pair  $(U_i, \phi_i)$  et la composée  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}$  est vue comme un *changement de coordonnées*. Dans toutes la suite, toutes les objets propre au cartes seront indexés via l'alphabet classique  $(i, j, k)$  et le indices associées au coordonnées locales par des lettres grecs  $(\mu, \nu, \alpha)$ .



fig. 1.1 — La première figure de tout bon livre de géométrie différentielle : représentation de deux cartes avec l'application de changement de coordonnées

Ensuite, les *espaces tangents* de  $\mathcal{M}$  et son fibré tangent seront respectivement notés :

$$\forall x \in \mathcal{M}, T_x \mathcal{M} \qquad T\mathcal{M} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} T_x \mathcal{M} \qquad (1.1)$$

Pour le dire rapidement, les vecteurs tangents agissent comme une dérivation en cela que, pour une chemin  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ , sa différentielle au point  $x = \gamma(0)$  est définie par l'application :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_x : \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \left. \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \right|_{t=0} := \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Aussi, le système de coordonnées locales en  $x \in \mathcal{M}$  induit une base sur  $T_x \mathcal{M}$ , qui sera noté  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . notation qui est justifié en cela que, moralement,  $\partial_\mu$  dérive toute fonction test  $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{M}, \mathbb{R})$  dans le long de la  $\mu^{eme}$  coordonnée (locale) de  $x$ .

Plus généralement, si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont deux variétés différentielles et  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une application différentiable avec  $\{\tilde{\partial}_\nu\}_\nu$  une base de  $T\mathcal{N}$ , sa différentielle (ou application tangent ou push forward) au point  $x$  est l'application linéaire qui, en coordonnée local s'écrit :

$$f_*(v) = f_*(v^\mu \partial_\mu) = \partial_\mu(f^\nu) v^\mu \tilde{\partial}_\nu \quad \text{ou encore} \quad (f_*)^\nu_\mu = \partial_\mu(f^\nu)$$

A partir de  $f_*$  est définie l'image réciproque ou pull back de  $f$ , qui correspond moralement à la transposée de  $f_*$ . Formellement elle est définie par dualité :

$$f^* : \begin{aligned} T^* \mathcal{N} &\longrightarrow T^* \mathcal{M} \\ g &\longmapsto g \circ f^* \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{M} & \xrightarrow{f_*} & T\mathcal{N} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^* \mathcal{M} & \xleftarrow{f^*} & T^* \mathcal{N} \end{array}$$

fig. 1.2 — Diagramme de passage de  $f$  à  $f_*$  et/ou  $f^*$ .

### 1.1.2 \* $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ comme variété différentielle

Si l'espace projectif complexe à été présenté comme le quotient  $\mathbb{S}^n/U(1)$ , il peut aussi être vu comme :

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^*$$

C'est-à-dire l'ensemble des classes de  $\mathbb{C}^{n+1*} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n+1}}\}$  par la relation d'équivalence :

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid x = \lambda y$$

Moralement, en isolant la norme des vecteurs,  $\mathbb{C}^{n+1*}$  peut être vu comme le produit  $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^n$ , et de même pour  $\mathbb{C}^*$  avec le module :

$$\mathbb{C}^{n+1*} \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^n \qquad \mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathrm{U}(1)$$

Ainsi, le quotient par  $\mathbb{C}^*$  revient à regarder les vecteurs de  $\mathbb{C}^{n+1*}$  modulo leur norme, puis modulo l'action de  $\mathrm{U}(1)$ . Or, ignorer la norme des vecteurs est équivalent à ne regarder que les vecteurs normés, donc les vecteurs de  $\mathbb{S}^n$ . De façon informelle, on pourrait alors écrire<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^* &\cong \mathbb{C}^{n+1*}/(\mathbb{R}^* \times \mathrm{U}(1)) \\ &\cong (\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{R}^*)/\mathrm{U}(1) \\ &\cong \mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1) = \mathrm{P}\mathbb{C}^n \end{aligned}$$

L'intérêt de cette écriture et que  $\mathbb{C}^{n+1}$  est un espace vectoriel, ce qui permet de décrire  $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$  en terme de carte, ce qui se fait comme suit. La classe de  $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$  de représentant  $z = (z^i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1*}$  est noté  $[z]$  et on pose,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$U_i = \left\{ [z] \in \mathrm{P}\mathbb{C}^n \mid z \in \mathbb{C}^{n+1}, z^i \neq 0 \right\} \qquad \phi_i : \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^i \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-i} \cong \mathbb{C}^n \\ [z] & \longmapsto & \frac{1}{z^i} z = (z^0/z^i, \dots, 1, \dots, z^n/z^i) \end{array} \quad (1.3)$$

*Si l'ensemble d'arrivé  $\phi_i(U_i)$  est équivalent à un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  (l'une des composantes est constante), il est plus commode de travailler dans  $\mathbb{C}^{n+1}$  puisque cela évite de devoir enlever et rajouter des coefficient dans les formules de changement de carte :*

$$\forall z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z^{i,j} \neq 0 \quad (i.e. [z] \in U_i \cap U_j), \qquad \phi_i \circ \phi_j^{-1}(z) = \frac{z^j}{z^i} z$$

Les  $(U_i, \phi_i)$  forment un atlas sur l'espace projectif complexe, faisant de ce dernier une variété de dimension  $\dim = 2n$ . Les  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  étant holomorphe,  $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$  est plus précisément une variété complexe de dimension complexe  $n$  et il est utile d'écrire ses coordonnées locales sous la forme  $(w^\mu, \bar{w}^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$ , où :

$$\forall w \in U_i, \forall \mu \neq i, \quad w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i}, \qquad \text{où} \quad [z] = w$$

En annexe ?? se trouve plus de détail sur les variétés différentielles complexes. Pour aller à l'essentiel, même si la notation prête à confusion, il faut considérer les coordonnées  $w^\mu$  et  $\bar{w}^\mu$  comme complètement décorréler. Par exemple, :

$$\begin{aligned} \partial_\mu(w^\mu) &= \frac{\partial}{\partial w^\mu} w^\mu = 1 & \partial_{\bar{\mu}}(w^\mu) &= \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\mu} w^\mu = 0 \\ \partial_\mu(\bar{w}^\mu) &= \frac{\partial}{\partial w^\mu} \bar{w}^\mu = 0 & \partial_{\bar{\mu}}(\bar{w}^\mu) &= \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\mu} \bar{w}^\mu = 1 \end{aligned}$$

Ce qui fait  $(w^\mu, \bar{w}^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$  est bien une base de dimension réelle  $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{P}\mathbb{C}^n = 2n$ . Ces "notations" (encore une fois cf. annexe ??) permettent, par exemple, de décrire le fait qu'une soit fonction holomorphe  $f : \mathrm{P}\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$  par la contrainte :

$$\forall \mu \in \llbracket 1, n \rrbracket, \qquad (f_*)_{\bar{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\mu} f = 0$$

---

<sup>1</sup> Ce qui s'écrit plus justement avec le troisième théorème d'isomorphisme :

$$\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{R}^{+*})/(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^{+*}) \cong \mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1) = \mathrm{P}\mathbb{C}^n$$

Pour ce qui est des espaces tangents,  $(\partial_\mu, \partial_{\bar{\mu}})_\mu$  forme une base de  $T\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  et  $(dw^\mu, d\bar{w}^\mu)_\mu$  une base de  $T^*\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ . Dans ce contexte, un champ de forme bilinéaire  $g$  (tenseur de type (0,2)) à quatre type de composantes :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= g(\partial_\mu, \partial_\nu) & g_{\mu\bar{\nu}} &= g(\partial_\mu, \partial_{\bar{\nu}}) \\ g_{\bar{\mu}\nu} &= g(\partial_{\bar{\mu}}, \partial_\nu) & g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} &= g(\partial_{\bar{\mu}}, \partial_{\bar{\nu}}) \end{aligned}$$

L'espace projectif complexe, en particulier, admet un produit hermitien, la *métrique de Fubini-Study*, qui donné par :

$$\begin{aligned} \forall w \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_w \mathbb{P}\mathbb{C}^n, \quad g_w(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= g_{\mu\bar{\nu}} u^\mu \bar{v}^\nu = \frac{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha) \delta_{\mu\nu} - w_\mu \bar{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} u^\mu \bar{v}^\nu \\ &= \frac{1}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} u^\mu \bar{v}_\mu - \frac{w_\mu \bar{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} u^\mu \bar{v}^\nu \end{aligned} \quad (1.4)$$

À noter que seul les coefficients  $g_{\mu\bar{\nu}}$  apparaissent. Cela est du à la symétrie hermitienne de  $g$ , ce qui impose  $g_{\mu\nu} = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$  et  $g_{\bar{\mu}\nu} = g_{\mu\bar{\nu}}$ . Enfin, et ce sera important pour la suite,  $g$  induit sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  une forme symplectique, qui s'interprète comme l'élément d'aire induit par  $g$  et s'écrit :

$$\Omega = \Omega_{\mu\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu = i g_{\mu\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu$$

## 1.2 $S^{2n+1}$ comme fibré principal

### 1.2.1 Définition générale

Pour le dire simplement, les *variétés fibrées* sont des variétés qui ressemblent localement à des espaces produits. Le ruban de Möbius en est un exemple typique : il ne peut pas s'écrire comme le produit d'un cercle avec un segment  $S^1 \times [0, 1]$  à cause de la façon dont il est construit. Mais localement, une tranche du ruban est tout à fait comparable (*i.e.* difféomorphe) à un tel produit (*cf.* fig. 1.3).



fig. 1.3 — **DONE** Représentation du ruban de Möbius en tant que fibré. Les notations sont reprises de la définition 2.

Il existe toutes sortes de variétés fibrées dès lors qu'elles sont munies de structure remarquable. Celles qui vont nous intéresser sont dites principales<sup>2</sup> :

**DÉFINITION 2 (VARIÉTÉ FIBRÉE PRINCIPALE)** — Une *variété fibrée principale* (VFP), ou *fibré principal* est constituée de deux variétés différentielles  $P$  et  $B$  telles que :

<sup>2</sup> Bien que ce ne sera pas précisé, il sera toujours sous-entendu que les différentes variétés et cartes doivent avoir les mêmes niveaux de régularités pour que le tout reste cohérent.



- Il existe un groupe de Lie  $G$  opérant à droite (ou à gauche) sur  $P$  via l'application différentiable :

$$R : \begin{array}{ccc} P \times G & \longrightarrow & P \\ (p, g) & \longmapsto & R_g(p) := p \cdot g = pg \end{array} \quad (1.5)$$

- Il existe une surjection différentiable  $\pi : P \longrightarrow B$  telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}(\pi(p)) = pG \quad (1.6)$$

- $P$  est munie d'un ensemble de paires  $(U_i, h_i)$  tel que les  $U_i$  forment un recouvrement de  $B$  et tel que les  $h_i : G \times U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset P$  soient des difféomorphismes vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \quad \forall x \in B, \quad h_i(ab, x) = h_i(a, x) \cdot b \quad \text{et} \quad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

La variété  $B$  est appelée la *base* de la VFP,  $G$  son *groupe structural* et  $pG$  la *fibres de  $P$  passant par  $p$*  et au dessus de  $\pi(p) \in B$ . Le tout est notée  $P(R, G, \pi, B)$  ou plus simplement  $P(G, B)$ .

Les fibres  $pG$  sont toutes difféomorphes à  $G$  et  $B$  est difféomorphe à  $P/G$ . Le diagramme commutatif ci-contre résume la situation ( $\text{pr}_i$  est la projection canonique sur la  $i$ -ème composante).

$$\begin{array}{ccc} G \times U_i & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U_i) \subset P \\ \text{pr}_2 \downarrow & \swarrow \pi & \\ U_i & & \end{array}$$

L'ensemble  $\{(U_i \times G, h_i^{-1})\}_i$  est l'équivalent d'un atlas pour les variétés différentielles classiques mais adapter pour tenir compte de la structure fibré de  $P$  et de l'action de  $G$ . Expliciter les changements de cartes dans  $P$ , ce fait comme suit.

D'abord,  $P$  étant localement difféomorphe à un produit  $G \times U_i$ , on peut y tracer des graphes appelés *sections locales*, comme sur les figures 1.4 et 1.5 ci-dessous. Formellement, une section locale au dessus de  $U_i \subset B$  est une application  $\sigma : U_i \longrightarrow P$  vérifiant :

$$\pi \circ \sigma = \text{id}|_{U_i}$$

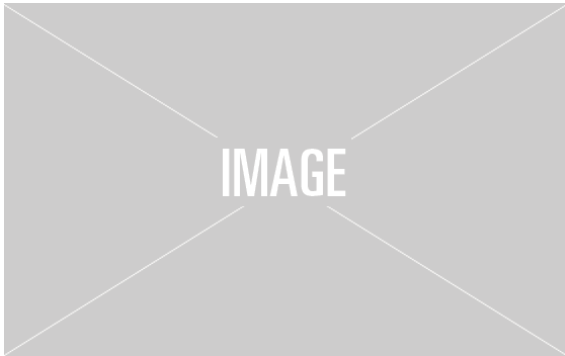


fig. 1.4 — **DONE** Représentation d'une section local  $\sigma$  au dessus de  $U_i \subset B$  de dimension 2. Comme  $P$  n'est pas un produit à proprement parler,  $\sigma$  est représenté dans  $G \times U_i$  à travers  $h_i$ .

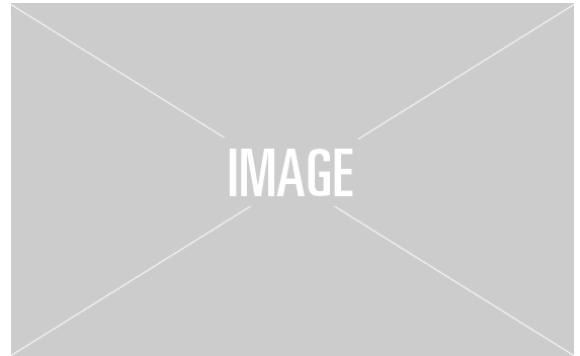


fig. 1.5 — Représentation de la section canonique définie par rapport à  $G$  avec une seconde section  $\sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot g(x)$ . Cette fois  $B$  est une variété de dimension 1.

Ensuite, les hypothèses sur  $P(G, B)$  sont telles que  $G$  agit transitivement et librement (ou sans point fixe) sur  $P$ . C'est-à-dire que, sur une même fibre, tout point peut être atteint par n'importe quel autre via l'action de  $G$  (transitivité) :

$$\forall x \in B, \quad \forall p, q \in P_x, \quad \exists t(p, q) \in G \mid p = q \cdot t(p, q)$$

et que la seule façon de laisser les points invariants par cette même action est de passer par l'élément neutre  $e$  (libre) :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad p = p \cdot g \implies g = e$$

De la transitivité de  $G$ , découle le fait que toutes les sections locales  $\sigma$  au dessus de  $U_i$  peuvent s'écrire à partir d'une même section  $\sigma_i$  via la formule :

$$\forall x \in B, \quad \sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma(x))$$

Son caractère libre, lui assure l'unicité d'un choix canonique de section  $\sigma_i$  sur  $U_i$ . Elle est donnée par :

$$h_i(x, e) = \sigma_i(x)$$

Cela mène à la définition :

**DÉFINITION 3 (FONCTIONS DE TRANSITIONS)** — L'intersection de deux cartes est noté  $U_{ij} = U_i \cap U_j$  et le passage d'une section locale canonique est donné par :

$$\forall x \in U_{ij}, \quad \sigma_j(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma_j(x))$$

L'élément de  $G$ ,  $t(\sigma_i, \sigma_j)$ , est alors appelé *fonction de transition* et sera noté  $\varphi_{ij}$ . Elle fait effectivement la transition entre deux cartes dans le sens où :

$$\forall (g, x) \in G \times U_{ij}, \quad h_i^{-1} \circ h_j(g, x) = (\varphi_{ij}(x)g, x)$$

### 1.2.2 Le fibré $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$

Dans notre cas c'est  $\mathbb{S}^n$  qui fait office d'espace totale avec pour base  $\mathbf{PC}^n$  et de groupe structural  $\mathbf{U}(1)$ . Pour obtenir la projection de  $\mathbb{S}^n$  sur  $\mathbf{PC}^n$ , il suffit de prendre la restriction de  $\pi$  à  $\mathbb{S}^n$ . En tenant compte de la normalisation, les coordonnées locales sur  $\mathbf{PC}^n$  se réécrivent,  $\forall w \in U_i$  :

$$w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i} = \frac{z^\mu}{|z^i|e^{i \arg(z^i)}} = \frac{z^\mu}{\sqrt{1 - \sum_{\nu \neq i} |z^\nu|^2}} e^{-i \arg(z^i)} \quad \text{car} \quad \sum |z^\nu|^2 = \|z\|^2 = 1$$

On constate bien que  $w^\mu$  n'est défini par rapport à  $z^\mu$  qu'à un choix de phase  $e^{-i \arg z^i} \in \mathbf{U}(1)$  près. À l'inverse, un représentant  $z_i$  dans  $\mathbb{S}^n$  de  $w \in U_i$  aura pour coefficient :

$$\forall \mu \neq i, \quad z_i^\mu = \frac{w^\mu}{\|w\|} e^{i\theta} \quad z_i^i = \frac{1}{\|w\|} e^{i\theta}$$

La norme de  $w$  étant à comprendre au sens des coordonnées locales sur  $U_i$ <sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|(w^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}\|^2 = \frac{1}{|z_i^i|^2} \sum_{\nu \neq i} |z_i^\nu|^2 = \frac{1 - |z_i^i|^2}{|z_i^i|^2} \iff |z_i^i|^2 \|w\|^2 = 1 - |z_i^i|^2 \\ &\iff |z_i^i|^2 = \frac{1}{1 + \|w\|^2} \\ &\iff |z_i^i| = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} \end{aligned}$$

D'où l'expression des coefficients de  $z_i \in \mathbb{S}^n$  :

$$\forall \mu \neq i, \quad z_i^\mu = \frac{w^\mu}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta} \quad z_i^i = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta}$$

Tout cela permet d'écrire  $\mathbb{S}^n$  comme une variété fibrée principale :

**PROPOSITION 1** — La  $(2n+1)$ -sphère  $\mathbb{S}^n$ , vue comme variété plongée dans  $\mathbb{C}^n$  est une VFP de base  $\mathbf{PC}^n$  et de fibre type  $\mathbf{U}(1)$ . L'action de  $\mathbf{U}(1)$  sur  $\mathbb{S}^n$  est induite par la multiplication par un scalaire complexe et où :

- La fibration  $\pi$  est la projection canonique de  $\mathbb{S}^n$  sur  $\mathbf{PC}^n$  :

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbf{PC}^n \\ z & \longmapsto & [z] \end{array} \quad (1.7)$$

<sup>3</sup> C'est un abus de notation,  $w$  n'a pas de norme en ce sens là puisqu'elle dépend du choix de carte  $U_i$ . Mais ici tout le raisonnement est purement local, donc ce n'est pas un problème.

- Les cartes locales  $h_i$  s'écrivent :

$$\forall w \in U_i, \forall e^{i\theta} \in U(1), h_i(w, e^{i\theta}) = \frac{(w^0, \dots, 1, \dots, w^n)}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta} \in \mathbb{S}^n \quad (1.8)$$

- Les sections canoniques  $\sigma_i$  au dessus des  $U_i$ , elles, sont définies par :

$$\forall w \in U_i, \sigma_i(w) = h_i(w, 1) = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} (w^0, \dots, 1, \dots, w^n) \quad (1.9)$$

- Les fonctions de transitions entre deux cartes  $U_i$  et  $U_j$  s'écrivent :

$$\varphi_{ij}(w) = e^{-i \arg(z_i^i)} e^{i \arg(z_j^j)} \quad \text{où} \quad z_{i,j} = \phi_{i,j}(w) \quad (1.10)$$

### 1.3 Espaces horizontaux et connexion

Le cadre étant posé, pour retrouver la notion de fréquence instantanée, il est nécessaire de munir  $\mathbb{S}^n(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$  d'une connexion. Cette dernière est introduite comme suit.

#### 1.3.1 Définition général

Comme  $P$  ressemble localement à un produit  $G \times U_i$ , il est utile de séparer ses espaces tangents  $T_p P$  comme une somme directe d'espaces tangents respectivement aux fibres et à la base. Conformément aux représentations précédentes (fig. 1.3 à 1.5), les premiers sont appelées espaces tangents *verticaux*, les seconds *horizontaux* et l'on note :

$$\forall p \in P, \quad T_p P = V_p P \oplus H_p P$$

Les tangents verticaux  $V_p P$  se définissent canoniquement via  $\pi$ , en tant que noyau de sa différentielle :

$$V_p P := \text{Ker}(T_p \pi) = \{v \in T_p P \mid T_p \pi(v) = 0\}$$

Ce n'est en revanche pas le cas des espaces horizontaux. Il faut donc faire un choix pour les  $H_p P$  et c'est ce choix qui est appelé *connexion* (elle connecte les espaces tangents entre eux). Comme pour les verticaux, ces sous-espaces peuvent être caractérisés par une 1-forme différentiable  $\omega$  sur  $P$  à valeur dans  $VP$ , auquel cas :

$$\forall p \in P, \quad H_p P = \text{Ker}(\omega_p)$$

Dans le cas des VFP, une connexion doit en plus avoir de bonnes propriétés au regard de l'action de  $G$  sur  $P$ , aboutissant à la définition :

**DÉFINITION 4 (CONNEXION SUR VFP)** — Une *connexion* sur une VFP  $P(G, B)$  est la donnée d'un sous-espace tangent,  $H_p P \subset T_p P$ , en tout point de  $p \in P$  tel que :

- $H_p P$  dépend différentiellement de  $p$  ("dépendre différentiellement" à un sens précis pour les sous-espaces mais qui ne sera pas utile pour la suite).
- $H_p P$  est supplémentaire à  $V_p P$  dans  $T_p P$  :

$$T_p P = V_p P \oplus H_p P \quad (1.11)$$

- l'assignation des  $H_p P$  est invariante par l'action de  $G$  au sens où :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad H_{R_g(p)} P = R_{g*}(H_p P) = \{R_{g*}(v) \mid v \in H_p P\} \quad (1.12)$$

Que l'on notera plus simplement :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad H_{p \cdot g} P = H_p P \cdot g = \{v \cdot g \mid v \in H_p P\} \quad (1.13)$$

Au delà d'assurer une compatibilité entre  $H$  et  $G$ , l'équation (1.12) permet de n'avoir à définir la connexion qu'en un seul point de chaque fibre, les autres se déduisant par cette formule. Concrètement, pour tout point de la base  $x \in U_i$ , il suffit de la définir en  $\sigma_i(x) = h_i(e, x)$ , de sorte que l'espace horizontal en tout autre point  $p = h_i(g, x) = \sigma_i(x) \cdot g$  au dessus de  $x$  sera donné par :

$$H_p P = H_{\sigma_i(x)} P \cdot g$$

Aussi, le fait que  $G$  soit un groupe de Lie permet de lier son algèbre  $\mathfrak{g} \cong T_e G$  aux tangents verticaux via l'application  $\#$  : <sup>4</sup>

$$\forall (p, A) \in P \times \mathfrak{g}, \quad \forall f \in \mathcal{C}(P, \mathbb{R}), \quad A^\#(p) = \left. \frac{d}{dt} p \cdot \exp(tA) \right|_{t=0} \in V_p P$$

Sachant cela, toujours dans le cas des VFP, la 1-forme de connexion est à valeur dans  $\mathfrak{g}$  :

**DÉFINITION 5 (1-FORME DE CONNEXION)** — La 1-forme de connexion  $\omega$  d'une VFP  $P(G, B)$  est définie comme la 1-forme différentiable sur  $P$  à valeur dans  $\mathfrak{g}$  (i.e. en tout point  $p \in P$ ,  $\omega_p$  est à valeur de  $T_p P$  dans  $\mathfrak{g}$ ), telle que  $\forall p \in P$  :

$$\forall A \in \mathfrak{g}, \quad \omega_p(A^\#(p)) = A \quad H_p P = \text{Ker}(\omega_p) \quad (1.14)$$

$$\forall v \in T_p P, \quad \omega_{p \cdot g}(v \cdot g) := \omega_{p \cdot g}(R_{g*}(v)) = g^{-1} \omega_p(v) g \quad (1.15)$$

Tout comme les  $H[p]P$ , la troisième égalité assure que  $\omega$  n'a besoin d'être définie que sur un point de chaque fibre. Cela permet de définir  $\omega$  localement non pas sur  $U_i \times G$ , mais seulement sur  $U_i \cong U_i \times \{e\}$ . Ainsi,  $\omega$  induit une 1-forme sur les cartes  $U_i$  par l'image réciproque des sections canoniques  $\sigma_i$ . Elles sont notées  $\mathcal{A}_i := \sigma_i^* \omega$  et sur le chevauchement  $U_i \cap U_j$ , elles vérifient :

$$\mathcal{A}_j = \varphi_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \varphi_{ij} + \varphi_{ij}^{-1} d\varphi_{ij} \quad (1.16)$$

Munir  $P(G, B)$  d'une connexion permet, entre autre de définir la notion de relèvement horizontal :

**DÉFINITION 6 (RELÈVEMENT HORIZONTAL)** — Étant donné une trajectoire  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow B$  sur la base et un point  $\gamma_0 \in \rho(0)G$  au dessus de  $\rho(0)$ , il existe un unique relèvement  $\gamma$  de  $\rho$  dont les vecteurs tangents sont tous horizontaux. i.e. tel que  $\forall t \in \mathbb{R}$  :

$$\pi \circ \gamma(t) = \rho(t) \quad \dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)} P \quad \gamma(0) = \gamma_0 \quad (1.17)$$

On parle de *relèvement horizontal* (*horizontal lift*, ou *transport parallèle* de  $\gamma_0$  le long de  $\rho$ ) puisque  $\gamma$  n'a pas de déplacement vertical au sens de la connexion. Du point de vue de la 1-forme  $\omega$ , si  $\gamma$  s'écrit localement  $\gamma_i = \sigma_i(\rho)g_i$ , alors  $g_i$  vérifie l'équation (d'où vient l'unicité du relèvement) :

$$\frac{d}{dt} g_i(t) = -\mathcal{A}_i \rho(t) \cdot g_i(t) \quad (1.18)$$

<sup>4</sup> Les vecteurs tangents étant des formes linéaires,  $A^\#(p)$  est plus précisément définie par l'application :

$$A^\#(p) : f \mapsto \left. \frac{d}{dt} f(p \cdot \exp(tA)) \right|_{t=0}$$

Si maintenant  $\gamma$  est une trajectoire de  $P$ , on dira, par abus de langage, que  $\tilde{\gamma}$  est le relèvement horizontal de  $\gamma$  si c'est le relèvement horizontal de sa projection  $\pi \circ \gamma$  avec la condition initiale  $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$ .

Pour la suite, il sera utile d'avoir l'expression d'une trajectoire  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow P$  par rapport à son relèvement horizontale  $\tilde{\gamma}$ . Pour l'obtenir, on note  $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot g$ , de sorte que sa dérivée s'écrit :

$$\dot{\gamma} = \dot{\tilde{\gamma}} \cdot g + \tilde{\gamma} \cdot dg = \dot{\tilde{\gamma}} \cdot g + \gamma \cdot g^{-1} dg$$

Ce à quoi on applique  $\omega$ , donnant :

$$\begin{aligned} \omega_\gamma(\dot{\gamma}) &= \omega_\gamma(\dot{\tilde{\gamma}} \cdot g) + \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1} dg) \\ &= g^{-1} \omega_{\tilde{\gamma}}(\dot{\tilde{\gamma}}) g + \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1} dg) && \text{d'après (1.15)} \\ &= \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1} dg) && \text{car } \tilde{\gamma} \text{ est horizontale} \end{aligned}$$

Le terme  $g^{-1} dg$  restant étant un vecteur de  $g^{-1} T_g G \cong T_e G \cong \mathfrak{g}$  et :

$$\omega_\gamma(\dot{\gamma}) = \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1} dg) = \omega_\gamma((g^{-1} dg)^\#(p)) = g^{-1} dg$$

D'où  $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot g$  avec  $g$  est solution de :

$$\frac{d}{dt} g(t) = g(t) \omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \quad (1.19)$$

### 1.3.2 Choix de connexion sur $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$

Dans le cas de  $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$ , la métrique sur  $\mathbb{S}^n$  induit naturellement un choix de connexion car la projection  $\pi$  est une submersion dite riemannienne [8]. Formellement, c'est dire que la projection de  $\mathbb{S}^n$  sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  est telle que :

$$\forall p \in \pi^{-1}(w), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p \mathbb{S}^n, \quad g_{\pi(p)}(\pi_* \mathbf{u}, \pi_* \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}_H, \mathbf{v}_H \rangle \quad (1.20)$$

où  $g$  est la partie réelle<sup>5</sup> hermitienne de la métrique de Fubini-Study. Plus concrètement, les espaces tangents de  $\mathbb{S}^n$  s'écrivent :

$$T_p \mathbb{S}^n = \mathrm{Vec}\{p\}^\perp := \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \Re \langle \mathbf{v}, p \rangle = 0\}$$

et sachant que  $ip \in \mathrm{Vec}\{p\}^\perp$ , ils se séparent en deux composantes orthogonales :

$$T_p \mathbb{S}^n = \mathrm{Vec}\{p\}^\perp = \mathrm{Vec}\{ip\} \oplus \mathrm{Vec}\{ip\}^\perp$$

Ainsi, la nature de  $\pi$  (1.20) est telle que le premier membre est l'espace tangent vertical à  $p$  et le second invariant par l'action de  $\mathrm{U}(1)$  :

$$\forall e^{i\theta} \in \mathrm{U}(1), \quad \mathrm{Vec}\{i(e^{i\theta} p)\}^\perp = \mathrm{Vec}\{ip\}^\perp$$

Ce qui permet de poser  $H_p \mathbb{S}^n := \mathrm{Vec}\{ip\}^\perp$  et donne directement la 1-forme associée :

$$\begin{aligned} H_p \mathbb{S}^n &= \{\mathbf{v} \in T_p \mathbb{S}^n \mid \Re \langle \mathbf{v}, ip \rangle = 0\} \\ &= \{\mathbf{v} \in T_p \mathbb{S}^n \mid \Im \langle \mathbf{v}, p \rangle = 0\} \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_p(\mathbf{v}) = \Im \langle \mathbf{v}, p \rangle$$

Enfin, comme l'algèbre de Lie de  $\mathrm{U}(1)$  est  $\mathfrak{u}(1) \cong i\mathbb{R}$ , il convient de poser :

$$\forall p \in \mathbb{S}^n, \forall \mathbf{v} \in T_p \mathbb{S}^n, \quad \omega_p(\mathbf{v}) := i \Im \langle \mathbf{v}, p \rangle \quad (1.21)$$

Un tel choix de connexion n'est pas anodin d'un point de vue signal puisque  $\omega$  donne la fréquence instantanée telle que définie dans la ?? précédente et c'est la première chose qui sera justifié dans la partie suivante.

<sup>5</sup> Cette métrique induite ne peut pas être hermitienne car  $\mathbb{S}^n$  n'est pas une variété complexe.

## II — \* Interprétation des trois phases dans ce cadre

Résumons la situation. Pour étudier le comportement fréquentiel d'un signal multivarié complexe, il est utile de voir l'espace de tel signaux,  $\mathbb{C}^{n+1}$ , comme le produit :

$$\mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathrm{PC}^n)$$

Dans ce cadre, la variété  $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathrm{PC}^n)$  est naturellement – par la projection  $\pi$  – munie d'une connexion qui, par ailleurs, n'est pas sans rappeler à la formule de la fréquence instantanée (??) vue en première partie.

*Résume mieux, plus de détail (antiphrase KEKW)*

### 2.1 Fréquence instantanée et phase dynamique sur $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathrm{PC}^n)$

Pour comprendre pourquoi le choix de connexion (1.21) est justifié du point de vue signal, on se propose de prendre le problème par l'autre bout : comment définir la notion de fréquence instantanée d'un signal dans le fibré  $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathrm{PC}^n)$  ?

Comme, à chaque instant  $t$ , un signal  $\gamma$  sur  $\mathbb{S}^n$  est représenté par une paire  $(e^{i\alpha(t)}, \rho(t)) \in \mathrm{U}(1) \times \mathrm{PC}^n$  à travers les  $h_i$ , l'un serait tenté de voir  $\alpha(t)$  comme la fréquence du signal et  $\rho(t)$  comme son état de polarisation.

Le problème de cette représentation est qu'elle dépend du choix de carte  $U_i$ , ainsi sur l'intersection  $U_{ij}$ ,  $\gamma$  aurait (au moins) deux notions de fréquence instantanée.

C'est là qu'intervient la connexion. D'une part, la 1-forme  $\omega$  associée est définie globalement sur le fibré, autrement dit, elle est indépendante des représentations locales de  $\gamma$ .

D'autre part, le relèvement horizontal  $\tilde{\gamma}$  d'une courbe  $\rho \subset \mathrm{PC}^n$ , par définition, n'a pas de variation verticale. Dans notre contexte, cela signifie que  $\tilde{\gamma}$  n'a pas de variation dans la direction de  $\mathrm{U}(1)$ , donc son état de polarisation (composante sur  $\mathrm{PC}^n$ ) varie mais pas ses "fréquences".

Ainsi, le relèvement horizontal  $\tilde{\gamma}$  d'un signal  $\gamma$  s'interprète comme une version de ce dernier dénuée de toute fréquence instantanée. L'action  $\alpha$  permettant de passer de  $\tilde{\gamma}(t)$  à  $\gamma(t)$  (i.e.  $(t) = e^{i\alpha(t)}\tilde{\gamma}(t)$ ) peut alors être comprise comme l'ajout d'une fréquence instantanée (voir fig. 1.6 et 1.7 ci-dessous)

*Un signal qui n'aurait pas de fréquence instantanée mais une polarisation instantanée n'a pas vraiment de sens. Cela renvoi à notre discussion de première partie : la fréquence instantanée d'un signal univarié devait contenir les hautes fréquences et son amplitude les basses. Ici le problème est le même, mais avec l'état de polarisation en lieu de l'amplitude. Pour s'en convaincre, il est utile de retourner sur le cas bivarié.*

*La projection sur  $\mathrm{PC}^2$  de  $\gamma$  représente l'ellipse de polarisation instantanée. Mais si  $\gamma$  n'as pas de fréquence instantanée, alors  $\gamma(t)$  n'est plus représenté que par le sommet de l'ellipse paramétrée par  $\rho_\gamma$ . L'on pourrait alors argumenter que tout signal peut être décrit par la seule variation de son état de polarisation, ce qui est parfaitement inintéressant.*

*Cette vision du relèvement horizontal est donc purement formelle et, si elle à bien un sens géométrique, elle ne correspond du point de vue du signal.*

En admettant l'interprétation de la 1-forme de connexion comme fréquence instantanée, les discussions de première partie (??) suggèrent de choisir là encore :

$$\forall p \in \mathbb{S}^n, \forall \mathbf{v} \in T_x \mathbb{S}^n, \quad \omega_p(\mathbf{v}) = i\Im m \langle \mathbf{v}, p \rangle \quad (1.22)$$

La phase dynamique, s'interprète alors comme la déviation du signal par rapport à son relèvement horizontal. Ainsi,  $g = e^{i\Phi_{\mathrm{dyn}}(\gamma)}$  est solution de (1.19), qui se réécrit alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g'(t) = g(t) i\Im m \langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle \\ g(t_0) = 1 \end{cases} \iff g(t) = e^{\int_{t_0}^t i\Im m \langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) \rangle ds}$$



fig. 1.6 — Fréquence instantanée d'un signal  $x$  vu comme variation verticale de  $x$  par rapport à son relèvement horizontale  $\tilde{x}$  associé. À noter que  $\tilde{x}$  ne dépend pas des cartes mais dépend de la trajectoire  $\rho_x$  de  $x$  sur  $\text{PC}^n$ .

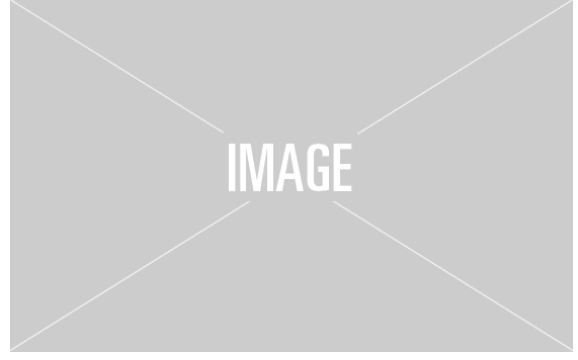


fig. 1.7 — Exemple du relèvement horizontale d'une signal bivarié

Ce qui redonne la formule :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\gamma, t_0, t) = \int_{t_0}^t \Im m \langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) \rangle ds \quad (1.23)$$

Chose importante tout de même : si cette définition de la phase dynamique est bien indépendante du choix de carte, elle dépend en revanche du relèvement horizontale de  $\gamma$  et, *a fortiori*, de la trajectoire de la projection  $\pi(\gamma)$  de  $\gamma$  sur  $\text{PC}^n$ . C'est de là que va émerger la phase géométrique.

## 2.2 Phase géométrique

Notamment dans le cadre quantique, la phase géométrique est connue pour avoir deux interprétations géométriques [3, 4, 7] : soit comme conséquence d'un transport parallèle sur  $\mathbb{S}^n$  soit comme une mesure de l'air entouré par le signal projeté sur  $\text{PC}^n$ . Ici ses résultats seront redémontrés (avec les détails en annexes) dans le notre dans notre cadre – plus général — et réinterpréter en terme de signal.

Pour se faire, sera d'abord traité le cas particulier des signaux cycliques (*ss-sec.* 2.2.1). Les résultats seront ensuite généralisé au cas plus générale (*ss-sec.* 2.2.2) via l'étude des géodésiques de  $\text{PC}^n$  avant, enfin, de faire montrer le lien entre phase géométrique et les aires sur  $\text{PC}^n$  (*ss-sec.* 2.2.3).

### 2.2.1 Cas des signaux projectivement cycliques

Dans toute la suite un signal  $\gamma$  se  $\mathbb{S}^n$  sera dit cyclique s'il entre les instants  $t_0$  et  $t$ ,  $\gamma$  retourne dans la même fibre :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \gamma(t) = e^{i\alpha} \gamma(t_0) \quad (1.24)$$

Dit autrement, la projection de  $\gamma$  de  $\text{PC}^n$ ,  $\pi \circ \gamma$ , retourne à son état initial au temps  $t$ . Cette hypothèse est très restrictive puisqu'elle ne peut arriver que certain instant, sans quoi  $\gamma$  n'aurait qu'un mouvement vertical, ce qui n'est d'autant plus contraignant.

Cela étant dit, elle a le bon goût d'énormément simplifier les choses puisque, comme tout ce passe dans la même fibre, il est très simple calculer et d'annuler individuellement les phases de  $\gamma$ . Suivant les travaux de Aharonov & Anandan [1] et les explications de Bohm [3], la première remarque est que, comme  $\gamma(t_0)$  et  $\gamma(t)$  sont dans une même fibre, la phase totale est donné par le paramètre  $\alpha$  de (1.24) :

$$e^{i\Phi_{\text{tot}}} = \alpha = t(\gamma(t_0), \gamma(t))$$

La phase dynamique, conformément à ce qui a été dit plutôt, elle donne la déviation au relèvement horizontale  $\tilde{\gamma}$  :

$$e^{i\Phi_{\text{dyn}}} = t(\tilde{\gamma}(t), \gamma(t))$$

D'où :

$$\begin{aligned}
e^{i\Phi_{\text{geo}}} &= e^{i\Phi_{\text{tot}}} e^{-i\Phi_{\text{dyn}}} = t(\gamma(t_0), \gamma(t)) \, t(\tilde{\gamma}(t), \gamma(t))^{-1} \\
&= t(\gamma(t_0), \gamma(t)) \, t(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)) \\
&= t(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t)) \quad \text{car } \gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)
\end{aligned}$$

Autrement dit, la phase géométrique correspond au déplacement vertical de  $U(1)$  dû à la trajectoire de  $\tilde{\gamma}$ .

- Dans ce cas, la projection  $C_\gamma$  de  $\gamma$  sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  est (proprement) cyclique
- Comme, entre autre, Bohm l'explique dans [3], en fonction du choix de relèvement on peut isoler les différentes phases de  $\gamma$ .
- En particulier,  $C_\gamma$  est cyclique,  $\gamma(1)$  est dans la même fibre que  $\gamma(0)$  et les trois se décrivent dans une même fibre  $\gamma(0)U(1) = \gamma(1)U(1)$  :
- Étant donné le choix de connexion, le relèvement horizontale  $\tilde{\gamma}$  de  $C_\gamma$  (à partir du point initiale  $\gamma(0)$ ) n'a pas de phase dynamique.  $\Phi_{\text{dyn}}$  est donc donnée par différence de phase entre  $\gamma(1)$  et  $\tilde{\gamma}(1)$
- Pour obtenir la phase géométrique, on considère une troisième relèvement,  $\eta$ , de  $C_\gamma$  qui cette fois est proprement cyclique. Comme il n'a, par construction, par de phase totale, sa phase géométrique est égale à sa phase dynamique au signe près.
- Or, la phase  $\Phi_{\text{dyn}}(\eta)$  est, comme pour  $\gamma$  donné par la différence de jauge entre  $\tilde{\gamma}(1)$  et  $\eta(1)$ .
- Tout cela est résumé par la figure 1.8 ci-dessous :



fig. 1.8 — Représentation des trois phases de  $\gamma$  dans le cas pseudo-cyclique.

- Remarque importante : le choix de relèvement cyclique  $\eta$  n'est pas unique mais n'est pas important pour autant, puisque c'est la seule propriété  $\eta(0) = \eta(1)$  qui permet d'avoir l'interprétation exposé juste avant. Cela traduit, par ailleurs, l'aspect invariant par transformation de jauge de  $\Phi_{\text{geo}}$ .
- Ce que cette représentation montre c'est que  $\Phi_{\text{geo}}$  est donné par l'holonomie du trajet  $\gamma$ .
- DEF : holonomie
- Dans notre cas, la variété est connexe ce qui assure que  $\text{Hol}$  est un sous-groupe de Lie connexe du groupe structural, à savoir  $U(1)$ . Ainsi,  $\text{Hol} = U(1)$ , ce qui montre que la phase géométrique peut prendre n'importe qu'elle valeur.
- Cette formulation est très jolie mais finalement que très peu instructive.
- Rq : On pourrait alors se demander si  $\Phi_{\text{geo}}$  ne pourrait pas, comme  $\Phi_{\text{dyn}}$ , s'écrire comme l'intégrale d'une 1-forme sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ .  
A cela, Mukunda & Simon explique dans [12] que non. Moralement, l'écriture  $\Phi_{\text{geo}} = \Phi_{\text{tot}} - \Phi_{\text{dyn}}$  suggère que ça ne peut pas être le cas puisque la phase totale ne peut pas s'écrire comme l'intégrale d'une 1-forme.

Cela vient du fait que  $\Phi_{\text{tot}}$  est indépendant de la trajectoire de  $\gamma$  sur  $]0, 1[$ . Au mieux, elle peut être vu comme la longueur de la géodésique  $\gamma_g$  sur  $\mathbb{S}^n$  entre les points  $\gamma(0)$  et  $\gamma(1)$ . C'est-à-dire comme l'intégrale de la norme sur  $\mathbb{S}^n$  de  $\dot{\gamma}_g$  le long de  $\gamma_g$ . Mais rien par rapport à  $\gamma$



## 2.2.2 \* Généralisation à tout signal

### 2.2.3 \* La phase géométrique sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$

- Cela étant dit, dans le cas cyclique  $\Phi_{\text{geo}}$  et  $\Phi_{\text{dyn}}$  se confondent et cette propriété peut être exploitée.
- En effet, modulo l'exponentielle, la phase dynamique est l'intégrale de la connexion sur la courbe. Ainsi, d'après le théorème de Stokes, on a relation :

$$\oint_{\rho} \mathcal{A}_i(d\rho) = \iint_{\Sigma} d\mathcal{A}_i(dx, dy) dx dy$$

- En effet, la commutativité de  $U(1)$  fait que  $\text{Hol}$  est indépendant du relèvement  $\eta(0)$  de  $C_{\gamma}(0)$
- Ajouter à cela le fait que la connexion s'exprime exclusivement dans les cartes  $U_i$ , on se ramène à calcul un calcul de la phase géométrique exclusivement dans  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ .
- Dans ce cas, la phase géométrique est l'intégrale sur un lacet d'une 1-forme et le théorème de Stokes peut s'appliquer :
- THEO de Stokes
- Dans notre cas : on obtient l'intégrale d'une forme symplectique sur l'aire entouré par le lacet  $C_{\gamma}$
- En somme, cela se ramène à un calcul d'aire sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$
- *Un mot sur le lien avec Fisher*
- Si maintenant  $\gamma$  est qu'elle conque, pour retrouver les interprétation précédente, le plus simple est encore de se ramener au cas pseudo-cyclique.
- Cela demande de refermer  $\gamma$  de sorte à ne pas engendrer plus de phase géométrique. En somme, on veut savoir qu'elles sont les trajectoire de  $\mathbb{S}^n$  qui n'engendrent pas de phase géométrique.
- pour cela on étudie les géodésiques !
- Sachant le représentant par Stokes c'est plutôt simple :

## TABLE DES FIGURES

1.1	La première figure de tout bon livre de géométrie différentielle . . . . .	4
1.2	Diagramme de passage de $f$ à $f_*$ et/ou $f^*$ . . . . .	4
1.3	Ruban de Mobius comme variété fibrée . . . . .	6
1.4	Représentation d'une section local . . . . .	7
1.5	Représentation de la section canonique . . . . .	7
1.6	Interprétation géométrique de la fréquence instantanée . . . . .	13
1.7	Exemple relèvement horizontale . . . . .	13
1.8	Représentation des trois phases de $\gamma$ dans le cas pseudo-cyclique . . . . .	14

## TABLE DES CODES

# RÉFÉRENCES

- [1] Y. AHARONOV AND J. ANANDAN, *Phase change during a cyclic quantum evolution*, Physical Review Letters, 58 (1987), pp. 1593–1596.
- [2] W. BALLMANN, *Lectures on Kähler Manifolds*, vol. 2 of ESI Lectures in Mathematics and Physics, EMS Press, 1 ed., July 2006.
- [3] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [4] D. CHRUŚCIŃSKI AND A. JAMIOŁKOWSKI, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.
- [5] E. COHEN, H. LAROCQUE, F. BOUCHARD, F. NEJADSATTARI, Y. GEFEN, AND E. KARIMI, *Geometric phase from Aharonov–Bohm to Pancharatnam–Berry and beyond*, Nature Reviews Physics, 1 (2019), pp. 437–449.
- [6] M. DO CARMO, *Riemannian Geometry*, Mathematics (Boston, Mass.), Birkhäuser, 1992.
- [7] F. FAURE, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).
- [8] N. KAYBAN, *Riemannian Immersions and Submersions*.
- [9] J. LAFONTAINE, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [10] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [11] ———, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.
- [12] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [13] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.
- [14] PHAM MÂU QUÂN, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Monographies universitaires de mathématiques, Dunod, Paris, 1969.
- [15] E. M. RABEI, ARVIND, N. MUKUNDA, AND R. SIMON, *Bargmann invariants and geometric phases: A generalized connection*, Physical Review A, 60 (1999), pp. 3397–3409.