

# Mémoire de Stage de M2

## PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Pierre-Olivier AMBLARD, Julien FLAMANT & Michel  
BERTHIER

---

Master MIX – Université de La Rochelle

2024 – 2025

# TABLES DES MATIÈRES

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>Notations et conventions</b> . . . . .	<b>2</b>
<hr/>	
<b>PARTIE I — INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE</b>	<b>4</b>
<hr/>	
<b>I — Introduction de la phase géométrique</b> . . . . .	<b>4</b>
1.1 Cas univarié : signaux AM-FM . . . . .	4
1.2 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié . . . . .	5
1.3 Apparition de la phase géométrique . . . . .	8
<b>II — Première étude de la phase géométrique</b> . . . . .	<b>10</b>
2.1 Cas des signaux AM-FM-PM bivariés . . . . .	10
2.2 Généralisation en plus haute dimension . . . . .	12
2.3 Sur la nécessité d’avoir une approche géométrique . . . . .	12
<b>Annexes</b> . . . . .	<b>13</b>
Annexe A — Compléments sur l’analyse temps-fréquence . . . . .	13
A.1. Un mot sur la notion de fréquence instantanée ( <i>nécessaire?</i> ) . . . . .	13
A.2. Formalisme derrière la transformée en SA . . . . .	13
A.3. Lien avec le théorème de Bedrosian . . . . .	13
Annexe B — Compléments sur les signaux AM-FM-PM . . . . .	13
B.1. Construction détaillée des signaux AM-FM-PM ( <i>nécessaire?</i> ) . . . . .	13
B.2. Démonstrations . . . . .	13
<hr/>	
<b>PARTIE II — ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D’UNE PHASE ÉPONYME</b>	<b>15</b>
<hr/>	
<b>I — Prérequis mathématique</b> . . . . .	<b>18</b>
1.1 — Variété fibrée principale . . . . .	18
1.2 — Espaces projectifs complexes . . . . .	20
<b>II — Interprétation des trois phases dans ce cadre</b> . . . . .	<b>21</b>
2.1 — Cas pseudo-cyclique . . . . .	21
<b>Annexe</b> . . . . .	<b>22</b>
Annexe A — Variété différentielle complexe, tiré de [15] . . . . .	22
Annexe B — Algèbre et groupe de Lie . . . . .	23

# INTRODUCTION

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui demande beaucoup de contexte pour être expliqué. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant  $t$  d'un signal complexe  $\psi$  est donné par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) = \arg \langle \psi(t), \psi(t_0) \rangle \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\psi}(s), \psi(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\psi(t) \rightsquigarrow \psi'(t) = e^{i\alpha(t)}\psi(t)$$

Cette propriété rend la phase  $\Phi_{\text{geo}}$  intrinsèquement liée à la trajectoire que prend la projection de  $\psi$  dans l'espace projectif complexe  $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$  et par conséquent, à la géométrie de ce dernier, d'où son nom.

Ceci à largement été étudié dans le cadre de système dynamique régis par EDP [4, 12], notamment en mécanique quantique avec l'équation Schrödinger [1, 13, 15]. Ce n'est que récemment que Le Bihan, Flament et Amblard se sont intéressés à son application en traitement du signal dans le cas de signaux bivariés [7, 8].

[...]

# NOTATIONS ET CONVENTIONS

OBJET/FONCTION	NOTATION
Conjugué complexe	$\bar{x}$
Transposée (resp. adjoint) de la matrice $A$	${}^tA$ (resp. $A^\dagger$ )
Distribution de Dirac	$\delta$
Indicatrice de $E$	$\mathbb{1}_E$
Fonction signe	$\text{sign}(x)$
Transformée de Fourier	$\mathcal{F}[x], \hat{x}$
Transformée en SA	$\mathcal{A}[x]$
Transformée de Hilbert	$\mathcal{H}[x]$
Produit hermitien	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Espérance et variance de $f$ suivant $\rho$	$\mathbb{E}_\rho[f(t)], \mathbb{V}_\rho[f(t)]$
Espace des fonctions p.p. de puissance $p^{eme}$ intégrable à valeur de $E$ dans $F$	$L^p(E, F)$
Support d'une fonction $f$	$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$
Matrice de rotation de paramètre $\Theta$ (resp. d'angle $\theta$ en dimension 2)	$R_\Theta$ (resp. $R_\theta$ )
Ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de taille $n$	$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ )
Ensemble des matrices hermitiennes (resp. anti-hermitiennes) de taille $n$	$\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ )

## Note générale

- les références sont en fin de mémoire est en .bib sur le [GitHub](#)
- Idem pour les codes et un mot sur **pygeomphase**
- En italique sont les notes un peu plus informelle
- Y'a des annexes pour chaque partie mais ce sera précisé si elles sont nécessaire pour suivre
- On va parler de géo diff et pour éviter de réécrire un livre, on va admettre beaucoup de résultats, on renvoie vers [6] (mets en d'autre) pour une introduction extensive à la théorie

## Notations math :

- Convention sur le produit hermitien (congué à droite)
- les vecteurs seront le plus souvent en gras, leur dérivée en temps noté par un point (ex. :  $\dot{x}(t)$ ) et celle des scalaires seront noté par un prime (ex. :  $a'(t)$ )
- convention de sommation d'Einstein ? (oui mais est-ce qu'on en parle maintenant)

---

## PARTIE I

---

### INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE

---

En traitement du signal, la phase d'un signal est intrinsèquement liée à la notion de fréquence instantanée, qui joue un rôle important en analyse temps-fréquence. C'est donc de point que commencera notre discussion pour introduire la phase géométrique. Pour cela, seront rapidement introduit quelques notions et résultats d'analyse temps-fréquence dans le cas univarié (sec. 1.1). Suite à quoi sera définie la phase instantanée pour le cas multivarié (sec. 1.2), qui permettra enfin de mettre en évidence la phase géométrique (sec. 1.3).

Dans une seconde partie, seront introduit les signaux bivarié dit AM-FM-PM (sec. 2.1), dont la phase géométrique sera calculée explicitement (sec. ??), ce qui permettra de mettre en évidence certaines de ses propriétés. Dans une dernière section, seront proposées des généralisations des signaux AM-FM-PM au delà du cas bivarié et seront discutées leur pertinence quant à l'étude de la phase géométrique (sec. 2.2). (*Pas super convaincu par ce paragraphe*)

## I — Introduction de la phase géométrique

### 1.1 Cas univarié : signaux AM-FM

En traitement du signal, l'analyse fréquentielle par la transformée de Fourier est un incontournable. Seulement, cette transformation fait perdre toute notion temporelle : si l'étude du spectre du signal permet de dire quelles fréquences apparaissent dans le signal, elle ne permet pas de dire à quel moment. C'est en réponse à cela, entre autre, qu'est développé l'analyse temps-fréquence. À cette fin, sont définies les paramètres instantanées d'un signal :

DÉFINITION 1 (PARAMÈTRES INSTANTANÉES) — Soit  $x$ , est un signal complexe écrit sous forme exponentielle :

$$x : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto a(t)e^{i\phi(t)} \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \phi(t) \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

$a$  est appelé *amplitude instantanée* du signal,  $1/2\pi\phi'$  sa *fréquence instantanée* et sa *phase instantanée* est définie, modulo un choix de phase initiale, par :

$$\Phi_{\text{inst}}(x, t_0, t) = \phi(t) - \phi(t_0) \quad (1.2)$$

Pour les signaux réels, ces notions sont moins évidentes à définir puisqu'elles demandent d'écrire les signaux sous la forme :

$$x(t) = a(t) \cos \phi(t)$$

Auquel cas, le choix de la pair  $(a, \phi)$  n'est pas unique. Il existe tout de même un "bon" choix de telle pair dans le cas des signaux dit AM-FM :

DÉFINITION 2 (SIGNAL AM-FM) — Un signal réel de la forme :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a(t) \cos \phi(t) \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \quad (1.3)$$

est dit *AM-FM* (*amplitude and frequency modulated*) si  $a$  et  $\cos \phi$  admettent des transformée de Fourier et si de plus la première a un spectre concentré sur les basses fréquences, la seconde concentré sur les hautes fréquences et que les deux ne se chevauche pas. Formellement, ces conditions demande qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  telle que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda] \quad (1.4)$$

Dans ce cas,  $a$  et  $\phi$  donne lieu au même définition que pour le cas complexe.

Ces conditions sont liées au théorème de Bedrosian, et plus de détail se trouve dans l'annexe ???. Pour le dire rapidement, elles évitent que toutes les fréquences du signal se trouve dans l'amplitude  $a$  dans la décomposition  $(a, \phi)$ , auquel cas,  $x$  n'aurait "pas de fréquence" au sens où  $\phi$  pourrait être choisie constante, voir nulle.

Sous ces conditions,  $x$  peut être vu comme le signal complexe  $\mathcal{A}[x]$  telle que :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} = a(t) \cos \phi(t) + ia(t) \sin \phi(t) = x + i\Im \mathcal{A}[x]$$

L'on parle alors de transformée en *signal analytique* et  $\mathcal{A}[x]$  a naturellement les mêmes paramètres instantanée que  $x$ .

L'intérêt d'introduire toutes ces notions est que les signaux analytiques souffre du même problème que les signaux réels. En effet, en écrivant un signal  $\mathbf{x}$  sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\Phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\Phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\Phi_n(t)} \end{pmatrix}$$

Le fait que  $\mathbf{x}$  soit à valeur dans  $\mathbb{C}^n$  impose un choix naturel d'amplitude instantanée : sa norme. Pour ce qui est de la phase instantanée, en revanche, n'importe qu'elle choix de  $\phi$  convient *a priori* :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} = a(t)e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\psi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\psi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\psi_n(t)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a(t) = \|\mathbf{x}(t)\|_2 \\ \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\|_2 = 1 \\ \phi_i = \phi + \psi_i \end{cases}$$

Il suffit que les  $\psi_i$  soient ajustés pour assurer que  $\phi_i = \phi + \psi_i$ .

À noter, que si  $a$  et  $\phi$  sont correspondent respectivement à une amplitude et une phase, le vecteur restant  $(a_i e^{i\psi_i})_{1 \leq i \leq n}$  correspond à un vecteur de polarisation, sur lequel nous reviendrons dans la section II suivante.

## 1.2 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié

On se propose ici de définir la phase instantanée comme suit :

DÉFINITION 3 (PHASE DYNALIQUE/INSTANTANÉE) — La *phase instantanée* ou *dynamique* (à l'instant  $t$  partant du  $t_0$ ) d'un signal multivarié  $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$  quelconque, est définie par la formule :

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \int_{t_0}^t \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi'_i(s) ds \quad (1.5)$$

On s'autorisera à omettre les paramètres de  $\Phi_{\text{dyn}}$  lorsque cela ne prête pas à confusion.

Outre l'aspect variationnelle de cette formule, le terme “dynamique” viens du fait que, lorsque  $\mathbf{x}$  suit une équation de Schrödinger :

$$i \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = h\mathbf{x}(t) \quad (1.6)$$

la dérivée  $\dot{\mathbf{x}}$  dans la formule (1.5) ci-dessus se voit remplacé par l'hamiltonien  $h\mathbf{x}$  [1, sec. 2], [13, p. 215], donnant :

$$\Phi'_{\text{dyn}} = -i \int_{t_0}^t \frac{\langle h\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds$$

Sachant que  $\mathbf{x}$  n'a aucune raison de suivre une telle équation dans notre cas, poser  $h = i \frac{d}{dt}$  enlève toute contrainte, auquel cas  $\Phi'_{\text{dyn}} = \Phi_{\text{dyn}}$ .

Cela étant, deux arguments sont donnés pour motiver cette définition :

### Argument variationnelles

Le premier, fortement inspirée par les travaux de Lilly & Olhede [11], consiste à généraliser la condition (1.4) de séparation haute/basse fréquences sur les signaux AM-FM. Pour cela, l'on commence par faire apparaître une phase  $\phi$  — pour l'instant inconnue — en écrivant  $\mathbf{x}$  sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\phi(t)} e^{-i\phi(t)} \mathbf{x}(t) := e^{i\phi(t)} \mathbf{y}(t)$$

Si  $\phi$  est bien choisie, alors  $\mathbf{y}$  ne devrait contenir que les informations associées à l'amplitude et la polarisation de  $\mathbf{x}$ . Or, conformément à la condition (1.4), la phase doit contenir les hautes fréquences du signal et, inversement, les basses fréquences doivent se trouver dans ce qui reste.

La fréquence donnant, pour le dire vite, la vitesse d'ondulation, la contrainte sur  $\mathbf{x}$  va être de limite les variations de  $\mathbf{y}$ . Concrètement,  $\phi$  doit être choisie de sorte à minimiser la dérivée  $\dot{\mathbf{y}}$  :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \left\| e^{-i\theta(t)} (\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t)\mathbf{x}(t)) \right\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t)\mathbf{x}(t)\|_2^2$$

La contrainte ne dépendant que de la dérivée  $\theta'$ , on se ramène à :

$$\min_{\theta(t)} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \min_{\theta'(t)} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - \theta'(t)\mathbf{x}(t)\|_2^2$$

En rappelant que  $\frac{d}{dx} \|f(x)\|_2^2 = 2\Re\langle f(x), f'(x) \rangle$ , il vient que ce minimum<sup>1</sup> est atteint par  $\phi'(t)$  à condition que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi'} \|\dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}\|_2^2 = 0 &\iff 0 = 2\Re \left\langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}, \frac{d}{d\phi'} (\dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}) \right\rangle \\ &= 2\Re \langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}, -i\mathbf{x} \rangle \\ &= 2\Re \left( i \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle \right) + 2\phi' \Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= -2\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle + 2\phi' \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi  $\phi' = \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$  et :

$$\phi(t) = \Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \quad (1.7)$$

<sup>1</sup> L'extremum obtenu est l'unique minimum globale puisque  $t \mapsto \|at + b\|^2$  est strictement convexe pour  $a \neq 0$ .

## Arguments des moyennes

Autre argument, cette fois inspiré de [2], ce base sur la notion de fréquence moyenne. D'abord dans le cas d'un signal complexe univarié, sont définies les fonctions de densités d'énergie (resp. d'énergie spectrale) comme :

$$\begin{array}{ll} \rho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & t \longmapsto |x(t)|^2 \end{array} \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{ll} \varrho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & \nu \longmapsto |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array} \quad (1.8)$$

À partir de ces dernières est définie la fréquence moyenne de  $x$  comme l'espérance de  $\varrho$ ,  $\mathbb{E}_\varrho[\nu]$ . Cette fréquence moyenne est liée à la fréquence instantanée par la formule :<sup>2</sup>

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho[\phi'] \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un signal  $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  multivarié, les densités d'énergies se définissent comme :

$$\begin{array}{ll} \rho_i : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & t \longmapsto |x_i(t)|^2 = a(t)^2 a_i(t)^2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \varrho_i : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & \nu \longmapsto |\hat{x}_i(\nu)|^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \rho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & t \longmapsto \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \varrho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & \nu \longmapsto \|\hat{\mathbf{x}}(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varrho_i(t) \end{array}$$

Le second argument consiste alors à dire que l'égalité des moments (1.9) doit resté vrai dans le cas multivarié. Cela assure au moins que la fréquence instantanée de  $\mathbf{x}$ ,  $1/2\pi\phi'$ , à pour moyenne la fréquence moyenne en sens de Fourier.

En appliquant la formule (1.9) au  $\varrho_i$ , et en notant toujours  $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \int_{\mathbb{R}} \nu \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) d\nu \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\varrho_i}[\nu] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'_i(t) \rho_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t)^2 \sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho \left[ \sum_{i=1}^n \phi'_i a_i^2 \right] \end{aligned}$$

Ce qui mène à poser  $\sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i^2(t)$  pour la fréquence instantanée, avec la phase associée :

$$\phi = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds \quad (1.10)$$

---

<sup>2</sup>cette formule se généralise à tout les moments de  $\varrho$  et existe également pour les moments de  $\rho$ , voir [3, sec. 1.4] pour une démonstration "à la physicienne" ... *ou bien en annexe ?*



Formule qui concorde bien avec celle de la phase dynamique une fois explicité :

$$\begin{aligned}
\Im m \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} &= \Im m \left( \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n \left( (aa_i)'(t) + a(t)a_i(t)i\phi_i'(t) \right) e^{i\phi_i(t)} \overline{a(t)a_i(t)e^{i\phi_i(t)}} \right) \\
&= \frac{1}{a(t)^2} \Im m \left( \sum_{i=1}^n a(t)a_i(t)(aa_i)'(t) + ia(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \right) \\
&= \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i(t)^2 \phi_i'(t)
\end{aligned}$$

D'où

$$\Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds$$

### 1.3 Apparition de la phase géométrique

Cela étant dit, il existe une autre façon, plus simple, d'obtenir la phase d'un signal. D'abord, dans le cas univarié, la phase instantanée de  $x = ae^{i\phi}$  peut être réécrite comme :

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \arg \left( x(t) \overline{x(t_0)} \right)$$

Formule qui se généralise en cas multivarié par ce qui sera appelé la *phase totale* du signal :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle \quad (1.11)$$

D'un point de vu géométrique, il est bien connue que le produit scalaire entre deux vecteurs réels  $u, v \in \mathbb{R}^n$  est lié à l'angle  $\angle(u, v)$  entre ces derniers par la formule :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = \|u\| \|v\| \cos \angle(u, v)$$

Pour le produit hermitien, cet angle se retrouve dans l'argument, de sorte que si  $u$  et  $v$  sont complexes :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \|u\| \|v\| e^{i\angle(u, v)}$$

En ce sens, la phase totale calcul explicitement l'angle entre  $\mathbf{x}(t_0)$  et  $\mathbf{x}(t)$ . La question est alors de savoir si  $\Phi_{\text{dyn}}$  correspond à cette angle. Un calcul explicite montre que c'est bien le cas en univarié : en notant  $\mathbf{x} = ae^{i\phi}$ , il vient :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) &= \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Im m \int_{t_0}^t \frac{(a'(s) + ia(s)\phi'(s))e^{i\phi(s)} \overline{a(s)e^{i\phi(s)}}}{a^2(s)} ds \\
&= \int_{t_0}^t \frac{a^2(s)\phi'(s)}{a^2(s)} ds \\
&= \phi(t) - \phi(t_0)
\end{aligned}$$

Dans le cas multivarié, en revanche, c'est une autre histoire. En reprenant les notations  $\mathbf{x} = ae^{i\Phi_{\text{dyn}}} (a_i e^{i\psi_i})_{1 \leq i \leq n}$ , la phase totale se réécrit :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \arg \left( a(t)a(t_0)e^{i(\Phi_{\text{dyn}}(t) - \Phi_{\text{dyn}}(t_0))} \sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \\
&= \Phi_{\text{dyn}}(t) + \arg \left( \sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \quad \text{car } \Phi_{\text{dyn}}(t_0, t_0) = 0
\end{aligned} \quad (1.12)$$

Apparaît alors un terme de déviation de la phase dynamique par rapport à la phase totale, qui (surprise) est appelé phase géomatique et sera notée :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \quad (1.13)$$

Déviaton qui s'observe expérimentalement, comme le montre la figure 1.1 ci-dessous.

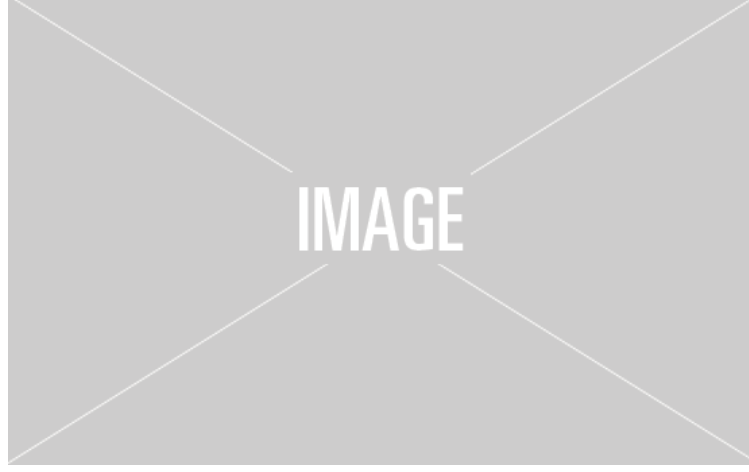


fig. 1.1 — Sur le graphe de gauche, le signal  $\mathbf{x}$  à valeur dans  $\mathbb{R}^2$  et dans celui de droite la calcul de la phase dynamique, totale et de leur différence. Résultat tiré des simulation de Le Bihan et al. [7]

Un résultat bien connue en physique [1, 13, 15] est que cette troisième phase est invariante par transformation de jauge. Dans notre contexte, cela signifie que si  $\mathbf{x}$  et  $\tilde{\mathbf{x}}$  sont deux signaux multivarié complexe tel que  $\tilde{\mathbf{x}} = e^{i\alpha} \mathbf{x}$ , avec  $\alpha$  une fonction continue du temps, alors :

$$\Phi_{\text{geo}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\tilde{\mathbf{x}}) - \Phi_{\text{dyn}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) = \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x})$$

Cela signifie plusieurs choses. D'une part, le fait cette phase soit invariante pas transformation de jauge montre qu'elle est associée / issue de la composante de  $\mathbf{x}$  dont à mentionné qu'elle était associée à sa polarisation. Ce point sera discuté dans la section II suivante.

D'autre part, cela suggère que la phase géométrique doit avoir une certaine robustesse au bruit. Pour argumenter ce point, rappelons que le bruit d'un signal se trouve généralement dans les hautes fréquences de ce dernier. Or, en admettant, comme ça l'a été abordé dans la section 1.2 précédent, que la phase dynamique contient les hautes fréquences, il y a d'autant plus de chances que cette phase est un bon comportement par rapport au bruit.

Ainsi, s'il est possible de tirer des informations de  $\Phi_{\text{geo}}$ , alors ces informations doivent pouvoir être obtenue même pour des signaux particulièrement bruités, comme c'est le cas des mesures d'ondes gravitationnelles (*j'aimerais beaucoup étudier ça mais ce sera sûrement pour une thèse, si thèse il y a*).

Cela étant dit, avec le calcul (1.12) précédent, il peut sembler que le travail sur la phase géométrique est terminée en cela qu'une formule explicite est donnée. Deux remarques à ce sujet :

D'abord, cette formule demande de connaître les  $\psi_i$ , qui eux-mêmes sont obtenue en extrayant la phase dynamique. Or, la formule de  $\Phi_{\text{dyn}}$  n'est pas la plus appropriée au traitement du signal puisque qu'elle fait intervenir intégral et dérivée.

Aussi mais surtout, cette formule cache la profondeur dernière l'étude de la phase géométrique, à commencer par l'origine de son nom.

*À modifier en fonction de la suite :* Dans ce mémoire le calcul pratique de la phase géométrique ne sera pas aborder pour, à la place, se pencher sur le second point : l'aspect géométrique d'une phase éponyme.

*Est-ce que je dois parler de l'espace projectif ou est-ce que je le garde pour la grande partie II ?*

## II — Première étude de la phase géométrique

Pour une première étude de la phase géométrique du signal, Le Bihan *et al.* se sont penché sur un cas particulier de signaux bivariés [5, 7, 8]. Ces signaux, dit AM-FM-PM sont présentés dans une première partie et le calcul explicite de leur phases — totale, dynamique et géométrique — est présenté. Dans une seconde partie... **A VOIR POUR LA SUITE**

### 2.1 Cas des signaux AM-FM-PM bivariés

Ces signaux AM-FM-PM viennent généraliser les signaux AM-FM univarié en tenant compte de l'état de polarisation permis par le passage au 2D. Ils sont rapidement introduit ici et une construction plus détaillé de ces dernier se trouve en annexe B.1. (*est-ce que je fais vraiment une annexe là-dessus ?*).

En quelques mots. Dans le cas le plus simple, un signal bivarié à valeurs réelles,  $s$ , va décrire une ellipse en cours du temps. On parle alors de polarisation elliptique et  $s$  va s'écrire :

$$s(t) = a \cos \varphi(t) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}^+, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \chi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Les paramètres  $a$  et  $\chi$  caractérisent respectivement la taille et l'excentricité de l'ellipse,  $\theta$  son orientation dans le plan et  $\varphi(t)$  précise où se trouve  $s$  à l'instant  $t$  sur cette ellipse. Le tout est représenté sur la ?? ci-dessous.

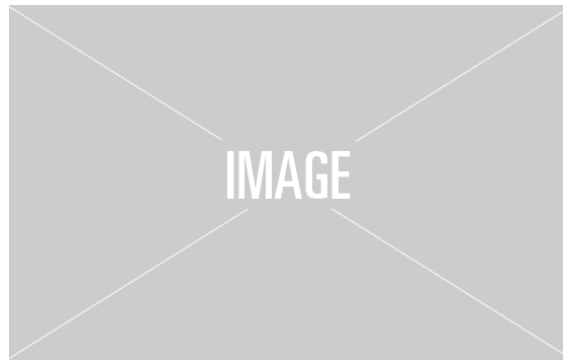


fig. 1.2 — Ellipse de polarisation du signal  $s$  sur laquelle sont représentés ses paramètres  $a, \varphi, \theta, \chi$ .

L'expression (1.15) est obtenue en autorisant les paramètres de polarisation à varier au cours du temps et après une transformation en signal analytique, mentionné dans la section 1.1 :

**DÉFINITION 4 (SIGNAL AM-FM-PM)** — Un signal bivarié complexe  $\mathbf{x}$  AM-FM-PM (*amplitude, frequency and polarization modulated*) est caractérisé par quatre paramètres  $a, \varphi, \theta$  et  $\chi$ , respectivement à valeur dans  $\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  et tels que :

$$|\varphi'(t)| \gg |\theta'(t)|, |\chi'(t)|, \left| \frac{a'(t)}{a(t)} \right| \quad \left| \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \right| \gg 1 \quad (1.14)$$

Sous ces conditions,  $\mathbf{x}$  prend alors la forme,  $\forall t \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbf{x}(t) = a(t)e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

où  $R_{\theta(t)}$  est la matrice de rotation d'angle  $\theta(t)$

**IMPOSSIBLE DE TROUVER UNE SOURCE SUR L'ORIGINE DES HYPOTHESES + QU'EST-CE QU'ON ENTEND PAR “ $\gg$ ” ?**

La transformée en SA permet de transformer les signaux à valeurs réelles en complexes, ce qui nécessaire<sup>3</sup> pour étudier la phase géométrique car c'est uniquement dans le cadre de complexe qu'elle a été étudiée jusqu'à présent. Et, comme pour les signaux AM-FM, les hypothèses sur  $a, \varphi, \theta, \chi$  assure que les paramètres soient interprétables comme sur la figure 1.2 précédente (là encore, voir annexe A).

Les trois phases de tels signaux est alors donnée par la proposition 1 suivante :

PROPOSITION 1 (PHASES DE SIGNAL AM-FM-PM) — Les trois phases d'un signal bivarié AM-FM-PM  $\mathbf{x}$  de paramètres  $(a, \varphi, \theta, \chi)$  sont données par les formules :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arg \left( \cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin (\chi(t_0) + \chi(t)) \right) \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \left( \tan \Delta\theta \frac{\tan \chi(t_0) + \tan \chi(t)}{1 + \tan \chi(t_0) \tan \chi(t)} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \\ &= \arctan \left( \tan \Delta\theta \frac{\tan \chi(t_0) + \tan \chi(t)}{1 + \tan \chi(t_0) \tan \chi(t)} \right) - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \end{aligned} \quad (1.18)$$

où  $\Delta y = y(t) - y(t_0)$  pour  $y = \varphi, \theta, \chi$ . La démonstration se trouve en annexe B.2. (*démo outdated*)

Deux remarques sur ces formules. La première est la phase géométrique ne dépend que des paramètres polarisations  $\theta$  et  $\chi$ . Un résultat rassurant sachant qu'elle est invariante pas transformation de jauge. La seconde, nettement plus troublante, est que  $\varphi$  ne s'interprète ni comme la phase totale ni dynamique. Plus loin, nous reviendrons, *section 2.3*, sur laquelle des deux doit représenter  $\varphi$ .

Pour le moment, remarquons que si à l'instant  $t$ ,  $\mathbf{x}$  est tel que :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x}(t) = e^{i\alpha} \mathbf{x}(t_0)$$

alors le terme en arctangente disparaît, auquel cas :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) = - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds$$

Pour la suite :

- C'est bizarre,  $\varphi$  ne correspond ni à  $\Phi_{\text{tot}}$  ni à  $\Phi_{\text{dyn}}$
- Le terme en arctan, en fait c'est l'angle entre les deux vecteurs de polarisation  $R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix}$  et  $R_{\theta(t_0)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t_0) \\ -i \sin \chi(t_0) \end{pmatrix}$  *A PEAUFINER*
- Et qu'est-ce qu'on en dit alors ?
- En attendant, y'a un cas où ça s'explique mieux : cas pseudo-cyclique
- *Rq : on dit rien sur ce que doit faire  $\mathbf{x}$  entre  $t_0$  et  $t$ , c'est que à  $t$  qu'y a contrainte*
- Là, le terme moche de  $\Phi_{\text{tot}}$  disparaît et la phase géométrique est toute belle et on verra dans la partie II que c'est un cas très intéressant pour comprendre la phase g
- pour l'interpréter, va dans point carré
- *dans les deux cas, la phase g est indépendante de  $\varphi$  : elle regarde que la polar !!*

<sup>3</sup>Nous reviendrons sur ce point dans la dernière partie de mémoire ... *est-ce qu'on le fait vraiment tho?*

OLD :

- Représentation par expo (matrice et quaternions)
- calcul des 3 phases pour le cas bivarié
- *lien avec le calcul d'aire*
- discussion sur l'interprétation de  $\varphi$  par rapport aux  $\Phi_{\text{tot,dyn,géo}}$  : quelle phase  $\varphi$  est sensée représenter, totale ou dynamique ?

## 2.2 Généralisation en plus haute dimension

- Différentes écritures du bivarié pour différentes généralisation :
- Les quaternions on passe vite parce que ça se généralise très mal, Lefevre a parlé, ça mène aux algèbres Clifford : trop de contrainte sur les dimensions des signaux
- En terme d'expo de matrice ? Lefevre [9, sec. I.3] l'a fait en trivarié mais au delà, y'a plus vraiment de choix remarquable de base pour  $u(n)$
- En augmentant la taille de la matrice de rotation ? Lilly [10] l'a fait en trivarié et mais là encore, en terme de généralisation c'est pas si dingue parce que la matrice de rotation est pas calculable.

## 2.3 Sur la nécessité d'avoir une approche géométrique

- Mais surtout, dans tout ça, on ratte le plus important :
- La phase géo est invariante par transfo de jauge, donc il faut faire apparaître  $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$  dans la décomposition.
- et en fait, c'est le cas en bivarié car  $\mathbb{P}\mathbb{C}^1 \cong S^2$  !
- $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$  oui mais il faut pas non plus regarder que la projection parce qu'on perd toute les phases dans ce cas.
- Le bon compromis c'est les variétés fibrées : on est dans  $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$  mais on garde les phases dans les fibres.
- D'autant plus que ça à déjà été fait en physique et c'est vraiment concluant... (transition vers la grande partie suivante.)

## ANNEXES

### Annexe A — Compléments sur l'analyse temps-fréquence

A.1. Un mot sur la notion de fréquence instantanée (*nécessaire?*)

A.2. Formalisme derrière la transformée en SA

A.3. Lien avec le théorème de Bedrosian

### Annexe B — Compléments sur les signaux AM-FM-PM

B.1. Construction détaillée des signaux AM-FM-PM (*nécessaire?*)

- Signal polarisé classique ( $\theta, \chi$  constants)
- Transformé en SA avec les hypothèses de Bedrosian
- Définition général en faisant dépendre  $\theta/\chi$  du temps
- Paramètre de Polar sur la sphère de Poincaré

B.2. Démonstrations

#### Démonstration de la proposition 1

- Il existe un groupe de Lie  $G$  opérant à droite (ou à gauche) sur  $P$  via une application différentiable :

$$\begin{aligned} \phi : P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto \phi(p, g) := pg = p \cdot g \end{aligned} \quad (1.19)$$

- Il existe une surjection différentiable  $\pi : P \longrightarrow B$  telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}(\pi(p)) = pG \quad (1.20)$$

- $P$  est munie d'un ensemble de paire  $(U_i, h_i)$  tel que les  $U_i$  forment un recouvrement de  $B$  et tel que les  $h_i : G \times U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset P$  soient des difféomorphismes vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \forall x \in B, \quad h_i(ab, x) = h_i(a, x) \cdot b \quad \text{et} \quad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

Par souci de lisibilité, on note  $\mathcal{U} = R_\theta \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix}$  de sorte que la dérivée de  $\mathbf{x}$  s'écrive :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= a' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ia\varphi' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ae^{i\varphi} \theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix} + ae^{i\varphi} \chi' \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \chi + i \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \theta \sin \chi - i \cos \theta \cos \chi \end{pmatrix} \\ &= a' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ia\varphi' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ae^{i\varphi} \theta' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + ae^{i\varphi} \chi' \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathcal{U}} \end{aligned}$$

Le produit hermitien  $\langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle &= \left\langle ae^{i\varphi}\mathcal{U}, a'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\varphi'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\theta' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + ae^{i\varphi}\chi' \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}} \right\rangle \\
&= \left\langle a\mathcal{U}, a'\mathcal{U} + ia\varphi'\mathcal{U} + a\theta' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + a\chi' \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}} \right\rangle \\
&= aa'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle - ia^2\varphi'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + a^2\theta' \left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} \right\rangle + ia^2\chi' \left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}} \right\rangle
\end{aligned}$$

où les deux derniers produits hermitiens donnent :

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} \right\rangle &= -\mathcal{U}_1\overline{\mathcal{U}_2} + \mathcal{U}_2\overline{\mathcal{U}_1} \\
&= 2i\Im(\overline{\mathcal{U}_1}\mathcal{U}_2) \\
&= 2i\Im(\cos\theta\cos\chi - i\sin\theta\sin\chi)(\sin\theta\cos\chi - i\cos\theta\sin\chi) \\
&= 2i(-\cos^2\theta\cos\chi\sin\chi - \sin^2\theta\sin\chi\cos\chi) \\
&= -2i(\cos\chi\sin\chi + \sin\chi\cos\chi) \\
&= -i\sin 2\chi
\end{aligned}$$

$$\left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}} \right\rangle = -\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_2\mathcal{U}_1 = 0$$

D'où, sachant que  $\|\mathbf{x}\|^2 = a^2$  et  $\|\mathcal{U}\| = 1$ , la formule :

$$\begin{aligned}
-\frac{\Im\langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= -\frac{1}{a^2}\Im(aa'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle - ia^2\varphi'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle - ia^2\theta'\sin 2\chi) \\
&= \frac{1}{a^2}(a^2\varphi'\|\mathcal{U}\|^2 + a^2\theta'\sin 2\chi) \\
&= \varphi' + \theta'\sin 2\chi
\end{aligned}$$

Pour la phase totale, on note cette fois  $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \cos\chi \\ -i\sin\chi \end{pmatrix}$  et on a :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t) \rangle &= \left\langle a(t_0)e^{i\varphi(t_0)}R_{\theta(t_0)}\mathcal{V}(t_0), a(t)e^{i\varphi(t)}R_{\theta(t)}\mathcal{V}(t) \right\rangle \\
&= a(t_0)e^{i\varphi(t_0)}a(t)e^{-i\varphi(t)}\left\langle R_{\theta(t_0)}\mathcal{V}(t_0), R_{\theta(t)}\mathcal{V}(t) \right\rangle \\
&= a(t_0)a(t)e^{i(\varphi(t_0)-\varphi(t))}\left\langle \mathcal{V}(t_0), R_{\theta(t)-\theta(t_0)}\mathcal{V}(t) \right\rangle
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on note  $\Delta y = y(t) - y(t_0)$ ,  $y_1 = y(t_0)$  et  $y_2 = (t)$  pour  $y = \varphi, \theta, \chi$ . Le produit hermitien à droite s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{V}(t_0), R_{\Delta\theta}\mathcal{V}(t) \right\rangle &= (\cos\chi_1 \quad -i\sin\chi_1) \begin{pmatrix} \cos\Delta\theta\cos\chi_2 - i\sin\Delta\theta\sin\chi_2 \\ \sin\Delta\theta\cos\chi_2 + i\cos\Delta\theta\sin\chi_2 \end{pmatrix} \\
&= \cos\chi_1(\cos\Delta\theta\cos\chi_2 - i\sin\Delta\theta\sin\chi_2) - i\sin\chi_1(\sin\Delta\theta\cos\chi_2 + i\cos\Delta\theta\sin\chi_2) \\
&= \cos\Delta\theta(\cos\chi_1\cos\chi_2 + \sin\chi_1\sin\chi_2) - i\sin\Delta\theta(\cos\chi_1\sin\chi_2 + \sin\chi_1\cos\chi_2) \\
&= \cos\Delta\theta\cos\Delta\chi - i\sin\Delta\theta\sin(\chi_1 + \chi_2)
\end{aligned}$$

■

---

## PARTIE II

---

### ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME

---

#### I — Prérequis

*Dans notre cas, tout s'écrit très simplement donc pas besoin de sortir tout l'arsenal de géo diff*

##### 1.1 — Espace projectif complexe

###### 1.2.1 — Construction de $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$

- Définition comme espace quotient  $S^{2n-1}/U(1)$
- lien avec la projection  $x \mapsto xx^\dagger$
- $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  vue comme variété différentielle complexe (voir annexe pour détails)

###### 1.2.2 — Métrique de Fubini-Study

- Métrique induite par la projection
- expression de la métrique
- expression en coordonnées locales

##### 1.2 — Fibré principaux

###### 1.1.1 — Fondamentaux

- Définitions de base
- Section locale (canonique)
- changement de carte

###### 1.1.2 — Espaces horizontaux et connexion

- Espace verticaux
- connexion comme ensemble d'espace horizontaux
- 1-forme de connexion
- notre choix de connexion (induite par le produit hermitien)

#### II — Interprétation géométrique des trois phases

##### 2.1 — Cas des signaux “pseudo-cyclique” (cyclique à phase près)

- Le dessin de Bohm :
- phase dyn = signal - horizontal lift
- phase geo = horizontal lift - cyclique lift (<- indé du signal !)
- phase tot = cumul des deux

##### 2.2 — La phase géo dans l'espace projectif

- Géodésique de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  et généralisation du cas pseudo-cyclique
- Remarque de Mukunda : phase géo est une 2-forme vs phase dyn est une 1-forme
- Bonnet-Gauss & Stokes : phase géo comme calcul d'air
- *Comme partie imaginaire de la métrique (+ lien avec Fisher)*

#### Annexes

##### A — Forme différentielles (*nécessaire ?*)



## **B — Algèbre et groupe de Lie**

- def : groupe de Lie  $G$
- def : Algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  associée à  $G$
- $\mathfrak{g}$  vu comme tangent  $T_e G$
- Cas particulier :  $G = \mathrm{U}(1)$

## **C — Variétés différentielles complexe**

- Complexification de TM
- L'intérêt de faire ça : proprement définir  $\partial/\partial\bar{z}$
- Exemple : écriture de forme de Kahler de Fubini-Study

Pour étudier la phase géométrique d'un signal  $\psi$ , il nous faut projeter  $\psi$  sur  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ , et ceux, tout en gardant une trace de sa phase puisque c'est le lien entre les deux qui nous intéresse. Il nous faut donc envoyer  $\psi$  dans le produit :

$$U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n \quad (\text{ou } \mathbb{C}^{n-1*}/\mathbb{C}^*)$$

Garder le lien entre cet espace et celui d'origine mène à se placer dans le cadre avec d'un *variété fibrée* (ou simplement fibré). Plus précisément, comme  $U(1)$  est un groupe de lie, ce sera un *fibré principal* noté  $S^{2n-1}(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$ .

Comme son nom l'indique,  $S^{2n-1}(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$  à une structure de variété différentielle et le lien entre les  $U(1)$  et  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  va se faire par le biais d'une connexion. L'on verra alors que cette connexion est intrinsèquement lié à la phase dynamique du signal, et il sera discuté de la signification de ce résultat.

La phase géométrique, quand à elle, sera liée avec la métrique hermitienne associée aux l'espaces projectifs complexes.

Tout cela va demander quelques prérequis que nous allons voir à présent.

# I — Prérequis mathématique

## 1.1 Variété fibrée principale

Pour le dire simplement, les *variétés fibrées* sont des variétés qui ressemble localement à des espaces produits. Le ruban de Möbius en est un exemple typique : il ne peut pas s'écrire comme le produit d'un cercle avec un segment  $S^1 \times [0, 1]$  à cause de la façon dont il est construit. Mais localement, il est tout à fait comparable (*i.e.* difféomorphe) à un tel produit (*cf.* [fig. 2.1](#)).

Il existe toutes sorte de variétés fibrées dès lors qu'elles sont munies de structure remarquable. Celle qui vont nous intéresser sont les variétés dites principales<sup>4</sup> :

**DÉFINITION 5 (VARIÉTÉ FIBRÉE PRINCIPALE)** — Une *variété fibrée principale* (VFP), ou *fibré principal* est constituée de deux variétés différentielles  $P$  et  $B$  telles que :

- Il existe un groupe de Lie  $G$  opérant à droite (ou à gauche) sur  $P$  via l'application différentiable :

$$\phi : \begin{array}{ccc} P \times G & \longrightarrow & P \\ (p, g) & \longmapsto & \phi(p, g) := pg = p \cdot g \end{array} \quad (2.1)$$

- Il existe une surjection différentiable  $\pi : P \longrightarrow B$  telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}(\pi(p)) = pG \quad (2.2)$$

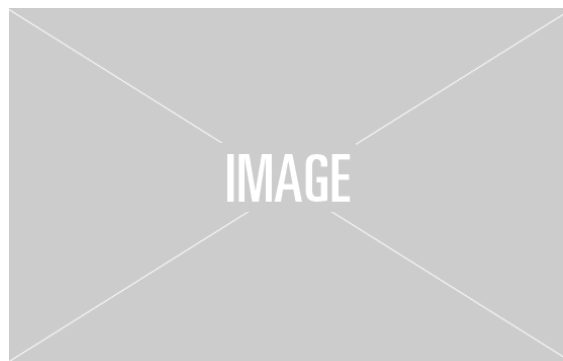
- $P$  est munie d'un ensemble de paire  $(U_i, h_i)$  tel que les  $U_i$  forment un recouvrement de  $B$  et tel que les  $h_i : G \times U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset P$  soient des difféomorphismes vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \forall x \in B, \quad h_i(ab, x) = h_i(a, x) \cdot b \quad \text{et} \quad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

La variété  $B$  est appelé la *base* de la VFP, que  $G$  son *groupe structural* et  $pG$  la *fibres* de  $P$  passant par  $p$  et au dessus de  $\pi(p) \in B$ . Le tout est notée  $P(\phi, G, \pi, B)$  ou plus simplement  $P(G, B)$ .

Les fibres  $pG$  sont toutes difféomorphes à  $G$  et  $B$  est difféomorphe à  $P/G$ . *Le diagramme commutatif ci-contre résume la situation.*

$$\begin{array}{ccccc} & & U_i & & \\ \text{pr}_2 \nearrow & & \nwarrow \pi & & \\ G \times U_i & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U_i) \subset P & & \\ \text{pr}_1 \searrow & & \nwarrow \rho & & \\ & & G & & \end{array}$$



*fig. 2.1 — Représentation du ruban de Möbius en tant que fibré. Même s'il n'est pas principal, les notations sont reprise de la définition 5.*

L'ensemble  $\{(U_i, h_i)\}_i$  est l'équivalent d'un atlas pour les variétés différentielles classiques mais adapter pour tenir compte de la structure fibré de  $P$  et de l'action de  $G$ . Explicité les changements de cartes dans  $P$ , ce fait comme suit.

<sup>4</sup> Bien que ce ne sera pas précisé, il sera toujours sous-entendu que les différentes variétés et cartes doivent avoir les mêmes niveaux de régularités pour que le tout reste cohérent.

D'abord,  $P$  étant localement difféomorphe à un produit  $G \times U_i$ , on peut y tracer des graphes appelés *sections locales*, comme sur la figure 2.2 ci-dessous. Formellement, une section locale au dessus de  $U_i$  est une application  $\sigma : U_i \subset B \rightarrow P$  vérifiant :

$$\pi \circ \sigma = id|_{U_i}$$

Ensuite, les hypothèses sur  $P(G, B)$  sont telles que  $G$  agit transitivement et librement (ou sans point fixe)

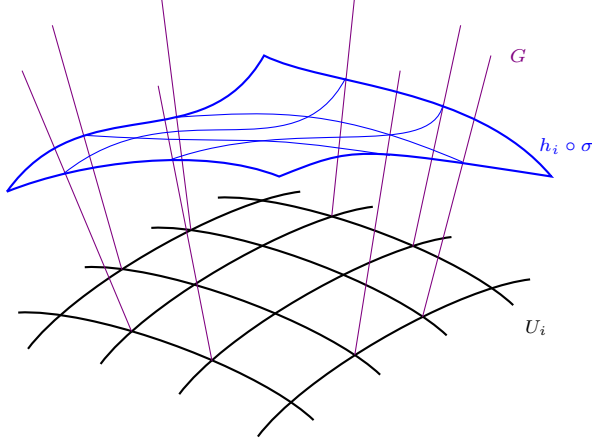


fig. 2.2 — Représentation d'une section locale  $\sigma$  au dessus de  $U_i$ . Comme  $P$  n'est pas un produit à proprement parler,  $\sigma$  est représenté dans  $G \times U_i$  à travers  $h_i$ .

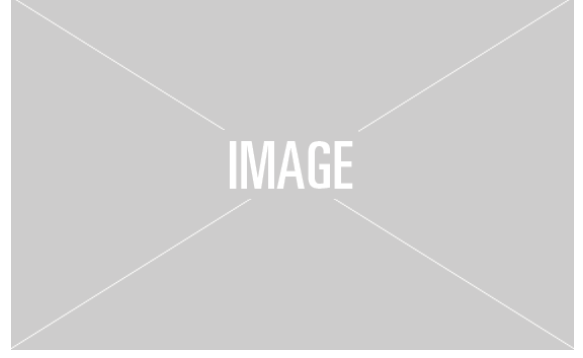


fig. 2.3 — Représentation de la section canonique définie par rapport à  $G$ .

sur  $P$ . C'est-à-dire que, sur une même fibre, tout point peut être atteint par tout autre via l'action de  $G$  (transitivité) :

$$\forall x \in B, \quad \forall p, q \in P_x, \quad \exists t(p, q) \in G \mid p = q \cdot t(p, q)$$

et que le seul moyen laisse les points invariants par cette même action est de passer par l'élément neutre  $e$  (libre) :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad p = pg \implies g = e$$

De la transitivité de  $G$ , découle le fait que toutes les sections locales  $\sigma$  au dessus de  $U_i$  peuvent s'écrire à partir d'une même section  $\sigma_i$  via la formule :

$$\forall x \in B, \quad \sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma(x))$$

Son caractère libre, lui assure l'unicité d'un choix canonique de section  $\sigma_i$  sur  $U_i$ . Elle est donnée par :

$$h_i(x, e) = \sigma_i(x)$$

Cela mène à la définition :

DÉFINITION 6 (FONCTIONS DE TRANSITIONS) — L'intersection de deux cartes est noté  $U_{ij} = U_i \cap U_j$  et le passage d'une section locale canonique est donné par :

$$\forall x \in U_{ij}, \quad \sigma_j(x) = \sigma_i(x) t(\sigma_i(x), \sigma_j(x))$$

L'élément de  $G$ ,  $t(\sigma_i, \sigma_j)$ , est alors appelé *fonction de transition* et est noté  $\varphi_{ij}$ . Elle fait effectivement la transition entre deux cartes dans le sens où :

$$\forall (g, x) \in G \times U_{ij}, \quad h_i^{-1} \circ h_j(g, x) = (\varphi_{ij}(x)g, x)$$

Dans la suite, il sera nécessaire d'associer une connexion à  $P$  et sa structure de fibré principal permet de définir ces dernières légèrement différemment que pour les variété classiques. L'idée est la suivante : Comme  $P$  ressemble localement à un produit  $G \times U_i$ , il serait utile de séparer ses espaces tangents  $T_p P$  comme une somme directe des sous espaces associées respectivement aux fibres et à la base. Conformément aux représentations précédentes (fig. 2.1 à 2.3), les premiers sont appelées espaces tangents *verticaux* et les second *horizontaux*, sont notés :

$$\forall p \in P, \quad T_p P = V_p P \oplus H_p P$$

Comme les fibres de  $P$  sont toutes difféomorphes à  $G$ , leurs espaces tangents se représente dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ . (*voir annexe B pour des rappels sur le sujet*)

- espace tangent
- séparation en vertical  $\oplus$  horizontal
- pourquoi la découpe est pas canonique
- reformulation en terme de 1-forme
- connexion en coordo local
- toujours pas canonique tho

PROPOSITION 2 — Une 1-forme de connexion  $\mathcal{A}$ , noté  $\mathcal{A}_i$  en coordonnée local sur la carte  $U_i$ , doit vérifier le changement de coordonnée :

$$\varphi_{ij} \mathcal{A}_j = \mathcal{A}_i \varphi_{ij} + d\varphi_{ij}$$

## 1.2 Espaces projectifs complexes

Les espaces projectifs complexes se construisent ainsi. On se place dans  $\mathbb{C}^{n+1*} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n+1}}\}$  avec la relation d'équivalence,  $\forall x, y \in \mathbb{C}^{n+1*}$  :

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid x = \lambda y$$

L'espace projectif complexe, noté  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  est l'espace quotient :

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1} = \mathbb{C}^{n+1*} / \mathbb{C}^* = \mathbb{C}^{n+1*} / \sim$$

En notant  $[z]$  la classe de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  du représentant  $z = (z^i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1*}$ , on définit les ensembles et cartes,  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$U_i = \left\{ [z] \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n \mid z^i \neq 0 \right\} \quad \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^i \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-i} \cong \mathbb{C}^n \\ \phi_i : [z] & \longmapsto & \frac{1}{z^i} (z_0, \dots, 1, \dots, z_n) \end{array} \quad (2.3)$$

L'ensemble d'arrivé  $\phi_i(U_i)$  est de dimension  $n$  et s'assimile à  $\mathbb{C}^n$  mais, par souci de comodité, on restera dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Cela permet d'écrire plus simplement les formules de changement de carte en évitant de devoir enlever et rajouter des coefficients :

$$\forall [z] \in U_i \cap U_j, \quad \phi_i \circ \phi_j^{-1}(z) = \frac{z^j}{z^i} z \quad (z^{i,j} \neq 0)$$

Les  $(U_i, \phi_i)$  forme un atlas holomorphe sur l'espace projectif complexe, faisant de  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  une variété complexe de dimension  $\dim_{\mathbb{C}} = n$  (voir annexe ?? pour plus de détail).

PROPOSITION 3 — La  $2n + 1$ -sphère  $S^{2n+1}$  est un espace fibré de base  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  est de fibre type  $S^1$ , ou  $U(1)$ . La fibration étant la projection canonique :

$$\pi : \begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{P}\mathbb{C}^n \\ x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

Voir [6] pour la démo

PROPOSITION 4 —  $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$  admet une métrique hermitienne induite par la métrique de  $S^{2n+1}$ , elle même induite du produit scalaire sur  $\mathbb{R}^{2n+1}$ . Elle est appelé *métrique de Fubini-Study* et est donnée par le formule :

## II — Interprétation des trois phases dans ce cadre

### 2.1 Cas pseudo-cyclique

## ANNEXE

### Annexe A — Variété différentielle complexe, tiré de [15]

Pour mémoire, une variété différentielle de classe  $C^k$  ( $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) de dimension  $n$  est un espace topologique<sup>5</sup>  $\mathcal{M}$  (ou  $\mathcal{M}^n$ ) munie d'un *atlas*  $(\phi_i, U_i)_{i \in I}$ , c'est-à-dire un ensemble finie de pair d'ouvert  $U_i \subset \mathcal{M}$  et d'application  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que :

- les  $U_i$  forme un recouvrement de la variété :  $\bigcup_{i \in I} \phi_i(U_i) = \mathcal{M}$
- les  $\phi_i$  sont des homéomorphismes sur leur image  $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ .
- si l'intersection  $U_i \cap U_j$  est non vide, alors  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)}$  est un  $C^k$  difféomorphisme sur son image.

$\mathcal{M}$  sera une *variété différentielle complexe* si elle satisfait les propriétés ci-dessus où  $\mathbb{R}^n$  est remplacé par  $\mathbb{C}^n$  et où la condition de difféomorphisme est remplacé par la condition d'holomorphisme. Une application  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  étant holomorphe si chacune de ses composantes vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \mu, \quad \frac{\partial f}{\partial y^\mu}(x + iy) = i \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x + iy)$$

Les fonctions holomorphes étant automatiquement  $C^\infty$ , les variétés différentielles complexes sont toujours lisse, c'est-à-dire  $C^\infty$ . Aussi,  $\mathcal{M}$  est dite de dimension complexe  $n$  et dimension (réel)  $2n$ , notés :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) := n \qquad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) := \dim(\mathcal{M}) = 2n \quad (2.4)$$

Ensuite, pour le dire rapidement, la structure complexe de  $\mathcal{M}$  permet de séparer les espaces tangents en deux sous espaces. Pour ce faire, on commence par noter qu'en tout point  $p \in \mathcal{M}$  de coordonnée  $z^\nu = x^\nu + iy^\nu$ , l'espace tangent  $T_p \mathcal{M}$ , vu comme variété réelle, admet une base :

$$T_p \mathcal{M} = \text{Vec} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\} \quad (2.5)$$

Plus tôt que de se basé sur les  $x^\mu$  et  $y^\mu$  pour séparer les  $T_p \mathcal{M}$ , on définit sur ces derniers un tenseur  $J_p$  de type (1,1) tel que :

$$J_p \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \qquad J_p \frac{\partial}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.6)$$

Ce tenseur est l'équivalent de la multiplication par  $\pm i$  et le fait que  $\mathcal{M}$  soit complexe assure qu'il soit défini globalement, *i.e.* sur  $T\mathcal{M}$ . Il est diagonalisable dans la base :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial z^\mu} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \qquad \partial_{\bar{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} + i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \quad (2.7)$$

Ainsi en fonction de la base ((2.4) ou (2.7)),  $J_p$  va s'écrire :

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \qquad J_p = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Finalement,  $T\mathcal{M}$  peut être séparé en deux sous-espaces engendré respectivement par les  $\partial_\mu$  et  $\partial_{\bar{\nu}}$ . On parle de vecteur holomorphe et anti-holomorphe et on note :

$$T_p \mathcal{M}^+ = \text{Vec}\{\partial_\mu \mid 1 \leq \mu \leq n\} \qquad T_p \mathcal{M}^- = \text{Vec}\{\partial_{\bar{\mu}} \mid 1 \leq \mu \leq n\} \quad (2.9)$$

---

<sup>5</sup> La topologie de  $\mathcal{M}$  doit vérifier des propriétés type séparable, dénombrable à l'infinie, etc., qui seront toutes admises dans la suite, voir par exemple [6, chap. 2]





- qui est quelle phase
- mail à berthier pour les contraintes rapport

## TABLE DES FIGURES

1.1	Déviati��n de la phase dynamique par rapport �� la phase totale . . . . .	9
1.2	Ellipse de polarisation d'un signal bivarié réel . . . . .	10
2.1	Ruban de Mobius comme variété fibrée . . . . .	18
2.2	Repr��sentati��n d'une section local . . . . .	19
2.3	Repr��sentati��n de la section canonique . . . . .	19

## TABLE DES CODES

# RÉFÉRENCES

- [1] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [2] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [3] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [4] F. FAURE, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).
- [5] J. FLAMANT, N. LE BIHAN, AND P. CHAINAIS, *Time-frequency analysis of bivariate signals*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 46 (2019), pp. 351–383.
- [6] J. LAFONTAINE, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [7] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [8] ———, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.
- [9] J. LEFEVRE, *Polarization analysis and optimization geometry*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....] ; University of Melbourne, Dec. 2021.
- [10] J. M. LILLY, *Modulated Oscillations in Three Dimensions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 59 (2011), pp. 5930–5943.
- [11] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [12] J. E. MARSDEN AND T. S. RATIU, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, vol. 17 of Texts in Applied Mathematics, Springer New York, New York, NY, 1999.
- [13] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [14] ———, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. II. The Case of Unitary Group Representations*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 269–340.
- [15] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.