Mémoire de Stage de M2

Phase Géométrique de Signal Multivarié
… et puis c'est déjà pas mal

Grégoire Doat

Encadré par Nicolas Le Bihan, Pierre-Olivier Amblard, Julien Flamant & Michel Berthier

Master Mix – Université de La Rochelle

2024 – 2025

Tables des Matrières

* : PARTIELLEMENT TERMINÉE
* : AU STADE DE NOTE

TOUT LES TEXTES EN ROUGES SONT DES NOTES. LES FIGURES AVEC LEUR CAPTION SONT POUR LA PLUS PART À FAIRE (MISE EN PAGE COMPRISE).

LES NOUVEAUTÉS :

- J'ai écrit la conclusion de la partie I et l'intro de la partie II (même si j'en suis moyennement convaincu). Dedans j'ai mis au clair les notations $S^{2n\pm1}$ vs $\mathbb{S}^n$
- J'ai un peu changé le plan de la partie II (à voir si ca vous plaît)
- La section 1. de la partie II à pas trop changé mais normalement elle devrait être plus claire. Par contre dans la section 2. j'ai pas mal retouché.
- J'ai essayé d'avancé la dernière sous partie (2.3, géodésique + préparation du terrain pour Bargmann) mais je bloque encore sur les calculs à cause du π (même si j'essaye de l'ignorer) pour les géodésique et du facteur 1/2 qui me manque avec Stokes.
- J'ai dû, un peu malgré moi, me pencher sur les histoires de double cover pour être sur que ca soit pas dû à ca et ca à pas l'aire (par contre j'ai trouvé deux ref qui ont l'air vraiment bien la dessus : cette vidéo et [19])
  Faudra qu'on parle de ca ensemble demain pro mais en attendant je pense que je vais juste me lancer sur la partie 3, parce que je suis grave à la bourre là et j'ai trop galéré à avancer cette semaine...

Introduction

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui nécessite beaucoup de contexte pour être mis en évidence. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant t d'un signal multivarié complexe (*i.e.* à valeurs dans $\mathbb{C}^n$) $\boldsymbol{x}$ est donnée par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\boldsymbol{x}, t_0, t) = \arg \big\langle \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t_0) \big\rangle - \Im m \int_{t_0}^{t} \frac{\big\langle \dot{\boldsymbol{x}}(s), \boldsymbol{x}(s) \big\rangle}{\|\boldsymbol{x}(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\boldsymbol{x}(t) \;\rightsquigarrow\; \boldsymbol{x}'(t) = e^{i\alpha(t)} \boldsymbol{x}(t)$$

Elle est également invariante par reparamétrisation et pour ces raisons, c'est une mesure qui est intrinsèquement liée à la trajectoire du signal dans l'espace, à sa géométrie.

La phase géométrique est un phénomène qui apparaît dans de nombreuses circonstances, en fonction desquelles elle peut changer de nom et de forme : phase de Pancharatnam, de Berry, d'Aharonov-Anandan, d'Aharonov-Bohm, angle de Hannay, *etc.*
L'article [7] de Cohen *et al.* en présente quelques unes et le livre "*Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*" [6] de Chruściński & Jamiołkowski en fait une description plus qu'extensive.

Du point de vue du traitement du signal en revanche, rien n'a été fait et ce n'est que récemment que Le Bihan, Flamant & Amblard s'y sont intéressés [13, 14]. L'objectif de ce mémoire est donc de décrire la phase géométrique dans le cadre du traitement du signal et de discuter de ses applications :

- Dans un premier temps (**??**), cette phase sera mise en évidence à travers des concepts d'analyse temps-fréquence, notamment la notion de fréquence instantanée qui sera présente tout au long de l'écrit. Suite à quoi elle sera explicitement calculée dans un cas particulier de signaux, déjà étudié par Le Bihan *et al.* [14] : les signaux AM-FM-PM. Cela permettra de mieux comprendre son comportement et permettra de motiver une description des signaux multivariés complexes dans l'esprit de l'analyse temps-fréquence.
- Cela mènera à travailler dans une variété dite fibrée principale, $S^{2n-1}\big(\mathrm{U}(1), \mathrm{P}\mathbb{C}^{n-1}\big)$, et la seconde partie de ce mémoire sera dédiée à son formalisme. Contrairement à l'état de l'art, les résultats seront présenté d'un point de vue de mathématicien plus que de physicien et, entre autre, l'accent sera mis sur l'intuition géométrique derrière les concepts abordés. Des résultats, connus par ailleurs, sur la phase géométrique seront redémontrés avec ce formalisme et avec, les notions de fréquences instantanées et de phase géométrique seront reformulée et réinterprétée.
- Enfin, dans une troisième partie, sera présenté un moyen de calculer la phase géométrique en pratique via l'invariant de Bargmann, tiré de [18] et déjà repris par Le Bihan *et al.* [14]. Seront ensuite discutées diverses applications *et là ça dépend d'à quel point j'ai le temps.*

* Préambule

Juste des notes, même pas sur qu'il y ait vraiment besoin de garder ce préambule

Généralités :

- Les références sont en fin de mémoire est en .bib sur le GitHub
- Idem pour les codes et un mot sur `pygeomphase`
- On va parler de géo diff et pour éviter de réécrire un livre, on va admettre beaucoup de résultats, on renvoi vers [12, 8] pour les bases et [16, 17, 2] pour toute ce qui est variété fibrée principales et variétés complexes.

Notations math :

- Convention sur le produit hermitien (congué à droite)
- les vecteurs seront en gras, leur dérivée en temps notée par un point (ex. : $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$) et celle des scalaires seront noté par un prime (ex. : $a'(t)$)

Partie I

Aspects Géométriques d'une Phase Éponyme

Dans cette seconde partie, l'objectif est de décrire la phase géométrique dans son environnement naturel, les variétés fibrées principales. Cela se fera en deux temps.
D'abord, S^{2n-1} sera proprement décrite comme une variété fibrée. Ce faisant, les outils mise en jeu seront exposés avec détail, dans le but de simplifier la généralisation des résultats au cas non commutatif. Lequel sera abordé à la fin de ce mémoire.

Ensuite, des résultats sur la phase géométrique, déjà bien connus dans des cadres spécifiques[1] [3, 5, 15, 6] seront redémontrés dans un cadre plus général : celui de chemins quelconques de S^{2n-1}. Cela permettra de donner une nouvelle interprétation des outils géométrique en terme de signal.

Enfin, par souci de comidité, on se placera dans $\mathbb{C}^{n+1}$ et l'on notera la sphère unité de se dernier $\mathbb{S}^n := S^{2n+1}$ (n ne correspond pas à la dimension de la sphère !).

I — Cadre d'étude

Pour proprement poser le cadre, il nous faudra trois ingrédients :

1. D'abord, faire quelques rappels de géométrie différentielle, ne serait-ce que pour fixer les notations (*ss-sec.* 1.1.1), avec comme exemple le cas $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ (*ss-sec.* 1.1.2), qui sera utile plus loin.
2. Ensuite, seront définies les variétés fibrées principales, avec les outils de bases qui leurs sont associés (*ss-sec.* 1.2.1), puis $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{P}\mathbb{C}^n$ sera écrit comme telle (*ss-sec.* 1.2.2).
3. Enfin, il nous faudra définir une connexion sur ces fibrés, connexion qui sera, d'abord, définie de façon générale (*ss-sec.* 2.1.1), puis explicitée et interprétée dans le cas qui nous intéresse (*ss-sec.* 2.1.2).

1.1 $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ vue comme variété différentielle

1.1.1 Rappels de géométrie différentielle et notations

Une variété différentielle se définie comme suit :

> Définition 1 (Variété différentielle) — une variété différentielle de classe C^k de dimension n est un espace topologique $\mathcal{M}$ munie d'un *atlas* $\left\{(\phi_i, U_i)\right\}_{i\in I}$, c'est-à-dire un ensemble finie de paires d'ouverts $U_i \subset \mathcal{M}$ et d'applications $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :
>
> - les U_i forme un recouvrement de la variété : $\bigcup_{i\in I} U_i = \mathcal{M}$
> - les ϕ_i sont des homéomorphismes sur leurs images respectives $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$.

[1] *Généralement des systèmes quantiques soumis à l'équation de Schrödinger.*

- si l'intersection $U_i \cap U_j$ est non vide, alors $\phi_j \circ {\phi_i}^{-1}{}_{|\phi_i(U_i \cap U_j)}$ est un C^k difféomorphisme sur son image.

A travers ϕ_i, à tout point $x \in U_i$ sont associées des *coordonnées locales* $(x^\mu)_{1 \leqslant \mu \leqslant n}$, c'est-à-dire les coefficient de $\phi_i(x)$ dans une base $(e_\mu)_{1 \leqslant \mu \leqslant n}$ de $\mathbb{R}^n$. Ces coordonnées sont dites locales car dépendantes du choix de la paire (U_i, ϕ_i) et la composée $\phi_j \circ {\phi_i}^{-1}{}_{|\phi_i(U_i \cap U_j)}$ est vue comme un *changement de coordonnées.*
Dans toute la suite, toutes les objets propre au cartes seront indexés via l'alphabet latin (i, j, k) et les indices associés aux coordonnées locales par des lettres grecs (μ, ν, α).

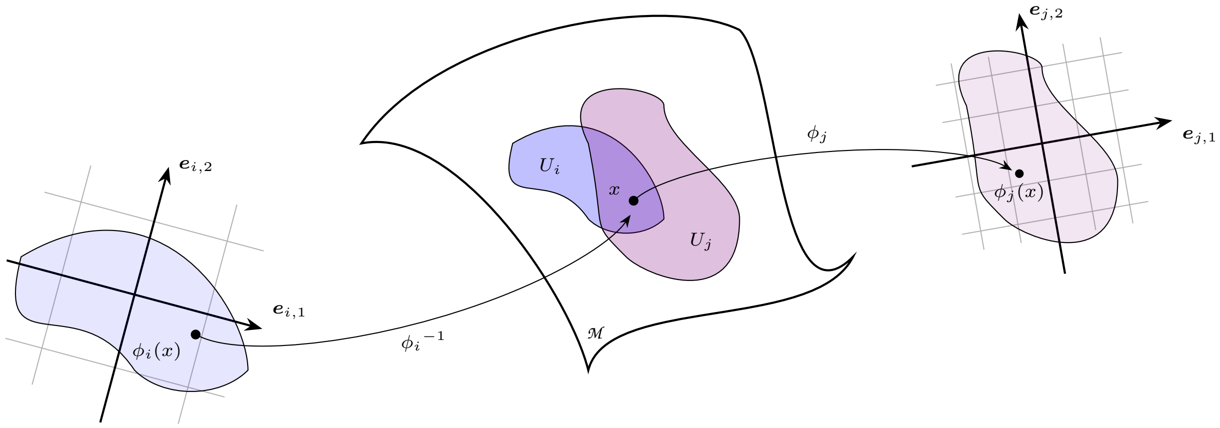

fig. 1.1 — La première figure de tout bon livre de géométrie différentielle : représentation de deux cartes avec l'application de changement de coordonnées. On y voit qu'à un point x peut être associé différentes coordonnées locales et que $\phi_j \circ {\phi_i}^{-1}$ permet de passer d'un repère à l'autre, i.e.d'un système de coordonnées à l'autre.

Ensuite, les *espaces tangents* de $\mathcal{M}$ et son fibré tangent seront respectivement notés :

$$\forall x \in \mathcal{M},\, T_x\mathcal{M} \qquad \text{et} \qquad T\mathcal{M} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} T_x\mathcal{M} \tag{1.1}$$

Pour le dire rapidement, les vecteurs tangents agissent comme une dérivation en cela que, pour une chemin $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}$, la différentielle au point $x = \gamma(0)$ est définie par l'application :

$$\dot{\gamma}_x \;:\; \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \dfrac{d}{dt} f \circ \gamma(t)\Big|_{t=0} := \dfrac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) \end{array} \tag{1.2}$$

Aussi, le système de coordonnées locales en $x \in \mathcal{M}$ induit une base sur $T_x\mathcal{M}$, qui sera noté $\boldsymbol{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. notation qui est justifiée en cela que, intuitivement, $\boldsymbol{\partial}_\mu$ dérive toute fonction test $f \in \mathscr{C}^k(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ dans le long de la μ^{eme} coordonnée (locale) de x.

Plus généralement, si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux variétés différentielles et $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ une application différentiable avec $\{\tilde{\boldsymbol{\partial}}_\nu\}_\nu$ une base de $T\mathcal{N}$, sa *différentielle* (ou *application tangente* ou *push forward*) au point x est l'application linéaire qui, avec les conventions de sommation d'Einstein, s'écrit en coordonnées locales :

$$f_*(\boldsymbol{v}) = f_*(v^\mu \boldsymbol{\partial}_\mu) = \boldsymbol{\partial}_\mu(f^\nu) v^\mu \tilde{\boldsymbol{\partial}}_\nu \qquad \text{ou encore} \qquad (f_*)^\nu_\mu = \boldsymbol{\partial}_\mu(f^\nu)$$

$$\begin{tikzcd} T\mathcal{M} \arrow[r, "f_*"] & T\mathcal{N} \\ \mathcal{M} \arrow[u] \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathcal{N} \arrow[u] \arrow[d] \\ T^*\mathcal{M} & T^*\mathcal{N} \arrow[l, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

fig. 1.2 — Diagramme de passage de f à f_* et f^*.

A partir de f_* est définie l'*image réciproque* ou *pull back* de f, qui correspond intuitivement à la transposée de f_*(dans ce cas, $T^*\mathcal{M}$ est identifié à $T\mathcal{M}$). Formellement elle est définie par dualité :

$$f^* \;:\; \begin{array}{ccc} T^*\mathcal{N} & \longrightarrow & T^*\mathcal{M} \\ g & \longmapsto & g \circ f_* \end{array}$$

où $T^*\mathcal{M}$ est le fibré cotangent, constitué des espaces duaux aux espaces tangents :

$$T^*\mathcal{M} := \bigsqcup_{x\in\mathcal{M}} (T_x\mathcal{M})^*$$

1.1.2 $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$, une variété complexe

Si l'espace projectif complexe à été présenté comme le quotient $\mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1)$, il peut aussi être vu comme :

$$\mathrm{P}\mathbb{C}^n \cong {\mathbb{C}^{n+1}}^*/\mathbb{C}^*$$

C'est-à-dire l'ensemble des classes de ${\mathbb{C}^{n+1}}^* = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n+1}}\}$ par la relation d'équivalence :

$$x \sim y \iff \exists\lambda \in \mathbb{C}^* \mid x = \lambda y$$

En isolant la norme des vecteurs, ${\mathbb{C}^{n+1}}^*$ peut être vu comme le produit $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^n$, et de même pour $\mathbb{C}^*$ avec le module :

$${\mathbb{C}^{n+1}}^* \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^n \qquad\qquad \mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathrm{U}(1)$$

Ainsi, le quotient par $\mathbb{C}^*$ revient à regarder les vecteurs de ${\mathbb{C}^{n+1}}^*$ modulo leur norme, puis modulo l'action de $\mathrm{U}(1)$. Or, ignorer la norme des vecteurs est équivalent à ne regarder que les vecteurs normés, donc appartenant à $\mathbb{S}^n$. De façon informelle, on pourrait alors écrire[2] :

$$\begin{aligned}{\mathbb{C}^{n+1}}^*/\mathbb{C}^* &\cong {\mathbb{C}^{n+1}}^*/(\mathbb{R}^* \times \mathrm{U}(1)) \\ &\cong \left({\mathbb{C}^{n+1}}^*/\mathbb{R}^*\right)/\mathrm{U}(1) \\ &\cong \mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1) = \mathrm{P}\mathbb{C}^n\end{aligned}$$

L'intérêt de cette écriture et que $\mathbb{C}^{n+1}$ est un espace vectoriel, ce qui permet de décrire $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ en terme de carte [12, lemme 2.17, p. 64], [2, chap. 2], ce qui se fait comme suit. La classe de $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ de représentant $z = (z^i)_{0\leqslant i\leqslant n} \in {\mathbb{C}^{n+1}}^*$ est notée $[z]$ et on pose, $\forall i \in [\![0, n]\!]$:

$$U_i = \left\{[z] \in \mathrm{P}\mathbb{C}^n \;\middle|\; z \in \mathbb{C}^{n+1},\ z^i \neq 0\right\} \qquad \phi_i \ : \ \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^i \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-i} \cong \mathbb{C}^n \\ [z] & \longmapsto & \dfrac{1}{z^i} z = \left({}^{z^0}\!/_{z^i}, \cdots, 1, \cdots, {}^{z^n}\!/_{z^i}\right) \end{array} \tag{1.3}$$

Si l'ensemble d'arrivée $\phi_i(U_i)$ est équivalent à un ouvert de $\mathbb{C}^n$ (l'une des composantes est constante), il est plus commode de travailler dans $\mathbb{C}^{n+1}$ puisque cela évite de devoir enlever et rajouter des coefficients dans les formules de changement de cartes :

$$\forall z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z^{i,j} \neq 0 \quad (i.e.\ [z] \in U_i \cap U_j), \qquad \phi_i \circ {\phi_j}^{-1}(z) = \frac{z^j}{z^i} z$$

Les (U_i, ϕ_i) forment un atlas sur l'espace projectif complexe, faisant de ce dernier une variété de dimension $\dim = 2n$. Les $\phi_i \circ {\phi_j}^{-1}$ étant holomorphes, $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ est plus précisément une variété complexe de dimension complexe n et il est utile d'écrire ses coordonnées locales sous la forme $(w^\mu, \overline{w}^\mu)_{1\leqslant\mu\leqslant n}$, où :

$$\forall w \in U_i,\ \forall \mu \neq i, \quad w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i}, \qquad \text{où} \quad [z] = w$$

En annexe A se trouvent plus de détails sur les variétés différentielles complexes. Pour aller à l'essentiel,

[2] *Ce qui s'écrit plus justement avec le troisième théorème d'isomorphisme :*

$${\mathbb{C}^{n+1}}^*/\mathbb{C}^* \cong ({\mathbb{C}^{n+1}}^*/\mathbb{R}^{+*})/(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^{+*}) \cong \mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1) = \mathrm{P}\mathbb{C}^n$$

même si la notation prête à confusion, il faut considérer les coordonnées w^μ et $\overline{w}^\mu$ comme complètement indépendantes. Par exemple, :

$$\boldsymbol{\partial}_\mu(w^\mu) = \frac{\partial}{\partial w^\mu} w^\mu = 1 \qquad \boldsymbol{\partial}_{\overline{\mu}}(w^\mu) = \frac{\partial}{\partial \overline{w}^\mu} w^\mu = 0$$
$$\boldsymbol{\partial}_\mu(\overline{w}^\mu) = \frac{\partial}{\partial w^\mu} \overline{w}^\mu = 0 \qquad \boldsymbol{\partial}_{\overline{\mu}}(\overline{w}^\mu) = \frac{\partial}{\partial \overline{w}^\mu} \overline{w}^\mu = 1$$

Ce qui fait que $(w^\mu, \overline{w}^\mu)_{1 \leqslant \mu \leqslant n}$ est bien une base de dimension réelle $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{P}\mathbb{C}^n = 2n$. Par exemple, avec ces "notations" (*cf.* annexe A), le fait qu'une fonction $f : \mathrm{P}\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ soit holomorphe s'exprime via l'égalité :

$$\forall \mu \in [\![1, n]\!], \qquad (f_*)_{\overline{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \overline{w}^\mu} f = 0$$

Pour ce qui est des espaces tangents, $(\boldsymbol{\partial}_\mu, \boldsymbol{\partial}_{\overline{\mu}})_\mu$ forme une base de $T\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ et $(dw^\mu, d\overline{w}^\mu)_\mu$ une base de $T^*\mathrm{P}\mathbb{C}^n$. Dans ce contexte, un champs de forme bilinéaire g (tenseur de type (0,2)) a quatre types de composantes :

$$g_{\mu\nu} = g(\boldsymbol{\partial}_\mu, \boldsymbol{\partial}_\nu) \qquad g_{\mu\overline{\nu}} = g(\boldsymbol{\partial}_\mu, \boldsymbol{\partial}_{\overline{\nu}})$$
$$g_{\overline{\mu}\nu} = g(\boldsymbol{\partial}_{\overline{\mu}}, \boldsymbol{\partial}_\nu) \qquad g_{\overline{\mu\nu}} = g(\boldsymbol{\partial}_{\overline{\mu}}, \boldsymbol{\partial}_{\overline{\nu}})$$

L'espace projectif complexe, en particulier, admet un produit hermitien, la *métrique de Fubini-Study*, qui est donnée par [16, sec. 8.5], [2, chap. 4] :

$$\begin{aligned} \forall w \in \mathrm{P}\mathbb{C}^n, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in T_w\mathrm{P}\mathbb{C}^n, \qquad g_w(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = g_{\mu\overline{\nu}} u^\mu \overline{v}^\nu &= 2\frac{(1 + w^\alpha \overline{w}_\alpha)\delta_{\mu\nu} - w_\mu \overline{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \overline{w}_\alpha)^2} u^\mu \overline{v}^\nu \\ &= \frac{2}{1 + w^\alpha \overline{w}_\alpha} u^\mu \overline{v}_\mu - \frac{2 w_\mu \overline{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \overline{w}_\alpha)^2} u^\mu \overline{v}^\nu \end{aligned} \tag{1.4}$$

À noter que seul les coefficients $g_{\mu\overline{\nu}}$ apparaissent. Cela est dû à la symétrie hermitienne de g, ce qui impose $g_{\mu\nu} = g_{\overline{\mu\nu}} = 0$ et $g_{\overline{\mu}\nu} = \overline{g_{\mu\overline{\nu}}}$.
Enfin, et ce sera important pour la suite, g induit sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ une forme symplectique – dite de Kähler – qui s'interprète comme l'élément d'aire sur la variété induite par g et qui s'écrit :

$$\Omega = \Omega_{\mu\overline{\nu}}\, dw^\mu \wedge d\overline{w}^\nu = i g_{\mu\overline{\nu}}\, dw^\mu \wedge d\overline{w}^\nu$$

Dans la définition de g (1.4), le coefficient peut varier. Par exemple, dans [16] vaut 1 alors que dans [10] il vaut $1/2\pi$. Ici, il a été choisi de le prendre égale à 2, ce qui n'est pas usuelle, mais qui sera nécessaire pour la suite (*sec.* 2.2). En quelques mots, c'est pour les même raisons que, dans la **??** précédente, la sphère de Poincaré était paramétrée par les angles doubles $(2\theta, 2\chi)$.

1.2 S^{2n+1} comme fibré principal

Cela étant, il est temps de définir proprement ce que l'on entend par "$\mathbb{S}^n$ est équivalent localement à $\mathrm{P}\mathbb{C}^n \times \mathrm{U}(1)$".

1.2.1 Définition générale

Pour le dire simplement, les *variétés fibrés* sont des variétés qui ressemblent localement à des espaces produits. Le ruban de Möbius en est un exemple typique : il ne peut pas s'écrire comme le produit d'un cercle avec un segment $S^1 \times [0, 1]$ à cause de la façon dont il est construit. Mais localement, une tranche du ruban est tout à fait comparable (*i.e.* difféomorphe) à un tel produit (*cf. fig. 1.3*).

Il existe tout un bestiaire de variétés fibrées en fonction de leurs propriétés et, parmi elles, celles qui vont nous intéresser sont dites principales :

> Définition 2 (Variété fibrée principale) — Une *variété fibrée principale* (VFP), ou *fibré principal* est constituée de deux variétés différentielles P et B telles que :

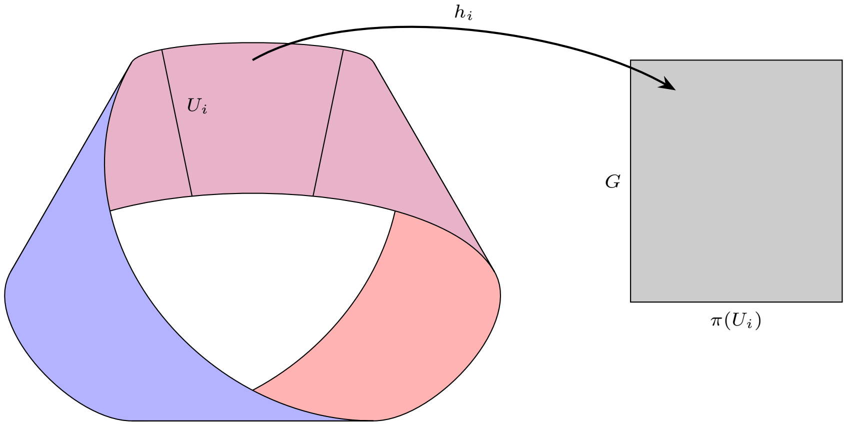

fig. 1.3 — Représentation du ruban de Möbius en tant que fibré. Les notations sont reprises de la définition 2.

- Il existe un groupe de Lie G opérant à droite (ou à gauche) sur P via l'application différentiable :

$$R \ : \ \begin{array}{ccc} P \times G & \longrightarrow & P \\ (p, g) & \longmapsto & R_g(p) := p \cdot g = pg \end{array} \tag{1.5}$$

- Il existe une surjection différentiable $\pi : P \longrightarrow B$ telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}\big(\pi(p)\big) = pG \tag{1.6}$$

- P est munie d'un ensemble de paires (U_i, h_i) tel que les U_i forment un recouvrement de B et tel que les $h_i : G \times U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset P$ soient des difféomorphismes vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \ \forall x \in B, \qquad h_i(ab, x) = h_i(a, x) \cdot b \qquad \text{et} \qquad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

La variété B est appelée la *base* de la VFP, G son *groupe structural* et pG la *fibre de P passant par p* et *au dessus de $\pi(p) \in B$*. Le tout est notée $P(R, G, \pi, B)$ ou plus simplement $P(G, B)$.
Les fibres pG sont toutes difféomorphes à G et B est difféomorphe à P/G. Le diagramme commutatif ci-contre résume la situation (pr_2 est la projection canonique sur la deuxième composante du produit cartésien).

$$\begin{tikzcd} G \times U_i \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & \pi^{-1}(U_i) \subset P \arrow[dl, "\pi"] \\ U_i & \end{tikzcd}$$

L'ensemble $\left\{(U_i \times G, {h_i}^{-1})\right\}_i$ est l'équivalent d'un atlas pour les variétés différentielles classiques mais adapté pour tenir compte de l'aspect fibrée de P et de l'action de G. Expliciter les changements de cartes dans P, ce fait comme suit.
D'abord, P étant localement difféomorphe à un produit $G \times U_i$, on peut y tracer des graphes appelés *sections locales*, comme sur les figures 1.4 et 1.5 ci-dessous. Formellement, une section locale au dessus de $U_i \subset B$ est une application $\sigma : U_i \longrightarrow P$ vérifiant :

$$\pi \circ \sigma = id|U_i$$

Ensuite, les hypothèses sur $P(G, B)$ sont telles que G agit transitivement et librement (ou sans point fixe) sur P. C'est-à-dire que, sur une même fibre, tout point peut être atteint par n'importe quel autre via l'action de G (transitivité) :

$$\forall x \in B, \quad \forall p, q \in P_x, \ \exists t(p, q) \in G \mid p = q \cdot t(p, q)$$

et que la seule façon de laisser les points invariants par cette même action est de passer par l'élément neutre e (libre) :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad p = p \cdot g \implies g = e$$

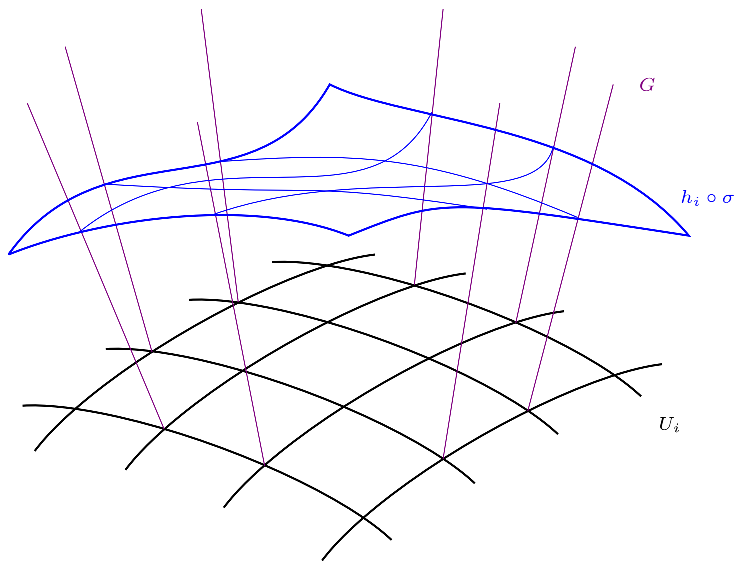

fig. 1.4 — Représentation d'une section locale σ au dessus de $U_i \subset B$ de dimension 2. Comme P n'est pas un produit à proprement parlé, σ est représenté dans $G \times U_i$ à travers h_i.
On voit ici l'idée le nom "fibré" : de la base partent toutes les fibres, comme le feraient les fibres d'un tronc d'arbre et une section est littéralement une section, une coupe, de ces fibres.

De la transitivité de G, découle le fait que toutes les sections locales σ au dessus de U_i peuvent s'écrire à partir d'une même section σ_i via la formule :

$$\forall x \in B, \qquad \sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot t\big(\sigma_i(x), \sigma(x)\big)$$

Son caractère libre, lui assure l'unicité d'un choix canonique de section σ_i sur U_i :

$$h_i(x, e) = \sigma_i(x)$$

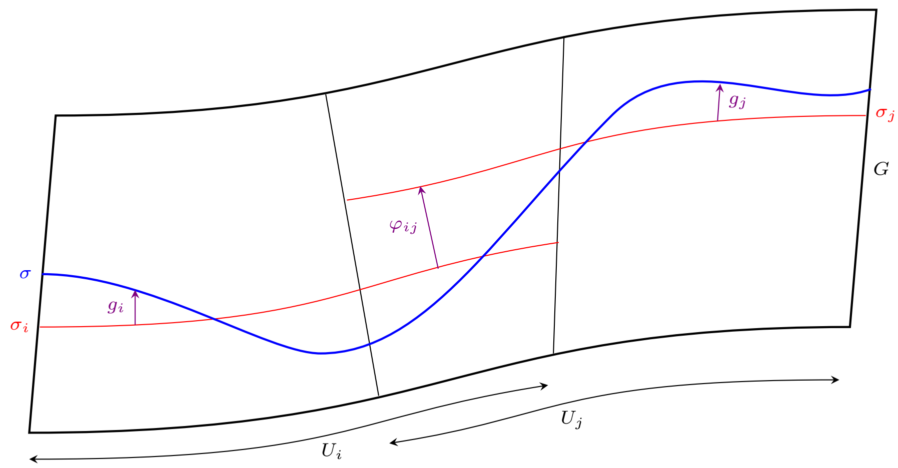

fig. 1.5 — Représentation de deux sections canoniques $\sigma_{i,j} = h_{i,j}(e, \cdot)$ au dessus de deux cartes U_i et U_j avec la fonction de transition φ_{ij} (def. 3). Est également représentée une section σ quelconque avec les translations $g_{i,j}$ telles que $\sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot g_i(x) = \sigma_j(x) \cdot g_j(x)$.

Cela mène à la définition :

Définition 3 (Fonctions de transitions) — À l'intersection entre deux cartes $U_{ij} := U_i \cap U_j$, le passage d'une section locale canonique à une autre se fait via :

$$\forall x \in U_{ij}, \qquad \sigma_j(x) = \sigma_i(x) \cdot t\big(\sigma_i(x), \sigma_j(x)\big)$$

L'élément de G, $t(\sigma_i, \sigma_j)$, qui permet de faire le changement, est alors appelé *fonction de transition* et sera noté φ_{ij}. Elle fait effectivement la transition entre les cartes h_i et h_j en cela que :

$$\forall (g, x) \in G \times U_{ij}, \qquad {h_i}^{-1} \circ h_j(g, x) = \big(\varphi_{ij}(x)g, x\big)$$

1.2.2 Le fibré $\mathbb{S}^n\big(\mathrm{U}(1), \mathrm{P}\mathbb{C}^n\big)$

Dans ce travail, $\mathbb{S}^n$ fait office d'espace total avec pour base $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ et pour groupe structural $\mathrm{U}(1)$.
Pour obtenir la projection de $\mathbb{S}^n$ sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$, il suffit de prendre la restriction de π à $\mathbb{S}^n$. En tenant compte de la normalisation, les coordonnées locales sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ se réécrivent, $\forall w \in U_i$:

$$w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i} = \frac{z^\mu}{|z^i| e^{\boldsymbol{i} \arg(z^i)}} = \frac{z^\mu}{\sqrt{1 - \sum_{\nu \neq i} |z^\nu|^2}} e^{-\boldsymbol{i} \arg(z^i)} \qquad \text{car} \quad \sum \left|z^\nu\right|^2 = \|z\|^2 = 1$$

On constate bien que w^μ n'est défini par rapport à z^μ qu'à un choix de phase $e^{-\boldsymbol{i} \arg z^i} \in \mathrm{U}(1)$ près. À l'inverse, un représentant z_i dans $\mathbb{S}^n$ de $w \in U_i$ aura pour coefficient :

$$\forall \mu \neq i, \quad {z_i}^\mu = \frac{w^\mu}{\|w\|} e^{\boldsymbol{i}\theta} \qquad\qquad {z_i}^i = \frac{1}{\|w\|} e^{\boldsymbol{i}\theta}$$

La norme de w étant à comprendre au sens des coordonnées locales sur U_i[3] :

$$\begin{aligned} \|w\|^2 = \left\|(w^\mu)_{1 \leqslant \mu \leqslant n}\right\|^2 = \frac{1}{|{z_i}^i|^2} \sum_{\nu \neq i} \left|{z_i}^\nu\right|^2 = \frac{1 - |{z_i}^i|^2}{|{z_i}^i|^2} &\iff \left|{z_i}^i\right|^2 \|w\|^2 = 1 - \left|{z_i}^i\right|^2 \\ &\iff \left|{z_i}^i\right|^2 = \frac{1}{1 + \|w\|^2} \\ &\iff \left|{z_i}^i\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \overline{w}_\nu}} \end{aligned}$$

D'où l'expression des coefficients de $z_i \in \mathbb{S}^n$:

$$\forall \mu \neq i, \quad {z_i}^\mu = \frac{w^\mu}{\sqrt{1 + w^\nu \overline{w}_\nu}} e^{\boldsymbol{i}\theta} \qquad\qquad {z_i}^i = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \overline{w}_\nu}} e^{\boldsymbol{i}\theta}$$

Tout cela permet d'écrire $\mathbb{S}^n$ comme une variété fibrée principale :

Proposition 1 — La $(2n+1)-$sphère $\mathbb{S}^n$, vue comme variété plongée dans $\mathbb{C}^n$ est une VFP de base $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ et de fibre type $\mathrm{U}(1)$. L'action de $\mathrm{U}(1)$ sur $\mathbb{S}^n$ est induite par la multiplication par un scalaire complexe et où :

- La fibration π est la projection canonique de $\mathbb{S}^n$ sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$:

$$\pi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathrm{P}\mathbb{C}^n \\ z & \longmapsto & [z] \end{array} \tag{1.7}$$

- Les cartes locales h_i s'écrivent :

$$\forall w \in U_i, \ \forall e^{\boldsymbol{i}\theta} \in \mathrm{U}(1), \ h_i(w, e^{\boldsymbol{i}\theta}) = \frac{(w^0, \cdots, 1, \cdots, w^n)}{\sqrt{1 + w^\nu \overline{w}_\nu}} e^{\boldsymbol{i}\theta} \in \mathbb{S}^n \tag{1.8}$$

[3] *C'est un abus de notation, w n'a pas de norme en ce sens là puisqu'elle dépend du choix de carte U_i. Mais ici tout le raisonnement est purement local, donc ce n'est pas un problème.*

- Les sections canoniques σ_i au dessus des U_i, elles, sont définies par :

$$\forall w \in U_i,\ \sigma_i(w) = h_i(w,1) = \frac{1}{\sqrt{1+w^\nu \overline{w}_\nu}}(w^0, \cdots, 1, \cdots, w^n) \tag{1.9}$$

- Les fonctions de transitions entre deux cartes U_i et U_j s'écrivent :

$$\varphi_{ij}(w) = e^{-\boldsymbol{i}\arg(z_i^i)} e^{\boldsymbol{i}\arg(z_j^j)} \qquad \text{où} \qquad z_{i,j} = \phi_{i,j}(w) \tag{1.10}$$

Le cadrer étant planement posé, *blablabla on va passer au interprétation / calcul des phase et c'est super*

II — Interprétation des phases dynamique et géométrique

2.1 Notion de connexion sur une VFP

Le cadre étant posé, pour retrouver la notion de fréquence instantanée, il est nécessaire de munir $\mathbb{S}^n\big(\mathrm{U}(1), \mathrm{P}\mathbb{C}^n\big)$ d'une connexion. Cette dernière est introduite comme suit.

2.1.1 Notion de connexion sur une VFP

Comme P ressemble localement à un produit $G \times U_i$, il est utile de séparer ses espaces tangents T_pP comme une somme directe d'espaces tangents respectivement aux fibres et à la base. Conformément aux représentations précédentes (*fig.* *1.3* à *1.5*), les premiers sont appelées espaces tangents *verticaux*, les seconds *horizontaux* et l'on note :

$$\forall p \in P, \qquad T_pP = V_pP \oplus H_pP$$

Les tangents verticaux V_pP se définissent canoniquement via π, en tant que noyau de sa différentielle :

$$V_pP := \mathrm{Ker}(T_p\pi) = \big\{ v \in T_pP \mid T_p\pi(v) = 0 \big\}$$

Ce n'est en revanche pas le cas des espaces horizontaux. Il faut donc faire un choix pour les H_pP et c'est ce choix qui est appelé *connexion* (elle connecte les espaces tangents entre eux). Comme pour les verticaux, ces sous-espaces peuvent être caractérisés par une 1-forme différentiable ω sur P à valeur dans VP, auquel cas :

$$\forall p \in P, \quad H_pP = \mathrm{Ker}(\omega_p)$$

Dans le cas des VFP, une connexion doit en plus avoir de bonnes propriétés au regard de l'action de G sur P, aboutissant à la définition :

Définition 4 (Connexion sur VFP) — Une *connexion* sur une VFP $P(G,B)$ est la donnée d'un sous-espace tangent, $H_pP \subset T_pP$, en tout point de $p \in P$ tel que :

- HP dépend différentiellement de p ("dépendre différentiellement" à un sens précis pour les sous-espaces mais qui ne sera pas utile pour la suite).
- H_pP est supplémentaire à V_pP dans T_pP :

$$T_pP = V_pP \oplus H_pP \tag{1.11}$$

- l'assignation des H_pP est invariante par l'action de G au sens où :

$$\forall (p,g) \in P \times G, \quad H_{R_g(p)}P = R_{g*}(H_pP) = \big\{ R_{g*}(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in H_pP \big\} \tag{1.12}$$

Que l'on notera plus simplement :

$$\forall (p,g) \in P \times G, \quad H_{p\cdot g}P = H_pP \cdot g = \left\{ \boldsymbol{v} \cdot g \mid \boldsymbol{v} \in H_pP \right\} \tag{1.13}$$

Au delà d'assurer une compatibilité entre H et G, l'équation (1.12) permet de n'avoir à définir la connexion qu'en un seul point de chaque fibre, les autres se déduisant par cette formule. Concrètement, pour tout point de la base $x \in U_i$, il suffit de la définir en $\sigma_i(x) = h_i(e,x)$, de sorte que l'espace horizontal en tout autre point $p = h_i(g,x) = \sigma_i(x) \cdot g$ au dessus de x sera donné par :

$$H_pP = H_{\sigma_i(x)}P \cdot g$$

Aussi, le fait que G soit un groupe de Lie permet de lier son algèbre $\mathfrak{g} \cong T_eG$ aux tangents verticaux via l'application $\#$: [4]

$$\forall (p,A) \in P \times \mathfrak{g},\ \forall f \in \mathscr{C}\left(P,\mathbb{R}\right), \quad A^{\#}(p) = \frac{d}{dt} p \cdot \exp(tA) \Big|_{t=0} \in V_pP \tag{1.14}$$

Sachant cela, toujours dans le cas des VFP, la $1-$forme de connexion est à valeur dans $\mathfrak{g}$:

Définition 5 (1−forme de connexion) — La $1-$*forme de connexion* ω d'une VFP $P(G,B)$ est définie comme la 1-forme différentiable sur P à valeur dans $\mathfrak{g}$ (*i.e.* en tout point $p \in P$, ω_p est à valeur de T_pP dans $\mathfrak{g}$), telle que $\forall p \in P$:

$$\forall A \in \mathfrak{g},\ \omega_p\big(A^{\#}(p)\big) = A \qquad\qquad H_pP = \mathrm{Ker}(\omega_p) \tag{1.15}$$

$$\forall \boldsymbol{v} \in T_pP, \quad \omega_{p\cdot g}(\boldsymbol{v} \cdot g) := \omega_{p\cdot g}(R_{g\,*}(\boldsymbol{v})) = g^{-1}\omega_p(\boldsymbol{v})g \tag{1.16}$$

Tout comme les $H[p]P$, la troisième égalité assure que ω n'a besoin d'être définie que sur un point de chaque fibre. Cela permet de définir ω localement non pas sur $U_i \times G$, mais seulement sur $U_i \cong U_i \times \{e\}$. Ainsi, ω induit une 1-forme sur les cartes U_i par l'image réciproque des sections canoniques σ_i. Elles sont notées $\mathcal{A}_i := \sigma_i^*\omega$ et sur le chevauchement $U_i \cap U_j$, elles vérifient :

$$\mathcal{A}_j = {\varphi_{ij}}^{-1}\mathcal{A}_i\varphi_{ij} + {\varphi_{ij}}^{-1}d\varphi_{ij} \tag{1.17}$$

Munir $P(G,B)$ d'une connexion permet, entre autre de définir la notion de relèvement horizontal :

Définition 6 (Relèvement horizontal) — Étant donné une trajectoire $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow B$ sur la base et un point $\gamma_0 \in \rho(0)G$ au dessus de $\rho(0)$, il existe un unique relèvement γ de ρ dont les vecteurs tangents sont tous horizontaux. *i.e.* tel que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\pi \circ \gamma(t) = \rho(t) \qquad\qquad \dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)}P \qquad\qquad \gamma(0) = \gamma_0 \tag{1.18}$$

On parle de *relèvement horizontal* (*horizontal lift*, ou *transport parallèle* de γ_0 le long de ρ) puisque γ n'a pas de déplacement vertical au sens de la connexion. Du point de vue de la 1-forme ω, si γ s'écrit localement $\gamma_i = \sigma_i(\rho)g_i$, alors g_i vérifie l'équation (d'où vient l'unicité du relèvement) :

$$\frac{d}{dt} g_i(t) = -\mathcal{A}_i\rho(t) \cdot g_i(t) \tag{1.19}$$

[4] *Les vecteurs tangents étant des formes linéaires, $A^{\#}(p)$ est plus exactement définie par l'application :*

$$A^{\#}(p) : f \;\longmapsto\; \frac{d}{dt} f\big(p \cdot \exp(tA)\big)\Big|_{t=0}$$

Si maintenant γ est une trajectoire de P, on dira, par abus de langage, que $\tilde{\gamma}$ est le relèvement horizontal de γ si c'est le relèvement horizontal de sa projection $\pi \circ \gamma$ avec la condition initiale $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$.

Pour la suite, il sera utile d'avoir l'expression d'une trajectoire $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow P$ par rapport à son relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$. Pour l'obtenir, on note $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot g$, de sorte que sa dérivée s'écrive :

$$\dot{\gamma} = \dot{\tilde{\gamma}} \cdot g + \tilde{\gamma} \cdot dg = \dot{\tilde{\gamma}} \cdot g + \gamma \cdot g^{-1}dg$$

Ce à quoi on applique ω, donnant :

$$\begin{aligned} \omega_\gamma(\dot{\gamma}) &= \omega_\gamma\big(\dot{\tilde{\gamma}} \cdot g\big) + \omega_\gamma\big(\gamma \cdot g^{-1}dg\big) \\ &= g^{-1}\omega_{\tilde{\gamma}}\big(\dot{\tilde{\gamma}}\big)g + \omega_\gamma\big(\gamma \cdot g^{-1}dg\big) && \text{d'après (1.16)} \\ &= \omega_\gamma\big(\gamma \cdot g^{-1}dg\big) && \text{car } \tilde{\gamma} \text{ est horizontale} \end{aligned}$$

Le terme $g^{-1}dg$ restant étant un vecteur de $g^{-1}T_gG \cong T_eG \cong \mathfrak{g}$ et :

$$\omega_\gamma(\dot{\gamma}) = \omega_\gamma\big(\gamma \cdot g^{-1}dg\big) = \omega_\gamma\big((g^{-1}dg)^\#(p)\big) = g^{-1}dg$$

D'où $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot g$ avec g est solution de :

$$\frac{d}{dt}g(t) = g(t)\omega_{\gamma(t)}\big(\dot{\gamma}(t)\big) \tag{1.20}$$

Un Commentaire sur cette Formule peut-être ? (mais je sais pas quoi

2.1.2 Choix de connexion sur $\mathbb{S}^n\big(\mathrm{U}(1), \mathrm{P}\mathbb{C}^n\big)$

Dans le cas de $\mathbb{S}^n\big(\mathrm{U}(1), \mathrm{P}\mathbb{C}^n\big)$, la métrique sur $\mathbb{S}^n$ induit naturellement un choix de connexion car la projection π est une submersion dite riemannienne [11]. Formellement, c'est dire que la projection de $\mathbb{S}^n$ sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ est telle que[5] :

$$\forall p \in \pi^{-1}(w),\ \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in T_p\mathbb{S}^n, \quad \frac{1}{2}g_{\pi(p)}\big(\pi_*\boldsymbol{u}, \pi_*\boldsymbol{v}\big) = \langle \boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{v}_H \rangle \tag{1.21}$$

où g est la partie réelle[6] hermitienne de la métrique de Fubini-Study. Plus concrètement, les espaces tangents de $\mathbb{S}^n$ s'écrivent :

$$T_p\mathbb{S}^n = \mathrm{Vec}\{p\}^\perp := \big\{\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \Re e\langle \boldsymbol{v}, p\rangle = 0\big\}$$

et sachant que $ip \in \mathrm{Vec}\{p\}^\perp$, ils se séparent en deux composantes orthogonales :

$$T_p\mathbb{S}^n = \mathrm{Vec}\{p\}^\perp = \mathrm{Vec}\{ip\} \oplus \mathrm{Vec}\{ip\}^\perp$$

Ainsi, la nature de π (1.21) est telle que le premier membre est l'espace tangent vertical à p et le second invariant par l'action de $\mathrm{U}(1)$:

$$\forall e^{i\theta} \in \mathrm{U}(1), \quad \mathrm{Vec}\big\{i(e^{i\theta}p)\big\}^\perp = \mathrm{Vec}\{ip\}^\perp$$

Ce qui permet de poser $H_p\mathbb{S}^n := \mathrm{Vec}\{ip\}^\perp$ et donne directement la 1-forme associée :

$$\begin{aligned} H_p\mathbb{S}^n &= \big\{\boldsymbol{v} \in T_p\mathbb{S}^n \mid \Re e\langle \boldsymbol{v}, ip\rangle = 0\big\} \\ &= \big\{\boldsymbol{v} \in T_p\mathbb{S}^n \mid \Im m\langle \boldsymbol{v}, p\rangle = 0\big\} \end{aligned} \iff \omega_p(\boldsymbol{v}) = \Im m\langle \boldsymbol{v}, p\rangle$$

[5] *Le facteur 1/2 est hérité du choix de définition de la métrique de Fubini-Study, expliqué plus tôt (ss-sec. 1.1.2)*
[6] *Cette métrique induite ne peut pas être hermitienne car $\mathbb{S}^n$ n'est pas une variété complexe.*

Enfin, comme l'algèbre de Lie de U(1) est $\mathfrak{u}(1) \cong i\mathbb{R}$, il convient de de poser :

$$\forall p \in \mathbb{S}^n, \ \forall \boldsymbol{v} \in T_p\mathbb{S}^n, \qquad \omega_p(\boldsymbol{v}) := i\Im m\langle \boldsymbol{v}, p\rangle \tag{1.22}$$

Un tel choix de connexion n'est pas anodin d'un point de vue signal puisque ω donne la fréquence instantanée telle que définie dans la **??** précédente. Son intérêt dans l'étude de la phase géométrique était déjà bien connue et porte généralement le nom de *connexion de Aharonov-Anandan* [5, sec. 4.2]. En revanche, le fait qu'elle soit induite par la métrique est bien moins connue et, à notre connaissance, seul Mukunda & Simon en font mention [15], même s'ils n'évoquent pas la métrique de Fubini-Study.
Reste alors une question : pourquoi la fréquence instantanée apparaît ici et comment le comprendre en terme de signal ?

2.1.3 Fréquence instantanée et phase dynamique sur $\mathbb{S}^n\big(\mathrm{U}(1), \mathrm{P}\mathbb{C}^n\big)$

Pour y apporter une réponse, on se propose de prendre le problème par l'autre bout : comment définir la notion de fréquence instantanée d'un signal dans le fibré $\mathbb{S}^n\big(\mathrm{U}(1), \mathrm{P}\mathbb{C}^n\big)$?

Comme, à chaque instant t, un signal γ sur $\mathbb{S}^n$ est représenté par une paire $(e^{\boldsymbol{i}\alpha(t)}, \rho(t)) \in \mathrm{U}(1) \times \mathrm{P}\mathbb{C}^n$ à travers les h_i, il serait tentant de voir $\alpha(t)$ comme la fréquence du signal et $\rho(t)$ comme son état de polarisation.
Le problème de cette représentation est qu'elle dépend du choix de carte U_i, ainsi sur l'intersection U_{ij}, γ aurait (au moins) deux notions de fréquence instantanée.

C'est là qu'intervient la connexion. D'une part, la 1-forme ω associée est définie globalement sur le fibré, autrement dit, elle est indépendante des représentations locales de γ.
D'autre part, le relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$ d'une courbe $\rho \subset \mathrm{P}\mathbb{C}^n$, par définition, n'a pas de variation verticale. Dans notre contexte, cela signifie que $\tilde{\gamma}$ n'a pas de variation dans la direction de U(1), donc son état de polarisation (composante sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$) varie mais pas ses "fréquences".
Ainsi, le relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$ d'un signal γ s'interprète comme une version de ce dernier dénuée de toute fréquence instantanée. L'action α permettant de passer de $\tilde{\gamma}(t)$ à $\gamma(t)$ (*i.e.* $\gamma(t) = e^{\boldsymbol{i}\alpha(t)}\tilde{\gamma}(t)$) peut alors être comprise comme l'ajout d'une fréquence instantanée (voir *fig. 1.6 et* **??** ci-dessous)

> *Un signal qui n'aurait pas de fréquence instantanée mais une polarisation instantanée n'a pas vraiment de sens. Cela renvoi à notre discussion de première partie : la fréquence instantanée d'un signal univarié devait contenir les hautes fréquences et son amplitude les basses. Ici le problème est le même, mais avec l'état de polarisation en lieu de l'amplitude. Pour s'en convaincre, il est utile de retourner sur le cas bivarié.*
> *La projection sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^2$ de γ représente l'ellipse de polarisation instantanée. Mais si γ n'as pas de fréquence instantanée, alors $\gamma(t)$ n'est plus représenté que par le sommet de l'ellipse paramétrée par ρ_γ. L'on pourrait alors argumenter que tout signal peut être décrit par la seule variation de son état de polarisation, ce qui est parfaitement inintéressant.*
> *Cette vision du relèvement horizontal est donc purement formelle et, si elle à bien un sens géométrique, elle n'a pas vraiment de sens du point de vue du signal.*

En admettant l'interprétation de la 1-forme de connexion comme fréquence instantanée, les discussions de première partie (**??**) suggèrent de choisir là encore :

$$\forall p \in \mathbb{S}^n, \ \forall \boldsymbol{v} \in T_x\mathbb{S}^n, \quad \omega_p(\boldsymbol{v}) = i\Im m\langle \boldsymbol{v}, p\rangle \tag{1.23}$$

La phase dynamique, s'interprète alors comme la déviation du signal par rapport à son relèvement horizontal. Ainsi, $g = e^{\boldsymbol{i}\Phi_{\mathrm{dyn}}(\gamma)}$ est solution de (1.20), qui se réécrit alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g'(t) = g(t)\, i\Im m\big\langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t)\big\rangle \\ g(t_0) = 1 \end{cases} \iff g(t) = e^{\boldsymbol{i}\int_{t_0}^t \Im m\langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s)\rangle ds}$$

fig. 1.6 — Fréquence instantanée d'un signal x vu comme variation vertical de x par rapport à son relèvement horizontal $\tilde{x}$ associé. À noter que $\tilde{x}$ ne dépend pas des cartes mais dépend de la trajectoir ρ_x de x sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$.

Ce qui redonne la formule :

$$\Phi_{\mathrm{dyn}\,\gamma}(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \Im m \big\langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) \big\rangle ds \tag{1.24}$$

Ici, deux remarques. D'abord, il avait été fait mention dans le première partie que la phase φ des signaux AM-FM-PM, formule (**??**) :

$$\boldsymbol{x}(t) = a(t)e^{\boldsymbol{i}\varphi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos\chi(t) \\ -i\sin\chi(t) \end{pmatrix} = a(t)e^{\boldsymbol{i}\varphi(t)} \begin{pmatrix} \cos\theta(t)\cos\chi(t) + i\sin\theta(t)\sin\chi(t) \\ \sin\theta(t)\cos\chi(t) - i\cos\theta(t)\sin\chi(t) \end{pmatrix}$$

n'avait pas d'interprétation directe par rapport à Φ_{tot} et Φ_{dyn}. Cette discussion permet de faire sens de ce problème.
En effet, cette formule "force" un choix de présentation $\boldsymbol{x}$ par le triplet $(a, \varphi, \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\dagger)$. Or, on vient de le voir, du point de vue géométrique, ce choix de représentation n'a de sens que localement et pour cette raison φ ne peut pas avoir d'interprétation directe.

Ensuite, si cette définition (1.24) de la phase dynamique est bien indépendante du choix de carte, elle dépend en revanche du relèvement horizontal de γ et, *a fortiori*, de la projection ρ_γ. C'est là que va pouvoir émerger la phase géométrique, ce que nous allons voir à présent.

2.2 Phase géométrique

Notamment dans le cadre quantique, la phase géométrique est connue pour avoir deux interprétations géométriques [5, 6, 9] : soit comme conséquence d'un transport parallèle sur $\mathbb{S}^n$ soit comme une mesure de l'aire de la surface entourée par le signal projeté sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$. Résultats qui sont présentés et redémontrés (avec les détails en annexes) dans cette section.
Pour se faire, sera d'abord traité le cas particulier des signaux cycliques (*ss-sec.* 2.2.1 et 2.2.2) et il sera ensuite montré que, du cas général, il est toujours possible de s'y ramener (*ss-sec.* 2.2.3).

2.2.1 ... du point de vue de la connexion

D'abord une définition :

> Définition 7 (Trajectoire cyclique) — Un signal γ de $\mathbb{S}^n$ sera dit *cyclique* si entre les instants t_0 et t, il retourne dans la même fibre :
>
> $$\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \gamma(t) = e^{\boldsymbol{i}\alpha}\gamma(t_0) \tag{1.25}$$

Dit autrement, la projection de γ, $\rho_\gamma := \pi \circ \gamma$ forme un lacet sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$.

Cette hypothèse est très restrictive puisqu'elle ne peut être vérifiée que ponctuellement, sans quoi γ n'aurait qu'un mouvement vertical (*i.e.* serait de la forme $\gamma(t) = e^{i\alpha(t)}p$), ce qui n'est pas particulièrement intéressant.

Cela étant dit, elle a le bon goût d'énormément simplifier les choses puisque, comme tout ce passe dans la même fibre, il est très simple calculer et d'annuler individuellement les phases de γ.
Suivant les travaux de Aharonov & Anandan [1] et les explications de Bohm [5], la première remarque est que, comme $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t)$ sont dans une même fibre, la phase totale est donné par le paramètre α de (1.25)[7] :

$$e^{\boldsymbol{i}\Phi_{\mathrm{tot}}} = e^{\boldsymbol{i}\alpha} = t\big(\gamma(t_0), \gamma(t)\big) \tag{1.26}$$

La phase dynamique, conformément à ce qui a été dit plutôt, donne la déviation au relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$:

$$e^{\boldsymbol{i}\Phi_{\mathrm{dyn}}} = t\big(\tilde{\gamma}(t), \gamma(t)\big) \tag{1.27}$$

Et la phase géométrique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{i}\Phi_{\mathrm{geo}}} = e^{\boldsymbol{i}\Phi_{\mathrm{tot}}} e^{-\boldsymbol{i}\Phi_{\mathrm{dyn}}} &= t\big(\gamma(t_0), \gamma(t)\big)\ t\big(\tilde{\gamma}(t), \gamma(t)\big)^{-1} \\ &= t\big(\gamma(t_0), \gamma(t)\big)\ t\big(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)\big) \\ &= t\big(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t)\big) \qquad\qquad \text{car } \gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0) \end{aligned} \tag{1.28}$$

Elle correspond donc au déplacement vertical de $\tilde{\gamma}$ dû à la courbure de $\mathbb{S}^n$. Dit autrement, elle mesure la déviation dû au transport parallèle le long de γ. Les trois dernières formules, *eqs.* (1.26), (1.27) *et* (1.28), sont représentées dans la figure *1.7* ci-dessous :

fig. 1.7 — Représentation des trois phases de γ dans le cas cyclique. Schéma repris de [5, fig. 4.1]

Vu ainsi, il apparaît clairement que Φ_{geo} est indépendante du relèvement γ par rapport à ρ_γ, autrement dit qu'elle est invariante par transformation de jauge. De même, elle ne dépend que de $\gamma(t_0)$ et $\tilde{\gamma}(t)$, ce qui montre qu'elle est invariante par reparamétrisation de γ.

Du point de vue signal, cela se traduit par le fait que l'évolution de l'état de polarisation (ρ_γ ou $\tilde{\gamma}$), quand bien-même indépendant que la fréquence instantanée, cause un déphasage (décalage vertical).
Là encore, c'est quelque chose que le modèle AM-FM-PM peut difficilement représenté car demanderait de faire apparaître un exponentielle qui ne dépend du relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$, dont l'écriture en une paire (φ, ρ) dépend de la carte locale.

Du point de vue géométrique, cette description de $e^{\boldsymbol{i}\Phi_{\mathrm{geo}}}$ est plus connue sous le nom d'*holonomie* du lacet ρ_γ. De façon généralement, le groupe d'holonomie du point $p \in P$ associé à la (1-forme de) connexion ω

[7] *Pour mémoire, $t(p, q)$ est l'élément $e^{i\alpha}$ de $\mathrm{U}(1)$ telle que $q = e^{i\alpha}p$*

sur $P(B,G)$, est l'ensemble des points de pG qui peuvent être atteint par une relèvement horizontal partant de p :

$$\mathrm{Hol}_p(\omega) := \left\{ g \in G \mid \exists\gamma, \tilde{\gamma}(0) = p \text{ et } p \cdot g = \tilde{\gamma}(1) \right\} \tag{1.29}$$

Cette formulation, si elle est très élégante, n'est en revanche que très peu instructive. En effet, en fonction des propriétés de l'espace total et de la base du fibré, Hol peut avoir diverses propriétés.
Dans notre cas, $\mathrm{Hol}_p(\omega)$ est un sous-groupe de Lie connexe non trivial du groupe structural. Concrètement, cela signifie dans notre cas que $\mathrm{Hol}_p(\omega) = \mathrm{U}(1)$[8] , *i.e.* Φ_{geo} peut prendre absolument n'importe quelle valeur (alors même que l'on est toujours dans le cas particulier des signaux cycliques).

2.2.2 ... du point de vue de la métrique

Cela dit, la phase géométrique étant invariante par transformation de jauge, elle doit s'écrire uniquement dans $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$. Pour cela l'on suppose, sans perte de généralité, que γ reste au dessus de la carte U_i, de sorte que :

$$\gamma = h_i(w, e^{i\theta}) = \sigma_i(w)e^{i\theta}$$

Avec, et toujours sous l'hypothèse que γ est cyclique, Φ_{geo} se réécrit (*cf.* annexe B.1.)[9] :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{geo}}(\gamma) &= \Phi_{\text{tot}}(\gamma) - \Phi_{\text{dyn}}\left(\sigma_i(w)e^{i\theta}\right) \\
&= \theta(t) - \theta(t_0) - \left(\frac{1}{i}\int_{t_0}^{t} \mathcal{A}_i(\rho(s))ds + \theta(t) - \theta(t_0)\right) \\
&= i\int_{t_0}^{t} \mathcal{A}_i(\rho(s))ds
\end{aligned} \tag{1.30}$$

Or, ρ étant fermée sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$, Φ_{geo} est l'intégrale d'une forme linéaire le long d'un lacet, ce à quoi le théorème de Stokes s'applique et donne :

$$\Phi_{\text{geo}}(\gamma) = i\oint_{\rho} \mathcal{A}_i = i\iint_{\Sigma} d\mathcal{A}_i$$

Où Σ est une surface de bord ρ et où la dérivée extérieure de ω n'est autre que la forme de Kähler de $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ (*cf.* annexe B.2. & B.3. pour une démonstration) :

$$\Phi_{\text{geo}}(\gamma) = \frac{1}{2}\iint_{\Sigma} \Omega \tag{1.31}$$

Ainsi, conformément à l'interprétation de la forme de Kähler, la phase géométrique de toute courbe cyclique γ est donnée par la demi-aire de la surface entourée par sa projection $\pi(\gamma)$ sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$.

2.2.3 $*$ ... dans le cas le plus générale

De retour au cas général, si maintenant γ est qu'elle conque, pour retrouver les interprétation précédente, le plus simple est encore de se ramener au cas cyclique. Pour cela, il suffit de refermer la courbe tracée par γ dans $\mathbb{S}^n$ de sorte à que cet ajout n'altère pas la phase géométrique de γ.

Pour se faire, et sachant que Φ_{geo} est intimement lié à la métrique (par la connexion) de $\mathbb{S}^n\left(\mathrm{U}(1), \mathrm{P}\mathbb{C}^n\right)$, c'est naturellement du côté des géodésiques de $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ que l'on se tourne. Il est montrer – *cf.* annexe C – que, étant donnée une géodésique ρ_g de $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$, tout relèvement horizontale[10] γ_g de cette dernière vérifie :

$$\forall t \geqslant t_0, \quad \gamma_g(t) = \gamma_g(t_0)\cos(t - t_0) + \dot{\gamma_g}(t_0)\sin(t - t_0) \tag{1.32}$$

[8] $\mathrm{Hol}_p(\omega)$ *est toujours un sous-groupe de Lie. Ici connexe car* $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ *est simplement connexe, et non trivial car la connexion sur* $\mathbb{S}^n$ *n'est pas plate. Or, le seul sous-groupe de Lie de* $\mathrm{U}(1)$ *ayant c'est propriété est lui-même. Ces informations sont tirées de Wikipédia, voir également [16, sec. 8.5.3] pour plus d'information sur le cas particulier des* $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$.

[9] *Quel ressemblance avec la calcul de la calotte dans la partie précédente...*

[10] *Tout relèvement horizontale oui, mais avec une paramétrisation particulière (trajectoire uniforme).* Φ_{geo} *étant, comme on la vu, invariante par le choix de paramétrisation cela n'a pas d'importance.*

La courbe γ_g étant horizontale, elle n'a pas de phase dynamique, et donc :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{geo}}(\rho_g) = \Phi_{\text{tot}}(\gamma_g) &= \arg\Big\langle \gamma_g(t_0)\cos(t-t_0) + \dot\gamma_g(t_0)\sin(t-t_0), \gamma_g(t_0)\Big\rangle \\
&= \arg\Big(\cos(t-t_0)\big\langle\gamma_g(t_0),\gamma_g(t_0)\big\rangle\Big) && \text{car} \quad \langle\dot\gamma_g,\gamma_g\rangle = 0 \\
&= \arg\big(\cos(t-t_0)\big)
\end{aligned}$$

$\Phi_{\text{geo}}(\rho_g)$ est donc donné par l'argument d'un réel, soit 0 ou π (modulo 2π) en fonction du signe du cosinus. Contrairement à ce qui était dit dans [15], la phase géométrique n'est donc pas systématiquement sur les géodésique de $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$.
Cela étant dit, il est bien connu [4, sec. 3.E] que les géodésique de $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ sont fermées. Aussi, on montre (*cf.*annexe C) que, si l'une trajectoire géodésique reliant deux points admet une phase géométrique non nul (donc égale à π), alors son complémentaire par rapport à la géodésique fermée qui la prolonge, elle, n'en n'aura pas. De cette façon, il est toujours possible de relier deux points pas une trajectoire n'ayant pas de phase géométrique.

Sachant ce résultat, on se donne alors un signal $\gamma : [t_0, t] \longrightarrow \mathbb{S}^n$ quelconque de projection sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ ρ, et on note γ_g le relèvement de la géodésique reliant $\rho(t)$ à $\rho(t_0)$ n'ayant pas de phase géométrique et tel que :

$$\gamma_g(t_0) = \gamma(t) \qquad\qquad \gamma_g(t) = \gamma(t_0)$$

De cette façon, la concaténation des deux, noté $\gamma \frown \gamma_g$, vérifie :

$$\Phi_{\text{tot}}(\gamma\frown\gamma_g) = \arg\big\langle\gamma(t_0),\gamma(t_0)\big\rangle = 0 \qquad\qquad \Phi_{\text{tot}}(\gamma_g) = \arg\big\langle\gamma(t_0),\gamma(t)\big\rangle = -\Phi_{\text{tot}}(\gamma)$$

et donc :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{geo}}(\gamma\frown\gamma_g) &= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma\frown\gamma_g) \\
&= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma) - \Phi_{\text{dyn}}(\gamma_g) && \text{en séparant l'intégrale de la phase dynamique, (1.24)} \\
&= \Phi_{\text{geo}}(\gamma) + \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) - \Phi_{\text{tot}}(\gamma) - \Phi_{\text{tot}}(\gamma_g) \\
&= \Phi_{\text{geo}}(\gamma) + \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) \\
&= \Phi_{\text{geo}}(\gamma) && \text{car } \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, $\gamma\frown\gamma_g$ est cyclique et on peut appliquer les résultats précédent, aboutissant à la formule :

$$\Phi_{\text{geo}}(\gamma) = \Phi_{\text{geo}}(\gamma\frown\gamma_g) = \frac{1}{2}\iint_{\widehat{\Sigma}}\Omega \tag{1.33}$$

où $\widehat{\Sigma}$ est la surface entourée par $\gamma\frown\gamma_g$.

Avant de conclure cette partie, cette formule permet de mieux comprendre de que signifie le choix

III — Coclusion

On a donner une nouvelle

Annexes

Annexes de la partie I

Annexes de la partie II

Annexe A — * Variété différentielle complexe

Pas sur que je la garde cette annexe, c'est beaucoup de math pour pas grande chose... enfin c'est plus rigoureux mais pas sur que ca serve le propos vraiment.

Pour plus de détails, voir [16, 2].

$\mathcal{M}$ sera une *variété différentielle complexe* si elle satisfait les propriétés ci-dessus où $\mathbb{R}^n$ est remplacé par $\mathbb{C}^n$ et où la condition de difféomorphisme est remplacée par la condition d'holomorphisme.
Une application $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ étant holomorphe si chacune de ses composantes vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \forall \mu, \qquad \frac{\partial f}{\partial y^\mu}(x+iy) = i\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x+iy)$$

Les fonctions holomorphes étant automatiquement C^∞, les variétés différentielles complexes sont toujours lisse, c'est-à-dire C^∞. Aussi, $\mathcal{M}$ est dite de dimension complexe n et dimension (réel) $2n$, notés :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) := n \qquad\qquad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) := \dim(\mathcal{M}) = 2n \tag{1.34}$$

Ensuite, pour le dire rapidement, la structure complexe de $\mathcal{M}$ permet de séparer les espaces tangents en deux sous espaces. Pour ce faire, on commence par noter qu'en tout point $p \in \mathcal{M}$ de coordonnée $z^\nu = x^\nu + iy^\nu$, l'espace tangent $T_p\mathcal{M}$, vu comme variété réelle, admet une base :

$$T_p\mathcal{M} = \mathrm{Vec}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\} \tag{1.35}$$

Plus tôt que de se basé sur les x^μ et y^μ pour séparer les $T_p\mathcal{M}$, on définit sur ces derniers un tenseur J_p de type (1,1) tel que :

$$J_p\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \qquad\qquad J_p\frac{\partial}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{1.36}$$

Ce tenseur est l'équivalent de la multiplication par $\pm i$ et le fait que $\mathcal{M}$ soit complexe assure qu'il soit défini globalement, *i.e.* sur $T\mathcal{M}$. Il est diagonaliseable dans la base :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial z^\mu} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right) \qquad \partial_{\bar\mu} = \frac{\partial}{\partial \bar z^\mu} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right) \tag{1.37}$$

Ainsi en fonction de la base ((1.34) ou (1.37)), J_p va s'écrire :

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \qquad J_p = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

Finalement, $T\mathcal{M}$ peut être séparé en deux sous-espaces engendré respectivement par les ∂_μ et $\partial_{\bar\nu}$. On parle de vecteur holomorphe et anti-holomorphe et on note :

$$T_p\mathcal{M}^+ = \mathrm{Vec}\{\partial_\mu \mid 1 \leqslant \mu \leqslant n\} \qquad T_p\mathcal{M}^- = \mathrm{Vec}\{\partial_{\bar\mu} \mid 1 \leqslant \mu \leqslant n\} \tag{1.39}$$

forme kahlerienne :

$$\Omega = g_{\mu\overline{\alpha}} J^{\overline{\alpha}}{}_{\overline{\nu}} dw^\mu \wedge d\overline{w}^\nu \tag{1.40}$$

sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$:

$$\Omega(w) = i\frac{(1 + w^\alpha\overline{w}_\alpha)\delta_{\mu\nu} - w_\mu\overline{w}_\nu}{(1 + w^\alpha\overline{w}_\alpha)^2} dw^\mu \wedge d\overline{w}^\nu$$

Annexe B — Démonstration des résultats sous-section 2.2.2

B.1. Formule pour Φ_{geo} sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$

Ici γ est supposé cyclique et au dessus d'une unique carte U_i (par commodité), avec :

$$\gamma = h_i(\rho, e^{i\theta}) = \sigma_i(\rho)e^{i\theta}$$

Avec ces notations, la phase totale de γ va s'écrire :

$$\Phi_{\text{tot}}(\gamma, t_0, t) = t\big(\gamma(t), \gamma(t_0)\big) = \theta(t) - \theta(t_0)$$

Pour ce qui est de la phase dynamique, on comment par calculer la connexion le long de γ, ce qui nécessite d'écrire :

$$\begin{aligned}\dot\gamma = \frac{d}{dt}\Big(\sigma_i(\rho)e^{i\theta}\Big) &= \sigma_{i*}(\dot\rho)e^{i\theta} + i\theta'\sigma_i(\rho)e^{i\theta} \\ &= \sigma_{i*}(\dot\rho)e^{i\theta} + (i\theta')^{\#}\big(\sigma_i(\rho)e^{i\theta}\big) \qquad \text{par définition de } \#, \textit{ eq. } (1.14)\end{aligned}$$

Avec, et sachant les propriétés de ω (*eqs.* (1.15) *et* (1.16), *def.* 5), on a :

$$\begin{aligned}i\omega_\gamma(\dot\gamma) &= i\omega_{\sigma_i(\rho)e^{i\theta}}\Big(\sigma_{i*}(\dot\rho)e^{i\theta} + (i\theta')^{\#}\big(\sigma_i(\rho)e^{i\theta}\big)\Big) \\ &= \omega_{\sigma_i(\rho)e^{i\theta}}\Big(\sigma_{i*}(\dot\rho)e^{i\theta}\Big) + \omega_{\sigma_i(\rho)e^{i\theta}}\Big((i\theta')^{\#}\big(\sigma_i(\rho)e^{i\theta}\big)\Big) \\ &= e^{-i\theta}\omega_{\sigma_i(\rho)}\big(\sigma_{i*}(\dot\rho)\big)e^{i\theta} + i\theta'\end{aligned}$$

D'où la phase dynamique (*eq.* (1.24)) :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{dyn}}(\gamma) = \frac{1}{i}\int_{t_0}^{t}\omega_{\gamma(s)}\big(\dot{\gamma}(s)\big)ds &= \frac{1}{i}\int_{t_0}^{t}\Big(\mathcal{A}_{i\,\rho(s)}\big(\dot{\rho}(s)\big)+i\theta'(s)\Big)ds\\ &= -i\oint\mathcal{A}_{i\,\rho}(\dot{\rho})+\theta(t)-\theta(t_0)\end{aligned}$$

et par conséquent la phase géométrique :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{geo}}(\gamma) &= \Phi_{\text{tot}}(\gamma)-\Phi_{\text{dyn}}(\gamma)\\ &= \theta(t)-\theta(t_0)-\Big(-i\oint\mathcal{A}_{i\,\rho}(\dot{\rho})+\theta(t)-\theta(t_0)\Big)\\ &= i\oint\mathcal{A}_{i\,\rho}(\dot{\rho})\end{aligned}$$

Maintenant, pour pouvoir appliquer le théorème de Stokes, il faut s'assurer que la variété étudiée est orientable, ce qui est le cas de toute les variétés complexes [16, sec. 8.4.2] (y compris $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$). Ainsi, pour peu que ρ soit suffisamment régulière, le théorème s'applique et :

$$\oint\mathcal{A}_i = \iint_\Sigma d\mathcal{A}_i$$

avec Σ une surface de$\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ de bord ρ.

B.2. Dérivation de Φ_{geo} en tant qu'aire de $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$

Par définition, sur l'ouvert U_i, la 1-forme de connexion local est définie par :

$$\mathcal{A}_i = {\sigma_i}^*\omega = \omega\circ\sigma_{i*}$$

Soit, $\forall w\in U_i,\ \forall\boldsymbol{v}\in T_w\mathrm{P}\mathbb{C}^n$:

$$\mathcal{A}_i(w)\boldsymbol{v} = i\Im m\big\langle\sigma_{i*}(\boldsymbol{v}),\sigma_i(w)\big\rangle$$

où les σ_{i*} s'écrivent, $\forall\mu$:

$$\begin{aligned}\mu\neq i: \qquad \sigma_i(w)^\mu = \frac{w^\mu}{\sqrt{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}} \quad\Longrightarrow\quad \sigma_{i*}(w)^\mu &= \frac{dw^\mu}{\sqrt{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}}-\frac{w^\mu}{2(1+w^\alpha\overline{w}_\alpha)^{3/2}}2\Re e(w^\alpha d\overline{w}_\alpha)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}}\left(dw^\mu-w^\mu\frac{\Re e(w^\alpha d\overline{w}_\alpha)}{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}}\left(dw^\mu-w^\mu\frac{\overline{w}^\alpha dw_\alpha+w^\alpha d\overline{w}_\alpha}{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}\right)\end{aligned}$$

$$\mu=i: \qquad \sigma_i(w)^\mu = \frac{1}{\sqrt{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}} \quad\Longrightarrow\quad \sigma_{i*}(w)^\mu = -\frac{\Re e(w^\alpha d\overline{w}_\alpha)}{(1+w^\alpha\overline{w}_\alpha)^{3/2}} = -\frac{\overline{w}^\alpha dw_\alpha+w^\alpha d\overline{w}_\alpha}{(1+w^\alpha\overline{w}_\alpha)^{3/2}}$$

Ce qui donne[11] :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_i(w) &= i\Im m\big\langle\sigma_{i*}(w),\sigma_i(w)\big\rangle\\ &= i\Im m\left\langle\frac{1}{\sqrt{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}}\left((dw^0,\cdots,0,\cdots,dw^n)-(w^0,\cdots,1,\cdots,w^n)\frac{\Re e(w^\alpha d\overline{w}_\alpha)}{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}\right),\frac{(w^0,\cdots,1,\cdots,w^n)}{\sqrt{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}}\right\rangle\\ &= \frac{1}{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}i\Im m\bigg(\Big\langle(dw^0,\cdots,0,\cdots,dw^n),(w^0,\cdots,1,\cdots,w^n)\Big\rangle\\ &\qquad -\frac{\Re e(w^\alpha d\overline{w}_\alpha)}{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}\Big\langle(w^0,\cdots,1,\cdots,w^n),(w^0,\cdots,1,\cdots,w^n)\Big\rangle\bigg)\\ &= \frac{1}{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}i\Im m\left(dw^\mu\overline{w}_\mu-\frac{\Re e(w^\alpha d\overline{w}_\alpha)}{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}(w^\nu\overline{w}_\nu+1)\right)\end{aligned}$$

[11] *Dans le formule ci-dessous, les 0 et 1 sont placés à la* i^{eme} *coordonnées.*

Enfin, sachant que le second membre dans la partie imaginaire est réel, il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_i(w) = \frac{1}{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha} i\Im m\left(dw^\mu\overline{w}_\mu - \frac{\Re e(w^\alpha d\overline{w}_\alpha)}{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}\big(w^\nu\overline{w}_\nu+1\big)\right) &= \frac{1}{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha} i\Im m\big(dw^\mu\overline{w}_\mu\big)\\ &= \frac{1}{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}\,\frac{dw^\mu\overline{w}_\mu - d\overline{w}^\nu w_\nu}{2}\end{aligned}$$

Maintenant, pour avoir les coefficients de $d\mathcal{A}_i$, il faut calculer respectivement :

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\mathcal{A}_{i\,\mu} &= \partial_\lambda\frac{\overline{w}_\mu}{2(1+w^\alpha\overline{w}_\alpha)}\\ &= \frac{\overline{w}_\mu\overline{w}_\lambda}{2(1+w^\alpha\overline{w}_\alpha)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{\overline{\lambda}}\mathcal{A}_{i\,\mu} &= \partial_{\overline{\lambda}}\frac{\overline{w}_\mu}{2(1+w^\alpha\overline{w}_\alpha)}\\ &= \frac{1}{2(1+w^\alpha\overline{w}_\alpha)}\Big(\delta_{\lambda\mu} - \frac{\overline{w}_\mu w_\lambda}{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}\Big)\\ &= \frac{1}{4}g_{\mu\overline{\lambda}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\mathcal{A}_{i\,\overline{\nu}} &= \partial_\lambda\frac{-w_\nu}{2(1+w^\alpha\overline{w}_\alpha)}\\ &= \frac{-1}{2(1+w^\alpha w_\alpha)}\Big(\delta_{\lambda\nu} - \frac{w_\nu\overline{w}_\lambda}{1+w^\alpha\overline{w}_\alpha}\Big)\\ &= -\frac{1}{4}g_{\lambda\overline{\nu}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_{\overline{\lambda}}\mathcal{A}_{i\,\overline{\nu}} &= \partial_{\overline{\lambda}}\frac{-w_\nu}{2(1+w^\alpha\overline{w}_\alpha)}\\ &= -\frac{w_\nu w_\lambda}{2(1+w^\alpha\overline{w}_\alpha)^2}\end{aligned}$$

On remarque alors les coefficient $d\mathcal{A}_{i\,\lambda\mu}$ et $d\mathcal{A}_{i\,\overline{\lambda\mu}}$ sont symétriques, ce qui fait qu'avec le produit extérieur il s'annule (anti-symétrie). Par exemple :

$$(d\mathcal{A}_i)_{\lambda\mu}\,dw^\lambda\wedge dw^\mu = \frac{\overline{w}_\mu\overline{w}_\lambda}{2(1+w^\alpha\overline{w}_\alpha)^2}dw^\lambda\otimes dw^\mu - \frac{\overline{w}_\mu\overline{w}_\lambda}{2(1+w^\alpha\overline{w}_\alpha)^2}dw^\mu\otimes dw^\lambda = 0$$

Ce qui mène finalement à :

$$\begin{aligned}d\mathcal{A}_i &= \frac{1}{4}g_{\mu\overline{\lambda}}d\overline{w}^\lambda\wedge dw^\mu - \frac{1}{2}g_{\lambda\overline{\nu}}dw^\lambda\wedge d\overline{w}^\nu\\ &= -\frac{1}{4}\big(g_{\mu\overline{\nu}}dw^\mu\wedge d\overline{w}^\nu + g_{\mu\overline{\nu}}dw^\mu\wedge d\overline{w}^\nu\big) && \text{par anti-symétrie du produit extérieur}\\ &= -\frac{1}{2}g_{\mu\overline{\nu}}dw^\mu\wedge d\overline{w}^\nu\\ &= \boldsymbol{i}\frac{1}{2}\Omega_{\mu\overline{\nu}}dw^\mu\wedge d\overline{w}^\nu\end{aligned}$$

B.3. $\ast$ Idem que B.2. depuis $\mathbb{S}^n$ (plus simple, mais j'arrive à finir le calcul)

Cela étant dit, plutôt que de faire le calcul dans $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$, qui demanderait de calculer les $\mathcal{A}_i = {\sigma_i}^*\omega$, le plus simple est encore de se ramener dans $\mathbb{S}^n$:

$$\oint \mathcal{A}_{i\,\rho}(\dot\rho) = \oint \omega_{\sigma_i(\rho)}\big(\sigma_{i*}(\dot\rho)\big)$$

Où, en notant $z = \sigma_i(\rho)^\mu$ et $dz = \sigma_{i*}(\dot\rho)$, ω s'écrit en coordonnées locales :

$$\begin{aligned}\omega_z(dz) = i\Im m\langle dz, z\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle dz, z\rangle - \langle z, dz\rangle\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\delta_{\mu\nu}\overline{z}^\nu dz^\mu - \delta_{\mu\nu}z^\mu d\overline{z}^\nu\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\overline{z}_\nu dz^\mu - z_\nu d\overline{z}^\nu\Big)\end{aligned}$$

Donc ω à pour coefficient :

$$\omega_\mu = \frac{1}{2}\overline{z}_\mu \qquad\qquad \omega_{\overline{\nu}} = -\frac{1}{2}z_\nu = -\overline{\omega_\nu} \tag{1.41}$$

Ce qui donne pour dérivée extérieure :

$$d\omega = \partial_\lambda \omega_\mu \, dz^\lambda \wedge dz^\mu + \partial_\lambda \omega_{\overline{\nu}} \, dz^\lambda \wedge d\overline{z}^\nu + \partial_{\overline{\lambda}} \omega_\mu \, d\overline{z}^\lambda \wedge dz^\mu + \partial_{\overline{\lambda}} \omega_{\overline{\nu}} \, d\overline{z}^\lambda \wedge d\overline{z}^\nu$$

avec :

$$\begin{aligned}
\partial_\lambda \omega_\mu &= \frac{1}{2}\partial_\lambda \overline{z}_\mu = 0 & \qquad \partial_\lambda \omega_{\overline{\nu}} &= -\frac{1}{2}\partial_\lambda z_\nu = -\delta_{\lambda\nu} \\
\partial_{\overline{\lambda}} \omega_\mu &= \frac{1}{2}\partial_{\overline{\lambda}} \overline{z}_\mu = \delta_{\lambda\mu} & \qquad \partial_{\overline{\lambda}} \omega_{\overline{\nu}} &= -\frac{1}{2}\partial_{\overline{\lambda}} z_\nu = 0
\end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\begin{aligned}
d\omega &= \partial_\lambda \omega_\mu \, dz^\lambda \wedge dz^\mu + \partial_\lambda \omega_{\overline{\nu}} \, dz^\lambda \wedge d\overline{z}^\nu + \partial_{\overline{\lambda}} \omega_\mu \, d\overline{z}^\lambda \wedge dz^\mu + \partial_{\overline{\lambda}} \omega_{\overline{\nu}} \, d\overline{z}^\lambda \wedge d\overline{z}^\nu \\
&= -\frac{1}{2}\delta_{\lambda\nu} \, dz^\lambda \wedge d\overline{z}^\nu + \frac{1}{2}\delta_{\lambda\mu} \, d\overline{z}^\lambda \wedge dz^\mu \\
&= -\frac{1}{2}\Big(\delta_{\lambda\nu} \, dz^\lambda \wedge d\overline{z}^\nu + \delta_{\mu\lambda} \, dz^\mu \wedge d\overline{z}^\lambda\Big) && \text{par anti-symétrique de } \wedge \\
&= -\delta_{\mu\nu} \, dz^\mu \wedge d\overline{z}^\nu && \text{par simple changement de notations}
\end{aligned}$$

Pour ramener le résultat dans $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$, on a :

$$\begin{aligned}
d\mathcal{A}_i(w) &= d(\sigma_i^* \omega_{\sigma_i(w)}) \\
&= \sigma_i^*(d\omega_{\sigma_i(w)}) \\
&= d\omega_{\sigma_i(w)} \circ \sigma_{i*} \\
\Longrightarrow \quad d\mathcal{A}_i(w)_\mu &= {\sigma_{i*}}^\alpha \big(d\omega_{\sigma_i(w)}\big)_{\alpha\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma_i^*\big(-\delta_{\mu\nu} \, dz^\mu \wedge d\overline{z}^\nu\big) \\
&= -\delta_{\mu\nu} \, \sigma_i^*(dz^\mu) \wedge \sigma_{i*}(d\overline{z}^\nu) \\
&= -\delta_{\mu\nu} \left(dw^\alpha \sigma_{i*}{}^\mu_\alpha + d\overline{w}^\beta \sigma_{i*}{}^\mu_{\overline{\beta}}\right) \wedge \left(dw^\lambda \sigma_{i*}{}^{\overline{\nu}}_\lambda + d\overline{w}^\kappa \sigma_{i*}{}^{\overline{\nu}}_{\overline{\kappa}}\right) \\
&= -\delta_{\mu\nu} \left(\sigma_{i*}{}^\mu_\alpha \sigma_{i*}{}^{\overline{\nu}}_\lambda dw^\alpha \wedge dw^\lambda + \sigma_{i*}{}^\mu_\alpha \sigma_{i*}{}^{\overline{\nu}}_{\overline{\kappa}} dw^\alpha \wedge d\overline{w}^\kappa + \sigma_{i*}{}^\mu_{\overline{\beta}} \sigma_{i*}{}^{\overline{\nu}}_\lambda d\overline{w}^\beta \wedge dw^\lambda + \sigma_{i*}{}^\mu_{\overline{\beta}} \sigma_{i*}{}^{\overline{\nu}}_{\overline{\kappa}} d\overline{w}^\beta \wedge d\overline{w}^\kappa\right)
\end{aligned}$$

Enfin, comme π est une submersion riemannienne, l'on retombe sur :

$$d\mathcal{A}_i(w) = d\sigma_{i*}\omega_w = -\delta_{\mu\nu} \, dz^\mu \wedge d\overline{z}^\nu = -g_{\mu\overline{\nu}}(w) dw^\mu \wedge d\overline{w}^\nu = i\Omega(w)$$

Annexe C — Géodésique de $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$

- Géodésique de $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$: [4, sec. 3.E]
- longueur et aire sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$: [10, p. 119]

C.1. Métrique relevée dans les espaces horizontaux

D'abord les vecteurs tangent de $\mathbb{S}^n$ sont séparés en composantes verticale et horizontale :

$$\forall \boldsymbol{v} \in T_p\mathbb{S}^n, \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_H + \omega_p(\boldsymbol{v})^\# = \boldsymbol{v}_H + \frac{d}{dt} p \cdot \exp\big(it\Im m\langle \boldsymbol{v}, p\rangle\big)\Big|_{t=0} \tag{1.42}$$

$$= \boldsymbol{v}_H + i\Im m\langle \boldsymbol{v}, p\rangle p \tag{1.43}$$

Ainsi, $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in T_p\mathbb{S}^n$:

$$\begin{aligned}
g_{\pi(p)}(\pi_*\boldsymbol{u}, \pi_*\boldsymbol{v}) = \big\langle \boldsymbol{u}_H, \boldsymbol{v}_H\big\rangle &= \big\langle \boldsymbol{u} - \omega_p(\boldsymbol{u})^\#, \boldsymbol{v} - \omega_p(\boldsymbol{v})^\#\big\rangle \\
&= \big\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\big\rangle - \big\langle \boldsymbol{u}, \omega_p(\boldsymbol{v})^\#\big\rangle - \big\langle \omega_p(\boldsymbol{u})^\#, \boldsymbol{v}\big\rangle + \big\langle \omega_p(\boldsymbol{u})^\#, \omega_p(\boldsymbol{v})^\#\big\rangle \\
&= \big\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\big\rangle - \big\langle \boldsymbol{u}, i\Im m\langle \boldsymbol{v}, p\rangle p\big\rangle - \big\langle i\Im m\langle \boldsymbol{u}, p\rangle p, \boldsymbol{v}\big\rangle + \big\langle i\Im m\langle \boldsymbol{u}, p\rangle p, i\Im m\langle \boldsymbol{v}, p\rangle p\big\rangle \\
&= \big\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\big\rangle + i\Im m\langle \boldsymbol{v}, p\rangle\big\langle \boldsymbol{u}, p\big\rangle - i\Im m\langle \boldsymbol{u}, p\rangle\big\langle p, \boldsymbol{v}\big\rangle - i\Im m\langle \boldsymbol{u}, p\rangle i\Im m\langle \boldsymbol{v}, p\rangle\big\langle p, p\big\rangle
\end{aligned}$$

Sachant que $\|p\| = 1$ et $\Re e\langle \boldsymbol{v}, p\rangle = 0$, il vient :

$$\begin{aligned}
g_{\pi(p)}(\pi_*\boldsymbol{u}, \pi_*\boldsymbol{v}) &= \big\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\big\rangle + i\Im m\langle \boldsymbol{v}, p\rangle\big\langle \boldsymbol{u}, p\big\rangle - i\Im m\langle \boldsymbol{u}, p\rangle\big\langle p, \boldsymbol{v}\big\rangle - i\Im m\langle \boldsymbol{u}, p\rangle i\Im m\langle \boldsymbol{v}, p\rangle\big\langle p, p\big\rangle \\
&= \big\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\big\rangle - \Im m\langle \boldsymbol{v}, p\rangle\Im m\big\langle \boldsymbol{u}, p\big\rangle + \Im m\langle \boldsymbol{u}, p\rangle\Im m\big\langle p, \boldsymbol{v}\big\rangle - \langle \boldsymbol{u}, p\rangle\langle \boldsymbol{v}, p\rangle \\
&= \big\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\big\rangle - \langle \boldsymbol{u}, p\rangle\langle \boldsymbol{v}, p\rangle
\end{aligned}$$

Ce qui donne en coordonnées locales sur $\mathbb{S}^n$:

$$g = \delta_{\mu\nu} dz^\mu d\overline{z}^\nu - \delta_{\mu\beta} z^\mu d\overline{z}^\beta \delta_{\alpha\nu} dz^\alpha \overline{z}^\nu = \big(\delta_{\mu\nu} - z_\nu \overline{z}_\mu\big) dz^\mu d\overline{z}^\nu$$

C.2. Ecriture des géodésiques

Les calculs de cette section reprenne en partie les calculs de Mukunda & Simon [15, sec. 4, p. 219].

Etant donnée, sur une variété $\mathcal{M}$, une métrique g de symbole de Christoffel associé Γ, une géodésique γ de $\mathcal{M}$ vérifie [8] :

$$\forall \sigma, \quad \ddot{\gamma}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu = 0 \tag{1.44}$$

Pour une variété complexe, les contraintes apportés par les composantes holomorphe et anti-holomorphe sont les mêmes. Le système reste donc le même à la différence près que cette fois les symboles de Christoffel vont s'écrire[12] :

$$\Gamma^\sigma_{\mu\alpha} = g^{\sigma\overline{\beta}}\partial_\mu(g_{\alpha\overline{\beta}}) \qquad\qquad \Gamma^{\overline{\sigma}}_{\overline{\nu}\overline{\beta}} = g^{\alpha\overline{\sigma}}\partial_{\overline{\nu}}(g_{\alpha\overline{\beta}}) \tag{1.45}$$

Le système d'EDP (1.44) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\ddot{\gamma}^\sigma + \Gamma^\sigma_{\mu\alpha}\,\dot{\gamma}^\mu\,\dot{\gamma}^\alpha = 0 \quad &\iff \quad \ddot{\gamma}^\sigma + g^{\sigma\overline{\beta}}\partial_\mu(g_{\alpha\overline{\beta}})\,\dot{\gamma}^\mu\,\dot{\gamma}^\alpha = 0 \\
&\iff \quad g_{\sigma\overline{\beta}}\,\ddot{\gamma}^\sigma + g_{\sigma\overline{\beta}}\,g^{\sigma\overline{\beta}}\partial_\mu(g_{\alpha\overline{\beta}})\,\dot{\gamma}^\mu\,\dot{\gamma}^\alpha = 0 \\
&\iff \quad g_{\sigma\overline{\beta}}\,\ddot{\gamma}^\sigma + \partial_\mu(g_{\alpha\overline{\beta}})\,\dot{\gamma}^\mu\,\dot{\gamma}^\alpha = 0
\end{aligned}$$

Dans le cas de $\mathbb{S}^n\big(\mathrm{U}(1), \mathrm{P}\mathbb{C}^n\big)$, les $\partial g_{\alpha\overline{\beta}}$ s'écrivent :

$$\partial_\mu(g_{\alpha\overline{\beta}}) = \partial_\mu\big(\delta_{\alpha\beta} - \overline{z}_\alpha z_\beta\big) = -\delta_{\mu\beta}\overline{z}_\alpha \qquad\qquad \partial_{\overline{\nu}}(g_{\alpha\overline{\beta}}) = \partial_{\overline{\nu}}\big(\delta_{\alpha\beta} - \overline{z}_\alpha z_\beta\big) = -\delta_{\nu\alpha} z_\beta$$

[12] *Les symétries imposées à g par la forme symplectique J annule la majorité des composantes de g et a fortiori, de Γ. Voir [16, sec. 8.4.3]*

Donnant les équations :

$$\begin{aligned}
\forall\beta,\quad 0 &= g_{\sigma\overline{\beta}}\,\ddot{\gamma}^{\sigma} + \partial_{\mu}(g_{\alpha\overline{\beta}})\,\dot{\gamma}^{\mu}\,\dot{\gamma}^{\alpha} \\
&= \left(\delta_{\sigma\beta} - \overline{\gamma}_{\sigma}\gamma_{\beta}\right)\ddot{\gamma}^{\sigma} - \delta_{\mu\beta}\overline{\gamma}_{\alpha}\,\dot{\gamma}^{\mu}\,\dot{\gamma}^{\alpha} \qquad \iff \qquad 0 = \ddot{\gamma} - \langle\ddot{\gamma},\gamma\rangle\gamma - \langle\dot{\gamma},\gamma\rangle\dot{\gamma} \\
&= \ddot{\gamma}_{\beta} - \gamma_{\beta}\langle\ddot{\gamma},\gamma\rangle - \dot{\gamma}_{\beta}\langle\dot{\gamma},\gamma\rangle
\end{aligned}$$

Où l'équivalence est justifiée par le fait que les composantes anti-holomorphes des $\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$ suivent les mêmes contraintes (à conjugaison près) celles holomorphes.

Pour résoudre ce système, le produit hermitien de ce dernier avec γ est calculé :

$$\begin{aligned}
\ddot{\gamma} = \langle\ddot{\gamma},\gamma\rangle\gamma + \langle\dot{\gamma},\gamma\rangle\dot{\gamma} \quad &\Longrightarrow \quad \langle\ddot{\gamma},\gamma\rangle = \langle\ddot{\gamma},\gamma\rangle\langle\gamma,\gamma\rangle + \langle\dot{\gamma},\gamma\rangle^2 \\
&\Longrightarrow \quad 0 = \langle\dot{\gamma},\gamma\rangle
\end{aligned}$$

On retrouve alors le fait que $\dot{\gamma}$ est horizontale et $\ddot{\gamma} = \gamma\langle\ddot{\gamma},\gamma\rangle$.
En appliquant à nouveau le produit hermitien mais de l'autre côté, cette fois :

$$\ddot{\gamma} = \gamma\langle\ddot{\gamma},\gamma\rangle \quad \Longrightarrow \quad \langle\gamma,\ddot{\gamma}\rangle = \langle\gamma,\gamma\rangle\langle\ddot{\gamma},\gamma\rangle = \langle\ddot{\gamma},\gamma\rangle$$

Sachant que $\gamma \in \mathbb{S}^n$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\|\gamma\| = 1 \;&\Longrightarrow\; \langle\gamma,\dot{\gamma}\rangle + \langle\dot{\gamma},\gamma\rangle = 0 \\
&\Longrightarrow\; \langle\gamma,\ddot{\gamma}\rangle + 2\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle + \langle\ddot{\gamma},\gamma\rangle = 0 \\
&\Longrightarrow\; \langle\gamma,\ddot{\gamma}\rangle = -\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle
\end{aligned}$$

Finalement l'EDP devient :

$$\ddot{\gamma} = -\langle\dot{\gamma},\dot{\gamma}\rangle\gamma$$

Or, il existe une paramétrisation de γ telle que $\|\gamma\| = 1$. D'où les solutions :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0)\cos(t - t_0) + \dot{\gamma}(t_0)\sin(t - t_0)$$

Table des Figures

Table des Codes

Références

[1] Y. Aharonov and J. Anandan, *Phase change during a cyclic quantum evolution*, Physical Review Letters, 58 (1987), pp. 1593–1596.

[2] W. Ballmann, *Lectures on Kähler Manifolds*, vol. 2 of ESI Lectures in Mathematics and Physics, EMS Press, 1 ed., July 2006.

[3] M. V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 392 (1997), pp. 45–57. Publisher: Royal Society.

[4] A. L. Besse, *Manifolds all of whose Geodesics are Closed*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1978.

[5] A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu, and J. Zwanziger, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.

[6] D. Chruściński and A. Jamiołkowski, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.

[7] E. Cohen, H. Larocque, F. Bouchard, F. Nejadsattari, Y. Gefen, and E. Karimi, *Geometric phase from Aharonov–Bohm to Pancharatnam–Berry and beyond*, Nature Reviews Physics, 1 (2019), pp. 437–449.

[8] M. do Carmo, *Riemannian Geometry*, Mathematics (Boston, Mass.), Birkhäuser, 1992.

[9] F. Faure, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).

[10] D. Huybrechts, ed., *Complex Geometry: An Introduction*, Universitext, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.

[11] N. Kayban, *Riemannian Immersions and Submersions.*

[12] J. Lafontaine, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.

[13] N. Le Bihan, J. Flamant, and P.-O. Amblard, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.

[14] ——, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.

[15] N. Mukunda and R. Simon, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.

[16] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.

[17] Pham Mâu Quân, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Monographies universitaires de mathématiques, Dunod, Paris, 1969.

[18] E. M. Rabei, Arvind, N. Mukunda, and R. Simon, *Bargmann invariants and geometric phases: A generalized connection*, Physical Review A, 60 (1999), pp. 3397–3409.

[19] P. Woit, *Quantum Theory, Groups and Representations*, Springer International Publishing, Cham, 2017.