

Mémoire de Stage de M2

PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Pierre-Olivier AMBLARD, Julien FLAMANT & Michel
BERTHIER

Master MIX – Université de La Rochelle

2024 – 2025

TABLES DES MATIÈRES

Introduction	1
Indexe des notations	2
<hr/>	
PARTIE I — PHASE ET FRÉQUENCE INSTANTANÉE D’UN SIGNAL	3
<hr/>	
I — Introduction de la phase géométrique	4
1.1 Cas univarié : signaux AM-FM	4
1.2 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié	5
1.3 Apparition de la phase géométrique.	8
II — Décomposition des signaux multivariées	9
<hr/>	
PARTIE II — LEGACY	10
<hr/>	
I — Paramètre instantanée dans la cas complexe	10
1.1 Quelques définitions	10
1.2 Amplitude, phase et fréquence instantanée	11
II — Transformée en signal analytique	12
2.1 Le problème de signaux réels et comment le résoudre	12
2.2 Interprétabilité de la transformée en SA.	13
III — Généralisation aux signaux multivariés	16
3.1 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié	16
Annexe — Complément sur l’analyse temps-fréquence	19
Annexe A Un bon moment...	19
Annexe B Transformée inverse de la fonction de Heaviside.	21

INTRODUCTION

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui demande beaucoup de contexte pour être expliqué. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant t d'un signal complexe ψ est donné par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) = \arg \langle \psi(t), \psi(t_0) \rangle \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\psi}(s), \psi(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\psi(t) \rightsquigarrow \psi'(t) = e^{i\alpha(t)} \psi(t)$$

Cette propriété rend la phase Φ_{geo} intrinsèquement liée à la trajectoire que prend la projection de ψ dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ et par conséquence, à la géométrie de ce dernier, d'où son nom.

Ceci à largement été étudié dans le cadre de système dynamique régis par EDP [4, 11], notamment en mécanique quantique avec l'équation Schrödinger [1, 12, 13]. Ce n'est que récemment que Le Bihan, Flament et Amblard se sont intéresser à son application en traitement du signal dans le cas de signaux bivariés à bande fine [6, 7].

L'objectif de ce mémoire est alors de résumer les résultats et interprétations de la phase géométrique mais du point de vue du traitement du signal.

INDEXE DES NOTATIONS

OBJET/FONCTION	NOTATION
Conjugué complexe	\bar{x}
Transposée (resp. adjoint) de la matrice A	${}^t A$ (resp. A^\dagger)
Distribution de Dirac	δ
Indicatrice de E	$\mathbb{1}_E$
Fonction signe	$\text{sign}(x)$
Transformée de Fourier	$\mathcal{F}[x], \hat{x}$
Transformée en SA	$\mathcal{A}[x]$
Transformée de Hilbert	$\mathcal{H}[x]$
Produit hermitien	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Espérance et variance de f suivant ρ	$\mathbb{E}_\rho[f(t)], \mathbb{V}_\rho[f(t)]$
Espace des fonctions p.p. de puissance p^{eme} intégrable à valeur de E dans F	$L^p(E, F)$
Support d'une fonction f	$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$
Matrice de rotation de paramètre Θ (resp. d'angle θ en dimension 2)	R_Θ (resp. R_θ)
Ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$)
Ensemble des matrices hermitiennes (resp. anti-hermitiennes) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$)

Objectif du mémoire :

- Décrire la phase géométrie pour les signaux
- Généralisation des signaux AM-FM (-PM)
- Interprétation de ses paramètres
- calcul de leur phases

PARTIE I

PHASE ET FRÉQUENCE INSTANTANÉE D'UN SIGNAL

1 — Introduction de la phase géométrique

- 1.1 — Un peu d'analyse temps fréquence
- 1.2 — Les phases totale et dynamique
- 1.3 — Phase Géométrique

2 — Décomposition des signaux multivariés

2.1 — Signal AM-FM-PM bivarié

- la formule avec un peu d'explication sur d'où ça vient
- les hypothèses sur la décompositions via Bedrosian
- interprétation géométrique
- projection sur la sphère avec Stokes et tout

2.2 — Calcul de la phase géom dans ce cas

2.3 — Généralisation au plus haute dimension

- Un mot sur le cas trivarié par Lilly [9].
- Lefevre à discuter des généralisations [8, sec. I.3] avec des expo et algèbre Clifford : trop de contrainte sur les dimensions des signaux.
- Généralisation par rotation du plan de polar : boff parce que pas calculable en générale et mais surtout on manque le plus important, ça savoir....
- La phase géo est invariante par transfo de jauge, donc il faut faire apparaître $P\mathbb{C}^{n-1}$ dans la décomposition.
- Remarque : c'est le cas en bivarié car $P\mathbb{C}^1 \cong S^2$!
- S'il faut vraiment se pencher sur $P\mathbb{C}^{n-1}$, allons-y (transition partie suivante)

A — Plus de détail sur l'analyse temps-fréquence

A.1 — Calculation trick

A.2 — Transfo en SA et Bedrosian

En traitement du signal, la phase d'un signal est intrinsèquement lié à la notion de fréquence instantanée, qui joue un rôle important en analyse temps-fréquence. C'est donc de point que commencera notre discussion pour introduire la phase géométrique. Pour cela, seront rapidement introduit quelques notions et résultats d'analyse temps-fréquence dans le cas univarié (sec. 1.1). Suite à quoi sera définie la phase instantanée pour le cas multivarié (sec. 1.2), qui permettra enfin de mettre en évidence la phase géométrique (sec. I).

Dans une seconde partie, seront introduit les signaux bivarié dit AM-FM-PM, dont la phase géométrique sera calculer explicitement (sec. II). Cela permettra de mettre en évidence certaines de ses propriétés, ce qui permettra ensuite de discuter des généralisations des signaux AM-FM-PM au delà du cas bivarié (sec. ??) et de discuter de la pertinence ces décompositions pour étudier la phase géométrique (sec. ??).

I — Introduction de la phase géométrique

1.1 Cas univarié : signaux AM-FM

En traitement du signal, l'analyse fréquentielle par la transformée de Fourier est un incontournable. Seulement, cette transformation fait perdre toute notion temporelle : si l'étude du spectre du signal permet de dire quelles fréquences apparaissent dans le signal, elle ne permet pas de dire à quel moment. C'est en réponse à cela, entre autre, qu'est développé l'analyse temps-fréquence.

A cette fin, sont définies des paramètres associées aux fréquences mais avec une dépendance en temps :

DÉFINITION 1 (PARAMÈTRES INSTANTANÉES) — Soit x , est un signal complexe écrit sous forme exponentielle :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & a(t)e^{i\phi(t)} \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \phi(t) \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

a est appelé *amplitude instantanée* du signal, $1/2\pi\phi'$ sa *fréquence instantanée* et sa *phase instantanée* est définie, modulo un choix de phase initiale, par :

$$\Phi_{\text{inst}}(x, t_0, t) = \phi(t) - \phi(t_0) \quad (1.2)$$

Pour les signaux réels, ces notions sont moins évidentes à définir puisqu'elles demandent d'écrire les signaux sous la forme :

$$x(t) = a(t) \cos \phi(t)$$

Auquel cas, le choix de la pair (a, ϕ) n'est pas unique. Il existe tout de même un "bon" choix de telle pair dans le cas des signaux dit AM-FM :

DÉFINITION 2 (SIGNAL AM-FM) — Un signal réel de la forme :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a(t) \cos \phi(t) \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \quad (1.3)$$

est dit *AM-FM* (*amplitude modulated - frequency modulated*) si a et $\cos \phi$ admettent des transformée de Fourier et si de plus la première a un spectre concentré sur les basses fréquences, la seconde concentré sur les hautes fréquences et que les deux ne se chevauche pas. Formellement, ces conditions demande qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda] \quad (1.4)$$

Dans ce cas, a et ϕ donne lieu au même définition que pour le cas complexe.

Ces conditions sont liées au théorème de Bedrosian, et plus de détail se trouve dans l'annexe ???. Pour le dire rapidement, elles évitent que toutes les fréquences du signal se trouve dans l'amplitude a dans la décomposition (a, ϕ) , auquel cas, x n'aurait "pas de fréquence" au sens où ϕ pourrait être choisie constante,

voir nulle.

Sous ces conditions, x peut être vu comme le signal complexe $\mathcal{A}[x]$ telle que :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} = a(t)\cos\phi(t) + ia(t)\sin\phi(t) = x + i\Im\mathcal{A}[x]$$

L'on parle alors de transformée en *signal analytique* et $\mathcal{A}[x]$ a naturellement les mêmes paramètres instantanée que x .

L'intérêt d'introduire toutes ces notions est que les signaux analytiques souffre du même problème que les signaux réels. En effet, en écrivant un signal \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\Phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\Phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\Phi_n(t)} \end{pmatrix}$$

Le fait que \mathbf{x} soit à valeur dans \mathbb{C}^n impose un choix naturel d'amplitude instantanée : sa norme. Pour ce qui est de la phase instantanée, en revanche, n'importe qu'elle choix de ϕ convient *a priori* :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} = a(t)e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\psi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\psi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\psi_n(t)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a(t) = \|\mathbf{x}(t)\|_2 \\ \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\|_2 = 1 \\ \phi_i = \phi + \psi_i \end{cases}$$

Il suffit que les ψ_i soient ajustés pour assurer que $\phi_i = \phi + \psi_i$.

À noter, que si a et ϕ sont correspondent respectivement à une amplitude et une phase, le vecteur restant $(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n}$ correspond à un vecteur de polarisation, sur lequel nous reviendrons dans la section II suivante.

1.2 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié

On se propose ici de définir la phase instantanée comme suit :

DÉFINITION 3 (PHASE DYNALIQUE/INSTANTANÉE) — La phase instantanée ou dynamique (à l'instant t partant du t_0) d'un signal multivarié $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ quelconque, est définie par la formule :

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \int_{t_0}^t \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi'_i(s) ds \quad (1.5)$$

On s'autorisera à omettre les paramètres de Φ_{dyn} lorsque cela ne prête pas à confusion.

Outre l'aspect variationnelle de cette formule, le terme "dynamique" viens du fait que, lorsque \mathbf{x} suit une équation de Schrödinger :

$$i \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = h\mathbf{x}(t) \quad (1.6)$$

la dérivée $\dot{\mathbf{x}}$ dans la formule (2.15) ci-dessus se voit remplacé par l'hamiltonien $h\mathbf{x}$ [1, sec. 2], [12, p. 215], donnant :

$$\Phi'_{\text{dyn}} = -i \int_{t_0}^t \frac{\langle h\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds$$

Sachant que \mathbf{x} n'a aucune raison de suivre une telle équation dans notre cas, poser $h = i \frac{d}{dt}$ enlève

toute contrainte, auquel cas $\Phi'_{\text{dyn}} = \Phi_{\text{dyn}}$.

Cela étant, deux arguments sont donnés pour motiver cette définition :

Argument variationnelles

Le premier, fortement inspirée par les travaux de Lilly & Olhede [10], consiste à généraliser la condition (2.9) de séparation haute/basse fréquences sur les signaux AM-FM. Pour cela, l'on commence par faire apparaître une phase ϕ — pour l'instant inconnue — en écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\phi(t)} e^{-i\phi(t)} \mathbf{x}(t) := e^{i\phi(t)} \mathbf{y}(t)$$

Si ϕ est bien choisie, alors \mathbf{y} ne devrait contenir que les informations associées à l'amplitude et la polarisation de \mathbf{x} . Or, conformément à la condition (2.9), la phase doit contenir les hautes fréquences du signal et, inversement, les basses fréquences doivent se trouver dans ce qui reste.

La fréquence donnant, pour le dire vite, la vitesse d'ondulation, la contrainte sur \mathbf{x} va être de limite les variations de \mathbf{y} . Concrètement, ϕ doit être choisie de sorte à minimiser la dérivée $\dot{\mathbf{y}}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \left\| e^{-i\theta(t)} (\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t) \mathbf{x}(t)) \right\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t) \mathbf{x}(t)\|_2^2$$

La contrainte ne dépendant que de la dérivée θ' , on se ramène à :

$$\min_{\theta(t)} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \min_{\theta'(t)} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - \theta'(t) \mathbf{x}(t)\|_2^2$$

En rappelant que $\frac{d}{dx} \|f(x)\|_2^2 = 2\Re \langle f(x), f'(x) \rangle$, il vient que ce minimum¹ est atteint par $\phi'(t)$ à condition que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi'} \|\dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}\|_2^2 = 0 & \iff 0 = 2\Re \left\langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}, \frac{d}{d\phi'} (\dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}) \right\rangle \\ & = 2\Re \langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}, -i\mathbf{x} \rangle \\ & = 2\Re \left(i \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle \right) + 2\phi' \Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ & = -2\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle + 2\phi' \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\phi' = \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$ et :

$$\phi(t) = \Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|_2^2} ds = \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \quad (1.7)$$

Arguments des moyennes

Autre argument, cette fois inspiré de [2], ce base sur la notion de fréquence moyenne. D'abord dans le cas d'un signal complexe univarié, sont définies les fonctions de densités d'énergie (resp. d'énergie spectale) comme :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \rho : t \longmapsto |x(t)|^2 & \text{resp. } \varrho : \nu \longmapsto |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array} \quad (1.8)$$

¹ L'extremum obtenu est l'unique minimum globale puisque $t \mapsto \|at + b\|^2$ est strictement convexe pour $a \neq 0$.

À partir de ces dernières est définie la fréquence moyenne de x comme l'espérance de ϱ , $\mathbb{E}_\varrho[\nu]$. Cette fréquence moyenne est liée à la fréquence instantanée par la formule :²

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho[\phi'] \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un signal $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ multivarié, les densités d'énergies se définissent comme :

$$\begin{aligned} \rho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ & \varrho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto |x_i(t)|^2 = a(t)^2 a_i(t)^2 & \nu &\longmapsto |\hat{x}_i(\nu)|^2 \\ \\ \rho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ & \varrho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) & \nu &\longmapsto \|\hat{\mathbf{x}}(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varrho_i(t) \end{aligned}$$

Le second argument consiste alors à dire que l'égalité des moments (2.3) doit rester vraie dans le cas multivarié. Cela assure au moins que la fréquence instantanée de \mathbf{x} , $1/2\pi\phi'$, à pour moyenne la fréquence moyenne en sens de Fourier.

En appliquant la formule (2.3) au ϱ_i , et en notant toujours $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \int_{\mathbb{R}} \nu \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) d\nu \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\varrho_i}[\nu] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'_i(t) \rho_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t)^2 \sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{i=1}^n \phi'_i a_i^2 \right] \end{aligned}$$

Ce qui mène à poser $\sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i^2(t)$ pour la fréquence instantanée, avec la phase associée :

$$\phi = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds \quad (1.10)$$

Formule qui concorde bien avec celle de la phase dynamique une fois explicité :

$$\begin{aligned} \Im m \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} &= \Im m \left(\frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n \left((aa_i)'(t) + a(t) a_i(t) i \phi'_i(t) \right) e^{i\phi_i(t)} \overline{a(t) a_i(t) e^{i\phi_i(t)}} \right) \\ &= \frac{1}{a(t)^2} \Im m \left(\sum_{i=1}^n a(t) a_i(t) (aa_i)'(t) + i a(t)^2 a_i(t)^2 \phi'_i(t) \right) \\ &= \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t)^2 a_i(t)^2 \phi'_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(t)^2 \phi'_i(t) \end{aligned}$$

²cette formule se généralise à tout les moments de ϱ et existe également pour les moments de ρ , voir [3, sec. 1.4] pour une démonstration "à la physicienne"

D'où

$$\Im \int \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \int \sum_{i=1}^n a_i(s)^2 \phi'_i(s) = \sum_{i=1}^n \int a_i(s)^2 \phi'_i(s) ds$$

1.3 Apparition de la phase géométrique — A REFAIRE

Pour rentre compte de la pertinence de cette expression, commençons par noter qu'il existe une autre façon standard de définir la phase d'un signal, la *phase totale* :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle \quad (1.11)$$

Il n'est pas clair, dans un cadre générale, comment et pourquoi cela s'interprète bien comme une phase et c'est encore pire lorsque l'on explicite sa valeur :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \arg \left(\sum_{i=1}^n a_i(t) a_i(t_0) e^{i(\phi_i(t) - \phi_i(t_0))} \right) \\ &= \Phi_{\text{dyn}} + \arg \left(\sum_{i=1}^n a_i(t) a_i(t_0) e^{i(\alpha_i(t) - \alpha_i(t_0))} \right) \quad \text{où } \phi_i = \Phi_{\text{dyn}} + \alpha_i \\ &= \Phi_{\text{dyn}} + \arctan \left(\frac{\sum_i a_i(t) a_i(t_0) \sin(\alpha_i(t) - \alpha_i(t_0))}{\sum_i a_i(t) a_i(t_0) \cos(\alpha_i(t) - \alpha_i(t_0))} \right) \end{aligned}$$

Cela étant dit, si \mathbf{x} est cyclique à une phase près, cette formule fait plus sens. C'est-à-dire lorsque, entre deux instant t_0 et t donnés, \mathbf{x} vérifie :

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x}(t) = e^{i\theta} \mathbf{x}(t_0)$$

Dès lors, la phase totale donne bien :

$$\arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \arg \langle e^{i\theta} \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \theta$$

Dans le cas univarié, la phase instantanée vaut également θ , ce qui n'est plus le cas dès que $n \geq 2$ (voir *fig. 1.1*, ci-dessous). Apparaît alors une nouvelle phase qui est dû au caractère multivarié du signal : la phase géométrique introduite au début du mémoire.

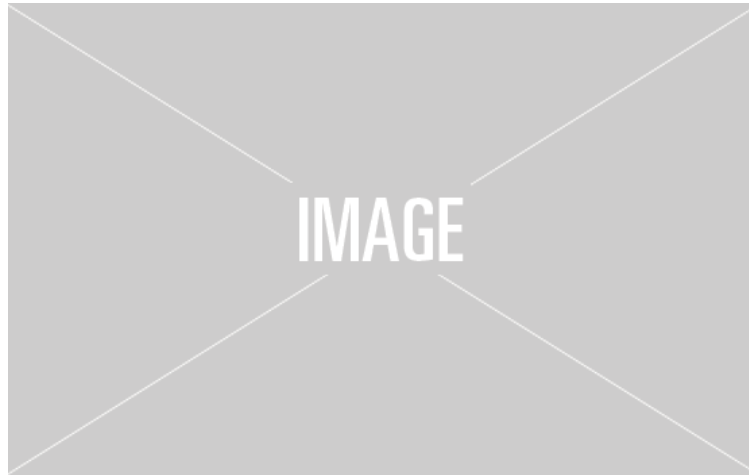


fig. 1.1 — Sur le graphe de gauche, le signal \mathbf{x} à valeur dans \mathbb{R}^2 et dans celui de droite la calcul de la phase dynamique, totale et de leur différence. Résultat tiré des simulation de Le Bihan et al.[6]

En analyse temps-fréquence, la phase instantanée d'un signal complexe $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par son argument, modulo un choix de phase initial. En clair, si x s'écrit $x(t) = a(t)e^{i\phi(t)}$, alors :

$$\Phi_{\text{inst}}(x, t_0, t) = \phi(t) - \phi(t_0) \quad (1.12)$$

Phase qui peut encore s'écrire :

$$\Phi_{\text{inst}}(x, t_0, t) = \arg x(t) \overline{x(t_0)}$$

La phase totale peut-être vu comme une généralisation de cette formule au signaux multivarié, *i.e.* à valeur dans \mathbb{C}^n .

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = a(t)e^{i\varphi(t)}R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

II — Décomposition des signaux multivariées

PARTIE II

LEGACY

Les deux premières section de cette partie sont fortement inspirées des propos de COHEN dans son livre Time frequency analysis [3], chapitre 1 & 2.

I — Paramètre instantanée dans la cas complexe

1.1 Quelques définitions

Soit x un signal complexe dont \hat{x} ou $\mathcal{F}[x]$ est la transformée de Fourier (dont on supposera quelle existe, ici au moins $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$) :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x(t) \end{array} \qquad \mathcal{F}[x] = \hat{x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \nu & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \end{array}$$

Avant de parlé de fréquences instantanée, il nous faut introduire quelle que définition afin de pouvoir proprement argumenter sa définition. Tout d'abord, à x sont associées deux densités d'énergie :

DÉFINITION 4 (DENSITÉS D'ÉNERGIE) — La *densité d'énergie* (resp. *spectrale*) du signal x , noté ρ (resp. ϱ), est définie comme :

$$\rho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & |x(t)|^2 \end{array} \qquad \varrho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \nu & \longmapsto & |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array} \quad (2.1)$$

La transformée de Fourier étant une isométrie de l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'*énergie totale* $E(x) = \|x\|_{L^2}^2$ du signal est indépendante de la représentation de ce dernier (temporelle ou spectrale) :

$$E(x) := \int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varrho(\nu) d\nu \quad (2.2)$$

La première densité, $\rho(t)$, correspond à la puissance (énergie par unité de temps) déployée pour émettre le signal à l'instant t et la seconde, $\varrho(\nu)$, à l'énergie associée à la fréquence ν sur tout le signal. Par exemple, si $x(t) = e^{2\pi i \nu_0 t}$, alors $\hat{x}(t) = \delta(x - \nu_0)$ et on a les densités :

$$\rho(t) = 1 \qquad \varrho(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$$

On comprend alors que, du point de vu temporel, le signal a été émis avec une puissance régulière, mais le fait que ϱ soit un dirac indique que toute l'énergie du signal est concentré en une unique fréquence ν_0 .

Les espérances et écart-type on également une interprétation physique :

DÉFINITION 5 (DURÉE ET LARGEUR DE BANDE) — L'espérance ces densités, pour peu qu'elles existent, sont notées :

$$\mathbb{E}_\rho[t] := \int_{\mathbb{R}} t |x(t)|^2 dt \quad \mathbb{E}_\varrho[\nu] := \int_{\mathbb{R}} \nu |\hat{x}(\nu)|^2 d\nu$$

Si un signal est localisé temporellement, alors la première espérance/moyenne donne une idée de l'instant d'émission du signal. Si *a contrario*, le signal est localisé en fréquence, la seconde espérance peut s'interpréter comme la fréquence "dominante" du signal, ou plus généralement comme sa *fréquence moyenne*.

En particulier, et ce sera important pour la suite, dans le cas des signaux réels, l'espérance de ϱ est toujours nulles.

On note de même les variances (toujours à condition d'existence) :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_\rho[t] &:= \mathbb{E}_\rho \left[(t - \mathbb{E}_\rho[t])^2 \right] & \mathbb{V}_\varrho[\nu] &:= \mathbb{E}_\varrho \left[(\nu - \mathbb{E}_\varrho[\nu])^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_\rho[t^2] - \mathbb{E}_\rho[t]^2 & &= \mathbb{E}_\varrho[\nu^2] - \mathbb{E}_\varrho[\nu]^2 \end{aligned}$$

Les écart-types associés sont plus facilement interprétable. Le premier est appelé *durée d'émission* du signal, puisqu'il renseigne l'étalement temporelle du signal ; et le second *largeur de bande (fréquentielle)* puisque, lui, renseigne l'étalement fréquentielle.

Ces interprétations reste limité à des cas particulier. Par exemple, et nous y reviendrons, si le support de \hat{x} n'est pas connexe, alors la fréquence moyenne devient beaucoup moins pertinente parce qu'elle à toutes les chances de donnée une fréquence qu'il n'est pas dans le support de \hat{x} . Idem pour la largeur de bande qui, dans ce cas, aura plutôt tendance à donnée la distance entre la première et la dernière composante connexe.

1.2 Amplitude, phase et fréquence instantanée

Dans le cas des signaux purement complexe, sont très naturellement définit les notions d'*amplitude* et de *phase instantanée* puisqu'elles correspondent respectivement au module et à l'argument de x à l'instant t . Dans le cas le plus simple, où $x(t) = e^{2\pi i \nu t + \varphi}$, la fréquence ν du signal peut s'écrire comme la dérivée :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (2\pi \nu t + \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg x(t)$$

Cela invite poser les définitions suivantes :

DÉFINITION 6 — Étant donnée un signal $x : t \mapsto a(t)e^{i\phi(t)}$, on appelle a l'*amplitude instantanée* du signal x , ϕ sa *phase instantanée* et respectivement ϕ' et $1/2\pi\phi'$ son *impulsion* et *fréquence instantanée*.

Pour mieux justifier ces choix de définition, considérons la proposition suivante :

PROPOSITION 1 — Si ϱ admet une espérance, que x est dérivable et que l'on note : alors a et ϕ hérite des régularité de x et on a l'égalité (cf. section A pour une démonstration) :

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho[\phi'] \quad (2.3)$$

De même pour la variance de ϱ :

$$\mathbb{V}_\varrho[\nu] = \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho[(\ln a)'] + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho[\phi'] \quad (2.4)$$

La première égalité (2.3) montre que la moyenne (temporelle) de la fréquence instantanée est égale à la fréquence moyenne (au sens de Fourier). Exprimer ainsi cela paraît évident, ce qui est tout à fait rassurant.

Pour la seconde (2.4), on constate deux composantes (qui, par ailleurs, sont des variances purement temporelle). La première ne porte que sur l'amplitude du signal, et inversement, l'amplitude n'apparaît que sur la première. Il est donc cohérent que le terme restant, *i.e.* là où apparaît ϕ' , porte l'information fréquentielle du signal.

II — Transformée en signal analytique

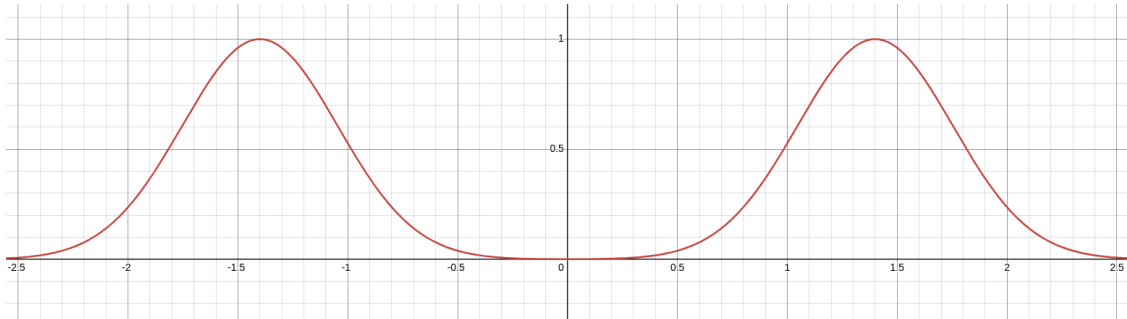
Maintenant que la fréquence instantanée est proprement définie pour les signaux complexes, il nous faut adresser le cas réel.

2.1 Le problème de signaux réels et comment le résoudre

D'abord, du point de vue de l'analyse temps-fréquence, les signaux réels sont problématiques car leur spectre est à symétrie hermitienne et leur densité spectrale symétrique :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R} &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{x}(-\nu) = \overline{\hat{x}(\nu)} \\ &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \varrho(-\nu) = \varrho(\nu) \end{aligned}$$

Comme mentionné plus haut, cela implique que la fréquence moyenne de tout signal réel est nulle (intégrale d'une fonction impaire). Ce qui, en plus de ne pas être très instructif, n'est pas cohérent avec l'interprétation physique qu'on voudrait faire cette moyenne. Par exemple, si ϱ prend la forme ci-dessous (*fig. 2.1*), alors il serait plus naturelle de demander à ce que la fréquence moyenne se trouve autour de **1,4**. De même, la largeur de bande spectrale ne correspond plus à l'étalement de chaque gaussienne, mais plutôt à leur espacement.



*fig. 2.1 — Exemple de densité spectrale d'un signal réel **ESP A 1,4***

Même problème avec la covariance : sachant l'égalité des deux notions de fréquences moyenne (équation (2.3), proposition 1), on peut définir la covariance temps-fréquence d'un signal x par :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x) &:= \text{Cov}(t, \phi'(t)) = \mathbb{E}_\rho[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_\rho[t]\mathbb{E}_\rho[\phi'(t)] \\ &= \mathbb{E}_\rho[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_\rho[t]\mathbb{E}_\varrho[\nu] \end{aligned}$$

Ce coefficient est sensé mesurer une corrélation entre l'évolution d'un signal au cours du temps avec ses fréquences. S'il est réel, alors $\text{Cov}(x)$ sera toujours nulle ; de là à en conclure que la fréquence instantanée de n'importe quel signal (réel) est toujours décorrélée du temps serait, pour le moins, insatisfaisant.

Pour résoudre le problème, une méthode consiste à construire un nouveau signal $\mathcal{A}[x]$ en supprimant les fréquences négatives de x :

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\hat{x}$$

où $\mathbb{1}_E$ est la fonction indicatrice sur l'ensemble E et où le facteur 2 assure la conservation de l'énergie du signal. Cela mène à la définition :

DÉFINITION 7 (TRANSFORMÉE DE HILBERT ET EN SA) — On appelle *transformé de Hilbert* de x , l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{H}[x] : t &\longmapsto \frac{1}{\pi} \oint_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds \end{aligned} \quad (2.5)$$

où l'intégrale barrée représente la *valeur principale de Cauchy* (voir section B pour plus de détail) :

$$\oint_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

Avec, on définit la *transformée en signal analytique* (SA) de tout signal x comme l'unique application $\mathcal{A}[x]$ telle que $\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x}$. Elle est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{A}[x] : t &\longmapsto x(t) + i\mathcal{H}[x](t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Plus généralement, tout signal dont le spectre est à support dans \mathbb{R}^+ sera dit *analytique*.

Pour mieux comprendre ce que fait la transformation en signal analytique, revenons sur la notion de fréquence instantanée pour les signaux réels.

2.2 Interprétabilité de la transformée en SA

Pour définir l'amplitude et la phase instantanée d'un signaux réel, on par a nouveau du cas le plus simple. Si x est un signal pur, il va s'écrire :

$$x(t) = a \cos(2\pi\nu t + \varphi), \quad a, \nu, \varphi \in \mathbb{R}$$

Pour généraliser cette écriture, il suffit donc de poser les amplitude et phase instantanée a et ϕ telles que :

$$x(t) = a(t) \cos(\phi(t))$$

Contrairement au cas complexe, ici la pair (a, ϕ) n'est pas unique et pour contraindre ce choix, on s'appuie sur la transformée $\mathcal{A}[x]$. Sachant que, dans le cas $x(t) \in \mathbb{R}$, la transformée de Hilbert est à valeur dans \mathbb{R} (intégrale d'une fonction réelle), on a :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} \implies \begin{cases} x(t) = \Re \mathcal{A}[x] = a(t) \cos \phi(t) \\ \mathcal{H}[x](t) = \Im \mathcal{A}[x] = a(t) \sin \phi(t) \end{cases}$$

D'où la définition :

DÉFINITION 8 (AMPLITUDE ET PHASE INSTANTANÉE) — L'*amplitude instantanée* a_x et la *phase instantanée* ϕ_x de tout signal x réel sont définies comme étant respectivement l'amplitude et la phase de $\mathcal{A}[x]$:

$$a_x = |\mathcal{A}[x]| \quad \phi_x = \arg(\mathcal{A}[x]) \quad (2.7)$$

De même, les *impulsion* et *fréquence instantanée* sont données par ϕ'_x et $1/2\pi\phi'_x$.

Si un signal est présenté sous la forme $x = a \cos \phi$, rien n'implique que a et ϕ correspondent bel et bien à l'amplitude et la phase instantanée. Si ce n'est pas le cas, c'est que cette décomposition n'est "pas la bonne", en cela qu'elles ne s'interprètent pas comme l'on aimerait.

Aussi, quand bien même x peut toujours être écrit comme partie réel de sa transformé en SA, cette écriture

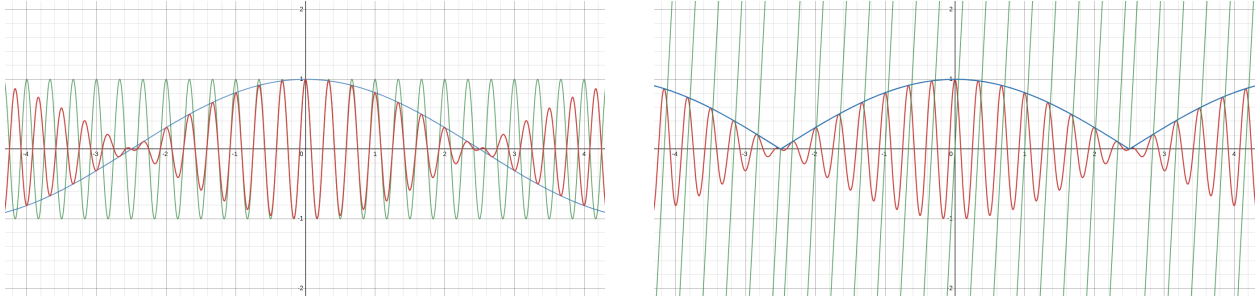


fig. 2.2 — Représentation graphique du signal x (rouge) avec $\nu_1 = 3$ et $\nu_2 = 0.1$. Sur l'image de gauche, avec signaux de fréquences pures (bleu et vert). Sur l'image de droite, avec son amplitude (bleu) et sa phase instantanée (vert). Les discontinuités de la phase sont dû à l'arrondi à 2π près de l'argument de $\mathcal{A}[x_1]$ et à la façon dont il est calculé lorsque le signal s'annule (mise à 0). Voir [ici](#) pour un graphique dynamique.

n'est nécessairement toujours satisfaisante. Pour le comprendre, détaillons le cas où x s'écrit comme produit de deux signaux pures (fig. 2.2) :

$$x_1(t) = \cos(2\pi\nu_1 t) \cos(2\pi\nu_2 t)$$

On montre sans mal³ que si $\nu_1 \geq \nu_2$, alors la transformée en SA de x_1 s'écrit :

$$\mathcal{A}[x_1] = \cos(2\pi\nu_2 t) e^{2\pi\nu_1 t}$$

Le signal $\mathcal{A}[x_1]$ n'est ici pas sous forme exponentielle à proprement parler puisque le cosinus peut être négatif (pour s'y ramener, il suffit de passer le cos en valeur absolue et d'ajouter π à l'argument lorsque nécessaire) mais l'avantage de cette forme est qu'elle fait clairement apparaître les fréquences $\nu_{1,2}$. En particulier, la fréquence instantanée du signal est la plus grande des deux fréquences ν_1 et ν_2 . La plus petite, elle, se retrouve dans l'amplitude.

Ce résultat est rassurant en cela qu'il est plus naturel de voir le cosinus de basse fréquence comme modulant celui de haute fréquence que l'inverse comme on le voit sur la première image de la figure 2.2.

Aussi, en mettant les hautes fréquences du signal dans la fréquence instantanée, on s'assure de limiter les variations de l'amplitude. Cela apporte bien plus de contrainte en terme de décomposition (a_{x_1}, ϕ_{x_1}) , en cela que si l'inverse étant vrai, alors toute les fréquences pourrait être envoyé dans l'amplitude, ce qui laisserait la phase invariante.

Cela étant dit, lorsque l'on fait varier ν_1 et ν_2 , le résultat n'est pas toujours si intuitif. C'est notamment le cas lorsque les deux deviennent de plus en plus proche :

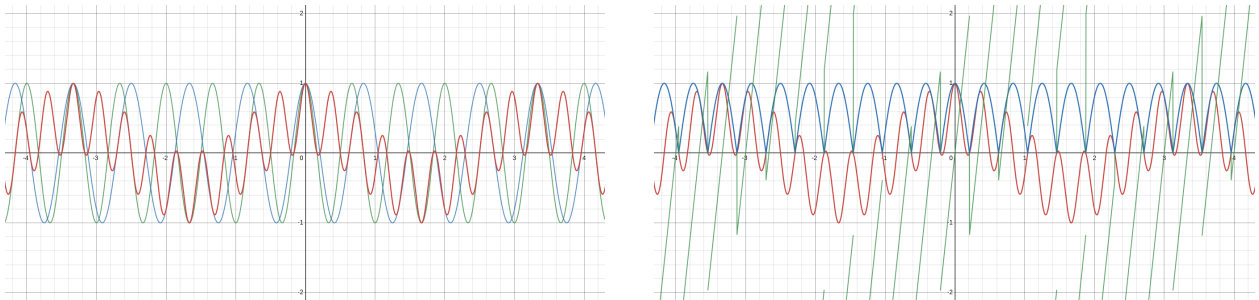


fig. 2.3 — Idem que pour la figure 2.2 précédente, avec cette fois $\nu_1 = 1.5$ et $\nu_2 = 1.3$.

Pour comprendre pourquoi l'amplitude ne fait pas ce qu'on attendrait d'elle, est introduit le théorème de Bedrosian :

THÉORÈME DE BEDROSIAN (1) — Dans sa formulation la plus générale, le théorème de Bedrosian énonce que si deux fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ sont telles l'une des trois assertions suivantes est vraie :

- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda, +\infty[, \text{supp } \hat{g} \subset [\lambda, +\infty[$

³ \hat{x}_1 est donné par 4 Diracs, en ne gardant que ce non nul sur \mathbb{R}^+ on obtient le spectre de $\mathcal{A}[x_1]$ et il reste plus qu'à inverser la transformée de Fourier.

- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset]-\infty, \lambda], \text{ supp } \hat{g} \subset]-\infty, -\lambda]$
- $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \setminus \{(0, 0)\} \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda_1, \lambda_2], \text{ supp } \hat{g} \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda_2, \lambda_1]$

alors la transformée de Hilbert de leur produit s'écrit (voir [14] pour une démonstration) :

$$\mathcal{H}[fg] = f\mathcal{H}[g] \quad (2.8)$$

Dans le cas d'un signal réel, suivant la définition 8 on peut écrire $x = a_x \cos \phi_x$. Comme a_x et $\cos \phi_x$ sont réelles, seule la troisième condition du théorème de Bedrosian peut être satisfaite pour peu que $\lambda_1 = \lambda_2$. Ainsi :

COROLLAIRE 1.1 — Toujours avec les même notations, si $a_x \in L^2(\mathbb{R})$, $\cos \phi_x \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a_x] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi_x] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda] \quad (2.9)$$

Alors on a :

$$\mathcal{H}[x] = a_x \mathcal{H}[\cos \phi_x] \quad \text{et si } a_x(t) \neq 0, \quad \mathcal{H}[\cos \phi_x](t) = \sin \phi_x(t) \quad (2.10)$$

Pour interpréter ce corollaire, prenons un autre exemple : $x_2(t) = a(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$. Sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{x}_2(\nu) &= \hat{a}(\nu) * \frac{1}{2} \left(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{a}(\nu + \nu_0) + \hat{a}(\nu - \nu_0) \right) \end{aligned}$$

Graphiquement, la transformée de Fourier de x_2 duplique le graphe de \hat{a} en $\pm\nu_0$ et somme les deux. La condition (2.9) du corollaire 1.1 demande alors que ν_0 soit choisie de telle sorte que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a] \subset [-\nu_0, \nu_0]$$

C'est-à-dire qu'il n'y ait pas de chevauchement entre les deux courbes $\Gamma_{\pm} : \nu \mapsto \hat{a}(\nu \mp \nu_0)$ (voir fig. 2.4 ci-dessous). Moralement, cela assure qu'en ne prenant que la partie positive du spectre de x_2 , l'on ne ramène pas avec une partie de $\hat{a}(\nu + \nu_0)$. Quant bien même cette explication est simpliste puisqu'ici ϕ est linéaire, on peut voir que le phénomène est finalement très proche de celui d'aliasing.

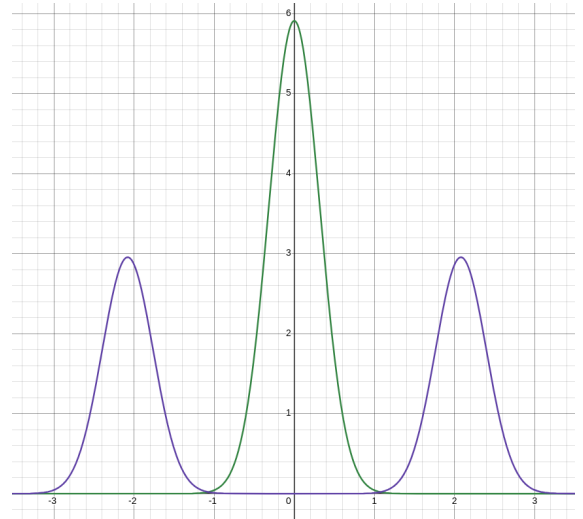
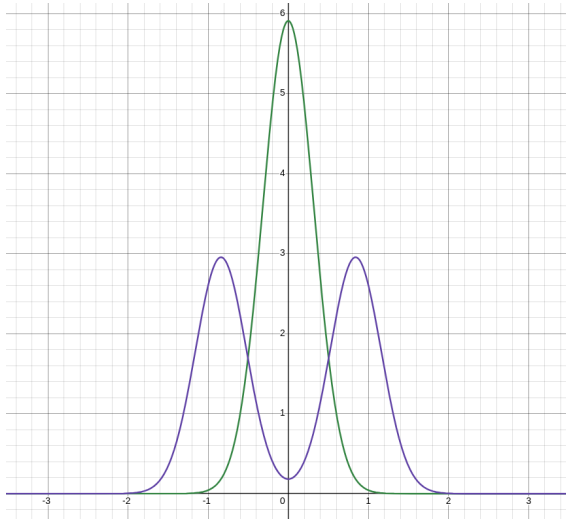


fig. 2.4 — Sur les deux graphiques sont représentés en vert \hat{a} et en violet \hat{x}_2 . Dans le premier cas l'hypothèse de Bedrosian est respectée mais pas dans le second.

Pour revenir sur l'exemple x_1 précédent, dans la seconde figure 2.3, l'amplitude ne colle plus à l'interprétation que l'on voudrait justement parce que la condition de Bedrosian n'est plus respectée (à savoir $\nu_1 \geq 2\nu_2$).
Formellement, **JE COMPRENDS TOUJOURS PAS COMMENT CA POSE PROBLEME DANS LA DEFINITION / INTERPRETATION DE $\mathcal{A}[x]$! HHHHHH !!!**

III — Généralisation aux signaux multivariés

Maintenant que les paramètres instantanée sont proprement définie pour les cas réel et complexe, qu'en est-il des signaux multivariés :

DÉFINITION 9 (SIGNAL MULTIVARIÉ) — Un *signal multivarié*, ou *n-varié*, est un vecteur composé de $n \in \mathbb{N}^*$ signaux x_i . Pour $n = 2$ (resp. $= 3$), on parle de signal *bivarié* (resp. *trivarié*). Dans la continuité de ce qui a été dit dans l'plus tôt, dans le cas des signaux réels, on s'intéressera au vecteur composé des transformées en SA (eq. (2.6), déf. 7) des x_i . On supposera que chaque composante x_i de \mathbf{x} aura autant de régularité et de condition d'intégrabilité que nécessaire (**il vaudra préciser lesquelles éventuellement**).

3.1 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié

Afin de contraindre ce choix, on s'inspire propriétés de la phase instantanée vu plus tôt pour en déduire deux approches :

- D'une part, l'espérance de la fréquence instantanée (ici vu comme dérivée à 2π près de la phase⁴) doit donner la fréquence moyenne au sens de Fourier, eq. (2.3).
- D'autre part, les conditions d'interprétation (2.9) de la décomposition (a_x, ϕ_x) , corollaire 1.1, exige que les hautes fréquences du signal se retrouve dans la phase.

Pour cela on introduit les notations utiles au cas multivarié :

DÉFINITION 10 (DENSITÉ D'ÉNERGIE) — Étant donné un signal multivarié $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, les densités d'énergie de chaque composante x_i sont notées :

$$\begin{aligned} \rho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto |x_i(t)|^2 = a(t)^2 a_i(t)^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varrho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \nu &\longmapsto |\hat{x}_i(\nu)|^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

Et les densités d'énergies associées au signal \mathbf{x} complet :

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varrho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \nu &\longmapsto \|\hat{\mathbf{x}}(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) \end{aligned} \quad (2.12)$$

La première approche, inspiré de [2] consiste donc de reprendre le “calculation trick” (2.17), pour en

⁴La pertinence de cette définition dans le cas multivarié sera discuté plus loin... **or is it ? (si oui, dis cref où)**

déduire la fréquence moyenne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\rho [\nu] &= \int_{\mathbb{R}} \nu \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) d\nu \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\varrho_i} [\nu] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'_i(t) \rho_i(t) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t)^2 \sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i(t)^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{i=1}^n \phi'_i a_i^2 \right]
\end{aligned}$$

Ce qui mène à une première (potentielle) définition de la phase instantanée :

$$\phi = \int \sum_{i=1}^n \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds = \sum_{i=1}^n \int \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds \quad (2.13)$$

La seconde approche, fortement inspirée par les travaux de Lilly & Olhede [10], se base sur l'idée de séparation haute/basse fréquences du signal \mathbf{x} . Pour cela, l'on commence par faire apparaître la phase ϕ — pour l'instant inconnue — en écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\phi(t)} e^{-i\phi(t)} \mathbf{x}(t) := e^{i\phi(t)} \mathbf{y}(t)$$

Si ϕ est bien choisie, alors \mathbf{y} ne devrait contenir que les informations associées à l'amplitude et la polarisation de \mathbf{x} . Or, la phase doit contenir les hautes fréquences du signal. Pour s'en assurer on demande, à l'inverse, que les basses fréquences du signal soient données par \mathbf{y} en limitant ces variations. Concrètement, ϕ doit être choisie de sorte à minimiser la dérivée $\dot{\mathbf{y}}'$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \left\| e^{-i\theta(t)} (\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t) \mathbf{x}(t)) \right\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t) \mathbf{x}(t)\|_2^2$$

La contrainte ne dépendant que de la dérivée θ' , on se ramène à :

$$\min_{\theta(t)} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \min_{\theta'(t)} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - \theta'(t) \mathbf{x}(t)\|_2^2$$

En rappelant que $\frac{d}{dx} \|f(x)\|_2^2 = 2\Re\langle f(x), f'(x) \rangle$, il vient que ce minimum⁵ est atteint par $\phi'(t)$ à condition que :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\phi'} \|\dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}\|_2^2 = 0 &\iff 0 = 2\Re \left\langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}, \frac{d}{d\phi'} (\dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}) \right\rangle \\
&= 2\Re \langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}, -i\mathbf{x} \rangle \\
&= 2\Re \left(i \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle \right) + 2\phi' \Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\
&= -2\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle + 2\phi' \|\mathbf{x}\|_2^2
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\phi' = \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \frac{-\Im \langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \quad \text{et} \quad \phi = -\Im \int \frac{\langle \mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds \quad (2.14)$$

⁵ L'extremum obtenu est l'unique minimum globale puisque $t \mapsto \|at + b\|^2$ est strictement convexe pour $a \neq 0$.

Ce qui, sous forme exponentiel, se réécrit :

$$\begin{aligned}
-\Im m \frac{\langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} &= -\Im m \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t) a_i(t) e^{i\phi_i(t)} \overline{\left((aa_i)'(t) + a(t) a_i(t) i \phi_i'(t) \right) e^{i\phi_i(t)}} \\
&= -\Im m \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t) a_i(t) (aa_i)'(t) - ia(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \\
&= -\frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n -a(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i(t)^2 \phi_i'(t)
\end{aligned}$$

Soit la même expression que (2.13) obtenue par le premier raisonnement :

$$-\Im m \int \frac{\langle \mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \int \sum_{i=1}^n a_i(s)^2 \phi_i'(s) = \sum_{i=1}^n \int a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds$$

Cela justifie la définition :

DÉFINITION 11 (PHASE DYNALIQUE/INSTANTANÉE) — Étant donné un signal $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ quelconque, on appelle *phase instantanée* ou *dynamique* à l'instant t partant du t_0 , le réel :

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) := - \int_{t_0}^t \frac{\Im m \langle \mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds \quad (2.15)$$

On s'autorisera à omettre les paramètres de Φ_{dyn} lorsque cela ne prête pas à confusion.

Le terme “dynamique” viens, entre autre, du fait que dans son cadre d'étude habituelle, la dérivée $\dot{\mathbf{x}}$ se voit remplacé par un hamiltonien $h\mathbf{x}$, voir par exemple [1, sec. 2], [12, p. 215]. En particulier, en mécanique quantique, cet hamiltonien régie l'équation de Schödinger :

$$i \frac{d\psi(t)}{dt} = h\psi(t) \quad (2.16)$$

Sachant que \mathbf{x} n'a aucune raison de suivre une telle équation dans notre cas, poser $h = i \frac{d}{dt}$ enlève toute contrainte. On retrouve ainsi, modulo un jeu de convention sur le produit hermitien, la formule (2.15) ci-dessus.

Notons enfin qu'une fois la phase dynamique “extraite” de \mathbf{x} , le vecteur restant \mathbf{y} n'a évidemment pas de phase dynamique, ce qui se traduit par la formule :

... un peu plus de blabla pour faire transition sur la suite ...

COMPLÉMENT SUR L'ANALYSE TEMPS-FRÉQUENCE

Annexe A — Un bon moment...

Pour montrer les formules de la proposition 1, on commence par montrer ce que Cohen [3] appelle les :

LEMME 1 (“CALCULATION TRICKS”) — Si le signal est n fois dérivable et que la densité d'énergie spectrale associée ϱ admet un moment d'ordre n , alors ce moment est donnée par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_\varrho[\nu^n] = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \left\langle x, \frac{d^n}{dt^n} x \right\rangle \quad (2.17)$$

Avec les hypothèses analogues, les moments de ρ s'écrivent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_\rho[t^n] = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu) \frac{d^n}{d\nu^n} \overline{\hat{x}(\nu)} d\nu = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \left\langle \hat{x}, \frac{d^n}{d\nu^n} \hat{x} \right\rangle \quad (2.18)$$

Démonstration du lemme 1

À supposer que les intégrales existes et que le théorème de Fubini s'applique, on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \nu^n \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu^n \hat{x}(\nu) \overline{\hat{x}(\nu)} d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \nu^n \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} e^{2i\pi\nu t'} dt' d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \end{aligned}$$

Ici, on remarque que :

$$\begin{aligned} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} &= \nu^{n-1} \frac{1}{-2i\pi} \frac{d}{d\nu} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \\ &= \nu^{n-2} \frac{1}{(-2i\pi)^2} \frac{d^2}{d\nu^2} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{d\nu^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \end{aligned}$$

En jouant sur les ordres d'intégrations, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{d\nu^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \left(\frac{1}{-2i\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}[1](t-t') dt dt' \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de 1 est un dirac, il vient, modulo quelques jeux d'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varrho[\nu^n] &= \left(\frac{1}{-2i\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}[1](t-t') dt dt' \\
&= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt dt' \\
&= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt' dt \\
&= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} \delta(t-t') dt' dt \\
&= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt
\end{aligned}$$

■

Démonstration de la proposition 1, équation (2.3)

Avec le hypothèses de la lemme 1 précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \frac{i}{2\pi} \rho(t) \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x'(t)} dt = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i\phi(t)} \overline{(a'(t) e^{i\phi(t)} + ia(t) \phi'(t) e^{i\phi(t)})} dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i\phi(t)} (a'(t) e^{-i\phi(t)} - ia(t) \phi'(t) e^{-i\phi(t)}) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) (a'(t) - ia(t) \phi'(t)) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \phi'(t) a(t)^2 dt
\end{aligned}$$

On peut se convaincre que le premier terme doit être nul car l'espérance doit être réelle. On peut s'en assurer par le calcul en notant que c'est l'inégale d'une dérivée :

$$\int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (a^2)'(t) dt = \frac{1}{2} \rho(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Ce qui donne bien :

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \phi'(t) a(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt$$

■

Démonstration de la proposition 1, équation (2.4)

La démonstration est similaire, d'abord, la dérivée seconde de x s'écrit :

$$\begin{aligned}
x''(t) &= \frac{d}{dt} (a'(t) e^{i\phi(t)} + ia(t) \phi'(t) e^{i\phi(t)}) \\
&= \left(a''(t) + ia'(t) \phi'(t) + i(a'(t) \phi'(t) + a(t) \phi''(t) + ia(t) \phi'(t) \phi'(t)) \right) e^{i\phi(t)} \\
&= \left(a''(t) - a(t) \phi'(t)^2 + i(2a'(t) \phi'(t) + a(t) \phi''(t)) \right) e^{i\phi(t)}
\end{aligned}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}
x(t)\overline{x''(t)} &= a(t)\left(a''(t) - a(t)\phi'(t)^2 - i(2a'(t)\phi'(t) + a(t)\phi''(t))\right) \\
&= a(t)a''(t) - a(t)^2\phi'(t)^2 - i(2a(t)a'(t)\phi'(t) + a(t)^2\phi''(t)) \\
&= a(t)a''(t) - a(t)^2\phi'(t)^2 - i(a^2\phi')'(t)
\end{aligned}$$

Ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varrho [\nu^2] &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{x''(t)} dt \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} a(t)a''(t) - a(t)^2\phi'(t)^2 - i(a^2\phi')'(t) dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\mathbb{R}} a'(t)^2 dt + \int_{\mathbb{R}} a(t)^2\phi'(t)^2 dt - i a^2(t)\phi'(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right) \quad \text{IPP sur le premier membre} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{a'(t)}{a(t)} \right)^2 a(t)^2 dt + \int_{\mathbb{R}} a(t)^2\phi'(t)^2 dt \right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left(\mathbb{E}_\rho \left[((\ln a)')^2 \right] + \mathbb{E}_\rho \left[(\phi')^2 \right] \right) \quad \text{car } (\ln a)' = \frac{a'}{a}
\end{aligned}$$

Sachant que $\mathbb{E}_\rho [(\ln a)'] = 0$ (cf. démonstration précédente), il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_\varrho [\nu] &= \mathbb{E}_\varrho [\nu^2] - \mathbb{E}_\varrho [\nu]^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left(\mathbb{E}_\rho \left[((\ln a)')^2 \right] + \mathbb{E}_\rho \left[(\phi')^2 \right] \right) - \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{E}_\rho [\phi']^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{E}_\rho \left[((\ln a)')^2 \right] + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{E}_\rho [(\ln a)']^2 + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho [\phi'] \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho [(\ln a)'] + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho [\phi']
\end{aligned}$$

■

Annexe B — Transformée inverse de la fonction de Heaviside

Définissons d'abord proprement la valeur principale de Cauchy :

DÉFINITION 12 (VALEUR PRINCIPALE DE CAUCHY) — La *valeur principale de Cauchy* est la distribution, notée $\text{vp} \frac{1}{x}$, définie par dualité :

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle &= \int_0^t \frac{\varphi(t)}{t} dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Ici $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide et la limite en ε assure que l'intégrale (impropre) converge bien.

La distribution $\text{vp} \frac{1}{x}$ est la valeur principale de la fonction inverse dans le sens où son produit avec l'identité donne 1 ($\langle id_{\mathbb{R}} \times \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{vp} \frac{1}{x}, id_{\mathbb{R}} \times \varphi \rangle = 1$) mais avec des propriétés d'intégration supplémentaires. Entre autre :

PROPRIÉTÉ 1 — La transformée de Fourier de la valeur principale de Cauchy est donnée, au sens

des distributions, par :

$$\mathcal{F} \left[\text{vp} \frac{1}{x} \right] = -i\pi \text{sign} \quad (2.20)$$

Il en découle la transformée de Fourier inverse :

$$\mathcal{F}^{-1} [2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] = \mathcal{F}^{-1} [1 + \text{sign}] = \delta + \frac{i}{\pi} \text{vp} \frac{1}{x} \quad (2.21)$$

Démonstration

Par définition, la transformée de Fourier de la valeur principale est telle que,
 $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F} \left[\text{vp} \frac{1}{x} \right], \varphi \right\rangle &= \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \hat{\varphi} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\varphi}(\nu)}{\nu} d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\hat{\varphi}(\nu) - \hat{\varphi}(-\nu)}{\nu} d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2i\pi\nu t} dt - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{2i\pi\nu t} dt \right) d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) (e^{-2i\pi\nu t} - e^{2i\pi\nu t}) dt d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} -2i\varphi(t) \sin(2\pi\nu t) dt d\nu \\ &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\nu t)}{\nu} d\nu dt \end{aligned}$$

En posant $u = 2\pi\nu t \text{sign}(t)$ (le signe de t assure que l'on ait le même signe dans et hors du sin), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F} \left[\text{vp} \frac{1}{x} \right], \varphi \right\rangle &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_0^{+\infty} \text{sign}(t) \frac{\sin(u)}{u} du dt \\ &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \frac{\pi}{2} \text{sign}(t) dt \\ &= \langle -i\pi \text{sign}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

■

Finalement, la condition sur le spectre de $\mathcal{A}[x]$ se traduit bien par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [\mathcal{A}[x]] &= 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x} \iff \mathcal{A}[x] = \mathcal{F}^{-1} [\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x}] \\ &= \mathcal{F}^{-1} [\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] * \mathcal{F} [\hat{x}] \\ &= \left(\delta + \frac{i}{\pi} \text{vp} \frac{1}{x} \right) * x \\ &= x + \frac{i}{\pi} \text{vp} \frac{1}{x} * x \end{aligned}$$

- code notebook
- qui est quelle phase
- mail à berthier pour les contraintes rapport

TABLE DES FIGURES

1.1	Sur le graphe de gauche, le signal x à valeur dans \mathbb{R}^2 et dans celui de droite la calcul de la phase dynamique, totale et de leur différence. Résultat tiré des simulation de Le Bihan <i>et al.</i> [6]	8
2.1	Exemple de densité spectrale d'un signal réel ESP A 1,4	12
2.2	Représentation graphique du signal x (rouge) avec $\nu_1 = 3$ et $\nu_2 = 0.1$. Sur l'image de gauche, avec signaux de fréquences pures (bleu et vert). Sur l'image de droite, avec son amplitude (bleu) et sa phase instantanée (vert). Les discontinuités de la phase sont dû à l'arrondi à 2π près de l'argument de $\mathcal{A}[x_1]$ et à la façon dont il est calculé lorsque le signal s'annule (mise à 0). Voir ici pour un graphique dynamique.	14
2.3	Idem que pour la figure 2.2 précédente, avec cette fois $\nu_1 = 1.5$ et $\nu_2 = 1.3$.	14
2.4	Sur les deux graphiques sont représentés en vert \hat{a} et en violet \hat{x}_2 . Dans le premier cas l'hypothèse de Bedrosian et respectée mais pas dans le second.	15

TABLE DES CODES

RÉFÉRENCES

- [1] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [2] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [3] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [4] F. FAURE, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).
- [5] J. LAFONTAINE, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [6] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [7] ———, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.
- [8] J. LEFEVRE, *Polarization analysis and optimization geometry*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....] ; University of Melbourne, Dec. 2021.
- [9] J. M. LILLY, *Modulated Oscillations in Three Dimensions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 59 (2011), pp. 5930–5943.
- [10] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [11] J. E. MARSDEN AND T. S. RATIU, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, vol. 17 of Texts in Applied Mathematics, Springer New York, New York, NY, 1999.
- [12] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. II. The Case of Unitary Group Representations*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 269–340.
- [13] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.
- [14] S. WANG, *Simple proofs of the Bedrosian equality for the Hilbert transform*, Science in China Series A: Mathematics, 52 (2009), pp. 507–510.