

Mémoire de Stage de M2

PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ... ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Pierre-Olivier AMBLARD, Julien FLAMANT & Michel
BERTHIER

Master MIX – Université de La Rochelle

2024 – 2025

TABLES DES MATIÈRES

Introduction & préambule	1
<hr/>	
PARTIE I — ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME	3
<hr/>	
I — Cadre d'étude.	3
1.1 \mathbb{PC}^n vue comme variété différentielle	3
1.1.1 Rappels de géométrie différentielle et notations	3
1.1.2 \mathbb{PC}^n , une variété complexe.	5
1.2 \mathcal{S}^{2n+1} comme fibré principal	6
1.2.1 Définition générale.	6
1.2.2 Le fibré $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{PC}^n)$	8
1.3 Connexion et relèvements horizontaux	10
1.3.1 Définition générale.	10
1.3.2 Choix de connexion sur $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{PC}^n)$	12
II — Interprétation des phases sur $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{PC}^n)$	13
2.1 Fréquence instantanée et phase dynamique sur $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{PC}^n)$	13
2.2 Phase géométrique dans le cas cyclique	14
2.2.1 ... du point de vue de la connexion.	14
2.2.2 ... du point de vue de la métrique	16
2.3 Phase géométrique dans le cas le plus générale	16
2.3.1 Les géodésiques et leurs phases.	16
2.3.2 Phase géométrique dans le cas le plus générale	18
III — Conclusion	18
<hr/>	
— ANNEXES	20
<hr/>	
Annexes de la partie I	20
Annexes de la partie II	20
Table des figures & références	21

TO DO DE LA FIN :

- intro partie III & fin de la partie Bargmann
- préambule compréhensible + table des notations
- nettoyer les annexes et leur tête dans le toc
- figures manquantes
- Nettoyage codes et GitHub
- Bonus : chopper des refs pour les infos partie III.2

AVEC GABRIEL :

- check les ref figures/sections
- check homogénéité des notation (genre i pour les complexes)
- ref (si manquante ou pas assez)

INTRODUCTION

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui nécessite beaucoup de contexte pour être mis en évidence. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant t d'un signal multivarié complexe (*i.e.* à valeurs dans \mathbb{C}^n) \mathbf{x} est donnée par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle - \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\mathbf{x}(t) \rightsquigarrow \mathbf{x}'(t) = e^{i\alpha(t)} \mathbf{x}(t)$$

Elle est également invariante par reparamétrisation et pour ces raisons, c'est une mesure qui est intrinsèquement liée à la trajectoire du signal dans l'espace, à sa géométrie.

La phase géométrique est un phénomène qui apparaît dans de nombreuses circonstances, en fonction desquelles elle peut changer de nom et de forme : phase de Pancharatnam, de Berry, d'Aharonov-Anandan, d'Aharonov-Bohm, angle de Hannay, *etc.*

Les articles [7, 21] en présentent quelques unes et le livre “*Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*” [6] de Chruściński & Jamiolkowski en fait une description plus qu'extensive.

Du point de vue du traitement du signal en revanche, rien n'a été fait et ce n'est que récemment que Le Bihan, Flamant & Amblard s'y sont intéressés [15, 16]. L'objectif de ce mémoire est donc de décrire la phase géométrique dans le cadre du traitement du signal et de discuter de ses applications :

- Dans un premier temps (??), cette phase sera mise en évidence à travers des concepts d'analyse temps-fréquence, notamment la notion de fréquence instantanée qui sera présente tout au long de l'écrit. Suite à quoi elle sera explicitement calculée dans un cas particulier de signaux, déjà étudié par Le Bihan *et al.* [16] : les signaux AM-FM-PM. Cela permettra de mieux comprendre son comportement et permettra de motiver une description des signaux multivariés complexes dans l'esprit de l'analyse temps-fréquence.
- Cela mènera à travailler dans une variété dite fibrée principale, $S^{2n-1}(\text{U}(1), \text{PC}^{n-1})$, et la seconde partie de ce mémoire sera dédiée à son formalisme. Contrairement à l'état de l'art, les résultats seront présentés d'un point de vue de mathématicien plus que de physicien et, entre autre, l'accent sera mis sur l'intuition géométrique derrière les concepts abordés. Des résultats, connus par ailleurs, sur la phase géométrique seront redémontrés avec ce formalisme et avec, les notions de fréquences instantanées et de phase géométrique seront reformulées et réinterprétées.
- Enfin, dans une troisième partie, sera présenté un moyen de calculer la phase géométrique en pratique via l'invariant de Bargmann, tiré de [20] et déjà repris par Le Bihan *et al.* [16]. Seront ensuite discutées diverses applications *et là ça dépend d'à quel point j'ai le temps.*

* PRÉAMBULE

Juste des notes, même pas sur qu'il y ait vraiment besoin de garder ce préambule

Généralités :

- Les références sont en fin de mémoire est en .bib sur le [GitHub](#)
- Idem pour les codes et un mot sur `pygeomphase`
- On va parler de géo diff et pour éviter de réécrire un livre, on va admettre beaucoup de résultats, on renvoi vers [14, 8] pour les bases et [18, 19, 2] pour toute ce qui est variété fibrée principales et variétés complexes.

Notations math :

- Convention sur le produit hermitien (conjugué à droite)
- les vecteurs seront en gras, leur dérivée en temps notée par un point (ex. : $\dot{\mathbf{x}}(t)$) et celle des scalaires seront noté par un prime (ex. : $a'(t)$)

PARTIE I

ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME

Dans cette seconde partie, l'objectif est de décrire la phase géométrique dans son environnement naturel, les variétés fibrées principales. Cela se fera en deux temps.

D'abord, S^{2n-1} sera proprement décrite comme une variété fibrée. Ce faisant, les outils mise en jeu seront exposés avec détail, dans le but de simplifier la généralisation des résultats au cas non commutatif. Lequel sera abordé à la fin de ce mémoire.

Ensuite, des résultats sur la phase géométrique, déjà bien connus dans des cadres spécifiques¹ [3, 5, 17, 6] seront redémontrés dans un cadre plus général : celui de chemins quelconques de S^{2n-1} . Cela permettra de donner une nouvelle interprétation des outils géométrique en terme de signal.

Enfin, par souci de comidité, on se placera dans \mathbb{C}^{n+1} et l'on notera la sphère unité de se dernier $\mathbb{S}^n := S^{2n+1}$ (n ne correspond pas à la dimension de la sphère !).

I — Cadre d'étude

Pour proprement poser le cadre, il nous faudra trois ingrédients :

1. D'abord, faire quelques rappels de géométrie différentielle, ne serait-ce que pour fixer les notations (*ss-sec. 1.1.1*), avec comme exemple le cas $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ (*ss-sec. 1.1.2*), qui sera utile plus loin.
2. Ensuite, seront définies les variétés fibrées principales, avec les outils de bases qui leurs sont associés (*ss-sec. 1.2.1*), puis $U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n$ sera écrit comme telle (*ss-sec. 1.2.2*).
3. Enfin, il nous faudra définir une connexion sur ces fibrés, connexion qui sera, d'abord, définie de façon générale (*ss-sec. 1.3.1*), puis explicitée et interprétée dans le cas qui nous intéresse (*ss-sec. 1.3.2*).

1.1 $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ vue comme variété différentielle

1.1.1 Rappels de géométrie différentielle et notations

Une variété différentielle se définit comme suit :

DÉFINITION 1 (VARIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE) — une variété différentielle de classe C^k de dimension n est un espace topologique \mathcal{M} munie d'un *atlas* $\{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$, c'est-à-dire un ensemble finie de paires d'ouverts $U_i \subset \mathcal{M}$ et d'applications $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

- les U_i forme un recouvrement de la variété : $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathcal{M}$
- les ϕ_i sont des homéomorphismes sur leurs images respectives $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$.

¹Généralement des systèmes quantiques soumis à l'équation de Schrödinger.

- si l'intersection $U_i \cap U_j$ est non vide, alors $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}$ est un C^k difféomorphisme sur son image.

A travers ϕ_i , à tout point $x \in U_i$ sont associées des *coordonnées locales* $(x^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$, c'est-à-dire les coefficients de $\phi_i(x)$ dans une base $(e_\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$ de \mathbb{R}^n . Ces coordonnées sont dites locales car dépendantes du choix de la paire (U_i, ϕ_i) et la composée $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}$ est vue comme un *changement de coordonnées*.

Dans toute la suite, toutes les objets propre aux cartes seront indexés via l'alphabet latin (i, j, k) et les indices associés aux coordonnées locales par des lettres grecs (μ, ν, α) .

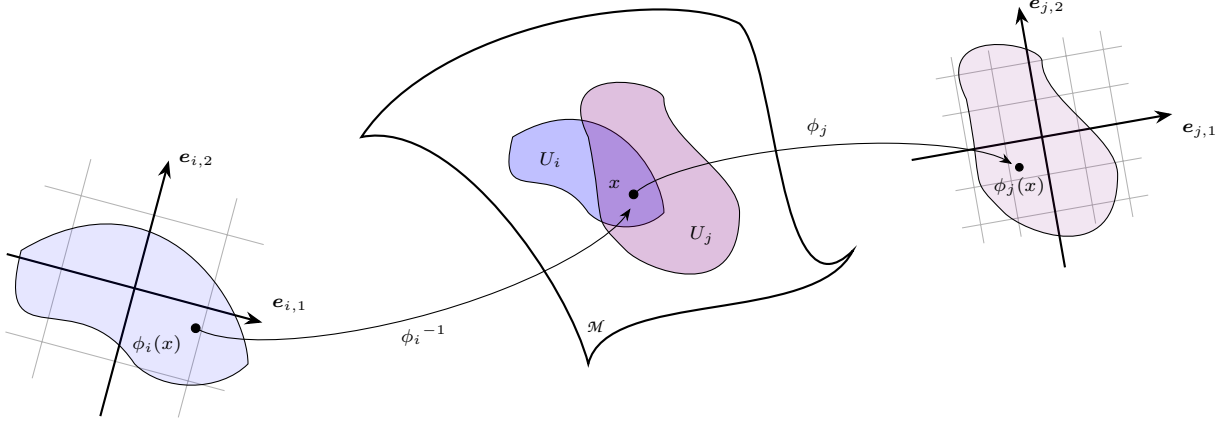


fig. 1.1 — La première figure de tout bon livre de géométrie différentielle : représentation de deux cartes avec l'application de changement de coordonnées. On y voit qu'à un point x peut être associée différentes coordonnées locales et que $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ permet de passer d'un repère à l'autre, i.e. d'un système de coordonnées à l'autre.

Ensuite, les *espaces tangents* de \mathcal{M} et son fibré tangent seront respectivement notés :

$$\forall x \in \mathcal{M}, T_x \mathcal{M} \quad \text{et} \quad T\mathcal{M} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} T_x \mathcal{M} \quad (1.1)$$

Pour le dire rapidement, les vecteurs tangents agissent comme une dérivation en cela que, pour une chemin $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, la différentielle au point $x = \gamma(0)$ est définie par l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \dot{\gamma}_x : f &\longmapsto \left. \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \right|_{t=0} := \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Aussi, le système de coordonnées locales en $x \in \mathcal{M}$ induit une base sur $T_x \mathcal{M}$, qui sera noté $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. notation qui est justifiée en cela que, intuitivement, ∂_μ dérive toute fonction test $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ dans le long de la μ^{eme} coordonnée (locale) de x .

Plus généralement, si \mathcal{M} et \mathcal{N} sont deux variétés différentielles et $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ une application différentiable avec $\{\partial_\nu\}_\nu$ une base de $T\mathcal{N}$, sa *différentielle* (ou *application tangente* ou *push forward*) au point x est l'application linéaire qui, avec les conventions de sommation d'Einstein, s'écrit en coordonnées locales :

$$f_*(v) = f_*(v^\mu \partial_\mu) = \partial_\mu(f^\nu) v^\mu \tilde{\partial}_\nu \quad \text{ou encore} \quad (f_*)^\nu_\mu = \partial_\mu(f^\nu)$$

A partir de f_* est définie l'*image réciproque* ou *pull back* de f , qui correspond intuitivement à la transposée de f_* (dans ce cas, $T^* \mathcal{M}$ est identifié à $T\mathcal{M}$). Formellement elle est définie par dualité :

$$\begin{aligned} f^* : T^* \mathcal{N} &\longrightarrow T^* \mathcal{M} \\ g &\longmapsto g \circ f_* \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{M} & \xrightarrow{f_*} & T\mathcal{N} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^* \mathcal{M} & \xleftarrow{f^*} & T^* \mathcal{N} \end{array}$$

fig. 1.2 — Diagramme de passage de f à f_* et f^* .

où $T^*\mathcal{M}$ est le fibré cotangent, constitué des espaces duaux aux espaces tangents :

$$T^*\mathcal{M} := \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} (T_x \mathcal{M})^*$$

1.1.2 $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, une variété complexe

Si l'espace projectif complexe à été présenté comme le quotient $\mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1)$, il peut aussi être vu comme :

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^*$$

C'est-à-dire l'ensemble des classes de $\mathbb{C}^{n+1*} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n+1}}\}$ par la relation d'équivalence :

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid x = \lambda y$$

En isolant la norme des vecteurs, \mathbb{C}^{n+1*} peut être vu comme le produit $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^n$, et de même pour \mathbb{C}^* avec le module :

$$\mathbb{C}^{n+1*} \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^n \qquad \mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathrm{U}(1)$$

Ainsi, le quotient par \mathbb{C}^* revient à regarder les vecteurs de \mathbb{C}^{n+1*} modulo leur norme, puis modulo l'action de $\mathrm{U}(1)$. Or, ignorer la norme des vecteurs est équivalent à ne regarder que les vecteurs normés, donc appartenant à \mathbb{S}^n . De façon informelle, on pourrait alors écrire² :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^* &\cong \mathbb{C}^{n+1*}/(\mathbb{R}^* \times \mathrm{U}(1)) \\ &\cong (\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{R}^*)/\mathrm{U}(1) \\ &\cong \mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1) = \mathbb{P}\mathbb{C}^n \end{aligned}$$

L'intérêt de cette écriture et que \mathbb{C}^{n+1} est un espace vectoriel, ce qui permet de décrire $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ en terme de carte [14, lemme 2.17, p. 64], [2, chap. 2], ce qui se fait comme suit. La classe de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ de représentant $z = (z^i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1*}$ est notée $[z]$ et on pose, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$U_i = \left\{ [z] \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n \mid z \in \mathbb{C}^{n+1}, z^i \neq 0 \right\} \qquad \phi_i : \begin{array}{ll} U_i & \longrightarrow \mathbb{C}^i \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-i} \cong \mathbb{C}^n \\ [z] & \longmapsto \frac{1}{z^i} z = (z^0/z^i, \dots, 1, \dots, z^n/z^i) \end{array} \quad (1.3)$$

Si l'ensemble d'arrivée $\phi_i(U_i)$ est équivalent à un ouvert de \mathbb{C}^n (l'une des composantes est constante), il est plus commode de travailler dans \mathbb{C}^{n+1} puisque cela évite de devoir enlever et rajouter des coefficients dans les formules de changement de cartes :

$$\forall z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z^{i,j} \neq 0 \quad (\text{i.e. } [z] \in U_i \cap U_j), \quad \phi_i \circ \phi_j^{-1}(z) = \frac{z^j}{z^i} z$$

Les (U_i, ϕ_i) forment un atlas sur l'espace projectif complexe, faisant de ce dernier une variété de dimension $\dim = 2n$. Les $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ étant holomorphes, $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est plus précisément une variété complexe de dimension complexe n et il est utile d'écrire ses coordonnées locales sous la forme $(w^\mu, \bar{w}^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$, où :

$$\forall w \in U_i, \forall \mu \neq i, \quad w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i}, \quad \text{où} \quad [z] = w$$

En annexe ?? se trouvent plus de détails sur les variétés différentielles complexes. Pour aller à l'essentiel,

²Ce qui s'écrit plus justement avec le troisième théorème d'isomorphisme :

$$\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{R}^{+*})/(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^{+*}) \cong \mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1) = \mathbb{P}\mathbb{C}^n$$

même si la notation prête à confusion, il faut considérer les coordonnées w^μ et \bar{w}^μ comme complètement indépendantes. Par exemple, :

$$\begin{aligned}\partial_\mu(w^\mu) &= \frac{\partial}{\partial w^\mu} w^\mu = 1 & \partial_{\bar{\mu}}(w^\mu) &= \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\mu} w^\mu = 0 \\ \partial_\mu(\bar{w}^\mu) &= \frac{\partial}{\partial w^\mu} \bar{w}^\mu = 0 & \partial_{\bar{\mu}}(\bar{w}^\mu) &= \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\mu} \bar{w}^\mu = 1\end{aligned}$$

Ce qui fait que $(w^\mu, \bar{w}^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$ est bien une base de dimension réelle $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\mathbb{C}^n = 2n$. Par exemple, avec ces “notations” (cf. annexe ??), le fait qu’une fonction $f : \mathbb{P}\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ soit holomorphe s’exprime via l’égalité :

$$\forall \mu \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (f_*)_{\bar{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\mu} f = 0$$

Pour ce qui est des espaces tangents, $(\partial_\mu, \partial_{\bar{\mu}})_\mu$ forme une base de $T\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ et $(dw^\mu, d\bar{w}^\mu)_\mu$ une base de $T^*\mathbb{P}\mathbb{C}^n$. Dans ce contexte, un champs de forme bilinéaire g (tenseur de type $(0,2)$) a quatre types de composantes :

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &= g(\partial_\mu, \partial_\nu) & g_{\mu\bar{\nu}} &= g(\partial_\mu, \partial_{\bar{\nu}}) \\ g_{\bar{\mu}\nu} &= g(\partial_{\bar{\mu}}, \partial_\nu) & g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} &= g(\partial_{\bar{\mu}}, \partial_{\bar{\nu}})\end{aligned}$$

L’espace projectif complexe, en particulier, admet un produit hermitien, la *métrique de Fubini-Study*, qui est donnée par [18, sec. 8.5], [2, chap. 4] :

$$\begin{aligned}\forall w \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_w \mathbb{P}\mathbb{C}^n, \quad g_w(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= g_{\mu\bar{\nu}} u^\mu \bar{v}^\nu = 2 \frac{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha) \delta_{\mu\nu} - w_\mu \bar{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} u^\mu \bar{v}^\nu \\ &= \frac{2}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} u^\mu \bar{v}_\mu - \frac{2w_\mu \bar{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} u^\mu \bar{v}^\nu\end{aligned} \quad (1.4)$$

À noter que seul les coefficients $g_{\mu\bar{\nu}}$ apparaissent. Cela est dû à la symétrie hermitienne de g , ce qui impose $g_{\mu\nu} = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$ et $g_{\bar{\mu}\nu} = \overline{g_{\mu\bar{\nu}}}$.

Enfin, et ce sera important pour la suite, g induit sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ une forme symplectique – dite de Kähler – qui s’interprète comme l’élément d’aire sur la variété induite par g et qui s’écrit :

$$\Omega = \Omega_{\mu\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu = i g_{\mu\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu$$

Dans la définition de g (1.4), le coefficient peut varier. Par exemple, dans [18] vaut 1 alors que dans [12] il vaut $1/2\pi$. Ici, il a été choisi de le prendre égale à 2, ce qui n’est pas usuelle, mais qui sera nécessaire pour la suite (??). En quelques mots, c’est pour les même raisons que, dans la ?? précédente, la sphère de Poincaré était paramétrée par les angles doubles $(2\theta, 2\chi)$.

1.2 S^{2n+1} comme fibré principal

Cela étant, il est temps de définir proprement ce que l’on entend par “ \mathbb{S}^n est équivalent localement à $\mathbb{P}\mathbb{C}^n \times \mathbb{U}(1)$ ”.

1.2.1 Définition générale

Pour le dire simplement, les *variétés fibrées* sont des variétés qui ressemblent localement à des espaces produits. Le ruban de Möbius en est un exemple typique : il ne peut pas s’écrire comme le produit d’un cercle avec un segment $S^1 \times [0, 1]$ à cause de la façon dont il est construit. Mais localement, une tranche du ruban est tout à fait comparable (*i.e.* difféomorphe) à un tel produit (cf. fig. 1.3).

Il existe tout un bestiaire de variétés fibrées en fonction de leurs propriétés et, parmi elles, celles qui vont nous intéresser sont dites principales :

DÉFINITION 2 (VARIÉTÉ FIBRÉE PRINCIPALE) — Une *variété fibrée principale* (VFP), ou *fibré principal* est constituée de deux variétés différentielles P et B telles que :

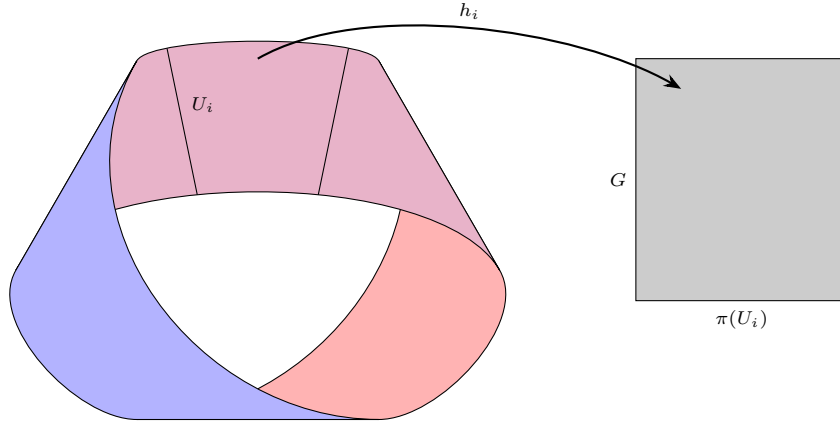


fig. 1.3 — Représentation du ruban de Möbius en tant que fibré. Les notations sont reprises de la définition 2.

- Il existe un groupe de Lie G opérant à droite (ou à gauche) sur P via l'application différentiable :

$$R : \begin{array}{ccc} P \times G & \longrightarrow & P \\ (p, g) & \longmapsto & R_g(p) := p \cdot g = pg \end{array} \quad (1.5)$$

- Il existe une surjection différentiable $\pi : P \longrightarrow B$ telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}(\pi(p)) = pG \quad (1.6)$$

- P est munie d'un ensemble de paires (U_i, h_i) tel que les U_i forment un recouvrement de B et tel que les $h_i : G \times U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset P$ soient des difféomorphismes vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \forall x \in B, \quad h_i(ab, x) = h_i(a, x) \cdot b \quad \text{et} \quad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

La variété B est appelée la *base* de la VFP, G son *groupe structural* et pG la *fibres* de P passant par p et au dessus de $\pi(p) \in B$. Le tout est notée $P(R, G, \pi, B)$ ou plus simplement $P(G, B)$.

Les fibres pG sont toutes difféomorphes à G et B est difféomorphe à P/G . Le diagramme commutatif ci-contre résume la situation (pr_2 est la projection canonique sur la deuxième composante du produit cartésien).

$$\begin{array}{ccc} G \times U_i & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U_i) \subset P \\ \text{pr}_2 \downarrow & \swarrow \pi & \\ U_i & & \end{array}$$

L'ensemble $\{(U_i \times G, h_i^{-1})\}_i$ est l'équivalent d'un atlas pour les variétés différentielles classiques mais adapté pour tenir compte de l'aspect fibrée de P et de l'action de G . Expliciter les changements de cartes dans P , ce fait comme suit.

D'abord, P étant localement difféomorphe à un produit $G \times U_i$, on peut y tracer des graphes appelés *sections locales*, comme sur les figures 1.4 et 1.5 ci-dessous. Formellement, une section locale au dessus de $U_i \subset B$ est une application $\sigma : U_i \longrightarrow P$ vérifiant :

$$\pi \circ \sigma = \text{id}|_{U_i}$$

Ensuite, les hypothèses sur $P(G, B)$ sont telles que G agit transitivement et librement (ou sans point fixe) sur P . C'est-à-dire que, sur une même fibre, tout point peut être atteint par n'importe quel autre via l'action de G (transitivité) :

$$\forall x \in B, \quad \forall p, q \in P_x, \quad \exists t(p, q) \in G \mid p = q \cdot t(p, q)$$

et que la seule façon de laisser les points invariants par cette même action est de passer par l'élément neutre e (libre) :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad p = p \cdot g \implies g = e$$

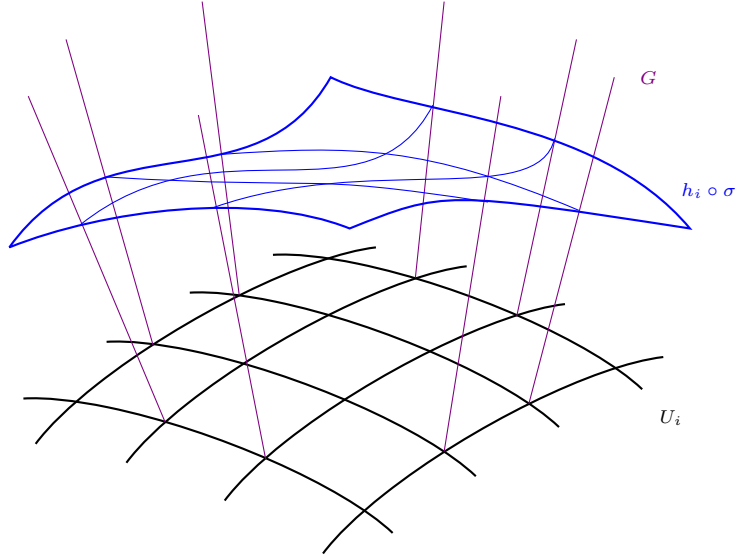


fig. 1.4 — Représentation d’une section locale σ au dessus de $U_i \subset B$ de dimension 2. Comme P n’est pas un produit à proprement parlé, σ est représenté dans $G \times U_i$ à travers h_i .
On voit ici l’idée derrière le nom “fibré” : de la base partent toutes les fibres, comme le feraient les fibres d’un tronc d’arbre et une section est littéralement une section, une coupe, de ces fibres.

De la transitivité de G , découle le fait que toutes les sections locales σ au dessus de U_i peuvent s’écrire à partir d’une même section σ_i via la formule :

$$\forall x \in B, \quad \sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma(x))$$

Son caractère libre, lui assure l’unicité d’un choix canonique de section σ_i sur U_i :

$$h_i(x, e) = \sigma_i(x)$$

Cela mène à la définition :

DÉFINITION 3 (FONCTIONS DE TRANSITIONS) — À l’intersection entre deux cartes $U_{ij} := U_i \cap U_j$, le passage d’une section locale canonique à une autre se fait via :

$$\forall x \in U_{ij}, \quad \sigma_j(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma_j(x))$$

L’élément de G , $t(\sigma_i, \sigma_j)$, qui permet de faire le changement, est alors appelé *fonction de transition* et sera noté φ_{ij} . Elle fait effectivement la transition entre les cartes h_i et h_j en cela que :

$$\forall (g, x) \in G \times U_{ij}, \quad h_i^{-1} \circ h_j(g, x) = (\varphi_{ij}(x)g, x)$$

1.2.2 Le fibré $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathrm{PC}^n)$

Dans ce travail, \mathbb{S}^n fait office d’espace total avec pour base PC^n et pour groupe structural $\mathrm{U}(1)$. Pour obtenir la projection de \mathbb{S}^n sur PC^n , il suffit de prendre la restriction de π à \mathbb{S}^n . En tenant compte de la normalisation, les coordonnées locales sur PC^n se réécrivent, $\forall w \in U_i$:

$$w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i} = \frac{z^\mu}{|z^i|e^{i \arg(z^i)}} = \frac{z^\mu}{\sqrt{1 - \sum_{\nu \neq i} |z^\nu|^2}} e^{-i \arg(z^i)} \quad \text{car} \quad \sum |z^\nu|^2 = \|z\|^2 = 1$$

On constate bien que w^μ n’est défini par rapport à z^μ qu’à un choix de phase $e^{-i \arg z^i} \in \mathrm{U}(1)$ près. À

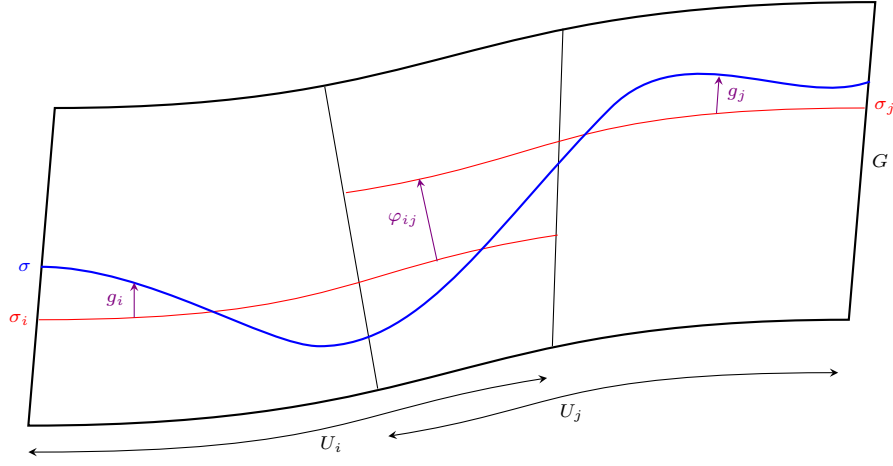


fig. 1.5 — Représentation de deux sections canoniques $\sigma_{i,j} = h_{i,j}(e, \cdot)$ au dessus de deux cartes U_i et U_j avec la fonction de transition φ_{ij} (def. 3). Est également représentée une section σ quelconque avec les translations $g_{i,j}$ telles que $\sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot g_i(x) = \sigma_j(x) \cdot g_j(x)$.

l'inverse, un représentant z_i dans \mathbb{S}^n de $w \in U_i$ aura pour coefficient :

$$\forall \mu \neq i, \quad z_i^\mu = \frac{w^\mu}{\|w\|} e^{i\theta} \qquad z_i^i = \frac{1}{\|w\|} e^{i\theta}$$

La norme de w étant à comprendre au sens des coordonnées locales sur U_i ³ :

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|(w^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}\|^2 = \frac{1}{|z_i^i|^2} \sum_{\nu \neq i} |z_i^\nu|^2 = \frac{1 - |z_i^i|^2}{|z_i^i|^2} \iff |z_i^i|^2 \|w\|^2 = 1 - |z_i^i|^2 \\ &\iff |z_i^i|^2 = \frac{1}{1 + \|w\|^2} \\ &\iff |z_i^i| = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} \end{aligned}$$

D'où l'expression des coefficients de $z_i \in \mathbb{S}^n$:

$$\forall \mu \neq i, \quad z_i^\mu = \frac{w^\mu}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta} \qquad z_i^i = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta}$$

Tout cela permet d'écrire \mathbb{S}^n comme une variété fibrée principale :

PROPOSITION 1 — La $(2n+1)$ -sphère \mathbb{S}^n , vue comme variété plongée dans \mathbb{C}^n est une VFP de base $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ et de fibre type $U(1)$. L'action de $U(1)$ sur \mathbb{S}^n est induite par la multiplication par un scalaire complexe et où :

- La fibration π est la projection canonique de \mathbb{S}^n sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$:

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}\mathbb{C}^n \\ z & \longmapsto & [z] \end{array} \quad (1.7)$$

- Les cartes locales h_i s'écrivent :

$$\forall w \in U_i, \quad \forall e^{i\theta} \in U(1), \quad h_i(w, e^{i\theta}) = \frac{(w^0, \dots, 1, \dots, w^n)}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta} \in \mathbb{S}^n \quad (1.8)$$

³ C'est un abus de notation, w n'a pas de norme en ce sens là puisqu'elle dépend du choix de carte U_i . Mais ici tout le raisonnement est purement local, donc ce n'est pas un problème.

- Les sections canoniques σ_i au dessus des U_i , elles, sont définies par :

$$\forall w \in U_i, \sigma_i(w) = h_i(w, 1) = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \overline{w}_\nu}} (w^0, \dots, 1, \dots, w^n) \quad (1.9)$$

- Les fonctions de transitions entre deux cartes U_i et U_j s'écrivent :

$$\varphi_{ij}(w) = e^{-i \arg(z_i^i)} e^{i \arg(z_j^j)} \quad \text{où} \quad z_{i,j} = \phi_{i,j}(w) \quad (1.10)$$

Le cadrer étant planement posé, *blabla on va passer au interprétation / calcul des phase et c'est super*

1.3 Connexion et relèvements horizontaux

Le cadre étant posé, pour retrouver la notion de fréquence instantanée, il est nécessaire de munir $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$ d'une connexion. Cette dernière est introduite comme suit.

1.3.1 Définition générale

Comme P ressemble localement à un produit $G \times U_i$, il est utile de séparer ses espaces tangents $T_p P$ comme une somme directe d'espaces tangents respectivement aux fibres et à la base. Conformément aux représentations précédentes (fig. 1.3 à 1.5), les premiers sont appelées espaces tangents *verticaux*, les seconds *horizontaux* et l'on note :

$$\forall p \in P, \quad T_p P = V_p P \oplus H_p P$$

Les tangents verticaux $V_p P$ se définissent canoniquement via π , en tant que noyau de sa différentielle :

$$V_p P := \text{Ker}(T_p \pi) = \{v \in T_p P \mid T_p \pi(v) = 0\}$$

Ce n'est en revanche pas le cas des espaces horizontaux. Il faut donc faire un choix pour les $H_p P$ et c'est ce choix qui est appelé *connexion* (elle connecte les espaces tangents entre eux). Comme pour les verticaux, ces sous-espaces peuvent être caractérisés par une 1-forme différentiable ω sur P à valeur dans VP , auquel cas :

$$\forall p \in P, \quad H_p P = \text{Ker}(\omega_p)$$

Dans le cas des VFP, une connexion doit en plus avoir de bonnes propriétés au regard de l'action de G sur P , aboutissant à la définition :

DÉFINITION 4 (CONNEXION SUR VFP) — Une *connexion* sur une VFP $P(G, B)$ est la donnée d'un sous-espace tangent, $H_p P \subset T_p P$, en tout point de $p \in P$ tel que :

- $H_p P$ dépend différentiellement de p ("dépendre différentiellement" à un sens précis pour les sous-espaces mais qui ne sera pas utile pour la suite).
- $H_p P$ est supplémentaire à $V_p P$ dans $T_p P$:

$$T_p P = V_p P \oplus H_p P \quad (1.11)$$

- l'assignation des $H_p P$ est invariante par l'action de G au sens où :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad H_{R_g(p)} P = R_{g*}(H_p P) = \{R_{g*}(v) \mid v \in H_p P\} \quad (1.12)$$

Que l'on notera plus simplement :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad H_{p \cdot g} P = H_p P \cdot g = \{v \cdot g \mid v \in H_p P\} \quad (1.13)$$

Au delà d'assurer une compatibilité entre H et G , l'équation (1.12) permet de n'avoir à définir la connexion qu'en un seul point de chaque fibre, les autres se déduisant par cette formule. Concrètement, pour tout point

de la base $x \in U_i$, il suffit de la définir en $\sigma_i(x) = h_i(e, x)$, de sorte que l'espace horizontal en tout autre point $p = h_i(g, x) = \sigma_i(x) \cdot g$ au dessus de x sera donné par :

$$H_p P = H_{\sigma_i(x)} P \cdot g$$

Aussi, le fait que G soit un groupe de Lie permet de lier son algèbre $\mathfrak{g} \cong T_e G$ aux tangents verticaux via l'application $\#$: ⁴

$$\forall (p, A) \in P \times \mathfrak{g}, \forall f \in \mathcal{C}(P, \mathbb{R}), \quad A^\#(p) = \left. \frac{d}{dt} p \cdot \exp(tA) \right|_{t=0} \in V_p P \quad (1.14)$$

Sachant cela, toujours dans le cas des VFP, la 1-forme de connexion est à valeur dans \mathfrak{g} :

DÉFINITION 5 (1-FORME DE CONNEXION) — La 1-forme de connexion ω d'une VFP $P(G, B)$ est définie comme la 1-forme différentiable sur P à valeur dans \mathfrak{g} (i.e. en tout point $p \in P$, ω_p est à valeur de $T_p P$ dans \mathfrak{g}), telle que $\forall p \in P$:

$$\forall A \in \mathfrak{g}, \omega_p(A^\#(p)) = A \quad H_p P = \text{Ker}(\omega_p) \quad (1.15)$$

$$\forall v \in T_p P, \quad \omega_{p \cdot g}(v \cdot g) := \omega_{p \cdot g}(R_{g*}(v)) = g^{-1} \omega_p(v) g \quad (1.16)$$

Tout comme les $H[p]P$, la troisième égalité assure que ω n'a besoin d'être définie que sur un point de chaque fibre. Cela permet de définir ω localement non pas sur $U_i \times G$, mais seulement sur $U_i \cong U_i \times \{e\}$. Ainsi, ω induit une 1-forme sur les cartes U_i par l'image réciproque des sections canoniques σ_i . Elles sont notées $\mathcal{A}_i := \sigma_i^* \omega$ et sur le chevauchement $U_i \cap U_j$, elles vérifient :

$$\mathcal{A}_j = \varphi_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \varphi_{ij} + \varphi_{ij}^{-1} d\varphi_{ij} \quad (1.17)$$

Munir $P(G, B)$ d'une connexion permet, entre autre de définir la notion de relèvement horizontal :

DÉFINITION 6 (RELÈVEMENT HORIZONTAL) — Étant donné une trajectoire $\rho : \mathbb{R} \rightarrow B$ sur la base et un point $\gamma_0 \in \rho(0)G$ au dessus de $\rho(0)$, il existe un unique relèvement γ de ρ dont les vecteurs tangents sont tous horizontaux. i.e. tel que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\pi \circ \gamma(t) = \rho(t) \quad \dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)} P \quad \gamma(0) = \gamma_0 \quad (1.18)$$

On parle de *relèvement horizontal* (*horizontal lift*, ou *transport parallèle* de γ_0 le long de ρ) puisque γ n'a pas de déplacement vertical au sens de la connexion. Du point de vue de la 1-forme ω , si γ s'écrit localement $\gamma_i = \sigma_i(\rho)g_i$, alors g_i vérifie l'équation (d'où vient l'unicité du relèvement) :

$$\frac{d}{dt} g_i(t) = -\mathcal{A}_i \rho(t) \cdot g_i(t) \quad (1.19)$$

Si maintenant γ est une trajectoire de P , on dira, par abus de langage, que $\tilde{\gamma}$ est le relèvement horizontal de γ si c'est le relèvement horizontal de sa projection $\pi \circ \gamma$ avec la condition initiale $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$.

Pour la suite, il sera utile d'avoir l'expression d'une trajectoire $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow P$ par rapport à son relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$. Pour l'obtenir, on note $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot g$, de sorte que sa dérivée s'écrit :

$$\dot{\gamma} = \dot{\tilde{\gamma}} \cdot g + \tilde{\gamma} \cdot dg = \dot{\tilde{\gamma}} \cdot g + \gamma \cdot g^{-1} dg$$

⁴ Les vecteurs tangents étant des formes linéaires, $A^\#(p)$ est plus exactement définie par l'application :

$$A^\#(p) : f \mapsto \left. \frac{d}{dt} f(p \cdot \exp(tA)) \right|_{t=0}$$

Ce à quoi, appliquer ω donne :

$$\begin{aligned}\omega_\gamma(\dot{\gamma}) &= \omega_\gamma(\dot{\tilde{\gamma}} \cdot g) + \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) \\ &= g^{-1}\omega_{\tilde{\gamma}}(\dot{\tilde{\gamma}})g + \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) && \text{d'après (1.16)} \\ &= \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) && \text{car } \tilde{\gamma} \text{ est horizontale}\end{aligned}$$

Le terme $g^{-1}dg$ restant étant un vecteur de $g^{-1}T_gG \cong T_eG \cong \mathfrak{g}$ et :

$$\omega_\gamma(\dot{\gamma}) = \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) = \omega_\gamma((g^{-1}dg)^\#(p)) = g^{-1}dg$$

D'où $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot g$ avec g est solution de :

$$\frac{d}{dt}g(t) = g(t)\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \quad (1.20)$$

Un Commentaire sur cette Formule peut-être ? (oui, mais je vois pas quoi)

1.3.2 Choix de connexion sur $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$

Dans le cas de $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$, la métrique sur \mathbb{S}^n induit naturellement un choix de connexion car la projection π est une submersion dite riemannienne [13]. Formellement, c'est dire que la projection de \mathbb{S}^n sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est telle que⁵ :

$$\forall p \in \pi^{-1}(w), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n, \quad \frac{1}{2}g_{\pi(p)}(\pi_*\mathbf{u}, \pi_*\mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}_H, \mathbf{v}_H \rangle \quad (1.21)$$

où g est la partie réelle⁶ hermitienne de la métrique de Fubini-Study. Plus concrètement, les espaces tangents de \mathbb{S}^n s'écrivent :

$$T_p\mathbb{S}^n = \mathrm{Vec}\{p\}^\perp := \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \Re\langle \mathbf{v}, p \rangle = 0\}$$

et sachant que $ip \in \mathrm{Vec}\{p\}^\perp$, ils se séparent en deux composantes orthogonales :

$$T_p\mathbb{S}^n = \mathrm{Vec}\{p\}^\perp = \mathrm{Vec}\{ip\} \oplus \mathrm{Vec}\{ip\}^\perp$$

Ainsi, la nature de π (1.21) est telle que le premier membre est l'espace tangent vertical à p et le second invariant par l'action de $\mathrm{U}(1)$:

$$\forall e^{i\theta} \in \mathrm{U}(1), \quad \mathrm{Vec}\{i(e^{i\theta}p)\}^\perp = \mathrm{Vec}\{ip\}^\perp$$

Ce qui permet de poser $H_p\mathbb{S}^n := \mathrm{Vec}\{ip\}^\perp$ et donne directement la 1-forme associée :

$$\begin{aligned}H_p\mathbb{S}^n &= \{\mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n \mid \Re\langle \mathbf{v}, ip \rangle = 0\} \\ &= \{\mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n \mid \Im\langle \mathbf{v}, p \rangle = 0\} && \iff \omega_p(\mathbf{v}) = \Im\langle \mathbf{v}, p \rangle\end{aligned}$$

Enfin, comme l'algèbre de Lie de $\mathrm{U}(1)$ est $\mathfrak{u}(1) \cong i\mathbb{R}$, il convient de de poser :

$$\forall p \in \mathbb{S}^n, \forall \mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n, \quad \omega_p(\mathbf{v}) := i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle \quad (1.22)$$

Un tel choix de connexion n'est pas anodin d'un point de vue signal puisque ω donne la fréquence instantanée telle que définie dans la ?? précédente. Son intérêt dans l'étude de la phase géométrique était déjà bien connue et porte généralement le nom de *connexion de Aharonov-Anandan* [5, sec. 4.2]. En revanche, le fait qu'elle soit induite par la métrique est bien moins connue et, à notre connaissance, seul Mukunda & Simon en font mention [17], même s'ils n'évoquent pas la métrique de Fubini-Study.

Reste alors une question : pourquoi la fréquence instantanée apparaît ici et comment le comprendre en terme de signal ?

⁵ Le facteur $1/2$ est hérité du choix de définition de la métrique de Fubini-Study, expliqué plus tôt (ss-sec. 1.1.2)

⁶ Cette métrique induite ne peut pas être hermitienne car \mathbb{S}^n n'est pas une variété complexe.

II — Interprétation des phases sur $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$

Intro : on va interpréter les phases dans le cadre géo : c'est là qu'est le gros des contributions de ce mémoire.

2.1 Fréquence instantanée et phase dynamique sur $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$

Pour y apporter une réponse, on se propose de prendre le problème par l'autre bout : comment définir la notion de fréquence instantanée d'un signal dans le fibré $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$?

Comme, à chaque instant t , un signal γ sur \mathbb{S}^n est représenté par une paire $(e^{i\alpha(t)}, \rho(t)) \in \mathbf{U}(1) \times \mathbf{PC}^n$ à travers les h_i , il serait tentant de voir $\alpha(t)$ comme la fréquence du signal et $\rho(t)$ comme son état de polarisation.

Le problème de cette représentation est qu'elle dépend du choix de carte U_i , ainsi sur l'intersection U_{ij} , γ aurait (au moins) deux notions de fréquence instantanée.

C'est là qu'intervient la connexion. D'une part, la 1-forme ω associée est définie globalement sur le fibré, autrement dit, elle est indépendante des représentations locales de γ .

D'autre part, le relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$ d'une courbe $\rho \subset \mathbf{PC}^n$, par définition, n'a pas de variation verticale. Dans notre contexte, cela signifie que $\tilde{\gamma}$ n'a pas de variation dans la direction de $\mathbf{U}(1)$, donc son état de polarisation (composante sur \mathbf{PC}^n) varie mais pas ses "fréquences".

Ainsi, le relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$ d'un signal γ s'interprète comme une version de ce dernier dénuée de toute fréquence instantanée. L'action α permettant de passer de $\tilde{\gamma}(t)$ à $\gamma(t)$ (i.e. $\gamma(t) = e^{i\alpha(t)}\tilde{\gamma}(t)$) peut alors être comprise comme l'ajout d'une fréquence instantanée (voir fig. 1.6 et ?? ci-dessous)

Un signal qui n'aurait pas de fréquence instantanée mais une polarisation instantanée n'a pas vraiment de sens. Cela renvoie à notre discussion de première partie : la fréquence instantanée d'un signal univarié devait contenir les hautes fréquences et son amplitude les basses. Ici le problème est le même, mais avec l'état de polarisation en lieu de l'amplitude. Pour s'en convaincre, il est utile de retourner sur le cas bivarié.

La projection sur \mathbf{PC}^1 de γ représente l'ellipse de polarisation instantanée. Mais si γ n'a pas de fréquence instantanée, alors $\gamma(t)$ n'est plus représenté que par le sommet de l'ellipse paramétrée par ρ_γ . L'on pourrait alors argumenter que tout signal peut être décrit par la seule variation de son état de polarisation, ce qui est parfaitement inintéressant.

Cette vision du relèvement horizontal est donc purement formelle et, si elle a bien un sens géométrique, elle n'a pas vraiment de sens du point de vue du signal.

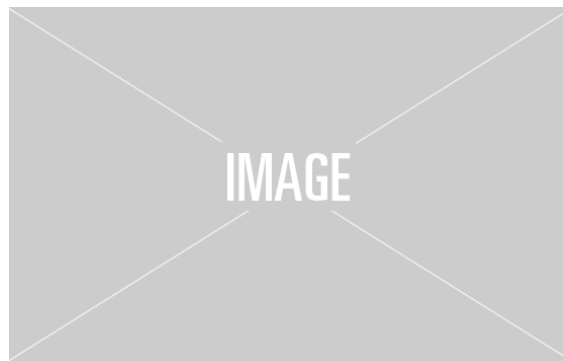


fig. 1.6 — Fréquence instantanée d'un signal x vu comme variation vertical de x par rapport à son relèvement horizontal \tilde{x} associé. À noter que \tilde{x} ne dépend pas des cartes mais dépend de la trajectoire ρ_x de x sur \mathbf{PC}^n .

En admettant l'interprétation de la 1-forme de connexion comme fréquence instantanée, les discussions

de première partie (??) suggèrent de choisir là encore :

$$\forall p \in \mathbb{S}^n, \forall \mathbf{v} \in T_x \mathbb{S}^n, \quad \omega_p(\mathbf{v}) = i \Im \langle \mathbf{v}, p \rangle \quad (1.23)$$

La phase dynamique, s'interprète alors comme la déviation du signal par rapport à son relèvement horizontal. Ainsi, $g = e^{i\Phi_{\text{dyn}}(\gamma)}$ est solution de (1.20), qui se réécrit alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g'(t) = g(t) i \Im \langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle \\ g(t_0) = 1 \end{cases} \iff g(t) = e^{i \int_{t_0}^t \Im \langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) \rangle ds}$$

Ce qui redonne la formule :

$$\Phi_{\text{dyn } \gamma}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Im \langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) \rangle ds \quad (1.24)$$

Ici, deux remarques. D'abord, il avait été fait mention dans la première partie que la phase φ des signaux AM-FM-PM, formule (??) :

$$\mathbf{x}(t) = a(t) e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} = a(t) e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix}$$

n'avait pas d'interprétation directe par rapport à Φ_{tot} et Φ_{dyn} . Cette discussion permet de faire sens de ce problème.

En effet, cette formule "force" un choix de présentation \mathbf{x} par le triplet $(a, \varphi, \mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger)$. Or, on vient de le voir, du point de vue géométrique, ce choix de représentation n'a de sens que localement et pour cette raison φ ne peut pas avoir d'interprétation directe.

Ensuite, si cette définition (1.24) de la phase dynamique est bien indépendante du choix de carte, elle dépend en revanche du relèvement horizontal de γ et, *a fortiori*, de la projection ρ_γ . C'est là que va pouvoir émerger la phase géométrique, ce que nous allons voir à présent.

2.2 Phase géométrique dans le cas cyclique

Notamment dans le cadre quantique, la phase géométrique est connue pour avoir deux interprétations géométriques [5, 6, 10] : soit comme conséquence d'un transport parallèle sur \mathbb{S}^n soit comme une mesure de l'aire de la surface entourée par le signal projeté sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$. Résultats qui sont présentés et redémontrés (avec les détails en annexes) dans cette section.

Pour se faire, sera d'abord traité le cas particulier des signaux cycliques (*ss-sec.* 2.2.1 et 2.2.2) et il sera ensuite montré que, du cas général, il est toujours possible de s'y ramener (*ss-sec.* 2.3.1).

2.2.1 ... du point de vue de la connexion

D'abord une définition :

DÉFINITION 7 (TRAJECTOIRE CYCLIQUE) — Un signal γ de \mathbb{S}^n sera dit *cyclique* si entre les instants t_0 et t , il retourne dans la même fibre :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \gamma(t) = e^{i\alpha} \gamma(t_0) \quad (1.25)$$

Dit autrement, la projection de γ , $\rho_\gamma := \pi \circ \gamma$ forme un lacet sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$.

Cette hypothèse est très restrictive puisqu'elle ne peut être vérifiée que ponctuellement, sans quoi γ n'aurait qu'un mouvement vertical (*i.e.* serait de la forme $\gamma(t) = e^{i\alpha(t)} p$), ce qui n'est pas particulièrement intéressant.

Cela étant dit, elle a le bon goût d'énormément simplifier les choses puisque, comme tout ce passe dans la même fibre, il est très simple calculer et d'annuler individuellement les phases de γ .

Suivant les travaux de Aharonov & Anandan [1] et les explications de Bohm [5], la première remarque est

que, comme $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t)$ sont dans une même fibre, la phase totale est donné par le paramètre α de (1.25)⁷ :

$$e^{i\Phi_{\text{tot}}} = e^{i\alpha} = t(\gamma(t_0), \gamma(t)) \quad (1.26)$$

La phase dynamique, conformément à ce qui a été dit plutôt, donne la déviation au relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$:

$$e^{i\Phi_{\text{dyn}}} = t(\tilde{\gamma}(t), \gamma(t)) \quad (1.27)$$

Et la phase géométrique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} e^{i\Phi_{\text{geo}}} &= e^{i\Phi_{\text{tot}}} e^{-i\Phi_{\text{dyn}}} = t(\gamma(t_0), \gamma(t)) t(\tilde{\gamma}(t), \gamma(t))^{-1} \\ &= t(\gamma(t_0), \gamma(t)) t(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)) \\ &= t(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t)) \quad \text{car } \gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Elle correspond donc au déplacement vertical de $\tilde{\gamma}$ dû à la courbure de \mathbb{S}^n . Dit autrement, elle mesure la déviation dû au transport parallèle le long de γ . Les trois dernières formules, eqs. (1.26), (1.27) et (1.28), sont représentées dans la figure 1.7 ci-dessous :

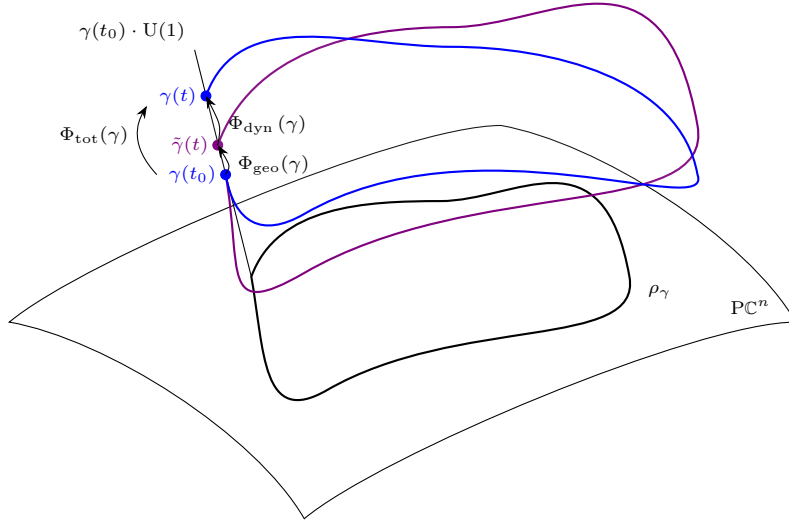


fig. 1.7 — Représentation des trois phases de γ dans le cas cyclique. Schéma repris de [5, fig. 4.1]

Vu ainsi, il apparaît clairement que Φ_{geo} est indépendante du relèvement γ par rapport à ρ_γ , autrement dit qu'elle est invariante par transformation de jauge. De même, elle ne dépend que de $\gamma(t_0)$ et $\tilde{\gamma}(t)$, ce qui montre qu'elle est invariante par reparamétrisation de γ .

Du point de vue signal, cela se traduit par le fait que l'évolution de l'état de polarisation (ρ_γ ou $\tilde{\gamma}$), quand bien-même indépendant que la fréquence instantanée, cause un déphasage (décalage vertical). Là encore, c'est quelque chose que le modèle AM-FM-PM peut difficilement représenter car demanderait de faire apparaître un exponentielle qui ne dépend du relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$, dont l'écriture en une paire (φ, ρ) dépend de la carte locale.

Du point de vue géométrique, cette description de $e^{i\Phi_{\text{geo}}}$ est plus connue sous le nom d'*holonomie* du lacet ρ_γ . De façon généralement, le groupe d'holonomie du point $p \in P$ associé à la (1-forme de) connexion ω sur $P(B, G)$, est l'ensemble des points de pG qui peuvent être atteint par une relèvement horizontal partant de p :

$$\text{Hol}_p(\omega) := \{g \in G \mid \exists \gamma, \tilde{\gamma}(0) = p \text{ et } p \cdot g = \tilde{\gamma}(1)\} \quad (1.29)$$

Cette formulation, si elle est très élégante, n'est en revanche que très peu instructive. En effet, en fonction

⁷Pour mémoire, $t(p, q)$ est l'élément $e^{i\alpha}$ de $U(1)$ telle que $q = e^{i\alpha}p$

des propriétés de l'espace total et de la base du fibré, Hol peut avoir diverses propriétés.

Dans notre cas, $\text{Hol}_p(\omega)$ est un sous-groupe de Lie connexe non trivial du groupe structural. Concrètement, cela signifie dans notre cas que $\text{Hol}_p(\omega) = \text{U}(1)$ ⁸, i.e. Φ_{geo} peut prendre absolument n'importe quelle valeur (alors même que l'on est toujours dans le cas particulier des signaux cycliques).

2.2.2 ... du point de vue de la métrique

Cela dit, la phase géométrique étant invariante par transformation de jauge, elle doit s'écrire uniquement dans PC^n . Pour cela l'on suppose, sans perte de généralité, que γ reste au dessus de la carte U_i , de sorte que :

$$\gamma = h_i(w, e^{i\theta}) = \sigma_i(w)e^{i\theta}$$

Avec, et toujours sous l'hypothèse que γ est cyclique, Φ_{geo} se réécrit (cf. annexe ??)⁹ :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{geo}}(\gamma) &= \Phi_{\text{tot}}(\gamma) - \Phi_{\text{dyn}}(\sigma_i(w)e^{i\theta}) \\ &= \theta(t) - \theta(t_0) - \left(\frac{1}{i} \int_{t_0}^t \mathcal{A}_i(\rho(s)) ds + \theta(t) - \theta(t_0) \right) \\ &= i \int_{t_0}^t \mathcal{A}_i(\rho(s)) ds\end{aligned}\tag{1.30}$$

Or, ρ étant fermée sur PC^n , Φ_{geo} est l'intégrale d'une forme linéaire le long d'un lacet, ce à quoi le théorème de Stokes s'applique et donne :

$$\Phi_{\text{geo}}(\gamma) = i \oint_{\rho} \mathcal{A}_i = i \iint_{\Sigma} d\mathcal{A}_i$$

Où Σ est une surface de bord ρ et où la dérivée extérieure de ω n'est autre que la forme de Kähler de PC^n (cf. annexe ?? & ?? pour une démonstration) :

$$\Phi_{\text{geo}}(\gamma) = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \Omega\tag{1.31}$$

Ainsi, conformément à l'interprétation de la forme de Kähler, la phase géométrique de toute courbe cyclique γ est donnée par la demi-aire de la surface entourée par sa projection $\pi(\gamma)$ sur PC^n .

2.3 Phase géométrique dans le cas le plus générale

De retour au cas général, si maintenant γ est qu'elle conque, pour retrouver les interprétation précédente, le plus simple est encore de se ramener au cas cyclique. Pour cela, il suffit de refermer la courbe tracée par γ dans \mathbb{S}^n de sorte à que cet ajout n'altère pas la phase géométrique de γ .

Pour se faire, et sachant que Φ_{geo} est intimement lié à la métrique (par la connexion) de $\mathbb{S}^n(\text{U}(1), \text{PC}^n)$, c'est naturellement du côté des géodésiques de PC^n que l'on se tourne.

2.3.1 Les géodésiques et leurs phases

Il est montrer – cf. annexe ??, ou [4, sec. 3.E] – que, étant donnée une géodésique ρ_g de PC^n , tout relèvement horizontale¹⁰ $\tilde{\gamma}_g$ de cette dernière vérifie :

$$\forall t \geq t_0, \quad \tilde{\gamma}_g(t) = \tilde{\gamma}_g(t_0) \cos(t - t_0) + \dot{\tilde{\gamma}}_g(t_0) \sin(t - t_0)\tag{1.32}$$

⁸ $\text{Hol}_p(\omega)$ est toujours un sous-groupe de Lie. Ici connexe car PC^n est simplement connexe, et non trivial car la connexion sur \mathbb{S}^n n'est pas plate. Or, le seul sous-groupe de Lie de $\text{U}(1)$ ayant cette propriété est lui-même. Ces informations sont tirées de Wikipédia, voir également [18, sec. 8.5.3] pour plus d'information sur le cas particulier des PC^n .

⁹ Quel ressemblance avec le calcul de la calotte dans la partie précédente...

¹⁰ Tout relèvement horizontale oui, mais avec une paramétrisation particulière (trajectoire uniforme). Φ_{geo} étant, comme on la vu, invariante par le choix de paramétrisation cela n'a pas d'importance.

La courbe γ_g étant horizontale, elle n'a pas de phase dynamique, et donc :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{geo}}(\rho_g) &= \Phi_{\text{tot}}(\tilde{\gamma}_g) = \arg \left\langle \tilde{\gamma}_g(t_0) \cos(t - t_0) + \dot{\tilde{\gamma}}_g(t_0) \sin(t - t_0), \tilde{\gamma}_g(t_0) \right\rangle \\ &= \arg \left(\cos(t - t_0) \langle \tilde{\gamma}_g(t_0), \tilde{\gamma}_g(t_0) \rangle \right) \quad \text{car } \langle \dot{\tilde{\gamma}}_g, \tilde{\gamma}_g \rangle = 0 \\ &= \arg \left(\cos(t - t_0) \right)\end{aligned} \quad (1.33)$$

Ce qui vaut 0 ou π (modulo 2π) selon le signe du cosinus. Contrairement à ce qui était dit dans [17], la phase géométrique n'est donc pas systématiquement nulle sur les géodésiques de PC^n et tenir compte de cela va permettre de renforcer le lien en cette l'écriture géométrique des signaux n -variés vue dans cette partie et la celle des signaux AM-FM-PM.

Toujours d'après [4, sec. 3.E], l'ensemble des géodésiques de PC^n passent par deux points donnés, reposent sur une unique ligne complexe, c'est-à-dire une sous-variété difféomorphe à $\text{PC}^1 \cong S^2$. De plus, ces géodésiques, sont des grands cercles.

La phase géométrique d'un de ces grands cercles ρ_c , il est donc cyclique, à pour phase géométrique l'intégrale de $1/2\Omega$ sur la moitié de S^2 :

$$\Phi_{\text{geo}}(\rho_c) = \frac{1}{4} \iint_{S^2} \Omega$$

D'autre part, cette intégrale est un résultat connue [12, p. 119] et vaut 4π , ce qui donne : , ce qui donne :

$$\Phi_{\text{geo}}(\rho_c) = \frac{1}{4} \iint_{S^2} \Omega = \pi$$

Ainsi, la courbe ρ_g , qui n'est donc d'une portion de ρ_c , a une phase géométrique qui est soit nul, soit égale à celle de son prolongement ρ_c . Cela suggère que, dans le second cas, la phase géométrique du complémentaire de ρ_g par rapport à ρ_c , noté $\hat{\rho}_c$ est nulle.

Pour le montrer, il suffit de considérer un nouveau relèvement γ_c (resp. $\gamma_g, \hat{\gamma}_g$) de ρ_c (resp. $\rho_g, \hat{\rho}_g$) tel que chacune de leur phase totale soit nul – ce qui est toujours possible et n'affecter pas la phase géométrique de ρ_c . De cette façon, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{geo}}(\rho_c) &= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma_c) = -\int_{\gamma_c} \omega = -\int_{\gamma_g} \omega - \int_{\hat{\gamma}_g} \omega \\ &= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma_g) - \Phi_{\text{dyn}}(\hat{\gamma}_g) \\ &= \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) + \Phi_{\text{geo}}(\hat{\gamma}_g)\end{aligned}$$

Il vient alors que, si jamais la géodésique reliant deux points est non nulle, il est toujours possible de considérer son complémentaire par rapport à γ_g , qui sera alors de phase géométrique nulle :

$$\Phi_{\text{geo}}(\rho_c) = \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) = \pi \implies \Phi_{\text{geo}}(\hat{\gamma}_g) = \Phi_{\text{geo}}(\gamma_c) - \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) = 0$$

De retour sur l'exemple de la ??, ??, on a vue qu'une signal décrivant une boucle horizontale sur la sphère de Poincaré, sa phase géométrique était donné par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = \pi - \pi \sin(2\chi_0) \quad \text{avec } 2\chi_0 \text{ la latitude}$$

En considérant le cas $\chi_0 = 0$, \mathbf{x} décrit alors une géodésique et Φ_{geo} donne à nouveau π . Aussi, et surtout, si l'on se met à faire varier θ entre 0 et π , un rapide calcul montre que :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = \arg \left(\cos(\theta(t) - \theta(t_0)) \right)$$

Avec l'interprétation graphique en tête, cette formule suggère que la géodésique, au sens du chemin le plus cours, reliant deux points sera toujours 0, car le “ $\cos \Delta\theta$ ” est positif. Ceux, hors mis dans le cas le cas où les

points sont antipodaux, auquel cas $\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = \pi$.

Ce n'est en revanche pas démontrer et ce qui est, de toute façon, sans conséquence pour la suite du mémoire.

Enfin, le fait que $\iint_{\text{PC}^1} \Omega = 4\pi$ est dû au facteur 2 devant la métrique de Fubini-Study. Il permet donc de s'assurer que l'aire – au sens de cette métrique – d'une sphère de rayon 1 vaut 4π .

Par ailleurs, le fait que $\text{PC}^1 \cong S^2$ soit finie fait que l'aire d'une surface incluse dedans peut-être vu comme étant définie modulo l'aire totale de PC^1 : 4π . Cela est cohérent avec le fait que la phase géométrique, qui correspond à une demi-aire, soit définie modulo 2π . Des résultats qui sont dans la continuité de ceux présenté en fin de ??.

2.3.2 Phase géométrique dans le cas le plus générale

Avec ces résultats il est enfin possible de généraliser les interprétations du cas cyclique :
Considérons à présent un signal $\gamma : [t_0, t] \rightarrow \mathbb{S}^n$ quelconque de projection ρ sur PC^n , et γ_g le relèvement de la géodésique reliant $\rho(t)$ à $\rho(t_0)$ n'ayant pas de phase géométrique et vérifiant :

$$\gamma_g(t_0) = \gamma(t) \qquad \qquad \gamma_g(t) = \gamma(t_0)$$

De cette façon, la concaténation des deux, notée $\gamma \frown \gamma_g$, vérifie :

$$\Phi_{\text{tot}}(\gamma \frown \gamma_g) = \arg \langle \gamma(t_0), \gamma(t_0) \rangle = 0 \qquad \Phi_{\text{tot}}(\gamma_g) = \arg \langle \gamma(t_0), \gamma(t) \rangle = -\Phi_{\text{tot}}(\gamma)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\gamma \frown \gamma_g) &= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma \frown \gamma_g) \\ &= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma) - \Phi_{\text{dyn}}(\gamma_g) && \text{en séparant l'intégrale de la phase dynamique, (1.24)} \\ &= \Phi_{\text{geo}}(\gamma) + \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) - \Phi_{\text{tot}}(\gamma) - \Phi_{\text{tot}}(\gamma_g) \\ &= \Phi_{\text{geo}}(\gamma) + \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) \\ &= \Phi_{\text{geo}}(\gamma) && \text{car } \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\gamma \frown \gamma_g$ est cyclique et on peut appliquer les résultats de la section 2.3, aboutissant à la formule :

$$\Phi_{\text{geo}}(\gamma) = \Phi_{\text{geo}}(\gamma \frown \gamma_g) = \frac{1}{2} \iint_{\widehat{\Sigma}} \Omega \tag{1.34}$$

où $\widehat{\Sigma}$ est la surface entourée par $\gamma \frown \gamma_g$.

Y'aurait sûrement un truc sympa à dire ici mais j'ai pas encore trouvé quoi...

III — Conclusion

En résumé, pour décrire un signal multivarié en terme de paramètre instantanée (amplitude, phase, polarisation), il nécessaire de faire intervenir des outils de géométrie différentielle. Cela est dû au fait que la séparation phase/polarisation ne peut être faite que localement. Ce n'est alors qu'en voyant \mathbb{S}^n comme une variété fibrée que les phases dynamique et géométrique reprennent un sens du point de vue signal : la première correspond effectivement à une notation de phase instantanée, analogue à celle des signaux univariés ; chose qui ne peut avoir de sens qu'au regard d'un relèvement horizontal. La seconde, quant à elle, s'interprète comme un déphasage dû la déviation de cette trajectoire horizontale, conséquence de la courbure de \mathbb{S}^n (au sens de la connexion).

Cela a permis de comprendre pourquoi la “phase instantanée” φ des signaux AM-FM-PM ne pouvait pas s'interpréter comme une phase (totale ou dynamique) : car ce modèle cherche à décrire des trajectoires de $\mathbb{S}^n(\text{U}(1), \text{PC}^n)$ mais avec un unique système de coordonnées locales. Elle ne peut donc pas être complète,

quand-bien même les paramètres de l'état de polarisation, (θ, χ) s'interprètent très bien.

De plus, si les signaux AM-FM-PM sont soumis à des conditions pour que leurs paramètres (φ, θ, χ) soient interprétables, ce n'est pas le cas de le formalisme géométrique. *A priori*, n'importe quel signal multivarié complexe peut être "séparé" en composantes horizontale et verticale. Aussi, il est tout à fait possible que les hypothèses auxquelles sont soumises les signaux AM-FM-PM soient dû à ces limitations.

Enfin, Facchi *et al.* [9] ont montré l'existence d'un lien entre la métrique de Fubini-Study, celle de Fisher et la phase géométrique : les deux dernières seraient respectivement la partie réelle et imaginaire de la première. Un point qui n'a pas été abordé jusqu'ici mais qui suggère un lien entre la phase géométrique et la géométrie de l'information et qu'il serait intéressant d'approfondir.

ANNEXES

ANNEXES DE LA PARTIE I

ANNEXES DE LA PARTIE II

TABLE DES FIGURES

1.1	DONE	La première figure de tout bon livre de géométrie différentielle	4
1.2	DONE	Diagramme de passage de f à f_* et f^*	4
1.3	DONE	Ruban de Möbius comme variété fibrée	7
1.4	DONE	Représentation d'une section local	8
1.5	DONE	Représentation de la section canonique	9
1.6		Interprétation géométrique de la fréquence instantanée	13
1.7		Représentation des trois phases de γ dans le cas pseudo-cyclique	15

TABLE DES CODES

RÉFÉRENCES

- [1] Y. AHARONOV AND J. ANANDAN, *Phase change during a cyclic quantum evolution*, Physical Review Letters, 58 (1987), pp. 1593–1596.
- [2] W. BALLMANN, *Lectures on Kähler Manifolds*, vol. 2 of ESI Lectures in Mathematics and Physics, EMS Press, 1 ed., July 2006.
- [3] M. V. BERRY, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 392 (1997), pp. 45–57. Publisher: Royal Society.
- [4] A. L. BESSE, *Manifolds all of whose Geodesics are Closed*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1978.
- [5] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [6] D. CHRUSCIŃSKI AND A. JAMIOŁKOWSKI, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.
- [7] E. COHEN, H. LAROCQUE, F. BOUCHARD, F. NEJADSATTARI, Y. GEFEN, AND E. KARIMI, *Geometric phase from Aharonov–Bohm to Pancharatnam–Berry and beyond*, Nature Reviews Physics, 1 (2019), pp. 437–449.
- [8] M. DO CARMO, *Riemannian Geometry*, Mathematics (Boston, Mass.), Birkhäuser, 1992.
- [9] P. FACCHI, R. KULKARNI, V. I. MAN’KO, G. MARMO, E. C. G. SUDARSHAN, AND F. VENTRIGLIA, *Classical and Quantum Fisher Information in the Geometrical Formulation of Quantum Mechanics*, Physics Letters A, 374 (2010), pp. 4801–4803. arXiv:1009.5219 [quant-ph].
- [10] F. FAURE, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).
- [11] P. FLORES, P.-O. AMBLARD, AND J. FLAMANT, *Damped ellipse decomposition for bivariate signals*.
- [12] D. HUYBRECHTS, ed., *Complex Geometry: An Introduction*, Universitext, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [13] N. KAYBAN, *Riemannian Immersions and Submersions*.
- [14] J. LAFONTAINE, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [15] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [16] ———, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.
- [17] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [18] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.
- [19] PHAM MÂU QUÂN, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Monographies universitaires de mathématiques, Dunod, Paris, 1969.
- [20] E. M. RABEI, ARVIND, R. SIMON, AND N. MUKUNDA, *Bargmann Invariants and Geometric Phases - a Generalised Connection*, Physical Review A, 60 (1999), pp. 3397–3409. arXiv:quant-ph/9907080.
- [21] E. SJÖQVIST, *Geometric phases in quantum information*, International Journal of Quantum Chemistry, 115 (2015), pp. 1311–1326.

- [22] A. A. VANKOV, *Einstein's Paper: "Explanation of the Perihelion Motion of Mercury from General Relativity Theory"*.
- [23] P. WOIT, *Quantum Theory, Groups and Representations*, Springer International Publishing, Cham, 2017.