

Mémoire de Stage de M2

PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Pierre-Olivier AMBLARD, Julien FLAMANT & Michel
BERTHIER

Master MIX – Université de La Rochelle

2024 – 2025

TABLES DES MATIÈRES

Introduction	1
Notations et conventions	2
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> PARTIE I — INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE 3 </div>	
I — Introduction de la phase géométrique	3
1.1 Cas univarié : signaux AM-FM	3
1.2 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié	4
1.3 Apparition de la phase géométrique	7
II — Première étude : cas des signaux AM-FM-PM	8
2.1 Définitions et calcul des phases	9
2.2 Interprétation dans la sphère de Poincaré	10
2.3 Généralisation en plus haute dimension	12
Annexes	14
Annexe A — Compléments sur l'analyse temps-fréquence	14
A.1. Un mot sur la notion de fréquence instantanée (<i>nécessaire?</i>)	14
A.2. Formalisme derrière la transformée en SA	14
A.3. Lien avec le théorème de Bedrosian	14
Annexe B — Compléments sur les signaux AM-FM-PM	14
B.1. Construction détaillée des signaux AM-FM-PM (<i>nécessaire?</i>)	14
B.2. Démonstrations	14
Annexe C — Lien entre Poincaré et Bloch	16
C.1. Lien entre les deux types de signaux	16
C.2. Lien entre les projections	17
C.3. Transformation de phases	18
<div style="display: flex; justify-content: space-between;"> PARTIE II — ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME 20 </div>	
I — Cadre d'étude	20
1.1 — \mathbb{PC}^n vue comme variété différentielle	21
1.1.1 Rappels de géométrie différentielle et notations	21
1.1.2 \mathbb{PC}^n comme variété différentielle	22
1.2 — \mathbb{S}^n comme fibré principal	23
1.2.1 Définition générale	23
1.2.2 Le fibré $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbb{PC}^n)$	25
1.3 — Espaces horizontaux et connexion	26
1.3.1 Définition général	26
1.3.2 Choix de connexion sur $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbb{PC}^n)$	28
II — Interprétation des trois phases dans ce cadre	29
2.1 — Cas pseudo-cyclique	30
2.2 — La phase géométrique dans \mathbb{PC}^n	31
2.3 — Retour au cas général	31

III —	Aller plus loin.	31
Annexe		32
Annexe A —	Connexion induite par une métrique	32
Annexe B —	Algèbre et groupe de Lie	32
B.1.	Quelques généralités	32
B.2.	Cas particulier : $U(1)$	32
Annexe C —	Variété différentielle complexe, tiré de [16]	32
<hr/>		
PARTIE III —	NOTES 'N' THOUGHTS	34
<hr/>		
I —	Notes sur l'approche Géométrique	34
1.1 —	Notes sur l'approche à avoir	34
1.2 —	La vision de Bohm [1, fig. 4.3]	35
1.3 —	La vision Mukunda & Simon [14, 15]	36
1.4 —	Fisher (man, 42 Wallaby way, Sydney)	37
II —	Réflexion autour du produit hermitien	37
III —	Description des signaux AM-FM-PM.	38
3.1 —	Bivarié	38
3.2 —	Trivarié.	38
3.3 —	Généralisation de ces formules au cas n -varié	39
3.4 —	Plus de note (très OSEF)	40
3.4.1	Bivarié	40
3.4.2	Trivarié	42
3.5 —	Mon blabla	43
IV —	Vrac	44
4.1 —	Random stuff ready pour rédac (+labeled)	44
4.2 —	Bilan des formules	44

INTRODUCTION

INTRO A REFAIRE QUAND ON SAURA VRAIMENT DE QUOI ON PARLE DANS CETTE PARTIE

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui demande beaucoup de contexte pour être expliqué. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant t d'un signal complexe ψ est donné par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) = \arg \langle \psi(t), \psi(t_0) \rangle \Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\psi}(s), \psi(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\psi(t) \rightsquigarrow \psi'(t) = e^{i\alpha(t)} \psi(t)$$

Cette propriété rend la phase Φ_{geo} intrinsèquement liée à la trajectoire que prend la projection de ψ dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ et par conséquent, à la géométrie de ce dernier, d'où son nom.

Ceci à largement été étudié dans le cadre de système dynamique régis par EDP [4, 13], notamment en mécanique quantique avec l'équation Schrödinger [1, 14, 16]. Ce n'est que récemment que Le Bihan, Flament et Amblard se sont intéressés à son application en traitement du signal dans le cas de signaux bivariés [8, 9].

[...]

NOTATIONS ET CONVENTIONS

OBJET/FONCTION	NOTATION
Conjugué complexe	\bar{x}
Transposée (resp. adjoint) de la matrice A	tA (resp. A^\dagger)
Distribution de Dirac	δ
Indicatrice de E	$\mathbb{1}_E$
Fonction signe	$\text{sign}(x)$
Transformée de Fourier	$\mathcal{F}[x], \hat{x}$
Transformée en SA	$\mathcal{A}[x]$
Transformée de Hilbert	$\mathcal{H}[x]$
Produit hermitien	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Espérance et variance de f suivant ρ	$\mathbb{E}_\rho[f(t)], \mathbb{V}_\rho[f(t)]$
Espace des fonctions p.p. de puissance p^{eme} intégrable à valeur de E dans F	$L^p(E, F)$
Support d'une fonction f	$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$
Matrice de rotation de paramètre Θ (resp. d'angle θ en dimension 2)	R_Θ (resp. R_θ)
Ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$)
Ensemble des matrices hermitiennes (resp. anti-hermitiennes) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$)

Note générale

- les références sont en fin de mémoire est en .bib sur le [GitHub](#)
- Idem pour les codes et un mot sur **pygeomphase**
- En italique sont les notes un peu plus informelles
- On va parler de géo diff et pour éviter de réécrire un livre, on va admettre beaucoup de résultats, on renvoi vers [7, 16] (*metts en d'autre*) pour une introduction extensive à la théorie

Notations math :

- Convention sur le produit hermitien (congué à droite)
- les vecteurs seront le plus souvent en gras, leur dérivée en temps notée par un point (ex. : $\dot{\mathbf{x}}(t)$) et celle des scalaires seront noté par un prime (ex. : $a'(t)$)

PARTIE I

INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE

En traitement du signal, la phase d'un signal est intrinsèquement liée à la notion de fréquence instantanée, qui joue un rôle important en analyse temps-fréquence. C'est donc de point que commencera notre discussion pour introduire la phase géométrique. Pour cela, seront rapidement introduit quelques notions et résultats d'analyse temps-fréquence dans le cas univarié (sec. 1.1). Suite à quoi sera définie la phase instantanée pour le cas multivarié (sec. 1.2), qui permettra enfin de mettre en évidence la phase géométrique (sec. 1.3).

Dans une seconde partie, seront introduit les signaux bivarié dit AM-FM-PM (sec. 2.1), dont la phase géométrique sera calculée explicitement (sec. ??), ce qui permettra de mettre en évidence certaines de ses propriétés. Dans une dernière section, seront proposées des généralisations des signaux AM-FM-PM au delà du cas bivarié et seront discutées leur pertinence quant à l'étude de la phase géométrique (sec. ??).

I — Introduction de la phase géométrique

1.1 Cas univarié : signaux AM-FM

En traitement du signal, l'analyse fréquentielle par la transformée de Fourier est un incontournable. Seulement, cette transformation fait perdre toute notion temporelle : si l'étude du spectre du signal permet de dire quelles fréquences apparaissent dans le signal, elle ne permet pas de dire à quel(s) moment(s). C'est en réponse à cela, entre autre, qu'est développé l'analyse temps-fréquence. À cette fin, sont définies les paramètres instantanées d'un signal :

DÉFINITION 1 (PARAMÈTRES INSTANTANÉES) — Soit x , est un signal complexe écrit sous forme exponentielle :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & a(t)e^{i\phi(t)} \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \phi(t) \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

a est appelé *amplitude instantanée* du signal, $1/2\pi\phi'$ sa *fréquence instantanée* et sa *phase instantanée* est définie — modulo un choix de phase initiale — par :

$$\Phi_{\text{inst}}(x, t_0, t) = \phi(t) - \phi(t_0) \quad (1.2)$$

Pour les signaux réels, ces notions sont moins évidentes à définir puisqu'elles demandent d'écrire les signaux sous la forme :

$$x(t) = a(t) \cos \phi(t)$$

Auquel cas, le choix de la pair (a, ϕ) n'est pas unique. Il existe tout de même un "bon" choix de telle pair dans le cas des signaux dit AM-FM :

DÉFINITION 2 (SIGNAL AM-FM) — Un signal réel de la forme :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a(t) \cos \phi(t) \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \quad (1.3)$$

est dit *AM-FM* (*amplitude and frequency modulated*) si a et $\cos \phi$ admettent des transformée de Fourier et si de plus la première a un spectre concentré sur les basses fréquences, la seconde concentré sur les hautes fréquences et que les deux ne se chevauchent pas. Formellement, ces conditions demandent qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda] \quad (1.4)$$

Dans ce cas, a et ϕ donne lieu au même vocabulaire que pour le cas complexe (définition 1).

Ces conditions sont liées au théorème de Bedrosian, et plus de détail se trouve dans l'annexe A. Pour le dire rapidement, elles exigent que toutes les hautes fréquences de x se trouvent dans la phase. Intuitivement, cela évite que toutes les fréquences aillent dans l'amplitude a , auquel cas, x n'aurait "pas de fréquence" au sens où ϕ pourrait être choisie constante, voir nulle.

Sous ces conditions, x peut être vu comme le signal complexe $\mathcal{A}[x]$ telle que :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} = a(t) \cos \phi(t) + ia(t) \sin \phi(t) = x + i\Im \mathcal{A}[x]$$

L'on parle alors de transformée en *signal analytique* de x et $\mathcal{A}[x]$ a, par construction, les mêmes paramètres instantanés que x . Là encore, le lecteur est renvoyé vers l'annexe A pour plus de détail.

L'intérêt d'introduire toutes ces notions est que les signaux multivariés — même complexe — souffrent du même problème que les signaux réels. En effet, en écrivant un signal \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix}$$

le fait que \mathbf{x} soit à valeur dans \mathbb{C}^n impose un choix naturel d'amplitude instantanée : sa norme. Pour ce qui est de la phase instantanée, en revanche, n'importe quel choix de ϕ convient *a priori* :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} = a(t)e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\psi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\psi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\psi_n(t)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a(t) = \|\mathbf{x}(t)\|_2 \\ \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\|_2 = 1 \\ \phi_i = \phi + \psi_i \end{cases}$$

Il suffit que les ψ_i soient ajustés pour assurer que $\phi_i = \phi + \psi_i$.

À noter, que si a et ϕ sont respectivement une amplitude et une phase, le vecteur restant $(a_i e^{i\psi_i})_{1 \leq i \leq n}$ correspond à un vecteur de polarisation, sur lequel nous reviendrons dans la section II suivante.

1.2 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié

On se propose ici de définir la phase instantanée comme suit :

DÉFINITION 3 (PHASE DYNAMIQUE/INSTANTANÉE) — La *phase instantanée* ou *dynamique* (à l'instant t partant de t_0) d'un signal multivarié $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ quelconque, est définie par la formule :

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \int_{t_0}^t \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi'_i(s) ds \quad (1.5)$$

On s'autorisera à omettre les paramètres de Φ_{dyn} lorsque cela ne prête pas à confusion.

Outre l'aspect variationnelle de cette formule, le terme “dynamique” viens du fait que, lorsque \mathbf{x} suit une équation de Schrödinger :

$$i \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = h\mathbf{x}(t) \quad (1.6)$$

la dérivée $\dot{\mathbf{x}}$ dans la formule (1.5) ci-dessus se voit remplacé par l'hamiltonien $h\mathbf{x}$ [1, sec. 2], [14, p. 215], donnant :

$$\Phi'_{\text{dyn}} = -i \int_{t_0}^t \frac{\langle h\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds$$

Sachant que \mathbf{x} n'a aucune raison de suivre une telle équation dans notre cas, poser $h = i \frac{d}{dt}$ enlève toute contrainte, auquel cas $\Phi'_{\text{dyn}} = \Phi_{\text{dyn}}$.

Ceci étant, deux arguments sont donnés pour motiver cette définition :

Argument variationnelles

Le premier, fortement inspiré par les travaux de Lilly & Olhede [12], consiste à généraliser la condition (1.4) de séparation haute/basse fréquences sur les signaux AM-FM. Pour cela, l'on commence par faire apparaître une phase ϕ — pour l'instant inconnue — en écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\phi(t)} e^{-i\phi(t)} \mathbf{x}(t) := e^{i\phi(t)} \mathbf{y}(t)$$

Si ϕ est bien choisie, alors \mathbf{y} ne devrait contenir que les informations associées à l'amplitude et la polarisation de \mathbf{x} . Or, conformément à la condition (1.4), la phase doit contenir les hautes fréquences du signal et, inversement, les basses fréquences doivent se trouver dans le reste.

La fréquence donnant, pour le dire vite, la vitesse d'ondulation, la contrainte sur \mathbf{x} va être de limite les variations de \mathbf{y} . Concrètement, ϕ doit être choisie de sorte à minimiser la dérivée $\dot{\mathbf{y}}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \left\| e^{-i\theta(t)} (\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t)\mathbf{x}(t)) \right\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t)\mathbf{x}(t)\|_2^2$$

La contrainte ne dépendant que de la dérivée θ' , on se ramène à :

$$\min_{\theta(t)} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \min_{\theta'(t)} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - \theta'(t)\mathbf{x}(t)\|_2^2$$

En rappelant que $\frac{d}{dx} \|f(x)\|_2^2 = 2\Re\langle f(x), f'(x) \rangle$, il vient que ce minimum¹ est atteint par $\phi'(t)$ à condition que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi'} \|\dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}\|_2^2 = 0 &\iff 0 = 2\Re \left\langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}, \frac{d}{d\phi'} (\dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}) \right\rangle \\ &= 2\Re \langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}, -i\mathbf{x} \rangle \\ &= 2\Re \left(i \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle \right) + 2\phi' \Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= -2\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle + 2\phi' \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\phi' = \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$ et :

$$\phi(t) = \Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \quad (1.7)$$

¹ L'extremum obtenu est l'unique minimum globale puisque $t \mapsto \|at + b\|^2$ est strictement convexe pour $a \neq 0$.

Arguments des moyennes

Autre argument, cette fois inspiré de [2], ce base sur la notion de fréquence moyenne. D'abord dans le cas d'un signal complexe univarié, sont définies les fonctions de densités d'énergie (resp. d'énergie spectrale) comme :

$$\begin{array}{ll} \rho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & t \longmapsto |x(t)|^2 \end{array} \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{ll} \varrho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & \nu \longmapsto |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array} \quad (1.8)$$

À partir de ces dernières est définie la fréquence moyenne de x comme l'espérance $\mathbb{E}_\varrho[\nu]$ de ϱ . Cette fréquence moyenne est liée à la fréquence instantanée par la formule :²

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho[\phi'] \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un signal $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ multivarié, les densités d'énergies se définissent comme :

$$\begin{array}{ll} \rho_i : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & t \longmapsto |x_i(t)|^2 = a(t)^2 a_i(t)^2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \varrho_i : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & \nu \longmapsto |\hat{x}_i(\nu)|^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \rho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & t \longmapsto \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \varrho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & \nu \longmapsto \|\hat{\mathbf{x}}(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varrho_i(t) \end{array}$$

Le second argument consiste alors à dire que l'égalité des moments (1.9) doit rester vraie dans le cas multivarié. Cela assure au moins que la fréquence instantanée de \mathbf{x} , $1/2\pi\phi'$, à pour moyenne $\mathbb{E}_\varrho[\nu]$, la fréquence moyenne en sens de Fourier.

En appliquant la formule (1.9) au ϱ_i , et en notant toujours $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \int_{\mathbb{R}} \nu \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) d\nu \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\varrho_i}[\nu] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'_i(t) \rho_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t)^2 \sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{i=1}^n \phi'_i a_i^2 \right] \end{aligned}$$

Ce qui mène à poser $\sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i^2(t)$ pour la fréquence instantanée, avec la phase associée :

$$\phi = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds \quad (1.10)$$

²cette formule se généralise à tout les moments de ϱ et existe également pour les moments de ρ , voir [3, sec. 1.4] pour une démonstration "à la physicienne" ... *ou bien en annexe ?*

Formule qui concorde bien avec celle de la phase dynamique une fois explicité :

$$\begin{aligned}
\Im m \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} &= \Im m \left(\frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n \left((aa_i)'(t) + a(t)a_i(t)i\phi_i'(t) \right) e^{i\phi_i(t)} \overline{a(t)a_i(t)e^{i\phi_i(t)}} \right) \\
&= \frac{1}{a(t)^2} \Im m \left(\sum_{i=1}^n a(t)a_i(t)(aa_i)'(t) + ia(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \right) \\
&= \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i(t)^2 \phi_i'(t)
\end{aligned}$$

D'où

$$\Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds$$

1.3 Apparition de la phase géométrique

Cela étant dit, il existe une autre façon, plus simple, d'obtenir la phase d'un signal. D'abord, dans le cas univarié, la phase instantanée de $x = ae^{i\phi}$ peut être réécrite comme :

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \arg \left(x(t) \overline{x(t_0)} \right)$$

Formule qui se généralise en cas multivarié par ce qui sera appelé la *phase totale* du signal :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle \quad (1.11)$$

D'un point de vu géométrique, il est bien connue que le produit scalaire entre deux vecteurs réels $u, v \in \mathbb{R}^n$ est lié à l'angle $\angle(u, v)$ entre ces derniers par la formule :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = \|u\|^2 \|v\|^2 \cos \angle(v, u)$$

Pour le produit hermitien, cet angle se retrouve dans l'argument, de sorte que si u et v sont complexes :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \|u\|^2 \|v\|^2 e^{i\angle(v, u)}$$

En ce sens, la phase totale calcul explicitement l'angle entre $\mathbf{x}(t_0)$ et $\mathbf{x}(t)$. La question est alors de savoir si Φ_{dyn} correspond à cette angle. Un calcul explicite montre que c'est bien le cas en univarié ; en notant $\mathbf{x} = ae^{i\phi}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) &= \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Im m \int_{t_0}^t \frac{(a'(s) + ia(s)\phi'(s))e^{i\phi(s)} \overline{a(s)e^{i\phi(s)}}}{a^2(s)} ds \\
&= \int_{t_0}^t \frac{a^2(s)\phi'(s)}{a^2(s)} ds \\
&= \phi(t) - \phi(t_0)
\end{aligned}$$

Dans le cas multivarié, en revanche, c'est une autre histoire. En notant cette fois le signal $\mathbf{x} = ae^{i\Phi_{\text{dyn}}}(a_i e^{\psi_i})_{1 \leq i \leq n}$, la phase totale se réécrit :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \arg \left(a(t)a(t_0)e^{i(\Phi_{\text{dyn}}(t) - \Phi_{\text{dyn}}(t_0))} \sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \\
&= \Phi_{\text{dyn}}(t) + \arg \left(\sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \quad \text{car } \Phi_{\text{dyn}}(t_0, t_0) = 0
\end{aligned} \quad (1.12)$$

Apparaît alors un terme de déviation de la phase dynamique par rapport à la phase totale, appelé (surprise) phase géomatique et noté :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \quad (1.13)$$

Déviation qui s'observe expérimentalement, comme le montre la figure 1.1 ci-dessous.



fig. 1.1 — Sur le graphe de gauche, le signal \mathbf{x} à valeur dans \mathbb{R}^2 et dans celui de droite le calcul des phases dynamique et totale ainsi que de leur différence. Résultat tiré des simulation de Le Bihan et al. [8]

Un résultat bien connue en physique [1, 14, 16] est que cette troisième phase est invariante par transformation de jauge et par reparamétrisation. Dans notre contexte, cela signifie d'une part que si \mathbf{x} et $\tilde{\mathbf{x}}$ sont deux signaux multivarié complexe tel que $\tilde{\mathbf{x}} = e^{i\alpha}\mathbf{x}$, avec α une fonction dérivable du temps, alors :

$$\Phi_{\text{geo}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\tilde{\mathbf{x}}) - \Phi_{\text{dyn}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) = \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x})$$

Et d'autre part que, pour γ un difféomorphisme de \mathbb{R} telle que :

$$\gamma([s_0, s]) = [t_0, t] \quad \mathbf{x} \circ \gamma(s_0) = t_0 \quad \mathbf{x} \circ \gamma(s) = t$$

alors :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x} \circ \gamma, s_0, s) = \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t)$$

Le fait cette phase soit invariante pas transformation de jauge montre qu'elle est associée à la polarisation du signal, comme on va le voir dans la section 2.1 suivante.

Aussi, avec le calcul (1.12) précédent, il peut sembler que le travail sur la phase géométrique est terminée en cela qu'une formule explicite est donnée. D'abord, cette formule demande de connaître les ψ_i , qui eux-mêmes sont obtenus en extrayant la phase dynamique au signal. Or, la formule de Φ_{dyn} n'est pas la plus appropriée au traitement du signal puisque qu'elle fait intervenir intégral et dérivée. Aussi et surtout, cette formule ne permet pas de faire honneur à tout l'aspect géométrique qui se cache derrière cette phase. Chose qui sera abordée extensivement dans la prochaine partie du mémoire.

II — Première étude : cas des signaux AM-FM-PM

Pour une première étude de la phase géométrique du signal, Le Bihan *et al.* se sont penchés sur un cas particulier de signal bivarié [6, 8, 9]. Ces signaux, dit AM-FM-PM, sont présentés dans une première partie et le calcul explicite de leur phases — totale, dynamique et géométrique — est présenté. Dans une seconde partie... *je sais pas trop*

2.1 Définitions et calcul des phases

Ces signaux AM-FM-PM viennent généraliser les signaux AM-FM univarié en tenant compte de l'état de polarisation permis par le passage au 2D. En quelques mots, dans le cas le plus simple, un signal bivarié à valeurs réelles s va décrire une ellipse en cours du temps. On parle de polarisation elliptique et s va s'écrire :

$$s(t) = a \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \varphi(t) \\ \sin \chi \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}^+, \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \chi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$$

Les paramètres a et χ caractérisent respectivement la taille et l'excentricité de l'ellipse, θ son orientation dans le plan et $\varphi(t)$ précise où se trouve s à l'instant t sur cette ellipse. Le tout est représenté sur la ?? ci-dessous :

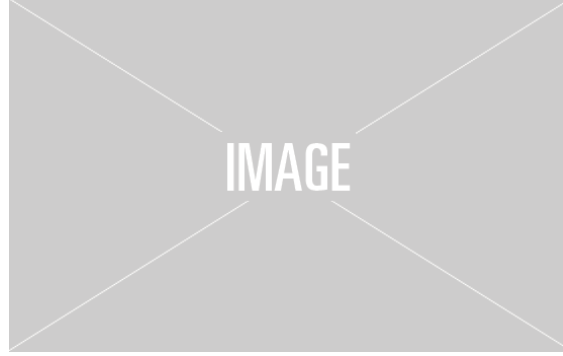


fig. 1.2 — Ellipse de polarisation du signal s sur laquelle sont représentés ses paramètres a, φ, θ, χ .

En autorisant les paramètres de polarisation à varier au cours du temps et après une transformation en signal analytique, mentionnée dans la section 1.1, on obtient la définition suivante :

DÉFINITION 4 (SIGNAL AM-FM-PM) — Un signal bivarié complexe \mathbf{x} AM-FM-PM (*amplitude, frequency and polarization modulated*) est caractérisé par quatre paramètres a, φ, θ et χ , respectivement à valeur dans $\mathbb{R}^+, \mathbb{R},]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, vérifiant :

$$|\varphi'(t)| \gg |\theta'(t)|, |\chi'(t)|, \left| \frac{a'(t)}{a(t)} \right| \quad \left| \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \right| \gg 1 \quad (1.14)$$

Auquel cas, \mathbf{x} prend la forme, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = a(t)e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

où $R_{\theta(t)}$ est la matrice de rotation d'angle $\theta(t)$. Voir [5, ann. 4.B] pour une construction détaillée.

La transformation en signal à valeurs complexes est nécessaire ³ pour étudier la phase géométrique car c'est uniquement dans le cadre de complexe qu'elle a été étudiée jusqu'à présent. Et, comme pour les signaux AM-FM, les hypothèses sur a, φ, θ, χ assure que les paramètres soient interprétables comme sur la figure 1.2 précédente.

Les trois phases de tels signaux sont données par la proposition 1 suivante :

PROPOSITION 1 (PHASES DE SIGNAL AM-FM-PM) — Les trois phases d'un signal bivarié AM-

³ Nous reviendrons sur ce point dans la dernière partie du mémoire (.. si je trouve le temps et que je trouve des choses à en dire)

FM-PM \mathbf{x} de paramètres $(a, \varphi, \theta, \chi)$ sont données par les formules :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arg \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin (\chi(t_0) + \chi(t)) \right) \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \left(\tan \Delta\theta \frac{\tan \chi(t_0) + \tan \chi(t)}{1 + \tan \chi(t_0) \tan \chi(t)} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \\ &= \arctan \left(\tan \Delta\theta \frac{\tan \chi(t_0) + \tan \chi(t)}{1 + \tan \chi(t_0) \tan \chi(t)} \right) - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \end{aligned} \quad (1.18)$$

où $\Delta y = y(t) - y(t_0)$ pour $y = \chi, \theta$. La démonstration se trouve en annexe B.2.

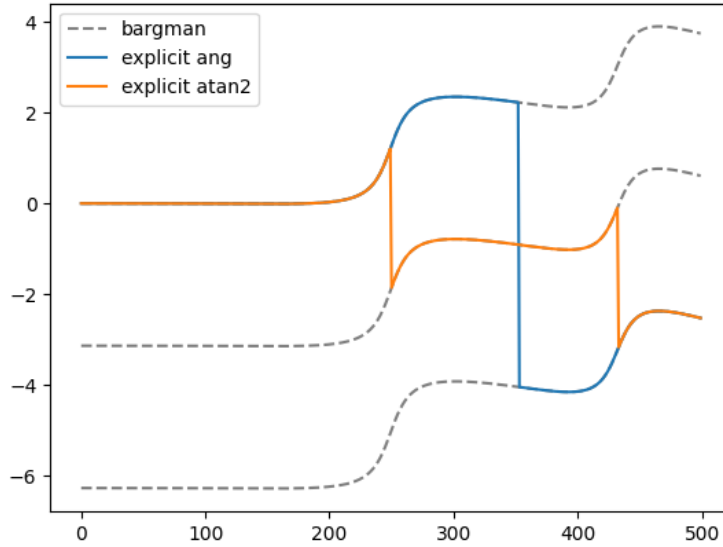


fig. 1.3 — Evolution de la phase géométrique d'un signal AM-FM-PM généré. En gris la phase géométrique du signal calculé via l'invariant de Bargmann. Les deux autres sont calculées avec la formule équation (1.18), en bleu en utilisant de l'argument pour la phase totale et en orange en utilisant atan2.

Deux remarques sur ces formules. La première est que la phase géométrique ne dépend que des paramètres de polarisations θ et χ , ce qui reflète son invariance par transformation de jauge. La seconde, nettement plus troublante, est que φ ne s'interprète ni comme phase totale ni comme phase dynamique. Pour que ce soit le cas, il faut qu'à l'instant t \mathbf{x} , retrouve la même polarisation instantanée qu'à l'instant t_0 , auquel cas :

$$\begin{aligned} (\chi(t), \theta(t)) &= (\chi(t_0), \theta(t_0)) \implies \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \varphi(t) - \varphi(t) \\ &\implies \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \end{aligned} \quad (1.19)$$

Ce cas particulier est en fait très instructif puisque qu'il est toujours possible de s't ramener, comme ce sera montrer dans la partie II suivante.

Cela étant dit, pour interpréter la formule (1.19) de la phase géométrique, il est utile de d'avoir une représentation de \mathbf{x} qui soit indépendante de sa phase φ . Représentation ce que nous allons voir à présent.

2.2 Interprétation dans la sphère de Poincaré

Ces représentation n'est autre que la matrice de covariance de \mathbf{x} :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \rho_{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} \overline{\mathbf{x}(t)}^t \mathbf{x}(t) \quad (1.20)$$

Cette projection, invariante par transformation de jauge, donc indépendante de φ et la normalisation est telle que $\rho_{\mathbf{x}}$ ne dépend pas non plus de a . La matrice $\rho_{\mathbf{x}}$ ne dépend alors que des paramètres de polarisations, (χ, θ) , et se décompose dans la base de Pauli suivant :

$$\rho_{\mathbf{x}} = id + \sin(2\theta) \cos(2\chi) \sigma_1 + \sin(2\chi) \sigma_2 + \cos(2\theta) \cos(2\chi) \sigma_3 \quad (1.21)$$

où les σ_i sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans cette décomposition, la composante en id est indépendante de \mathbf{x} et peut donc être ignorée. Cela ne laisse qu'un vecteur (normé) de dimension 3 dont 2θ et 2χ correspondent aux coordonnées polaire conformément à la figure 1.4 ci-contre.

La sphère alors obtenue, plus connu sous le nom de sphère de Poincaré, représente l'ensemble des états de polarisation possible pour un signal :

À l'équateur, la polarisation est linéaire et θ pilote son orientation et plus $\rho_{\mathbf{x}}$ se rapproche des pôles, plus cette polarisation devient elliptique, jusqu'à devenir complètement circulaire, auquel cas θ devient insignifiant. Aussi, suivant le schéma fig. 1.2, l'hémisphère nord (resp. sud) correspond à des polarisations elliptiques anti-horaire (resp. horaire).

Le fait que ce soit deux fois les angles qui sont représentés tient naturellement compte des potentielles redondances dans les (θ, χ) . Par exemple si \mathbf{x} a pour paramètre de polarisation instantanée (θ_0, χ_0) , alors par symétrie de l'ellipse, $(\theta_0 + \pi, \chi_0)$ est aussi une représentation valide. Autre exemple, si $\chi_0 = \pi/4$, alors la polarisation est circulaire et indépendant de θ_0 .

Dans le deux cas, la représentation dans la sphère de Poincaré évite ces problèmes puisque, dans le premier cas $(2\theta_0, 2\chi_0)$ et $(2\theta_0 + 2\pi, 2\chi_0)$ représente le même point, et dans le second, le point associé à $2\chi_0 = \pi/2$ (pôle nord) est indépendant du choix de θ_0 .

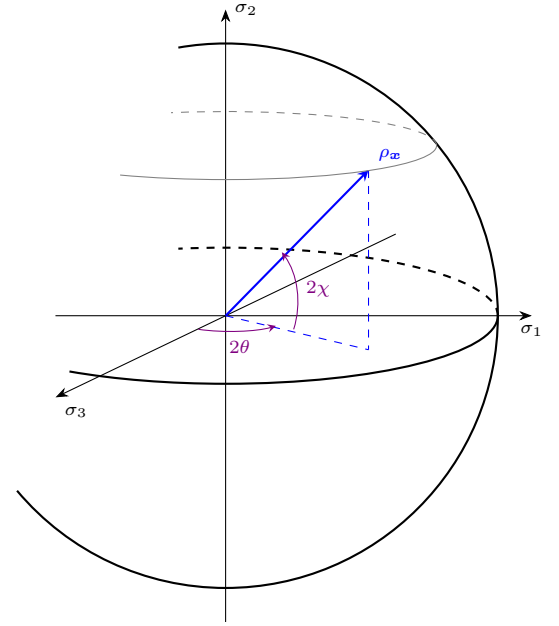


fig. 1.4 — Sphère de Poincaré, blablabla



fig. 1.5 — Représentation des paramètres de polarisation instantanée associés à chaque point de la sphère de Poincaré.

Pour interpréter la formule (1.19) de la phase géométrique prenons un exemple. Si χ et θ sont telle que :

$$2\theta(t_0) = 0 \qquad 2\theta(t) = 2\pi \qquad \chi(s) = \chi_0$$

Alors décrit un chemin horizontale sur la sphère, $\rho_{\mathbf{x}}(t_0) = \rho_{\mathbf{x}}(t)$ et sa phase géométrique s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds = - \sin 2\chi_0 \int_{t_0}^t \theta'(s) ds \\ &= - \sin 2\chi_0 (\theta(t) - \theta(t_0)) \\ &= -\pi \sin 2\chi_0 \end{aligned}$$

Cette formule est très proche de la formule de d'air de la calotte entouré par $\rho_{\mathbf{x}}$, à savoir:

$$\mathcal{A}ire = 2\pi - 2\pi \sin(2\chi_0)$$

Pour la faire clairement apparaître, il suffit de noter que Φ_{geo} étant une phase, elle est définie modulo 2π et à un facteur 2 près, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) &\equiv 2\pi - \pi \sin 2\chi_0 \quad [2\pi] \\ &\equiv \frac{1}{2}(4\pi - 2\pi \sin 2\chi_0) \quad [2\pi] \end{aligned}$$

Soit la moitié de l'aire de la calotte au dessus du chemin tracé par $\rho_{\mathbf{x}}$ plus 2π . Une fois n'est pas coutume, ca va toujours pas et j'ai envie de me foutre en l'air atm

2.3 Généralisation en plus haute dimension

- Différentes écritures du bivarié pour différentes généralisation :
- Les quaternions on passe vite parce que ca se généralise très mal, Lefevre a a parlée, ca mène aux algèbres Clifford : trop de contrainte sur les dimensions des signaux
- En terme d'expo de matrice ? Lefevre [10, sec. I.3] l'a fait en trivarié mais au delà, y'a plus vraiment de choix remarquable de base pour $u(n)$
- En augmentant la taille de la matrice de rotation ? Lilly [11] l'a fait en trivarié et mais là encore, en terme de généralisation c'est pas si dingue parce que la matrice de rotation est pas calculable.
- Dans tout ça, on ratte le plus important : La phase géo est invariante par transfo de jauge, donc il faut faire apparaître PC^{n-1} dans la décomposition.
- et en fait, c'est le cas en bivarié car $PC^1 \cong S^2$!
- PC^{n-1} oui mais il faut pas non plus regarder que la projection parce qu'on perd toute les phases dans ce cas.
- Le bon compromis c'est les variétés fibrées : on est dans PC^{n-1} mais on garde les phases dans les fibres.
- D'autant plus que ça à déjà était fait en physique et c'est vraiment concluant... (transition vers la grande partie suivante.)

Au niveau des ensembles, décomposer un signal multivarié complexe en paramètre d'amplitude, phase et polarisation instantanée, revient à décomposer \mathbb{C}^n en un produit de trois ensembles. Pour cela, un vecteur de \mathbb{C}^n est vu comme la donné d'une direction, *i.e.* un élément de la sphère unité $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, et d'une norme, de sorte que :

$$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{+*} \times S^{2n-1}$$

Les éléments de \mathbb{R}^{+*} s'interprète naturellement comme l'amplitude instantanée du signal et pour faire apparaître sa phase, S^{2n-1} est lui-même décomposé de sorte à faire apparaître $U(1)$, donnant :

$$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{+*} \times U(1) \times S^{2n-1}/U(1)$$

Le quotient restant n'est autre que l'espace projectif complexe de dimension (complexe) $n - 1$, noté $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$. Sa construction sera détaillée dans la partie II suivante.

Pour motiver d'autant plus cette décomposition, la projection $\rho : \mathbf{x} \longrightarrow \bar{\mathbf{x}}^t \mathbf{x} / \|\mathbf{x}\|^2$, qui s'est avérée fort instructive, peut être vue comme une projection sur l'espace complexe en cela qu'elles sont toutes deux invariantes par transformation de jauge⁴. En particulier, si $n = 2$, $\mathbb{P}\mathbb{C}^1 \cong S^2$, soit exactement l'espace de représentation des $\rho_{\mathbf{x}}$ dans la section précédente.

⁴Pour être précis, c'est le premier théorème d'isomorphisme assure $\rho(\mathbb{C}^n) \cong \mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ sont en bijection et de même structure.

ANNEXES

Annexe A — Compléments sur l'analyse temps-fréquence

A.1. Un mot sur la notion de fréquence instantanée (*nécessaire?*)

A.2. Formalisme derrière la transformée en SA

A.3. Lien avec le théorème de Bedrosian

Annexe B — Compléments sur les signaux AM-FM-PM

B.1. Construction détaillée des signaux AM-FM-PM (*nécessaire?*)

- Signal polarisé classique (θ, χ constants)
- Transformé en SA avec les hypothèses de Bedrosian
- Définition général en faisant dépendre θ/χ du temps
- Paramètre de Polar sur la sphère de Poincaré

B.2. Démonstrations

Démonstration de la formule (1.16), proposition 1

Par souci de lisibilité, on note $\mathcal{U} = R_\theta \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix}$, de sorte que la dérivée de $\mathbf{x} = ae^{i\varphi}\mathcal{U}$ s'écrit :

$$\dot{\mathbf{x}} = a'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\varphi'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix} + ae^{i\varphi}\chi' \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \chi + i \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \theta \sin \chi - i \cos \theta \cos \chi \end{pmatrix}$$

Les vecteurs des deux derniers membres s'expriment en fonction des composantes $\mathcal{U}_{1,2}$ de \mathcal{U} :

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \chi + i \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \theta \sin \chi - i \cos \theta \cos \chi \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{U}}_2 \\ -\overline{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}$$

Le produit hermitien $\langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle &= \left\langle a'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\varphi'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\theta' \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix} + ia\varphi'\chi' \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{U}}_2 \\ -\overline{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, ae^{i\varphi}\mathcal{U} \right\rangle \\ &= \left\langle a'\mathcal{U} + ia\varphi'\mathcal{U} + a\theta' \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix} + ia\chi' \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{U}}_2 \\ -\overline{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, a\mathcal{U} \right\rangle \\ &= aa'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2\varphi'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + a^2\theta' \left\langle \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle + ia^2\chi' \left\langle \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{U}}_2 \\ -\overline{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle \end{aligned}$$

où les deux derniers produits hermitiens donnent :

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle &= -\mathcal{U}_2 \overline{\mathcal{U}_1} + \mathcal{U}_1 \overline{\mathcal{U}_2} \\
&= 2i \Im m(\mathcal{U}_1 \overline{\mathcal{U}_2}) \\
&= 2i \Im m\left((\cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi) (\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi) \right) \\
&= 2i (\cos^2 \theta \cos \chi \sin \chi + \sin^2 \theta \sin \chi \cos \chi) \\
&= 2i \cos \chi \sin \chi \\
&= i \sin 2\chi
\end{aligned}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{U}_2} \\ -\overline{\mathcal{U}_1} \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle = \overline{\mathcal{U}_2} \mathcal{U}_1 - \overline{\mathcal{U}_1} \mathcal{U}_2 = 0$$

D'où, sachant que $\|\mathbf{x}\|^2 = a^2$ et $\|\mathcal{U}\| = 1$, la formule :

$$\begin{aligned}
\frac{\Im m \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= \frac{1}{a^2} \Im m \left(aa' \langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2 \varphi' \langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2 \theta' \sin 2\chi \right) \\
&= \frac{1}{a^2} \left(a^2 \varphi' \|\mathcal{U}\|^2 + a^2 \theta' \sin 2\chi \right) \\
&= \varphi' + \theta' \sin 2\chi
\end{aligned}$$

■

Démonstration de la formule (1.17), proposition 1

Pour la phase totale, on note cette fois $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle &= \left\langle a(t) e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \mathcal{V}(t), a(t_0) e^{i\varphi(t_0)} R_{\theta(t_0)} \mathcal{V}(t_0) \right\rangle \\
&= a(t) e^{i\varphi(t)} a(t_0) e^{-i\varphi(t_0)} \left\langle R_{\theta(t)} \mathcal{V}(t), R_{\theta(t_0)} \mathcal{V}(t_0) \right\rangle \\
&= a(t_0) a(t) e^{i(\varphi(t) - \varphi(t_0))} \left\langle R_{\theta(t) - \theta(t_0)} \mathcal{V}(t), \mathcal{V}(t_0) \right\rangle
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on note $\Delta y = y(t) - y(t_0)$, $y_1 = y(t_0)$ et $y_2 = (t)$ pour $y = \varphi, \theta, \chi$. Le produit hermitien à droite s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\left\langle R_{\Delta\theta} \mathcal{V}(t), \mathcal{V}(t_0) \right\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\theta \cos \chi_2 + i \sin \Delta\theta \sin \chi_2 & \sin \Delta\theta \cos \chi_2 - i \cos \Delta\theta \sin \chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi_1 \\ i \sin \chi_1 \end{pmatrix} \\
&= \cos \chi_1 \left(\cos \Delta\theta \cos \chi_2 + i \sin \Delta\theta \sin \chi_2 \right) + i \sin \chi_1 \left(\sin \Delta\theta \cos \chi_2 - i \cos \Delta\theta \sin \chi_2 \right) \\
&= \cos \Delta\theta \left(\cos \chi_1 \cos \chi_2 + \sin \chi_1 \sin \chi_2 \right) + i \sin \Delta\theta \left(\cos \chi_1 \sin \chi_2 + \sin \chi_1 \cos \chi_2 \right) \\
&= \cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2)
\end{aligned}$$

D'où la phase totale :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) &= \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \arg \left(a(t_0) a(t) e^{i(\varphi(t) - \varphi(t_0))} \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2) \right) \right) \\
&= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arg \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2) \right)
\end{aligned}$$

et l'argument restant s'écrit comme une arctangente, donnant :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \frac{\sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2)}{\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi} \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \left(\tan \Delta\theta \frac{\sin(\chi_1 + \chi_2)}{\cos \Delta\chi} \right) \\ &= \dots\end{aligned}$$

■

Annexe C — Lien entre Poincaré et Bloch

C.1. Lien entre les deux types de signaux

Soit le signal :

$$\mathbf{x}_B(\varphi, \theta, \chi) = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 \\ e^{i\theta} \sin \chi/2 \end{pmatrix}$$

Pour le réécrire en terme de vecteur AM-FM-PM, il faut faire apparaître une matrice de rotation, matrice qui est diagonalisable dans $\mathbb{C}^{n \times n}$ via la relation :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_B(\varphi, \theta, \chi) &= e^{i\varphi} e^{i\theta/2} \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 \\ \sin \chi/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} e^{i\varphi} e^{i\theta/2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 \\ \sin \chi/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\varphi+\theta/2)} U R_{\theta/2} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 - \sin \chi/2 \\ i(\cos \chi/2 + \sin \chi/2) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad U = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \in \text{U}(2)\end{aligned}$$

Ensuite, pour réduire les sommes dans le vecteur de droite, on a rappel les formules :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha \mp \sin \alpha) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha \pm \sin \alpha)$$

On a donc deux choix pour chaque composante du vecteur mais celle avec un signe moins son préférable sachant que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

On choisi donc la seconde formule pour la première composante et la premier pour la seconde composante, donnant :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_B(\varphi, \theta, \chi) &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\varphi+\theta/2)} U R_{\theta/2} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 - \sin \chi/2 \\ i(\cos \chi/2 + \sin \chi/2) \end{pmatrix} \\ &= e^{i(\varphi+\theta/2)} U R_{\theta/2} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \chi/2\right) \\ i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \chi/2\right) \end{pmatrix} \\ &= e^{i(\varphi+\theta/2)} U R_{\theta/2} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 \\ i \sin \chi/2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Ne reste alors plus qu'à ajuster les signes pour obtenir une écriture de signal \mathbf{x}_P AM-FM-PM :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_B(\varphi, \theta, \chi) &= e^{i(\varphi+\theta/2)} U R_{\theta/2} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 \\ i \sin \chi/2 \end{pmatrix} \\ &= U e^{i(\varphi+\theta/2)} R_{\theta/2} \begin{pmatrix} \cos(-\chi/2) \\ -i \sin(-\chi/2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

En somme :

$$\mathbf{x}_B(\psi, \alpha, \beta) = U \mathbf{x}_P(\psi + \alpha/2, \alpha/2, -\beta/2) \quad \mathbf{x}_P(\varphi, \theta, \chi) = U^\dagger \mathbf{x}_B(\varphi - \theta, 2\theta, -2\chi) \quad (1.22)$$

C.2. Lien entre les projections

Avec la formule (1.22) ci-dessus, on a :

$$\rho_B(\alpha, \beta) = U \rho_P(\alpha/2, -\beta/2) U^\dagger \quad \rho_P(\theta, \chi) = U^\dagger \rho_B(2\theta, -2\chi) U \quad (1.23)$$

Mais on a aussi, dans la base Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

les expressions :

$$\begin{aligned}\rho_P(\theta, \chi) &= \frac{1}{2} \left(id + \sin(2\theta) \cos(2\chi) \sigma_1 - \sin(2\chi) \sigma_2 + \cos(2\theta) \cos(2\chi) \sigma_3 \right) \\ \rho_B(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \left(id + \cos(\alpha) \sin(\beta) \sigma_1 + \sin(\alpha) \sin(\beta) \sigma_2 + \cos(\beta) \sigma_3 \right)\end{aligned}$$

Pour les lier, on pose $2\theta = \pi/2 - \alpha$ et $2\chi = \pi/2 - \beta$, donnant :

$$\begin{aligned}\rho_P(\theta, \chi) - id &= \sin(\pi/2 - \alpha) \cos(\pi/2 - \beta) \sigma_1 - \sin(\pi/2 - \beta) \sigma_2 + \cos(\pi/2 - \alpha) \cos(\pi/2 - \beta) \sigma_3 \\ &= \cos(\alpha) \sin(\beta) \sigma_1 - \cos(\beta) \sigma_2 + \sin(\alpha) \sin(\beta) \sigma_3\end{aligned}$$

Ce qui sous forme matricielle se réécrit :

$$\begin{pmatrix} \sin(2\theta) \cos(2\chi) \\ -\sin(2\chi) \\ \cos(2\theta) \cos(2\chi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Donc la passage de ρ_B à ρ_S se fait via un changement et d'angle et une rotation de $\pi/2$ autour de σ_1 .

Même calcul, cette fois, en partant de (1.22) :

$$\begin{aligned}2\rho_P(\theta, \chi) &= 2U^\dagger \rho_B(2\theta, -2\chi) U \\ &= U^\dagger \left(id + \cos(2\theta) \sin(-2\chi) \sigma_1 + \sin(2\theta) \sin(-2\chi) \sigma_2 + \cos(-2\chi) \sigma_3 \right) U \\ &= id - \cos(2\theta) \sin(2\chi) U^\dagger \sigma_1 U - \sin(2\theta) \sin(2\chi) U^\dagger \sigma_2 U + \cos(2\chi) U^\dagger \sigma_3 U\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}U^\dagger \sigma_1 U &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -\sigma_3 \\ U^\dagger \sigma_2 U &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_1 \\ U^\dagger \sigma_3 U &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2\end{aligned}$$

Qui donne :

$$\begin{aligned}
2\rho_P(\theta, \chi) &= id - \cos(2\theta) \sin(2\chi) U^\dagger \sigma_1 U - \sin(2\theta) \sin(2\chi) U^\dagger \sigma_2 U + \cos(2\chi) U^\dagger \sigma_3 U \\
&= id + \cos(2\theta) \sin(-2\chi) \sigma_3 + \sin(2\theta) \sin(-2\chi) \sigma_1 + \cos(-2\chi) \sigma_2 \\
&= id + \sin(2\theta) \sin(2\chi) \sigma_1 + \cos(2\chi) \sigma_2 + \cos(2\theta) \sin(2\chi) \sigma_3
\end{aligned}$$

Le tout reste cohérent et avec les notations :

$$w_P(\theta, \chi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\chi) \\ -\sin(\chi) \\ \cos(\theta) \cos(\chi) \end{pmatrix} \quad w_B(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Cela devient :

$$w_P(2\theta, 2\chi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} w_B((\pi/2 - \theta), (\pi/2 - \chi))$$

C.3. Transformation de phases

Première chose, le produit hermitien est invariant par $U \in \text{U}(2)$ (si si). Ainsi :

$$\begin{aligned}
\langle U\mathbf{x}(t_0), U\mathbf{x}(t) \rangle &= \langle \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t) \rangle \\
\langle (U\mathbf{x})', U\mathbf{x} \rangle &= \langle U\mathbf{x}', U\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle
\end{aligned}$$

Avec la formule de la phase dynamique dans Poincaré (1.16), on a :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_B(\psi, \alpha, \beta)) &= \Im m \int_{t_0}^t \left\langle \frac{d}{ds} \mathbf{x}_B(\psi, \alpha, \beta), \mathbf{x}_B(\psi, \alpha, \beta) \right\rangle ds \\
&= \Im m \int_{t_0}^t \left\langle \frac{d}{ds} \mathbf{x}_P(\psi + \alpha/2, \alpha/2, -\beta/2), \mathbf{x}_P(\psi + \alpha/2, \alpha/2, -\beta/2) \right\rangle ds \\
&= \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_P(\psi + \alpha/2, \alpha/2, -\beta/2)) \\
&= \psi(t) + \alpha(t)/2 - (\psi(t_0) + \alpha(t_0)/2) - \int_{t_0}^t \frac{\alpha'(s)}{2} \sin(-2\beta(s)/2) ds \\
&= \psi(t) - \psi(t_0) + \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \alpha'(s) \sin \beta(s) ds
\end{aligned}$$

Mais dans le même temps, si on calcul la phase dynamique de \mathbf{x}_B , on tombe cette fois sur :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_B(\psi, \alpha, \beta)) &= \psi(t) - \psi(t_0) + \int_{t_0}^t \alpha'(s) \frac{1 - \cos \beta(s)}{2} ds \\
&= \psi(t) - \psi(t_0) + \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{2} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \alpha'(s) \cos \beta(s) ds
\end{aligned}$$

Auquel cas :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_S(\varphi, \theta, \chi)) &= \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_B(\varphi - \theta, 2\theta, -2\chi)) \\
&= \varphi(t) - \theta(t) - (\varphi(t_0) - \theta(t_0)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t 2\theta'(1 - \cos 2\chi) ds \\
&= \varphi(t) - \varphi(t_0) - (\theta(t) - \theta(t_0)) + \int_{t_0}^t \theta'(1 - \cos 2\chi) ds \\
&= \varphi(t) - \varphi(t_0) - (\theta(t) - \theta(t_0)) + (\theta(t) - \theta(t_0)) - \int_{t_0}^t \theta' \cos 2\chi ds \\
&= \varphi(t) - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^t \theta' \cos 2\chi ds
\end{aligned}$$

Ce qui voudrait dire que :

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^t \theta' \cos 2\chi ds = \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_S(\varphi, \theta, \chi)) = \varphi(t) - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^t \theta' \cos 2\chi ds$$

... bizarre

PARTIE II

ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME

A reprendre, comme toutes les intros Pour étudier la phase géométrique d'un signal ψ , il nous faut projeter ψ sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, et ceux, tout en gardant une trace de sa phase puisque c'est le lien entre les deux qui nous intéresse. Il nous faut donc envoyer ψ dans le produit :

$$U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n \quad (\text{ou } \mathbb{C}^{n-1*}/\mathbb{C}^*)$$

Garder le lien entre cet espace et celui d'origine mène à se placer dans le cadre avec d'un *variété fibrée* (ou simplement fibré). Plus précisément, comme $U(1)$ est un groupe de lie, ce sera un *fibré principal* noté $S^{2n+1}(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$.

Comme son nom l'indique, $S^{2n+1}(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$ à une structure de variété différentielle et le lien entre les $U(1)$ et $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ va se faire par le biais d'une connexion. L'on verra alors que cette connexion est intrinsèquement lié à la phase dynamique du signal, et il sera discuté de la signification de ce résultat. La phase géométrique, quand à elle, sera liée avec la métrique hermitienne associée aux l'espaces projectifs complexes.

Tout cela va demander quelques prérequis que nous allons voir à présent.

- Pour être un peu plus précis, même si S^{2n-1} veut être vu comme produit le produit $U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$, il faut pas complètement séparer les deux parce que si la phase géométrique est hérité de $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$, c'est bien dans $U(1)$ qu'elle se manifeste.
- Il s'avère que les variétés fibrées principales sont tout à fait adéquat pour décrit se double jeu entre S^{2n-1} et $U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ et c'est dans ce cadre que la phase géométrique sera décrite et étudiée.
- Aussi, par souci de comodité, on se placera dans \mathbb{C}^{n+1} et l'on notera la sphère unité de ce dernier :

$$\mathbb{S}^n := S^{2n+1} \cong U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n$$

- Tout le formalisme nécessaire sera exposé dans la section I, avec plus de détail technique en annexe et dans la section II seront décrites les différentes phases d'un point de vue géométrique.

I — Cadre d'étude

Pour proprement poser le cadre, il nous faudra trois choses :

1. D'abord faire quelque rappel de géométrie différentielle, ne serait-ce que pour fixer les notations (*s-sec. 1.1.1*), avec comme exemple le cas $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ (*s-sec. 1.1.2*), qui sera utile plus loin.
2. Ensuite, seront définies les variétés fibrés principales, avec les outils de bases qui leurs sont associés (*s-sec. 1.2.1*), puis $U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n$ sera écrit comme telle (*s-sec. 1.2.2*).
3. Enfin, il nous faudra définir une connexion sur ces fibrés, connexion qui seront, d'abord, définie de façon générale (*s-sec. 1.3.1*), puis explicitée et interprétée dans le cas qui nous intéresse (*s-sec. 1.3.2*).

1.1 $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ vue comme variété différentielle

1.1.1 Rappels de géométrie différentielle et notations

Une variété différentielle se définit comme suit :

DÉFINITION 5 (VARIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE) — une variété différentielle de classe C^k de dimension n est un espace topologique \mathcal{M} munie d'un *atlas* $\{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$, c'est-à-dire un ensemble fini de pair d'ouvert $U_i \subset \mathcal{M}$ et d'application $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

- les U_i forme un recouvrement de la variété : $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathcal{M}$
- les ϕ_i sont des homéomorphismes sur leur image $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$.
- si l'intersection $U_i \cap U_j$ est non vide, alors $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}$ est un C^k difféomorphisme sur son image.

A travers ϕ_i , à tout point $x \in U_i$ sont associées des *coordonnées locales* $(x^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$, c'est-à-dire les coefficient de $\phi_i(x)$ dans une base $(e_\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$ de \mathbb{R}^n . Ces coordonnées sont dites locales car dépendantes du choix de la pair (U_i, ϕ_i) et la composée $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}$ est vue comme un *changement de coordonnées*. Dans toutes la suite, toutes les objets propre au cartes seront indexés via l'alphabet classique (i, j, k) et le indices associées au coordonnées locales par des lettres grecs (μ, ν, α) .



fig. 2.1 — La première figure de tout bon livre de géométrie différentielle : représentation de deux cartes avec l'application de changement de coordonnées

Ensuite, les *espaces tangents* de \mathcal{M} et son fibré tangent seront respectivement notés :

$$\forall x \in \mathcal{M}, T_x \mathcal{M} \qquad T\mathcal{M} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} T_x \mathcal{M} \qquad (2.1)$$

Pour le dire rapidement, les vecteurs tangents agissent comme une dérivation en cela que, pour une chemin $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, sa différentielle au point $x = \gamma(0)$ est définie par l'application :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_x : \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \left. \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \right|_{t=0} := \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Aussi, le système de coordonnées locales en $x \in \mathcal{M}$ induit une base sur $T_x \mathcal{M}$, qui sera noté $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. notation qui est justifié en cela que, moralement, ∂_μ dérive toute fonction test $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ dans le long de la μ^{eme} coordonnée (locale) de x .

Plus généralement, si \mathcal{M} et \mathcal{N} sont deux variétés différentielles et $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ une application différentiable, sa différentielle (ou application tangent ou push forward) au point x est l'application linéaire qui, en

coordonnée local s'écrit :

$$f_*(v) = f_*(v^\mu \partial_\mu) = \partial_\mu(f^\nu) v^\mu \tilde{\partial}_\nu \quad \text{ou encore} \quad (f_*)^\nu_\mu = \partial_\mu(f^\nu)$$

Et le pull back (image réciproque) s'écrit par dualité :

$$f^*(g) = g \circ f_* \iff f^*$$

- fibré tangent dual
- image réciproque ("transposé" de la différentielle)
- métrique riemannienne
- exemple : \mathbb{S}^n , la métrique est induite par celle sur \mathbb{C}^{n+1} et :

$$\langle X, Y \rangle = \delta_{\mu\nu} X^\mu Y^\nu = X_\mu Y^\mu$$

- pour les variétés complexes, c'est un peu différente : carte holomorphe, doublage des espaces tangents
- exemple : sur \mathbb{C}^{n+1} :

$$\langle X, \bar{Y} \rangle = \delta_{\mu\nu} X^\mu \bar{Y}^\nu = X_\mu \bar{Y}^\mu$$

En particulier, la passage au dual se fait sans changement les coefficients $X_\mu = X^\mu$

- forme kahlerienne :

$$\Omega = g_{\mu\bar{\alpha}} J^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu \quad (2.3)$$

- moralement, là où g fait le passage du tangent au dual, J fait le passage de tangent au conjugué

1.1.2 $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ comme variété différentielle

Si l'espace projectif complexe à été présenté comme le quotient $\mathbb{S}^n/U(1)$, il peut aussi être vu comme :

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^*$$

C'est-à-dire l'ensemble des classes de $\mathbb{C}^{n+1*} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n+1}}\}$ par la relation d'équivalence :

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid x = \lambda y$$

Moralement, en isolant la norme des vecteurs, \mathbb{C}^{n+1*} peut être vu comme le produit $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^n$, et de même pour \mathbb{C}^* avec le module :

$$\mathbb{C}^{n+1*} \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^n \quad \mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}^{+*} \times U(1)$$

Ainsi, le quotient par \mathbb{C}^* revient à regarder les vecteurs de \mathbb{C}^{n+1*} modulo leur norme, puis modulo l'action de $U(1)$. Or, ignorer la norme des vecteurs est équivalent à ne regarder que les vecteurs normés, donc les vecteurs de \mathbb{S}^n . De façon informelle, on pourrait alors écrire⁵ :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^* &\cong \mathbb{C}^{n+1*}/(\mathbb{R}^* \times U(1)) \\ &\cong (\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{R}^*)/U(1) \\ &\cong \mathbb{S}^n/U(1) = \mathbb{P}\mathbb{C}^n \end{aligned}$$

L'intérêt de cette écriture et que \mathbb{C}^{n+1} est un espace vectoriel, ce qui permet de décrire $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ en terme de carte, ce qui se fait comme suit. La classe de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ de représentant $z = (z^i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1*}$ est noté $[z]$ et on pose, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$U_i = \left\{ [z] \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n \mid z \in \mathbb{C}^{n+1}, z^i \neq 0 \right\} \quad \phi_i : \begin{aligned} U_i &\longrightarrow \mathbb{C}^i \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-i} \cong \mathbb{C}^n \\ [z] &\longmapsto \frac{1}{z^i} z = (z^0/z^i, \dots, 1, \dots, z^n/z^i) \end{aligned} \quad (2.4)$$

⁵ Ce qui s'écrit plus justement avec le troisième théorème d'isomorphisme :

$$\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{R}^{+*})/(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^{+*}) \cong \mathbb{S}^n/U(1) = \mathbb{P}\mathbb{C}^n$$

Si l'ensemble d'arrivée $\phi_i(U_i)$ est équivalent à un ouvert de \mathbb{C}^n (l'une des composantes est constante), il est plus commode de travailler dans \mathbb{C}^{n+1} puisque cela évite de devoir enlever et rajouter des coefficients dans les formules de changement de carte :

$$\forall z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z^{i,j} \neq 0 \quad (\text{i.e. } [z] \in U_i \cap U_j), \quad \phi_i \circ \phi_j^{-1}(z) = \frac{z^j}{z^i} z$$

Les (U_i, ϕ_i) forment un atlas sur l'espace projectif complexe, faisant de ce dernier une variété de dimension $\dim = 2n$. Les $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ étant holomorphe, $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est plus précisément une variété complexe de dimension complexe, il est utile d'écrire ses coordonnées locales sous la forme $(w^\mu, \bar{w}^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$, où :

$$\forall w \in U_i, \forall \mu \neq i, \quad w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i}, \quad \text{où} \quad [z] = w$$

Aussi, comme le produit hermitien sur \mathbb{S}^n (induit par \mathbb{C}^{n+1*}) est invariante par la projection sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, dans le sens où⁶ :

$$\forall e^{i\alpha} \in U(1), \forall z_{1,2} \in \mathbb{S}^n, \quad \langle z_1 e^{i\alpha}, z_2 e^{i\alpha} \rangle = \langle z_1, z_2 \rangle$$

il induit une métrique hermitienne sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$. Plus connue sous le nom de Fubini-Study, elle s'exprime en coordonnées locales par la formule :

$$\begin{aligned} \forall w \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n, \forall X, Y \in T_w \mathbb{P}\mathbb{C}^{n+}, \quad \langle X, Y \rangle_w &= g_{\mu\bar{\nu}}(w) X^\mu \bar{Y}^\nu = \frac{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha) \delta_{\mu\nu} - w_\mu \bar{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} X^\mu \bar{Y}^\nu \\ &= \frac{1}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} X^\mu \bar{Y}_\mu - \frac{w_\mu \bar{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} X^\mu \bar{Y}^\nu \end{aligned} \quad (2.5)$$

et la forme de Kähler associée est :

$$\Omega(w) = i \frac{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha) \delta_{\mu\nu} - w_\mu \bar{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu$$

1.2 \mathbb{S}^n comme fibré principal

1.2.1 Définition générale

Pour le dire simplement, les *variétés fibrées* sont des variétés qui ressemblent localement à des espaces produits. Le ruban de Möbius en est un exemple typique : il ne peut pas s'écrire comme le produit d'un cercle avec un segment $S^1 \times [0, 1]$ à cause de la façon dont il est construit. Mais localement, une tranche du ruban est tout à fait comparable (i.e. difféomorphe) à un tel produit (cf. fig. 2.2).

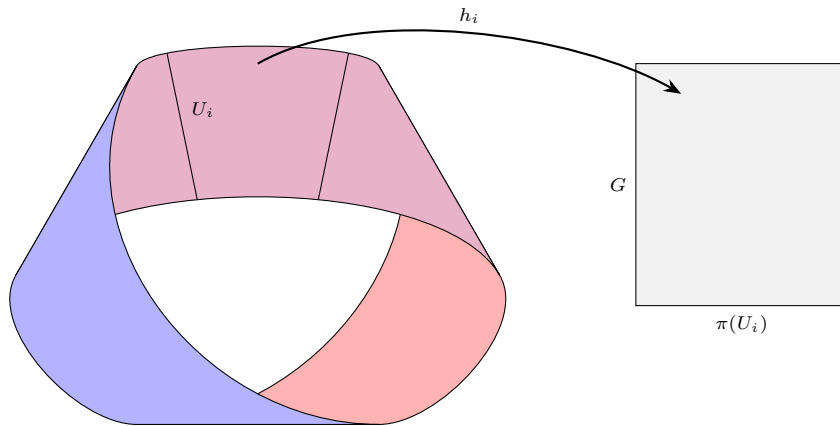


fig. 2.2 — Représentation du ruban de Möbius en tant que fibré. Les notations sont reprises de la définition 6.

⁶ En terme technique, la projection sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est une submersion riemannienne.

Il existe toutes sorte de variétés fibrées dès lors qu'elles sont munies de structure remarquable. Celles qui vont nous intéresser sont celle dites principales⁷ :

DÉFINITION 6 (VARIÉTÉ FIBRÉE PRINCIPALE) — Une *variété fibrée principale* (VFP), ou *fibré principal* est constituée de deux variétés différentielles P et B telles que :

- Il existe un groupe de Lie G opérant à droite (ou à gauche) sur P via l'application différentiable :

$$R : \begin{array}{ccc} P \times G & \longrightarrow & P \\ (p, g) & \longmapsto & R_g(p) := p \cdot g = pg \end{array} \quad (2.6)$$

- Il existe une surjection différentiable $\pi : P \longrightarrow B$ telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}(\pi(p)) = pG \quad (2.7)$$

- P est munie d'un ensemble de paire (U_i, h_i) tel que les U_i forment un recouvrement de B et tel que les $h_i : G \times U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset P$ soient des difféomorphismes vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \forall x \in U_i, \quad h_i(ab, x) = h_i(a, x) \cdot b \quad \text{et} \quad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

La variété B est appelé la *base* de la VFP, G son *groupe structural* et pG la *fibre* de P passant par p et au dessus de $\pi(p) \in B$. Le tout est notée $P(R, G, \pi, B)$ ou plus simplement $P(G, B)$.

Les fibres pG sont toutes difféomorphes à G et B est difféomorphe à P/G . Le diagramme commutatif ci-contre résume la situation (pr_i est la projection canonique sur la i -ème composante).

$$\begin{array}{ccc} G \times U_i & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U_i) \subset P \\ \text{pr}_2 \downarrow & \swarrow \pi & \\ U_i & & \end{array}$$

L'ensemble $\{(U_i \times G, h_i)\}_i$ est l'équivalent d'un atlas pour les variétés différentielles classiques mais adapter pour tenir compte de la structure fibré de P et de l'action de G . Explicité les changements de cartes dans P , ce fait comme suit.

D'abord, P étant localement difféomorphe à un produit $G \times U_i$, on peut y tracer des graphes appelés *sections locales*, comme sur la figure 2.3 ci-dessous. Formellement, une section locale au dessus de $U_i \subset B$ est une application $\sigma : U_i \longrightarrow P$ vérifiant :

$$\pi \circ \sigma = \text{id}|_{U_i}$$

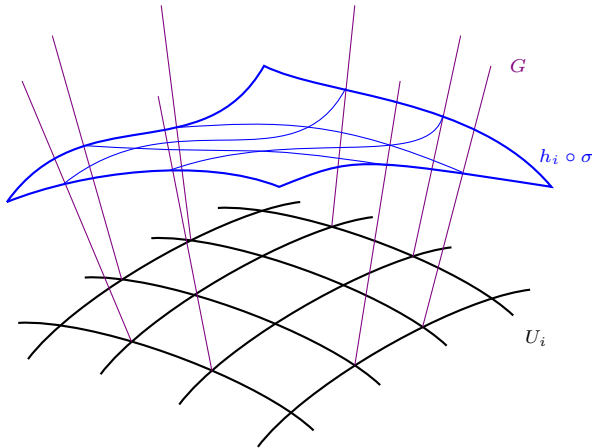


fig. 2.3 — Représentation d'une section local σ au dessus de $U_i \subset B$ de dimension 2. Comme P n'est pas un produit à proprement parler, σ est représenté dans $G \times U_i$ à travers h_i .

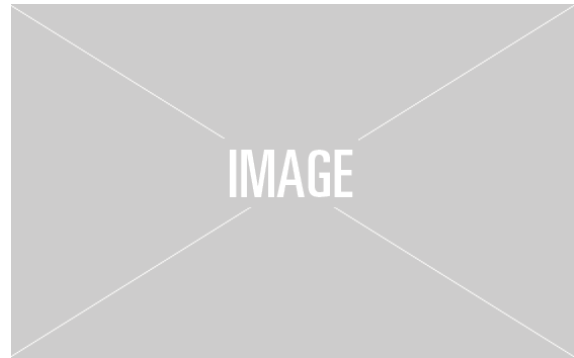


fig. 2.4 — Représentation de la section canonique définie par rapport à G avec une seconde section $\sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot g(x)$. Cette fois B est une variété de dimension 1.

⁷ Bien que ce ne sera pas précisé, il sera toujours sous-entendu que les différentes variétés et cartes doivent avoir les mêmes niveaux de régularités pour que le tout reste cohérent.

Ensuite, les hypothèses sur $P(G, B)$ sont telles que G agit transitivement et librement (ou sans point fixe) sur P . C'est-à-dire que, sur une même fibre, tout point peut être atteint par n'importe quel autre via l'action de G (transitivité) :

$$\forall x \in B, \quad \forall p, q \in P_x, \quad \exists t(p, q) \in G \mid p = q \cdot t(p, q)$$

et que la seule façon de laisser les points invariants par cette même action est de passer par l'élément neutre e (libre) :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad p = p \cdot g \implies g = e$$

De la transitivité de G , découle le fait que toutes les sections locales σ au dessus de U_i peuvent s'écrire à partir d'une même section σ_i via la formule :

$$\forall x \in B, \quad \sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma(x))$$

Son caractère libre, lui assure l'unicité d'un choix canonique de section σ_i sur U_i . Elle est donnée par :

$$h_i(x, e) = \sigma_i(x)$$

Cela mène à la définition :

DÉFINITION 7 (FONCTIONS DE TRANSITIONS) — L'intersection de deux cartes est noté $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et le passage d'une section local canonique est donné par :

$$\forall x \in U_{ij}, \quad \sigma_j(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma_j(x))$$

L'élément de G , $t(\sigma_i, \sigma_j)$, est alors appelé *fonction de transition* et sera noté φ_{ij} . Elle fait effectivement la transition entre deux cartes dans le sens où :

$$\forall (g, x) \in G \times U_{ij}, \quad h_i^{-1} \circ h_j(g, x) = (\varphi_{ij}(x)g, x)$$

1.2.2 Le fibré $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$

Dans notre cas \mathbb{S}^n qui fait office d'espace totale et, quant bien même il s'écrit directement comme une produit $\mathbf{U}(1) \times \mathbf{PC}^n$, pour tenir compte du fait que \mathbf{PC}^n est une variété il vaut le voir localement comment le produit $\mathbf{U}(1) \times U_i$.

Aussi, avec la normalisation sur \mathbb{S}^n , les coordonnées locales sur \mathbf{PC}^n se réécrivent, $\forall w \in U_i$:

$$w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i} = \frac{z^\mu}{|z^i|e^{i \arg(z^i)}} = \frac{z^\mu}{\sqrt{1 - \sum_{\nu \neq i} |z^\nu|^2}} e^{-i \arg(z^i)} \quad \text{car} \quad \sum |z^\nu|^2 = \|z\|^2 = 1$$

On constate bien que w^μ n'est définie qu'à un choix de $e^{-i \arg(z^i)} \in \mathbf{U}(1)$ près. À l'inverse, un représentant z_i dans \mathbb{S}^n de $w \in U_i$ aura pour coefficient :

$$\forall \mu \neq i, \quad z_i^\mu = \frac{w^\mu}{\|w\|} e^{i\theta} \quad z_i^i = \frac{1}{\|w\|} e^{i\theta}$$

La norme de w étant à comprendre au sens des coordonnées locales sur U_i ⁸ :

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|(w^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}\|^2 = \frac{1}{|z_i^i|^2} \sum_{\nu \neq i} |z_i^\nu|^2 = \frac{1 - |z_i^i|^2}{|z_i^i|^2} \iff |z_i^i|^2 \|w\|^2 = 1 - |z_i^i|^2 \\ &\iff |z_i^i|^2 = \frac{1}{1 + \|w\|^2} \\ &\iff |z_i^i| = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} \end{aligned}$$

⁸ C'est un abus de notation, w n'a pas de norme en ce sens là puisqu'elle dépend du choix de carte U_i . Mais ici tout le raisonnement est purement local, donc ce n'est pas un problème.

D'où l'expression des coefficients de $z_i \in \mathbb{S}^n$:

$$\forall \mu \neq i, \quad z_i^\mu = \frac{w^\mu}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta} \quad z_i^i = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta}$$

Tout cela permet d'écrire \mathbb{S}^n comme une variété fibrée principale :

PROPOSITION 2 — La $(2n+1)$ -sphère \mathbb{S}^n , vu comme variété plongée dans \mathbb{C}^n est une VFP de base $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ et de fibre type $U(1)$. L'action de $U(1)$ sur \mathbb{S}^n est induite par la multiplication par un scalaire complexe et où :

- La fibration π est la projection canonique de \mathbb{S}^n sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$:

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}\mathbb{C}^n \\ z & \longmapsto & [z] \end{array} \quad (2.8)$$

- Les cartes locales h_i s'écrivent :

$$\forall w \in U_i, \forall e^{i\theta} \in U(1), \quad h_i(w, e^{i\theta}) = \frac{w^\mu}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta} \in \mathbb{S}^n \quad (2.9)$$

- Les sections canoniques σ_i au dessus des U_i , elles, sont définies par :

$$\forall w \in U_i, \quad \sigma_i(w) = h_i(w, 1) = \frac{w^\mu}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} \quad (2.10)$$

- Les fonctions de transitions entre deux cartes U_i et U_j s'écrivent :

$$\varphi_{ij}(w) = e^{-i \arg(z_i^i)} e^{i \arg(z_j^j)} \quad \text{où} \quad z_{i,j} = \phi_{i,j}(w) \quad (2.11)$$

1.3 Espaces horizontaux et connexion

Pour retrouver, dans ce cadre, une notion de fréquence instantanée il va nous falloir munir $\mathbb{S}^n(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$ d'une connexion

1.3.1 Définition général

Comme P ressemble localement à un produit $G \times U_i$, il est utile de séparer ses espaces tangents $T_p P$ comme une somme directe d'espaces tangents respectivement aux fibres et à la base. Conformément aux représentations précédentes (fig. 2.2 à 2.4), les premiers sont appelées espaces tangents *verticaux*, les seconds *horizontaux* et l'on note :

$$\forall p \in P, \quad T_p P = V_p P \oplus H_p P$$

Les tangents verticaux $V_p P$ se définissent canoniquement via π , en tant que noyau de sa différentielle :

$$V_p P := \text{Ker}(T_p \pi) = \{v \in T_p P \mid T_p \pi(v) = 0\}$$

Ce n'est en revanche pas le cas des espaces horizontaux. Il faut donc faire un choix pour les $H_p P$ et c'est ce choix qui est appelé *connexion* (elle connecte les espace tangents entre eux). Comme pour les verticaux, ces sous-espaces peuvent être caractérisés par une 1-forme différentiable ω sur P à valeur dans VP , auquel cas :

$$\forall p \in P, \quad H_p P = \text{Ker}(\omega_p)$$

Dans le cas des VFP, une connexion doit en plus avoir de bonnes propriétés au regard de l'action de G sur P , aboutissant à la définition :

DÉFINITION 8 (CONNEXION SUR VFP) — Une *connexion* sur une VFP $P(G, B)$ est la donnée d'un sous-espace tangent, $H_p P \subset T_p P$, en tout point de $p \in P$ tel que :

- $H_p P$ dépend différentiellement de p ("dépendre différentiellement" à un sens précis pour les sous-espaces mais qui ne sera pas utile pour la suite).
- $H_p P$ est supplémentaire à $V_p P$ dans $T_p P$:

$$T_p P = V_p P \oplus H_p P \quad (2.12)$$

- l'assignation des $H_p P$ est invariante par l'action de G au sens où :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad H_{R_g(p)} P = R_{g*}(H_p P) = \{R_{g*}(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in H_p P\} \quad (2.13)$$

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad H_{p \cdot g} P = H_p P \cdot g = \{\mathbf{v} \cdot g \mid \mathbf{v} \in H_p P\} \quad (2.14)$$

Au delà d'assurer une compatibilité entre H et R , l'équation (2.13) permet de n'avoir à définir la connexion qu'en un seul point de chaque fibre, les autres se déduisant par cette formule. Concrètement, pour tout point de la base $x \in U_i$, il suffit de la définir en $\sigma_i(x) = h_i(e, x)$, de sorte que l'espace horizontale en tout autre point $p = h_i(g, x) = \sigma_i(x) \cdot g$ au dessus de x sera donné par :

$$H_p P = T_{\sigma_i(x)} R_g(H_{\sigma_i(x)} P) = (H_{\sigma_i(x)} P) \cdot g$$

De même, la 1-forme de connexion n'a besoin d'être définie que sur un point particulier au dessus de chaque fibre. Et comme tout les espaces verticaux sont difféomorphes à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \cong T_e G$ de G , c'est sur \mathfrak{g} qu'elle est définie :

DÉFINITION 9 (1-FORME DE CONNEXION) — La *1-forme de connexion* ω d'une VFP $P(G, B)$ est définie comme la 1-forme différentiable sur P à valeur dans \mathfrak{g} (i.e. en tout point $p \in P$, ω_p est à valeur de $T_p P$ dans \mathfrak{g}), telle que $\forall p \in P$:

$$\forall a \in \mathfrak{g}, \quad \omega_p(p \cdot a) = a \quad H_p P = \text{Ker}(\omega_p) \quad (2.15)$$

Où $p \cdot a$ est vu comme vecteur vertical de $V_p P$. La condition de compatibilité de la connexion avec l'action (2.13) devient :

$$\forall \mathbf{v} \in T_p P, \quad \omega_{p \cdot g}(\mathbf{v} \cdot g) := \omega_{p \cdot g}(R_{g*}(\mathbf{v})) = g^{-1} \omega_p(\mathbf{v}) g \quad (2.16)$$

En terme de coordonnée local, ω elle n'a pas besoin d'être défini sur $U_i \times G$, mais seulement sur $U_i \cong U_i \times \{e\}$. Ainsi, ω induit une 1-forme sur les cartes U_i par l'image réciproque des sections canonique σ_i . Elles sont notées $\mathcal{A}_i := \sigma_i^* \omega$ et sur le chevauchement U_{ij} , elles vérifient :

$$\mathcal{A}_j = \varphi_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \varphi_{ij} + \varphi_{ij}^{-1} d\varphi_{ij} \quad (2.17)$$

Munir $P(G, B)$ d'une connexion permet, entre autre de définir la notion de relèvement horizontale :

DÉFINITION 10 (RELÈVEMENT HORIZONTAL) — Étant donné une trajectoire $\rho : \mathbb{R} \rightarrow B$ sur la base et une condition initiale $\gamma_0 \in \rho(0)G$ dans la fibre au dessus de $\rho(0)$, il existe un unique relèvement γ de ρ dans P tel que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\pi \circ \gamma(t) = \rho(t) \quad \dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)} P \quad \gamma(0) = \gamma_0 \quad (2.18)$$

On parle de *relèvement horizontal* (*horizontal lift*, ou *transport parallèle* de γ_0 le long de ρ) puisque γ n'a pas de déplacement vertical au sens de la connexion. Du point de vue de la 1-forme ω , si γ s'écrit

localement $\gamma_i = \sigma_i(\rho)g_i$, alors g_i vérifie l'équation (d'où vient l'unicité du relèvement) :

$$\frac{d}{dt}g_i(t) = -\mathcal{A}_i(t) \cdot g_i(t) \quad (2.19)$$

Enfin, si maintenant γ est une trajectoire de P , on dira, par abus de langage, que $\tilde{\gamma}$ est le relèvement horizontale de γ si c'est le relèvement horizontale de la projection $\pi \circ \gamma$ avec $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$.

Pour la suite, il sera utile d'avoir l'expression d'une trajectoire $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow P$ par rapport à son relèvement horizontale $\tilde{\gamma}$. Pour l'obtenir, on note $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot g$, de sorte que sa dérivée s'écrit :

$$\dot{\gamma} = \dot{\tilde{\gamma}} \cdot g + \tilde{\gamma} \cdot dg = \dot{\tilde{\gamma}} \cdot g + \gamma \cdot g^{-1}dg$$

Ce à quoi on applique ω , donnant :

$$\begin{aligned} \omega_\gamma(\dot{\gamma}) &= \omega_\gamma(\dot{\tilde{\gamma}} \cdot g) + \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) \\ &= g^{-1}\omega_{\tilde{\gamma}}(\dot{\tilde{\gamma}})g + \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) && \text{d'après (2.16)} \\ &= \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) && \text{car } \tilde{\gamma} \text{ est horizontale} \end{aligned}$$

Le terme $g^{-1}dg$ restant étant un vecteur de $g^{-1}T_gG \cong T_eG \cong \mathfrak{g}$, le vecteur $\gamma \cdot g^{-1}dg$ est vertical et :

$$\omega_\gamma(\dot{\gamma}) = \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) = g^{-1}dg$$

D'où $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot g$ où g est solution de :

$$\frac{d}{dt}g(t) = g(t)\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \quad (2.20)$$

- Remarque : Même si cette notion de connexion n'est pas la même que pour les connexions affines, les deux sont très liées. En particulier si P est le fibré tangent d'une variété \mathcal{M} avec pour groupe structural $GL_n(\mathbb{R})$, alors toute connexion sur P est une connexion affine sur \mathcal{M} .

1.3.2 Choix de connexion sur $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$

Pour choisir la connexion est mettre sur $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$, il est important de comprendre son intérêt du point de vue signal. Comme, à chaque instant t , un signal \mathbf{x} sur \mathbb{S}^n est représenté par une paire $(e^{i\alpha(t)}, \rho(t)) \in \mathbf{U}(1) \times \mathbf{PC}^n$ à travers les h_i , $\alpha(t)$ peut être vu comme la fréquence et $\rho(t)$ l'état de polarisation instantanée du signal $\mathbf{x}(t)$.

Le problème de cette représentation est qu'elle dépend du choix de carte U_i , ainsi sur l'intersection U_{ij} , \mathbf{x} aurait (au moins) deux notions de fréquence instantanée.

C'est là qu'intervient la connexion. D'une part, la 1-forme ω qui lui est associée est définie globalement sur le fibré, autrement dit, elle est indépendante des représentations locales de \mathbf{x} .

D'autre part, le relèvement horizontal $\tilde{\mathbf{x}}$ d'une courbe $\rho \subset \mathbf{PC}^n$, par définition, n'a pas de variation verticale. Dans notre cas, cela signifie que $\tilde{\mathbf{x}}$ n'a pas de variation dans la direction $\mathbf{U}(1)$ (par opposition à celle de \mathbf{PC}^n), donc de variation fréquentielle.

Ainsi, si $\rho_{\mathbf{x}}$ est la projection d'un signal \mathbf{x} , le relèvement horizontal $\tilde{\mathbf{x}}$ s'interprète comme une version de \mathbf{x} dénuée de toute fréquence instantanée. En allant un peu plus loin, à tout instant t , l'action $e^{i\alpha}$ permettant de passer de $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ à $\mathbf{x}(t)$ (i.e. $\mathbf{x}(t) = e^{i\alpha}\tilde{\mathbf{x}}(t)$) peut-être vu comme la fréquence instantanée du signal (voir fig. 2.5 ci-dessous)

Un signal qui n'aurait pas fréquence instantanée mais une polarisation instantanée n'a pas vraiment de sens. Cela revoit à notre discussion de première partie où. Il avait été expliqué que la fréquence instantanée d'un signal univarié devait contenir les hautes fréquences et son amplitude les basses et que, si ce n'était pas le cas, alors toutes les fréquences sur signal pourrait se retrouver dans l'amplitude. Ici le problème est le même, mais avec l'état de polarisation en lieu de l'amplitude.



fig. 2.5 — Fréquence instantanée d'un signal \mathbf{x} vu comme variation vertical de \mathbf{x} par rapport à son relèvement horizontale $\tilde{\mathbf{x}}$ associé

Pour s'en convaincre, il est utile de retourner sur le cas bivarié.

La projection sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ de \mathbf{x} représente l'ellipse de polarisation instantanée. Mais si \mathbf{x} n'a pas de fréquence instantanée, alors $\mathbf{x}(t)$ n'est plus représenté que par le sommet de l'ellipse paramétrée par $\rho_{\mathbf{x}}$. L'on pourrait alors argumenter que tout signal peut être décrit ainsi, ce qui est parfaitement inintéressant.

Cette vision du relèvement horizontale est donc purement formelle et à bien un sens géométrique même si en terme de signal, elle ne correspond à rien.

En admettant l'interprétation de la connexion comme fréquence instantanée, les discussions de première partie (sec. 1.2) suggère choisir comme 1-forme de connexion :

$$\forall p \in \mathbb{S}^n, \forall \mathbf{v} \in T_p \mathbb{S}^n, \quad \omega_p(\mathbf{v}) = \Im m \langle \mathbf{v}, p \rangle$$

Or, l'algèbre de Lie de $U(1)$ est représenté par $\mathfrak{u}(1) \cong i\mathbb{R}$. Il convient alors de poser :

$$\forall p \in \mathbb{S}^n, \forall \mathbf{v} \in T_p \mathbb{S}^n, \quad \omega_p(\mathbf{v}) = i \Im m \langle \mathbf{v}, p \rangle \quad (2.21)$$

Avec cette interprétation un signal, on peut alors voir la phase dynamique d'un signal γ comme la déviation à son relèvement horizontale $\tilde{\gamma}$. Ainsi, $g = e^{i\Phi_{\text{dyn}}(\gamma)}$ est solution de (2.20), qui se réécrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g &= g i \Im m \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle \iff g = e^{\int_{t_0}^t i \Im m \langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) \rangle ds} \\ &\iff \Phi_{\text{dyn}}(\gamma) = \int_{t_0}^t \Im m \langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) \rangle ds \end{aligned}$$

À noter ce que choix de connexion est doublement justifié par le fait que c'est la connexion induite par la métrique de \mathbb{S}^n .

- En effet, si \mathbb{S}^n n'est pas une variété complexe (problème de dimensionnalité), elle a quand-même une métrique riemannienne (réelle) induite par celle sur \mathbb{C}^n : $\Re e \langle \cdot, \cdot \rangle$.
- Dans ce cas, les espaces horizontaux de définissent comment les espaces orthogonaux aux verticaux :

$$\forall p \in \mathbb{S}^n, \quad H_p \mathbb{S}^n = V_p \mathbb{S}^{n\perp}$$

- Ce qui mène bien à poser $w_p = i \Im m \langle \cdot, p \rangle$

II — Interprétation des trois phases dans ce cadre

- Rapide résumé : On décompose tout signal multivarié complexe comme la données d'une amplitude, d'une phase et d'un "état de polarisation". Indépendamment de l'amplitude, cela nous ramène à travailler dans la VFP $\mathbb{S}^n(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$. La connexion

- On la munie d'une connexion tenant compte de la métrique sur \mathbb{S}^n , ce qui nous ramène à la définir comme la fréquence instantanée.
- Reste alors à réinterpréter les trois phases dans ce cadre
- Pour cela, d'abord un cas simple, similaire au cas particulier de la première partie : γ pseudo-cyclique

2.1 Cas pseudo-cyclique

- DEF : pseudo-cyclique
- Dans ce cas, la projection C_γ de γ sur PC^n est (proprement) cyclique
- Comme, entre autre, Bohm l'explique dans [1], en fonction du choix de relèvement on peut isoler les différentes phases de γ .
- En particulier, C_γ est cyclique, $\gamma(1)$ est dans la même fibre que $\gamma(0)$ et les trois se décrivent dans une même fibre $\gamma(0)\text{U}(1) = \gamma(1)\text{U}(1)$:
- Étant donné le choix de connexion, le relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$ de C_γ (à partir du point initial $\gamma(0)$) n'a pas de phase dynamique. Φ_{dyn} est donc donnée par différence de phase entre $\gamma(1)$ et $\tilde{\gamma}(1)$
- Pour obtenir la phase géométrique, on considère une troisième relèvement, η , de C_γ qui cette fois est proprement cyclique. Comme il n'a, par construction, pas de phase totale, sa phase géométrique est égale à sa phase dynamique au signe près.
- Or, la phase $\Phi_{\text{dyn}}(\eta)$ est, comme pour γ donné par la différence de jauge entre $\tilde{\gamma}(1)$ et $\eta(1)$.
- Tout cela est résumé par la figure 2.6 ci-dessous :



fig. 2.6 — Représentation des trois phases de γ dans le cas pseudo-cyclique.

- Remarque importante : le choix de relèvement cyclique η n'est pas unique mais n'est pas important pour autant, puisque c'est la seule propriété $\eta(0) = \eta(1)$ qui permet d'avoir l'interprétation exposée juste avant. Cela traduit, par ailleurs, l'aspect invariant par transformation de jauge de Φ_{geo} .
- Ce que cette représentation montre c'est que Φ_{geo} est donné par l'holonomie du trajet γ .
- DEF : holonomie
- Dans notre cas, la variété est connexe ce qui assure que Hol est un sous-groupe de Lie connexe du groupe structural, à savoir $\text{U}(1)$. Ainsi, $\text{Hol} = \text{U}(1)$, ce qui montre que (au moins dans le cas cyclique) la phase géométrique peut prendre n'importe quelle valeur.
- Cette formulation est très jolie mais finalement que très peu instructive. On pourrait alors se demander si Φ_{geo} ne pourrait pas, comme Φ_{dyn} , s'écrire comme l'intégrale d'une 1-forme sur PC^n .
- A cela, Mukunda & Simon explique dans [14] que non. Moralement, l'écriture $\Phi_{\text{geo}} = \Phi_{\text{tot}} - \Phi_{\text{dyn}}$ suggère que ça ne peut pas être le cas puisque la phase totale ne peut pas s'écrire comme l'intégrale d'une 1-forme.
- Cela vient du fait que Φ_{tot} est indépendant de la trajectoire de γ sur $]0, 1[$. Au mieux, elle peut être vue comme la longueur de la géodésique γ_g sur \mathbb{S}^n entre les points $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$. C'est-à-dire comme l'intégrale de la norme sur \mathbb{S}^n de $\dot{\gamma}_g$ le long de γ_g . Mais rien par rapport à γ

2.2 La phase géométrique dans $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$

- Cela étant dit, dans le cas cyclique Φ_{geo} et Φ_{dyn} se confond et cette propriété peut être exploitée.
- En effet, la commutativité de $U(1)$ fait que Hol est indépendant du relèvement $\eta(0)$ de $C_\gamma(0)$
- Ajouter à cela le fait que la connexion s'exprime exclusivement dans les cartes U_i , on se ramène à calcul un calcul de la phase géométrique exclusivement dans $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$.
- Dans ce cas, la phase géométrique est l'intégrale sur un lacet d'une 1-forme et le théorème de Stokes peut s'appliquer :
- THEO de Stokes
- Dans notre cas : on obtient l'intégrale d'une forme symplectique sur l'aire entouré par le lacet C_γ (je suspecte que ce soit $-i\Im m$ (métrique F-S + à affiner)
- En somme, cela se ramène à un calcul d'aire sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$
- *Un mot sur le lien avec Fisher*

2.3 Retour au cas général

- Si maintenant γ est qu'elle conque, pour retrouver les interprétation précédente, le plus simple est encore de se ramener au cas pseudo-cyclique.
- Cela demande de refermer γ de sorte à ne pas engendré plus de phase géométrique. En somme, on veut savoir qu'elles sont les trajectoire de \mathbb{S}^n qui n'engendre pas de phase géométrique.
- Sachant le représentaiton par Stokes c'est plutôt simple :

III — Aller plus loin

- La présentation dans $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ à été fructueuse dimension $n = 1$, avec les paramètres de l'ellipse. Mais, au delà, ça devient moins clair. Intuitivement, on pourrait généraliser les états de polarisations en ajoutant simplement une matrice de rotation dans \mathbb{C}^n au signal bivarié polarisé. Autrement dit, il faudrait découper $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ en une produit du genre :

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^n \cong \text{SO}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^2 - ish$$

C'est pas clair comment faire ça (est-ce que $\text{SU}_n(\mathbb{C})$ serait mieux ?)

- Plot d'un relèvement horizontale (juste pour voir à quoi ça ressemble)

ANNEXE

Annexe A — Connexion induite par une métrique

Si $P(G, B)$ une VFP munie d'une métrique riemannienne g . La connexion induite par g sur P est définie par :

$$\forall p \in P, \quad H_p P = V_p P^\perp \quad (2.22)$$

Plus concrètement, $V_p P$ est isomorphe à \mathfrak{g} via la transformation :

$$\forall p \in P, \forall a \in \mathfrak{g}, \quad a^*(p) = \left. \frac{d}{dt} p \cdot \exp(ta) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} p \cdot \exp(ta) \right|_{t=0} := pa$$

Avec, une base $\{\mathfrak{e}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ de \mathfrak{g} induit une base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq k} = \{\mathfrak{e}_i^*\}_{1 \leq i \leq k}$ sur $V_p P$. La métrique g induit alors une connexion de 1-forme :

$$\omega_g(X) = \sum_i g(X, e_i) \mathfrak{e}_i = \sum_i g_{ij} X^j \mathfrak{e}_i$$

et on la projection de X sur VP est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{ver} X = \omega(X)^* &\iff \text{ver}(X^i e_i) = \sum_i g_{ij} X^j e_i \\ &\iff (\text{ver} X)^i = g_{ij} X^j \end{aligned}$$

Annexe B — Algèbre et groupe de Lie

B.1. Quelques généralités

B.2. Cas particulier : $U(1)$

Annexe C — Variété différentielle complexe, tiré de [16]

\mathcal{M} sera une *variété différentielle complexe* si elle satisfait les propriétés ci-dessus où \mathbb{R}^n est remplacé par \mathbb{C}^n et où la condition de difféomorphisme est remplacé par la condition d'holomorphisme.

Une application $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ étant holomorphe si chacune de ses composantes vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \mu, \quad \frac{\partial f}{\partial y^\mu}(x + iy) = i \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x + iy)$$

Les fonctions holomorphes étant automatiquement C^∞ , les variétés différentielles complexes sont toujours lisse, c'est-à-dire C^∞ . Aussi, \mathcal{M} est dite de dimension complexe n et dimension (réel) $2n$, notés :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) := n \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) := \dim(\mathcal{M}) = 2n \quad (2.23)$$

Ensuite, pour le dire rapidement, la structure complexe de \mathcal{M} permet de séparer les espaces tangents en deux sous espaces. Pour ce faire, on commence par noter qu'en tout point $p \in \mathcal{M}$ de coordonnée $z^\nu = x^\nu + iy^\nu$, l'espace tangent $T_p \mathcal{M}$, vu comme variété réelle, admet une base :

$$T_p \mathcal{M} = \text{Vec} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\} \quad (2.24)$$

Plus tôt que de se basé sur les x^μ et y^μ pour séparer les $T_p\mathcal{M}$, on définit sur ces derniers un tenseur J_p de type (1,1) tel que :

$$J_p \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad J_p \frac{\partial}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.25)$$

Ce tenseur est l'équivalent de la multiplication par $\pm i$ et le fait que \mathcal{M} soit complexe assure qu'il soit défini globalement, *i.e.* sur $T\mathcal{M}$. Il est diagonalisable dans la base :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial z^\mu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \quad \partial_{\bar{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \quad (2.26)$$

Ainsi en fonction de la base ((2.23) ou (2.26)), J_p va s'écrire :

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \quad J_p = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Finalement, $T\mathcal{M}$ peut être séparé en deux sous-espaces engendré respectivement par les ∂_μ et $\partial_{\bar{\nu}}$. On parle de vecteur holomorphe et anti-holomorphe et on note :

$$T_p\mathcal{M}^+ = \text{Vec}\{\partial_\mu \mid 1 \leq \mu \leq n\} \quad T_p\mathcal{M}^- = \text{Vec}\{\partial_{\bar{\mu}} \mid 1 \leq \mu \leq n\} \quad (2.28)$$

PARTIE III

NOTES 'N' THOUGHTS

I — Notes sur l'approche Géométrie

1.1 Notes sur l'approche à avoir

- Quel espace ? Pour la gauge invariance, c'est du $U(1) \times X$ mais qui est X ?
 - les xx^\dagger sont plus calculable mais isomorphe à l'espace projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, lequel des deux choisir ? (les deux sont équivalent, 1^{er} théorème d'isomorphisme -ish)
 - Y'a aussi les Grassmanniennes $G_{n,k}(\mathbb{K})$, mais $G_{n,1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}\mathbb{C}^n$
 - En somme, sûrement que $X = \mathbb{P}\mathbb{C}^n$ (à voir comment faire les changements d'espaces)
 - $\mathbb{C}^{n*}/(1)$ sounds good mais n'a pas de structure complexe (aucune, dim impaire)
- Ensuite, comme on a un produit(-ish), on veut un côté fibré (sûrement principale)
A ce sujet, Wikipédia dit : “ La théorie des fibrés principaux recouvre la théorie des fibrés vectoriels, de leurs orientations, de leurs structures riemanniennes, de leurs structures symplectiques, etc. ” (sounds reaaaally good)
- Puis une métrique pour l'espace :
 - vu que c'est complexe j'y connais R
 - mettre la bonne connexion (A-A mais y'a aussi Fubini-Study)
 - si la connexion du fibré est équivalente à la connexion d'une variété, qu'est-ce qu'il se passe du côté de cette variété ? est-ce qu'on peut en déduire des choses ? (sûrement que non parce que $U(1)$ est pas un e.v.)
- Phase géo \cong transport parallèle ?
Réponse : holonomie
- refs de GPT pour la connexion sur fibré :
 - Kobayashi & Nomizu - Foundations of Differential Geometry (vol. 1 & 2)
C'est la bible sur les connexions et fibrés principaux ! Chapitres sur les connexions dans les fibrés principaux et leur relation avec les connexions dans les fibrés vectoriels associés.
 - J. M. Lee - Introduction to Smooth Manifolds (Chapitre sur les connexions et les fibrés principaux).
Accessible et bien expliqué, en particulier sur le lien entre les connexions dans les fibrés vectoriels et les fibrés principaux.
 - S. Helgason - Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces
Approche plus avancée et lie bien la géométrie différentielle à la théorie des groupes de Lie.

Pour la géométrie projectives complexe :

- Kobayashi, Differential Geometry of Complex Vector Bundles
Introduction aux connexions sur les fibrés vectoriels complexes, crucial pour comprendre les métriques de Fubini-Study et les structures kählériennes.

- Huybrechts, Complex Geometry: An Introduction
Introduction aux variétés complexes et kählériennes, avec des applications aux espaces projectifs complexes.
- Gunning, Introduction to Complex Analysis and Geometry
Bon compromis entre analyse complexe et géométrie différentielle.
- Wells, Differential Analysis on Complex Manifolds
Bon livre pour le lien entre la géométrie différentielle et la géométrie projective
- Ballmann, Introduction to Kähler Geometry
Très bon pour comprendre l'aspect kählérien des variétés projectives.
- Voisin, Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry (vol. 1 & 2)
Référence avancée, mais incontournable si tu veux plonger dans la topologie des variétés projectives complexes.

• Improbable mais on sait jamais :

- Spin-structure ? (c'est que PC^n + pas sur que ça ait de l'intérêt parce que ça existe qu'en dimension impair)
- Espace de Siegel ? (ellipse vs ellipsoïde tout ça tout ça)

• Autour de $U(n)$: [Classif de \$U\(n\)\$](#)

1.2 La vision de Bohm [1, fig. 4.3]

Dans cette section, ψ sera toujours supposée pseudo-cyclique :

DÉFINITION 11 — Un signal ψ sera dit *cyclique* si à l'instant t , ψ reprend les mêmes valeurs qu'en t_0 :

$$\psi(t) = \psi(t_0)$$

Et ψ sera dit *pseudo-cyclique* s'il est cyclique à une transformation de gauge près :

$$\exists \theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \psi(t) = e^{i\theta(t)}\psi(t_0) \text{ et } \theta(t_0) = 0$$

On note \mathcal{C} le trajet effectué par ψ et \mathfrak{C} le projeté de ce trajet sur la base PC^n . On note également $\tilde{\mathcal{C}}$ (resp. \mathcal{C}_c) le lift horizontal (resp. un lift cyclique) de \mathfrak{C} , et on lui associe la paramétrisation $\tilde{\psi}$ (resp. ϕ). En clair :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{ \psi(t) \in \mathbb{C}^n \mid t \in \mathbb{R} \} \\ \mathfrak{C} &= \{ \psi(t)\psi(t)^\dagger \in \text{PC}^n \mid t \in \mathbb{R} \} \\ \tilde{\mathcal{C}} &= \{ \tilde{\psi}(t) \in \mathbb{C}^n \mid t \in \mathbb{R} \} & \tilde{\psi} \text{ horizontal lift} \\ \mathcal{C}_c &= \{ \phi(t) \in \mathbb{C}^n \mid t \in \mathbb{R} \} & \phi \text{ cyclique} \end{aligned}$$

Quand on dit que $\tilde{\psi}$ est l'*horizontal lift*, on sous entend que le fibré est muni d'une connexion. Suivant l'approche quantique, elle est de la forme :

$$\forall \eta \in \Gamma(\mathcal{M}), \quad \mathcal{A} := \int_{\gamma} \langle \eta, h(\eta) \rangle$$

où h est l'Hamiltonien de l'équation de Schrödinger (dont ψ est supposé solution) :

$$i \frac{d}{dt} \psi(t) = h(\psi(t)) \tag{3.1}$$

Mais on a le choix de h . En particulier, si on veut pas de contrainte, on peut toujours poser :

$$h = i \frac{d}{dt}$$

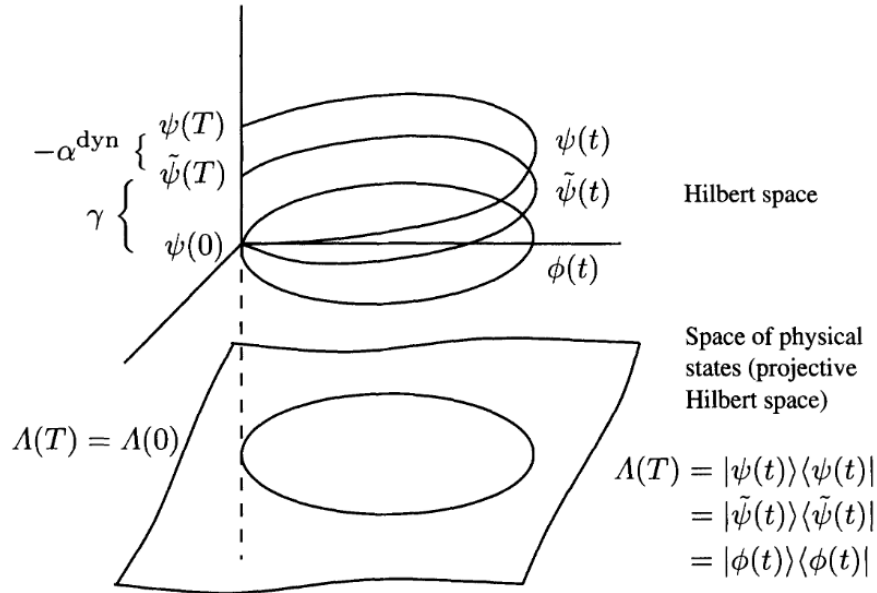


fig. 3.1 — Schéma de Bohm [1] sur les trois phases

Est-ce qu'on a le droit ? (je vois pas pourquoi on pourrait pas) Et si on le fait, qu'est-ce que ça dit du point de vue mécha Hamiltonienne ? (*a priori* rien vue l'EDP)

Aussi, du pvd calculatoire / de la phase g, qu'est-ce qu'il se passe ? Typiquement, est-ce que y'a $\tilde{\psi}$ devient un ϕ ?

Aussi, chose remarquable, le fait que la phase géométrique soit invariante par gauge transfo réapparaît dans le fait que ϕ ne soit pas définie à gauge tranfo près (sauf au bord). Par contre c'est étrange que

1.3 La vision Mukunda & Simon [14, 15]

- Mukunda & Simon[14, p. 10] partent des matrices de corrélation $\rho = \psi\psi^\dagger$ vérifiant (cas normé, p.50 pour le cas générale) :

$$\rho = \rho^\dagger \geq 0 \quad \rho^2 = \rho \quad \text{tr}(\rho) = 1 (= \|\psi\|^2)$$

et pose l'Hamiltonien (resp. l'énergie kiné) :

$$H = i(\dot{\psi}\psi^\dagger - \psi\dot{\psi}^\dagger - \langle\psi, \dot{\psi}\rangle) \quad \text{resp.} \quad K = \frac{d}{dt}(\psi\psi^\dagger) = \dot{\rho}$$

qui donne :

$$\frac{d}{dt}\psi = -iH\psi = (K + \langle\psi, \dot{\psi}\rangle)\psi$$

K est "mieux" dans le sens où il est invariant par gauge-t. Aussi, comme c'est une dérivée d'une hermitienne elle est... hermitienne ? (mmmh).

Anyway, on peut poser avec la bonne gauge :

$$\frac{d}{dt}\tilde{\psi} = K\tilde{\psi}$$

- Voir page 20 pour passer de Φ_{geo} au Birgmann invar
- La phase totale $\Phi_{\text{tot}}(\psi, t_0, t)$ est la phase dyn de la géodésique reliant $\psi(t)$ à $\psi(t_0)$ (ça commute ? surement pas)
En somme, la phase totale est complètement indépendante du chemin ψ , ce qui est rassurant puisque c'est ce qu'on attend la phase totale : qu'elle ne compare que les états $\psi(t_0)$ et $\psi(t)$.

- L'invariant de Birgmann à des propriétés sommatoires similaires à un calcul de volume... transition parfaite vers la formule de Stokes !!!
- Là où Φ_{dyn} est associée à une 1-forme sur P , Φ_{geo} elle est associée à une 2-forme sur P/G !
- SUPER IMPORTANT : [14, (8.6), p.51] pour l'origine/choix de Φ_{geo} !

1.4 Fisher (man, 42 Wallaby way, Sydney)

Pour mémoire, étant donné une distribution de paramètre $\Theta = (\theta_i)_{1 \leq i \leq n}$, la métrique de Fisher est la donnée par :

$$f_{ij}(\rho_\theta) = -\mathbb{E}_{\rho_\theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \ln(\rho_\theta) \right] \quad (3.2)$$

À côté de ça, la ??, donnait la formule (??) :

$$\mathbb{V}_\rho [\nu] = \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho [(\ln a)'] + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho [\phi']$$

Ce qui ressemble vachement à la variance $(\ln x)'$:

$$\mathbb{V}_\rho [(\ln x)'] = \mathbb{V}_\rho [(\ln a)'] - \mathbb{V}_\rho [\phi'] + 2i \text{Cov}((\ln a)', \phi') \quad (3.3)$$

Dans tout les cas, $\mathbb{V}_\rho [(\ln x)']$ peut pas être lié à l'information de Fisher parce qu'on a pas de paramètre. Mais admettons que ça corresponde quand-même à une information sur x . Si on fait le même calcul que pour un signal x multivarié, alors avec les notations de la ??, on a :

II — Réflexion autour du produit hermitien

Soit $x, y \in \mathbb{C}^n$ des vecteurs complexes et $X, Y \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ leur versions réelles. On note x^j sa j^{eme} composante complexe et x_1 (resp. x_2) le vecteur composé de ses parties réelles (resp. imaginaires) :

$$x = (x^j)_j = x_1 + ix_2 = (x_1^j)_j + i(x_2^j)_j$$

On a deux façon d'écrire le produit hermitien (canonique) de x avec y .
La première :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x_1 + ix_2, y_1 + iy_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - i\langle x_1, y_2 \rangle + i\langle x_2, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + i(\langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle) \\ &= \sum_j x_1^j y_1^j + x_2^j y_2^j + i \left(\sum_j x_2^j y_1^j - x_1^j y_2^j \right) \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle + i \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle X, Y \rangle + i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} Y \right\rangle \end{aligned}$$

Cette formule peut s'interpréter en disant que le produit hermitien encode le produit scalaire entre X et Y et le produit scalaire de X avec les vecteurs $y^j = (y_1^j, y_2^j)$ auquel on aurait appliqué une rotation de 90° (rotation qui, par ailleurs, correspond à la multiplication par i dans le plan complexe). Moralement, $\langle x, y \rangle = 0$ demande une orthogonalité de X à un plan, ce qui fait sens puisque cela tient compte du fait que les x^j, y^j sont complexes (donc de dimension 2 en tant que \mathbb{R} -e.v.).

Pour les connaisseurs, on retrouve l'égalité "produit hermitien = produit scalaire $-i$ forme symplectique" !!

Voir [plan proj complexe](#) et [variété kählérienne](#)

On a aussi l'écriture (quand-même moins clair) :

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + i(\langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle) \\ &= \sum_j x_1^j y_1^j + x_2^j y_2^j + i \sum_j (x_2^j y_1^j - x_1^j y_2^j) \\ &= \sum_j \langle X^j, Y^j \rangle - i \sum_j \det(X^j, Y^j)\end{aligned}$$

Cette formule dit que les parties réelles et imaginaires du produit $\langle x, y \rangle$ encodent respectivement "l'orthogonalité moyenne" et la "linéarité moyenne" entre les familles de vecteurs $X^j \in \mathbb{R}^2$ et $Y^j \in \mathbb{R}^2$. L'orthogonalité d'une part parce que le produit scalaire s'annule en cas d'orthogonalité (no shit), la linéarité d'autre part car le déterminant s'annule en cas de colinéarité et moyenne car se sont des sommes sur j . **$\langle x, y \rangle = 0$ ne dit pas que les vecteurs sont à la fois colinéaire et orthogonaux parce que ce sont des valeurs moyennes (i.e. annuler une somme ne veut pas dire que chacun des termes sont nuls).**

Si maintenant on s'intéresse au cas $y = x$, on a $\forall h \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}\langle x + h, x + h \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle + \langle h, h \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \overline{\langle x, h \rangle} + \langle h, h \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\Re \langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle\end{aligned}$$

Donc si $x \in \mathbb{C}^n$ est fonction d'un paramètre t , l'égalité $\langle x, \dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \partial_t \langle x, x \rangle$ du cas réel devient :

$$\langle x | \dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \partial_t \langle x | x \rangle + i \left\langle X \left| \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \dot{X} \right. \right\rangle \quad (3.4)$$

En particulier, quand bien-même x serait de norme constante, on aurait toujours un degré de liberté pour $\langle x, \dot{x} \rangle$:

$$\|x\| = c \implies \langle x, \dot{x} \rangle = i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \dot{X} \right\rangle$$

III — Description des signaux AM-FM-PM

3.1 Bivarié

3.2 Trivarié

- Version de Lilly [11]

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_+(t) &= e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a(t) e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{avec :} \quad R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc une amplitude / phase instantanée A / ϕ et une polarisation instantanée d'ellipse paramétrée par χ et orientée par la rotation $R_1 R_3 R_1$.

- On note d'abord que (Lefevre [10]) :

$$\begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \chi(t) & i \sin \chi(t) & 0 \\ -i \sin \chi(t) & \cos \chi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui, en terme de matrice de Gall-man (λ_i) (généralisation de la base de Pauli à $U(3)$), devient :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_+(t) &= a(t)e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a(t)e^{i\phi(t)} e^{i\alpha\lambda_7} e^{i\beta\lambda_3} e^{i\theta\lambda_7} e^{-i\chi\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3.3 Généralisation de ces formules au cas n -varié

PROPOSITION 3 (PHASE DE SIGNAL AM-FM-PM n -VARIÉ) — La formule (1.16) de la ?? ce généralise très bien à plus haute dimension. En écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = a(t)e^{i\varphi} R_{\Theta(t)} \mathcal{V}(t) \quad \text{où } R_{\Theta(t)} \in SO_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{V}(t) = \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

la phase dynamique de \mathbf{x} est donnée par :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \int_{t_0}^t \dot{\varphi}(s) + \sin 2\chi \langle \tilde{R}_{\Theta(s)} e_1, e_2 \rangle ds \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \sin 2\chi \langle \tilde{R}_{\Theta(s)} e_1, e_2 \rangle ds\end{aligned} \quad (3.7)$$

où $e_j = \delta_j^i \in \mathbb{R}^n$ et $\tilde{R}_{\Theta(t)}$ est la matrice anti-symétrique :

$$\tilde{R}_{\Theta(t)} = {}^t R_{\Theta(t)} \dot{R}_{\Theta(t)} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

En récrivant R_{Θ} comme composition d'une rotation R_{Λ} et d'une rotation R_{θ} de l'ellipse dans son plan, *i.e.* :

$$R_{\Theta} = R_{\Lambda} R_{\theta} = R_{\Lambda} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \\ & & \mathbb{O}_{n-2} \end{pmatrix}$$

alors la phase dynamique ce réécrit encore :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\theta}(s) \sin 2\chi(s) ds + \int_{t_0}^t \sin 2\chi(s) \langle \tilde{R}_{\Lambda(s)} \tilde{e}_1(s), \tilde{e}_2(s) \rangle ds \quad (3.8)$$

où cette fois \tilde{e}_1 (resp. \tilde{e}_2) donne la direction du demi-grand (resp. -petit) axe de l'ellipse paramétrée par χ :

$$\tilde{e}_1 = R_{\theta} e_1 \quad \tilde{e}_2 = R_{\theta} e_2$$

Démonstration

D'abord, on a la différentielle :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{d}{dt} (a e^{i\varphi} R_{\Theta} \mathcal{V}) = \dot{a} e^{i\varphi} R_{\Theta} \mathcal{V} + i a \dot{\varphi} e^{i\varphi} R_{\Theta} \mathcal{V} + a e^{i\varphi} \dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} + a e^{i\varphi} R_{\Theta} \dot{\mathcal{V}} \\ &= (\dot{a} + i a \dot{\varphi}) e^{i\varphi} R_{\Theta} \mathcal{V} + a e^{i\varphi} (\dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} + R_{\Theta} \dot{\mathcal{V}})\end{aligned}$$

où le vecteur $\dot{\mathcal{V}}$ se réécrit :

$$\dot{\mathcal{V}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\chi} \begin{pmatrix} -\sin \chi(t) \\ -i \cos \chi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = i\dot{\chi} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \mathbb{O}_{n-2} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} := i\dot{\chi} J\mathcal{V}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} -\frac{\Im m \langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \Im m \left\langle ae^{i\varphi} R_{\Theta} \mathcal{V}, (\dot{a} + ia\dot{\varphi}) e^{i\varphi} R_{\Theta} \mathcal{V} + ae^{i\varphi} (\dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} + i\dot{\chi} R_{\Theta} J\mathcal{V}) \right\rangle \\ &= \dot{\varphi} + \Im m \left\langle R_{\Theta} \mathcal{V}, \dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} \right\rangle + \Im m \left(i\dot{\chi} \langle R_{\Theta} \mathcal{V}, R_{\Theta} J\mathcal{V} \rangle \right) \\ &= \dot{\varphi} + \Im m \left\langle R_{\Theta} \mathcal{V}, \dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} \right\rangle + \dot{\chi} \Re e \langle \mathcal{V}, J\mathcal{V} \rangle \end{aligned}$$

On montre, avec un calcul similaire à la démonstration de la ??, que le dernier terme est nul. Le deuxième terme, lui, se réécrit en fonction de la base canonique (e_i) de \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \left\langle R_{\Theta} \mathcal{V}, \dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} \right\rangle &= \left\langle R_{\Theta} (\cos \chi e_1 - i \sin \chi e_2), \dot{R}_{\Theta} (\cos \chi e_1 - i \sin \chi e_2) \right\rangle \\ &= \cos^2 \chi \left\langle R_{\Theta} e_1, \dot{R}_{\Theta} e_1 \right\rangle + \sin^2 \chi \left\langle R_{\Theta} e_2, \dot{R}_{\Theta} e_2 \right\rangle - i \cos \chi \sin \chi \left(\left\langle R_{\Theta} e_1, \dot{R}_{\Theta} e_2 \right\rangle - \left\langle R_{\Theta} e_2, \dot{R}_{\Theta} e_1 \right\rangle \right) \end{aligned}$$

Notons à présent que comme $R_{\Theta(t)} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$, la différentielle \dot{R}_{Θ} est à valeur dans le fibré tangent $T\text{SO}_n(\mathbb{R})$. Sachant que $T_{\Theta(t)}\text{SO}_n(\mathbb{R}) = R_{\Theta(t)}\mathcal{A}_n()$, la différentielle \dot{R}_{Θ} s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dot{R}_{\Theta(t)} \in T_{\Theta(t)}\text{SO}_n(\mathbb{R}) \iff \exists \tilde{R}_{\Theta(t)} \in \mathcal{A}_n() \mid \dot{R}_{\Theta(t)} = R_{\Theta(t)} \tilde{R}_{\Theta(t)}$$

Cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned} -\frac{\Im m \langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= \dot{\varphi} + \Im m \left\langle R_{\Theta} \mathcal{V}, \dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} \right\rangle = \dot{\varphi} - \cos \chi \sin \chi \left(\left\langle R_{\Theta} e_1, \dot{R}_{\Theta} e_2 \right\rangle - \left\langle R_{\Theta} e_2, \dot{R}_{\Theta} e_1 \right\rangle \right) \\ &= \dot{\varphi} - \frac{1}{2} \sin 2\chi \left(\left\langle e_1, \tilde{R}_{\Theta} e_2 \right\rangle - \left\langle {}^t \tilde{R}_{\Theta} e_2, e_1 \right\rangle \right) \\ &= \dot{\varphi} - \sin 2\chi \left\langle e_1, \tilde{R}_{\Theta} e_2 \right\rangle \\ &= \dot{\varphi} + \sin 2\chi \left\langle \tilde{R}_{\Theta} e_1, e_2 \right\rangle \end{aligned}$$

■

- Les quaternions ça se généralise trop mal (au dessus c'est les octinions, c'est un calvaire et ça va pas plus loin)
- Ça peut s'écrire en terme d'algèbre de Clifford (Lefevre [10])... pas dingue non plus (pb de dimension principalement)
- Les bases de $U(n)$ paraît être le meilleur choix mais on a pas de "bonne base" pour de plus haute dimension.
- question : est-ce qu'on en a besoin pour la phase géométrique ? (transi vers une formulation géo diff-like ?)

3.4 Plus de note (très OSEF)

3.4.1 Bivarié

- Avec la transformation :

$$\mathbf{x} \rightsquigarrow (e^{i\phi}, \mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger) \in U(1) \times \text{PC}^1 - ish$$

On a :

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 S_n(t) \sigma_n \quad \begin{cases} S_0(t) = {}^t\mathbf{x}\overline{\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|^2 \\ S_1(t) = S_0(t) \cos 2\chi(t) \cos 2\theta(t) \\ S_2(t) = S_0(t) \cos 2\chi(t) \sin 2\theta(t) \\ S_3(t) = S_0(t) \sin 2\chi(t) \end{cases}$$

- En version quaternion (\mathbf{j} fait office de i) [10] :

$$\mathbf{x}_+ = a(t) e^{i\theta} e^{-\mathbf{k}\chi} e^{\mathbf{j}\phi} \quad (3.9)$$

Et les Stokes parameters sont donnée par :

$$\mathbf{x}_+ \mathbf{j} \overline{\mathbf{x}_+} = S_0 + \mathbf{i} S_3 + \mathbf{j} S_1 + \mathbf{k} S_2$$

Et le lien avec les σ_i se fait via (mais du coup les notations colles par :/) :

$$(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \rightsquigarrow (1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$$

- Et en version matrice de Pauli :

$$\mathbf{x}_+ = a(t) e^{i\phi} e^{i\theta \sigma_2} e^{-i\chi \sigma_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Plus de détail :

On a un signal bivarié $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ qu'on transforme (voir ??) soit la forme :

$$\mathbf{x}_+(t) = \begin{pmatrix} x_+(t) \\ y_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) e^{i\phi_x(t)} \\ a_y(t) e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

À côté de ça, on a les ellipses modulées :

$$z(t) = e^{i\theta} (a(t) \cos \phi(t) + ib(t) \sin \phi(t)) = a(t) e^{i\theta} (\sin \chi(t) \cos \phi(t) + i \sin \chi(t) \sin \phi(t)) \in \mathbb{C}$$

Qui sous forme vectoriel se réécrit (**pourquoi ???**) :

$$z(t) = e^{i\phi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \end{pmatrix} = a(t) e^{i\phi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad R_\theta \in \text{SO}_2(\mathbb{R}) \quad (3.11)$$

Pour avoir la désinscription de \mathbf{x} en terme d'ellipse, il suffit donc de poser :⁹

$$\mathbf{x}_+(t) = z(t) \iff \begin{pmatrix} a_x(t) e^{i\phi_x(t)} \\ a_y(t) e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} = A(t) e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix}$$

Ensuite, on pose :

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ e^{i\phi_+} \\ a_- e^{i\phi_-} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_+ + iy_+ \\ x_+ - iy_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} 2\phi &= \phi_+ + \phi_- & a &= A \cos \chi = a_+ + a_- \\ 2\theta &= \phi_+ - \phi_- & b &= A \sin \chi = a_+ - a_- \end{aligned}$$

et on en déduit :

$$A = \sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2} \quad \begin{aligned} \cos \chi &= \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2}} \\ \sin \chi &= \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2}} \end{aligned}$$

⁹C'est la version analytique du la version vectorielle de l'ellipse !

Ce qui donne *in fine*(super oseb) :

$$\begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} = e^{i\frac{\phi_+ + \phi_-}{2}} R_{\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}} \begin{pmatrix} a_+ + a_- \\ -i(a_+ - a_-) \end{pmatrix}$$

L'??? ce généralise très bien, il suffit d'augmenter la taille de $R_\theta \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ et de lui donner le vecteur étendu :¹⁰

$$z_x(t) = \begin{pmatrix} x_{1+}(t) \\ \vdots \\ x_{n+}(t) \end{pmatrix} = e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A(t) e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant, la question est de savoir comment généraliser la transformation en (z_+, z_-) pour obtenir les paramètres $(A, \phi, R_\theta, \chi)$ dans ce cas...

Pour généraliser le procédé, on peut noter que :

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} U \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} \quad \text{avec } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \text{U}(2)$$

Ce qui ramène à se demander comment généraliser U à $\text{U}(n)$. Le problème est que U est indépendant de tout les paramètres $(A, \phi, R_\theta, \chi)$ et sa généralisation est vraiment pas évidente sachant qu'on que le formule avec $n = 2...$ et pour $n = 3$ ca devient déjà chaud (pour rappelle $\dim \text{SO}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ et donc $\theta \in \mathbb{R}^n$, ce qui rend le problème de pire en pire à mesure qu'on augmente n).

3.4.2 Trivarié

- Version de Lilly [11]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_+(t) &= e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a(t) e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\text{avec :} \quad R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc une amplitude / phase instantanée A / ϕ et une polarisation instantanée d'ellipse paramétrée par χ et orientée par la rotation $R_1 R_3 R_1$.

- On note d'abord que (Lefevre [10]) :

$$\begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \chi(t) & i \sin \chi(t) & 0 \\ -i \sin \chi(t) & \cos \chi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui, en terme de matrice de Gall-man (λ_i) (généralisation de la base de Pauli à $\text{U}(3)$), devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_+(t) &= a(t) e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a(t) e^{i\phi(t)} e^{i\alpha\lambda_7} e^{i\beta\lambda_3} e^{i\theta\lambda_7} e^{-i\chi\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¹⁰ Sachant que le vecteur contenant a et b est principalement nul, on peut réécrire le produit ne considérant que les deux premières colonnes de R_θ .

3.5 Mon blabla

PROPOSITION 4 — Les signaux bivariés se décrivent très simplement à l'aide des quaternions. En considérant $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la base canonique des quaternions \mathbb{H} , on peut voir ψ comme étant à valeur dans \mathbb{C}_j^n ($\mathbb{C}_j := \mathbb{R} \times \mathbf{j}\mathbb{R}$), de sorte que :

$$\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \exists a, \theta, \chi, \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \psi(t) = a(t)e^{\mathbf{i}\theta(t)}e^{-\mathbf{k}\chi(t)}e^{\mathbf{j}\varphi(t)}$$

Sous cette forme, les paramètres a et φ s'interprètent respectivement comme l'amplitude et la phase instantanée du signal. Les deux paramètres restant contrôlent l'ellipticité (χ) et l'orientation (θ) de l'ellipse de polarisation instantanée. C'est-à-dire l'ellipse que suit le signal à l'instant t .

Dit autrement, à tout instant t , $\psi(t)$ est vu comme un point d'une ellipse dont la taille est caractérisée par $a(t)$, l'ellipticité par $\chi(t)$ et l'orientation par $\theta(t)$. $\phi(t)$ permet lui de situer $\varphi(t)$ sur cette ellipse.

Le problème de cette représentation est qu'elle se généralise mal aux signaux plus que 2-variés et, à notre connaissance, il n'existe pas d'extensions des quaternions à de plus haute dimension. voir propositions 5 et 6, ????????

Il est évident que cette représentation est présente bien plus de paramètre que nécessaire, puisque deux devraient suffire. Pour autant, elle permet de mieux **je sais quoi mais c'est sur qu'il y'a une raison**. Si cette représentation se généralise mal parce qu'elle demanderait d'avoir une extension de \mathbb{H} , sont interprétations graphique, elle, se généralise très bien. Par exemple, en dimension 3, alors l'ellipse devient un ellipsoïde. L'amplitude reste de dimension 1 parce qu'elle ne fait que contrôler la taille de cet ellipsoïde, mais les autres paramètres eux doivent être de dimension 2. L'ellipsoïde a besoin de deux angles pour être orienté, possède deux degrés d'ellipticité et ces points sont déterminés par deux angles.

PROPOSITION 5 — Plus généralement, tout signal multivarié ψ est (*devrait être*) caractérisé par quatre paramètres (donc $1 + (n-1)(\frac{n}{2} - 2)$ scalaires) :

$$a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \quad \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/2, \pi/2]^{\frac{n(n-1)}{2}}) \quad \chi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/4, \pi/4]^{n-1}) \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi]^{n-1})$$

À bien y réfléchir, décrire un ellipsoïde dans l'espace, c'est exactement de que font les matrices symétriques définies positives. Donc on pourrait tout à fait remplacer les informations (a, θ, χ) par une matrice symétrique positive de dimension n . Il ne resterait alors plus que φ qui, de toute façon ne devrait pas trop être lié aux autres paramètres.

Enfin, sûrement que si parce que y'a un monde pour $\varphi = 0_{\mathbb{R}}^n$ et c'est le reste des paramètres qui fait le travail. Mais clairement c'est pas intéressant comme description. L'idée serait plutôt décrire le signal ψ en minimisant les variations de (a, θ, χ) . Ça appelle clairement à chercher que dans l'espace de Siegel mais pas seulement, parce que c'est pas juste des chemins chez Siegel qui nous intéressent.

Ou alors c'est le jeu de gauge qui fait qu'on tue φ ? auquel cas tout les jours Siegel.

BTW, les quaternions c'est fait pour décrire les rotations et c'est (quasiment) ce qu'on fait avec, donc aller chercher dans un espace de matrices pour généraliser le principe c'est pas déconnant. D'ailleurs, vu que c'est pas exactement ce qu'on fait avec, dans quelle mesure c'est pas le cas et est-ce qu'on exploite vraiment la structure des quaternions ?

PROPOSITION 6 — Autre approche : un signal multivarié étant moralement un chemin de \mathbb{R}^n , son graphe est une variété (plongée) de dimension 1. Sachant cela, si en chaque instant on veut définir l'ellipsoïde sur laquelle elle repose à un instant t , il est moral que cette ellipsoïde soit en fait une ellipse puisque c'est elle-même une variété de dimension 1.

Partant de là, on aurait toujours a , χ et ϕ pour la décrire et seulement θ gagnerait en dimension pour pouvoir orienter l'ellipse dans les n axes. ψ serait alors la donnée de $3 + \frac{n(n-1)}{2}$ paramètres :

$$a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \quad \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi]^{\frac{n(n-1)}{2}}) \quad \chi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/4, \pi/4]) \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi])$$

On aurait beaucoup moins de paramètre et c'est quand-même bien. En même temps ça paraît plus contraignant comme modèle. Pour comparer les deux, il faudrait voir comment les deux se décomposent

dans le cas d'un signal qui ne varierait sur une ellipsoïde fixe. *i.e.* dans un cas où θ, χ de la proposition 5 varie pas alors que ceux de la proposition 6 si.

IV — Vrac

4.1 Random stuff ready pour rédac (+labeled)

DÉFINITION 12 (SIGNAL MULTIVARIÉ) — Un *signal multivarié*, ou *n-varié*, est un vecteur composé de $n \in \mathbb{N}^*$ signaux x_i . Si $n = 2$, alors on parle de signal *bivarié*. Dans la continuité de ce qui à été dit dans la ??, dans le cas des signaux réels, on s'intéressera au vecteur composé des transformées en SA (eq. ??, déf. ??) des x_i . **Au moins dans toute cette ??**, un tel signal sera noté :

$$x_+(t) : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathcal{A}[x_1] \\ \mathcal{A}[x_2] \\ \vdots \\ \mathcal{A}[x_n] \end{pmatrix} \end{array}$$

On supposera que chaque composante x_i de \mathbf{x} aura autant de régularité et de condition d'intégrabilité que nécessaire (**il vaudra préciser lesquelles à un moment**).

DÉFINITION 13 — Ainsi, il reste tout un degré de liberté au produit $\langle x, \dot{x} \rangle$ même si $x \in \mathbb{S}^{2n}$. En intégrant ce degré de liberté supplémentaire, c'est-à-dire en tenant compte de son évolution sur la période $[t_0, t]$, l'on obtient ce qui est appeler le *phase dynamique* :

$$\Phi_{\text{dyn}} := \Phi_{\text{dyn}}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Im m \langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle ds$$

Elle dynamique en cela qu'elle est propre au variation de ψ et qu'elle considère tout l'évolution de ψ : ça dynamique.

DÉFINITION 14 (CONNEXION DE BERRY) — On appelle *connexion de Berry* le champ de forme linéaire :

$$\forall \psi \in \mathcal{M}, \quad A_\psi : \begin{array}{ccc} T_\psi \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & \Im m \langle \psi(s) | \phi(s) \rangle \end{array} \quad (3.13)$$

Elle a rien d'une connexion par contre :/

4.2 Bilan des formules

- (conservative) Équation Schrödinger et de Liouville-Von Neumann ($h(R)$: Hamiltonien des paramètres R , W : opérateurs statistique) [1, p.6] :

$$i \frac{dW(t)}{dt} = [h(R), W(t)] \quad [\cdot, \cdot] = \text{commutateur ?} \quad (3.14)$$

- Moment angulaire (viteuf) $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$M(t) = \Re e(iz\bar{z}') = -\Im m z\bar{z}' \quad \text{thoughts ?} \quad (3.15)$$

- qui est quelle phase
- mail à berthier pour les contraintes rapport
- modulo 2π ?
- *G. Feldman – Multivariate Analytic Signals and the Hilbert Transform*

TABLE DES FIGURES

1.1	Déviaton de la phase dynamique par rapport à la phase totale	8
1.2	Ellipse de polarisation d'un signal bivarié réel	9
1.3	Evolution de la phase géométrique d'un signal AM-FM-PM	10
1.4	Sphère de Poincaré, blablabla	11
1.5	Représentation des paramètres de polarisation instantanée associés à chaque point de la sphère de Poincaré.	11
2.1	La première figure de tout bon livre de géométrie différentielle	21
2.2	Ruban de Mobius comme variété fibrée	23
2.3	Représentation d'une section local	24
2.4	Représentation de la section canonique	24
2.5	Interprétation géométrique de la fréquence instantanée	29
2.6	Représentation des trois phases de γ dans le cas pseudo-cyclique	30
3.1	Schéma de Bohm [1] sur les trois phases	36

TABLE DES CODES

RÉFÉRENCES

- [1] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [2] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [3] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [4] F. FAURE, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).
- [5] J. FLAMANT, *Une approche générique pour l'analyse et le filtrage des signaux bivariés*, these de doctorat, Ecole centrale de Lille, Sept. 2018.
- [6] J. FLAMANT, N. LE BIHAN, AND P. CHAINAIS, *Time-frequency analysis of bivariate signals*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 46 (2019), pp. 351–383.
- [7] J. LAFONTAINE, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [8] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [9] ———, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.
- [10] J. LEFEVRE, *Polarization analysis and optimization geometry*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....] ; University of Melbourne, Dec. 2021.
- [11] J. M. LILLY, *Modulated Oscillations in Three Dimensions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 59 (2011), pp. 5930–5943.
- [12] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [13] J. E. MARSDEN AND T. S. RATIU, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, vol. 17 of Texts in Applied Mathematics, Springer New York, New York, NY, 1999.
- [14] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [15] ———, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. II. The Case of Unitary Group Representations*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 269–340.
- [16] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.