

Mémoire de Stage de M2

PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Michel BERTHIER, *et al.*

Master MIX - Université de La Rochelle

2024 - 2025

TABLES DES MATIÈRES

Introduction.	1
<hr/>	
PARTIE I — DÉCOMPOSITION DES SIGNAUX MULTIVARIÉE	2
<hr/>	
I — Analyse temps-fréquence.	2
1.1 Les base de l'analyse temps-fréquence.	2
1.1.1 Distribution de l'énergie en temps et fréquence	3
1.1.2 Fréquence instantanée et covariance	5
1.2 Transformée en signal analytique	7
1.2.1 Le problème de signaux réels et comment le résoudre	7
1.2.2 Propriétés et interprétations des signaux analytiques	9
II — Généralisation aux signaux multivariés	10
2.1 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié	11
2.2 Cas bivarié et trivarié	12
2.2.1 Bivarié	12
2.2.2 Trivarié	16
2.3 Généralisation de ces formules au cas n -varié	16
<hr/>	
PARTIE II — BROUILLON	17
<hr/>	
I — Intuition sur les fondamentaux	17
1.1 Écritures et interprétations de la phase dynamique	17
1.2 Réflexion autour du produit hermitien	18
II — Description des signaux multivariés.	19
2.1 Point de vue des variétés	19
2.2 VRAC.	20
2.3 Mon blabla	20
III — Vrac	21
3.1 Random stuff ready pour rédac (+labeled)	21
3.2 Bilan des formules	22
3.3 Thoughts	22

Introduction

- Les signaux multivarié c'est super, ondes gravitationnelles, tout ça tout ça
- La phase géo s'est largement étudié dans le cadre de la méca Q / de l'optique
- Nous on voudrait généraliser sont études / calculs à des signaux quelconque (en particulier, par d'EDP pour porter le signal)
- Ca a déjà étant fait en dimension 2 et un petit peu regarder en dimension 3
- Les outils employés se généralise très mal donc il en faut de nouveaux

OBJET/FONCTIONS	NOTATIONS
Distribution de Dirac	δ
Indicatrice de E	$\mathbb{1}_E$
Fonction signe	$\text{sign}(x)$
Transformée de Fourier	$\mathcal{F}[x], \hat{x}$
Transformée en SA	$\mathcal{A}[x], x_+$
Transformée de Hilbert	$\mathcal{H}[x]$
Conjugué complexe	\bar{x}
Produit hermitien (resp. scalaire)	$\langle x y \rangle$ (resp. $\langle x, y \rangle$)
Espérance et variance de f suivant ρ	$\mathbb{E}_\rho[f(t)] \quad \mathbb{V}_\rho[f(t)]$
Espace des fonctions p.p. de puissance p^{eme} intégrable à valeur de E dans F	$L^p(E, F)$
Support d'une fonction f	$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$

tab. 1 — Indexe des notations

PARTIE I

DÉCOMPOSITION DES SIGNAUX MULTIVARIÉE

TODO DE LA PARTIE (SINON ELLE EST FINIE) :

- rectifier la démo de la proposition 1 (et mettre à jour la formule la où elle est utilisée)
- Principe d'incertitude à éclaircir (comprendre + expliquer) sous-section 1.1.2
- Expliquer le second exemple (bizarre) ??
- À quoi sert Bedrosian au juste ? Théorème 1
- Éventuellement ajouter que qu'on part: "On parle éventuellement de signal AM-FM (amplitude modulated - frequency modulated)" corollaire 1.1
- Refaire les graphs en Tikz (????????)
- footnote 2 à régler

I — Analyse temps-fréquence

1.1 Les base de l'analyse temps-fréquence

Cette partie reprends, dans les grandes lignes, les propos de COHEN dans son livre Time frequency analysis [3]

Dans l'étude de signaux, la transformée de Fourier est un outil standard puisqu'il donne accès à tout l'information fréquentielle de ce dernier. Ce gain d'information n'est pas gratuit pour autant puisqu'on perd avec tout notion de temporalité. Pourtant dans bien des cas, une information instantanée, dépendante en temps, est plus pertinente.

C'est par exemple le cas dans l'étude de la langue oral. Le sens d'une phrase ne vient pas du signal, *i.e.* la voix, tout entier mais plutôt de ses valeurs locales. Lorsque l'on prononce le mot "*fleur*", c'est l'enchaînement des sons associés au "*f*", "*l*", "*eu*", *etc.* qui est important et non la structure global du signal.

On pourrait également cité l'effet Doppler qui permet, entre autre, de savoir si un émetteur s'éloigne ou se rapproche. Dans ce cadre, le passage d'un signal de hautes à basses fréquences (typiquement d'un son aigu à un son grave) indique que la source, qui se rapprochait, s'est mise à s'éloigner : c'est la variation de fréquence en cours du temps qui est porteuse d'information.

Pour avoir une notion de fréquence instantanée, il serait utile de pouvoir écrire tout signal réel x sous la forme :

$$x(t) = a(t) \cos \phi(t) \quad (1.1)$$

où a correspondrait à l'*amplitude instantanée* du signal et ϕ sa *phase instantanée*. Le problème d'une telle décomposition est que, si elle existe bel et bien, elle n'est en revanche pas unique. L'exemple le plus simple étant le cas $x(t) = \sin(t)$ qui se représente, entre autre, par les paires :

$$(a(t), \phi(t)) = (1, t + \pi/2) \quad (a(t), \phi(t)) = (\sin(t), 0) \quad (a(t), \phi(t)) = (2 \sin(t/2), t/2)$$

Pour avoir unicité de cette décomposition, il nous faut donc une contrainte sur (a, ϕ) . Une approche serait de voir x comme la partie réelle du signal complexe :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z_x(t) = a(t)e^{i\phi(t)} \implies x(t) = \Re z_x(t)$$

Dans ce cas on aurait bien unicité de a et ϕ par rapport à z_x (son amplitude et sa phase) mais cela ne fait que déplacer le problème puisque z_x n'est pas mieux défini : Il y a une liberté totale quant au choix sa partie imaginaire. Pour motiver la définition de z_x , sont rappeler quelques outils d'analyse temps-fréquence.

1.1.1 Distribution de l'énergie en temps et fréquence

Dans toute cette sous-section, on considérera x un signal complexe et on notera \hat{x} ou $\mathcal{F}[x]$ sa transformée de Fourier (dont on supposera quelle existe, ici on supposera au moins $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$) :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x(t) \end{array} \quad \mathcal{F}[x] = \hat{x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \nu & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} x(t)e^{-2\pi i\nu t} dt \end{array}$$

DÉFINITION 1 (DENSITÉS D'ÉNERGIE) — Étant donnée un signal complexe x , la *densité d'énergie* ρ de x est donnée par le carré de son module. De même on définit ϱ la *densité d'énergie spectrale* :

$$\rho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & |x(t)|^2 \end{array} \quad \varrho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \nu & \longmapsto & |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array} \quad (1.2)$$

La valeur $\rho(t)$ correspond à la puissance déployée pour émettre le signal à l'instant t et $\varrho(\nu)$ à l'énergie associée à la fréquence ν sur tout le signal.

La transformée étant une isométrie de l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, si $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors l'énergie totale du signal est indépendante de la représentation de ce dernier (temporelle ou spectrale) :

$$E(x) := \|x\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varrho(\nu) d\nu = \|\hat{x}\|_2^2 \quad (1.3)$$

Par exemple, si $x(t) = e^{2\pi i\nu_0 t}$, alors $\hat{x}(t) = \delta(x - \nu_0)$. Dans ce cas, on a les densités :

$$\rho(t) = 1 \quad \varrho(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$$

Du point de vu temporel, le signal est émis avec une puissance régulière, mais le fait que ϱ soit un dirac indique que toute l'énergie du signal est concentré en une unique fréquence ν_0 .

DÉFINITION 2 (DURÉE ET LARGEUR DE BANDE) — L'espérance ces densités, pour peu qu'elles existent, sont notées :

$$\mathbb{E}_\rho[t] := \int_{\mathbb{R}} t |x(t)|^2 dt \quad \mathbb{E}_\varrho[\nu] := \int_{\mathbb{R}} \nu |\hat{x}(\nu)|^2 d\nu$$

Si un signal est localisé temporellement, alors la première espérance/moyenne donne une idée de l'instant d'émission du signal. Si *a contrario*, le signal est localisé en fréquence, la seconde espérance peut s'interpréter comme la fréquence "dominante" du le signal, ou plus généralement comme sa *fréquence moyenne*.

En particulier, et ce sera important pour la suite, dans le cas des signaux réels, l'espérance de ϱ est toujours nulles.

On note de même les variances (toujours à condition d'existence) :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_\rho[t] &:= \mathbb{E}_\rho \left[(t - \mathbb{E}_\rho[t])^2 \right] & \mathbb{V}_\varrho[\nu] &:= \mathbb{E}_\varrho \left[(\nu - \mathbb{E}_\varrho[\nu])^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_\rho[t^2] - \mathbb{E}_\rho[t]^2 & &= \mathbb{E}_\varrho[\nu^2] - \mathbb{E}_\varrho[\nu]^2 \end{aligned}$$

Les écart-types associés sont plus facilement interprétable. Le premier est appelé *durée d'émission* du

signal, puisqu'il renseigne l'étalement temporelle du signal ; et le second *largeur de bande (fréquentielle)* puisque, lui, renseigne l'étalement fréquentielle.

Ces espérances, et plus généralement les moments de ρ (resp. ϱ), s'écrivent en fonction des dérivées \hat{x} (resp. x) via ce que Cohen appelle le "calculation trick" [3] :

PROPOSITION 1 ("CALCULATION TRICKS" DE [3]) — Si le signal est n fois dérivable et que la densité d'énergie spectrale associée ϱ admet un moment d'ordre n , alors ce moment est donnée par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_{\varrho}[\nu^n] = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \left\langle x, \frac{d^n}{dt^n} x \right\rangle \quad (1.4)$$

Avec les hypothèses analogues, les moments de ρ s'écrivent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_{\rho}[t^n] = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu) \frac{d^n}{d\nu^n} \overline{\hat{x}(\nu)} d\nu = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \left\langle \hat{x}, \frac{d^n}{d\nu^n} \hat{x} \right\rangle \quad (1.5)$$

Démonstration

À supposer que les intégrales existes et que le théorème de Fubini s'applique, on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\varrho}[\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \nu^n \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu^n \hat{x}(\nu) \overline{\hat{x}(\nu)} d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \nu^n \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} e^{2i\pi\nu t'} dt' d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \end{aligned}$$

Ici, on remarque que :

$$\begin{aligned} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} &= \nu^{n-1} \frac{1}{-2i\pi} \frac{d}{dt} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \\ &= \nu^{n-2} \frac{1}{(-2i\pi)^2} \frac{d^2}{dt^2} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{dt^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \end{aligned}$$

Ce qui permet, en jouant sur les ordres d'intégrations et les propriétés du Dirac, d'obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\varrho}[\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{dt^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \left(\frac{1}{-2i\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}[1](t-t') dt dt' \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt dt' \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt' dt \\ &= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt \end{aligned}$$

... a moins que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varrho[\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{dt^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}[1](t-t') dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dt^n} x(t) \delta(t-t') dt dt' \\
&= \left(\frac{-1}{-2i\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dt'^n} x(t') \overline{x(t')} dt' \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt
\end{aligned}$$

1.1.2 Fréquence instantanée et covariance

On notera dans toute la suite, sauf précision, l'amplitude et phase de x (resp. \hat{x}) :

$$x(t) = a(t)e^{i\phi(t)} \quad \text{resp.} \quad \hat{x}(\nu) = \alpha(\nu)e^{i\psi(\nu)}$$

Les fonctions a et ϕ (resp. α et ψ) héritent des régularités de x (resp. \hat{x}) et on a :

$$\rho = |x|^2 = a^2 \quad \varrho = |\hat{x}|^2 = \alpha^2$$

PROPOSITION 2 — Si ϱ admet une espérance et que x est dérivable, alors on a l'égalité :

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho[\phi'] \quad (1.6)$$

Démonstration

Avec le hypothèses de la proposition 1 précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \frac{i}{2\pi} \rho(t) dt \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x'(t)} dt = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i\phi(t)} (\overline{a'(t) e^{i\phi(t)} + i a(t) \phi'(t) e^{i\phi(t)}}) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i\phi(t)} (a'(t) e^{-i\phi(t)} - i a(t) \phi'(t) e^{-i\phi(t)}) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) (a'(t) - i a(t) \phi'(t)) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \phi'(t) a(t)^2 dt
\end{aligned}$$

On peut se convaincre que le premier terme doit être nul car l'espérance doit être réelle. On peut

s'en assurer par le calcul en notant que c'est l'inégale d'une dérivée :

$$\int_{\mathbb{R}} a'(t)a(t)dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (a^2)'(t)dt = \frac{1}{2} \rho(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Ce qui donne bien :

$$\mathbb{E}_{\varrho}[\nu] = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a'(t)a(t)dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \phi'(t)a(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t)\rho(t)dt$$

DÉFINITION 3 — La dérivée ϕ' est appelé *fréquence instantanée* du signal x . Le terme est justifié par l'équation (1.6) précédente : C'est une fonction dont la moyenne en temps correspond à la fréquence moyenne de x .

Pour mieux de convaincre du bien fondé de cette interprétation, deux choses.
D'une part, pour un signal classique de la forme $\cos(2\pi\nu t + \varphi)$ ou $e^{i(2\pi\nu t + \varphi)}$, la fréquence est clairement identifié par ν , que l'on peut voir comme dérivée de la phase¹ :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt}(2\pi\nu t + \varphi)$$

D'autre part, on peut fait le même jeu avec la largeur de bande qu'avec la fréquence moyenne. Cela donne :
2

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{\varrho}[\nu] &= \frac{1}{4\pi^2} \int a'(t)dt + \frac{1}{4\pi^2} \left(\int \phi'(t)^2 \rho(t)dt - \left(\int \phi'(t)\rho(t)dt \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_{\rho} \left[\frac{a'}{a} \right] + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_{\rho}[\phi'] \end{aligned}$$

On constate deux composantes (qui, par ailleurs, sont des variances purement temporelle). La première ne porte que sur l'amplitude du signal, et inversement, l'amplitude n'apparaît que sur la première. Il donc cohérent que le terme restant (là où apparaît ϕ' !) porte l'information fréquentielle du signal.

À noter tout de même, que **REMARQUE SUR LE PRINCIPE D'INCERTITUDE !!!!**

Afin de clairement expliciter le problème des signaux réels pour l'analyse temps-fréquence, est introduit une dernier outils :

DÉFINITION 4 (COVARIANCE) — Étant données deux variables aléatoire X et Y , leur covariance, qui mesure une forme de corrélation entre X et Y , est donnée par la différence :

$$\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Outil qui à tout a fait sa place dans le cadre de l'analyse temps-fréquence. Seulement, les distributions associées au temps et à la fréquence ne sont pas les mêmes et le terme $\mathbb{E}[XY]$ n'est donc pas défini. Pour y remédier on se repose sur l'interprétation de ϕ' : puisque qu'il correspond à une description temporelle de la fréquence, elle est associée à ρ . On définit alors la *covariance du signal x* comme le différence :

$$\text{Cov}(x) := \mathbb{E}_{\rho}[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_{\rho}[t]\mathbb{E}_{\varrho}[\nu] = \mathbb{E}_{\rho}[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_{\rho}[t]\mathbb{E}_{\rho}[\phi'(t)] \quad (1.7)$$

Les concepts de base de l'analyse temps-fréquence étant posés, voyons à présent les problèmes que posent les signaux réels.

¹ Le facteur 2π s'assure que l'on parle bien de fréquence, question d'unité. Sans, ν correspondait à une pulsation et en définissant la transformée de Fourier en terme de pulsation (i.e. sans le facteur 2π dans l'exponentielle), alors la formule (1.6) n'aurait pas de facteur 2π non plus. En clair, c'est une question de cohérence.

² L'on a même (mais je sais pas quoi en faire) :

$$\mathbb{V}_{\varrho}[\nu] = 1/4\pi^2 \mathbb{V}_{\rho}[\ln(a)'] + 1/4\pi^2 \mathbb{V}_{\rho}[\phi']$$

1.2 Transformée en signal analytique

1.2.1 Le problème de signaux réels et comment le résoudre

Les outils de mesures ayant la fâcheuse tendance à fournir des données réelles, ce sont les signaux réels les plus étudiés. Pourtant, cette propriété rend les outils d'analyse temps-fréquence développés plus haut, si non obsolète, au moins compliqué à interpréter.

Tout vient du fait que si x est réel alors son spectre est à symétrie hermitienne et sa densité spectrale ϱ symétrique :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R} &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{x}(-\nu) = \overline{\hat{x}(\nu)} \\ &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \varrho(-\nu) = \varrho(\nu) \end{aligned}$$

Comme dit plus tôt, cela implique que la fréquence moyenne de tout signal réel est nulle (intégrale d'une fonction impaire). Ce qui, en plus de ne pas être très instructif, n'est pas cohérent avec l'interprétation physique qu'on voudrait faire cette moyenne. Par exemple, si ϱ prend la forme ci-dessous (??), alors il serait plus naturelle de demander à ce que la fréquence moyenne se trouve autour de 1,4. De même, la largeur de bande spectrale ne correspond plus à l'étalement de chaque gaussienne, mais plutôt à leur espacement.

fig. 1.1 — Exemple de densité spectrale d'un signal réel ESP A 1,4

Même problème avec la covariance qui sera toujours nulle pour les signaux réels. De là en conclure que la fréquence instantanée de n'importe quel signal réel est toujours décorrélée du temps serait, pour le moins, insatisfaisant.

Pour résoudre les problèmes lié à la fréquence moyenne et la largeur de bande, il suffirait de ne conserver que la partie positive du signal. On s'intéresserait alors au signal transformée $\mathcal{A}[x]$ tel que :

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\hat{x}$$

où $\mathbb{1}_E$ est la fonction indicatrice de l'ensemble E et où le facteur 2 permet de conserver l'énergie du signal. Avec la transformée de Fourier inverse, ce nouveau signal s'écrit alors :

$$\mathcal{A}[x] = \mathcal{F}^{-1}[2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\hat{x}] = 2\mathcal{F}^{-1}[\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] * x$$

La transformée inverse de cette indicatrice (qui n'est autre que la fonction de Heavyside) n'est pas définie au sens classique, mais l'est au sens des distributions. Pour l'écrire, on introduit la distribution suivante :

DÉFINITION 5 (VALEUR PRINCIPALE DE CAUCHY) — On appelle *valeur principale de Cauchy* la distribution, notée $\text{vp}\frac{1}{x}$, telle que :

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \left\langle \text{vp}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle &= \oint_0^t \frac{\varphi(t)}{t} dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ici $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide et la limite en ε assure que l'intégrale (impropre) converge bien. Sa valeur est également appelée *valeur principale* de l'intégrale.

La distribution $\text{vp}\frac{1}{x}$ est la valeur principale de la fonction inverse dans le sens où son produit avec l'identité donne 1 ($\langle \text{id}_{\mathbb{R}} \times \text{vp}\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{vp}\frac{1}{x}, \text{id}_{\mathbb{R}} \times \varphi \rangle = 1$) mais avec des propriétés d'intégration supplémentaires. Entre autre :

PROPRIÉTÉ 1 — La transformée de Fourier de la valeur principale de Cauchy est donnée, au sens des distributions, par :

$$\mathcal{F}\left[\text{vp}\frac{1}{x}\right] = -i\pi \text{sign} \quad (1.9)$$

On en déduit la transformée de Fourier inverse :

$$\mathcal{F}^{-1}[2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] = \mathcal{F}^{-1}[1 + \text{sign}] = \delta + \frac{i}{\pi} \text{vp} \frac{1}{x} \quad (1.10)$$

Démonstration

juste pour le plaisir. Par définition, la transformée de Fourier de la valeur principale est telle que, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F}\left(\text{vp} \frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle &= \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \hat{\varphi} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\varphi}(\nu)}{\nu} d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\hat{\varphi}(\nu) - \hat{\varphi}(-\nu)}{\nu} d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2i\pi\nu t} dt - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{2i\pi\nu t} dt \right) d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) (e^{-2i\pi\nu t} - e^{2i\pi\nu t}) dt d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} -2i\varphi(t) \sin(2\pi\nu t) dt d\nu \\ &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\nu t)}{\nu} d\nu dt \end{aligned}$$

En posant $u = 2\pi\nu t \text{sign}(t)$ (le signe de t assure que l'on ait le même signe dans et hors du sin), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F}\left[\text{vp} \frac{1}{x}\right], \varphi \right\rangle &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_0^{+\infty} \text{sign}(t) \frac{\sin(u)}{u} du dt \\ &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \frac{\pi}{2} \text{sign}(t) dt \\ &= \langle -i\pi \text{sign}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

DÉFINITION 6 (TRANSFORMÉE EN SA ET DE HILBERT) — On définit alors la *transformée en signal analytique* (SA) du tout signal x par l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \mathcal{A}[x] = x_+ := 2x * \mathcal{F}^{-1}[\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] : & t & \longmapsto x(t) + \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds \end{array} \quad (1.11)$$

Par construction, on a bien $\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x}$, et on dira plus généralement de tout signal dont le spectre est réel positif que c'est un *signal analytique*.

L'intégral à droite de (1.11) est appelée *transformée de Hilbert* du signal. Elle est notée :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \mathcal{H}[x] : & t & \longmapsto \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds = \frac{1}{\pi} \left(\text{vp} \frac{1}{x} \right) * x \end{array} \quad (1.12)$$

Par souci de commodité, plutôt que redéfinir tout le vocabulaire développé plus haut (fréquence moyenne, temps moyen, etc.) pour les signaux réel via la transformation \mathcal{A} , dans la suite du mémoire on travaillera directement avec $\mathcal{A}[x]$.

1.2.2 Propriétés et interprétations des signaux analytiques

Dans les cas des signaux réels, la transformée de Hilbert est à valeur dans \mathbb{R} . Aussi, la transformée $\mathcal{A}[x]$ à pour partie réelle x et pour partie imaginaire $\mathcal{H}[x]$. Sous forme exponentielle, cela donne :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} \implies \begin{cases} x(t) = a(t) \cos \phi(t) \\ \mathcal{H}[x](t) = a(t) \sin \phi(t) \end{cases}$$

On obtient alors on décomposition de x en une paire (a, ϕ) telle que discuté plus haut.

DÉFINITION 7 (AMPLITUDE ET PHASE INSTANTANÉE) — On définit ainsi l'*amplitude instantanée* a_x et la *phase instantanée* ϕ_x de tout signal x comme étant respectivement l'amplitude et la phase de $\mathcal{A}[x]$:

$$a_x = |\mathcal{A}[x]| \qquad \phi_x = \arg(\mathcal{A}[x]) \qquad (1.13)$$

Il est important de noter que si un signal est présenté sous la forme $x = a \cos \phi$, rien n'implique que a et ϕ corresponde à l'amplitude et la phase instantanée du signal. Si ce n'est pas le cas, c'est que cette décomposition n'était "pas la bonne" en cela qu'elles ne s'interprètent pas comme l'on aimerait.

Pour comprendre comment cette transformation "sélectionne" la fréquence instantanée, détaillons le cas où x s'écrit comme produit de deux signaux pures (??) :

$$x(t) = \cos(2\pi\nu_1 t) \cos(2\pi\nu_2 t)$$

On montre sans mal³ que si $\nu_1 \geq \nu_2$, alors la transformée en SA de x s'écrit :

$$\mathcal{A}[x] = \cos(2\pi\nu_2 t) e^{2i\pi\nu_1 t}$$

fig. 1.2 — Représentation graphique du signal x (rouge) avec $\nu_1 = 3$ et $\nu_2 = 0.1$. Sur l'image de gauche, avec signaux de fréquences pures (bleu et vert). Sur l'image de droite, avec son amplitude (bleu) et sa phase instantanée (vert). Les discontinuités de la phase sont dû à l'arrondi à 2π près de l'argument de $\mathcal{A}[x]$ et à la façon dont il est calculé lorsque le signal s'annule (mise à 0). Voir [ici](#) pour un graphique dynamique.

Le signal $\mathcal{A}[x]$ n'est ici pas sous forme exponentielle à proprement parler puisque le cosinus peut être négatif (pour s'y ramener, il suffit de passer le cos en valeur absolue et d'ajouter $\pm\pi$ à l'argument) mais l'avantage de cette forme est qu'elle fait clairement apparaître les fréquences $\nu_{1,2}$. En particulier, la fréquence instantanée du signal est la plus grande des deux fréquences ν_1 et ν_2 . La plus petite, elle, se retrouve dans l'amplitude. Ce résultat est rassurant en cela qu'il est plus naturel de voir le cosinus de basse fréquence comme modulant celui de haute fréquence que l'inverse comme on le voit sur la première image de la figure ??.

Aussi, en mettant les hautes fréquences du signal dans la fréquence instantanée, on s'assure de limiter les variations de l'amplitude. Cela apporte bien plus de contrainte en terme de décomposition (a_x, ϕ_x) , en cela que si l'inverse étant vrai, alors toute les fréquences pourrait être envoyé dans l'amplitude, ce qui laisserait la phase invariante.

Cela étant dit, lorsque l'on fait varier ν_1 et ν_2 , le résultat n'est pas toujours si intuitif. C'est notamment le cas lorsque les deux deviennent de plus en plus proche :

fig. 1.3 — Idem que pour la figure ?? précédente, avec cette fois $\nu_1 = 1.5$ et $\nu_2 = 1.3$.

Pour comprendre pourquoi l'amplitude ne fait pas ce qu'on attendrait d'elle, on introduit le théorème de Bedrosian :

³ \hat{x} est donné par 4 Diracs, en ne gardant que ce non nul sur \mathbb{R}^+ on obtient le spectre de $\mathcal{A}[x]$ et il reste plus qu'à inverser la transformée de Fourier.

THÉORÈME DE BEDROSIAN (1) — Dans sa formulation la plus générale, le théorème de Bedrosian énonce que donnée si deux fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ sont telles l'une des trois assertions suivantes est vraie :

- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda, +\infty[, \text{supp } \hat{g} \subset [\lambda, +\infty[$
- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset]-\infty, \lambda], \text{supp } \hat{g} \subset]-\infty, -\lambda]$
- $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \setminus \{(0, 0)\} \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda_1, \lambda_2], \text{supp } \hat{g} \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda_2, \lambda_1]$

alors la transformée de Hilbert de leur produit est donnée par la formule (voir [9] pour une démonstration) :

$$\mathcal{H}[fg] = f\mathcal{H}[g] \quad (1.14)$$

COROLLAIRE 1.1 — Dans le cas d'un signal réel, suivant la définition 7 on peut écrire $x = a_x \cos \circ \phi_x$. Comme a_x et ϕ_x sont réels, seule la troisième condition du théorème de Bedrosian peut être satisfaite pour peu que $\lambda_1 = \lambda_2$. Ainsi, à condition que $a_x \in L^2(\mathbb{R})$, $\cos \phi_x \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a_x] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi_x] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda]$$

Alors on a :

$$\mathcal{H}[x] = a_x \mathcal{H}[\cos(\phi_x)] \quad \text{et} \quad \mathcal{H}[\cos(\phi_x)] = \sin(\phi_x)$$

II — Généralisation aux signaux multivariés

DÉFINITION 8 (SIGNAL MULTIVARIÉ) — Un *signal multivarié*, ou *n-varié*, est un vecteur composé de $n \in \mathbb{N}^*$ signaux x_i . Si $n = 2$, alors on parle de signal *bivarié*.

Dans la continuité de ce qui à été dit dans la sous-section 1.2.1, dans le cas des signaux réels, on s'intéressera au vecteur composé des transformées en SA (eq. 1.11, déf. 6) des x_i . **Au moins dans toute cette section**, un tel signal sera noté :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ x_+(t) : & t \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathcal{A}[x_1] \\ \mathcal{A}[x_2] \\ \vdots \\ \mathcal{A}[x_n] \end{pmatrix} \end{array}$$

On supposera que chaque composante x_i de \mathbf{x} aura autant de régularité et de condition d'intégrabilité que nécessaire (**il vaudra préciser lesquelles à un moment**).

Le fait que \mathbf{x} soit à valeur dans \mathbb{C}^n impose un choix naturelle de d'amplitude instantanée : sa norme. L'on notera alors dans tout la suite (sauf précision) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = a(t) \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\| = 1, \quad a \geq 0$$

Le choix de la phase instantanée, en revanche, n'est pas plus commode. Si l'on cherche à écrire \mathbf{x} sous la

forme :

$$a(t)e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\psi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\psi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\psi_n(t)} \end{pmatrix}$$

alors n'importe quel choix de ϕ est valable, il suffit que $\psi_i = \phi_i - \phi$.

2.1 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié

Afin de contraindre ce choix, on s'inspire propriétés de la phase instantanée vu plus tôt pour en déduire deux approches :

- D'une part, l'espérance de la fréquence instantanée (ici vu comme dérivée à 2π près de la phase⁴) doit donner la fréquence moyenne au sens de Fourier, eq. (1.6).
- D'autre part, les conditions d'interprétation de la décomposition (a_x, ϕ_x) , théorème 1, exige que les hautes fréquences du signal se retrouve dans la phase.

Pour cela on introduit les notations utiles au cas multivarié :

DÉFINITION 9 (DENSITÉ D'ÉNERGIE) — Étant donné un signal multivarié $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, les densités d'énergie de chaque composante x_i sont notées :

$$\begin{aligned} \rho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto |x_i(t)|^2 = a(t)^2 a_i(t)^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \varrho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \nu &\longmapsto |\hat{x}_i(\nu)|^2 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Et les densités d'énergies associées au signal \mathbf{x} complet :

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \varrho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \nu &\longmapsto \|\hat{\mathbf{x}}(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) \end{aligned} \quad (1.16)$$

La première approche, inspiré de [2] consiste donc de reprendre le “calculation trick” (1.4), pour en déduire la fréquence moyenne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \int_{\mathbb{R}} \nu \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) d\nu \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\varrho_i}[\nu] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'_i(t) \rho_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t)^2 \sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{i=1}^n \phi'_i a_i^2 \right] \end{aligned}$$

Ce qui mène à une première définition de la phase instantanée :

$$\phi = \int \sum_{i=1}^n \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds = \sum_{i=1}^n \int \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds \quad (1.17)$$

⁴La pertinence de cette définition dans le cas multivarié sera discuté plus loin

La seconde approche, fortement inspirée par les travaux de Lilly et Olhede [8], se base sur la discussion autour du théorème Bedrisan sur la séparation haute-basse fréquence du signal \mathbf{x} (sous-section 1.2.2). Pour cela, l'on commence par faire apparaître la phase ϕ — pour l'instant inconnue — en écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\phi(t)} e^{-i\phi(t)} \mathbf{x}(t) := e^{i\phi(t)} \tilde{\mathbf{x}}(t)$$

Si ϕ est bien choisie, alors $\tilde{\mathbf{x}}$ contient les informations associées à l'amplitude et la polarisation de \mathbf{x} . Or, la phase doit contenir les hautes fréquences du signal. Pour s'en assurer on demande, à l'inverse, que les basses fréquences du signal soit données par $\tilde{\mathbf{x}}$ en limitant ces variations. En clair, ϕ doit être choisi de sorte à minimiser la dérivée $\tilde{\mathbf{x}}'$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \underset{\alpha(t)}{\operatorname{argmin}} \|\tilde{\mathbf{x}}'(t)\|_2^2 = \underset{\alpha(t)}{\operatorname{argmin}} \left\| e^{-i\alpha} (\mathbf{x}' - i\alpha' \mathbf{x}) \right\|_2^2 = \underset{\alpha(t)}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x}' - i\alpha' \mathbf{x}\|_2^2$$

La contrainte ne dépendant que de la dérivée α' , on se ramène à :

$$\min_{\alpha(t)} \|\tilde{\mathbf{x}}'(t)\|_2^2 = \min_{\alpha'(t)} \|\mathbf{x}'(t) - \alpha'(t) \mathbf{x}(t)\|_2^2$$

En rappelant que $\frac{d}{dx} \|f(x)\|_2^2 = 2\Re \langle f(x), f'(x) \rangle$, il vient que ce minimum est atteint par $\phi'(t)$ à condition que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi} \|\mathbf{x}' - i\phi' \mathbf{x}\|_2^2 = 0 & \iff 0 = 2\Re \left\langle \mathbf{x}' - i\phi' \mathbf{x}, \frac{d}{d\phi'} (\mathbf{x}' - i\phi' \mathbf{x}) \right\rangle \\ & = 2\Re \langle \mathbf{x}' - i\phi' \mathbf{x}, -i\mathbf{x} \rangle \\ & = 2\Re \left(i \langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle \right) + 2\phi' \Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ & = -2\Im \langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle + 2\phi' \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\phi' = \frac{\Im \langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \frac{-\Im \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \quad \text{et} \quad \phi = -\Im \int \frac{\langle \mathbf{x}(s), \mathbf{x}'(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|_2^2} ds \quad (1.18)$$

Ce qui, sous forme exponentiel, se réécrit :

$$\begin{aligned} -\Im \frac{\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} &= -\Im \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t) a_i(t) e^{i\phi_i(t)} \overline{\left((aa_i)'(t) + a(t) a_i(t) i\phi_i'(t) \right) e^{i\phi_i(t)}} \\ &= -\Im \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t) a_i(t) (aa_i)'(t) - ia(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \\ &= -\frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n -a(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(t)^2 \phi_i'(t) \end{aligned}$$

Soit la même expression que (1.17) obtenue par le premier raisonnement.

2.2 Cas bivarié et trivarié

2.2.1 Bivarié

PROPOSITION 3 (PHASE DYNAMIQUE) — Si on se donne un signal bivarié de la forme (AM-FM-PM) :

$$\mathbf{x} = ae^{i\varphi} R_\theta \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix} = a(t) e^{i\varphi} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \\ \sin \theta \cos \chi - i \cos \theta \sin \chi \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

alors, la phase dynamique de \mathbf{x} est donnée par :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \int_{t_0}^t \dot{\varphi}(s) + \dot{\theta}(s) \sin 2\chi(s) ds = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\theta}(s) \sin 2\chi(s) ds$$

Soit une différence de phase φ mais avec un terme en plus. Donc φ ne doit (**doit?**) pas être interpréter comme la phase instantanée du signal, où du moins pas au sens donnée dans la sous-section 2.1

Démonstration

Par souci de lisibilité, on note $\mathcal{U} = R_\theta \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix}$ de sorte que la dérivée de \mathbf{x} s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \dot{a}e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\dot{\varphi}e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix} + ae^{i\varphi}\dot{\chi} \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \chi + i \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \theta \sin \chi - i \cos \theta \cos \chi \end{pmatrix} \\ &= \dot{a}e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\dot{\varphi}e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + ae^{i\varphi}\dot{\chi} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathcal{U}} \end{aligned}$$

Le produit hermitien $\langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle &= \left\langle ae^{i\varphi}\mathcal{U}, \dot{a}e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\dot{\varphi}e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + ae^{i\varphi}\dot{\chi} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathcal{U}} \right\rangle \\ &= \left\langle a\mathcal{U}, \dot{a}\mathcal{U} + ia\dot{\varphi}\mathcal{U} + a\dot{\theta} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + a\dot{\chi} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathcal{U}} \right\rangle \\ &= a\dot{a}\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle - ia^2\dot{\varphi}\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + a^2\dot{\theta} \left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} \right\rangle + ia^2\dot{\chi} \left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathcal{U}} \right\rangle \end{aligned}$$

où les deux derniers produits hermitiens donnent :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} \right\rangle &= -\mathcal{U}_1\bar{\mathcal{U}}_2 + \mathcal{U}_2\bar{\mathcal{U}}_1 \\ &= 2i\Im(\bar{\mathcal{U}}_1\mathcal{U}_2) \\ &= 2i\Im(\cos \theta \cos \chi - i \sin \theta \sin \chi)(\sin \theta \cos \chi - i \cos \theta \sin \chi) \\ &= 2i(-\cos^2 \theta \cos \chi \sin \chi - \sin^2 \theta \sin \chi \cos \chi) \\ &= -2i(\cos \chi \sin \chi + \sin \chi \cos \chi) \\ &= -i \sin 2\chi \end{aligned}$$

$$\left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathcal{U}} \right\rangle = -\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_2\mathcal{U}_1 = 0$$

D'où, sachant que $\|\mathbf{x}\|^2 = a^2$ et $\|\mathcal{U}\| = 1$, la formule :

$$\begin{aligned} -\frac{\Im \langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= -\frac{1}{a^2} \Im(a\dot{a}\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle - ia^2\dot{\varphi}\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle - ia^2\dot{\theta} \sin 2\chi) \\ &= \frac{1}{a^2} (a^2\dot{\varphi}\|\mathcal{U}\|^2 + a^2\dot{\theta} \sin 2\chi) \\ &= \dot{\varphi} + \dot{\theta} \sin 2\chi \end{aligned}$$

PROPOSITION 4 (PHASE TOTALE) — La phase totale d'un signal AM-FM-PM est donnée par :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \arg \langle \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t) \rangle = \varphi(t_0) - \varphi(t) + \arg (\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi - i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2)) \quad (1.20)$$

Démonstration

On note cette fois $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix}$ et sachant la forme des signaux AM-FM-PM, on a :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t) \rangle &= \langle a(t_0)e^{i\varphi(t_0)}R_{\theta(t_0)}\mathcal{V}(t_0), a(t)e^{i\varphi(t)}R_{\theta(t)}\mathcal{V}(t) \rangle \\ &= a(t_0)e^{i\varphi(t_0)}a(t)e^{-i\varphi(t)} \langle R_{\theta(t_0)}\mathcal{V}(t_0), R_{\theta(t)}\mathcal{V}(t) \rangle \\ &= a(t_0)a(t)e^{i(\varphi(t_0)-\varphi(t))} \langle \mathcal{V}(t_0), R_{\theta(t)-\theta(t_0)}\mathcal{V}(t) \rangle \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on note $\Delta y = y(t) - y(t_0)$ et $y_1 = y(t_0), y_2 = (t)$ pour $y = \varphi, \theta, \chi$. Le produit hermitien à droite s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{V}(t_0), R_{\Delta\theta}\mathcal{V}(t) \rangle &= \begin{pmatrix} \cos \chi_1 & -i \sin \chi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \Delta\theta \cos \chi_2 - i \sin \Delta\theta \sin \chi_2 \\ \sin \Delta\theta \cos \chi_2 + i \cos \Delta\theta \sin \chi_2 \end{pmatrix} \\ &= \cos \chi_1 (\cos \Delta\theta \cos \chi_2 - i \sin \Delta\theta \sin \chi_2) - i \sin \chi_1 (\sin \Delta\theta \cos \chi_2 + i \cos \Delta\theta \sin \chi_2) \\ &= \cos \Delta\theta (\cos \chi_1 \cos \chi_2 + \sin \chi_1 \sin \chi_2) - i \sin \Delta\theta (\cos \chi_1 \sin \chi_2 + \sin \chi_1 \cos \chi_2) \\ &= \cos \Delta\theta \cos \Delta\chi - i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2) \end{aligned}$$

Plein d'écriture :

- En dimension 2, c'est facile, on peut écrire \mathbf{x}_+ comme (Lilly [5, 7]) :

$$\mathbf{x}_+(t) = e^{i\phi(t)}\tilde{\mathbf{x}} \quad \tilde{\mathbf{x}} = R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \end{pmatrix} = a(t)R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

- Avec la transformation :

$$\mathbf{x} \rightsquigarrow (e^{i\phi}, \mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger) \in \mathbb{U}(1) \times \mathbb{PC}^1 - ish$$

On a :

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 S_i(t)\sigma_i \quad \begin{cases} S_0(t) = {}^t\mathbf{x}\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 \\ S_1(t) = S_0(t) \cos 2\chi(t) \cos 2\theta(t) \\ S_2(t) = S_0(t) \cos 2\chi(t) \sin 2\theta(t) \\ S_3(t) = S_0(t) \sin 2\chi(t) \end{cases}$$

- En version quaternion (\mathbf{j} fait office de i) [4] :

$$\mathbf{x}_+ = a(t)e^{i\theta}e^{-\mathbf{k}\chi}e^{\mathbf{j}\phi} \quad (1.22)$$

Et les Stokes parameters sont donnée par :

$$\mathbf{x}_+\mathbf{j}\mathbf{x}_+^\dagger = S_0 + \mathbf{i}S_3 + \mathbf{j}S_1 + \mathbf{k}S_2$$

Et le lien avec les σ_i se fait via (mais du coup les notations colles par :/) :

$$(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \rightsquigarrow (1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$$

- Et en version matrice de Pauli :

$$\mathbf{x}_+ = a(t)e^{i\phi}e^{i\theta\sigma_2}e^{-i\chi\sigma_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

Plus de détail :

On a un signal bivarié $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ qu'on transforme (voir sous-section 1.2.1) soit la forme :

$$\mathbf{x}_+(t) = \begin{pmatrix} x_+(t) \\ y_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ a_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

À côté de ça, on a les ellipses modulées :

$$z(t) = e^{i\theta} (a(t) \cos \phi(t) + ib(t) \sin \phi(t)) = a(t)e^{i\theta} (\sin \chi(t) \cos \phi(t) + i \sin \chi(t) \sin \phi(t)) \in \mathbb{C}$$

Qui sous forme vectoriel se réécrit (**pourquoi ???**) :

$$z(t) = e^{i\phi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \end{pmatrix} = a(t)e^{i\phi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad R_{\theta} \in \text{SO}_2(\mathbb{R}) \quad (1.24)$$

Pour avoir la désinscription de \mathbf{x} en terme d'ellipse, il suffit donc de poser :⁵

$$\mathbf{x}_+(t) = z(t) \iff \begin{pmatrix} a_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ a_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} = A(t)e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix}$$

Ensuite, on pose :

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ e^{i\phi_+} \\ a_- e^{i\phi_-} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_+ + iy_+ \\ x_+ - iy_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} 2\phi &= \phi_+ + \phi_- & a &= A \cos \chi = a_+ + a_- \\ 2\theta &= \phi_+ - \phi_- & b &= A \sin \chi = a_+ - a_- \end{aligned}$$

et on en déduit :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2} & \cos \chi &= \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2}} \\ & & \sin \chi &= \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2}} \end{aligned}$$

Ce qui donne *in fine* (super osef) :

$$\begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} = e^{i\frac{\phi_+ + \phi_-}{2}} R_{\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}} \begin{pmatrix} a_+ + a_- \\ -i(a_+ - a_-) \end{pmatrix}$$

L'équation (1.21) se généralise très bien, il suffit d'augmenter la taille de $R_{\theta} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ et de lui donner le vecteur étendu :⁶

$$z_x(t) = \begin{pmatrix} x_{1+}(t) \\ \vdots \\ x_{n+}(t) \end{pmatrix} = e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A(t)e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

⁵C'est la version analytique du la version vectorielle de l'ellipse !

⁶Sachant que le vecteur contenant a et b est principalement nul, on peut réécrire le produit ne considérant que les deux premières colonnes de R_{θ} .

Maintenant, la question est de savoir comment généraliser la transformation en (z_+, z_-) pour obtenir les paramètres $(A, \phi, R_\theta, \chi)$ dans ce cas...
 Pour généraliser le procédé, on peut noter que :

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} U \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} \quad \text{avec } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{U}(2)$$

Ce qui ramène à se demander comment généraliser U à $\mathbb{U}(n)$. Le problème est que U est indépendant de tout les paramètres $(A, \phi, R_\theta, \chi)$ et sa généralisation est vraiment pas évidente sachant qu'on que le formule avec $n = 2...$ et pour $n = 3$ ca devient déjà chaud (pour rappelle $\dim \text{SO}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ et donc $\theta \in \mathbb{R}^n$, ce qui rend le problème de pire en pire à mesure qu'on augmente n).

2.2.2 Trivarié

- Version de Lilly [6]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_+(t) &= e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a(t) e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\text{avec :} \quad R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc une amplitude / phase instantanée A / ϕ et une polarisation instantanée d'ellipse paramétrée par χ et orientée par la rotation $R_1 R_3 R_1$.

- On note d'abord que (Lefevre [4]) :

$$\begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \chi(t) & i \sin \chi(t) & 0 \\ -i \sin \chi(t) & \cos \chi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui, en terme de matrice de Gall-man (λ_i) (généralisation de la base de Pauli à $\mathbb{U}(3)$), devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_+(t) &= a(t) e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a(t) e^{i\phi(t)} e^{i\alpha\lambda_7} e^{i\beta\lambda_3} e^{i\theta\lambda_7} e^{-i\chi\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.3 Généralisation de ces formules au cas n -varié

- Les quaternions ça se généralise trop mal (au dessus c'est les octinions, c'est un calvaire et ca va pas plus loin)
- Ca peut s'écrire en terme d'algèbre de Clifford (Lefevre [4])... pas dingue non plus (pb de dimension principalement)
- Les bases de $\mathbb{U}(n)$ parait être le meilleur choix mais on a pas de "bonne base" pour de plus haute dimension.
- question : est-ce qu'on en a besoin pour la phase géométrique ? (transi vers une formulation géo diff-like ?)

PARTIE II

BROUILLON

I — Intuition sur les fondamentaux

1.1 Écritures et interprétations de la phase dynamique

- Tout le monde introduit la phase dynamique par la formule :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) := -\Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds \quad (2.1)$$

- Première chose, avec (2.3), on a encore :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) = \int_{t_0}^t \frac{\langle \psi(s), \omega \dot{\psi}(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds$$

A.k.a. la phase dynamique porte l'information symplectique (cumulée).

- En terme de fréquence, si ψ est de norme 1, alors (mais c'est vraiment pas dit que l'intégrale converge dans ce cas) :

$$\|\psi(t)\| = 1 \implies \Phi_{\text{dyn}}(\psi, -\infty, +\infty) = i \int_{\mathbb{R}} \langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle ds = \pm 2\pi \int_{\mathbb{R}} \nu |\hat{\psi}(\nu)|^2 d\nu = \pm 2\pi \mathbb{E}_{|\hat{\psi}|^2} [\nu]$$

- Lilly [8] propose de d'écrire ψ avec une phase isolé φ de sorte que :

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} = e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\varphi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\varphi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix}$$

Et avec un peu de travail (sous-section 2.1), on obtient que le mieux c'est de poser :

$$\varphi'(t) := -\frac{\Im m \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle}{\|\psi(t)\|^2} = \frac{\sum_i \phi'_i(t) a_i^2(t)}{\sum_i a_i^2(t)}$$

On voit donc que la phase dynamique est donnée par le cumule des fréquences instantanées, ou comme le différentiel de phase de ψ :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) = -\Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds = \int_{t_0}^t \varphi'(s) ds = \varphi(t) - \varphi(t_0)$$

- Avec les mêmes notations, on a :

$$\begin{aligned}
\langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle &= \left\langle \left(a_i(t) e^{i(\varphi(t) + \varphi_i(t))} \right)_i \middle| \left((a'_i(t) + i(\varphi'(t) + \varphi'_i(t)) a_i(t)) e^{i(\varphi(t) + \varphi_i(t))} \right)_i \right\rangle \\
&= \sum_i a_i(t) \left(a'_i(t) - i(\varphi'(t) + \varphi'_i(t)) a_i(t) \right) \\
&= \sum_i a_i(t) a'_i(t) - i \sum_i (\varphi'(t) + \varphi'_i(t)) a_i(t)^2 \\
&= \sum_i a_i(t) a'_i(t) - i \varphi'(t) \sum_i a_i(t)^2 - i \sum_i \varphi'_i(t) a_i(t)^2 \\
&= \sum_i a_i(t) a'_i(t) - i \varphi'(t) \|a(t)\|^2 - i \sum_i \varphi'_i(t) a_i(t)^2
\end{aligned}$$

Avec $a = {}^t(a_1, \dots, a_n) = |\psi|$ et $\|a\| = \|\psi\|$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) &= \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s) \|a(s)\|^2}{\|a(s)\|^2} ds + \sum_i \int_{t_0}^t \frac{\varphi'_i(s) a_i(s)^2}{\|a(s)\|^2} ds \\
&= \Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) + \sum_i \mathbb{E}_{|\psi_i|^2 / \|\psi\|^2} [\mathbb{1}_{[t_0, t]} \varphi'_i]
\end{aligned}$$

Et donc :

$$\sum_i \mathbb{E}_{\frac{|\psi_i|^2}{\|\psi\|^2}} [\mathbb{1}_{[t_0, t]} \varphi'_i] = 0 \quad (2.2)$$

Moralement, ça revient juste à dire qu'en définissant φ suivant Lilly, on a obtenu au ϕ_i la phase moyenne pondérée et donc, tout naturellement, les nouvelles phase individuelles φ_i sont centrées (à la même pondération près).

- Quoi qu'il en soit, de toutes ces formules il ressort que la phase dynamique ne regarde que la phase/fréquence instantanée de ψ (et un peu son amplitude aussi mais c'est secondaire) et (je crois) donne une contrainte sur les phases φ_i

1.2 Réflexion autour du produit hermitien

Soit $x, y \in \mathbb{C}^n$ des vecteurs complexes et $X, Y \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ leur versions réelles. On note x^j sa j^{eme} composante complexe et x_1 (resp. x_2) le vecteur composé de ses parties réelles (resp. imaginaires) :

$$x = (x^j)_j = x_1 + ix_2 = (x_1^j)_j + i(x_2^j)_j$$

On a deux façon d'écrire le produit hermitien (canonique) de x avec y .

La première :

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \langle x_1 + ix_2, y_1 + iy_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - i \langle x_1, y_2 \rangle + i \langle x_2, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \\
&= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + i(\langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle) \\
&= \sum_j x_1^j y_1^j + x_2^j y_2^j + i \left(\sum_j x_2^j y_1^j - x_1^j y_2^j \right) \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle + i \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \langle X, Y \rangle + i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \langle X, Y \rangle - i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} Y \right\rangle
\end{aligned}$$

Cette formule peut s'interpréter en disant que le produit hermitien encode le produit scalaire entre X et Y et le produit scalaire de X avec les vecteurs $y^j = (y_1^j, y_2^j)$ auquel on aurait appliqué une rotation de

90° (rotation qui, par ailleurs, correspond à la multiplication par i dans le plan complexe). Moralement, $\langle x, y \rangle = 0$ demande une orthogonalité de X à un plan, ce qui fait sens puisque cela tient compte du fait que les x^j, y^j sont complexes (donc de dimension 2 en tant que \mathbb{R} -e.v.). Pour les connaisseurs, on retrouve l'égalité "produit hermitien = produit scalaire $-i$ forme symplectique" !! Voir [plan proj complexe](#) et [variété kählérienne](#)

On a aussi l'écriture (quand-même moins clair) :

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + i(\langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle) \\ &= \sum_j x_1^j y_1^j + x_2^j y_2^j + i \sum_j (x_2^j y_1^j - x_1^j y_2^j) \\ &= \sum_j \langle X^j, Y^j \rangle - i \sum_j \det(X^j, Y^j)\end{aligned}$$

Cette formule dit que les parties réelles et imaginaires du produit $\langle x, y \rangle$ encodent respectivement "l'orthogonalité moyenne" et la "linéarité moyenne" entre les familles de vecteurs $X^j \in \mathbb{R}^2$ et $Y^j \in \mathbb{R}^2$. L'orthogonalité d'une part parce que le produit scalaire s'annule en cas d'orthogonalité (no shit), la linéarité d'autre part car le déterminant s'annule en cas de colinéarité et moyenne car se sont des sommes sur j . **$\langle x, y \rangle = 0$ ne dit pas que les vecteurs sont à la fois colinéaire et orthogonaux parce que ce sont des valeurs moyennes (i.e. annuler une somme ne veut pas dire que chacun des termes sont nuls).**

Si maintenant on s'intéresse au cas $y = x$, on a $\forall h \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}\langle x + h, x + h \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle + \langle h, h \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \overline{\langle x, h \rangle} + \langle h, h \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\Re \langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle\end{aligned}$$

Donc si $x \in \mathbb{C}^n$ est fonction d'un paramètre t , l'égalité $\langle x, \dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \partial_t \langle x, x \rangle$ du cas réel devient :

$$\langle x | \dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \partial_t \langle x | x \rangle + i \left\langle X \left| \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \dot{X} \right. \right\rangle \quad (2.3)$$

En particulier, quand bien-même x serait de norme constante, on aurait toujours un degré de liberté pour $\langle x, \dot{x} \rangle$:

$$\|x\| = c \implies \langle x, \dot{x} \rangle = i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \dot{X} \right\rangle$$

II — Description des signaux multivariés

2.1 Point de vue des variétés

- Quel espace ? Pour la jauge invariance, c'est du $\mathbb{U}(1) \times X$ mais qui est X ?
 - les $x x^\dagger$ sont plus calculable mais isomorphe à l'espace projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$
 - Y'a aussi les Grassmanniennes $G_{n,k}(\mathbb{K})$, mais $G_{n,1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}\mathbb{C}^n$
 - En somme, sûrement que $X = \mathbb{P}\mathbb{C}^n$ (à voir comment faire les changements d'espaces)
- Ensuite, comme on a un produit(-ish), on veut un côté fibré (sûrement principale)

A ce sujet, Wikipédia dit : " La théorie des fibrés principaux recouvre la théorie des fibrés vectoriels, de leurs orientations, de leurs structures riemanniennes, de leurs structures symplectiques, etc. " (sounds reaaaally good)
- Puis une métrique pour l'espace :
 - vu que c'est complexe j'y connais R
 - mettre la bonne connexion (surement Levi-Civita)
 - Phase géo \cong transport parallèle ?
- Improbable mais on sait jamais :
 - Spin-structure ? (c'est que $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ + pas sur que ça ait de l'intérêt parce que ça existe qu'en dimension impair)
 - Espace de Siegel ? (ellipse vs ellipsoïde tout ça tout ça)

2.2 VRAC

DÉFINITION 10 (FOURIER DE SIGNAL MULTIVARIÉ) — La transformée de Fourier “faible” d’un signal multivarié est définie comme la transformée de Fourier composante par composante du signal :

$$\mathcal{F}[\mathbf{x}] = \left(\mathcal{F}[x_i] \right)_{1 \leq i \leq n}$$

En posant (suivant les notations ci-dessus) $a = \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\|_2$, \mathbf{x} s’écrit :

$$\mathbf{x}(t) = e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\varphi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\varphi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \alpha_1(t)e^{i\varphi_1(t)} \\ \alpha_2(t)e^{i\varphi_2(t)} \\ \vdots \\ \alpha_n(t)e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{S}^{n-1}$. α est donc définie à une rotation près et en notant cette rotation R_Θ , ψ s’écrit encore :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1(t)} & & & \\ & e^{i\varphi_2(t)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix} R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \\ &= a(t)e^{i\varphi(t)} e^{i\text{Diag}(\varphi_i(t))} R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \text{Diag}(e^{i\varphi_i(t)}) R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Faudra parler des propriétés des signaux multiva un peu, genre la différence pour fourier des images et des multivarées ($\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ vs $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$)
- + quelques propriétés pour les cas SA, y’a moyen que ca soit pas inintéressant

2.3 Mon blabla

PROPOSITION 5 — Les signaux bivariés se décrivent très simplement à l’aide des quaternions. En considérant $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la base canonique des quaternions \mathbb{H} , on peut voir ψ comme étant à valeur dans $\mathbb{C}_{\mathbf{j}}^n$ ($\mathbb{C}_{\mathbf{j}} := \mathbb{R} \times \mathbf{j}\mathbb{R}$), de sorte que :

$$\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \exists a, \theta, \chi, \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \psi(t) = a(t)e^{i\theta(t)} e^{-\mathbf{k}\chi(t)} e^{\mathbf{j}\varphi(t)}$$

Sous cette forme, les paramètres a et φ s’interprètent respectivement comme l’amplitude et la phase instantanée du signal. Les deux paramètres restant contrôle l’ellipticité (χ) et l’orientation (θ) de l’ellipse de polarisation instantanée. C’est-à-dire l’ellipse que suit la signal à l’instant t .

Dit autrement, à tout instant t , $\psi(t)$ est vu comme une point d’une ellipse dont la taille est caractériser par $a(t)$, l’ellipticité par $\chi(t)$ et l’orientation par $\theta(t)$. $\phi(t)$ permet lui de situer $\varphi(t)$ sur cette ellipse.

Le problème de cette représentation est qu’elle se généralise mal aux signaux plus que 2-variés et, à notre connaissance, il n’existe pas d’extensions des quaternions à de plus haute dimension. voir propositions 6 et 7, équations (2.5), (2.6) et (2.7)

Il est évident que cette représentation est présent bien plus de paramètre que nécessaire, puisse que deux devrait suffire. Pour autant, elle permet de mieux **je sais quoi mais c’est sur qu’il y’a une raison**. Si cette représentation se généralise mal parce qu’elle demanderait d’avoir une extension de \mathbb{H} , sont interprétations graphique, elle, se généralise très bien. Par exemple, en dimension 3, alors l’ellipse devient une

ellipsoïde. L'amplitude reste de dimension 1 parce qu'elle ne fait que contrôler la taille de cet ellipsoïde, mais les autres paramètres eux doivent être de dimension 2. L'ellipsoïde à besoin de deux angles pour être orienté, possède deux degrés d'ellipticité et ces points sont déterminés par deux angles.

PROPOSITION 6 — Plus généralement, tout signal multivarié ψ est (*devrait être*) caractérisé par quatre paramètres (donc $1 + (n-1)(\frac{n}{2} - 2)$ scalaires) :

$$a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \quad \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/2, \pi/2]^{\frac{n(n-1)}{2}}) \quad \chi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/4, \pi/4]^{n-1}) \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi]^{n-1})$$

À bien y réfléchir, décrire un ellipsoïde dans l'espace, c'est exactement de que font les matrices symétriques définies positives. Donc on pourrait tout à fait remplacer les informations (a, θ, χ) par une matrice symétrique positive de dimension n . Il ne resterait alors plus que φ qui, de toute façon ne devrait pas trop être lié aux autres paramètres.

Enfin, sûrement que si parce que y'a un monde pour $\varphi = 0_{\mathbb{R}}^n$ et c'est le reste des paramètres qui fait le travail. Mais clairement c'est pas intéressant comme description. L'idée serait plutôt décrire le signal ψ en minimisant les variations de (a, θ, χ) . Ça appelle clairement à chercher que dans l'espace de Siegel mais pas seulement, parce que c'est pas juste des chemins chez Siegel qui nous intéresse.

Ou alors c'est le jeu de jauge qui fait qu'on tue φ ? auquel cas tout les jours Siegel.

BTW, les quaternions c'est fait pour décrire les rotations et c'est (quasiment) ce qu'on fait avec, donc aller chercher dans un espace de matrices pour généraliser le principe c'est pas déconnant. D'ailleurs, vu que c'est pas exactement ce qu'on fait avec, dans quelle mesure c'est pas le cas et est-ce qu'on exploite vraiment la structure des quaternions ?

PROPOSITION 7 — Autre approche : un signal multivarié étant moralement un chemin de \mathbb{R}^n , son graphe est une variété (plongée) de dimension 1. Sachant cela, si en chaque instant on veut définir l'ellipsoïde sur laquelle elle repose à un instant t , il est morale que cette ellipsoïde soit en fait une ellipse puisque c'est elle-même une variété de dimension 1.

Partant de là, on aurait toujours a , χ et ϕ pour la décrire et seulement θ gagnerait en dimension pour pouvoir orienter l'ellipse dans les n axes. ψ serait alors la données de $3 + \frac{n(n-1)}{2}$ paramètres :

$$a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \quad \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi]^{\frac{n(n-1)}{2}}) \quad \chi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/4, \pi/4]) \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi])$$

On aurait beaucoup moins de paramètre et c'est quand-même bien. En même temps ça paraît plus contraignant comme modèle. Pour comparer les deux, il faudrait voir comment les deux se décomposant dans le cas d'un signal qui ne varierait sur une ellipsoïde fixe. *i.e.* dans un cas où θ, χ de la proposition 6 varie pas alors que ceux de la proposition 7 si.

III — Vrac

3.1 Random stuff ready pour rédac (+labeled)

DÉFINITION 11 (SIGNAL MULTIVARIÉ) — Une *signal multivarié*, ou *n-varié*, est un vecteur composé de $n \in \mathbb{N}^*$ signaux x_i . Si $n = 2$, alors on parle de signal *bivarié*.

Dans la continuité de ce qui à été dit dans la sous-section 1.2.1, dans le cas des signaux réels, on s'intéressera au vecteur composé des transformées en SA (eq. 1.11, déf. 6) des x_i . **Au moins dans toute cette section**, un tel signal sera noté :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ x_+(t) : t &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathcal{A}[x_1] \\ \mathcal{A}[x_2] \\ \vdots \\ \mathcal{A}[x_n] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On supposera que chaque composante x_i de \mathbf{x} aura autant de régularité et de condition d'intégrabilité que nécessaire (**il vaudra préciser lesquelles à un moment**).

DÉFINITION 12 — Ainsi, il reste tout un degré de liberté au produit $\langle x, \dot{x} \rangle$ même si $x \in \mathbb{S}^{2n}$. En intégrant ce degré de liberté supplémentaire, c'est-à-dire en tenant compte de son évolution sur la période $[t_0, t]$, l'on obtient ce qui est appelé la *phase dynamique* :

$$\Phi_{\text{dyn}} := \Phi_{\text{dyn}}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Im \langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle ds$$

Elle dynamique en cela qu'elle est propre au variation de ψ et qu'elle considère tout l'évolution de ψ : ça dynamique.

DÉFINITION 13 (CONNEXION DE BERRY) — On appelle *connexion de Berry* le champ de forme linéaire :

$$\forall \psi \in \mathcal{M}, \quad A_\psi : \begin{array}{ccc} T_\psi \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & \Im \langle \psi(s) | \phi(s) \rangle \end{array} \quad (2.4)$$

Elle a rien d'une connexion par contre :/

3.2 Bilan des formules

- Les phases de ψ entre les instants t_0 et t :

$$\Phi_{\text{tot}}(\psi, t_0, t) := \arg \langle \psi(t_0) | \psi(t) \rangle = \arctan \left(-\frac{\langle \psi(t_0), \omega \psi(t) \rangle}{\langle \psi(t_0), \psi(t) \rangle} \right) \quad (2.5)$$

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) := \Im \int_{t_0}^t \langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle ds \quad (2.6)$$

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) := \Phi_{\text{tot}}(\psi, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) \quad (2.7)$$

- (conservative) Équation Schrödinger et de Liouville-von Neumann ($h(R)$: Hamiltonien des paramètres R , W : opérateurs statistique) [1, p.6] :

$$i \frac{d\psi(t)}{dt} = h(R)\psi(t) \quad (2.8)$$

$$i \frac{dW(t)}{dt} = [h(R), W(t)] \quad [\cdot, \cdot] = \text{commutateur ?} \quad (2.9)$$

- Moment angulaire (viteuf) $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$M(t) = \Re(i z \bar{z}') = -\Im m z \bar{z}' \quad \text{thoughts ?} \quad (2.10)$$

3.3 Thoughts

- Si la phase géo est la phase dyn - phase tot et est invariante as jauge t, est-ce que la phase tot correspond à la phase (dyn) entre t_0 et t suivant la géodesique ?
- La “Berry connection” c'est une vraie connexion ? elle est où la covariance alors ?

- “horizontal lift” : pourquoi horizontal ? en quel sens ? (parce que fibré)

- Fréquence de Rubi
- Matrice/base de Pauli et généralisation, groupe $SU(n)$ (un peu de quantique ?)
- Monopole de Dirac + lien avec la phase géo (un peu d'électro-magnétisme ?)
- Invariant de Bargmann + série de Dyson

Différence entre phase instant par nous et par moment (34, syrile)

Refaire les calculs de la phase tot

TABLE DES FIGURES

TABLE DES CODES

RÉFÉRENCES

- [1] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [2] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [3] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [4] J. LEFEVRE, *Polarization analysis and optimization geometry*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....] ; University of Melbourne, Dec. 2021.
- [5] J. LILLY AND S. OLHEDE, *Bivariate Instantaneous Frequency and Bandwidth*, IEEE Transactions on Signal Processing, 58 (2010), pp. 591–603.
- [6] J. M. LILLY, *Modulated Oscillations in Three Dimensions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 59 (2011), pp. 5930–5943.
- [7] J. M. LILLY AND J.-C. GASCARD, *Wavelet ridge diagnosis of time-varying elliptical signals with application to an oceanic eddy*, Nonlinear Processes in Geophysics, 13 (2006), pp. 467–483.
- [8] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [9] S. WANG, *Simple proofs of the Bedrosian equality for the Hilbert transform*, Science in China Series A: Mathematics, 52 (2009), pp. 507–510.