

Mémoire de Stage de M2

PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Michel BERTHIER, *et al.*

Master Mix - Université de La Rochelle

2024 - 2025

TABLES DES MATIÈRES

Introduction	1
<hr/>	
PARTIE I — DÉCOMPOSITION DES SIGNAUX MULTIVARIÉE	3
<hr/>	
I — Notion de phase et fréquence instantanée	3
1.1 Analyse temps-fréquence	3
1.1.1 Quelques définitions	3
1.1.2 Amplitude, phase et fréquence instantanée	4
1.2 Transformée en signal analytique	5
1.2.1 Le problème de signaux réels et comment le résoudre	5
1.2.2 Interprétabilité de la transformée en SA	6
1.3 Généralisation aux signaux multivariés	8
1.3.1 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié	9
1.3.2 Apparition de la phase géométrique — MEH	11
Annexe — Complément sur l'analyse temps-fréquence	12
Annexe A Un bon moment...	12
Annexe B Transformée inverse de la fonction de Heaviside.	13

Introduction

- Les signaux multivarié c'est super, ondes gravitationnelles, tout ça tout ça
- La phase géo s'est largement étudié dans le cadre de la méca Q / de l'optique mais nada en théorie du signal
- Nous on voudrait généraliser son étude / calcul à des signaux quelconque (en particulier, par d'EDP pour porter le signal)
- Ca a déjà étant fait en dimension 2 et un petit peu regarder en dimension 3 [4, 3]
- Les outils employés se généralise très mal donc il en faut de nouveaux
- nécessité de faire du temps fréquence

Pour introduire le phénomène qu'est la phase géométrique, on commence par se donner un signal complexe que l'on écrit sous la forme :

$$\psi(t) = a(t)e^{i\varphi(t)}$$

En supposant que ce signal est retourné à sa valeur initial $\psi(t_0)$, au temps t à une phase près, *i.e.* $\psi(t) = e^{i\theta}\psi(t_0)$, cette phase se calcul via la formule :

$$\theta = \arg \langle \psi(t_0), \psi(t) \rangle \quad (0.1)$$

On montre sans mal que cette phase peut également s'écrire par une intégrale :

$$\theta = \arg \langle \psi(t_0), \psi(t) \rangle = -\Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \psi(s), \dot{\psi}(s) \rangle}{\|\psi(s)\|_2^2} ds$$

Si cela est vrai dans le cas univarié, *i.e.* lorsque ψ est à valeur dans \mathbb{C} , ce n'est plus le cas pour le signaux multivarié, *i.e.* $\psi(t) \in \mathbb{C}^n$. L'équation (0.1), elle, est toujours vraie ce qui suggère que la seconde écriture est incomplète.

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apprennent un peu partout en physique, dont l'étude est très instructive mais qui demande énormément de prérequis pour être expliqué proprement. Aussi, la phase géométrique à toujours été décrite dans le cadre de système dynamique régis par une EDP (généralement Schrödinger).

L'objectif de ce rapport sera donc de décrire ce phénomène dans un cadre plus général, à savoir celui signal quelconque. Comme son nom l'indique, cette phase est intrinsèquement liée à la géométrie des l'espace dans lequel évolue le signal étudié et sera donc dans le cadre des variétés différentielles qu'elle sera décrite. Cela demandera de faire appelle, entre autre, à des outils de variété différentielle complexe et fibrée principale. Comme il serait inapproprié de considérer que le lecteur a toutes les bases nécessaire sur le sujet, des **nombreuses** annexes seront dédié aux mathématiques utile à notre propos.

Pour introduire le phénomène qu'est la phase géométrique, toute la première section sera dédié à la notion de phase/fréquence instantanée d'un signal. C'est-à-dire au choix d'une phase $\phi_{\mathbf{x}}$ telle que le signal complexe $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^n$ s'écrit :

$$\mathbf{x} = e^{i\phi_{\mathbf{x}}} \tilde{\mathbf{x}}$$

et telle que cette phase est une interprétation physique. Comme dans la majorité des cas, les signaux sont réels, il nous faudra d'abord expliquer comment transformé un signal réel en complexe de façon à conserver ces propriétés. Tout cela est intimement lié à l'analyse temps-fréquence et il nous faudra commencé par là. En somme, dans la ?? seront présenté dans l'ordre : comment définir la fréquence instantanée d'un signal réel (sous-section 1.1.2), comment transformé ce signal réel en complexe et (sous-section 1.2.1), enfin, comment la notion de fréquence instantanée se généralise au signaux multivarié, *i.e.* à valeur dans $\mathbb{R}^n/\mathbb{C}^n$ (??).

Il résultera de cette première partie que la phase instantanée à l'instant t d'un signal \mathbf{x} commençant à l'instant s'écrit t_0 s'écrit :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t, t_0) = -\Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \mathbf{x}(s), \mathbf{x}'(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds$$

Pourtant, en se plaçant de la cas où \mathbf{x} est un signal

OBJET/FONCTIONS	NOTATIONS
Conjugué complexe	\bar{x}
Transposée (resp. adjoint) de la matrice A	${}^t A$ (resp. A^\dagger)
Distribution de Dirac	δ
Indicatrice de E	$\mathbb{1}_E$
Fonction signe	$\text{sign}(x)$
Transformée de Fourier	$\mathcal{F}[x], \hat{x}$
Transformée en SA	$\mathcal{A}[x], x_+$
Transformée de Hilbert	$\mathcal{H}[x]$
Produit hermitien (resp. scalaire)	$\langle x y \rangle$ (resp. $\langle x, y \rangle$)
Espérance et variance de f suivant ρ	$\mathbb{E}_\rho[f(t)], \mathbb{V}_\rho[f(t)]$
Espace des fonctions p.p. de puissance p^{eme} intégrable à valeur de E dans F	$L^p(E, F)$
Support d'une fonction f	$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$
Matrice de rotation de paramètre Θ (resp. d'angle θ en dimension 2)	R_Θ (resp. R_θ)
Ensemble des matrices symétrique (resp. anti-symétrique)	$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$)

tab. 1 — Indexe des notations

PARTIE I

DÉCOMPOSITION DES SIGNAUX MULTIVARIÉE

TODO DE LA PARTIE (SINON ELLE EST FINIE) :

- rectifier la démo de la proposition 2 (et mettre à jour la formule la où elle est utilisée)
- Principe d'incertitude à éclaircir (comprendre + expliquer) sous-section 1.1.2
- Expliquer le second exemple (bizarre) ??
- À quoi sert Bedrosian au juste ? Théorème 1
- Éventuellement ajouter que qu'part: "On parle éventuellement de signal AM-FM (amplitude modulated - frequency modulated)" corollaire 1.1
- Refaire les graphs en Tikz (????????)
- footnote 2 à régler

I — Notion de phase et fréquence instantanée

Cette section est fortement inspirée des propos de COHEN dans son livre Time frequency analysis [2], chapitre 1 & 2.

1.1 Analyse temps-fréquence

1.1.1 Quelques définitions

Soit x un signal complexe dont \hat{x} ou $\mathcal{F}[x]$ est la transformée de Fourier (dont on supposera quelle existe, ici au moins $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$) :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x(t) \end{array} \qquad \mathcal{F}[x] = \hat{x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \nu & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \end{array}$$

Avant de parlé de fréquences instantanée, il nous faut introduire quelle que définition afin de pouvoir proprement argumenter sa définition. Tout d'abord, à x sont associées deux densités d'énergie :

DÉFINITION 1 (DENSITÉS D'ÉNERGIE) — La *densité d'énergie* (resp. *spectrale*) du signal x , noté ρ (resp. ϱ), est définie comme :

$$\rho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & |x(t)|^2 \end{array} \qquad \varrho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \nu & \longmapsto & |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array} \qquad (1.1)$$

La transformée de Fourier étant une isométrie de l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'énergie totale $E(x) = \|x\|_{L^2}^2$ du signal est indépendante de la représentation de ce dernier (temporelle ou spectrale) :

$$E(x) := \int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varrho(\nu) d\nu \quad (1.2)$$

La première densité, $\rho(t)$, correspond à la puissance (énergie par unité de temps) déployée pour émettre le signal à l'instant t et la seconde, $\varrho(\nu)$, à l'énergie associée à la fréquence ν sur tout le signal. Par exemple, si $x(t) = e^{2\pi i \nu_0 t}$, alors $\hat{x}(t) = \delta(x - \nu_0)$ et on a les densités :

$$\rho(t) = 1 \quad \varrho(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$$

On comprend alors que, du point de vu temporel, le signal a été émis avec une puissance régulière, mais le fait que ϱ soit un dirac indique que toute l'énergie du signal est concentré en une unique fréquence ν_0 .

Les espérances et écart-type ont également une interprétation physique :

DÉFINITION 2 (DURÉE ET LARGEUR DE BANDE) — L'espérance ces densités, pour peu qu'elles existent, sont notées :

$$\mathbb{E}_{\rho} [t] := \int_{\mathbb{R}} t |x(t)|^2 dt \quad \mathbb{E}_{\varrho} [\nu] := \int_{\mathbb{R}} \nu |\hat{x}(\nu)|^2 d\nu$$

Si un signal est localisé temporellement, alors la première espérance/moyenne donne une idée de l'instant d'émission du signal. Si *a contrario*, le signal est localisé en fréquence, la seconde espérance peut s'interpréter comme la fréquence "dominante" du le signal, ou plus généralement comme sa *fréquence moyenne*.

En particulier, et ce sera important pour la suite, dans le cas des signaux réels, l'espérance de ϱ est toujours nulle.

On note de même les variances (toujours à condition d'existence) :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\rho} [t] &:= \mathbb{E}_{\rho} \left[(t - \mathbb{E}_{\rho} [t])^2 \right] & \mathbb{V}_{\varrho} [\nu] &:= \mathbb{E}_{\varrho} \left[(\nu - \mathbb{E}_{\varrho} [\nu])^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_{\rho} [t^2] - \mathbb{E}_{\rho} [t]^2 & &= \mathbb{E}_{\varrho} [\nu^2] - \mathbb{E}_{\varrho} [\nu]^2 \end{aligned}$$

Les écart-types associés sont plus facilement interprétable. Le premier est appelé *durée d'émission* du signal, puisqu'il renseigne l'étalement temporelle du signal ; et le second *largeur de bande (fréquentielle)* puisque, lui, renseigne l'étalement fréquentielle.

Ces interprétations restent limitées à des cas particuliers. Par exemple, nous y reviendrons, si le support de \hat{x} n'est pas connexe, alors la fréquence moyenne devient beaucoup moins pertinente, idem pour la largeur de bande. De même si x n'est pas connexe, la durée d'émission va plutôt se rapprocher du delta entre la première et dernière période d'émission du signal.

1.1.2 Amplitude, phase et fréquence instantanée

Dans le cas des signaux purement complexes, sont très naturellement définies les notions d'*amplitude* et de *phase instantanée* puisqu'elles correspondent respectivement au module et à l'argument de x à l'instant t . Dans le cas le plus simple, où $x(t) = e^{2\pi i \nu t + \varphi}$, la fréquence ν du signal peut s'écrire comme la dérivée :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (2\pi \nu t + \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg x(t)$$

Cela invite à poser les définitions suivantes :

DÉFINITION 3 — Étant donnée un signal $x : t \mapsto a(t)e^{i\phi(t)}$, on appelle a l'amplitude instantanée du signal x , ϕ sa phase instantanée et respectivement ϕ' et $1/2\pi\phi'$ son impulsion et fréquence instantanée à l'instant t .

Pour mieux justifier ces choix de définition, considérons la proposition suivante :

PROPOSITION 1 — Si ϱ admet une espérance, que x est dérivable et que l'on note : alors a et ϕ hérite des régularité de x et on a l'égalité (cf. sous-section A pour une démonstration) :

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho[\phi'] \quad (1.3)$$

De même pour la variance de ϱ :

$$\mathbb{V}_\varrho[\nu] = \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho[(\ln a)'] + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho[\phi'] \quad (1.4)$$

La première égalité (1.3) montre que la moyenne (temporelle) de la fréquence instantanée est égale à la fréquence moyenne (au sens de Fourier). Exprimer ainsi cela paraît évident, ce qui est tout à fait rassurant.

Pour la seconde (1.4), on constate deux composantes (qui, par ailleurs, sont des variances purement temporelle). La première ne porte que sur l'amplitude du signal, et inversement, l'amplitude n'apparaît que sur la première. Il donc cohérent que le terme restant, *i.e.* là où apparaît ϕ' , porte l'information fréquentielle du signal.

1.2 Transformée en signal analytique

Maintenant que la fréquence instantanée est proprement définie pour les signaux complexes, il nous faut adresser le cas réel.

1.2.1 Le problème de signaux réels et comment le résoudre

D'abord, du point de vue de l'analyse temps-fréquence, les signaux réels sont problématiques car leur spectre sont à symétrie hermitienne et leur densité spectrale symétrique :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R} &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{x}(-\nu) = \overline{\hat{x}(\nu)} \\ &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \varrho(-\nu) = \varrho(\nu) \end{aligned}$$

Comme mentionné plus haut, cela implique que la fréquence moyenne de tout signal réel est nulle (intégrale d'une fonction impaire). Ce qui, en plus de ne pas être très instructif, n'est pas cohérent avec l'interprétation physique qu'on voudrait faire cette moyenne. Par exemple, si ϱ prend la forme ci-dessous (??), alors il serait plus naturelle de demander à ce que la fréquence moyenne se trouve autour de 1,4. De même, la largeur de bande spectrale ne correspond plus à l'étalement de chaque gaussienne, mais plutôt à leur espacement.

fig. 1.1 — Exemple de densité spectrale d'un signal réel ESP A 1,4

Même problème avec la covariance : sachant l'égalité des deux notions de fréquences moyenne (équation (1.3), proposition 1), on peut définir la covariance temps-fréquence d'un signal x par :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x) &:= \text{Cov}(t, \phi'(t)) = \mathbb{E}_\rho[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_\rho[t] \mathbb{E}_\rho[\phi'(t)] \\ &= \mathbb{E}_\rho[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_\rho[t] \mathbb{E}_\varrho[\nu] \end{aligned}$$

Ce coefficient est sensé mesurer une corrélation entre l'évolution d'un signal au cours du temps avec ses

fréquences. S'il est réel, alors $\text{Cov}(x)$ sera toujours nulle ; de là à en conclure que la fréquence instantanée de n'importe quel signal (réel) est toujours décorrélée du temps serait, pour le moins, insatisfaisant.

Pour résoudre le problème, une méthode consiste à construire un nouveau signal $\mathcal{A}[x]$ en supprimant les fréquences négatives de x :

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\hat{x}$$

où $\mathbb{1}_E$ est la fonction indicatrice sur l'ensemble E et où le facteur 2 assure la conservation de l'énergie du signal. Cela mène à la définition :

DÉFINITION 4 (TRANSFORMÉE DE HILBERT ET EN SA) — On appelle *transformé de Hilbert* de x , l'application :

$$\mathcal{H}[x] : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{\pi} \oint_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds \end{array} \quad (1.5)$$

où l'intégrale barrée représente la *valeur principale de Cauchy* (voir sous-section B pour plus de détail) :

$$\oint_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

Avec, on définit la *transformée en signal analytique* (SA) de tout signal x comme l'unique application $\mathcal{A}[x]$ telle que $\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\hat{x}$. Elle est donnée par la formule :

$$\mathcal{A}[x] : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & x(t) + i\mathcal{H}[x](t) \end{array} \quad (1.6)$$

Plus généralement, tout signal dont le spectre est à support dans \mathbb{R}^+ sera dit *analytique*.

Pour mieux comprendre ce que fait la transformation en signal analytique, revenons sur la notion de fréquence instantanée pour les signaux réels.

1.2.2 Interprétabilité de la transformée en SA

Pour définir l'amplitude et la phase instantanée d'un signaux réel, on par a nouveau du cas le plus simple. Si x est un signal pur, il va s'écrire :

$$x(t) = a \cos(2\pi\nu t + \varphi), \quad a, \nu, \varphi \in \mathbb{R}$$

Pour généraliser cette écriture, il suffit donc de poser les amplitude et phase instantanée a et ϕ telles que :

$$x(t) = a(t) \cos(\phi(t))$$

Contrairement au cas complexe, ici la pair (a, ϕ) n'est pas unique et pour contraindre ce choix, on s'appuie sur la transformée $\mathcal{A}[x]$. Sachant que, dans le cas $x(t) \in \mathbb{R}$, la transformée de Hilbert est à valeur dans \mathbb{R} (intégrale d'une fonction réelle), on a :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} \implies \begin{cases} x(t) = \Re \mathcal{A}[x] = a(t) \cos \phi(t) \\ \mathcal{H}[x](t) = \Im \mathcal{A}[x] = a(t) \sin \phi(t) \end{cases}$$

D'où la définition :

DÉFINITION 5 (AMPLITUDE ET PHASE INSTANTANÉE) — L'*amplitude instantanée* a_x et la *phase instantanée* ϕ_x de tout signal x réel sont définies comme étant respectivement l'amplitude et la phase de $\mathcal{A}[x]$:

$$a_x = |\mathcal{A}[x]| \quad \phi_x = \arg(\mathcal{A}[x]) \quad (1.7)$$

De même, les *impulsion* et *fréquence instantanée* sont données par ϕ'_x et $1/2\pi\phi'_x$.

Si un signal est présenté sous la forme $x = a \cos \phi$, rien n'implique que a et ϕ correspondent bel et bien à l'amplitude et la phase instantanée. Si ce n'est pas le cas, c'est que cette décomposition n'est "pas la bonne", en cela qu'elles ne s'interprètent pas comme l'on aimerait.

Aussi, quand bien même x peut toujours être écrit comme partie réel de sa transformé en SA, cette écriture n'est nécessairement toujours satisfaisante. Pour le comprendre, détaillons le cas où x s'écrit comme produit de deux signaux purs (??) :

$$x_1(t) = \cos(2\pi\nu_1 t) \cos(2\pi\nu_2 t)$$

fig. 1.2 — Représentation graphique du signal x (rouge) avec $\nu_1 = 3$ et $\nu_2 = 0.1$. Sur l'image de gauche, avec signaux de fréquences pures (bleu et vert). Sur l'image de droite, avec son amplitude (bleu) et sa phase instantanée (vert). Les discontinuités de la phase sont dû à l'arrondi à 2π près de l'argument de $\mathcal{A}[x_1]$ et à la façon dont il est calculé lorsque le signal s'annule (mise à 0). Voir [ici](#) pour un graphique dynamique.

On montre sans mal¹ que si $\nu_1 \geq \nu_2$, alors la transformée en SA de x_1 s'écrit :

$$\mathcal{A}[x_1] = \cos(2\pi\nu_2 t) e^{2i\pi\nu_1 t}$$

Le signal $\mathcal{A}[x_1]$ n'est ici pas sous forme exponentielle à proprement parler puisque le cosinus peut être négatif (pour s'y ramener, il suffit de passer le cos en valeur absolue et d'ajouter π à l'argument lorsque nécessaire) mais l'avantage de cette forme est qu'elle fait clairement apparaître les fréquences $\nu_{1,2}$. En particulier, la fréquence instantanée du signal est la plus grande des deux fréquences ν_1 et ν_2 . La plus petite, elle, se retrouve dans l'amplitude.

Ce résultat est rassurant en cela qu'il est plus naturel de voir le cosinus de basse fréquence comme modulant celui de haute fréquence que l'inverse comme on le voit sur la première image de la figure ??.

Aussi, en mettant les hautes fréquences du signal dans la fréquence instantanée, on s'assure de limiter les variations de l'amplitude. Cela apporte bien plus de contrainte en terme de décomposition (a_{x_1}, ϕ_{x_1}), en cela que si l'inverse étant vrai, alors toutes les fréquences pourraient être envoyées dans l'amplitude, ce qui laisserait la phase invariante.

Cela étant dit, lorsque l'on fait varier ν_1 et ν_2 , le résultat n'est pas toujours si intuitif. C'est notamment le cas lorsque les deux deviennent de plus en plus proche :

fig. 1.3 — Idem que pour la figure ?? précédente, avec cette fois $\nu_1 = 1.5$ et $\nu_2 = 1.3$.

Pour comprendre pourquoi l'amplitude ne fait pas ce qu'on attendrait d'elle, est introduit le théorème de Bedrosian :

THÉORÈME DE BEDROSIAN (1) — Dans sa formulation la plus générale, le théorème de Bedrosian énonce que si deux fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ sont telles l'une des trois assertions suivantes est vraie :

- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda, +\infty[, \text{supp } \hat{g} \subset [\lambda, +\infty[$
- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset]-\infty, \lambda], \text{supp } \hat{g} \subset]-\infty, -\lambda]$
- $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \setminus \{(0, 0)\} \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda_1, \lambda_2], \text{supp } \hat{g} \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda_2, \lambda_1]$

alors la transformée de Hilbert de leur produit s'écrit (voir [6] pour une démonstration) :

$$\mathcal{H}[fg] = f\mathcal{H}[g] \tag{1.8}$$

Dans le cas d'un signal réel, suivant la définition 5 on peut écrire $x = a_x \cos \phi_x$. Comme a_x et $\cos \phi_x$ sont réelles, seule la troisième condition du théorème de Bedrosian peut être satisfaite pour peu que $\lambda_1 = \lambda_2$. Ainsi :

¹ \hat{x}_1 est donné par 4 Diracs, en ne gardant que ce non nul sur \mathbb{R}^+ on obtient le spectre de $\mathcal{A}[x_1]$ et il reste plus qu'à inverser la transformée de Fourier.

COROLLAIRE 1.1 — Toujours avec les même notations, si $a_x \in L^2(\mathbb{R})$, $\cos \phi_x \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a_x] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi_x] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda] \quad (1.9)$$

Alors on a :

$$\mathcal{H}[x] = a_x \mathcal{H}[\cos \phi_x] \quad \text{et si } a_x(t) \neq 0, \quad \mathcal{H}[\cos \phi_x](t) = \sin \phi_x(t) \quad (1.10)$$

Pour interpréter ce corollaire, prenons un autre exemple : $x_2(t) = a(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$. Sa transformé de Fourier est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{x}_2(\nu) &= \hat{a}(\nu) * \frac{1}{2}(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{a}(\nu + \nu_0) + \hat{a}(\nu - \nu_0)) \end{aligned}$$

Graphiquement, la transformé de Fourier de x_2 duplique le graphe de \hat{a} en $\pm\nu_0$ et somme les deux. La condition (1.9) du corollaire 1.1 demande alors que ν_0 soit choisie de telle sorte que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a] \subset [-\nu_0, \nu_0]$$

C'est-à-dire qu'il n'y ait pas de chevauchement entre les deux courbes $\Gamma_{\pm} : \nu \mapsto \hat{a}(\nu \mp \nu_0)$ (voir ?? ci-dessous). Moralement, cela assure qu'en ne prenant que la partie positive du spectre de x_2 , l'on ne ramène pas avec une partie de $\hat{a}(\nu + \nu_0)$. Quant bien même cette explication est simpliste puisqu'ici ϕ est linéaire, on peut voir que le phénomène est finalement très proche de celui d'aliasing.

fig. 1.4 — Sur les deux graphiques sont représentés en vert \hat{a} et en violet \hat{x}_2 . Dans le premier cas l'hypothèse de Bedrosian est respectée mais pas dans le second.

Pour revenir sur l'exemple x_1 précédent, dans la seconde figure ??, l'amplitude ne colle plus à l'interprétation que l'on voudrait justement parce que la condition de Bedrosian n'est plus respectée (à savoir $\nu_1 \geq 2\nu_2$). Formellement, **JE COMPRENDS TOUJOURS PAS COMMENT CA POSE PROBLEME DANS LA DEFINITION / INTERPRETATION DE $\mathcal{A}[x]$! HHHHHH !!!**

1.3 Généralisation aux signaux multivariés

Maintenant que les paramètres instantanée sont proprement définie pour les cas réel et complexe, qu'en est il des signaux multivariés :

DÉFINITION 6 (SIGNAL MULTIVARIÉ) — Un *signal multivarié*, ou *n-varié*, est un vecteur composé de $n \in \mathbb{N}^*$ signaux x_i . Pour $n = 2$ (resp. $= 3$), on parle de signal *bivarié* (resp. *trivarié*). Dans la continuité de ce qui à été dit dans l'plus tôt, dans le cas des signaux réels, on s'intéressera au vecteur composé des transformées en SA (eq. (1.6), déf. 4) des x_i . **Au moins dans toute cette sous-section**, un tel signal sera noté :

$$x_+(t) : \quad \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathcal{A}[x_1] \\ \mathcal{A}[x_2] \\ \vdots \\ \mathcal{A}[x_n] \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On supposera que chaque composante x_i de \mathbf{x} aura autant de régularité et de condition d'intégrabilité

que nécessaire (il vaudra préciser lesquelles à un moment).

Le fait que \mathbf{x} soit à valeur dans \mathbb{C}^n impose un choix naturel de d'amplitude instantanée : sa norme. L'on notera alors dans tout la suite (sauf précision) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = a(t) \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\| = 1, \quad a \geq 0$$

Le choix de la phase instantanée, en revanche, n'est pas plus commode. Si l'on cherche à écrire \mathbf{x} sous la forme :

$$a(t)e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\alpha_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\alpha_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\alpha_n(t)} \end{pmatrix}$$

alors n'importe quel choix de ϕ est valable, il suffit que $\alpha_i = \phi_i - \phi$.

1.3.1 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié

Afin de contraindre ce choix, on s'inspire propriétés de la phase instantanée vu plus tôt pour en déduire deux approches :

- D'une part, l'espérance de la fréquence instantanée (ici vu comme dérivée à 2π près de la phase²) doit donnée la fréquence moyenne au sens de Fourier, eq. (1.3).
- D'autre part, les conditions d'interprétation (1.9) de la décomposition (a_x, ϕ_x) , corollaire 1.1, exige que les hautes fréquences du signal se retrouve dans la phase.

Pour cela on introduit les notations utiles au cas multivarié :

DÉFINITION 7 (DENSITÉ D'ÉNERGIE) — Étant donné un signal multivarié $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, les densités d'énergie de chaque composante x_i sont notées :

$$\begin{aligned} \rho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto |x_i(t)|^2 = a(t)^2 a_i(t)^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \varrho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \nu &\longmapsto |\hat{x}_i(\nu)|^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Et les densités d'énergies associées au signal \mathbf{x} complet :

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \varrho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \nu &\longmapsto \|\hat{\mathbf{x}}(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) \end{aligned} \quad (1.12)$$

La première approche, inspiré de [1] consiste donc de reprendre le “calculation trick” (1.15), pour en

²La pertinence de cette définition dans le cas multivarié sera discuté plus loin... **or is it ?**

déduire la fréquence moyenne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\rho [\nu] &= \int_{\mathbb{R}} \nu \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) d\nu \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\varrho_i} [\nu] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'_i(t) \rho_i(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t)^2 \sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i(t)^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{i=1}^n \phi'_i a_i^2 \right]
\end{aligned}$$

Ce qui mène à une première (potentielle) définition de la phase instantanée :

$$\phi = \int \sum_{i=1}^n \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds = \sum_{i=1}^n \int \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds \quad (1.13)$$

La seconde approche, fortement inspirée par les travaux de Lilly & Olhede [5], se base sur l'idée de séparation haute-basse fréquence du signal \mathbf{x} . Pour cela, l'on commence par faire apparaître la phase ϕ — pour l'instant inconnue — en écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\phi(t)} e^{-i\phi(t)} \mathbf{x}(t) := e^{i\phi(t)} \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

Si ϕ est bien choisie, alors $\tilde{\mathbf{x}}$ contient les informations associées à l'amplitude et la polarisation de \mathbf{x} . Or, la phase doit contenir les hautes fréquences du signal. Pour s'en assurer on demande, à l'inverse, que les basses fréquences du signal soient données par $\tilde{\mathbf{x}}$ en limitant ces variations. Concrètement, ϕ doit être choisie de sorte à minimiser la dérivée $\tilde{\mathbf{x}}'$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \operatorname{argmin}_{\theta(t)} \|\tilde{\mathbf{x}}'(t)\|_2^2 = \operatorname{argmin}_{\theta(t)} \left\| e^{-i\theta(t)} (\mathbf{x}'(t) - i\theta'(t) \mathbf{x}(t)) \right\|_2^2 = \operatorname{argmin}_{\theta(t)} \|\mathbf{x}'(t) - i\theta'(t) \mathbf{x}(t)\|_2^2$$

La contrainte ne dépendant que de la dérivée θ' , on se ramène à :

$$\min_{\theta'(t)} \|\tilde{\mathbf{x}}'(t)\|_2^2 = \min_{\theta'(t)} \|\mathbf{x}'(t) - \theta'(t) \mathbf{x}(t)\|_2^2$$

En rappelant que $\frac{d}{dx} \|f(x)\|_2^2 = 2\Re \langle f(x), f'(x) \rangle$, il vient que ce minimum³ est atteint par $\phi'(t)$ à condition que :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\phi'} \|\mathbf{x}' - i\phi' \mathbf{x}\|_2^2 = 0 &\iff 0 = 2\Re \left\langle \mathbf{x}' - i\phi' \mathbf{x}, \frac{d}{d\phi'} (\mathbf{x}' - i\phi' \mathbf{x}) \right\rangle \\
&= 2\Re \langle \mathbf{x}' - i\phi' \mathbf{x}, -i\mathbf{x} \rangle \\
&= 2\Re \left(i \langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle \right) + 2\phi' \Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\
&= -2\Im \langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle + 2\phi' \|\mathbf{x}\|_2^2
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\phi' = \frac{\Im \langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \frac{-\Im \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \quad \text{et} \quad \phi = -\Im \int \frac{\langle \mathbf{x}(s), \mathbf{x}'(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds \quad (1.14)$$

³ L'extremum obtenu est l'unique minimum globale puisque $t \mapsto \|at + b\|^2$ est strictement convexe pour $a \neq 0$.

Ce qui, sous forme exponentiel, se réécrit :

$$\begin{aligned}
-\Im m \frac{\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} &= -\Im m \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t) a_i(t) e^{i\phi_i(t)} \overline{\left((aa_i)'(t) + a(t) a_i(t) i\phi_i'(t) \right) e^{i\phi_i(t)}} \\
&= -\Im m \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t) a_i(t) (aa_i)'(t) - ia(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \\
&= -\frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n -a(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i(t)^2 \phi_i'(t)
\end{aligned}$$

Soit la même expression que (1.13) obtenue par le premier raisonnement :

$$-\Im m \int \frac{\langle \mathbf{x}(s), \mathbf{x}'(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \int \sum_{i=1}^n a_i(s)^2 \phi_i'(s) = \sum_{i=1}^n \int a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds$$

Il semblerait alors que $\frac{\Im m \langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$ soit un bon choix de phase instantanée. À noter que cette phase n'est définie qu'à une constante d'intégration près, autrement dit, à un choix de phase initiale près.

1.3.2 Apparition de la phase géométrique — MEH

Pour rendre compte de la pertinence de cette expression, détaillons un cas particulier. Supposons que le signal \mathbf{x} soit cyclique à une phase près. C'est-à-dire qu'entre les deux instant t_0 et t l'on ait la relation :

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x}(t) = e^{i\theta} \mathbf{x}(t_0)$$

Dès lors, la phase instantanée à l'instant t devrait être correspondre à θ et on peut l'écrire en fonction de \mathbf{x} :

$$\arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \arg \langle e^{i\theta} \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \theta$$

On pourrait alors s'attendre à avoir l'égalité :

$$\arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \theta = -\Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \mathbf{x}(s), \mathbf{x}'(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds$$

Or, si c'est vrai dans le cas univarié, dès que $n \geq 2$, ce n'est plus le cas. Cette erreur, cette nouvelle phase ne peut pas être

COMPLÉMENT SUR L'ANALYSE TEMPS-FRÉQUENCE

Annexe A — Un bon moment...

Pour montrer les formules de la proposition 1, on commence par montrer ce que Cohen [2] appelle les :

PROPOSITION 2 (“CALCULATION TRICKS”) — Si le signal est n fois dérivable et que la densité d'énergie spectrale associée ϱ admet un moment d'ordre n , alors ce moment est donnée par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_\varrho[\nu^n] = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \left\langle x, \frac{d^n}{dt^n} x \right\rangle \quad (1.15)$$

Avec les hypothèses analogues, les moments de ρ s'écrivent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_\rho[t^n] = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu) \frac{d^n}{d\nu^n} \overline{\hat{x}(\nu)} d\nu = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \left\langle \hat{x}, \frac{d^n}{d\nu^n} \hat{x} \right\rangle \quad (1.16)$$

Démonstration de la proposition 2

À supposer que les intégrales existes et que le théorème de Fubini s'applique, on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \nu^n \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu^n \hat{x}(\nu) \overline{\hat{x}(\nu)} d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \nu^n \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} e^{2i\pi\nu t'} dt' d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \end{aligned}$$

Ici, on remarque que :

$$\begin{aligned} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} &= \nu^{n-1} \frac{1}{-2i\pi} \frac{d}{d\nu} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \\ &= \nu^{n-2} \frac{1}{(-2i\pi)^2} \frac{d^2}{d\nu^2} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{d\nu^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \end{aligned}$$

Ce qui permet, en jouant sur les ordres d'intégrations et les propriétés du Dirac, d'obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varrho[\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{dt^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\
&= \left(\frac{1}{-2i\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}[1](t-t') dt dt' \\
&= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt dt' \\
&= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt' dt \\
&= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt
\end{aligned}$$

■

Démonstration de l'équation (1.3), proposition 1

Avec les hypothèses de la proposition 2 précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \frac{i}{2\pi} \rho(t) \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x'(t)} dt = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i\phi(t)} \overline{(a'(t) e^{i\phi(t)} + ia(t) \phi'(t) e^{i\phi(t)})} dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i\phi(t)} (a'(t) e^{-i\phi(t)} - ia(t) \phi'(t) e^{-i\phi(t)}) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) (a'(t) - ia(t) \phi'(t)) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \phi'(t) a(t)^2 dt
\end{aligned}$$

On peut se convaincre que le premier terme doit être nul car l'espérance doit être réelle. On peut s'en assurer par le calcul en notant que c'est l'inégale d'une dérivée :

$$\int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (a^2)'(t) dt = \frac{1}{2} \rho(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Ce qui donne bien :

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \phi'(t) a(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt$$

■

Démonstration de l'équation (1.4), proposition 1

à démo comme PNL

■

Annexe B — Transformée inverse de la fonction de Heaviside

Définissons d'abord proprement la valeur principale de Cauchy :

DÉFINITION 8 (VALEUR PRINCIPALE DE CAUCHY) — La *valeur principale de Cauchy* est la distribution, notée $\text{vp}\frac{1}{x}$, définie par dualité :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \left\langle \text{vp}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle &= \int_0^t \frac{\varphi(t)}{t} dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt \end{aligned} \quad (1.17)$$

Ici $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide et la limite en ε assure que l'intégrale (impropre) converge bien. La valeur de cette intégrale est également appelée sa *valeur principale*.

La distribution $\text{vp}\frac{1}{x}$ est la valeur principale de la fonction inverse dans le sens où son produit avec l'identité donne 1 ($\langle \text{id}_{\mathbb{R}} \times \text{vp}\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{vp}\frac{1}{x}, \text{id}_{\mathbb{R}} \times \varphi \rangle = 1$) mais avec des propriétés d'intégration supplémentaires. Entre autre :

PROPRIÉTÉ 1 — La transformée de Fourier de la valeur principale de Cauchy est donnée, au sens des distributions, par :

$$\mathcal{F} \left[\text{vp}\frac{1}{x} \right] = -i\pi \text{sign} \quad (1.18)$$

On en déduit la transformée de Fourier inverse :

$$\mathcal{F}^{-1} [2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] = \mathcal{F}^{-1} [1 + \text{sign}] = \delta + \frac{i}{\pi} \text{vp}\frac{1}{x} \quad (1.19)$$

Démonstration

Par définition, la transformée de Fourier de la valeur principale est telle que, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F} \left[\text{vp}\frac{1}{x} \right], \varphi \right\rangle &= \left\langle \text{vp}\frac{1}{x}, \hat{\varphi} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\varphi}(\nu)}{\nu} d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\hat{\varphi}(\nu) - \hat{\varphi}(-\nu)}{\nu} d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2i\pi\nu t} dt - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{2i\pi\nu t} dt \right) d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) (e^{-2i\pi\nu t} - e^{2i\pi\nu t}) dt d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} -2i\varphi(t) \sin(2\pi\nu t) dt d\nu \\ &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\nu t)}{\nu} d\nu dt \end{aligned}$$

En posant $u = 2\pi\nu t \text{sign}(t)$ (le signe de t assure que l'on ait le même signe dans et hors du sin), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F} \left[\text{vp}\frac{1}{x} \right], \varphi \right\rangle &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_0^{+\infty} \text{sign}(t) \frac{\sin(u)}{u} du dt \\ &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \frac{\pi}{2} \text{sign}(t) dt \\ &= \langle -i\pi \text{sign}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

■

Finalement, la condition sur $\mathcal{A}[x]$ se traduit bien par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x} &\iff \mathcal{A}[x] = \mathcal{F}^{-1}[\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x}] \\
&= \mathcal{F}^{-1}[\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] * \mathcal{F}[\hat{x}] \\
&= \left(\delta + \frac{i}{\pi} \text{vp} \frac{1}{x} \right) * x \\
&= x + \frac{i}{\pi} \text{vp} \frac{1}{x} * x
\end{aligned}$$

TABLE DES FIGURES

TABLE DES CODES

RÉFÉRENCES

- [1] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [2] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [3] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [4] ———, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.
- [5] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [6] S. WANG, *Simple proofs of the Bedrosian equality for the Hilbert transform*, Science in China Series A: Mathematics, 52 (2009), pp. 507–510.