

# Mémoire de Stage de M2

## PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ... ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Pierre-Olivier AMBLARD, Julien FLAMANT & Michel  
BERTHIER

---

Master MIX – Université de La Rochelle

2024 – 2025

# TABLES DES MATIÈRES

Introduction & préambule . . . . .	1
<hr/>	
PARTIE I — INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE	3
<hr/>	
I — Introduction de la phase géométrique . . . . .	3
1.1 Un peu d'analyse temps-fréquence . . . . .	3
1.2 Phase et fréquence instantanée de signaux multivariés . . . . .	4
1.3 Apparition de la phase géométrique . . . . .	7
II — Première cas d'étude : les signaux AM-FM-PM . . . . .	8
2.1 Définitions et calcul des phases . . . . .	8
2.2 Interprétation sur la sphère de Poincaré . . . . .	10
2.3 Généralisation en plus haute dimension . . . . .	12
<hr/>	
PARTIE II — ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME	14
<hr/>	
I — Cadre d'étude . . . . .	14
1.1 $\mathbb{PC}^n$ vue comme variété différentielle . . . . .	14
1.1.1 Rappels de géométrie différentielle et notations . . . . .	14
1.1.2 $\mathbb{PC}^n$ , une variété complexe . . . . .	16
1.2 $\mathbb{S}^{2n+1}$ comme fibré principal . . . . .	17
1.2.1 Définition générale . . . . .	17
1.2.2 Le fibré $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{PC}^n)$ . . . . .	19
1.3 Connexion et relèvements horizontaux . . . . .	21
1.3.1 Définition générale . . . . .	21
1.3.2 Choix de connexion sur $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{PC}^n)$ . . . . .	23
II — Interprétation des phases sur $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{PC}^n)$ . . . . .	24
2.1 Fréquence instantanée et phase dynamique sur $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{PC}^n)$ . . . . .	24
2.2 Phase géométrique dans le cas cyclique . . . . .	25
2.2.1 ... du point de vue de la connexion . . . . .	25
2.2.2 ... du point de vue de la métrique . . . . .	27
2.3 Phase géométrique dans le cas le plus général . . . . .	27
2.3.1 Les géodésiques et leurs phases . . . . .	28
2.3.2 Phase géométrique dans le cas le plus général . . . . .	29
III — Conclusion . . . . .	29
<hr/>	
PARTIE III — APPLICATIONS ET GÉNÉRALISATION	31
<hr/>	
I — Calcul pratique de la phase géométrique . . . . .	31
II — Première application : ondes gravitationnelles . . . . .	32
III — Conclusion et perspectives . . . . .	33

<b>Annexes de la partie I</b>	<b>35</b>
Annexe A — Compléments sur l'analyse temps-fréquence	35
A.1. Formalisme derrière la transformée en SA ou le problème de signaux réels et comment le résoudre	35
A.2. Interprétabilité de la transformée en SA ou le lien avec le théorème de Bedrosian	37
Annexe B — Démonstrations de la proposition 1	38
B.1. Formule de la phase totale (1.16)	38
B.2. Formule de la phase dynamique (1.17)	39
<b>Annexes de la partie partie II</b>	<b>40</b>
Annexe A — * Variété différentielle complexe	40
Annexe B — Démonstration des résultats sous-section 2.2.2.	41
B.1. Formule pour $\Phi_{\text{geo}}$ sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$	41
B.2. Dérivation de $\Phi_{\text{geo}}$ en tant qu'aire de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$	42
B.3. * Idem que B.2. depuis $\mathbb{S}^n$ (plus simple, mais j'arrive à finir le calcul)	44
Annexe C — Géodésique de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$	45
C.1. Métrique relevée dans les espaces horizontaux	45
C.2. Ecriture des géodésiques.	45
<b>Table des figures &amp; références</b>	<b>46</b>

TO DO DE LA FIN :

- intro partie III & fin de la partie Bargmann
- préambule compréhensible + table des notations
- tikz fig. 2.7 (interprétaiton phased)
- refaire plot partie III
- 2 plot partie 1
- Nettoyage codes et GitHub

# INTRODUCTION

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui nécessite beaucoup de contexte pour être mis en évidence. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant  $t$  d'un signal multivarié complexe (*i.e.* à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$ )  $\mathbf{x}$  est donnée par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle - \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\mathbf{x}(t) \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{x}}(t) = e^{i\alpha(t)} \mathbf{x}(t)$$

Elle est également invariante par reparamétrisation et pour ces raisons, c'est une mesure qui est intrinsèquement liée à la trajectoire du signal dans l'espace, à sa géométrie.

La phase géométrique est un phénomène qui apparaît dans de nombreuses circonstances, en fonction desquelles elle peut changer de nom et de forme : phase de Pancharatnam, de Berry, d'Aharonov-Anandan, d'Aharonov-Bohm, angle de Hannay, *etc.*

Les articles [8, 27] en présentent quelques-unes et le livre “*Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*” [7] de Chruściński & Jamiołkowski en fait une description plus qu'extensive.

Du point de vue du traitement du signal en revanche, rien n'a été fait et ce n'est que récemment que Le Bihan, Flamant & Amblard s'y sont intéressés [20, 21]. L'objectif de ce mémoire est donc de décrire la phase géométrique dans le cadre du traitement du signal et de discuter de ses applications :

- Dans un premier temps (partie I), cette phase sera mise en évidence à travers des concepts d'analyse temps-fréquence, notamment la notion de fréquence instantanée qui sera présente tout au long de l'écrit. Suite à quoi elle sera explicitement calculée dans un cas particulier de signaux, déjà étudié par Le Bihan *et al.* [21] : les signaux AM-FM-PM. Cela permettra de mieux comprendre son comportement et permettra de motiver une description des signaux multivariés complexes dans l'esprit de l'analyse temps-fréquence.
- Cela mènera à travailler dans une variété dite fibrée principale,  $S^{2n-1}(\text{U}(1), \text{PC}^{n-1})$ , et la seconde partie de ce mémoire sera dédiée à son formalisme. Contrairement à l'état de l'art, les résultats seront présentés et, entre autres, l'accent sera mis sur l'intuition géométrique derrière les concepts abordés. Des résultats, connus par ailleurs, sur la phase géométrique seront redémontrés avec ce formalisme et avec, les notions de fréquences instantanées et de phase géométrique seront reformulées et réinterprétées.
- Enfin, dans une troisième partie, sera présenté un moyen de calculer la phase géométrique en pratique via l'invariant de Bargmann, tiré de [26] et déjà repris par Le Bihan *et al.* [21]. Suite à la phase géométrique de donnée simulées d'onde gravitationnelle sera calculer. Cela permettra, d'une part de montrer que la phase géométrique est bien une quantité mesurable en pratique, et d'autre part de donner des pistes d'applications à explorer dans la suite des travaux.

## \* PRÉAMBULE

*Juste des notes, même pas sur qu'il y ait vraiment besoin de garder ce préambule*

Généralités :

- Les références sont en fin de mémoire est en .bib sur le [GitHub](#)
- Idem pour les codes et un mot sur `pygeomphase`
- On va parler de géo diff et pour éviter de réécrire un livre, on va admettre beaucoup de résultats, on renvoi vers [19, 10] pour les bases et [24, 25, 2] pour toute ce qui est variété fibrée principales et variétés complexes.

Notations math :

- Convention sur le produit hermitien (conjugué à droite)
- les vecteurs seront en gras, leur dérivée en temps notée par un point (ex. :  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ ) et celle des scalaires seront noté par un prime (ex. :  $a'(t)$ )

---

## PARTIE I

---

### INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE

---

En traitement du signal, la phase d'un signal est intrinsèquement liée à la notion de fréquence instantanée, qui joue un rôle important en analyse temps-fréquence. C'est donc de ce point que commencera notre discussion pour introduire la phase géométrique. Pour cela, seront rapidement introduites quelques notions et résultats d'analyse temps-fréquence dans le cas univarié (sec. 1.1). Suite à quoi, une notion de phase instantanée sera proposée dans le cas multivarié (sec. 1.2), ce qui permettra, enfin, de mettre en évidence la phase géométrique (sec. 1.3).

Dans une seconde partie, seront introduits les signaux bivariés dits AM-FM-PM, dont la phase géométrique sera calculée explicitement (sec. 2.1), ce qui permettra de mettre en évidence certaines de ses propriétés (sec. 2.2). Dans une dernière section, sera présenté une généralisation des signaux AM-FM-PM au-delà du cas bivarié (sec. 2.3), ce qui mènera au formalisme de la partie II suivante.

## I — Introduction de la phase géométrique

### 1.1 Un peu d'analyse temps-fréquence

En traitement du signal, l'analyse fréquentielle par la transformée de Fourier est un incontournable. Seulement, cette transformation fait perdre toute notion temporelle : si l'étude du spectre du signal permet de dire quelles fréquences apparaissent dans le signal, elle ne permet pas de dire à quel(s) moment(s). C'est en réponse à cela, entre autres, que fut développée l'analyse temps-fréquence et, à cette fin, sont définis les paramètres instantanés d'un signal :

DÉFINITION 1 (PARAMÈTRES INSTANTANÉS) — Soit  $x$  un signal complexe écrit sous forme exponentielle :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & a(t)e^{i\phi(t)} \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \phi(t) \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

$a$  est appelé *amplitude instantanée* du signal, la dérivée  $\phi'/2\pi$  sa *fréquence instantanée* et sa *phase instantanée* est définie — modulo un choix de phase initiale — par :

$$\Phi_{\text{inst}}(x, t_0, t) = \phi(t) - \phi(t_0) \quad (1.2)$$

Pour les signaux réels, ces notions sont moins évidentes à définir puisqu'elles demandent d'écrire les signaux sous la forme :

$$x(t) = a(t) \cos \phi(t)$$

Auquel cas, le choix de la paire  $(a, \phi)$  n'est pas unique. Il existe tout de même un “bon” choix dans le cas

des signaux AM-FM :

DÉFINITION 2 (SIGNAL AM-FM) — Un signal réel de la forme :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a(t) \cos \phi(t) \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \quad (1.3)$$

est dit *AM-FM* (*amplitude and frequency modulated*) si  $a$  et  $\cos \phi$  admettent une transformée de Fourier et si, de plus, la première a un spectre concentré sur les basses fréquences, la seconde concentré sur les hautes fréquences et que les deux ne se chevauchent pas. Formellement, ces conditions demandent qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tel que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda] \quad (1.4)$$

Dans ce cas,  $a$  et  $\phi$  donnent lieu au même vocabulaire que pour le cas complexe (définition 1).

Ces conditions sont liées au théorème de Bedrosian, et plus de détails se trouvent dans l'annexe A. Pour le dire rapidement, exiger que toutes les hautes fréquences de  $x$  se trouvent dans la phase traduit l'idée que l'amplitude doit moduler la phase, et non l'inverse. Pour que ce soit possible, il est donc nécessaire que les variations de l'amplitude reste marginale par rapport à celle de la phase. Contrainte qui se traduit bien la condition (1.4) sur la distribution des spectres de  $a$  et  $\cos \phi$ .

Sous ces conditions,  $x$  peut être vu comme le signal complexe  $\mathcal{A}[x]$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} = a(t) \cos \phi(t) + ia(t) \sin \phi(t) \quad (1.5)$$

Ce signal  $\mathcal{A}[x]$  est appelé *transformée en signal analytique* de  $x$  et a, par construction, les mêmes paramètres instantanés que  $x$ . Là encore, le lecteur est renvoyé vers l'annexe A pour plus de détails ou bien dans le livre de Cohen [9].

L'intérêt d'introduire toutes ces notions est que les signaux multivariés — même complexes — souffrent du même problème que les signaux réels. En effet, en écrivant un signal  $\mathbf{x}$  sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix}$$

le fait que  $\mathbf{x}$  soit à valeur dans  $\mathbb{C}^n$  impose un choix naturel d'amplitude instantanée : sa norme. Pour ce qui est de la phase instantanée, en revanche, n'importe quel choix de  $\phi$  convient *a priori*. En écrivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} = a(t)e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\psi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\psi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\psi_n(t)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a(t) = \|\mathbf{x}(t)\|_2 \\ \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1 \\ \phi_i = \phi + \psi_i \end{cases}$$

il suffit que les  $\psi_i$  soient ajustés pour assurer que  $\phi_i = \phi + \psi_i$ .

Si  $a$  et  $\phi$  correspondent respectivement à une amplitude et une phase, le vecteur restant  $(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n}$  correspond à un état de polarisation, sur lequel nous reviendrons dans la section II suivante.

## 1.2 Phase et fréquence instantanée de signaux multivariés

On se propose ici de définir la phase instantanée comme suit :

DÉFINITION 3 (PHASE DYNAMIQUE/INSTANTANÉE) — La *phase instantanée* ou *dynamique* (à l'instant  $t$  partant de  $t_0$ ) d'un signal multivarié  $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ , est donnée par la formule :

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\text{dyn } \mathbf{x}}(t_0, t) := \int_{t_0}^t \frac{\Im m \langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi'_i(s) ds \quad (1.6)$$

On s'autorisera à omettre les paramètres de  $\Phi_{\text{dyn}}$  lorsque cela ne prête pas à confusion.

Cette définition est motivée par deux arguments :

### • Argument variationnel

Le premier, fortement inspiré par les travaux de Lilly & Olhede [22], consiste à généraliser la condition (1.4) de séparation hautes/basses fréquences sur les signaux AM-FM. Pour cela, on commence par faire apparaître une phase  $\phi$  — pour l'instant inconnue — en écrivant  $\mathbf{x}$  sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\phi(t)} e^{-i\phi(t)} \mathbf{x}(t) := e^{i\phi(t)} \mathbf{y}_\phi(t)$$

Si  $\phi$  est bien choisie, alors  $\mathbf{y}_\phi$  ne devrait contenir que les informations associées à l'amplitude et à la polarisation de  $\mathbf{x}$ . Or, conformément à la condition (1.4), la phase doit contenir les hautes fréquences du signal et, inversement, les basses fréquences doivent se trouver dans le reste.

La fréquence donnant, pour le dire vite, la vitesse d'ondulation, la contrainte sur  $\mathbf{x}$  va être de limiter les variations de  $\mathbf{y}_\phi$ . Concrètement,  $\phi$  doit être choisie de sorte à minimiser la dérivée  $\dot{\mathbf{y}}_\phi$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{y}}_\theta(t)\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|e^{-i\theta(t)} (\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t)\mathbf{x}(t))\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t)\mathbf{x}(t)\|_2^2$$

La contrainte ne dépendant que de la dérivée  $\theta'$ , on se ramène à :

$$\min_{\theta'(t)} \|\dot{\mathbf{y}}_\theta(t)\|_2^2 = \min_{\theta'(t)} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t)\mathbf{x}(t)\|_2^2$$

En rappelant que  $\frac{d}{dx} \|f(x)\|_2^2 = 2\Re e \langle f(x), f'(x) \rangle$ , il vient que l'unique minimum<sup>1</sup> est atteint par  $\phi'(t)$  à condition que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi'} \|\dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}\|_2^2 = 0 & \iff 0 = 2\Re e \left\langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}, \frac{d}{d\phi'} (\dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}) \right\rangle \\ & = 2\Re e \langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}, -i\mathbf{x} \rangle \\ & = 2\Re e \left( i \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle \right) + 2\phi' \Re e \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ & = -2\Im m \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle + 2\phi' \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi  $\phi' = \frac{\Im m \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$  et :

$$\phi(t) = \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Phi_{\text{dyn } \mathbf{x}}(t_0, t) \quad (1.7)$$

### • Arguments des moyennes

Le second argument, cette fois inspiré de [6], se base sur la notion de fréquence moyenne. D'abord dans le cas d'un signal complexe univarié, sont définies les fonctions de densités d'énergie (resp. d'énergie spectrale) comme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \rho : & t & \longmapsto |x(t)|^2 \end{array} \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \varrho : & \nu & \longmapsto |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array} \quad (1.8)$$

<sup>1</sup> L'extremum obtenu est l'unique minimum globale puisque  $t \mapsto \|at + b\|^2$  est strictement convexe pour  $a \neq 0$ .



À partir de ces dernières est définie la fréquence moyenne de  $x$  comme l'espérance  $\mathbb{E}_\varrho[\nu]$  de  $\varrho^2$ . Cette fréquence moyenne est liée à la fréquence instantanée par la formule<sup>3</sup> :

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \mathbb{E}_\rho \left[ \frac{1}{2\pi} \phi' \right] \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un signal  $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  multivarié, les densités d'énergies se définissent comme :

$$\begin{aligned} \rho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ & \varrho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto |x_i(t)|^2 = a(t)^2 a_i(t)^2 & \nu &\longmapsto |\hat{x}_i(\nu)|^2 \\ \\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ & \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \rho : \quad t &\longmapsto \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) & \varrho : \quad \nu &\longmapsto \|\hat{\mathbf{x}}(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varrho_i(t) \end{aligned}$$

Le second argument consiste alors à dire que l'égalité des moyennes (1.9) doit rester valable dans le cas multivarié. Cela assure, à minima, que la fréquence instantanée de  $\mathbf{x}$ ,  $1/2\pi\phi'$ , à pour moyenne  $\mathbb{E}_\varrho[\nu]$ .

En appliquant la formule (1.9) aux  $\varrho_i$ , et en notant toujours  $\mathbf{x} = a(a_1 e^{i\phi_1}, \dots, a_n e^{i\phi_n})$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \int_{\mathbb{R}} \nu \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) d\nu \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\varrho_i}[\nu] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'_i(t) \rho_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t)^2 \sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i(t)^2 dt \\ &= \mathbb{E}_\rho \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \phi'_i a_i^2 \right] \end{aligned}$$

Ce qui mène à poser  $\sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i^2(t)$  pour la fréquence instantanée, avec la phase associée :

$$\phi = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds \quad (1.10)$$

Formule qui concorde bien avec celle de la phase dynamique une fois explicitée :

$$\begin{aligned} \Im m \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} &= \Im m \left( \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n \left( (aa_i)'(t) + a(t) a_i(t) i \phi'_i(t) \right) e^{i\phi_i(t)} \overline{a(t) a_i(t) e^{i\phi_i(t)}} \right) \\ &= \frac{1}{a(t)^2} \Im m \left( \sum_{i=1}^n a(t) a_i(t) (aa_i)'(t) + i a(t)^2 a_i(t)^2 \phi'_i(t) \right) \\ &= \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t)^2 a_i(t)^2 \phi'_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(t)^2 \phi'_i(t) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>La notation avec l'espérance n'est pas complètement appropriée puisque  $\rho$  n'est pas une densité de probabilité (non normalisée). Cela dit, on peut supposer sans perte de généralité que  $\|\rho\|_2 = \|\varrho\|_2 = 1$  et, dans tous les cas, l'interprétation en terme de moyenne tient toujours.

<sup>3</sup>Cette formule de généralise à tous les moments de  $\varrho$  et existe également pour les moments de  $\rho$ , voir [9, sec. 1.4] pour une démonstration.

D'où

$$\Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_i(s)^2 \phi'_i(s) ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi'_i(s) ds$$

### 1.3 Apparition de la phase géométrique

Cela étant dit, il existe une autre façon, plus simple, d'obtenir la phase d'un signal. D'abord, dans le cas univarié, la phase instantanée de  $x = ae^{i\phi}$  peut être réécrite comme :

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \arg \left( x(t) \overline{x(t_0)} \right)$$

Formule qui se généralise en cas multivarié par ce qui sera appelé la *phase totale* du signal :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle \quad (1.11)$$

D'un point de vu géométrique, il est bien connu que le produit scalaire entre deux vecteurs réels  $u, v \in \mathbb{R}^n$  est lié à l'angle  $\angle(u, v)$  entre ces derniers par la formule :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = \|u\|^2 \|v\|^2 \cos \angle(u, v)$$

Pour le produit hermitien, cet angle se retrouve dans l'argument, de sorte que si  $u$  et  $v$  sont complexes :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \|u\|^2 \|v\|^2 e^{i\angle(u, v)}$$

En ce sens, la phase totale calcule explicitement l'angle entre  $\mathbf{x}(t_0)$  et  $\mathbf{x}(t)$  et il est montré, dans le cas univarié, qu'elle est égale à la phase dynamique. En effet, pour  $\mathbf{x} = ae^{i\phi}$  :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{dyn } \mathbf{x}} &= \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Im m \int_{t_0}^t \frac{(a'(s) + ia(s)\phi'(s))e^{i\phi(s)} \overline{a(s)}e^{i\phi(s)}}{a^2(s)} ds \\ &= \int_{t_0}^t \frac{a^2(s)\phi'(s)}{a^2(s)} ds \\ &= \phi(t) - \phi(t_0) = \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Dans le cas multivarié, en revanche, c'est une autre histoire. En notant cette fois le signal  $\mathbf{x} = ae^{i\Phi_{\text{dyn}}} (a_i e^{i\psi_i})_{1 \leq i \leq n}$ , la phase totale se réécrit :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \arg \left( a(t)a(t_0)e^{i(\Phi_{\text{dyn}}(t) - \Phi_{\text{dyn}}(t_0))} \sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \\ &= \Phi_{\text{dyn}}(t) + \arg \left( \sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \quad \text{car } \Phi_{\text{dyn}}(t_0, t_0) = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Apparaît alors un terme de déviation de la phase dynamique par rapport à la phase totale, appelé (surprise) phase géométrique et noté :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn } \mathbf{x}}(t_0, t) \quad (1.13)$$

Cette déviation s'observe expérimentalement, comme le montre la figure 1.1 ci-dessous.

Comme mentionné en introduction, un résultat bien connu en physique [5, 23, 7] est que cette troisième phase est invariante par transformation de jauge et par reparamétrisation. Dans notre contexte, cela signifie d'une part que si  $\mathbf{x}$  et  $\tilde{\mathbf{x}}$  sont deux signaux multivariés complexes tels que  $\tilde{\mathbf{x}} = e^{i\alpha} \mathbf{x}$ , avec  $\alpha$  une fonction dérivable du temps, alors :

$$\Phi_{\text{geo}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\tilde{\mathbf{x}}) - \Phi_{\text{dyn}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) = \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x})$$

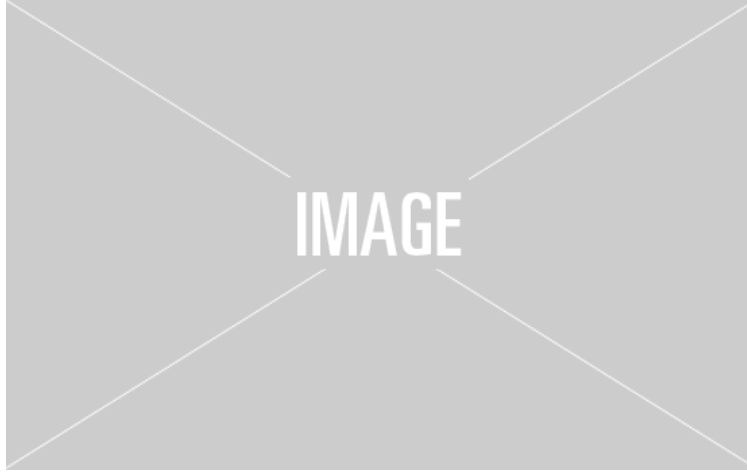


fig. 1.1 — Sur le graphe de gauche, le signal  $\mathbf{x}$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Dans celui de droite, le calcul des phases dynamique et totale de  $\mathcal{A}[\mathbf{x}]$ , ainsi que de leur différence.

Et d'autre part que, pour tout difféomorphisme  $\gamma$  de  $\mathbb{R}$  tel que :

$$\mathbf{x} \circ \gamma(s_0) = t_0 \qquad \mathbf{x} \circ \gamma(s) = t$$

on a :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x} \circ \gamma, s_0, s) = \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t)$$

D'un point de vue signal, cette invariance par transformation de jauge indique que  $\Phi_{\text{geo}}$  est lié à une notion de polarisation du signal, chose que nous allons à présent mettre en évidence à travers un exemple.

## II — Première cas d'étude : les signaux AM-FM-PM

Pour une première étude de la phase géométrique du signal, Le Bihan, Flamant & Amblard se sont penchés sur un cas particulier de signal bivarié [14, 20, 21]. Ces signaux, AM-FM-PM, sont présentés dans une première partie avec le calcul explicite de leur phases — totale, dynamique et géométrique — puis sera introduite la sphère de Poincaré, sur laquelle  $\Phi_{\text{geo}}$  pourra être interprétée. Cela mènera à proposer un modèle pour décrire les signaux multivariés complexes, modèle très largement inspiré par ce qui a déjà été fait dans l'étude de la phase géométrique.

### 2.1 Définitions et calcul des phases

Ces signaux AM-FM-PM viennent généraliser les signaux AM-FM univariés en tenant compte de l'état de polarisation permis par l'accès à une seconde dimension. En quelques mots, dans le cas le plus simple, un signal bivarié à valeurs *réelles*  $s$  décrit une ellipse au cours du temps. On parle de polarisation elliptique et  $s$  s'écrit :

$$s(t) = a \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \varphi(t) \\ \sin \chi \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}^+, \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \chi \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$$

Les paramètres  $a$  et  $\chi$  caractérisent respectivement la taille et l'excentricité de l'ellipse,  $\theta$  son orientation dans le plan et  $\varphi(t)$  précise où se trouve  $s$  à l'instant  $t$  sur cette ellipse. Le signe de  $\chi$  donne également le sens de rotation de  $\varphi$  sur l'ellipse (trigonométrique ou anti-trigonométrique), le tout est représenté sur la figure 1.2 ci-dessous :

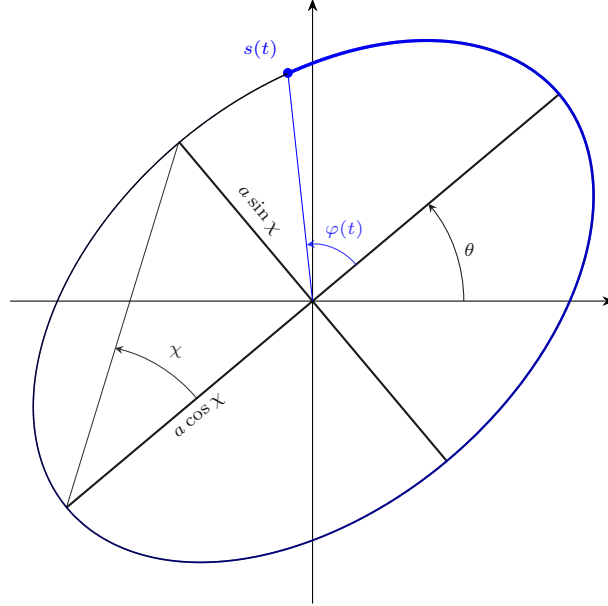


fig. 1.2 — Ellipse de polarisation du signal  $s$  sur laquelle sont représentés ses paramètres  $a, \varphi, \theta$  et  $\chi$ .

En autorisant les paramètres de polarisation à varier au cours du temps et après une transformation en signal analytique, mentionnée dans la section 1.1, on obtient la définition suivante :

**DÉFINITION 4 (SIGNAL AM-FM-PM)** — Un signal bivarié complexe  $\mathbf{x}$  *AM-FM-PM* (*amplitude, frequency and polarization modulated*) est caractérisé par quatre paramètres  $a, \varphi, \theta$  et  $\chi$ , respectivement à valeurs dans  $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ , vérifiant :

$$|\varphi'(t)| \gg |\theta'(t)|, |\chi'(t)|, \left| \frac{a'(t)}{a(t)} \right| \quad \left| \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \right| \gg 1 \quad (1.14)$$

Auquel cas,  $\mathbf{x}$  prend la forme,  $\forall t \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbf{x}(t) = a(t)e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

où  $R_{\theta(t)}$  est la matrice de rotation d'angle  $\theta(t)$ . Voir [13, ann. 4.B] pour une construction plus détaillée.

Jusqu'à présent, la phase géométrique n'a été étudiée que dans le cadre complexe et pour cette raison, il est nécessaire de passer par la transformée en signal analytique (*cf.* annexe section A). La transformation du signal à valeurs réelles en un signal à valeurs complexes est nécessaire pour étudier la phase géométrique car c'est uniquement dans le cadre complexe qu'elle a été étudiée jusqu'à présent. Et, comme pour les signaux AM-FM, les hypothèses sur  $a, \varphi, \theta, \chi$  assure que les paramètres restent interprétables suivant la figure 1.2 précédente.

Les trois phases de tels signaux sont données par la proposition 1 suivante :

**PROPOSITION 1 (PHASES DE SIGNAL AM-FM-PM)** — Les trois phases d'un signal bivarié AM-FM-PM  $\mathbf{x}$  de paramètres  $(a, \varphi, \theta, \chi)$  sont données par les formules :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arg \left( \cos \Delta \theta \cos \Delta \chi + i \sin \Delta \theta \sin (\chi(t_0) + \chi(t)) \right) \quad (1.16)$$

$$\Phi_{\text{dyn}} \mathbf{x}(t_0, t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \\ &= \arg \left( \cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin (\chi(t_0) + \chi(t)) \right) - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds\end{aligned}\quad (1.18)$$

où  $\Delta y = y(t) - y(t_0)$  pour  $y = \chi, \theta$ . La démonstration se trouve en annexe B.

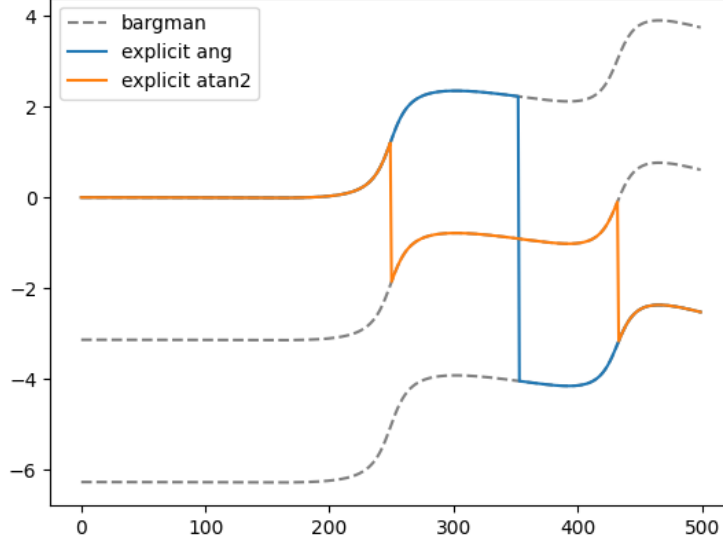


fig. 1.3 — Evolution de la phase géométrique d'un signal AM-FM-PM généré. En gris la phase géométrique du signal calculé via l'invariant de Bargmann (cf. partie III), fonction reprise des travaux de Le Bihan et al.[20, 21]. Les deux autres sont calculées avec la formule eq. (1.18), en bleu en utilisant de l'argument pour la phase totale et en orange en utilisant atan2. Les saut présents sur la figure sont dû au fait que la phase géométrique soit définie modulo  $2\pi$ .

Deux remarques sur ces formules. La première est que la phase géométrique ne dépend que des paramètres de polarisations  $\theta$  et  $\chi$ , ce qui reflète son invariance par transformation de jauge. La seconde, nettement plus troublante, est que  $\varphi$  ne s'interprète ni comme phase totale ni comme phase dynamique, un point qui sera expliqué dans la partie II.

Un moyen d'avoir cette interprétation est de supposer qu'à l'instant  $t$ ,  $\mathbf{x}$  retrouve la même polarisation instantanée qu'à l'instant  $t_0$ , auquel cas :

$$\begin{aligned}(\chi(t), \theta(t)) &= (\chi(t_0), \theta(t_0)) \implies \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \varphi(t) - \varphi(t_0) \\ &\implies \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds\end{aligned}\quad (1.19)$$

Même dans ce cas, il est utile de d'avoir une représentation de  $\mathbf{x}$  qui soit indépendante de sa phase pour interpréter cette formule (1.19).

## 2.2 Interprétation sur la sphère de Poincaré

Dans l'étude de la phase géométrique, il est standard de s'intéresser à la matrice de covariance<sup>4</sup> :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \rho_{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} \overline{\mathbf{x}(t)} \mathbf{x}^\top(t) \quad (1.20)$$

Outre son utilité en traitement du signal, elle présente l'avantage d'être invariante par transformation de

<sup>4</sup>Il est plus commun en physique de conjuguer à droite, mais la conjugaison à gauche simplifie l'interprétation de  $\rho$  dans la figure 1.4. Cela est également plus cohérent avec notre définition du produit hermitien qui utilise la convention  $\langle x, y \rangle = x^\top \bar{y}$ .

jauge (*i.e.*  $\rho_{e^{i\alpha}\mathbf{x}} = \rho_{\mathbf{x}}$ ). Aussi ces matrices sont connues [?] pour avoir pour base les matrices de Pauli  $\sigma_i$ , ce qui, dans le cas des signaux AM-FM-PM, donne [21] :

$$\rho_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \left( I + \sin(2\theta) \cos(2\chi) \sigma_1 + \sin(2\chi) \sigma_2 + \cos(2\theta) \cos(2\chi) \sigma_3 \right) \quad (1.21)$$

où les  $\sigma_i$  s'écrivent :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans cette décomposition, la composante en  $I$  est indépendante de  $\mathbf{x}$  et peut donc être ignorée (idem pour le facteur  $1/2$ ). Cela ne laisse qu'un vecteur (normé) de dimension 3 dont  $2\theta$  et  $2\chi$  correspondent aux coordonnées sphériques conformément à la figure 1.4 ci-contre.

La sphère alors obtenue, plus connue sous le nom de sphère de Poincaré, représente l'ensemble des états de polarisation possibles pour un signal :

À l'équateur, la polarisation est linéaire et  $\theta$  pilote son orientation ; plus  $\rho_{\mathbf{x}}$  se rapproche des pôles, plus cette polarisation devient elliptique, jusqu'à être complètement circulaire, auquel cas  $\theta$  devient insignifiant. Aussi, suivant le schéma fig. 1.2, l'hémisphère nord (resp. sud) correspond à des polarisations elliptiques anti-horaire (resp. horaire).

Le fait que ce soit le double des angles qui sont représentés tient naturellement compte des potentielles redondances dans les  $(\theta, \chi)$ . Par exemple si  $\mathbf{x}$  a pour paramètre de polarisation instantanée  $(\theta_0, \chi_0)$ , alors par symétrie de l'ellipse,  $(\theta_0 + \pi, \chi_0)$  est aussi une représentation valide. Autre exemple, si  $\chi_0 = \pi/4$ , alors la polarisation est circulaire et indépendante de  $\theta_0$ .

Dans les deux cas, la représentation dans la sphère de Poincaré évite ces problèmes puisque, dans le premier cas  $(2\theta_0, 2\chi_0)$  et  $(2\theta_0 + 2\pi, 2\chi_0)$  représentent le même point, et dans le second, le point associé à  $2\chi_0 = \pi/2$  (pôle nord) est indépendant du choix de  $\theta_0$ .

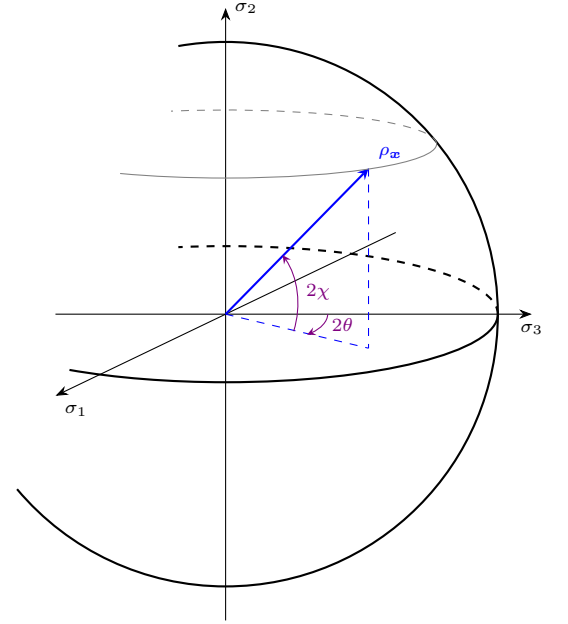


fig. 1.4 — Représentation de  $\rho_{\mathbf{x}}$  sur la sphère de Poincaré en fonction des paramètres  $\theta$  et  $\chi$ .

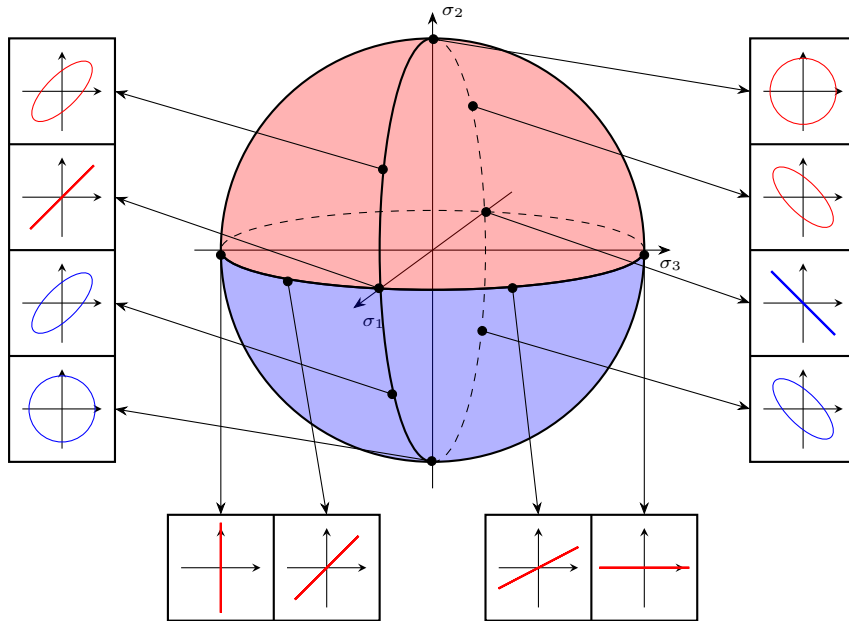


fig. 1.5 — Représentation des paramètres de polarisation instantanée associés à divers points de la sphère de Poincaré. La couleur donne le sens de parcours de l'ellipse lorsque  $\varphi$  varie : en rouge dans le sens trigonométrique et en bleu anti-trigonométrique. Dans les cas de polarisation linéaire, l'orientation n'a pas d'importance.

Pour interpréter la formule (1.19) de la phase géométrique prenons un exemple. Si  $\chi$  et  $\theta$  sont tels que :

$$\theta(t_0) = 0 \qquad \theta(t) = 2\pi \qquad \chi(s) = \chi_0$$

alors  $\rho_{\mathbf{x}}$  décrit un chemin horizontal sur la sphère,  $\rho_{\mathbf{x}}(t_0) = \rho_{\mathbf{x}}(t)$  et sa phase géométrique s'écrit<sup>5</sup> :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds = - \sin 2\chi_0 \int_{t_0}^t \theta'(s) ds \\ &= - \sin 2\chi_0 (\theta(t) - \theta(t_0)) \\ &= -2\pi \sin 2\chi_0 \end{aligned}$$

Cette dernière formule donne également, à  $2\pi$  près, l'aire de la calotte entourée par  $\rho_{\mathbf{x}}$ , à savoir :

$$\mathcal{Aire}(\chi_0) = 2\pi - 2\pi \sin(2\chi_0)$$

Pour être précis, pour tenir compte du fait que  $\mathbf{x}$  a fait une rotation complète, il est plus naturel de prendre comme phase totale :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + 2\pi$$

Auquel cas, la phase géométrique donne exactement l'aire de la calotte. Dans la même logique, si l'état de polarisation subit une rotation de  $n$  tours, alors  $\theta$  va de 0 à  $2n\pi$  et :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = 2n\pi - 2n\pi \sin(2\chi_0) = n\mathcal{Aire}(\chi_0)$$

Ainsi, même si  $\Phi_{\text{geo}}$  est définie modulo  $2\pi$ , le choix du représentant reste important pour mieux tenir compte de l'évolution de  $\rho_{\mathbf{x}}$  au cours du temps.

En revanche, l'aire totale de la sphère est de  $4\pi$ , donc l'aire de toute surface de  $S^2$  peut être vue comme étant définie modulo  $4\pi$ , ce qui n'est pas cohérent avec la phase géométrique, qui elle l'est à  $2\pi$  près. Pour résoudre ce problème apparent, il suffit de noter que, tandis que l'ellipse de polarisation de  $\mathbf{x}$  a fait un tour complet,  $\rho_{\mathbf{x}}$  en a effectué deux sur la sphère ( $2\theta(t) = 4\pi$ ). Pour qu'il n'en fasse qu'un, il faut faire varier  $\theta$  de 0 à  $\pi$ , auquel cas le terme de la phase géométrique hérité de la  $\Phi_{\text{tot}}$  vaut  $\pi$  et :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \pi - \pi \sin 2\chi_0 = \frac{1}{2} \mathcal{Aire}(\chi_0) \tag{1.22}$$

Dans ce cas, la phase géométrique s'interprète comme la demi-aire de la surface entourée par  $\rho_{\mathbf{x}}$ . Cela n'est, pour l'instant, valable que pour le cas particulier où  $\chi$  est constant mais il sera montré dans la partie II que cela se généralise très bien.

Cela étant dit, le fait que  $\rho_{\mathbf{x}}$  doive faire deux tours pour que  $(\theta, \chi)$  retourne à son état initial, met en évidence un problème quant à la paramétrisation de l'ellipse de polarisation.

Toujours à  $\chi$  fixé, si  $\theta$  se voit ajouter  $\pi$ , alors l'état de polarisation est le même, comme expliqué plutôt :  $\rho(\theta + \pi, \chi) = \rho(\theta, \chi)$ . En revanche, si l'on s'intéresse à un point particulier de l'ellipse, après une rotation de  $\pi$ , ce même point se retrouvera à l'opposé de là où il était auparavant. En d'autres termes, il a subi une rotation de  $\pi$  mais qui apparaît non plus dans l'état de polarisation  $\rho_{\mathbf{x}}$  mais dans la phase totale (eq. (1.22)).

## 2.3 Généralisation en plus haute dimension

En résumé. Pour étudier la phase géométrique d'un point de vue signal, il est utile de passer par des notions de paramètres instantanées. Comme l'a montré l'exemple des signaux AM-FM-PM, décomposer un signal en amplitude, phase, et état de polarisation donne un cadre propice à la description et l'interprétation

---

<sup>5</sup> On retrouve dans cette formule le fait que  $\Phi_{\text{geo}}$  est indépendant de la paramétrisation : le résultat est indépendant des évolutions de  $\theta$  sur  $]t_0, t[$ .

de la phase géométrique.

Généraliser cette décomposition en plus haute dimension revient alors à composer  $\mathbb{C}^n$  comme un produit de trois ensemble.

D’abord, en isolant l’amplitude, qui n’est pas très utile à notre propos,  $\mathbb{C}^n$  s’écrit :

$$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{+*} \times S^{2n-1}$$

avec  $S^{2n-1}$  la sphère unité de  $\mathbb{C}^n$  de dimension réel  $2n - 1$ .

Ensuite, la phase ( $e^{i\varphi}$  dans (1.15)) est un élément de  $U(1)$ , donc pour dissocier la phase de l’état de polarisation, il faudrait décomposer  $S^{2n-1}$  de sorte à le faire apparaître. À première vue, il faudrait écrire :

$$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{+*} \times U(1) \times (S^{2n-1}/U(1)) \quad (1.23)$$

où le quotient qui apparaît n’est autre que l’espace projectif complexe de dimension (complexe)  $n - 1$  et noté  $PC^{n-1}$  (dont la construction sera détaillée dans la partie II suivante).

Le problème de cette formule est qu’elle n’est pas juste en l’état. Plus précisément, elle n’est valable que localement. Corriger cela nécessite d’écrire  $S^{2n-1}$  non pas comme un produit de deux ensembles, mais comme un fibré, chose que nous nous attacherons à faire dans la suite de ce mémoire.

Avant d’y venir et pour motiver d’autant plus la décomposition (1.23), revenons sur le cas  $n = 2$ . Hopf a montré, en 1931 [16], que la sphère  $S^3$  s’écrit localement (toujours au sens des fibrés) comme le produit  $S^1 \times S^2$ . Le premier étant  $U(1)$  et le second diffeomorphe<sup>6</sup> au plan projectif complexe  $PC^1$ . Ainsi, l’écriture des signaux AM-FM-PM utilise, sans le dire, la “décomposition” (1.23), qui n’est alors qu’une généralisation du modèle utilisé plus tôt.

---

<sup>6</sup>Par le premier théorème d’isomorphisme, la projection  $p$  est équivalente à la projection canonique de  $\mathbb{C}^2$  sur  $PC^1$ , de sorte que  $\rho(\mathbb{C}^2) \cong S^2 \cong PC^1$ .



---

## PARTIE II

---

### ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME

---

Dans cette seconde partie, l'objectif est de décrire la phase géométrique dans son environnement naturel, les variétés fibrées principales. Cela se fera en deux temps.

D'abord,  $S^{2n-1}$  sera proprement décrite comme une variété fibrée. Ce faisant, les outils mis en jeu seront exposés avec détail, dans le but de simplifier la généralisation des résultats au cas non commutatif. Lequel sera abordé à la fin de ce mémoire.

Ensuite, des résultats sur la phase géométrique, déjà bien connus dans des cadres spécifiques<sup>7</sup> [3, 5, 23, 7] seront redémontrés dans un cadre plus général : celui de chemins quelconques de  $S^{2n-1}$ . Cela permettra de donner une nouvelle interprétation des outils géométriques en terme de signal.

Enfin, par souci de commodité, on se placera dans  $\mathbb{C}^{n+1}$  et l'on notera la sphère unité de ce dernier  $\mathbb{S}^n := S^{2n+1}$  ( $n$  ne correspond pas à la dimension de la sphère !).

## I — Cadre d'étude

Pour proprement poser le cadre, il nous faudra trois ingrédients :

1. D'abord, faire quelques rappels de géométrie différentielle, ne serait-ce que pour fixer les notations (*ss-sec.* 1.1.1), avec comme exemple le cas  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  (*ss-sec.* 1.1.2), qui sera utile plus loin.
2. Ensuite, seront définies les variétés fibrées principales, avec les outils de bases qui leurs sont associés (*ss-sec.* 1.2.1), puis  $U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n$  sera écrit comme tel (*ss-sec.* 1.2.2).
3. Enfin, il nous faudra définir une connexion sur ces fibrés, connexion qui sera, d'abord, définie de façon générale (*ss-sec.* 1.3.1), puis explicitée et interprétée dans le cas qui nous intéresse (*ss-sec.* 1.3.2).

### 1.1 $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ vue comme variété différentielle

#### 1.1.1 Rappels de géométrie différentielle et notations

Une variété différentielle se définit comme suit :

**DÉFINITION 5 (VARIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE)** — Une variété différentielle de classe  $C^k$  de dimension  $n$  est un espace topologique  $\mathcal{M}$  muni d'un *atlas*  $\{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$ , c'est-à-dire un ensemble finie de paires d'ouverts  $U_i \subset \mathcal{M}$  et d'applications  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

- les  $U_i$  forment un recouvrement de la variété :  $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathcal{M}$
- les  $\phi_i$  sont des homéomorphismes sur leurs images respectives  $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ .

---

<sup>7</sup> Généralement des systèmes quantiques soumis à l'équation de Schrödinger.

- si l'intersection  $U_i \cap U_j$  est non vide, alors  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}$  est un  $C^k$  difféomorphisme sur son image.

A travers  $\phi_i$ , à tout point  $x \in U_i$  sont associées des *coordonnées locales*  $(x^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$ , c'est-à-dire les coefficients de  $\phi_i(x)$  dans une base  $(e_\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Ces coordonnées sont dites locales car dépendantes du choix de la paire  $(U_i, \phi_i)$  et la composée  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}$  est vue comme un *changement de coordonnées*.

Dans toute la suite, tous les objets propres aux cartes seront indexés via l'alphabet latin  $(i, j, k)$  et les indices associés aux coordonnées locales par des lettres grecs  $(\mu, \nu, \alpha)$ .

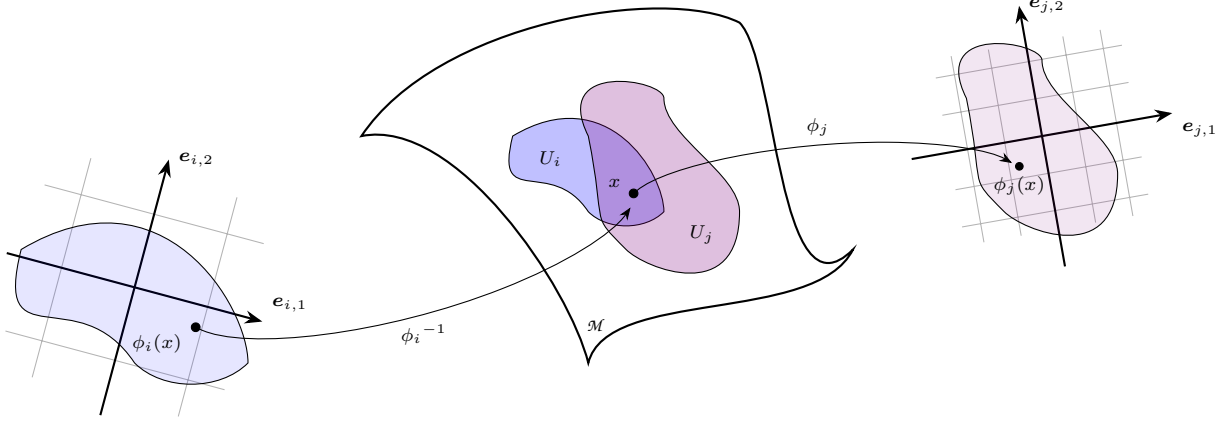


fig. 2.1 — La première figure de tout bon livre de géométrie différentielle : représentation de deux cartes avec l'application de changement de coordonnées. On y voit qu'à un point  $x$  peut être associé différentes coordonnées locales et que  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  permet de passer d'un repère à l'autre, i.e. d'un système de coordonnées à l'autre.

Ensuite, les *espaces tangents* de  $\mathcal{M}$  et son fibré tangent seront respectivement notés :

$$\forall x \in \mathcal{M}, T_x \mathcal{M} \quad \text{et} \quad T\mathcal{M} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} T_x \mathcal{M} \quad (2.1)$$

Pour le dire rapidement, les vecteurs tangents agissent comme une dérivation en cela que, pour un chemin  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ , la différentielle au point  $x = \gamma(0)$  est définie par l'application :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_x : \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \left. \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \right|_{t=0} := \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aussi, le système de coordonnées locales en  $x \in \mathcal{M}$  induit une base sur  $T_x \mathcal{M}$ , qui sera notée  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ . notation qui est justifiée en cela que, intuitivement,  $\partial_\mu$  dérive toute fonction test  $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{M}, \mathbb{R})$  dans le long de la  $\mu^{me}$  coordonnée (locale) de  $x$ .

Plus généralement, si  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  sont deux variétés différentielles et  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  une application différentiable avec  $\{\partial_\nu\}_\nu$  une base de  $T\mathcal{N}$ , sa *différentielle* (ou *application tangente* ou *push forward*) au point  $x$  est l'application linéaire qui, avec les conventions de sommation d'Einstein, s'écrit en coordonnées locales :

$$f_*(v) = f_*(v^\mu \partial_\mu) = \partial_\mu(f^\nu) v^\mu \tilde{\partial}_\nu \quad \text{ou encore} \quad (f_*)^\nu_\mu = \partial_\mu(f^\nu)$$

A partir de  $f_*$  est définie l'*image réciproque* ou *pull back* de  $f$ , qui correspond intuitivement à la transposée de  $f_*$  (dans ce cas,  $T^* \mathcal{M}$  est identifié à  $T\mathcal{M}$ ). Formellement elle est définie par dualité :

$$\begin{aligned} f^* : T^* \mathcal{N} &\longrightarrow T^* \mathcal{M} \\ g &\longmapsto g \circ f_* \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{M} & \xrightarrow{f_*} & T\mathcal{N} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^* \mathcal{M} & \xleftarrow{f^*} & T^* \mathcal{N} \end{array}$$

fig. 2.2 — Diagramme de passage de  $f$  à  $f_*$  et  $f^*$ .

où  $T^*\mathcal{M}$  est le fibré cotangent, constitué des espaces duaux aux espaces tangents :

$$T^*\mathcal{M} := \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} (T_x \mathcal{M})^*$$

### 1.1.2 $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ , une variété complexe

Si l'espace projectif complexe a été présenté comme le quotient  $\mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1)$ , il peut aussi être vu comme :

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^*$$

C'est-à-dire l'ensemble des classes de  $\mathbb{C}^{n+1*} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n+1}}\}$  par la relation d'équivalence :

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid x = \lambda y$$

En isolant la norme des vecteurs,  $\mathbb{C}^{n+1*}$  peut être vu comme le produit  $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^n$ , et de même pour  $\mathbb{C}^*$  avec le module :

$$\mathbb{C}^{n+1*} \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^n \qquad \mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathrm{U}(1)$$

Ainsi, le quotient par  $\mathbb{C}^*$  revient à regarder les vecteurs de  $\mathbb{C}^{n+1*}$  modulo leur norme, puis modulo l'action de  $\mathrm{U}(1)$ . Or, ignorer la norme des vecteurs est équivalent à ne regarder que les vecteurs normés, donc appartenant à  $\mathbb{S}^n$ . De façon informelle, on pourrait alors écrire<sup>8</sup> :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^* &\cong \mathbb{C}^{n+1*}/(\mathbb{R}^* \times \mathrm{U}(1)) \\ &\cong (\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{R}^*)/\mathrm{U}(1) \\ &\cong \mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1) = \mathbb{P}\mathbb{C}^n \end{aligned}$$

L'intérêt de cette écriture et que  $\mathbb{C}^{n+1}$  est un espace vectoriel, ce qui permet de décrire  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  en terme de carte [19, lemme 2.17, p. 64], [2, chap. 2], ce qui se fait comme suit. La classe de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  de représentant  $z = (z^i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1*}$  est notée  $[z]$  et on pose,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$U_i = \left\{ [z] \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n \mid z \in \mathbb{C}^{n+1}, z^i \neq 0 \right\} \qquad \phi_i : \begin{array}{ll} U_i & \longrightarrow \mathbb{C}^i \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-i} \cong \mathbb{C}^n \\ [z] & \longmapsto \frac{1}{z^i} z = (z^0/z^i, \dots, 1, \dots, z^n/z^i) \end{array} \quad (2.3)$$

*Si l'ensemble d'arrivée  $\phi_i(U_i)$  est équivalent à un ouvert de  $\mathbb{C}^n$  (l'une des composantes est constante), il est plus commode de travailler dans  $\mathbb{C}^{n+1}$  puisque cela évite de devoir enlever et rajouter des coefficients dans les formules de changement de cartes :*

$$\forall z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z^{i,j} \neq 0 \quad (\text{i.e. } [z] \in U_i \cap U_j), \quad \phi_i \circ \phi_j^{-1}(z) = \frac{z^j}{z^i} z$$

Les  $(U_i, \phi_i)$  forment un atlas sur l'espace projectif complexe, faisant de ce dernier une variété de dimension  $\dim = 2n$ . Les  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$  étant holomorphes,  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  est plus précisément une variété complexe de dimension complexe  $n$  et il est utile d'écrire ses coordonnées locales sous la forme  $(w^\mu, \bar{w}^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$ , où :

$$\forall w \in U_i, \forall \mu \neq i, \quad w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i}, \quad \text{où} \quad [z] = w$$

La construction des variétés complexes est légèrement différentes des variétés différentielles standards, aussi

<sup>8</sup>Ce qui s'écrit plus justement avec le troisième théorème d'isomorphisme :

$$\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{R}^{+*})/(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^{+*}) \cong \mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1) = \mathbb{P}\mathbb{C}^n$$

le lecteur est renvoyé vers [24, 2, 17] pour plus de détail. Pour aller à l'essentiel, même si la notation prête à confusion, il faut considérer les coordonnées  $w^\mu$  et  $\bar{w}^\mu$  comme complètement indépendantes. Par exemple :

$$\begin{aligned}\partial_\mu(w^\mu) &= \frac{\partial}{\partial w^\mu} w^\mu = 1 & \partial_{\bar{\mu}}(w^\mu) &= \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\mu} w^\mu = 0 \\ \partial_\mu(\bar{w}^\mu) &= \frac{\partial}{\partial w^\mu} \bar{w}^\mu = 0 & \partial_{\bar{\mu}}(\bar{w}^\mu) &= \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\mu} \bar{w}^\mu = 1\end{aligned}$$

Ce qui fait que  $(w^\mu, \bar{w}^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$  est bien une base de dimension réelle  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\mathbb{C}^n = 2n$ . Par exemple, avec ces “notations”, le fait qu’une fonction  $f : \mathbb{P}\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  soit holomorphe s’exprime via l’égalité :

$$\forall \mu \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (f_*)_{\bar{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\mu} f = 0$$

Pour ce qui est des espaces tangents,  $(\partial_\mu, \partial_{\bar{\mu}})_\mu$  forme une base de  $T\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  et  $(dw^\mu, d\bar{w}^\mu)_\mu$  une base de  $T^*\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ . Dans ce contexte, un champs de forme bilinéaire  $g$  (tenseur de type (0,2)) a quatre types de composantes :

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &= g(\partial_\mu, \partial_\nu) & g_{\mu\bar{\nu}} &= g(\partial_\mu, \partial_{\bar{\nu}}) \\ g_{\bar{\mu}\nu} &= g(\partial_{\bar{\mu}}, \partial_\nu) & g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} &= g(\partial_{\bar{\mu}}, \partial_{\bar{\nu}})\end{aligned}$$

L’espace projectif complexe, en particulier, admet un produit hermitien, la *métrique de Fubini-Study*, qui est donnée par [24, sec. 8.5], [2, chap. 4] :

$$\begin{aligned}\forall w \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_w \mathbb{P}\mathbb{C}^n, \quad g_w(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= g_{\mu\bar{\nu}} u^\mu \bar{v}^\nu = 2 \frac{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha) \delta_{\mu\nu} - w_\mu \bar{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} u^\mu \bar{v}^\nu \\ &= \frac{2}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} u^\mu \bar{v}_\mu - \frac{2w_\mu \bar{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} u^\mu \bar{v}^\nu\end{aligned} \quad (2.4)$$

À noter que seuls les coefficients  $g_{\mu\bar{\nu}}$  apparaissent. Cela est dû à la symétrie hermitienne de  $g$ , ce qui impose  $g_{\mu\nu} = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$  et  $g_{\bar{\mu}\nu} = \overline{g_{\mu\bar{\nu}}}$ .

Enfin, et ce sera important pour la suite,  $g$  induit sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  une forme symplectique – dite de Kähler – qui s’interprète comme l’élément d’aire sur la variété induite par  $g$  et qui s’écrit :

$$\Omega = \Omega_{\mu\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu = i g_{\mu\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu$$

Dans la définition de  $g$  (2.4), le coefficient peut varier. Par exemple, dans [24] il vaut 1 alors que dans [17] il vaut  $1/2\pi$ . Ici, il a été choisi de le prendre égal à 2, ce qui n’est pas usuel, mais qui sera nécessaire pour la suite (??). En quelques mots, c’est pour les mêmes raisons que, dans la partie I précédente, la sphère de Poincaré était paramétrée par les angles doubles  $(2\theta, 2\chi)$ .

## 1.2 $S^{2n+1}$ comme fibré principal

Cela étant, il est temps de définir proprement ce que l’on entend par “ $S^n$  est équivalent localement à  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n \times \mathbb{U}(1)$ ”.

### 1.2.1 Définition générale

Pour le dire simplement, les *variétés fibrées* sont des variétés qui ressemblent localement à des espaces produits. Le ruban de Möbius en est un exemple typique : il ne peut pas s’écrire comme le produit d’un cercle avec un segment  $S^1 \times [0, 1]$  à cause de la façon dont il est construit. Mais localement, une tranche du ruban est tout à fait comparable (*i.e.* difféomorphe) à un tel produit (*cf. fig. 2.3*).

Il existe tout un bestiaire de variétés fibrées en fonction de leurs propriétés et, parmi elles, celles qui vont nous intéresser sont dites principales :

DÉFINITION 6 (VARIÉTÉ FIBRÉE PRINCIPALE) — Une *variété fibrée principale* (VFP), ou *fibré principal* est constituée de deux variétés différentielles  $P$  et  $B$  telles que :

- Il existe un groupe de Lie  $G$  opérant à droite (ou à gauche) sur  $P$  via l'application différentiable :

$$R : \begin{array}{ccc} P \times G & \longrightarrow & P \\ (p, g) & \longmapsto & R_g(p) := p \cdot g = pg \end{array} \quad (2.5)$$

- Il existe une surjection différentiable  $\pi : P \longrightarrow B$  telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}(\pi(p)) = pG \quad (2.6)$$

- $P$  est munie d'un ensemble de paires  $(U_i, h_i)$  tel que les  $U_i$  forment un recouvrement de  $B$  et tel que les  $h_i : G \times U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset P$  soient des difféomorphismes vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \forall x \in B, \quad h_i(ab, x) = h_i(a, x) \cdot b \quad \text{et} \quad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

La variété  $B$  est appelée la *base* de la VFP,  $G$  son *groupe structural* et  $pG$  la *fibres* de  $P$  passant par  $p$  et au-dessus de  $\pi(p) \in B$ . Le tout est notée  $P(R, G, \pi, B)$  ou plus simplement  $P(G, B)$ .

Les fibres  $pG$  sont toutes difféomorphes à  $G$  et  $B$  est difféomorphe à  $P/G$ . Le diagramme commutatif ci-contre résume la situation ( $\text{pr}_2$  est la projection canonique sur la deuxième composante du produit cartésien).

$$\begin{array}{ccc} G \times U_i & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U_i) \subset P \\ \text{pr}_2 \downarrow & \swarrow \pi & \\ U_i & & \end{array}$$

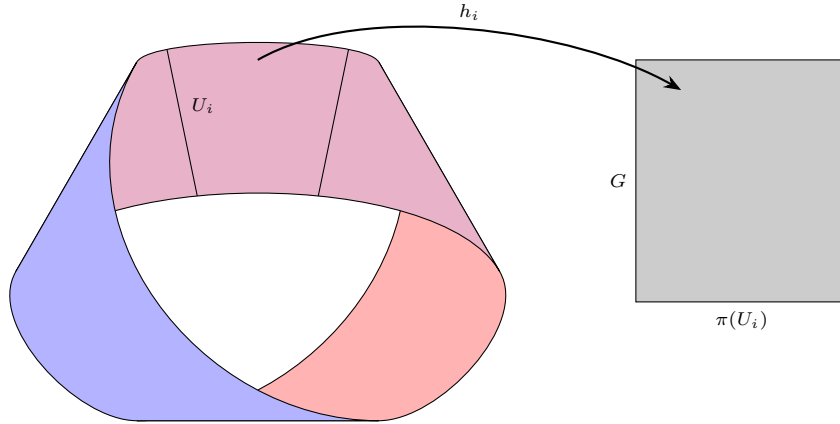


fig. 2.3 — Représentation du ruban de Möbius en tant que fibré. Les notations sont reprises de la définition 6.

L'ensemble  $\{(U_i \times G, h_i^{-1})\}_i$  est l'équivalent d'un atlas pour les variétés différentielles classiques mais adapté pour tenir compte de l'aspect fibré de  $P$  et de l'action de  $G$ . Expliciter les changements de cartes dans  $P$ , se fait comme suit.

D'abord,  $P$  étant localement difféomorphe à un produit  $G \times U_i$ , on peut y tracer des graphes appelés *sections locales*, comme sur les figures 2.4 et 2.5 ci-dessous. Formellement, une section locale au-dessus de  $U_i \subset B$  est une application  $\sigma : U_i \longrightarrow P$  vérifiant :

$$\pi \circ \sigma = \text{id}|_{U_i}$$

Ensuite, les hypothèses sur  $P(G, B)$  sont telles que  $G$  agit transitivement et librement (ou sans point fixe) sur  $P$ . C'est-à-dire que, sur une même fibre, tout point peut être atteint par n'importe quel autre via l'action de  $G$  (transitivité) :

$$\forall x \in B, \quad \forall p, q \in P_x, \quad \exists t(p, q) \in G \mid p = q \cdot t(p, q)$$

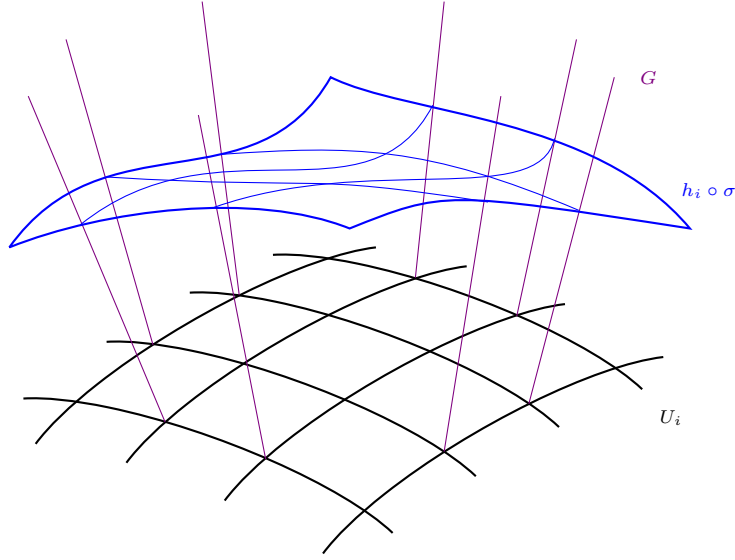


fig. 2.4 — Représentation d’une section locale  $\sigma$  au-dessus de  $U_i \subset B$  de dimension 2. Comme  $P$  n’est pas un produit à proprement parlé,  $\sigma$  est représenté dans  $G \times U_i$  à travers  $h_i$ .  
On voit ici l’idée derrière le nom “fibré” : de la base partent toutes les fibres, comme le feraient les fibres d’un tronc d’arbre et une section est littéralement une section, une coupe, de ces fibres.

et que la seule façon de laisser les points invariants par cette même action est de passer par l’élément neutre  $e$  (libre) :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad p = p \cdot g \implies g = e$$

De la transitivité de  $G$ , découle le fait que toutes les sections locales  $\sigma$  au-dessus de  $U_i$  peuvent s’écrire à partir d’une même section  $\sigma_i$  via la formule :

$$\forall x \in B, \quad \sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma(x))$$

Son caractère libre, lui assure l’unicité d’un choix canonique de section  $\sigma_i$  sur  $U_i$  :

$$h_i(x, e) = \sigma_i(x)$$

Cela mène à la définition :

DÉFINITION 7 (FONCTIONS DE TRANSITIONS) — À l’intersection entre deux cartes  $U_{ij} := U_i \cap U_j$ , le passage d’une section locale canonique à une autre se fait via :

$$\forall x \in U_{ij}, \quad \sigma_j(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma_j(x))$$

L’élément de  $G$ ,  $t(\sigma_i, \sigma_j)$ , qui permet de faire le changement, est alors appelé *fonction de transition* et sera noté  $\varphi_{ij}$ . Elle fait effectivement la transition entre les cartes  $h_i$  et  $h_j$  en cela que :

$$\forall (g, x) \in G \times U_{ij}, \quad h_i^{-1} \circ h_j(g, x) = (\varphi_{ij}(x)g, x)$$

### 1.2.2 Le fibré $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$

Dans ce travail,  $\mathbb{S}^n$  fait office d’espace total avec pour base  $\mathbf{PC}^n$  et pour groupe structural  $\mathbf{U}(1)$ . Pour obtenir la projection de  $\mathbb{S}^n$  sur  $\mathbf{PC}^n$ , il suffit de prendre la restriction de  $\pi$  à  $\mathbb{S}^n$ . En tenant compte de la normalisation, les coordonnées locales sur  $\mathbf{PC}^n$  se réécrivent,  $\forall w \in U_i$  :

$$w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i} = \frac{z^\mu}{|z^i|e^{i\arg(z^i)}} = \frac{z^\mu}{\sqrt{1 - \sum_{\nu \neq i} |z^\nu|^2}} e^{-i\arg(z^i)} \quad \text{car} \quad \sum |z^\nu|^2 = \|z\|^2 = 1$$

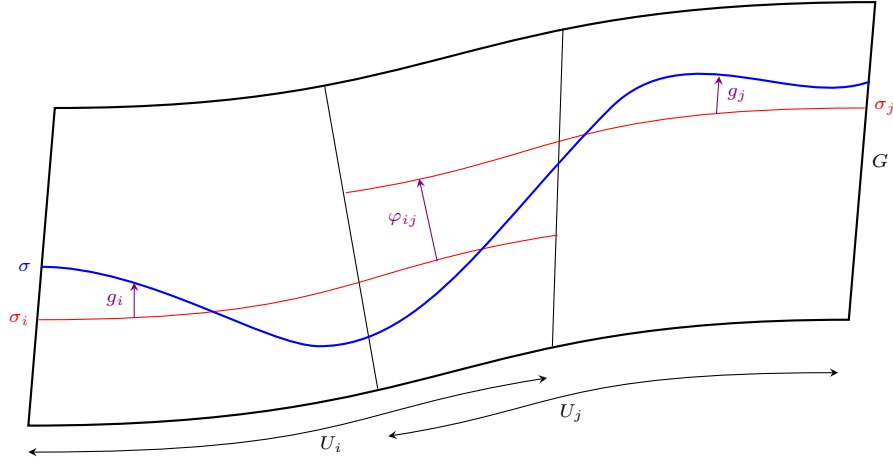


fig. 2.5 — Représentation de deux sections canoniques  $\sigma_{i,j} = h_{i,j}(e, \cdot)$  au dessus de deux cartes  $U_i$  et  $U_j$  avec la fonction de transition  $\varphi_{ij}$  (def. 7). Est également représentée une section  $\sigma$  quelconque avec les translations  $g_{i,j}$  telles que  $\sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot g_i(x) = \sigma_j(x) \cdot g_j(x)$ .

On constate bien que  $w^\mu$  n'est défini par rapport à  $z^\mu$  qu'à un choix de phase  $e^{-i \arg z^i} \in U(1)$  près. À l'inverse, un représentant  $z$  dans  $\mathbb{S}^n$  de  $w \in U_i$  aura pour coefficient :

$$\forall \mu \neq i, \quad z^\mu = \frac{w^\mu}{\|w\|} e^{i\theta} \quad z^i = \frac{1}{\|w\|} e^{i\theta}$$

La norme de  $w$  étant à comprendre au sens des coordonnées locales sur  $U_i$ <sup>9</sup> :

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|(w^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}\|^2 = \frac{1}{|z^i|^2} \sum_{\nu \neq i} |z^\nu|^2 = \frac{1 - |z^i|^2}{|z^i|^2} \iff |z^i|^2 \|w\|^2 = 1 - |z^i|^2 \\ &\iff |z^i|^2 = \frac{1}{1 + \|w\|^2} \\ &\iff |z^i| = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} \end{aligned}$$

D'où l'expression des coefficients de  $z \in \mathbb{S}^n$  :

$$\forall \mu \neq i, \quad z^\mu = \frac{w^\mu}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta} \quad z^i = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta}$$

Tout cela permet d'écrire  $\mathbb{S}^n$  comme une variété fibrée principale :

**PROPOSITION 2** — La  $(2n+1)$ -sphère  $\mathbb{S}^n$ , vue comme variété plongée dans  $\mathbb{C}^n$  est une VFP de base  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  et de fibre type  $U(1)$ . L'action de  $U(1)$  sur  $\mathbb{S}^n$  est induite par la multiplication par un scalaire complexe et où :

- La fibration  $\pi$  est la projection canonique de  $\mathbb{S}^n$  sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  :

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}\mathbb{C}^n \\ z & \longmapsto & [z] \end{array} \quad (2.7)$$

- Les cartes locales  $h_i$  s'écrivent :

$$\forall w \in U_i, \quad \forall e^{i\theta} \in U(1), \quad h_i(w, e^{i\theta}) = \frac{(w^0, \dots, 1, \dots, w^n)}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta} \in \mathbb{S}^n \quad (2.8)$$

<sup>9</sup> C'est un abus de notation,  $w$  n'a pas de norme en ce sens là puisqu'elle dépend du choix de carte  $U_i$ . Mais ici tout le raisonnement est purement local, donc ce n'est pas un problème.

- Les sections canoniques  $\sigma_i$  au-dessus des  $U_i$ , elles, sont définies par :

$$\forall w \in U_i, \sigma_i(w) = h_i(w, 1) = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}}(w^0, \dots, 1, \dots, w^n) \quad (2.9)$$

- Les fonctions de transitions entre deux cartes  $U_i$  et  $U_j$  s'écrivent :

$$\varphi_{ij}(w) = e^{-i \arg(z_i^i)} e^{i \arg(z_j^j)} \quad \text{où} \quad z_{i,j} = \phi_{i,j}(w) \quad (2.10)$$

Le cadre étant pleinement posé, il nous faut maintenant munir  $\mathbb{S}^n$  d'une connexion.

### 1.3 Connexion et relèvements horizontaux

La structure en fibrée principale de  $\mathbb{S}^n$  pose, des difficultés quant à l'interprétation de la phase dynamique, chose qui sera mise en évidence dans la section 2.1. Afin de les surmonter, il est nécessaire de munir  $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$  d'une connexion.

#### 1.3.1 Définition générale

Comme  $P$  ressemble localement à un produit  $G \times U_i$ , il est utile de séparer ses espaces tangents  $T_p P$  comme une somme directe d'espaces tangents respectivement aux fibres et à la base. Conformément aux représentations précédentes (fig. 2.3 à 2.5), les premiers sont appelées espaces tangents *verticaux*, les seconds *horizontaux* et l'on note :

$$\forall p \in P, \quad T_p P = V_p P \oplus H_p P$$

Les tangents verticaux  $V_p P$  se définissent canoniquement via  $\pi$ , en tant que noyau de sa différentielle :

$$V_p P := \mathrm{Ker}(T_p \pi) = \{v \in T_p P \mid T_p \pi(v) = 0\}$$

Ce n'est en revanche pas le cas des espaces horizontaux. Il faut donc faire un choix pour les  $H_p P$  et c'est ce choix qui est appelé *connexion* (elle connecte les espaces tangents entre eux). Comme pour les verticaux, ces sous-espaces peuvent être caractérisés par une 1-forme différentielle  $\omega$  sur  $P$  à valeur dans  $VP$ , auquel cas :

$$\forall p \in P, \quad H_p P = \mathrm{Ker}(\omega_p)$$

Dans le cas des VFP, une connexion doit en plus avoir de bonnes propriétés au regard de l'action de  $G$  sur  $P$ , aboutissant à la définition :

**DÉFINITION 8 (CONNEXION SUR VFP)** — Une *connexion* sur une VFP  $P(G, B)$  est la donnée d'un sous-espace tangent,  $H_p P \subset T_p P$ , en tout point de  $p \in P$  tel que :

- $H_p P$  dépend différentiellement de  $p$  ("dépendre différentiellement" à un sens précis pour les sous-espaces mais qui ne sera pas utile pour la suite).
- $H_p P$  est supplémentaire à  $V_p P$  dans  $T_p P$  :

$$T_p P = V_p P \oplus H_p P \quad (2.11)$$

- l'assignation des  $H_p P$  est invariante par l'action de  $G$  au sens où :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad H_{R_g(p)} P = R_{g*}(H_p P) = \{R_{g*}(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in H_p P\} \quad (2.12)$$

Que l'on notera plus simplement :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad H_{p \cdot g} P = H_p P \cdot g = \{\mathbf{v} \cdot g \mid \mathbf{v} \in H_p P\} \quad (2.13)$$



Au-delà d'assurer une compatibilité entre  $H$  et  $G$ , l'équation (2.12) permet de n'avoir à définir la connexion qu'en un seul point de chaque fibre, les autres se déduisant par cette formule. Concrètement, pour tout point de la base  $x \in U_i$ , il suffit de la définir en  $\sigma_i(x) = h_i(e, x)$ , de sorte que l'espace horizontal en tout autre point  $p = h_i(g, x) = \sigma_i(x) \cdot g$  au-dessus de  $x$  sera donné par :

$$H_p P = H_{\sigma_i(x)} P \cdot g$$

Aussi, le fait que  $G$  soit un groupe de Lie permet de lier son algèbre  $\mathfrak{g} \cong T_e G$  aux tangents verticaux via l'application  $\#$  : <sup>10</sup>

$$\forall (p, A) \in P \times \mathfrak{g}, \forall f \in \mathcal{C}(P, \mathbb{R}), \quad A^\#(p) = \left. \frac{d}{dt} p \cdot \exp(tA) \right|_{t=0} \in V_p P \quad (2.14)$$

Sachant cela, toujours dans le cas des VFP, la 1-forme de connexion est à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  :

**DÉFINITION 9 (1-FORME DE CONNEXION)** — La 1-forme de connexion  $\omega$  d'une VFP  $P(G, B)$  est définie comme la 1-forme différentielle sur  $P$  à valeurs dans  $\mathfrak{g}$  (i.e. en tout point  $p \in P$ ,  $\omega_p$  est à valeurs de  $T_p P$  dans  $\mathfrak{g}$ ), telle que  $\forall p \in P$  :

$$\forall A \in \mathfrak{g}, \omega_p(A^\#(p)) = A \quad H_p P = \text{Ker}(\omega_p) \quad (2.15)$$

$$\forall \mathbf{v} \in T_p P, \quad \omega_{p \cdot g}(\mathbf{v} \cdot g) := \omega_{p \cdot g}(R_{g*}(\mathbf{v})) = g^{-1} \omega_p(\mathbf{v}) g \quad (2.16)$$

Tout comme les  $H_p P$ , la troisième égalité assure que  $\omega$  n'a besoin d'être définie que sur un point de chaque fibre. Cela permet de définir  $\omega$  localement non pas sur  $U_i \times G$ , mais seulement sur  $U_i \cong U_i \times \{e\}$ . Ainsi,  $\omega$  induit une 1-forme sur les cartes  $U_i$  par l'image réciproque des sections canoniques  $\sigma_i$ . Elles sont notées  $\mathcal{A}_i := \sigma_i^* \omega$  et sur le chevauchement  $U_i \cap U_j$ , elles vérifient :

$$\mathcal{A}_j = \varphi_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \varphi_{ij} + \varphi_{ij}^{-1} d\varphi_{ij} \quad (2.17)$$

Munir  $P(G, B)$  d'une connexion permet, entre autre de définir la notion de relèvement horizontal :

**DÉFINITION 10 (RELÈVEMENT HORIZONTAL)** — Étant donné une trajectoire  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow B$  sur la base et un point  $\gamma_0 \in \rho(0)G$  au-dessus de  $\rho(0)$ , il existe un unique relèvement  $\gamma$  de  $\rho$  dont les vecteurs tangents sont tous horizontaux. i.e. tel que  $\forall t \in \mathbb{R}$  :

$$\pi \circ \gamma(t) = \rho(t) \quad \dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)} P \quad \gamma(0) = \gamma_0 \quad (2.18)$$

On parle de *relèvement horizontal* (*horizontal lift*, ou *transport parallèle* de  $\gamma_0$  le long de  $\rho$ ) puisque  $\gamma$  n'a pas de déplacement vertical au sens de la connexion. Du point de vue de la 1-forme  $\omega$ , si  $\gamma$  s'écrit localement  $\gamma_i = \sigma_i(\rho)g_i$ , alors  $g_i$  vérifie l'équation (d'où vient l'unicité du relèvement) :

$$\frac{d}{dt} g_i(t) = -\mathcal{A}_i \rho(t) \cdot g_i(t) \quad (2.19)$$

Si maintenant  $\gamma$  est une trajectoire de  $P$ , on dira, par abus de langage, que  $\tilde{\gamma}$  est le relèvement horizontal de  $\gamma$  si c'est le relèvement horizontal de sa projection  $\pi \circ \gamma$  avec la condition initiale  $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$ .

Pour la suite, il sera utile d'avoir l'expression d'une trajectoire  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow P$  par rapport à son relèvement horizontal  $\tilde{\gamma}$ . Pour l'obtenir, on note  $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot g$ , de sorte que sa dérivée s'écrit :

$$\dot{\gamma} = \dot{\tilde{\gamma}} \cdot g + \tilde{\gamma} \cdot dg = \dot{\tilde{\gamma}} \cdot g + \gamma \cdot g^{-1} dg$$

<sup>10</sup> Les vecteurs tangents étant des formes linéaires,  $A^\#(p)$  est plus exactement définie par l'application :

$$A^\#(p) : f \mapsto \left. \frac{d}{dt} f(p \cdot \exp(tA)) \right|_{t=0}$$

Ce à quoi, appliquer  $\omega$  donne :

$$\begin{aligned}\omega_\gamma(\dot{\gamma}) &= \omega_\gamma(\dot{\tilde{\gamma}} \cdot g) + \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) \\ &= g^{-1}\omega_{\tilde{\gamma}}(\dot{\tilde{\gamma}})g + \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) && \text{d'après (2.16)} \\ &= \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) && \text{car } \tilde{\gamma} \text{ est horizontale}\end{aligned}$$

Le terme  $g^{-1}dg$  restant étant un vecteur de  $g^{-1}T_gG \cong T_eG \cong \mathfrak{g}$  et :

$$\omega_\gamma(\dot{\gamma}) = \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) = \omega_\gamma((g^{-1}dg)^\#(p)) = g^{-1}dg$$

D'où  $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot g$  avec  $g$  solution de :

$$\frac{d}{dt}g(t) = g(t)\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \quad (2.20)$$

Formule qui s'avèrera être intimement liée à la phase dynamique de  $\gamma$ .

### 1.3.2 Choix de connexion sur $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$

Dans le cas de  $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$ , la métrique sur  $\mathbb{S}^n$  induit naturellement un choix de connexion car la projection  $\pi$  est une submersion dite riemannienne [18]. Formellement, c'est dire que la projection de  $\mathbb{S}^n$  sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  est telle que<sup>11</sup> :

$$\forall p \in \pi^{-1}(w), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n, \quad \frac{1}{2}g_{\pi(p)}(\pi_*\mathbf{u}, \pi_*\mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}_H, \mathbf{v}_H \rangle \quad (2.21)$$

où  $g$  est la partie réelle<sup>12</sup> de la métrique hermitienne de Fubini-Study. Plus concrètement, les espaces tangents de  $\mathbb{S}^n$  s'écrivent :

$$T_p\mathbb{S}^n = \mathrm{Vec}\{p\}^\perp := \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \Re\langle \mathbf{v}, p \rangle = 0\}$$

et sachant que  $\mathbf{i}p \in \mathrm{Vec}\{p\}^\perp$ , ils se séparent en deux composantes orthogonales :

$$T_p\mathbb{S}^n = \mathrm{Vec}\{p\}^\perp = \mathrm{Vec}\{\mathbf{i}p\} \oplus \mathrm{Vec}\{\mathbf{i}p\}^\perp$$

Ainsi, la nature de  $\pi$  (2.21) est telle que le premier membre est l'espace tangent vertical à  $p$  et le second invariant par l'action de  $\mathrm{U}(1)$  :

$$\forall e^{\mathbf{i}\theta} \in \mathrm{U}(1), \quad \mathrm{Vec}\{\mathbf{i}(e^{\mathbf{i}\theta}p)\}^\perp = \mathrm{Vec}\{\mathbf{i}p\}^\perp$$

Ce qui permet de poser  $H_p\mathbb{S}^n := \mathrm{Vec}\{\mathbf{i}p\}^\perp$  et donne directement la 1-forme associée :

$$\begin{aligned}H_p\mathbb{S}^n &= \{\mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n \mid \Re\langle \mathbf{v}, \mathbf{i}p \rangle = 0\} \\ &= \{\mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n \mid \Im\langle \mathbf{v}, p \rangle = 0\} && \iff \omega_p(\mathbf{v}) = \Im m\langle \mathbf{v}, p \rangle\end{aligned}$$

Enfin, comme l'algèbre de Lie de  $\mathrm{U}(1)$  est  $\mathfrak{u}(1) \cong \mathbf{i}\mathbb{R}$ , il convient de de poser :

$$\forall p \in \mathbb{S}^n, \forall \mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n, \quad \omega_p(\mathbf{v}) := \mathbf{i}\Im m\langle \mathbf{v}, p \rangle \quad (2.22)$$

Un tel choix de connexion n'est pas anodin d'un point de vue signal puisque  $\omega$  donne la fréquence instantanée telle que définie dans la partie I précédente. Son intérêt dans l'étude de la phase géométrique était déjà bien connue et porte généralement le nom de *connexion de Aharonov-Anandan* [5, sec. 4.2]. En revanche, le fait qu'elle soit induite par la métrique est bien moins connue et, à notre connaissance, seuls Mukunda & Simon en font mention [23], même s'ils n'évoquent pas la métrique de Fubini-Study.

Reste alors une question : pourquoi la fréquence instantanée apparaît ici et comment le comprendre en terme de signal ?

<sup>11</sup> Le facteur  $1/2$  est hérité du choix de définition de la métrique de Fubini-Study, expliqué plus tôt (ss-sec. 1.1.2)

<sup>12</sup> Cette métrique induite ne peut pas être hermitienne car  $\mathbb{S}^n$  n'est pas une variété complexe.

## II — Interprétation des phases sur $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$

Dans cette partie se trouve le gros des contributions de ce mémoire. Il y est présenté une interprétation de la phase dynamique et expliqué pourquoi elle doit être décrite par rapport à une connexion sur  $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$ .

Ensuite, sont présentés des résultats au sujet de  $\Phi_{\text{geo}}$ , aboutissant à ses interprétations sur  $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$ . Ces résultats, déjà bien connu, sont revus et redémontrés dans un cadre unifié.

Entre autre, la métrique de Fubini-Study et son lien avec la connexion d’Aharonov-Bohm n’a, à notre connaissance, jamais été pleinement explicité dans l’étude de la phase géométrique. Si Mukunda & Simon font bien mention du fait que cette connexion est induite par sa métrique de  $\mathbb{S}^n$ , ils ne font en revanche pas le lien avec celle de  $\mathbf{PC}^n$ .

À l’inverse, d’autres [24, 12] citent la connexion de Fubini-Study, mais sans clairement faire le lien avec la phase géométrique.

Enfin, tout au long de cette partie, sera fait le lien entre le formalisme géométrique sur  $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$  et le modèle AM-FM-PM, mettant en évidence une des limites de ce dernier.

### 2.1 Fréquence instantanée et phase dynamique sur $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$

Pour y apporter une réponse, on se propose de prendre le problème par l’autre bout : comment définir la notion de fréquence instantanée d’un signal dans le fibré  $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$  ?

Comme, à chaque instant  $t$ , un signal  $\gamma$  sur  $\mathbb{S}^n$  est représenté par une paire  $(e^{i\alpha(t)}, \rho(t)) \in \mathbf{U}(1) \times \mathbf{PC}^n$  à travers les  $h_i$ , il serait tentant de voir  $\alpha(t)$  comme la fréquence du signal et  $\rho(t)$  comme son état de polarisation.

Le problème de cette représentation est qu’elle dépend du choix de carte  $U_i$ , ainsi sur l’intersection  $U_{ij}$ ,  $\gamma$  aurait (au moins) deux notions de fréquence instantanée.

C’est là qu’intervient la connexion. D’une part, la 1-forme  $\omega$  associée est définie globalement sur le fibré, autrement dit, elle est indépendante des représentations locales de  $\gamma$ .

D’autre part, le relèvement horizontal  $\tilde{\gamma}$  d’une courbe  $\rho \subset \mathbf{PC}^n$ , par définition, n’a pas de variation verticale. Dans notre contexte, cela signifie que  $\tilde{\gamma}$  n’a pas de variation dans la direction de  $\mathbf{U}(1)$ , donc son état de polarisation (composante sur  $\mathbf{PC}^n$ ) varie mais pas ses “fréquences”.

Ainsi, le relèvement horizontal  $\tilde{\gamma}$  d’un signal  $\gamma$  s’interprète comme une version de ce dernier dénuée de toute fréquence instantanée. L’action  $\alpha$  permettant de passer de  $\tilde{\gamma}(t)$  à  $\gamma(t)$  (i.e.  $\gamma(t) = e^{i\alpha(t)}\tilde{\gamma}(t)$ ) peut alors être comprise comme l’ajout d’une fréquence instantanée (voir fig. 2.6 ci-dessous)

*Un signal qui n’aurait pas de fréquence instantanée mais une polarisation instantanée n’a pas vraiment de sens. Cela renvoie à notre discussion de première partie : la fréquence instantanée d’un signal univarié devait contenir les hautes fréquences et son amplitude les basses. Ici le problème est le même, mais avec l’état de polarisation à la place de l’amplitude. Pour s’en convaincre, il est utile de retourner sur le cas bivarié.*

*La projection sur  $\mathbf{PC}^1$  de  $\gamma$  représente l’ellipse de polarisation instantanée. Mais si  $\gamma$  n’a pas de fréquence instantanée, alors  $\gamma(t)$  n’est plus représenté que par le sommet de l’ellipse paramétrée par  $\rho_\gamma$ . On pourrait alors argumenter que tout signal peut être décrit par la seule variation de son état de polarisation, ce qui est parfaitement inintéressant.*

*Cette vision du relèvement horizontal est donc purement formelle et, si elle a bien un sens géométrique, elle n’a pas vraiment de sens du point de vue du signal.*

En admettant l’interprétation de la 1-forme de connexion comme fréquence instantanée, les discussions de première partie (sec. 1.2) suggèrent de choisir là encore :

$$\forall p \in \mathbb{S}^n, \forall \mathbf{v} \in T_x \mathbb{S}^n, \quad \omega_p(\mathbf{v}) = i\Im m \langle \mathbf{v}, p \rangle \quad (2.23)$$

La phase dynamique, s’interprète alors comme la déviation du signal par rapport à son relèvement horizontal.

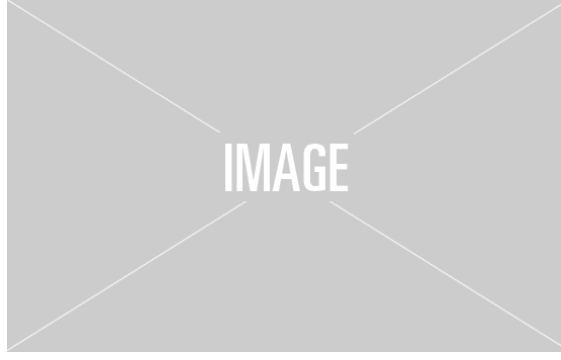


fig. 2.6 — Fréquence instantanée d'un signal  $x$  vu comme variation verticale de  $x$  par rapport à son relèvement horizontal  $\tilde{x}$  associé. À noter que  $\tilde{x}$  ne dépend pas des cartes mais dépend de la trajectoire  $\rho_x$  de  $x$  sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ .

Ainsi,  $g = e^{i\Phi_{\text{dyn}}(\gamma)}$  est solution de (2.20), qui se réécrit alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g'(t) = g(t) i \Im \langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle \\ g(t_0) = 1 \end{cases} \iff g(t) = e^{i \int_{t_0}^t \Im \langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) \rangle ds}$$

Ce qui redonne la formule :

$$\Phi_{\text{dyn } \gamma}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Im \langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) \rangle ds \quad (2.24)$$

Ici, deux remarques. D'abord, il avait été fait mention dans la première partie que la phase  $\varphi$  des signaux AM-FM-PM, formule (1.15) :

$$\mathbf{x}(t) = a(t) e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} = a(t) e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix}$$

n'avait pas d'interprétation directe par rapport à  $\Phi_{\text{tot}}$  et  $\Phi_{\text{dyn}}$ . Cette discussion permet de comprendre l'origine de ce problème.

En effet, cette formule “force” un choix de représentation  $\mathbf{x}$  par le triplet  $(a, \varphi, \overline{\mathbf{x}}\mathbf{x}^\top)$ . Or, on vient de le voir, du point de vue géométrique, ce choix de représentation n'a de sens que localement et, pour cette raison,  $\varphi$  ne peut pas avoir d'interprétation directe.

Ensuite, si cette définition (2.24) de la phase dynamique est bien indépendante du choix de carte, elle dépend en revanche du relèvement horizontal de  $\gamma$  et, *a fortiori*, de la projection  $\rho_\gamma$ . C'est là que va pouvoir émerger la phase géométrique, ce que nous allons voir à présent.

## 2.2 Phase géométrique dans le cas cyclique

Notamment dans le cadre quantique, la phase géométrique est connue pour avoir deux interprétations géométriques [5, 7, 12] : soit comme conséquence d'un transport parallèle sur  $\mathbb{S}^n$ , soit comme mesure de l'aire de la surface entourée par le signal projeté sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ . Résultats qui sont présentés et redémontrés (avec les détails en annexes) dans cette section.

Pour ce faire, sera d'abord traité le cas particulier des signaux cycliques (*ss-sec.* 2.2.1 et 2.2.2) et il sera ensuite montré que, du cas général, il est toujours possible de s'y ramener (*ss-sec.* 2.3.1).

### 2.2.1 ... du point de vue de la connexion

D'abord une définition :

DÉFINITION 11 (TRAJECTOIRE CYCLIQUE) — Un signal  $\gamma$  de  $\mathbb{S}^n$  sera dit *cyclique* si entre les

instants  $t_0$  et  $t$ , il retourne dans la même fibre :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } \gamma(t) = \gamma(t_0) + \alpha \gamma'(t_0)$$

Dit autrement, la projection de  $\gamma$ ,  $\rho_\gamma := \pi \circ \gamma$  fo

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \gamma(t) = e^{i\alpha} \gamma(t_0) \quad (2.25)$$

Dit autrement, la projection de  $\gamma$ ,  $\rho_\gamma := \pi \circ \gamma$  forme un lacet sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ .

Cette hypothèse est très restrictive puisqu'elle ne peut être vérifiée que ponctuellement, sans quoi  $\gamma$  n'aurait qu'un mouvement vertical (*i.e.* serait de la forme  $\gamma(t) = e^{i\alpha(t)}p$ ), ce qui n'est pas particulièrement intéressant.

Cela étant dit, elle a le bon goût d'énormément simplifier les choses puisque, comme tout ce passe dans la même fibre, il est très simple de calculer et d'annuler individuellement les phases de  $\gamma$ .

Suivant les travaux de Aharonov & Anandan [1] et les explications de Bohm [5], la première remarque est que, comme  $\gamma(t_0)$  et  $\gamma(t)$  sont dans une même fibre, la phase totale est donné par le paramètre  $\alpha$  de l'équation (2.25)<sup>13</sup> :

$$e^{i\Phi_{\text{tot}}(t_0,t)} = e^{i\alpha(t)} = t(\gamma(t_0), \gamma(t)) \quad (2.26)$$

La phase dynamique, conformément à ce qui a été dit plus tôt, donne la déviation au relèvement horizontal  $\tilde{\gamma}$  :

$$e^{i\Phi_{\text{dyn}}} = t(\tilde{\gamma}(t), \gamma(t)) \quad (2.27)$$

Et la phase géométrique s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
e^{i\Phi_{\text{geo}}} &= e^{i\Phi_{\text{tot}}} e^{-i\Phi_{\text{dyn}}} = t(\gamma(t_0), \gamma(t)) \, t(\tilde{\gamma}(t), \gamma(t))^{-1} \\
&= t(\gamma(t_0), \gamma(t)) \, t(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)) \\
&= t(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t)) \qquad \text{car } \gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0)
\end{aligned}
\tag{2.28}$$

Elle correspond donc au déplacement vertical de  $\tilde{\gamma}$  dû à la courbure de  $\mathbb{S}^n$ . Dit autrement, elle mesure la déviation dû au transport parallèle le long de  $\gamma$ . Les trois dernières formules, *eqs.* (2.26), (2.27) et (2.28), sont représentées dans la figure 2.7 ci-dessous :

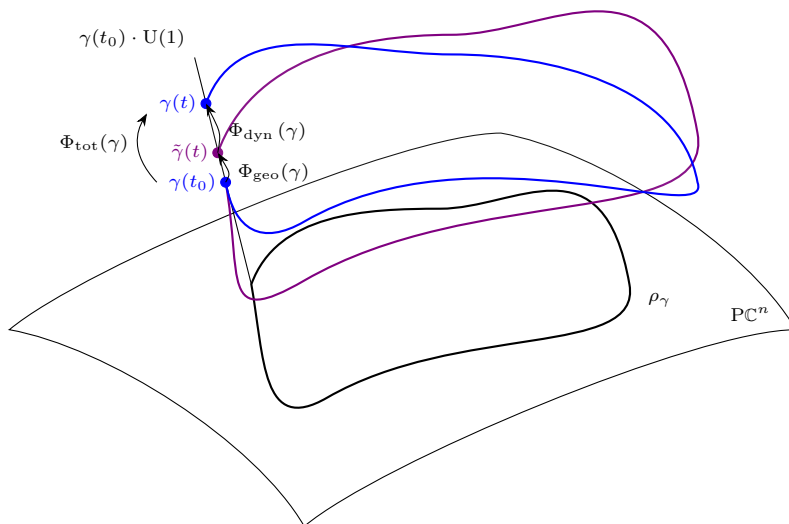


fig. 2.7 — Représentation des trois phases de  $\gamma$  dans le cas cyclique. Schéma repris de [5, fig. 4.1]

Vu ainsi, il apparaît clairement que  $\Phi_{\text{geo}}$  est indépendante du relèvement  $\gamma$  par rapport à  $\rho_\gamma$ , autrement dit qu'elle est invariante par transformation de jauge. De même, elle ne dépend que de  $\gamma(t_0)$  et  $\tilde{\gamma}(t)$ , ce qui montre qu'elle est invariante par reparamétrisation de  $\gamma$ .

<sup>13</sup>Pour mémoire,  $t(p, q)$  est l'élément  $e^{i\alpha}$  de  $U(1)$  tel que  $q = e^{i\alpha}p$

Du point de vue signal, cela se traduit par le fait que l'évolution de l'état de polarisation ( $\rho_\gamma$  ou  $\tilde{\gamma}$ ), quand bien-même indépendant que la fréquence instantanée, cause un déphasage (décalage vertical). Là encore, c'est quelque chose que le modèle AM-FM-PM peut difficilement représenter car nécessiterait de faire apparaître une exponentielle qui ne dépend pas du relèvement horizontal  $\tilde{\gamma}$ , dont l'écriture en une paire  $(\varphi, \rho)$  dépend de la carte locale.

Du point de vue géométrique, cette description de  $e^{i\Phi_{\text{geo}}}$  est plus connue sous le nom d'*holonomie* du lacet  $\rho_\gamma$ . De façon générale, le groupe d'holonomie du point  $p \in P$  associé à la (1-forme de) connexion  $\omega$  sur  $P(B, G)$ , est l'ensemble des points de  $pG$  qui peuvent être atteints par un relèvement horizontal partant de  $p$  :

$$\text{Hol}_p(\omega) := \{g \in G \mid \exists \gamma, \tilde{\gamma}(0) = p \text{ et } p \cdot g = \tilde{\gamma}(1)\} \quad (2.29)$$

Cette formulation, si elle est très élégante, n'est en revanche que très peu instructive. En effet, en fonction des propriétés de l'espace total et de la base du fibré, Hol peut avoir diverses propriétés. Dans notre cas,  $\text{Hol}_p(\omega)$  est un sous-groupe de Lie connexe non trivial du groupe structural. Concrètement, cela signifie dans notre cas que  $\text{Hol}_p(\omega) = \text{U}(1)$ <sup>14</sup>, i.e.  $\Phi_{\text{geo}}$  peut prendre absolument n'importe quelle valeur (alors même que l'on est toujours dans le cas particulier des signaux cycliques).

### 2.2.2 ... du point de vue de la métrique

Cela dit, la phase géométrique étant invariante par transformation de jauge, elle doit s'écrire uniquement dans  $\text{PC}^n$ . Pour cela, on suppose, sans perte de généralité, que  $\gamma$  reste au-dessus d'une même carte  $U_i$ , de sorte que :

$$\gamma = h_i(w, e^{i\theta}) = \sigma_i(w)e^{i\theta}$$

Avec, et toujours sous l'hypothèse que  $\gamma$  est cyclique,  $\Phi_{\text{geo}}$  se réécrit (cf. annexe B.1.)<sup>15</sup> :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\gamma) &= \Phi_{\text{tot}}(\gamma) - \Phi_{\text{dyn}}(\sigma_i(w)e^{i\theta}) \\ &= \theta(t) - \theta(t_0) - \left( \frac{1}{i} \int_{t_0}^t \mathcal{A}_i(\rho(s)) ds + \theta(t) - \theta(t_0) \right) \\ &= i \int_{t_0}^t \mathcal{A}_i(\rho(s)) ds \end{aligned} \quad (2.30)$$

Or,  $\rho$  étant fermée sur  $\text{PC}^n$ ,  $\Phi_{\text{geo}}$  est l'intégrale d'une forme linéaire le long d'un lacet, ce à quoi le théorème de Stokes s'applique et donne :

$$\Phi_{\text{geo}}(\gamma) = i \oint_{\rho} \mathcal{A}_i = i \iint_{\Sigma} d\mathcal{A}_i$$

Où  $\Sigma$  est une surface de bord  $\rho$  et où la dérivée extérieure de  $\omega$  n'est autre que la forme de Kähler de  $\text{PC}^n$  (cf. annexe B.2. & B.3. pour une démonstration) :

$$\Phi_{\text{geo}}(\gamma) = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \Omega \quad (2.31)$$

Ainsi, conformément à l'interprétation de la forme de Kähler, la phase géométrique de toute courbe cyclique  $\gamma$  est donnée par la demi-aire de la surface entourée par sa projection  $\pi(\gamma)$  sur  $\text{PC}^n$ .

## 2.3 Phase géométrique dans le cas le plus général

De retour au cas général, si maintenant  $\gamma$  est quelconque, pour retrouver les interprétations précédentes, le plus simple est encore de se ramener au cas cyclique. Pour cela, il suffit de refermer la courbe tracée par  $\gamma$  dans  $\mathbb{S}^n$  de sorte à que cet ajout n'altère pas la phase géométrique de  $\gamma$ .

<sup>14</sup> $\text{Hol}_p(\omega)$  est toujours un sous-groupe de Lie. Ici connexe car  $\text{PC}^n$  est simplement connexe, et non trivial car la connexion sur  $\mathbb{S}^n$  n'est pas plate. Or, le seul sous-groupe de Lie de  $\text{U}(1)$  ayant ces propriétés est lui-même. Ces informations sont tirées de Wikipédia, voir également [24, sec. 8.5.3] pour plus d'informations sur le cas particulier des  $\text{PC}^n$ .

<sup>15</sup>Quelle ressemblance avec le calcul de l'aire de la calotte dans la partie précédente...

Pour ce faire, et sachant que  $\Phi_{\text{geo}}$  est intimement liée à la métrique (par la connexion) de  $\mathbb{S}^n(\text{U}(1), \text{PC}^n)$ , c'est naturellement du côté des géodésiques de  $\text{PC}^n$  que l'on se tourne.

### 2.3.1 Les géodésiques et leurs phases

Il est montrer – cf. annexe C, ou [4, sec. 3.E] – que, étant donnée une géodésique  $\rho_g$  de  $\text{PC}^n$ , tout relèvement horizontale<sup>16</sup>  $\tilde{\gamma}_g$  de cette dernière vérifie :

$$\forall t \geq t_0, \quad \tilde{\gamma}_g(t) = \tilde{\gamma}_g(t_0) \cos(t - t_0) + \dot{\tilde{\gamma}}_g(t_0) \sin(t - t_0) \quad (2.32)$$

La courbe  $\gamma_g$  étant horizontale, elle n'a pas de phase dynamique, et donc :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\rho_g) &= \Phi_{\text{tot}}(\tilde{\gamma}_g) = \arg \left\langle \tilde{\gamma}_g(t_0) \cos(t - t_0) + \dot{\tilde{\gamma}}_g(t_0) \sin(t - t_0), \tilde{\gamma}_g(t_0) \right\rangle \\ &= \arg \left( \cos(t - t_0) \langle \tilde{\gamma}_g(t_0), \tilde{\gamma}_g(t_0) \rangle \right) \quad \text{car } \langle \dot{\tilde{\gamma}}_g, \tilde{\gamma}_g \rangle = 0 \\ &= \arg \left( \cos(t - t_0) \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ce qui vaut 0 ou  $\pi$  (modulo  $2\pi$ ) selon le signe du cosinus. Contrairement à ce qui était dit dans [23], la phase géométrique n'est donc pas systématiquement nulle sur les géodésique de  $\text{PC}^n$  et tenir compte de cela va permettre de renforcer le lien entre l'écriture géométrique des signaux  $n$ -variés vus dans cette partie et celle des signaux AM-FM-PM.

Toujours d'après [4, sec. 3.E], l'ensemble des géodésiques de  $\text{PC}^n$  passant par deux points donnés, reposent sur une unique ligne complexe, c'est-à-dire une sous-variété diffeomorphe à  $\text{PC}^1 \cong S^2$ . De plus, ces géodésiques sont des grands cercles.

La phase géométrique d'un de ces grands cercles  $\rho_c$ , qui est donc cyclique, a pour phase géométrique l'intégrale de  $1/2\Omega$  sur la moitié de  $S^2$  :

$$\Phi_{\text{geo}}(\rho_c) = \frac{1}{4} \iint_{S^2} \Omega$$

D'autre part, cette intégrale est un résultat connue [17, p. 119] et vaut  $4\pi$  ce qui donne :

$$\Phi_{\text{geo}}(\rho_c) = \frac{1}{4} \iint_{S^2} \Omega = \pi$$

Ainsi, la courbe  $\rho_g$ , qui n'est donc qu'une portion de  $\rho_c$ , a une phase géométrique qui est soit nulle, soit égale à celle de son prolongement  $\rho_c$ . Cela suggère que, dans le second cas, la phase géométrique du complémentaire de  $\rho_g$  par rapport à  $\rho_c$ , noté  $\hat{\rho}_g$ , est nulle.

Pour le montrer, il suffit de considérer un nouveau relèvement  $\gamma_c$  (resp.  $\gamma_g, \hat{\gamma}_g$ ) de  $\rho_c$  (resp.  $\rho_g, \hat{\rho}_g$ ) tel que chacune de leur phase totale soit nulle – ce qui est toujours possible et n'affecte pas la phase géométrique de  $\rho_c$ . De cette façon, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\rho_c) &= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma_c) = -\int_{\gamma_c} \omega = -\int_{\gamma_g} \omega - \int_{\hat{\gamma}_g} \omega \\ &= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma_g) - \Phi_{\text{dyn}}(\hat{\gamma}_g) \\ &= \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) + \Phi_{\text{geo}}(\hat{\gamma}_g) \end{aligned}$$

Il vient alors que, si jamais la géodésique reliant deux points est non nulle, il est toujours possible de considérer son complémentaire par rapport à  $\gamma_g$ , qui sera alors de phase géométrique nulle :

$$\Phi_{\text{geo}}(\rho_c) = \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) = \pi \implies \Phi_{\text{geo}}(\hat{\gamma}_g) = \Phi_{\text{geo}}(\gamma_c) - \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) = 0$$

<sup>16</sup> Tout relèvement horizontal oui, mais avec une paramétrisation particulière (trajectoire uniforme).  $\Phi_{\text{geo}}$  étant, comme on l'a vu, invariante par le choix de paramétrisation cela n'a pas d'importance.

De retour sur l'exemple de la partie I, section 2.2, on a vu que pour un signal décrivant une boucle horizontale sur la sphère de Poincaré, sa phase géométrique est donnée par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = \pi - \pi \sin(2\chi_0) \quad \text{avec } 2\chi_0 \text{ la latitude}$$

En considérant le cas  $\chi_0 = 0$ ,  $\mathbf{x}$  décrit alors une géodésique et  $\Phi_{\text{geo}}$  donne à nouveau  $\pi$ . Aussi, et surtout, si l'on se met à faire varier  $\theta$  entre 0 et  $\pi$ , un rapide calcul montre que :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = \arg \left( \cos(\theta(t) - \theta(t_0)) \right)$$

Avec l'interprétation graphique en tête, cette formule suggère que la géodésique, reliant deux points, au sens du chemin le plus court, sera toujours nulle, car le “ $\cos \Delta\theta$ ” est positif. Ceux, hormis dans le cas où les points sont antipodaux, auquel cas  $\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = \pi$ . Ce n'est en revanche pas démontré mais n'a, de toute façon, pas de conséquences pour la suite du mémoire.

Enfin, le fait que  $\iint_{\text{PC}^1} \Omega = 4\pi$  est dû au facteur 2 devant la métrique de Fubini-Study. Il permet donc de s'assurer que l'aire – au sens de cette métrique – d'une sphère de rayon 1 vaut  $4\pi$ . Par ailleurs, le fait que  $\text{PC}^1 \cong S^2$  soit fini fait que l'aire d'une surface incluse dedans peut être vue comme étant définie modulo l'aire totale de  $\text{PC}^1$  :  $4\pi$ . Cela est cohérent avec le fait que la phase géométrique, qui correspond à une demi-aire, soit définie modulo  $2\pi$ . Des résultats qui sont dans la continuité de ceux présentés en fin de partie I.

### 2.3.2 Phase géométrique dans le cas le plus général

Avec ces résultats il est enfin possible de généraliser les interprétations du cas cyclique : Considérons à présent un signal quelconque  $\gamma : [t_0, t] \rightarrow \mathbb{S}^n$  de projection  $\rho$  sur  $\text{PC}^n$ , et  $\gamma_g$  le relèvement de la géodésique reliant  $\rho(t)$  à  $\rho(t_0)$  n'ayant pas de phase géométrique et vérifiant :

$$\gamma_g(t_0) = \gamma(t) \quad \gamma_g(t) = \gamma(t_0)$$

De cette façon, la concaténation des deux, notée  $\gamma \frown \gamma_g$ , vérifie :

$$\Phi_{\text{tot}}(\gamma \frown \gamma_g) = \arg \langle \gamma(t_0), \gamma(t_0) \rangle = 0 \quad \Phi_{\text{tot}}(\gamma_g) = \arg \langle \gamma(t_0), \gamma(t) \rangle = -\Phi_{\text{tot}}(\gamma)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\gamma \frown \gamma_g) &= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma \frown \gamma_g) \\ &= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma) - \Phi_{\text{dyn}}(\gamma_g) && \text{en séparant l'intégrale de la phase dynamique, (2.24)} \\ &= \Phi_{\text{geo}}(\gamma) + \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) - \Phi_{\text{tot}}(\gamma) - \Phi_{\text{tot}}(\gamma_g) \\ &= \Phi_{\text{geo}}(\gamma) + \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) \\ &= \Phi_{\text{geo}}(\gamma) && \text{car } \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $\gamma \frown \gamma_g$  est cyclique et on peut appliquer les résultats de la section 2.3, aboutissant à la formule :

$$\Phi_{\text{geo}}(\gamma) = \Phi_{\text{geo}}(\gamma \frown \gamma_g) = \frac{1}{2} \iint_{\widehat{\Sigma}} \Omega \quad (2.34)$$

où  $\widehat{\Sigma}$  est la surface entourée par  $\gamma \frown \gamma_g$ .

## III — Conclusion

En résumé, pour décrire un signal multivarié en terme de paramètres instantanées (amplitude, phase, polarisation), il est nécessaire de faire intervenir des outils de géométrie différentielle. Cela est dû au fait que



la séparation phase/polarisation ne peut être faite que localement. Ce n'est alors qu'en voyant  $\mathbb{S}^n$  comme une variété fibrée que les phases dynamique et géométrique reprennent un sens du point de vue signal : la première correspond effectivement à une notion de phase instantanée, analogue à celle des signaux univariés ; chose qui ne peut avoir de sens qu'au regard d'un relèvement horizontal. La seconde, quant à elle, s'interprète comme un déphasage dû à la déviation de cette trajectoire horizontale, conséquence de la courbure de  $\mathbb{S}^n$  (au sens de la connexion).

Cela a permis de comprendre pourquoi la “phase instantanée”  $\varphi$  des signaux AM-FM-PM ne pouvait pas s'interpréter comme une phase (totale ou dynamique) : car ce modèle cherche à décrire des trajectoires de  $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathrm{PC}^n)$  mais avec un unique système de coordonnées locales. Elle ne peut donc pas être complète, quand bien même les paramètres de l'état de polarisation,  $(\theta, \chi)$  s'interprètent très bien. De plus, si les signaux AM-FM-PM sont soumis à des conditions pour que leurs paramètres  $(\varphi, \theta, \chi)$  soient interprétables, ce n'est pas le cas du formalisme géométrique. *A priori*, n'importe quel signal multivarié complexe peut être “séparé” en composantes horizontale et verticale. Aussi, il est tout à fait possible que les hypothèses auxquelles sont soumises les signaux AM-FM-PM soient partiellement dues à ces limitations.

Enfin, Facchi *et al.* [11] ont montré l'existence d'un lien entre la métrique de Fubini-Study, celle de Fisher et la phase géométrique : les deux dernières seraient respectivement la partie réelle et imaginaire de la première. Un point qui n'a pas été abordé jusqu'ici mais qui suggère un lien entre la phase géométrique et la géométrie de l'information et qu'il serait intéressant d'approfondir.

---

## PARTIE III

---

### APPLICATIONS ET GÉNÉRALISATION

---

- Comment on calcul  $\Phi_{\text{geo}}$  en pratique ?
- Application
- Conclusion sur le mémoire et perspective.

#### I — Calcul pratique de la phase géométrique

Dans la partie II précédente, deux formulations de la phase géométrique ont été présentées. Cela dit, elles ne sont que très peu pertinentes pour le calcul de  $\Phi_{\text{geo}}$  en pratique car passant par des intégrales dans  $\text{PC}^n$  qui ne s'écrivent explicitement qu'avec des coordonnées locales.

Une solution apporté par Rabei *et al.* [26] est de s'intéresser à une approximation polygonale du signal projeté dans  $\text{PC}^n$ . C'est-à-dire de l'approcher par une suite de géodésiques concaténées les unes aux autres. Sachant que les mesures sont toujours de nature discrète, cette opération n'a pas vraiment de coût en pratique et permet d'exploiter les résultats de la partie II, sous-section 2.3.1. Ainsi, en notant  $(\mathbf{x}_i)_{1 \leq i \leq k}$  les  $k$  mesures du signal,  $\mathbf{x}_{i \rightarrow i+1}$  la géodésique reliant  $\mathbf{x}_i$  à  $\mathbf{x}_{i+1}$ , et  $\mathbf{x}$  la concaténation de toutes ces géodésiques, on a :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) \\ &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k-1} \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_{i \rightarrow i+1}) \\ &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k-1} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}_{i \rightarrow i+1}) - \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}_{i \rightarrow i+1}) \\ &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{k-1} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}_{i \rightarrow i+1}) \\ &= \arg\langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_1 \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \arg\langle \mathbf{x}_{i+1}, \mathbf{x}_i \rangle\end{aligned}$$

Cette formule, en plus d'être facilement implémentable, n'est que très peu coûteuse en temps de calcul. Aussi, elle est partiellement itérative, permettant d'obtenir un algorithme de calcul de  $\Phi_{\text{geo}}$  en tout point relativement efficace :

C'est cette formule qui est implémentée dans les codes disponibles sur ce [GitHub](#).

## II — Première application : ondes gravitationnelles

En relativité générale, la gravité n'est plus décrite comme une force mais comme une conséquence de la déformation de la métrique de l'espace-temps en fonction des masses qui s'y trouvent [28]. Cela a de multiples conséquences, comme par exemple le fait que la lumière puisse être déviée par les objets massifs, ce qui ne pouvait pas être le cas en mécanique Newtonienne et qui fût confirmé expérimentalement. Une autre prédiction de la relativité générale est l'existence d'onde gravitationnelle, qui sont dues à la propagation des déformations de l'espace-temps causées par le déplacement d'objet massif. Cela dit, mesurer de telles ondes n'est pas chose aisée et il a fallu attendre cent ans après l'article fondateur d'Einstein (1915) pour pouvoir les détecter (2015).

En plus de leur existence, la théorie de la relativité générale prédit que ces ondes doivent être polarisées, comme ça peut être le cas avec les ondes électromagnétiques ou sismiques. En revanche, il n'a pas encore été possible de confirmer que nos mesures présentent effectivement ces propriétés, que ce soit dû au niveau de bruit élevé des mesures ou à des difficultés techniques au niveau des capteurs. Mettre en évidence ces propriétés serait une validation expérimentale supplémentaire de la théorie d'Einstein et sur ce point la phase géométrique est un outil prometteur.

Avant d'y venir, revenons sur les mesures. Pour pouvoir détecter des ondes aussi discrètes, il est nécessaire de se tourner vers des objets à la fois massifs et en mouvement rapide, en l'occurrence des systèmes binaires de trous noirs (BBH, Binary Black Holes) en phase de “merge”. C'est-à-dire deux étoiles massives, ici des trous noirs, en orbite l'une autour de l'autre et sur le point d'entrer en collision, comme le montre la figure 3.1 ci-dessous :

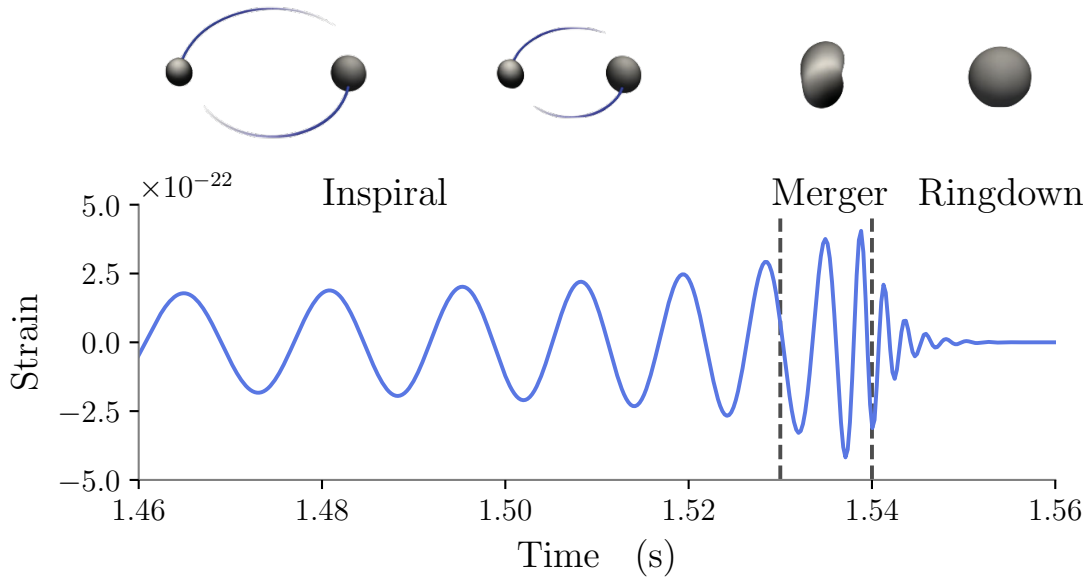


fig. 3.1 — Différentes étapes de la fusion de deux trous noirs. Figure tirée de [15, fig. 4].

Il est donc prédit que les ondes engendrées par ces phénomènes sont polarisées mais aussi, et surtout, qu'en fonction de l'alignement des axes de rotations des deux étoiles, l'état de polarisation de ces dernières doit varier au cours du temps. Chose qui doit pouvoir être mise en évidence par le calcul de la phase géométrique des ondes.

Pour cela, sont utilisés quatre jeux de données synthétiques et sans bruit avec des axes de rotations plus ou moins alignés et la figure 3.2 présente l'évolution des trois phases du signal dans chacun des cas.

Ces signaux étant à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ , il a fallu les transformer en signaux analytiques pour pouvoir calculer leurs différentes phases. Cela suppose (cf. A) qu'ils soient de type AM-FM-PM, ce qui n'est pas un problème au vu de l'allure des composantes  $h_+$  et  $h_\times$  des signaux.

Ensuite, comme attendu, la phase géométrique de ces signaux n'est pas constante et devient de plus en plus changeante à mesure que la polarisation des ondes devient variable.

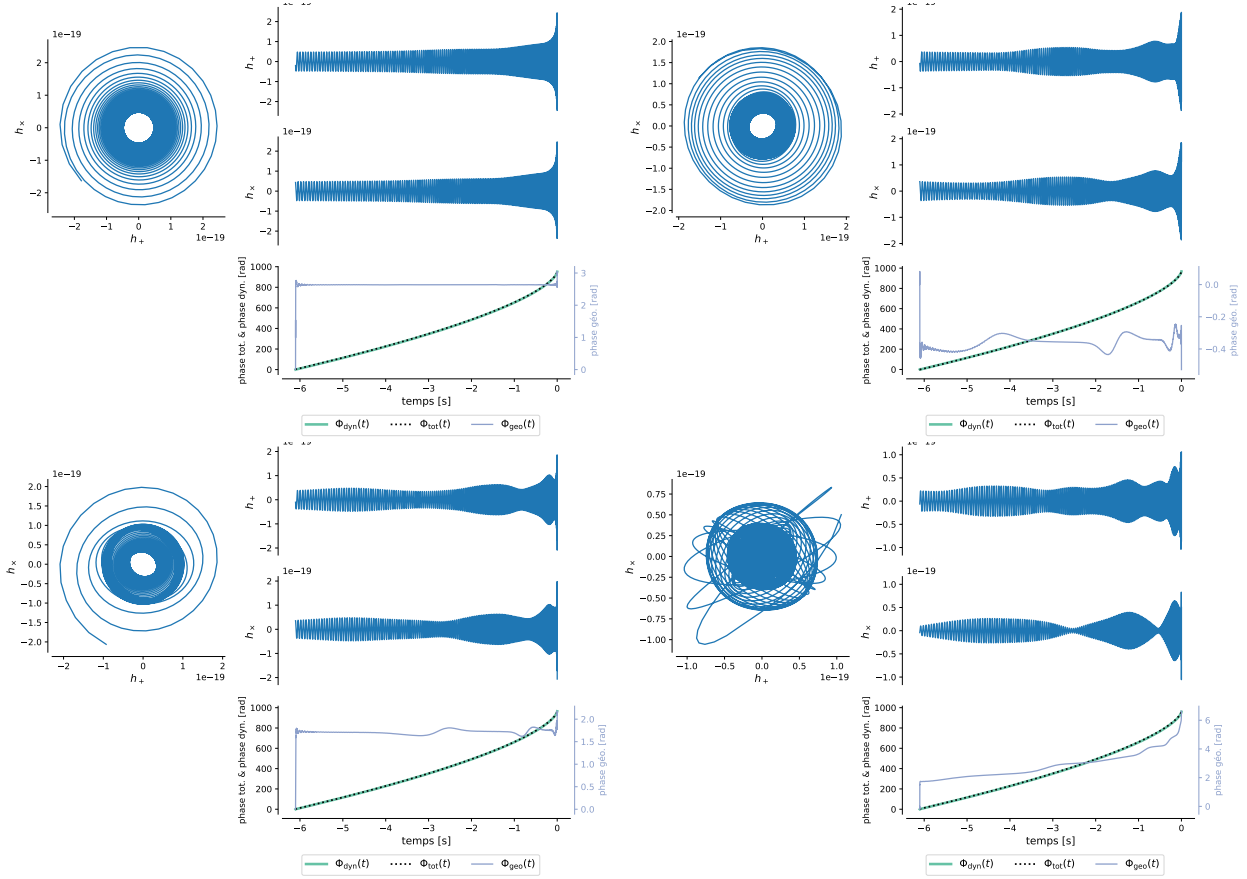


fig. 3.2 — Évolution de la phase géométrique sur des données simulées d'ondes gravitationnelles. Sur chaque graphique (de haut en bas et de gauche à droite) les spins des trous noirs sont de moins en moins alignés. Dans les parties hautes sont représentés les signaux simulés et, en dessous, le calcul des différentes phases.

Ces résultats, bien que très préliminaires, permettent déjà d'entrevoir les difficultés quant à la mesure de la phase géométrique :

D'abord, au début de chaque signal, elle présente un saut conséquent par rapport à ses valeurs et il semblerait qu'il soit très sensible à la valeur de départ du signal. Aussi, quand bien même ce saut ne semble pas se faire d'un multiple de  $\pi$ , il est probable que ce soit en partie lié au choix de représentant de  $\Phi_{\text{geo}}$  (qui est définie modulo  $2\pi$ ). Dans tous les cas, cela risque de poser problème pour une utilisation plus avancée.

Ensuite, même dans le pire des cas, la phase géométrique ne reste que très marginale par rapport aux deux autres, ce qui risque d'être un problème sur des mesures réelles, nécessairement bruitées.

### III — Conclusion et perspectives

Même si ce n'était pas l'objectif premier, s'intéresser à la phase géométrique a permis d'apporter un point de vue nouveau sur les signaux multivariés en terme de paramètres instantanés (amplitude, phase et polarisation).

Cela a permis, d'un côté, de mettre en lumière une subtile limite du modèle AM-FM-PM au niveau de l'interprétabilité de ces paramètres ( $\varphi, \theta, \chi$ ) et pourquoi il était nécessaire de passer par des notions de géométrie différentielle pour retrouver ces interprétations. De l'autre, cela a permis de donner une nouvelle interprétation, en terme de signal, à des outils déjà bien connus en mécanique quantique.

Il a été montré que la phase géométrique est une quantité qui se mesure effectivement en pratique et, même si ces interprétations géométriques laissent entendre que ses applications sont limitées, il n'est pas exclu qu'elle puisse avoir des applications en débruitage. Par exemple, si une onde mesurée n'est pas censée être à polarisation variable, une phase géométrique non nulle de ce dernier ne pourrait être due qu'à du

bruit. On pourrait alors imaginer des traitements qui se feraient uniquement sur le signal projeté sur  $PC^n$ , sans affecter sa phase dynamique/instantanée (ou inversement).

À l'inverse, il serait intéressant, notamment pour les ondes gravitationnelles, de voir dans quelle mesure la phase géométrique est résiliente au bruit. Par exemple, les arguments de la partie I, section 1.2 suggèrent que la phase dynamique est associée aux hautes fréquences du signal. La phase géométrique devrait alors être de plus basse fréquence, chose qui pourrait être mise en perspective avec les plages de fréquences favorisées par certaines sources de bruits.

Pour ce qui est des perspectives théoriques, il serait intéressant de voir dans quelle mesure la projection sur  $PC^n$  d'un signal multivarié peut être séparée en différents paramètres, comme c'est le cas pour les AM-FM-PM en bivarié (orientation et excentricité de l'ellipse de polarisation).

Enfin, il est connu que la phase géométrique se généralise aux Grassmanniennes, une généralisation des espaces projectifs complexes. Cela donne lieu à un nouveau type de phase géométrique, dite non-commutative, et c'est en partie pour cette raison que la partie II était aussi extensive sur le formalisme mathématique. Rentrer autant dans le formalisme devrait faciliter la généralisation des concepts mis en place, le tout en gardant autant que possible leurs interprétations.

En outre, un système de  $k$  capteurs mesurant un signal  $n$ -varié, semble être un cadre propice à l'apparition de cette phase non-commutative, ce qui donne déjà des perspectives d'applications.

Pour toutes ces raisons, la phase géométrique reste un outil avec du potentiel, bien que méconnu et qui, en toute vraisemblance, ferait un bon sujet de thèse.

---

## ANNEXES

---

### ANNEXES DE LA PARTIE I

#### Annexe A — Compléments sur l'analyse temps-fréquence

Au delà de permettre de définir les notions d'amplitude et de fréquence instantanée, la transformée en signal analytique viens répondre à un autre problème qu'on les signaux réels pour l'analyse temps-fréquence. Aussi, ce problème sera le point de départ de cette annexe pour les introduire la transformée en SA. Tout le propos portera sur les signaux univariés et est principalement tiré de [9].

##### A.1. Formalisme derrière la transformée en SA ou le problème de signaux réels et comment le résoudre

Les notions de densité d'énergie et d'énergie spectrale (eq. (1.8), sec. 1.2) :

$$\rho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & |x(t)|^2 \end{array} \quad \text{resp.} \quad \varrho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \nu & \longmapsto & |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array}$$

sont des concepts centraux en analyse temps-fréquences. Entre autre, leurs moments formalisent les notions de durée d'émission ( $\mathbb{V}_\rho[t]$ ), de fréquence moyenne ( $\mathbb{E}_\varrho[\nu]$ ), ou encore de largeur de bande spectrale ( $\mathbb{V}_\varrho[\nu]$ ).

Or, le spectre des signaux réels sont à symétrie hermitienne et leur densité spectrale,  $\varrho$ , symétrique :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R} &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{x}(-\nu) = \overline{\hat{x}(\nu)} \\ &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \varrho(-\nu) = \varrho(\nu) \end{aligned}$$

Ainsi, tout signal réel à pour fréquence moyenne 0 et le largeur de bande (variance de  $\varrho$ ) est biaisé par la symétrie de  $\varrho$ . En plus de ne pas être très instructif, ce n'est pas cohérent avec l'interprétation physique qu'on voudrait avoir de ces objets. Par exemple, si  $\varrho$  prend la forme ci-dessous (fig. 3.3), alors il serait plus naturelle de demander à ce que la fréquence moyenne se trouve autour de 1,4. De même, la largeur de bande spectrale ne correspond plus à l'étalement de chaque gaussienne, mais plutôt à leur espacement.

Le même problème se pose avec la covariance de  $x$ . Sachant l'égalité des deux notions de fréquences moyenne (eq. (1.9), sec. 1.2) :

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \mathbb{E}_\rho \left[ \frac{1}{2\pi} \phi' \right]$$

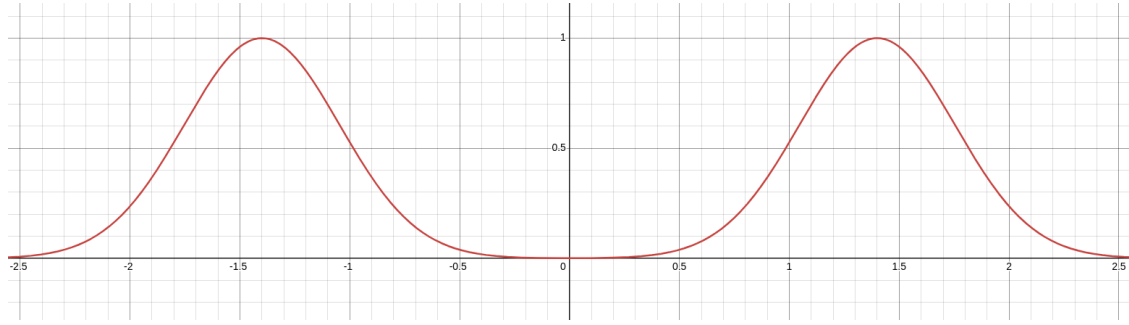


fig. 3.3 — *DONE* Exemple de densité spectrale d'un signal réel

on peut définir la covariance temps-fréquence d'un signal  $x$  par :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x) &:= \text{Cov}(t, \phi'(t)) = \mathbb{E}_\rho[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_\rho[t]\mathbb{E}_\rho[\phi'(t)] \\ &= \mathbb{E}_\rho[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_\rho[t]\mathbb{E}_\rho[\nu] \end{aligned}$$

Ce coefficient est sensé mesurer une corrélation entre l'évolution d'un signal au cours du temps avec ses fréquences. S'il est réel, alors  $\text{Cov}(x)$  sera toujours nulle mais de là à en conclure que la fréquence instantanée de n'importe quel signal (réel) est toujours décorrélée du temps serait, pour le moins, insatisfaisant.

Pour résoudre le problème, une méthode consiste tout simplement se débarrasser des fréquences négatives du signal, donnant un nouveau signal  $\mathcal{A}[x]$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] &= 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\hat{x} \implies \mathcal{A}[x] = 2\mathcal{F}^{-1}[\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\hat{x}] \\ &= 2\mathcal{F}^{-1}[\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] * x \end{aligned}$$

où  $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}$  est la fonction indicatrice de  $\mathbb{R}^+$  et où le facteur 2 assure la conservation de l'énergie du signal. Cela mène à la définition :

DÉFINITION 12 (TRANSFORMÉE DE HILBERT ET EN SA) — On appelle *transformé de Hilbert* de  $x$ , l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{H}[x] : t &\longmapsto \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds \end{aligned} \quad (3.1)$$

où l'intégrale barrée représente la *valeur principale de Cauchy*, une généralisation aux distributions de la fonction inverse :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

Avec, la *transformée en signal analytique* (SA), alors définie comme l'unique application  $\mathcal{A}[x]$  telle que  $\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\hat{x}$ , s'écrit explicitement :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{A}[x] : t &\longmapsto x(t) + i\mathcal{H}[x](t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Cette transformée permet, à la fois d'avoir un signal propice à une analyse temps-fréquence, et de donner une décomposition canonique  $x$  en une paire amplitude-phase. En effet, si  $x$  est réel, alors  $\mathcal{H}[x]$  l'est aussi, au quel cas :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} \implies \begin{cases} x(t) = \Re \mathcal{A}[x] = a(t) \cos \phi(t) \\ \mathcal{H}[x](t) = \Im \mathcal{A}[x] = a(t) \sin \phi(t) \end{cases}$$

## A.2. Interprétabilité de la transformée en SA ou le lien avec le théorème de Bedrosian

Cela étant dit, même si la transformée en signal analytique est toujours bien définie (modulo des hypothèses de convergence des intégrales), que  $x$  peut toujours s'écrire comme partie réelle de sa transformée en SA, les paramètres instantanée qu'elle donne ne sont pas toujours satisfaisant. Pour le comprendre, détaillons le cas où  $x$  s'écrit comme produit de deux signaux pures (fig. 3.4) :

$$x_1(t) = \cos(2\pi\nu_1 t) \cos(2\pi\nu_2 t)$$

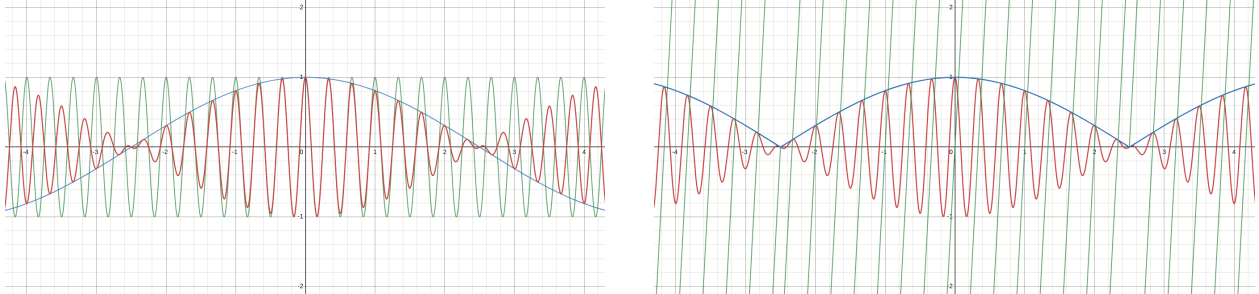


fig. 3.4 — Représentation graphique du signal  $x$  (rouge) avec  $\nu_1 = 3$  et  $\nu_2 = 0.1$ . Sur l'image de gauche, avec signaux de fréquences pures (bleu et vert). Sur l'image de droite, avec son amplitude (bleu) et sa phase instantanée (vert). Les discontinuités de la phase sont dû à l'arrondi à  $2\pi$  près de l'argument de  $\mathcal{A}[x_1]$  et à la façon dont il est calculé lorsque le signal s'annule (mise à 0). Voir [ici](#) pour un graphique dynamique.

On montre sans mal<sup>17</sup> que si  $\nu_1 \geq \nu_2$ , alors la transformée en SA de  $x_1$  s'écrit :

$$\mathcal{A}[x_1] = \cos(2\pi\nu_2 t) e^{2i\pi\nu_1 t}$$

Le signal  $\mathcal{A}[x_1]$  n'est ici pas sous forme exponentielle à proprement parler puisque le cosinus peut être négatif et pour s'y ramener, il suffit de passer le cos en valeur absolue et d'ajouter  $\pi$  à l'argument lorsque nécessaire. L'avantage de cette forme est qu'elle fait clairement apparaître les fréquences  $\nu_{1,2}$ . En particulier, la fréquence instantanée du signal est la plus grande des deux fréquences  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . La plus petite, elle, se retrouve dans l'amplitude.

Ce résultat est rassurant en cela qu'il est plus naturel de voir le cosinus de basse fréquence comme modulant celui de haute fréquence que l'inverse, comme mises en évidence par le premier graphique figure 3.4.

Aussi, en mettant les hautes fréquences du signal dans la fréquence instantanée, on s'assure de limiter les variations de l'amplitude. Cela apporte bien plus de contrainte en terme de décomposition  $(a_{x_1}, \phi_{x_1})$ , en cela que si l'inverse étant vrai, alors toutes les fréquences pourraient être envoyées dans l'amplitude, ce qui laisserait la phase invariante.

Cela étant dit, lorsque l'on fait varier  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , le résultat n'est pas toujours si intuitif. C'est notamment le cas lorsque les deux deviennent de plus en plus proche :

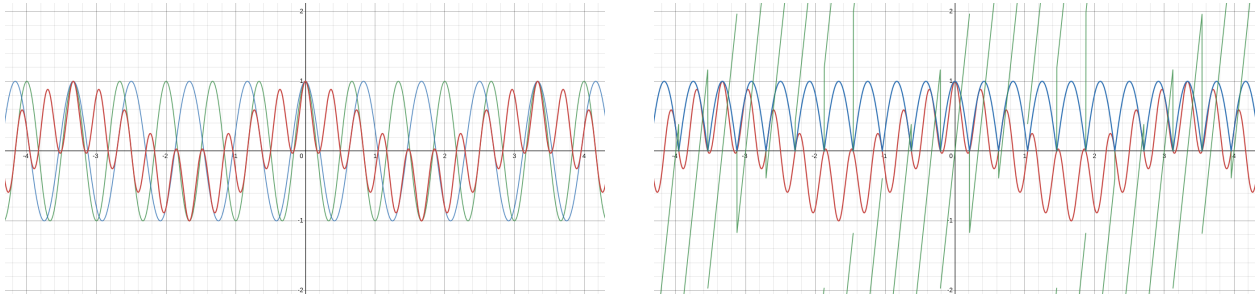


fig. 3.5 — **DONE** Idem que pour la figure 3.4 précédente, avec cette fois  $\nu_1 = 1.5$  et  $\nu_2 = 1.3$ .

Pour comprendre pourquoi l'amplitude ne fait pas ce qu'on attendrait d'elle, est introduit le théorème de Bedrosian :

<sup>17</sup>  $\hat{x}_1$  est donné par 4 Diracs, en ne gardant que ce non nul sur  $\mathbb{R}^+$  on obtient le spectre de  $\mathcal{A}[x_1]$  et il reste plus qu'à inverser la transformée de Fourier.



THÉORÈME DE BEDROSIAN (1) — Dans sa formulation la plus générale, le théorème de Bedrosian énonce que si deux fonctions  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  sont telles l'une des trois assertions suivantes est vraie :

- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda, +\infty[, \text{supp } \hat{g} \subset [\lambda, +\infty[$
- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset ]-\infty, \lambda], \text{supp } \hat{g} \subset ]-\infty, -\lambda]$
- $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \setminus \{(0, 0)\} \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda_1, \lambda_2], \text{supp } \hat{g} \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda_2, \lambda_1]$

alors la transformée de Hilbert de leur produit s'écrit (voir [29] pour une démonstration) :

$$\mathcal{H}[fg] = f\mathcal{H}[g] \quad (3.3)$$

Dans le cas d'un signal réel, suivant la ?? on peut écrire  $x = a_x \cos \phi_x$ . Comme  $a_x$  et  $\cos \phi_x$  sont réelles, seule la troisième condition du théorème de Bedrosian peut être satisfaite pour peu que  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Ainsi :

COROLLAIRE 1.1 — Toujours avec les même notations, si  $a_x \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\cos \phi_x \in L^2(\mathbb{R})$  et qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$  tel que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a_x] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi_x] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda] \quad (3.4)$$

Alors on a :

$$\mathcal{H}[x] = a_x \mathcal{H}[\cos \phi_x] \quad \text{et si } a_x(t) \neq 0, \quad \mathcal{H}[\cos \phi_x](t) = \sin \phi_x(t) \quad (3.5)$$

Pour interpréter ce corollaire, prenons un autre exemple :  $x_2(t) = a(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$ . Sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{x}_2(\nu) &= \hat{a}(\nu) * \frac{1}{2} \left( \delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \hat{a}(\nu + \nu_0) + \hat{a}(\nu - \nu_0) \right) \end{aligned}$$

Graphiquement, la transformée de Fourier de  $x_2$  duplique le graphe de  $\hat{a}$  en  $\pm\nu_0$  et somme les deux. La condition (3.4) du corollaire 1.1 demande alors que  $\nu_0$  soit choisie de telle sorte que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a] \subset [-\nu_0, \nu_0]$$

C'est-à-dire qu'il n'y ait pas de chevauchement entre les deux courbes  $\Gamma_{\pm} : \nu \mapsto \hat{a}(\nu \mp \nu_0)$  (voir fig. 3.6 ci-dessous). Moralement, cela assure qu'en ne prenant que la partie positive du spectre de  $x_2$ , l'on ne ramène pas avec une partie de  $\hat{a}(\nu + \nu_0)$ . Quant bien même cette explication est simpliste puisqu'ici  $\phi$  est linéaire, on peut voir que le phénomène est finalement très proche de celui d'aliasing.

Pour revenir sur l'exemple  $x_1$  précédent, dans la seconde figure 3.5, l'amplitude ne colle plus à l'interprétation que l'on voudrait justement parce que la condition de Bedrosian n'est plus respectée (à savoir  $\nu_1 \geq 2\nu_2$ ).

## Annexe B — Démonstrations de la proposition 1

### B.1. Formule de la phase totale (1.16)

On note  $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix}$  et on a :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}} \mathbf{x} &= \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \left\langle a(t)e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \mathcal{V}(t), a(t_0)e^{i\varphi(t_0)} R_{\theta(t_0)} \mathcal{V}(t_0) \right\rangle \\ &= a(t)e^{i\varphi(t)} a(t_0)e^{-i\varphi(t_0)} \left\langle R_{\theta(t)} \mathcal{V}(t), R_{\theta(t_0)} \mathcal{V}(t_0) \right\rangle \\ &= a(t_0)a(t)e^{i(\varphi(t)-\varphi(t_0))} \left\langle R_{\theta(t)-\theta(t_0)} \mathcal{V}(t), \mathcal{V}(t_0) \right\rangle \end{aligned}$$



fig. 3.6 — Sur les deux graphiques sont représentés en vert  $\hat{a}$  et en violet  $\hat{x}_2$ . Dans le premier cas l'hypothèse de Bedrosian est respectée mais pas dans le second.

Pour alléger les notations, on note  $\Delta y = y(t) - y(t_0)$ ,  $y_1 = y(t_0)$  et  $y_2 = (t)$  pour  $y = \varphi, \theta, \chi$ . Le produit hermitien à droite s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 \langle R_{\Delta\theta} \mathcal{V}(t), \mathcal{V}(t_0) \rangle &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\theta \cos \chi_2 + i \sin \Delta\theta \sin \chi_2 & \sin \Delta\theta \cos \chi_2 - i \cos \Delta\theta \sin \chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi_1 \\ i \sin \chi_1 \end{pmatrix} \\
 &= \cos \chi_1 \left( \cos \Delta\theta \cos \chi_2 + i \sin \Delta\theta \sin \chi_2 \right) + i \sin \chi_1 \left( \sin \Delta\theta \cos \chi_2 - i \cos \Delta\theta \sin \chi_2 \right) \\
 &= \cos \Delta\theta \left( \cos \chi_1 \cos \chi_2 + \sin \chi_1 \sin \chi_2 \right) + i \sin \Delta\theta \left( \cos \chi_1 \sin \chi_2 + \sin \chi_1 \cos \chi_2 \right) \\
 &= \cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2)
 \end{aligned}$$

D'où la phase totale :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) &= \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \arg \left( a(t_0) a(t) e^{i(\varphi(t) - \varphi(t_0))} \left( \cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2) \right) \right) \\
 &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arg \left( \cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2) \right)
 \end{aligned}$$

et l'argument restant s'écrit comme une arctangente, donnant :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \frac{\sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2)}{\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi} \\
 &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \left( \tan \Delta\theta \frac{\sin(\chi_1 + \chi_2)}{\cos \Delta\chi} \right) \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

## B.2. Formule de la phase dynamique (1.17)

Par souci de lisibilité, on note  $\mathcal{U} = R_\theta \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix}$ , de sorte que la dérivée de  $\mathbf{x} = a e^{i\varphi} \mathcal{U}$  s'écrit :

$$\dot{\mathbf{x}} = a' e^{i\varphi} \mathcal{U} + i a \varphi' e^{i\varphi} \mathcal{U} + a e^{i\varphi} \theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix} + a e^{i\varphi} \chi' \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \chi + i \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \theta \sin \chi - i \cos \theta \cos \chi \end{pmatrix}$$

Les vecteurs des deux derniers membres s'expriment en fonction des composantes  $\mathcal{U}_{1,2}$  de  $\mathcal{U}$  :

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \chi + i \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \theta \sin \chi - i \cos \theta \cos \chi \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{U}}_2 \\ -\bar{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}$$

Le produit hermitien  $\langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle &= \left\langle a'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\varphi'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\theta' \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix} + iae^{i\varphi}\chi' \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{U}}_2 \\ -\bar{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, ae^{i\varphi}\mathcal{U} \right\rangle \\ &= \left\langle a'\mathcal{U} + ia\varphi'\mathcal{U} + a\theta' \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix} + ia\chi' \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{U}}_2 \\ -\bar{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, a\mathcal{U} \right\rangle \\ &= aa'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2\varphi'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + a^2\theta' \left\langle \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle + ia^2\chi' \left\langle \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{U}}_2 \\ -\bar{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle\end{aligned}$$

où les deux derniers termes donnent :

$$\begin{aligned}\left\langle \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle &= -\mathcal{U}_2\bar{\mathcal{U}}_1 + \mathcal{U}_1\bar{\mathcal{U}}_2 \\ &= 2i\Im(\mathcal{U}_1\bar{\mathcal{U}}_2) \\ &= 2i\Im\left((\cos\theta\cos\chi + i\sin\theta\sin\chi)(\sin\theta\cos\chi + i\cos\theta\sin\chi)\right) \\ &= 2i(\cos^2\theta\cos\chi\sin\chi + \sin^2\theta\sin\chi\cos\chi) \\ &= 2i\cos\chi\sin\chi \\ &= i\sin 2\chi\end{aligned}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{U}}_2 \\ -\bar{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle = \bar{\mathcal{U}}_2\mathcal{U}_1 - \bar{\mathcal{U}}_1\mathcal{U}_2 = 0$$

D'où, sachant que  $\|\mathbf{x}\|^2 = a^2$  et  $\|\mathcal{U}\| = 1$ , la formule :

$$\begin{aligned}\frac{\Im\langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= \frac{1}{a^2}\Im\left(aa'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2\varphi'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2\theta'\sin 2\chi\right) \\ &= \frac{1}{a^2}\left(a^2\varphi'\|\mathcal{U}\|^2 + a^2\theta'\sin 2\chi\right) \\ &= \varphi' + \theta'\sin 2\chi\end{aligned}$$

## ANNEXES DE LA PARTIE [PARTIE II](#)

### Annexe A — \* Variété différentielle complexe

*Pas sur que je la garde cette annexe, c'est beaucoup de math pour pas grande chose... enfin c'est plus rigoureux mais pas sur que ça serve le propos vraiment.*

Pour plus de détails, voir [\[24, 2\]](#).

$\mathcal{M}$  sera une *variété différentielle complexe* si elle satisfait les propriétés ci-dessus où  $\mathbb{R}^n$  est remplacé par  $\mathbb{C}^n$  et où la condition de difféomorphisme est remplacée par la condition d'holomorphisme. Une application  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  étant holomorphe si chacune de ses composantes vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \mu, \quad \frac{\partial f}{\partial y^\mu}(x + iy) = i \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x + iy)$$

Les fonctions holomorphes étant automatiquement  $C^\infty$ , les variétés différentielles complexes sont toujours lisse, c'est-à-dire  $C^\infty$ . Aussi,  $\mathcal{M}$  est dite de dimension complexe  $n$  et dimension (réel)  $2n$ , notés :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) := n \qquad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) := \dim(\mathcal{M}) = 2n \qquad (3.6)$$

Ensuite, pour le dire rapidement, la structure complexe de  $\mathcal{M}$  permet de séparer les espaces tangents en deux sous espaces. Pour ce faire, on commence par noter qu'en tout point  $p \in \mathcal{M}$  de coordonnée  $z^\nu = x^\nu + iy^\nu$ , l'espace tangent  $T_p\mathcal{M}$ , vu comme variété réelle, admet une base :

$$T_p\mathcal{M} = \text{Vec} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\} \quad (3.7)$$

Plus tôt que de se basé sur les  $x^\mu$  et  $y^\mu$  pour séparer les  $T_p\mathcal{M}$ , on définit sur ces derniers un tenseur  $J_p$  de type (1,1) tel que :

$$J_p \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad J_p \frac{\partial}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (3.8)$$

Ce tenseur est l'équivalent de la multiplication par  $\pm i$  et le fait que  $\mathcal{M}$  soit complexe assure qu'il soit défini globalement, *i.e.* sur  $T\mathcal{M}$ . Il est diagonalisable dans la base :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial z^\mu} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \quad \partial_{\bar{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} + i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \quad (3.9)$$

Ainsi en fonction de la base ((3.6) ou (3.9)),  $J_p$  va s'écrire :

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \quad J_p = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Finalement,  $T\mathcal{M}$  peut être séparé en deux sous-espaces engendré respectivement par les  $\partial_\mu$  et  $\partial_{\bar{\nu}}$ . On parle de vecteur holomorphe et anti-holomorphe et on note :

$$T_p\mathcal{M}^+ = \text{Vec}\{\partial_\mu \mid 1 \leq \mu \leq n\} \quad T_p\mathcal{M}^- = \text{Vec}\{\partial_{\bar{\mu}} \mid 1 \leq \mu \leq n\} \quad (3.11)$$

forme kahlerienne :

$$\Omega = g_{\mu\bar{\alpha}} J^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu \quad (3.12)$$

sur  $\text{PC}^n$  :

$$\Omega(w) = i \frac{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha) \delta_{\mu\nu} - w_\mu \bar{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu$$

## Annexe B — Démonstration des résultats sous-section 2.2.2

### B.1. Formule pour $\Phi_{\text{geo}}$ sur $\text{PC}^n$

Ici  $\gamma$  est supposé cyclique et au dessus d'une unique carte  $U_i$  (par commodité), avec :

$$\gamma = h_i(\rho, e^{i\theta}) = \sigma_i(\rho) e^{i\theta}$$

Avec ces notations, la phase totale de  $\gamma$  va s'écrire :

$$\Phi_{\text{tot}}(\gamma, t_0, t) = t(\gamma(t), \gamma(t_0)) = \theta(t) - \theta(t_0)$$

Pour ce qui est de la phase dynamique, on comment par calculer la connexion le long de  $\gamma$ , ce qui nécessite d'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{d}{dt} (\sigma_i(\rho) e^{i\theta}) = \sigma_{i*}(\dot{\rho}) e^{i\theta} + i\theta' \sigma_i(\rho) e^{i\theta} \\ &= \sigma_{i*}(\dot{\rho}) e^{i\theta} + (i\theta')^\# (\sigma_i(\rho) e^{i\theta}) \end{aligned} \quad \text{par définition de } \#, \text{ eq. (2.14)}$$

Avec, et sachant les propriétés de  $\omega$  (eqs. (2.15) et (2.16), def. 9), on a :

$$\begin{aligned} i\omega_\gamma(\dot{\gamma}) &= i\omega_{\sigma_i(\rho)e^{i\theta}}\left(\sigma_{i*}(\dot{\rho})e^{i\theta} + (i\theta')^\#(\sigma_i(\rho)e^{i\theta})\right) \\ &= \omega_{\sigma_i(\rho)e^{i\theta}}\left(\sigma_{i*}(\dot{\rho})e^{i\theta}\right) + \omega_{\sigma_i(\rho)e^{i\theta}}\left((i\theta')^\#(\sigma_i(\rho)e^{i\theta})\right) \\ &= e^{-i\theta}\omega_{\sigma_i(\rho)}(\sigma_{i*}(\dot{\rho}))e^{i\theta} + i\theta' \end{aligned}$$

D'où la phase dynamique (eq. (2.24)) :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{dyn}}(\gamma) &= \frac{1}{i} \int_{t_0}^t \omega_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s)) ds = \frac{1}{i} \int_{t_0}^t \left( \mathcal{A}_{i\rho(s)}(\dot{\rho}(s)) + i\theta'(s) \right) ds \\ &= -i \oint \mathcal{A}_{i\rho}(\dot{\rho}) + \theta(t) - \theta(t_0) \end{aligned}$$

et par conséquent la phase géométrique :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\gamma) &= \Phi_{\text{tot}}(\gamma) - \Phi_{\text{dyn}}(\gamma) \\ &= \theta(t) - \theta(t_0) - \left( -i \oint \mathcal{A}_{i\rho}(\dot{\rho}) + \theta(t) - \theta(t_0) \right) \\ &= i \oint \mathcal{A}_{i\rho}(\dot{\rho}) \end{aligned}$$

Maintenant, pour pouvoir appliquer le théorème de Stokes, il faut s'assurer que la variété étudiée est orientable, ce qui est le cas de toute les variétés complexes [24, sec. 8.4.2] (y compris  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ ). Ainsi, pour peu que  $\rho$  soit suffisamment régulière, le théorème s'applique et :

$$\oint \mathcal{A}_i = \iint_{\Sigma} d\mathcal{A}_i$$

avec  $\Sigma$  une surface de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  de bord  $\rho$ .

## B.2. Dérivation de $\Phi_{\text{geo}}$ en tant qu'aire de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$

Par définition, sur l'ouvert  $U_i$ , la 1-forme de connexion local est définie par :

$$\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega = \omega \circ \sigma_{i*}$$

Soit,  $\forall w \in U_i$ ,  $\forall v \in T_w \mathbb{P}\mathbb{C}^n$  :

$$\mathcal{A}_i(w)v = i\Im m \langle \sigma_{i*}(v), \sigma_i(w) \rangle$$

où les  $\sigma_{i*}$  s'écrivent,  $\forall \mu$  :

$$\begin{aligned} \mu \neq i : \quad \sigma_i(w)^\mu &= \frac{w^\mu}{\sqrt{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha}} \implies \sigma_{i*}(w)^\mu = \frac{dw^\mu}{\sqrt{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha}} - \frac{w^\mu}{2(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^{3/2}} 2\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha}} \left( dw^\mu - w^\mu \frac{\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha)}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha}} \left( dw^\mu - w^\mu \frac{\bar{w}^\alpha dw_\alpha + w^\alpha d\bar{w}_\alpha}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\mu = i : \quad \sigma_i(w)^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha}} \implies \sigma_{i*}(w)^\mu = -\frac{\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha)}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^{3/2}} = -\frac{\bar{w}^\alpha dw_\alpha + w^\alpha d\bar{w}_\alpha}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^{3/2}}$$

Ce qui donne<sup>18</sup> :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_i(w) &= i\Im \langle \sigma_{i*}(w), \sigma_i(w) \rangle \\
&= i\Im \left\langle \frac{1}{\sqrt{1+w^\alpha \bar{w}_\alpha}} \left( (dw^0, \dots, 0, \dots, dw^n) - (w^0, \dots, 1, \dots, w^n) \frac{\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha)}{1+w^\alpha \bar{w}_\alpha} \right), \frac{(w^0, \dots, 1, \dots, w^n)}{\sqrt{1+w^\alpha \bar{w}_\alpha}} \right\rangle \\
&= \frac{1}{1+w^\alpha \bar{w}_\alpha} i\Im \left( \left\langle (dw^0, \dots, 0, \dots, dw^n), (w^0, \dots, 1, \dots, w^n) \right\rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha)}{1+w^\alpha \bar{w}_\alpha} \left\langle (w^0, \dots, 1, \dots, w^n), (w^0, \dots, 1, \dots, w^n) \right\rangle \right) \\
&= \frac{1}{1+w^\alpha \bar{w}_\alpha} i\Im \left( dw^\mu \bar{w}_\mu - \frac{\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha)}{1+w^\alpha \bar{w}_\alpha} (w^\nu \bar{w}_\nu + 1) \right)
\end{aligned}$$

Enfin, sachant que le second membre dans la partie imaginaire est réel, il vient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_i(w) &= \frac{1}{1+w^\alpha \bar{w}_\alpha} i\Im \left( dw^\mu \bar{w}_\mu - \frac{\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha)}{1+w^\alpha \bar{w}_\alpha} (w^\nu \bar{w}_\nu + 1) \right) = \frac{1}{1+w^\alpha \bar{w}_\alpha} i\Im(dw^\mu \bar{w}_\mu) \\
&= \frac{1}{1+w^\alpha \bar{w}_\alpha} \frac{dw^\mu \bar{w}_\mu - d\bar{w}^\nu w_\nu}{2}
\end{aligned}$$

Maintenant, pour avoir les coefficients de  $d\mathcal{A}_i$ , il faut calculer respectivement :

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda \mathcal{A}_{i\mu} &= \partial_\lambda \frac{\bar{w}_\mu}{2(1+w^\alpha \bar{w}_\alpha)} & \partial_{\bar{\lambda}} \mathcal{A}_{i\mu} &= \partial_{\bar{\lambda}} \frac{\bar{w}_\mu}{2(1+w^\alpha \bar{w}_\alpha)} \\
&= \frac{\bar{w}_\mu \bar{w}_\lambda}{2(1+w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} & &= \frac{1}{2(1+w^\alpha \bar{w}_\alpha)} \left( \delta_{\lambda\mu} - \frac{\bar{w}_\mu w_\lambda}{1+w^\alpha \bar{w}_\alpha} \right) \\
& & &= \frac{1}{4} g_{\mu\bar{\lambda}} \\
\partial_\lambda \mathcal{A}_{i\bar{\nu}} &= \partial_\lambda \frac{-w_\nu}{2(1+w^\alpha \bar{w}_\alpha)} & \partial_{\bar{\lambda}} \mathcal{A}_{i\bar{\nu}} &= \partial_{\bar{\lambda}} \frac{-w_\nu}{2(1+w^\alpha \bar{w}_\alpha)} \\
&= \frac{-1}{2(1+w^\alpha \bar{w}_\alpha)} \left( \delta_{\lambda\nu} - \frac{w_\nu \bar{w}_\lambda}{1+w^\alpha \bar{w}_\alpha} \right) & &= -\frac{w_\nu w_\lambda}{2(1+w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} \\
&= -\frac{1}{4} g_{\lambda\bar{\nu}}
\end{aligned}$$

On remarque alors les coefficient  $d\mathcal{A}_{i\lambda\mu}$  et  $d\mathcal{A}_{i\bar{\lambda}\bar{\mu}}$  sont symétriques, ce qui fait qu'avec le produit extérieur il s'annule (anti-symétrie). Par exemple :

$$(d\mathcal{A}_i)_{\lambda\mu} dw^\lambda \wedge dw^\mu = \frac{\bar{w}_\mu \bar{w}_\lambda}{2(1+w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} dw^\lambda \otimes dw^\mu - \frac{\bar{w}_\mu \bar{w}_\lambda}{2(1+w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} dw^\mu \otimes dw^\lambda = 0$$

Ce qui mène finalement à :

$$\begin{aligned}
d\mathcal{A}_i &= \frac{1}{4} g_{\mu\bar{\lambda}} d\bar{w}^\lambda \wedge dw^\mu - \frac{1}{2} g_{\lambda\bar{\nu}} dw^\lambda \wedge d\bar{w}^\nu \\
&= -\frac{1}{4} (g_{\mu\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu + g_{\mu\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu) && \text{par anti-symétrie du produit extérieur} \\
&= -\frac{1}{2} g_{\mu\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu \\
&= i \frac{1}{2} \Omega_{\mu\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu
\end{aligned}$$

<sup>18</sup> Dans la formule ci-dessous, les 0 et 1 sont placés à la  $i^{eme}$  coordonnées.

**B.3. \* Idem que B.2. depuis  $\mathbb{S}^n$  (plus simple, mais j'arrive à finir le calcul)**

Cela étant dit, plutôt que de faire le calcul dans  $\text{PC}^n$ , qui demanderait de calculer les  $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$ , le plus simple est encore de se ramener dans  $\mathbb{S}^n$  :

$$\oint \mathcal{A}_i \rho(\dot{\rho}) = \oint \omega_{\sigma_i(\rho)}(\sigma_{i*}(\dot{\rho}))$$

Où, en notant  $z = \sigma_i(\rho)^\mu$  et  $dz = \sigma_{i*}(\dot{\rho})$ ,  $\omega$  s'écrit en coordonnées locales :

$$\begin{aligned} \omega_z(dz) &= i\Im \langle dz, z \rangle = \frac{1}{2} \left( \langle dz, z \rangle - \langle z, dz \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \delta_{\mu\nu} \bar{z}^\nu dz^\mu - \delta_{\mu\nu} z^\mu d\bar{z}^\nu \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \bar{z}_\nu dz^\mu - z_\nu d\bar{z}^\nu \right) \end{aligned}$$

Donc  $\omega$  à pour coefficient :

$$\omega_\mu = \frac{1}{2} \bar{z}_\mu \quad \omega_{\bar{\nu}} = -\frac{1}{2} z_\nu = -\overline{\omega_\nu} \quad (3.13)$$

Ce qui donne pour dérivée extérieure :

$$d\omega = \partial_\lambda \omega_\mu dz^\lambda \wedge dz^\mu + \partial_\lambda \omega_{\bar{\nu}} dz^\lambda \wedge d\bar{z}^\nu + \partial_{\bar{\lambda}} \omega_\mu d\bar{z}^\lambda \wedge dz^\mu + \partial_{\bar{\lambda}} \omega_{\bar{\nu}} d\bar{z}^\lambda \wedge d\bar{z}^\nu$$

avec :

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \omega_\mu &= \frac{1}{2} \partial_\lambda \bar{z}_\mu = 0 & \partial_\lambda \omega_{\bar{\nu}} &= -\frac{1}{2} \partial_\lambda z_\nu = -\delta_{\lambda\nu} \\ \partial_{\bar{\lambda}} \omega_\mu &= \frac{1}{2} \partial_{\bar{\lambda}} \bar{z}_\mu = \delta_{\lambda\mu} & \partial_{\bar{\lambda}} \omega_{\bar{\nu}} &= -\frac{1}{2} \partial_{\bar{\lambda}} z_\nu = 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\begin{aligned} d\omega &= \partial_\lambda \omega_\mu dz^\lambda \wedge dz^\mu + \partial_\lambda \omega_{\bar{\nu}} dz^\lambda \wedge d\bar{z}^\nu + \partial_{\bar{\lambda}} \omega_\mu d\bar{z}^\lambda \wedge dz^\mu + \partial_{\bar{\lambda}} \omega_{\bar{\nu}} d\bar{z}^\lambda \wedge d\bar{z}^\nu \\ &= -\frac{1}{2} \delta_{\lambda\nu} dz^\lambda \wedge d\bar{z}^\nu + \frac{1}{2} \delta_{\lambda\mu} d\bar{z}^\lambda \wedge dz^\mu \\ &= -\frac{1}{2} \left( \delta_{\lambda\nu} dz^\lambda \wedge d\bar{z}^\nu + \delta_{\mu\lambda} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\lambda \right) && \text{par anti-symétrique de } \wedge \\ &= -\delta_{\mu\nu} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu && \text{par simple changement de notations} \end{aligned}$$

Pour ramener le résultat dans  $\text{PC}^n$ , on a :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_i(w) &= d(\sigma_i^* \omega_{\sigma_i(w)}) \\ &= \sigma_i^* (d\omega_{\sigma_i(w)}) \\ &= d\omega_{\sigma_i(w)} \circ \sigma_{i*} \\ \implies d\mathcal{A}_i(w)_\mu &= \sigma_{i*}^\alpha (d\omega_{\sigma_i(w)})_{\alpha\mu} \\ &= \sigma_i^* (-\delta_{\mu\nu} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu) \\ &= -\delta_{\mu\nu} \sigma_i^* (dz^\mu) \wedge \sigma_{i*} (d\bar{z}^\nu) \\ &= -\delta_{\mu\nu} \left( dw^\alpha \sigma_{i*}^\mu{}_\alpha + d\bar{w}^\beta \sigma_{i*}^\mu{}_{\bar{\beta}} \right) \wedge \left( dw^\lambda \sigma_{i*}^\nu{}_{\bar{\lambda}} + d\bar{w}^\kappa \sigma_{i*}^\nu{}_{\bar{\kappa}} \right) \\ &= -\delta_{\mu\nu} \left( \sigma_{i*}^\mu{}_\alpha \sigma_{i*}^\nu{}_{\bar{\lambda}} dw^\alpha \wedge dw^\lambda + \sigma_{i*}^\mu{}_\alpha \sigma_{i*}^\nu{}_{\bar{\kappa}} dw^\alpha \wedge d\bar{w}^\kappa + \sigma_{i*}^\mu{}_{\bar{\beta}} \sigma_{i*}^\nu{}_{\bar{\lambda}} d\bar{w}^\beta \wedge dw^\lambda + \sigma_{i*}^\mu{}_{\bar{\beta}} \sigma_{i*}^\nu{}_{\bar{\kappa}} d\bar{w}^\beta \wedge d\bar{w}^\kappa \right) \end{aligned}$$

Enfin, comme  $\pi$  est une submersion riemannienne, l'on retombe sur :

$$d\mathcal{A}_i(w) = d\sigma_{i*}\omega_w = -\delta_{\mu\nu} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu = -g_{\mu\bar{\nu}}(w)dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu = i\Omega(w)$$

## Annexe C — Géodésique de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$

- Géodésique de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  : [4, sec. 3.E]
- longueur et aire sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  : [17, p. 119]

### C.1. Métrique relevée dans les espaces horizontaux

D'abord les vecteurs tangent de  $\mathbb{S}^n$  sont séparés en composantes verticale et horizontale :

$$\forall \mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \omega_p(\mathbf{v})^\# = \mathbf{v}_H + \frac{d}{dt}p \cdot \exp(it\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle) \Big|_{t=0} \quad (3.14)$$

$$= \mathbf{v}_H + i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle p \quad (3.15)$$

Ainsi,  $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n$  :

$$\begin{aligned} g_{\pi(p)}(\pi_*\mathbf{u}, \pi_*\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{u}_H, \mathbf{v}_H \rangle = \langle \mathbf{u} - \omega_p(\mathbf{u})^\#, \mathbf{v} - \omega_p(\mathbf{v})^\# \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \omega_p(\mathbf{v})^\# \rangle - \langle \omega_p(\mathbf{u})^\#, \mathbf{v} \rangle + \langle \omega_p(\mathbf{u})^\#, \omega_p(\mathbf{v})^\# \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle p \rangle - \langle i\Im\langle \mathbf{u}, p \rangle p, \mathbf{v} \rangle + \langle i\Im\langle \mathbf{u}, p \rangle p, i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle p \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle \langle \mathbf{u}, p \rangle - i\Im\langle \mathbf{u}, p \rangle \langle p, \mathbf{v} \rangle - i\Im\langle \mathbf{u}, p \rangle i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle \langle p, p \rangle \end{aligned}$$

Sachant que  $\|p\| = 1$  et  $\Re\langle \mathbf{v}, p \rangle = 0$ , il vient :

$$\begin{aligned} g_{\pi(p)}(\pi_*\mathbf{u}, \pi_*\mathbf{v}) &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle \langle \mathbf{u}, p \rangle - i\Im\langle \mathbf{u}, p \rangle \langle p, \mathbf{v} \rangle - i\Im\langle \mathbf{u}, p \rangle i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle \langle p, p \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \Im\langle \mathbf{v}, p \rangle \Im\langle \mathbf{u}, p \rangle + \Im\langle \mathbf{u}, p \rangle \Im\langle p, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, p \rangle \langle \mathbf{v}, p \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, p \rangle \langle \mathbf{v}, p \rangle \end{aligned}$$

Ce qui donne en coordonnées locales sur  $\mathbb{S}^n$  :

$$g = \delta_{\mu\nu} dz^\mu d\bar{z}^\nu - \delta_{\mu\beta} z^\mu d\bar{z}^\beta \delta_{\alpha\nu} dz^\alpha \bar{z}^\nu = (\delta_{\mu\nu} - z_\nu \bar{z}_\mu) dz^\mu d\bar{z}^\nu$$

### C.2. Ecriture des géodésiques

Les calculs de cette section reprennent en partie les calculs de Mukunda & Simon [23, sec. 4, p. 219].

Etant donnée, sur une variété  $\mathcal{M}$ , une métrique  $g$  de symbole de Christoffel associé  $\Gamma$ , une géodésique  $\gamma$  de  $\mathcal{M}$  vérifie [10] :

$$\forall \sigma, \quad \ddot{\gamma}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu = 0 \quad (3.16)$$

Pour une variété complexe, les contraintes apportés par les composantes holomorphe et anti-holomorphe sont les mêmes. Le système reste donc le même à la différence près que cette fois les symboles de Christoffel vont s'écrire<sup>19</sup> :

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\sigma = g^{\sigma\bar{\beta}} \partial_\mu (g_{\alpha\bar{\beta}}) \quad \Gamma_{\nu\bar{\beta}}^{\bar{\sigma}} = g^{\alpha\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\nu}} (g_{\alpha\bar{\beta}}) \quad (3.17)$$

<sup>19</sup> Les symétries imposées à  $g$  par la forme symplectique  $J$  annule la majorité des composantes de  $g$  et a fortiori, de  $\Gamma$ . Voir [24, sec. 8.4.3]



Le système d'EDP (3.16) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\ddot{\gamma}^\sigma + \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\alpha = 0 & \iff \ddot{\gamma}^\sigma + g^{\sigma\bar{\beta}} \partial_\mu (g_{\alpha\bar{\beta}}) \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\alpha = 0 \\
& \iff g_{\sigma\bar{\beta}} \ddot{\gamma}^\sigma + g_{\sigma\bar{\beta}} g^{\sigma\bar{\beta}} \partial_\mu (g_{\alpha\bar{\beta}}) \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\alpha = 0 \\
& \iff g_{\sigma\bar{\beta}} \ddot{\gamma}^\sigma + \partial_\mu (g_{\alpha\bar{\beta}}) \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\alpha = 0
\end{aligned}$$

Dans le cas de  $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$ , les  $\partial g_{\alpha\bar{\beta}}$  s'écrivent :

$$\partial_\mu (g_{\alpha\bar{\beta}}) = \partial_\mu (\delta_{\alpha\beta} - \bar{z}_\alpha z_\beta) = -\delta_{\mu\beta} \bar{z}_\alpha \quad \partial_{\bar{\nu}} (g_{\alpha\bar{\beta}}) = \partial_{\bar{\nu}} (\delta_{\alpha\beta} - \bar{z}_\alpha z_\beta) = -\delta_{\nu\alpha} z_\beta$$

Donnant les équations :

$$\begin{aligned}
\forall \beta, \quad 0 = g_{\sigma\bar{\beta}} \ddot{\gamma}^\sigma + \partial_\mu (g_{\alpha\bar{\beta}}) \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\alpha \\
= (\delta_{\sigma\beta} - \bar{\gamma}_\sigma \gamma_\beta) \ddot{\gamma}^\sigma - \delta_{\mu\beta} \bar{\gamma}_\alpha \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\alpha & \iff 0 = \ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle \gamma - \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle \dot{\gamma} \\
= \ddot{\gamma}_\beta - \gamma_\beta \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle - \dot{\gamma}_\beta \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle
\end{aligned}$$

Où l'équivalence est justifiée par le fait que les composantes anti-holomorphes des  $\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$  suivent les mêmes contraintes (à conjugaison près) celles holomorphes.

Pour résoudre ce système, le produit hermitien de ce dernier avec  $\gamma$  est calculé :

$$\begin{aligned}
\ddot{\gamma} = \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle \gamma + \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle \dot{\gamma} & \implies \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle = \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle \langle \gamma, \gamma \rangle + \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle^2 \\
& \implies 0 = \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle
\end{aligned}$$

On retrouve alors le fait que  $\dot{\gamma}$  est horizontale et  $\ddot{\gamma} = \gamma \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle$ .

En appliquant à nouveau le produit hermitien mais de l'autre côté, cette fois :

$$\ddot{\gamma} = \gamma \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle \implies \langle \gamma, \ddot{\gamma} \rangle = \langle \gamma, \gamma \rangle \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle = \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle$$

Sachant que  $\gamma \in \mathbb{S}^n$ , on a alors :

$$\begin{aligned}
\|\gamma\| = 1 & \implies \langle \gamma, \dot{\gamma} \rangle + \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle = 0 \\
& \implies \langle \gamma, \ddot{\gamma} \rangle + 2\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle + \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle = 0 \\
& \implies \langle \gamma, \ddot{\gamma} \rangle = -\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle
\end{aligned}$$

Finalement l'EDP devient :

$$\ddot{\gamma} = -\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \gamma$$

Or, il existe une paramétrisation de  $\gamma$  telle que  $\|\gamma\| = 1$ . D'où les solutions :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) \cos(t - t_0) + \dot{\gamma}(t_0) \sin(t - t_0)$$

## TABLE DES FIGURES

1.1	Déviati�n de la phase dynamique d'un signal bivarié par rapport à sa phase totale . . . . .	8
1.2	DONE Ellipse de polarisation d'un signal bivarié r��l . . . . .	9
1.3	Evolution de la phase g��m��trique d'un signal AM-FM-PM . . . . .	10
1.4	DONE Projection sur la sphère de Poincaré . . . . .	11
1.5	DONE ��tats de polarisation associés à divers point de la sphère de Poincaré. . . . .	11
2.1	DONE La première figure de tout bon livre de géométrie différentielle . . . . .	15
2.2	DONE Diagramme de passage de $f$ � $f_*$ et $f^*$ . . . . .	15
2.3	DONE Ruban de M��bius comme variété fibrée . . . . .	18
2.4	DONE Représentation d'une section local . . . . .	19
2.5	DONE Représentation de la section canonique . . . . .	20
2.6	Interprétation géométrique de la fréquence instantanée . . . . .	25
2.7	DONE Représentation des trois phases de $\gamma$ dans le cas pseudo-cyclique . . . . .	26
3.1	DONE Différentes étapes de la fusion de deux trous noir . . . . .	32
3.2	DONE évolution de la phase géométrique sur des données simulées d'ondes gravitationnelles . . . . .	33
3.3	DONE Exemple de densité spectrale d'un signal r��l . . . . .	36
3.4	DONE Décomposition en signal analytique d'un produit de cosinus . . . . .	37
3.5	DONE Idem que pour la figure 3.4 précédente, avec cette fois $\nu_1 = 1.5$ et $\nu_2 = 1.3$ . . . . .	37
3.6	DONE Représentation de l'hypothèse du Théorème de Bedrosian . . . . .	39

## TABLE DES CODES

# RÉFÉRENCES

- [1] Y. AHARONOV AND J. ANANDAN, *Phase change during a cyclic quantum evolution*, Physical Review Letters, 58 (1987), pp. 1593–1596.
- [2] W. BALLMANN, *Lectures on Kähler Manifolds*, vol. 2 of ESI Lectures in Mathematics and Physics, EMS Press, 1 ed., July 2006.
- [3] M. V. BERRY, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 392 (1997), pp. 45–57. Publisher: Royal Society.
- [4] A. L. BESSE, *Manifolds all of whose Geodesics are Closed*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1978.
- [5] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [6] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [7] D. CHRUŚCIŃSKI AND A. JAMIOŁKOWSKI, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.
- [8] E. COHEN, H. LAROCQUE, F. BOUCHARD, F. NEJADSATTARI, Y. GEFEN, AND E. KARIMI, *Geometric phase from Aharonov–Bohm to Pancharatnam–Berry and beyond*, Nature Reviews Physics, 1 (2019), pp. 437–449.
- [9] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [10] M. DO CARMO, *Riemannian Geometry*, Mathematics (Boston, Mass.), Birkhäuser, 1992.
- [11] P. FACCHI, R. KULKARNI, V. I. MAN’KO, G. MARMO, E. C. G. SUDARSHAN, AND F. VENTRIGLIA, *Classical and Quantum Fisher Information in the Geometrical Formulation of Quantum Mechanics*, Physics Letters A, 374 (2010), pp. 4801–4803. arXiv:1009.5219 [quant-ph].
- [12] F. FAURE, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).
- [13] J. FLAMANT, *Une approche générique pour l’analyse et le filtrage des signaux bivariés*, these de doctorat, Ecole centrale de Lille, Sept. 2018.
- [14] J. FLAMANT, N. LE BIHAN, AND P. CHAINAIS, *Time–frequency analysis of bivariate signals*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 46 (2019), pp. 351–383.
- [15] P. FLORES, P.-O. AMBLARD, AND J. FLAMANT, *Damped ellipse decomposition for bivariate signals*.
- [16] H. HOPF, *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Mathematische Annalen, 104 (1931), pp. 637–665.
- [17] D. HUYBRECHTS, ed., *Complex Geometry: An Introduction*, Universitext, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [18] N. KAYBAN, *Riemannian Immersions and Submersions*.
- [19] J. LAFONTAINE, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [20] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [21] ———, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.

- [22] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [23] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [24] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.
- [25] PHAM MÂU QUÂN, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Monographies universitaires de mathématiques, Dunod, Paris, 1969.
- [26] E. M. RABEI, ARVIND, R. SIMON, AND N. MUKUNDA, *Bargmann Invariants and Geometric Phases - a Generalised Connection*, Physical Review A, 60 (1999), pp. 3397–3409. arXiv:quant-ph/9907080.
- [27] E. SJÖQVIST, *Geometric phases in quantum information*, International Journal of Quantum Chemistry, 115 (2015), pp. 1311–1326.
- [28] A. A. VANKOV, *Einstein's Paper: "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from General Relativity Theory"*.
- [29] S. WANG, *Simple proofs of the Bedrosian equality for the Hilbert transform*, Science in China Series A: Mathematics, 52 (2009), pp. 507–510.