

Mémoire de Stage de M2

PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ... ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Pierre-Olivier AMBLARD, Julien FLAMANT & Michel
BERTHIER

Master MIX – Université de La Rochelle

2024 – 2025

TABLES DES MATIÈRES

Introduction & préambule	1
<hr/>	
PARTIE I — INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE	3
<hr/>	
I — Introduction de la phase géométrique	3
1.1 Un peu d'analyse temps-fréquence	3
1.2 Phase et fréquence instantanée de signaux multivariés	4
1.3 Apparition de la phase géométrique	7
II — Première cas d'étude : les signaux AM-FM-PM	8
2.1 Définitions et calcul des phases	8
2.2 Interprétation sur la sphère de Poincaré	10
2.3 Généralisation en plus haute dimension	13
<hr/>	
PARTIE II — ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME	14
<hr/>	
I — Cadre d'étude	14
1.1 \mathbb{PC}^n vue comme variété différentielle	14
1.1.1 Rappels de géométrie différentielle et notations	14
1.1.2 \mathbb{PC}^n , une variété complexe	16
1.2 \mathbb{S}^{2n+1} comme fibré principal	17
1.2.1 Définition générale	17
1.2.2 Le fibré $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{PC}^n)$	20
1.3 Connexion et relèvements horizontaux	21
1.3.1 Définition générale	21
1.3.2 Choix de connexion sur $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{PC}^n)$	23
II — Interprétation des phases sur $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{PC}^n)$	24
2.1 Fréquence instantanée et phase dynamique sur $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{PC}^n)$	24
2.2 Phase géométrique dans le cas cyclique	25
2.2.1 ... du point de vue de la connexion	25
2.2.2 ... du point de vue de la métrique	27
2.3 Phase géométrique dans le cas le plus générale	27
2.3.1 Les géodésiques et leurs phases	27
2.3.2 Phase géométrique dans le cas le plus générale	28
III — Conclusion	29
<hr/>	
PARTIE III — * APPLICATIONS ET GÉNÉRALISATION	30
<hr/>	
I — * Calcul pratique de la phase géométrique	30
II — * Exemples d'applications	31
2.1 * Cas 2D : lien avec la première partie	31
2.2 * Cas 3D : application aux ondes gravitationnelles	31
2.3 * Cas nD : système de capteurs	31

III — * Pour la suite	31
3.1 * Limite du modèle	31
3.2 * Rapport de la phase géométrique au bruit	32
3.3 * Cas non commutatif	32

— ANNEXES	33
------------------	-----------

Annexes de la partie I	33
Annexe A — Compléments sur l'analyse temps-fréquence	33
A.1. * Formalisme derrière la transformée en SA ou le problème de signaux réels et comment le résoudre	33
A.2. * Interprétabilité de la transformée en SA ou le lien avec le théorème de Bedrosian	34
Annexe B — Démonstrations de la proposition 1	37
B.1. Formule de la phase totale (1.16)	37
B.2. Formule de la phase dynamique (1.17)	38
Annexe C — * Lien entre Poincaré et Bloch (EN VRAC)	38
C.1. * Lien entre les deux types de signaux	38
C.2. * Lien entre les projections	39
C.3. * Transformation de phases	41
Annexes de la partie II	42
Annexe A — * Variété différentielle complexe	42
Annexe B — Démonstration des résultats sous-section 2.2.2.	43
B.1. Formule pour Φ_{geo} sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$	43
B.2. Dérivation de Φ_{geo} en tant qu'aire de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$	44
B.3. * Idem que B.2. depuis \mathbb{S}^n (plus simple, mais j'arrive à finir le calcul)	45
Annexe C — Géodésique de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$	46
C.1. Métrique relevée dans les espaces horizontaux	46
C.2. Ecriture des géodésiques	47

Table des figures & références	48
---	-----------

* : PARTIELLEMENT TERMINÉE

* : AU STADE DE NOTE

TOUT LES TEXTES EN ROUGES SONT DES NOTES. LES FIGURES AVEC LEUR CAPTION SONT POUR LA PLUS PART À FAIRE (MISE EN PAGE COMPRISE).

LES NOUVEAUTÉS :

- J'ai écrit la conclusion de la partie I et l'intro de la partie II (même si j'en suis moyennement convaincu). Dedans j'ai mis au clair les notations $S^{2n\pm 1}$ vs \mathbb{S}^n
- J'ai un peu changé le plan de la partie II (à voir si ça vous plaît)
- La section 1. de la partie II à pas trop changé mais normalement elle devrait être plus claire. Par contre dans la section 2. j'ai pas mal retouché.
- J'ai essayé d'avancé la dernière sous partie (2.3, géodésique + préparation du terrain pour Bargmann) mais je bloque encore sur les calculs à cause du π (même si j'essaye de l'ignorer) pour les géodésique et du facteur $1/2$ qui me manque avec Stokes.
- J'ai dû, un peu malgré moi, me pencher sur les histoires de double cover pour être sur que ça soit pas dû à ça et ça à pas l'aire (par contre j'ai trouvé deux ref qui ont l'air vraiment bien la dessus : [cette vidéo](#) et [28])
Faudra qu'on parle de ça ensemble demain pro mais en attendant je pense que je vais juste me lancer sur la partie 3, parce que je suis grave à la bourre là et j'ai trop galéré à avancer cette semaine...

INTRODUCTION

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui nécessite beaucoup de contexte pour être mis en évidence. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant t d'un signal multivarié complexe (*i.e.* à valeurs dans \mathbb{C}^n) \mathbf{x} est donnée par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle - \Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\mathbf{x}(t) \rightsquigarrow \mathbf{x}'(t) = e^{i\alpha(t)} \mathbf{x}(t)$$

Elle est également invariante par reparamétrisation et pour ces raisons, c'est une mesure qui est intrinsèquement liée à la trajectoire du signal dans l'espace, à sa géométrie.

La phase géométrique est un phénomène qui apparaît dans de nombreuses circonstances, en fonction desquelles elle peut changer de nom et de forme : phase de Pancharatnam, de Berry, d'Aharonov-Anandan, d'Aharonov-Bohm, angle de Hannay, *etc.*

L'article [8] de Cohen *et al.* en présente quelques unes et le livre “*Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*” [7] de Chruściński & Jamiołkowski en fait une description plus qu'extensive.

Du point de vue du traitement du signal en revanche, rien n'a été fait et ce n'est que récemment que Le Bihan, Flamant & Amblard s'y sont intéressés [18, 19]. L'objectif de ce mémoire est donc de décrire la phase géométrique dans le cadre du traitement du signal et de discuter de ses applications :

- Dans un premier temps (partie I), cette phase sera mise en évidence à travers des concepts d'analyse temps-fréquence, notamment la notion de fréquence instantanée qui sera présente tout au long de l'écrit. Suite à quoi elle sera explicitement calculée dans un cas particulier de signaux, déjà étudié par Le Bihan *et al.* [19] : les signaux AM-FM-PM. Cela permettra de mieux comprendre son comportement et permettra de motiver une description des signaux multivariés complexes dans l'esprit de l'analyse temps-fréquence.
- Cela mènera à travailler dans une variété dite fibrée principale, $S^{2n-1}(\text{U}(1), \text{PC}^{n-1})$, et la seconde partie de ce mémoire sera dédiée à son formalisme. Contrairement à l'état de l'art, les résultats seront présentés d'un point de vue de mathématicien plus que de physicien et, entre autre, l'accent sera mis sur l'intuition géométrique derrière les concepts abordés. Des résultats, connus par ailleurs, sur la phase géométrique seront redémontrés avec ce formalisme et avec, les notions de fréquences instantanées et de phase géométrique seront reformulées et réinterprétées.
- Enfin, dans une troisième partie, sera présenté un moyen de calculer la phase géométrique en pratique via l'invariant de Bargmann, tiré de [26] et déjà repris par Le Bihan *et al.* [19]. Seront ensuite discutées diverses applications *et là ça dépend d'à quel point j'ai le temps.*

* PRÉAMBULE

Juste des notes, même pas sur qu'il y ait vraiment besoin de garder ce préambule

Généralités :

- Les références sont en fin de mémoire est en .bib sur le [GitHub](#)
- Idem pour les codes et un mot sur `pygeomphase`
- On va parler de géo diff et pour éviter de réécrire un livre, on va admettre beaucoup de résultats, on renvoi vers [17, 10] pour les bases et [24, 25, 2] pour toute ce qui est variété fibrée principales et variétés complexes.

Notations math :

- Convention sur le produit hermitien (conjugué à droite)
- les vecteurs seront en gras, leur dérivée en temps notée par un point (ex. : $\dot{\mathbf{x}}(t)$) et celle des scalaires seront noté par un prime (ex. : $a'(t)$)

PARTIE I

INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE

En traitement du signal, la phase d'un signal est intrinsèquement liée à la notion de fréquence instantanée, qui joue un rôle important en analyse temps-fréquence. C'est donc de ce point que commencera notre discussion pour introduire la phase géométrique. Pour cela, seront rapidement introduites quelques notions et résultats d'analyse temps-fréquence dans le cas univarié (sec. 1.1). Suite à quoi, une notion de phase instantanée sera proposée dans le cas multivarié (sec. 1.2), ce qui permettra, enfin, de mettre en évidence la phase géométrique (sec. 1.3).

Dans une seconde partie, seront introduits les signaux bivariés dits AM-FM-PM, dont la phase géométrique sera calculée explicitement (sec. 2.1), ce qui permettra de mettre en évidence certaines de ses propriétés (sec. 2.2). Dans une dernière section, seront proposées des généralisations des signaux AM-FM-PM au delà du cas bivarié (sec. 2.3), ce qui mènera au formalisme de la partie II suivante.

I — Introduction de la phase géométrique

1.1 Un peu d'analyse temps-fréquence

En traitement du signal, l'analyse fréquentielle par la transformée de Fourier est un incontournable. Seulement, cette transformation fait perdre toute notion temporelle : si l'étude du spectre du signal permet de dire quelles fréquences apparaissent dans le signal, elle ne permet pas de dire à quel(s) moment(s). C'est en réponse à cela, entre autre, que fut développée l'analyse temps-fréquence et, à cette fin, sont définis les paramètres instantanés d'un signal :

DÉFINITION 1 (PARAMÈTRES INSTANTANÉS) — Soit x , est un signal complexe écrit sous forme exponentielle :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & a(t)e^{i\phi(t)} \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \phi(t) \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

a est appelé *amplitude instantanée* du signal, la dérivée $1/2\pi\phi'$ sa *fréquence instantanée* et sa *phase instantanée* est définie — modulo un choix de phase initiale — par :

$$\Phi_{\text{inst}}(x, t_0, t) = \phi(t) - \phi(t_0) \quad (1.2)$$

Pour les signaux réels, ces notions sont moins évidentes à définir puisqu'elles demandent d'écrire les signaux sous la forme :

$$x(t) = a(t) \cos \phi(t)$$

Auquel cas, le choix de la pair (a, ϕ) n'est pas unique. Il existe tout de même un "bon" choix dans le cas des

signaux AM-FM :

DÉFINITION 2 (SIGNAL AM-FM) — Un signal réel de la forme :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a(t) \cos \phi(t) \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \quad (1.3)$$

est dit *AM-FM* (*amplitude and frequency modulated*) si a et $\cos \phi$ admettent une transformée de Fourier et si, de plus, la première a un spectre concentré sur les basses fréquences, la seconde concentré sur les hautes fréquences et que les deux ne se chevauchent pas. Formellement, ces conditions demandent qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda] \quad (1.4)$$

Dans ce cas, a et ϕ donne lieu au même vocabulaire que pour le cas complexe (définition 1).

Ces conditions sont liées au théorème de Bedrosian, et plus de détails se trouvent dans l'annexe A. Pour le dire rapidement, exiger que toutes les hautes fréquences de x se trouvent dans la phase traduit l'idée que l'amplitude doit moduler la phase, et non l'inverse. Une autre façon de le dire est que cela évite que toutes les fréquences puissent se trouver dans l'amplitude a , auquel cas, x n'aurait "pas de fréquence" au sens où ϕ pourrait être choisie constante, voir nulle.

Sous ces conditions, x peut être vu comme le signal complexe $\mathcal{A}[x]$ telle que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} = a(t) \cos \phi(t) + ia(t) \sin \phi(t) \quad (1.5)$$

Ce signal $\mathcal{A}[x]$ est appelé *transformée en signal analytique* de x et a, par construction, les mêmes paramètres instantanés que x . Là encore, le lecteur est renvoyé vers l'annexe A pour plus de détails ou bien dans le livre de Cohen [9].

L'intérêt d'introduire toutes ces notions est que les signaux multivariés — même complexes — souffrent du même problème que les signaux réels. En effet, en écrivant un signal \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix}$$

le fait que \mathbf{x} soit à valeur dans \mathbb{C}^n impose un choix naturel d'amplitude instantanée : sa norme. Pour ce qui est de la phase instantanée, en revanche, n'importe quel choix de ϕ convient *a priori*. En écrivant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} = a(t)e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\psi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\psi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\psi_n(t)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a(t) = \|\mathbf{x}(t)\|_2 \\ \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1 \\ \phi_i = \phi + \psi_i \end{cases}$$

il suffit que les ψ_i soient ajustés pour assurer que $\phi_i = \phi + \psi_i$.

Si a et ϕ correspondent respectivement à une amplitude et une phase, le vecteur restant $(a_i e^{i\psi_i})_{1 \leq i \leq n}$ correspond à un état de polarisation, sur lequel nous reviendrons dans la section II suivante.

1.2 Phase et fréquence instantanée de signaux multivariés

On se propose ici de définir la phase instantanée comme suit :

DÉFINITION 3 (PHASE DYNAMIQUE/INSTANTANÉE) — La *phase instantanée* ou *dynamique* (à l'instant t partant de t_0) d'un signal multivarié $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$, est donnée par la formule :

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\text{dyn } \mathbf{x}}(t_0, t) := \int_{t_0}^t \frac{\Im m \langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds \quad (1.6)$$

L'on s'autorisera à omettre les paramètres de Φ_{dyn} lorsque cela ne prête pas à confusion.

Cette définition est motivée par deux arguments :

• Argument variationnel

Le premier, fortement inspiré par les travaux de Lilly & Olhede [22], consiste à généraliser la condition (1.4) de séparation hautes/basses fréquences sur les signaux AM-FM. Pour cela, on commence par faire apparaître une phase ϕ — pour l'instant inconnue — en écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\phi(t)} e^{-i\phi(t)} \mathbf{x}(t) := e^{i\phi(t)} \mathbf{y}(t)$$

Si ϕ est bien choisie, alors \mathbf{y} ne devrait contenir que les informations associées à l'amplitude et à la polarisation de \mathbf{x} . Or, conformément à la condition (1.4), la phase doit contenir les hautes fréquences du signal et, inversement, les basses fréquences doivent se trouver dans le reste.

La fréquence donnant, pour le dire vite, la vitesse d'ondulation, la contrainte sur \mathbf{x} va être de limiter les variations de \mathbf{y} . Concrètement, ϕ doit être choisie de sorte à minimiser la dérivée $\dot{\mathbf{y}}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \left\| e^{-i\theta(t)} (\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t) \mathbf{x}(t)) \right\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t) \mathbf{x}(t)\|_2^2$$

La contrainte ne dépendant que de la dérivée θ' , on se ramène à :

$$\min_{\theta(t)} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \min_{\theta'(t)} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t) \mathbf{x}(t)\|_2^2$$

En rappelant que $\frac{d}{dx} \|f(x)\|_2^2 = 2\Re e \langle f(x), f'(x) \rangle$, il vient que l'unique minimum¹ est atteint par $\phi'(t)$ à condition que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi'} \|\dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}\|_2^2 = 0 & \iff 0 = 2\Re e \left\langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}, \frac{d}{d\phi'} (\dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}) \right\rangle \\ & = 2\Re e \langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}, -i\mathbf{x} \rangle \\ & = 2\Re e (i \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle) + 2\phi' \Re e \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ & = -2\Im m \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle + 2\phi' \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\phi' = \frac{\Im m \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$ et :

$$\phi(t) = \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \quad (1.7)$$

• Arguments des moyennes

Le second argument, cette fois inspiré de [6], se base sur la notion de fréquence moyenne. D'abord dans le cas d'un signal complexe univarié, sont définies les fonctions de densités d'énergie (resp. d'énergie spectrale) comme :

$$\rho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & |x(t)|^2 \end{array} \quad \text{resp.} \quad \varrho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \nu & \longmapsto & |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array} \quad (1.8)$$

¹ L'extremum obtenu est l'unique minimum globale puisque $t \mapsto \|at + b\|^2$ est strictement convexe pour $a \neq 0$.

À partir de ces dernières est définie la fréquence moyenne de x comme l'espérance $\mathbb{E}_\rho[\nu]$ de ϱ^2 . Cette fréquence moyenne est liée à la fréquence instantanée par la formule³ :

$$\mathbb{E}_\rho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \mathbb{E}_\rho \left[\frac{1}{2\pi} \phi' \right] \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un signal $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ multivarié, les densités d'énergies se définissent comme :

$$\begin{aligned} \rho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ & \varrho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto |x_i(t)|^2 = a(t)^2 a_i(t)^2 & \nu &\longmapsto |\hat{x}_i(\nu)|^2 \\ \\ \rho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ & \varrho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) & \nu &\longmapsto \|\hat{\mathbf{x}}(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varrho_i(t) \end{aligned}$$

Le second argument consiste alors à dire que l'égalité des moyennes (1.9) doit rester valable dans le cas multivarié. Cela assure, a minima, que la fréquence instantanée de \mathbf{x} , $1/2\pi\phi'$, à pour moyenne $\mathbb{E}_\rho[\nu]$.

En appliquant la formule (1.9) au ϱ_i , et en notant toujours $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\rho[\nu] &= \int_{\mathbb{R}} \nu \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) d\nu \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\varrho_i}[\nu] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'_i(t) \rho_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t)^2 \sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i(t)^2 dt \\ &= \mathbb{E}_\rho \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^n \phi'_i a_i^2 \right] \end{aligned}$$

Ce qui mène à poser $\sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i^2(t)$ pour la fréquence instantanée, avec la phase associée :

$$\phi = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds \quad (1.10)$$

Formule qui concorde bien avec celle de la phase dynamique une fois explicitée :

$$\begin{aligned} \Im m \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} &= \Im m \left(\frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n \left((aa_i)'(t) + a(t) a_i(t) i \phi'_i(t) \right) e^{i\phi_i(t)} \overline{a(t) a_i(t) e^{i\phi_i(t)}} \right) \\ &= \frac{1}{a(t)^2} \Im m \left(\sum_{i=1}^n a(t) a_i(t) (aa_i)'(t) + i a(t)^2 a_i(t)^2 \phi'_i(t) \right) \\ &= \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t)^2 a_i(t)^2 \phi'_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i(t)^2 \phi'_i(t) \end{aligned}$$

²La notation avec l'espérance n'est pas complètement appropriée puisque ρ n'est pas une densité de probabilité (non normalisée). Cela dit, on peut supposer sans perte de généralité que $\|\rho\|_2 = \|\varrho\|_2 = 1$ et, dans tout les cas, l'interprétation en terme de moyenne tien toujours.

³Cette formule de généralise à tout les moments de ϱ et existe également pour les moments de ρ , voir [9, sec. 1.4] pour une démonstration "à la physicienne"

D'où

$$\Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_i(s)^2 \phi'_i(s) ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi'_i(s) ds$$

1.3 Apparition de la phase géométrique

Cela étant dit, il existe une autre façon, plus simple, d'obtenir la phase d'un signal. D'abord, dans le cas univarié, la phase instantanée de $x = ae^{i\phi}$ peut être réécrite comme :

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \arg \left(x(t) \overline{x(t_0)} \right)$$

Formule qui se généralise en cas multivarié par ce qui sera appelé la *phase totale* du signal :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle \quad (1.11)$$

D'un point de vu géométrique, il est bien connue que le produit scalaire entre deux vecteurs réels $u, v \in \mathbb{R}^n$ est lié à l'angle $\angle(u, v)$ entre ces derniers par la formule :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = \|u\|^2 \|v\|^2 \cos \angle(v, u)$$

Pour le produit hermitien, cet angle se retrouve dans l'argument, de sorte que si u et v sont complexes :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \|u\|^2 \|v\|^2 e^{i\angle(v, u)}$$

En ce sens, la phase totale calcule explicitement l'angle entre $\mathbf{x}(t_0)$ et $\mathbf{x}(t)$ et il est montré, dans le cas univarié, qu'elle est égale à la phase dynamique. En effet, pour $\mathbf{x} = ae^{i\phi}$:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) &= \Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Im \int_{t_0}^t \frac{(a'(s) + ia(s)\phi'(s))e^{i\phi(s)} \overline{a(s)e^{i\phi(s)}}}{a^2(s)} ds \\ &= \int_{t_0}^t \frac{a^2(s)\phi'(s)}{a^2(s)} ds \\ &= \phi(t) - \phi(t_0) = \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Dans le cas multivarié, en revanche, c'est une autre histoire. En notant cette fois le signal $\mathbf{x} = ae^{i\Phi_{\text{dyn}}} (a_i e^{i\psi_i})_{1 \leq i \leq n}$, la phase totale se réécrit :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \arg \left(a(t)a(t_0)e^{i(\Phi_{\text{dyn}}(t) - \Phi_{\text{dyn}}(t_0))} \sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \\ &= \Phi_{\text{dyn}}(t) + \arg \left(\sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \quad \text{car } \Phi_{\text{dyn}}(t_0, t_0) = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

Apparaît alors un terme de déviation de la phase dynamique par rapport à la phase totale, appelé (surprise) phase géométrique et noté :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \quad (1.13)$$

Cette déviation s'observe expérimentalement, comme le montre la figure 1.1 ci-dessous.

Comme mentionné en introduction, un résultat bien connu en physique [5, 23, 7] est que cette troisième phase est invariante par transformation de jauge et par reparamétrisation. Dans notre contexte, cela signifie d'une part que si \mathbf{x} et $\tilde{\mathbf{x}}$ sont deux signaux multivariés complexes tels que $\tilde{\mathbf{x}} = e^{i\alpha} \mathbf{x}$, avec α une fonction dérivable du temps, alors :

$$\Phi_{\text{geo}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\tilde{\mathbf{x}}) - \Phi_{\text{dyn}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) = \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x})$$

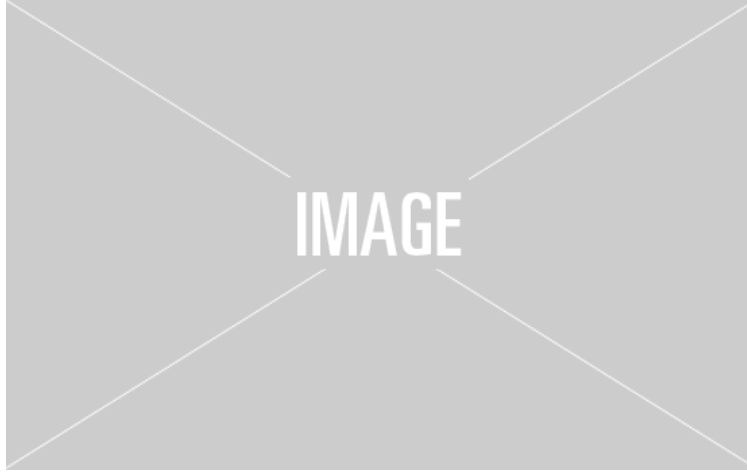


fig. 1.1 — Sur le graphe de gauche, le signal \mathbf{x} est à valeurs dans \mathbb{R}^2 . Dans celui de droite, le calcul des phases dynamique et totale, ainsi que de leur différence, de \mathbf{x} une fois transformé en signal analytique.

Et d'autre part que, pour tout difféomorphisme γ de \mathbb{R} tel que :

$$\mathbf{x} \circ \gamma(s_0) = t_0 \qquad \mathbf{x} \circ \gamma(s) = t$$

on a :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x} \circ \gamma, s_0, s) = \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t)$$

D'un point de vue signal, cette invariance par transformation de jauge indique que Φ_{geo} est lié à une notion de polarisation du signal, chose que nous allons à présent mettre en évidence à travers un exemple.

II — Première cas d'étude : les signaux AM-FM-PM

Pour une première étude de la phase géométrique du signal, Le Bihan, Flamant & Amblard se sont penchés sur un cas particulier de signal bivarié [13, 18, 19]. Ces signaux, AM-FM-PM, sont présentés dans une première partie avec le calcul explicite de leur phases — totale, dynamique et géométrique. Puis, sera introduite la sphère de Poincaré, sur laquelle, Φ_{geo} pourra être interprétée. Cela mènera à proposer un modèle pour décrire les signaux multivariés complexes (modèle très largement inspiré par ce qui à déjà été fait dans l'étude de la phase géométrique).

2.1 Définitions et calcul des phases

Ces signaux AM-FM-PM viennent généraliser les signaux AM-FM univarié en tenant compte de l'état de polarisation permis par l'accès à une seconde dimension. En quelques mots, dans le cas le plus simple, un signal bivarié à valeurs *réelles* s décrit une ellipse en cours du temps. On parle de polarisation elliptique et s s'écrit :

$$s(t) = a \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \varphi(t) \\ \sin \chi \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}^+, \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \chi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$$

Les paramètres a et χ caractérisent la taille respectivement et l'excentricité de l'ellipse, θ son orientation dans le plan et $\varphi(t)$ précise où se trouve s à l'instant t sur cette ellipse. Le signe de χ donne également les sens rotations de que φ sur l'ellipse (trigonométrique ou anti-trigonométrique), le tout est représenté sur la figure 1.2 ci-dessous :

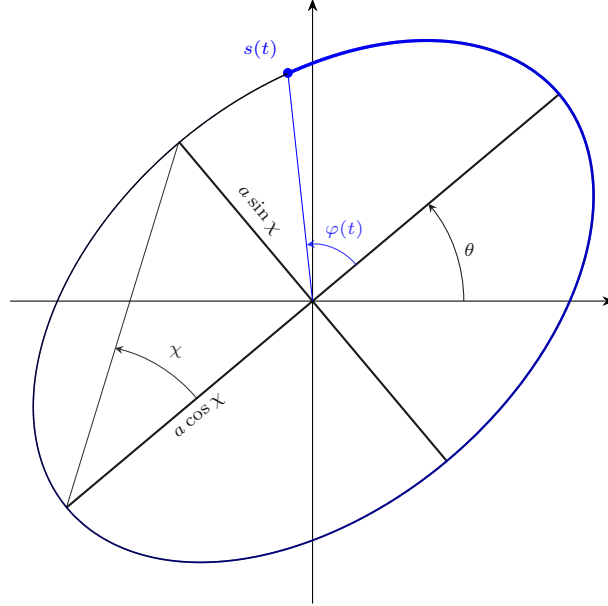


fig. 1.2 — Ellipse de polarisation du signal s sur laquelle sont représentés ses paramètres a, φ, θ et χ .

En autorisant les paramètres de polarisation à varier au cours du temps et après une transformation en signal analytique, mentionnée dans la section 1.1, on obtient la définition suivante :

DÉFINITION 4 (SIGNAL AM-FM-PM) — Un signal bivarié complexe \mathbf{x} *AM-FM-PM* (*amplitude, frequency and polarization modulated*) est caractérisé par quatre paramètres a, φ, θ et χ , respectivement à valeurs dans $\mathbb{R}^+, \mathbb{R},]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, vérifiant :

$$|\varphi'(t)| \gg |\theta'(t)|, |\chi'(t)|, \left| \frac{a'(t)}{a(t)} \right| \quad \left| \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \right| \gg 1 \quad (1.14)$$

Auquel cas, \mathbf{x} prend la forme, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = a(t)e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

où $R_{\theta(t)}$ est la matrice de rotation d'angle $\theta(t)$. Voir [12, ann. 4.B] pour une construction plus détaillée.

Jusqu'à présent, la phase géométrique n'a été étudiée que dans le cadre multivarié complexe et pour cette raison, il est nécessaire de passer par la transformée en signal analytique (*cf. annexe section A*). *Plus loin, dans la partie III, nous reviendrons sur la nécessité de faire ce passage vers les nombres complexes.* La transformation du signal à valeurs réelles à valeurs complexes est nécessaire pour étudier la phase géométrique car c'est uniquement dans le cadre complexe qu'elle a été étudiée jusqu'à présent. Et, comme pour les signaux AM-FM, les hypothèses sur a, φ, θ, χ assurent que les paramètres soient interprétables suivant la figure 1.2 précédente.

Les trois phases de tels signaux sont données par la proposition 1 suivante :

PROPOSITION 1 (PHASES DE SIGNAL AM-FM-PM) — Les trois phases d'un signal bivarié AM-FM-PM \mathbf{x} de paramètres $(a, \varphi, \theta, \chi)$ sont données par les formules :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arg \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin (\chi(t_0) + \chi(t)) \right) \quad (1.16)$$

$$\Phi_{\text{dyn}} \mathbf{x}(t_0, t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \\ &= \arg \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin (\chi(t_0) + \chi(t)) \right) - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \end{aligned} \quad (1.18)$$

où $\Delta y = y(t) - y(t_0)$ pour $y = \chi, \theta$. La démonstration se trouve en annexe B.

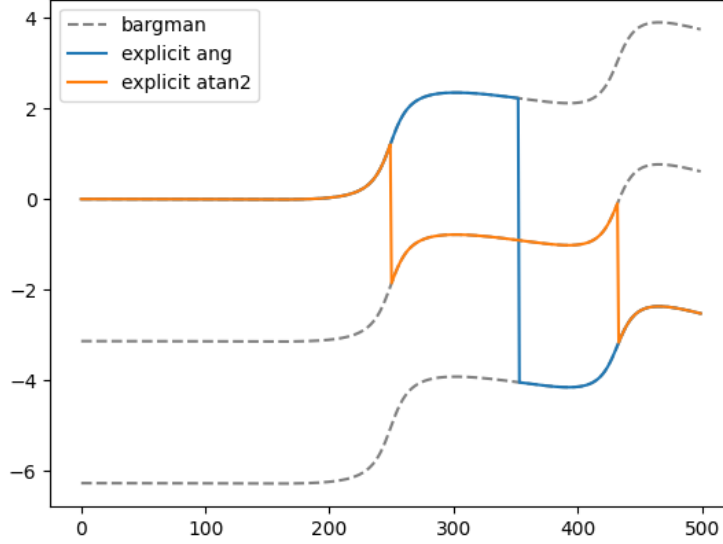


fig. 1.3 — Evolution de la phase géométrique d'un signal AM-FM-PM généré. En gris la phase géométrique du signal calculé via l'invariant de Bargmann. Les deux autres sont calculées avec la formule eq. (1.18), en bleu en utilisant de l'argument pour la phase totale et en orange en utilisant atan2.

FAIRE LE LIEN AVEC BERRY [3] ?

Deux remarques sur ces formules. La première est que la phase géométrique ne dépend que des paramètres de polarisations θ et χ , ce qui reflète son invariance par transformation de jauge. La seconde, nettement plus troublante, est que φ ne s'interprète ni comme phase totale ni comme phase dynamique. Pour que ce soit le cas, il faut qu'à l'instant t , \mathbf{x} retrouve la même polarisation instantanée qu'à l'instant t_0 , auquel cas :

$$\begin{aligned} (\chi(t), \theta(t)) &= (\chi(t_0), \theta(t_0)) \implies \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \varphi(t) - \varphi(t_0) \\ &\implies \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \end{aligned} \quad (1.19)$$

Même dans ce cas, il est utile de d'avoir une représentation de \mathbf{x} qui soit indépendante de sa phase pour interpréter cette formule (1.19).

2.2 Interprétation sur la sphère de Poincaré

Dans l'étude de la phase géométrique, il est standard de s'intéresser à la matrice de covariance⁴ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \rho_{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} \overline{\mathbf{x}(t)} \mathbf{x}^\top(t) \quad (1.20)$$

Outre son utilité en traitement du signal, elle présente l'avantage d'être invariante par transformation de de jauge (*i.e.* $\rho_{e^{i\alpha}\mathbf{x}} = \rho_{\mathbf{x}}$). Dans le cas des AM-FM-PM, Le Bihan *et al.* ont montré qu'elle se décompose dans

⁴La conjugaison ici est à gauche pour simplifier l'interprétation de ρ dans la figure 1.4

la base de Pauli comme :

$$\rho_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \left(I + \sin(2\theta) \cos(2\chi) \sigma_1 + \sin(2\chi) \sigma_2 + \cos(2\theta) \cos(2\chi) \sigma_3 \right) \quad (1.21)$$

où les σ_i s'écrivent :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dans cette décomposition, la composante en I est indépendante de \mathbf{x} et peut donc être ignorée (idem pour le facteur $1/2$). Cela ne laisse qu'un vecteur (normé) de dimension 3 dont 2θ et 2χ correspondent aux coordonnées sphériques conformément à la figure 1.4 ci-contre.

La sphère alors obtenue, plus connue sous le nom de sphère de Poincaré, représente l'ensemble des états de polarisation possibles pour un signal :

À l'équateur, la polarisation est linéaire et θ pilote son orientation et plus $\rho_{\mathbf{x}}$ se rapproche des pôles, plus cette polarisation devient elliptique, jusqu'à devenir complètement circulaire, auquel cas θ devient insignifiant. Aussi, suivant le schéma fig. 1.2, l'hémisphère nord (resp. sud) correspond à des polarisations elliptiques anti-horaire (resp. horaire).

Le fait que ce soit le double des angles qui sont représentés tient naturellement compte des potentielles redondances dans les (θ, χ) . Par exemple si \mathbf{x} a pour paramètre de polarisation instantanée (θ_0, χ_0) , alors par symétrie de l'ellipse, $(\theta_0 + \pi, \chi_0)$ est aussi une représentation valide. Autre exemple, si $\chi_0 = \pi/4$, alors la polarisation est circulaire et indépendant de θ_0 .

Dans les deux cas, la représentation dans la sphère de Poincaré évite ces problèmes puisque, dans le premier cas $(2\theta_0, 2\chi_0)$ et $(2\theta_0 + 2\pi, 2\chi_0)$ représente le même point, et dans le second, le point associé à $2\chi_0 = \pi/2$ (pôle nord) est indépendant du choix de θ_0 .

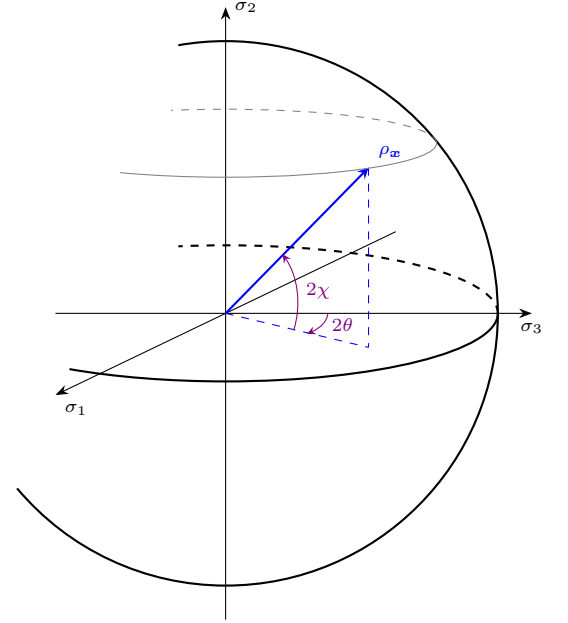


fig. 1.4 — Représentation de $\rho_{\mathbf{x}}$ sur la sphère de Poincaré en fonction des paramètres θ et χ .

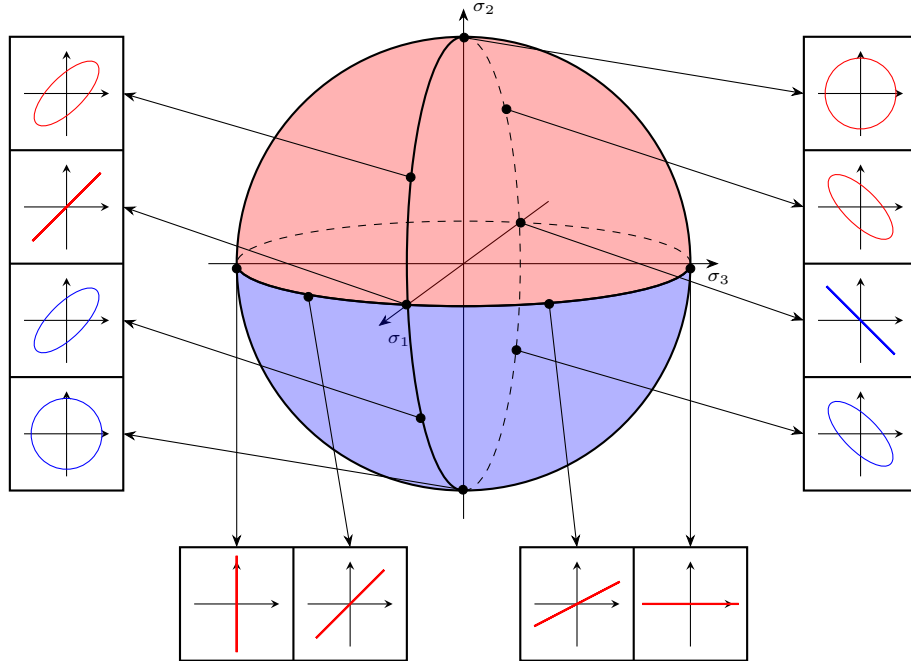


fig. 1.5 — Représentation des paramètres de polarisation instantanée associés à divers points de la sphère de Poincaré. La couleur donne le sens de parcours de l'ellipse lorsque φ varie : en rouge dans le sens trigonométrique et en bleu anti-trigonométrique. Dans les cas de polarisation linéaire, l'orientation n'a pas d'importance.

Pour interpréter la formule (1.19) de la phase géométrique prenons un exemple. Si χ et θ sont tels que :

$$\theta(t_0) = 0 \qquad \theta(t) = 2\pi \qquad \chi(s) = \chi_0$$

alors $\rho_{\mathbf{x}}$ décrit un chemin horizontal sur la sphère, $\rho_{\mathbf{x}}(t_0) = \rho_{\mathbf{x}}(t)$ et sa phase géométrique s'écrit⁵ :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds = - \sin 2\chi_0 \int_{t_0}^t \theta'(s) ds \\ &= - \sin 2\chi_0 (\theta(t) - \theta(t_0)) \\ &= -2\pi \sin 2\chi_0 \end{aligned}$$

Cette dernière formule donne également à 2π près l'aire de la calotte entourée par $\rho_{\mathbf{x}}$, à savoir :

$$\mathcal{Aire}(\chi_0) = 2\pi - 2\pi \sin(2\chi_0)$$

Pour être précis, pour tenir compte du fait que \mathbf{x} a fait une rotation complète, il est plus naturel de prendre comme phase totale :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + 2\pi$$

Auquel cas, la phase géométrique donne exactement l'aire de la calotte. Dans la même logique, si l'état de polarisation subit une rotation de n tours, alors θ va de 0 à $2n\pi$ et :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = 2n\pi - 2n\pi \sin(2\chi_0) = n\mathcal{Aire}(\chi_0)$$

Ainsi, même si Φ_{geo} est définie modulo 2π , le choix du représentant reste important pour mieux tenir compte de l'évolution de $\rho_{\mathbf{x}}$ au court du temps.

En revanche, l'aire totale de la sphère est de 4π , donc l'aire de toute surface de S^2 peut être vue comme étant définie modulo 4π , ce qui n'est pas cohérent avec la phase géométrique, qui elle l'est à 2π près. Pour résoudre ce problème apparent, il suffit de noter que, tant dis que l'ellipse de polarisation de \mathbf{x} a fait un tour complet, $\rho_{\mathbf{x}}$ en a effectué deux sur la sphère ($2\theta(t) = 4\pi$). Pour qu'il n'en fasse qu'un, il faut faire varier θ de 0 à π , auquel cas le terme de la phase géométrique hérité de la Φ_{tot} vaut π et :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \pi - \pi \sin 2\chi_0 = \frac{1}{2} \mathcal{Aire}(\chi_0) \tag{1.22}$$

Dans ce cas, la phase géométrique s'interprète comme la demi-aire de la surface entourée par $\rho_{\mathbf{x}}$. Cela n'est, pour l'instant, valable que pour le cas particulier où χ est constant mais il sera montré dans la partie II que cela se généralise très bien.

Cela étant dit, le fait que $\rho_{\mathbf{x}}$ doive faire deux tours pour que (θ, χ) retourne à son état initial, met en évidence un problème quand à la paramétrisations de l'ellipse de polarisation. Toujours à χ fixé, si θ se voit ajouter π , alors l'état de polarisation est le même, comme expliqué plutôt : $\rho(\theta + \pi, \chi) = \rho(\theta, \chi)$. En revanche, si l'on s'intéresse à un point particulier de l'ellipse, après une rotation de π , ce même point se retrouvera à l'opposé de là où il était auparavant. En d'autres termes, il a subi une rotation de π mais qui apparaît non plus dans l'état de polarisation $\rho_{\mathbf{x}}$ mais dans la phase totale (eq. (1.22)). Sachant que S^2 est une représentation de rotation $\text{SO}(3)$ de \mathbb{R}^3 , ce lien entre l'évolution de \mathbf{x} est le nombre de rotations de $\rho_{\mathbf{x}}$ sur S^2 , n'est pas sans rappeler le fait que $\text{SU}(2)$ est connu pour être un double recouvrement de ce dernier.

Là je dis des conneries, c'est à corriger avec ça !!!!

⁵ L'on retrouve dans cette formule le fait que Φ_{geo} est indépendant de la paramétrisation : le résultat est indépendant des l'évolution de θ sur $]t_0, t[$.

2.3 Généralisation en plus haute dimension

En résumé. Pour étudier de phase géométrique d'un point de vue signal, il est utile de passer par des notions de paramètres instantanées. Comme l'a montré l'exemple des signaux AM-FM-PM, décomposer un signal en amplitude, phase, et état polarisation donne un cadre propice à la description et l'interprétation de la phase géométrique.

Généraliser cette décomposition en plus haute dimension revient alors à composer \mathbb{C}^n comme un produit de trois ensemble.

D'abord, en isolant l'amplitude, qui n'est pas très utile à notre propos, \mathbb{C}^n s'écrit :

$$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{+*} \times S^{2n-1}$$

avec S^{2n-1} la sphère unité de \mathbb{C}^n de dimension réel $2n - 1$.

Ensuite, la phase ($e^{i\varphi}$ dans (1.15)) est un élément de $U(1)$, donc pour dissocier la phase et état de polarisation, il faudrait décomposer S^{2n-1} de sorte à le faire apparaître. À première vue, il faudrait écrire :

$$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{+*} \times U(1) \times (S^{2n-1}/U(1)) \quad (1.23)$$

où le quotient qui apparaît n'est autre que l'espace projectif complexe de dimension (complexe) $n - 1$ et noté $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ (dont la construction sera détaillée dans la partie II suivante).

Le problème de cette formule est qu'elle n'est pas juste en l'état. Plus précisément, elle n'est valable que localement. Corrigé cela nécessite d'écrire S^{2n-1} , non pas comme un produit de deux ensembles, mais comme un fibré, chose que nous nous attacherons à faire dans la suite de ce mémoire *“ce à quoi est dédié la suite de ce mémoire” serait mieux ?*.

Avant d'y venir et pour motiver d'autant plus la décomposition (1.23), revenons sur le cas $n = 2$. Holf a montré, en 1931 [14], que la sphère S^3 s'écrit localement (toujours au sens des fibrés) comme le produit $S^1 \times S^2$. Le premier étant $U(1)$ et le second difféomorphe⁶ au plan projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$. Ainsi, l'écriture des signaux AM-FM-PM utilise, sans le dire, la “décomposition” (1.23), qui n'est alors qu'une généralisation du modèle utilisé plus tôt.

⁶Par le premier théorème d'isomorphisme, la projection p est équivalente à la projection canonique de \mathbb{C}^2 sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^1$, de sorte que $\rho(\mathbb{C}^n) \cong S^2 \cong \mathbb{P}\mathbb{C}^1$.

PARTIE II

ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME

Dans cette seconde partie, l'objectif est de décrire la phase géométrique dans son environnement naturel, les variétés fibrées principales. Cela se fera en deux temps.

D'abord, S^{2n-1} sera proprement décrite comme une variété fibrée. Ce faisant, les outils mise en jeu seront exposés avec détail, dans le but de simplifier la généralisation des résultats au cas non commutatif. Lequel sera abordé à la fin de ce mémoire.

Ensuite, des résultats sur la phase géométrique, déjà bien connus dans des cadres spécifiques⁷ [3, 5, 23, 7] seront redémontrés dans un cadre plus général : celui de chemins quelconques de S^{2n-1} . Cela permettra de donner une nouvelle interprétation des outils géométrique en terme de signal.

Enfin, par souci de comidité, on se placera dans \mathbb{C}^{n+1} et l'on notera la sphère unité de se dernier $\mathbb{S}^n := S^{2n+1}$ (n ne correspond pas à la dimension de la sphère !).

I — Cadre d'étude

Pour proprement poser le cadre, il nous faudra trois ingrédients :

1. D'abord, faire quelques rappels de géométrie différentielle, ne serait-ce que pour fixer les notations (*ss-sec.* 1.1.1), avec comme exemple le cas $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ (*ss-sec.* 1.1.2), qui sera utile plus loin.
2. Ensuite, seront définies les variétés fibrées principales, avec les outils de bases qui leurs sont associés (*ss-sec.* 1.2.1), puis $U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n$ sera écrit comme telle (*ss-sec.* 1.2.2).
3. Enfin, il nous faudra définir une connexion sur ces fibrés, connexion qui sera, d'abord, définie de façon générale (*ss-sec.* 1.3.1), puis explicitée et interprétée dans le cas qui nous intéresse (*ss-sec.* 1.3.2).

1.1 $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ vue comme variété différentielle

1.1.1 Rappels de géométrie différentielle et notations

Une variété différentielle se définit comme suit :

DÉFINITION 5 (VARIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE) — une variété différentielle de classe C^k de dimension n est un espace topologique \mathcal{M} munie d'un *atlas* $\{(\phi_i, U_i)\}_{i \in I}$, c'est-à-dire un ensemble finie de paires d'ouverts $U_i \subset \mathcal{M}$ et d'applications $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

- les U_i forme un recouvrement de la variété : $\bigcup_{i \in I} U_i = \mathcal{M}$
- les ϕ_i sont des homéomorphismes sur leurs images respectives $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$.

⁷ Généralement des systèmes quantiques soumis à l'équation de Schrödinger.

- si l'intersection $U_i \cap U_j$ est non vide, alors $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}$ est un C^k difféomorphisme sur son image.

A travers ϕ_i , à tout point $x \in U_i$ sont associées des *coordonnées locales* $(x^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$, c'est-à-dire les coefficients de $\phi_i(x)$ dans une base $(e_\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$ de \mathbb{R}^n . Ces coordonnées sont dites locales car dépendantes du choix de la paire (U_i, ϕ_i) et la composée $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_j)}$ est vue comme un *changement de coordonnées*.

Dans toute la suite, toutes les objets propre aux cartes seront indexés via l'alphabet latin (i, j, k) et les indices associés aux coordonnées locales par des lettres grecs (μ, ν, α) .

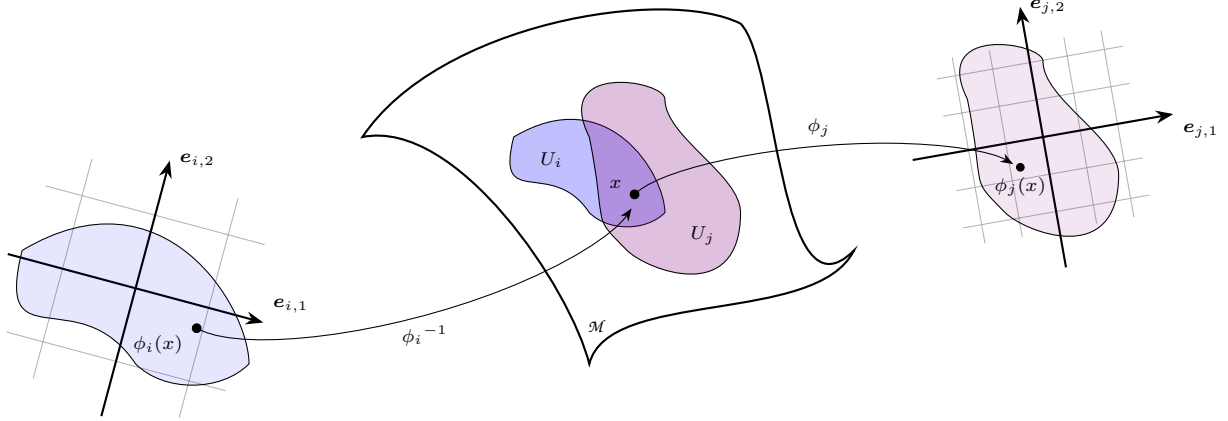


fig. 2.1 — La première figure de tout bon livre de géométrie différentielle : représentation de deux cartes avec l'application de changement de coordonnées. On y voit qu'à un point x peut être associée différentes coordonnées locales et que $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ permet de passer d'un repère à l'autre, i.e. d'un système de coordonnées à l'autre.

Ensuite, les *espaces tangents* de \mathcal{M} et son fibré tangent seront respectivement notés :

$$\forall x \in \mathcal{M}, T_x \mathcal{M} \quad \text{et} \quad T\mathcal{M} = \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} T_x \mathcal{M} \quad (2.1)$$

Pour le dire rapidement, les vecteurs tangents agissent comme une dérivation en cela que, pour une chemin $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$, la différentielle au point $x = \gamma(0)$ est définie par l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \dot{\gamma}_x : f &\longmapsto \left. \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t) \right|_{t=0} := \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Aussi, le système de coordonnées locales en $x \in \mathcal{M}$ induit une base sur $T_x \mathcal{M}$, qui sera noté $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. notation qui est justifiée en cela que, intuitivement, ∂_μ dérive toute fonction test $f \in \mathcal{C}^k(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ dans le long de la μ^{eme} coordonnée (locale) de x .

Plus généralement, si \mathcal{M} et \mathcal{N} sont deux variétés différentielles et $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ une application différentiable avec $\{\partial_\nu\}_\nu$ une base de $T\mathcal{N}$, sa *différentielle* (ou *application tangente* ou *push forward*) au point x est l'application linéaire qui, avec les conventions de sommation d'Einstein, s'écrit en coordonnées locales :

$$f_*(v) = f_*(v^\mu \partial_\mu) = \partial_\mu(f^\nu) v^\mu \tilde{\partial}_\nu \quad \text{ou encore} \quad (f_*)^\nu_\mu = \partial_\mu(f^\nu)$$

A partir de f_* est définie l'*image réciproque* ou *pull back* de f , qui correspond intuitivement à la transposée de f_* (dans ce cas, $T^* \mathcal{M}$ est identifié à $T\mathcal{M}$). Formellement elle est définie par dualité :

$$\begin{aligned} f^* : T^* \mathcal{N} &\longrightarrow T^* \mathcal{M} \\ g &\longmapsto g \circ f_* \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} T\mathcal{M} & \xrightarrow{f_*} & T\mathcal{N} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{f} & \mathcal{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^* \mathcal{M} & \xleftarrow{f^*} & T^* \mathcal{N} \end{array}$$

fig. 2.2 — Diagramme de passage de f à f_* et f^* .

où $T^*\mathcal{M}$ est le fibré cotangent, constitué des espaces duaux aux espaces tangents :

$$T^*\mathcal{M} := \bigsqcup_{x \in \mathcal{M}} (T_x \mathcal{M})^*$$

1.1.2 $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, une variété complexe

Si l'espace projectif complexe à été présenté comme le quotient $\mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1)$, il peut aussi être vu comme :

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^*$$

C'est-à-dire l'ensemble des classes de $\mathbb{C}^{n+1*} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n+1}}\}$ par la relation d'équivalence :

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid x = \lambda y$$

En isolant la norme des vecteurs, \mathbb{C}^{n+1*} peut être vu comme le produit $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^n$, et de même pour \mathbb{C}^* avec le module :

$$\mathbb{C}^{n+1*} \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^n \qquad \mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathrm{U}(1)$$

Ainsi, le quotient par \mathbb{C}^* revient à regarder les vecteurs de \mathbb{C}^{n+1*} modulo leur norme, puis modulo l'action de $\mathrm{U}(1)$. Or, ignorer la norme des vecteurs est équivalent à ne regarder que les vecteurs normés, donc appartenant à \mathbb{S}^n . De façon informelle, on pourrait alors écrire⁸ :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^* &\cong \mathbb{C}^{n+1*}/(\mathbb{R}^* \times \mathrm{U}(1)) \\ &\cong (\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{R}^*)/\mathrm{U}(1) \\ &\cong \mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1) = \mathbb{P}\mathbb{C}^n \end{aligned}$$

L'intérêt de cette écriture et que \mathbb{C}^{n+1} est un espace vectoriel, ce qui permet de décrire $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ en terme de carte [17, lemme 2.17, p. 64], [2, chap. 2], ce qui se fait comme suit. La classe de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ de représentant $z = (z^i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1*}$ est notée $[z]$ et on pose, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$U_i = \left\{ [z] \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n \mid z \in \mathbb{C}^{n+1}, z^i \neq 0 \right\} \qquad \phi_i : \begin{array}{ll} U_i & \longrightarrow \mathbb{C}^i \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-i} \cong \mathbb{C}^n \\ [z] & \longmapsto \frac{1}{z^i} z = (z^0/z^i, \dots, 1, \dots, z^n/z^i) \end{array} \quad (2.3)$$

Si l'ensemble d'arrivée $\phi_i(U_i)$ est équivalent à un ouvert de \mathbb{C}^n (l'une des composantes est constante), il est plus commode de travailler dans \mathbb{C}^{n+1} puisque cela évite de devoir enlever et rajouter des coefficients dans les formules de changement de cartes :

$$\forall z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z^{i,j} \neq 0 \quad (\text{i.e. } [z] \in U_i \cap U_j), \quad \phi_i \circ \phi_j^{-1}(z) = \frac{z^j}{z^i} z$$

Les (U_i, ϕ_i) forment un atlas sur l'espace projectif complexe, faisant de ce dernier une variété de dimension $\dim = 2n$. Les $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ étant holomorphes, $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est plus précisément une variété complexe de dimension complexe n et il est utile d'écrire ses coordonnées locales sous la forme $(w^\mu, \bar{w}^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$, où :

$$\forall w \in U_i, \forall \mu \neq i, \quad w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i}, \quad \text{où} \quad [z] = w$$

En annexe A se trouvent plus de détails sur les variétés différentielles complexes. Pour aller à l'essentiel,

⁸Ce qui s'écrit plus justement avec le troisième théorème d'isomorphisme :

$$\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{R}^{+*})/(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^{+*}) \cong \mathbb{S}^n/\mathrm{U}(1) = \mathbb{P}\mathbb{C}^n$$

même si la notation prête à confusion, il faut considérer les coordonnées w^μ et \bar{w}^μ comme complètement indépendantes. Par exemple, :

$$\begin{aligned}\partial_\mu(w^\mu) &= \frac{\partial}{\partial w^\mu} w^\mu = 1 & \partial_{\bar{\mu}}(w^\mu) &= \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\mu} w^\mu = 0 \\ \partial_\mu(\bar{w}^\mu) &= \frac{\partial}{\partial w^\mu} \bar{w}^\mu = 0 & \partial_{\bar{\mu}}(\bar{w}^\mu) &= \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\mu} \bar{w}^\mu = 1\end{aligned}$$

Ce qui fait que $(w^\mu, \bar{w}^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$ est bien une base de dimension réelle $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\mathbb{C}^n = 2n$. Par exemple, avec ces “notations” (cf. annexe A), le fait qu’une fonction $f : \mathbb{P}\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ soit holomorphe s’exprime via l’égalité :

$$\forall \mu \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (f_*)_{\bar{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \bar{w}^\mu} f = 0$$

Pour ce qui est des espaces tangents, $(\partial_\mu, \partial_{\bar{\mu}})_\mu$ forme une base de $T\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ et $(dw^\mu, d\bar{w}^\mu)_\mu$ une base de $T^*\mathbb{P}\mathbb{C}^n$. Dans ce contexte, un champs de forme bilinéaire g (tenseur de type (0,2)) a quatre types de composantes :

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &= g(\partial_\mu, \partial_\nu) & g_{\mu\bar{\nu}} &= g(\partial_\mu, \partial_{\bar{\nu}}) \\ g_{\bar{\mu}\nu} &= g(\partial_{\bar{\mu}}, \partial_\nu) & g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} &= g(\partial_{\bar{\mu}}, \partial_{\bar{\nu}})\end{aligned}$$

L’espace projectif complexe, en particulier, admet un produit hermitien, la *métrique de Fubini-Study*, qui est donnée par [24, sec. 8.5], [2, chap. 4] :

$$\begin{aligned}\forall w \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_w \mathbb{P}\mathbb{C}^n, \quad g_w(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= g_{\mu\bar{\nu}} u^\mu \bar{v}^\nu = 2 \frac{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha) \delta_{\mu\nu} - w_\mu \bar{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} u^\mu \bar{v}^\nu \\ &= \frac{2}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} u^\mu \bar{v}_\mu - \frac{2w_\mu \bar{w}_\nu}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} u^\mu \bar{v}^\nu\end{aligned}\tag{2.4}$$

À noter que seul les coefficients $g_{\mu\bar{\nu}}$ apparaissent. Cela est dû à la symétrie hermitienne de g , ce qui impose $g_{\mu\nu} = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} = 0$ et $g_{\bar{\mu}\nu} = \overline{g_{\mu\bar{\nu}}}$.

Enfin, et ce sera important pour la suite, g induit sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ une forme symplectique – dite de Kähler – qui s’interprète comme l’élément d’aire sur la variété induite par g et qui s’écrit :

$$\Omega = \Omega_{\mu\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu = i g_{\mu\bar{\nu}} dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu$$

Dans la définition de g (2.4), le coefficient peut varier. Par exemple, dans [24] vaut 1 alors que dans [15] il vaut $1/2\pi$. Ici, il a été choisi de le prendre égale à 2, ce qui n’est pas usuelle, mais qui sera nécessaire pour la suite (??). En quelques mots, c’est pour les même raisons que, dans la partie I précédente, la sphère de Poincaré était paramétrée par les angles doubles $(2\theta, 2\chi)$.

1.2 S^{2n+1} comme fibré principal

Cela étant, il est temps de définir proprement ce que l’on entend par “ S^n est équivalent localement à $\mathbb{P}\mathbb{C}^n \times \mathbb{U}(1)$ ”.

1.2.1 Définition générale

Pour le dire simplement, les *variétés fibrées* sont des variétés qui ressemblent localement à des espaces produits. Le ruban de Möbius en est un exemple typique : il ne peut pas s’écrire comme le produit d’un cercle avec un segment $S^1 \times [0, 1]$ à cause de la façon dont il est construit. Mais localement, une tranche du ruban est tout à fait comparable (*i.e.* difféomorphe) à un tel produit (cf. fig. 2.3).

Il existe tout un bestiaire de variétés fibrées en fonction de leurs propriétés et, parmi elles, celles qui vont nous intéresser sont dites principales :

DÉFINITION 6 (VARIÉTÉ FIBRÉE PRINCIPALE) — Une *variété fibrée principale* (VFP), ou *fibré principal* est constituée de deux variétés différentielles P et B telles que :

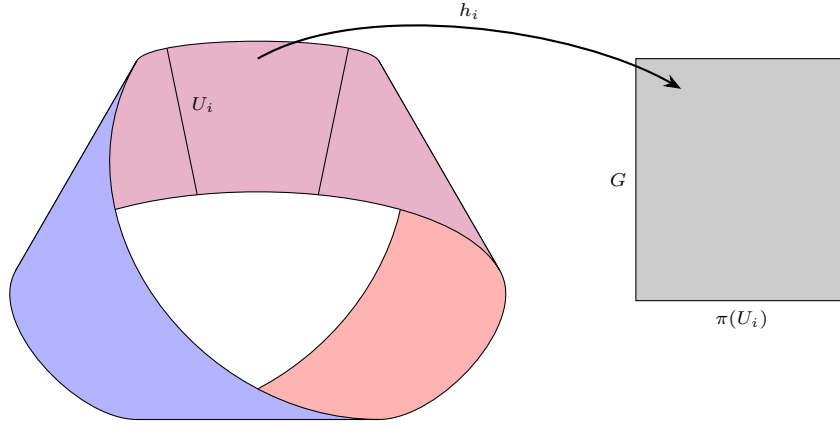


fig. 2.3 — Représentation du ruban de Möbius en tant que fibré. Les notations sont reprises de la définition 6.

- Il existe un groupe de Lie G opérant à droite (ou à gauche) sur P via l'application différentiable :

$$R : \begin{array}{ccc} P \times G & \longrightarrow & P \\ (p, g) & \longmapsto & R_g(p) := p \cdot g = pg \end{array} \quad (2.5)$$

- Il existe une surjection différentiable $\pi : P \longrightarrow B$ telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}(\pi(p)) = pG \quad (2.6)$$

- P est munie d'un ensemble de paires (U_i, h_i) tel que les U_i forment un recouvrement de B et tel que les $h_i : G \times U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset P$ soient des difféomorphismes vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \forall x \in B, \quad h_i(ab, x) = h_i(a, x) \cdot b \quad \text{et} \quad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

La variété B est appelée la *base* de la VFP, G son *groupe structural* et pG la *fibres* de P passant par p et au dessus de $\pi(p) \in B$. Le tout est notée $P(R, G, \pi, B)$ ou plus simplement $P(G, B)$.

Les fibres pG sont toutes difféomorphes à G et B est difféomorphe à P/G . Le diagramme commutatif ci-contre résume la situation (pr_2 est la projection canonique sur la deuxième composante du produit cartésien).

$$\begin{array}{ccc} G \times U_i & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U_i) \subset P \\ \text{pr}_2 \downarrow & \swarrow \pi & \\ U_i & & \end{array}$$

L'ensemble $\{(U_i \times G, h_i^{-1})\}_i$ est l'équivalent d'un atlas pour les variétés différentielles classiques mais adapté pour tenir compte de l'aspect fibrée de P et de l'action de G . Expliciter les changements de cartes dans P , ce fait comme suit.

D'abord, P étant localement difféomorphe à un produit $G \times U_i$, on peut y tracer des graphes appelés *sections locales*, comme sur les figures 2.4 et 2.5 ci-dessous. Formellement, une section locale au dessus de $U_i \subset B$ est une application $\sigma : U_i \longrightarrow P$ vérifiant :

$$\pi \circ \sigma = \text{id}|_{U_i}$$

Ensuite, les hypothèses sur $P(G, B)$ sont telles que G agit transitivement et librement (ou sans point fixe) sur P . C'est-à-dire que, sur une même fibre, tout point peut être atteint par n'importe quel autre via l'action de G (transitivité) :

$$\forall x \in B, \quad \forall p, q \in P_x, \quad \exists t(p, q) \in G \mid p = q \cdot t(p, q)$$

et que la seule façon de laisser les points invariants par cette même action est de passer par l'élément neutre e (libre) :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad p = p \cdot g \implies g = e$$

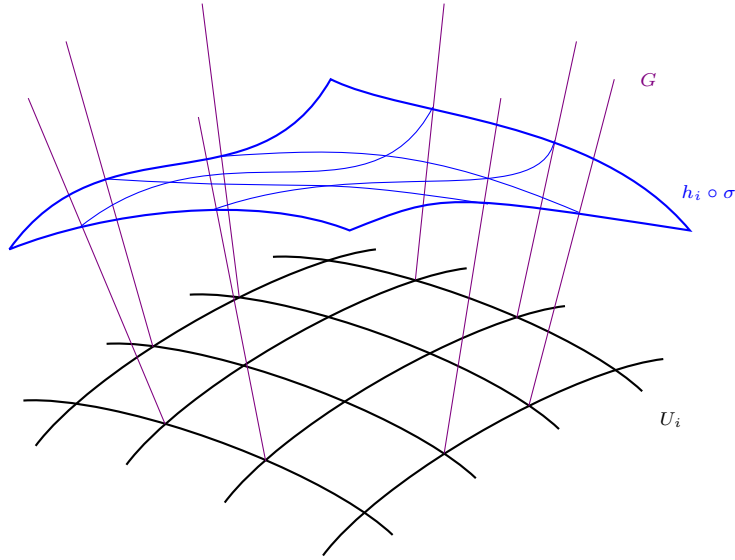


fig. 2.4 — Représentation d’une section locale σ au dessus de $U_i \subset B$ de dimension 2. Comme P n’est pas un produit à proprement parlé, σ est représenté dans $G \times U_i$ à travers h_i . On voit ici l’idée le nom “fibré” : de la base partent toutes les fibres, comme le feraient les fibres d’un tronc d’arbre et une section est littéralement une section, une coupe, de ces fibres.

De la transitivité de G , découle le fait que toutes les sections locales σ au dessus de U_i peuvent s’écrire à partir d’une même section σ_i via la formule :

$$\forall x \in B, \quad \sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma(x))$$

Son caractère libre, lui assure l’unicité d’un choix canonique de section σ_i sur U_i :

$$h_i(x, e) = \sigma_i(x)$$

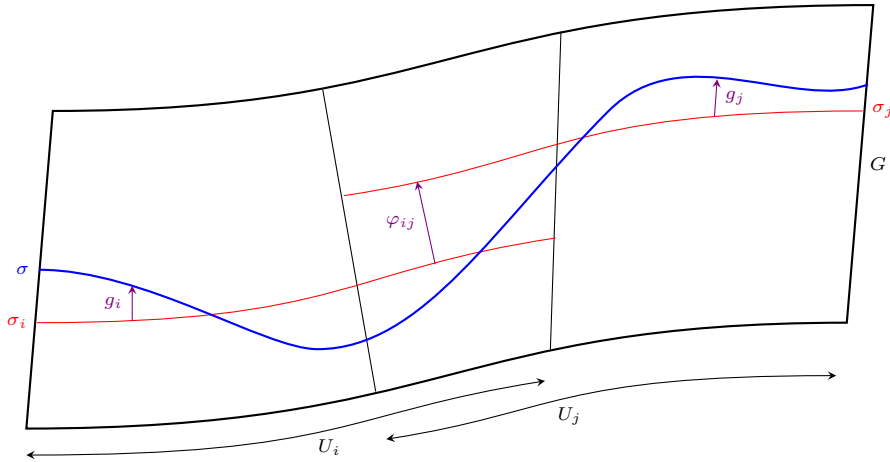


fig. 2.5 — Représentation de deux sections canoniques $\sigma_{i,j} = h_{i,j}(e, \cdot)$ au dessus de deux cartes U_i et U_j avec la fonction de transition φ_{ij} (def. 7). Est également représentée une section σ quelconque avec les translations $g_{i,j}$ telles que $\sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot g_i(x) = \sigma_j(x) \cdot g_j(x)$.

Cela mène à la définition :

DÉFINITION 7 (FONCTIONS DE TRANSITIONS) — À l'intersection entre deux cartes $U_{ij} := U_i \cap U_j$, le passage d'une section locale canonique à une autre se fait via :

$$\forall x \in U_{ij}, \quad \sigma_j(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma_j(x))$$

L'élément de G , $t(\sigma_i, \sigma_j)$, qui permet de faire le changement, est alors appelé *fonction de transition* et sera noté φ_{ij} . Elle fait effectivement la transition entre les cartes h_i et h_j en cela que :

$$\forall (g, x) \in G \times U_{ij}, \quad h_i^{-1} \circ h_j(g, x) = (\varphi_{ij}(x)g, x)$$

1.2.2 Le fibré $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbf{PC}^n)$

Dans ce travail, \mathbb{S}^n fait office d'espace total avec pour base \mathbf{PC}^n et pour groupe structural $\mathbf{U}(1)$. Pour obtenir la projection de \mathbb{S}^n sur \mathbf{PC}^n , il suffit de prendre la restriction de π à \mathbb{S}^n . En tenant compte de la normalisation, les coordonnées locales sur \mathbf{PC}^n se réécrivent, $\forall w \in U_i$:

$$w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i} = \frac{z^\mu}{|z^i|e^{i\arg(z^i)}} = \frac{z^\mu}{\sqrt{1 - \sum_{\nu \neq i} |z^\nu|^2}} e^{-i\arg(z^i)} \quad \text{car} \quad \sum |z^\nu|^2 = \|z\|^2 = 1$$

On constate bien que w^μ n'est défini par rapport à z^μ qu'à un choix de phase $e^{-i\arg z^i} \in \mathbf{U}(1)$ près. À l'inverse, un représentant z_i dans \mathbb{S}^n de $w \in U_i$ aura pour coefficient :

$$\forall \mu \neq i, \quad z_i^\mu = \frac{w^\mu}{\|w\|} e^{i\theta} \quad z_i^i = \frac{1}{\|w\|} e^{i\theta}$$

La norme de w étant à comprendre au sens des coordonnées locales sur U_i ⁹ :

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|(w^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}\|^2 = \frac{1}{|z_i^i|^2} \sum_{\nu \neq i} |z_i^\nu|^2 = \frac{1 - |z_i^i|^2}{|z_i^i|^2} \iff |z_i^i|^2 \|w\|^2 = 1 - |z_i^i|^2 \\ &\iff |z_i^i|^2 = \frac{1}{1 + \|w\|^2} \\ &\iff |z_i^i| = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} \end{aligned}$$

D'où l'expression des coefficients de $z_i \in \mathbb{S}^n$:

$$\forall \mu \neq i, \quad z_i^\mu = \frac{w^\mu}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta} \quad z_i^i = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta}$$

Tout cela permet d'écrire \mathbb{S}^n comme une variété fibrée principale :

PROPOSITION 2 — La $(2n+1)$ -sphère \mathbb{S}^n , vue comme variété plongée dans \mathbb{C}^n est une VFP de base \mathbf{PC}^n et de fibre type $\mathbf{U}(1)$. L'action de $\mathbf{U}(1)$ sur \mathbb{S}^n est induite par la multiplication par un scalaire complexe et où :

- La fibration π est la projection canonique de \mathbb{S}^n sur \mathbf{PC}^n :

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \longrightarrow & \mathbf{PC}^n \\ z & \longmapsto & [z] \end{array} \quad (2.7)$$

- Les cartes locales h_i s'écrivent :

$$\forall w \in U_i, \quad \forall e^{i\theta} \in \mathbf{U}(1), \quad h_i(w, e^{i\theta}) = \frac{(w^0, \dots, 1, \dots, w^n)}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta} \in \mathbb{S}^n \quad (2.8)$$

⁹ C'est un abus de notation, w n'a pas de norme en ce sens là puisqu'elle dépend du choix de carte U_i . Mais ici tout le raisonnement est purement local, donc ce n'est pas un problème.

- Les sections canoniques σ_i au dessus des U_i , elles, sont définies par :

$$\forall w \in U_i, \sigma_i(w) = h_i(w, 1) = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\nu \overline{w}_\nu}}(w^0, \dots, 1, \dots, w^n) \quad (2.9)$$

- Les fonctions de transitions entre deux cartes U_i et U_j s'écrivent :

$$\varphi_{ij}(w) = e^{-i \arg(z_i^i)} e^{i \arg(z_j^j)} \quad \text{où} \quad z_{i,j} = \phi_{i,j}(w) \quad (2.10)$$

Le cadrer étant planement posé, *blabla on va passer au interprétation / calcul des phase et c'est super*

1.3 Connexion et relèvements horizontaux

Le cadre étant posé, pour retrouver la notion de fréquence instantanée, il est nécessaire de munir $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$ d'une connexion. Cette dernière est introduite comme suit.

1.3.1 Définition générale

Comme P ressemble localement à un produit $G \times U_i$, il est utile de séparer ses espaces tangents $T_p P$ comme une somme directe d'espaces tangents respectivement aux fibres et à la base. Conformément aux représentations précédentes (fig. 2.3 à 2.5), les premiers sont appelées espaces tangents *verticaux*, les seconds *horizontaux* et l'on note :

$$\forall p \in P, \quad T_p P = V_p P \oplus H_p P$$

Les tangents verticaux $V_p P$ se définissent canoniquement via π , en tant que noyau de sa différentielle :

$$V_p P := \text{Ker}(T_p \pi) = \{v \in T_p P \mid T_p \pi(v) = 0\}$$

Ce n'est en revanche pas le cas des espaces horizontaux. Il faut donc faire un choix pour les $H_p P$ et c'est ce choix qui est appelé *connexion* (elle connecte les espaces tangents entre eux). Comme pour les verticaux, ces sous-espaces peuvent être caractérisés par une 1-forme différentiable ω sur P à valeur dans VP , auquel cas :

$$\forall p \in P, \quad H_p P = \text{Ker}(\omega_p)$$

Dans le cas des VFP, une connexion doit en plus avoir de bonnes propriétés au regard de l'action de G sur P , aboutissant à la définition :

DÉFINITION 8 (CONNEXION SUR VFP) — Une *connexion* sur une VFP $P(G, B)$ est la donnée d'un sous-espace tangent, $H_p P \subset T_p P$, en tout point de $p \in P$ tel que :

- $H_p P$ dépend différentiellement de p ("dépendre différentiellement" à un sens précis pour les sous-espaces mais qui ne sera pas utile pour la suite).
- $H_p P$ est supplémentaire à $V_p P$ dans $T_p P$:

$$T_p P = V_p P \oplus H_p P \quad (2.11)$$

- l'assignation des $H_p P$ est invariante par l'action de G au sens où :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad H_{R_g(p)} P = R_{g*}(H_p P) = \{R_{g*}(v) \mid v \in H_p P\} \quad (2.12)$$

Que l'on notera plus simplement :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad H_{p \cdot g} P = H_p P \cdot g = \{v \cdot g \mid v \in H_p P\} \quad (2.13)$$

Au delà d'assurer une compatibilité entre H et G , l'équation (2.12) permet de n'avoir à définir la connexion qu'en un seul point de chaque fibre, les autres se déduisant par cette formule. Concrètement, pour tout point

de la base $x \in U_i$, il suffit de la définir en $\sigma_i(x) = h_i(e, x)$, de sorte que l'espace horizontal en tout autre point $p = h_i(g, x) = \sigma_i(x) \cdot g$ au dessus de x sera donné par :

$$H_p P = H_{\sigma_i(x)} P \cdot g$$

Aussi, le fait que G soit un groupe de Lie permet de lier son algèbre $\mathfrak{g} \cong T_e G$ aux tangents verticales via l'application $\#$: ¹⁰

$$\forall (p, A) \in P \times \mathfrak{g}, \forall f \in \mathcal{C}(P, \mathbb{R}), \quad A^\#(p) = \left. \frac{d}{dt} p \cdot \exp(tA) \right|_{t=0} \in V_p P \quad (2.14)$$

Sachant cela, toujours dans le cas des VFP, la 1-forme de connexion est à valeur dans \mathfrak{g} :

DÉFINITION 9 (1-FORME DE CONNEXION) — La 1-forme de connexion ω d'une VFP $P(G, B)$ est définie comme la 1-forme différentiable sur P à valeur dans \mathfrak{g} (i.e. en tout point $p \in P$, ω_p est à valeur de $T_p P$ dans \mathfrak{g}), telle que $\forall p \in P$:

$$\forall A \in \mathfrak{g}, \omega_p(A^\#(p)) = A \quad H_p P = \text{Ker}(\omega_p) \quad (2.15)$$

$$\forall \mathbf{v} \in T_p P, \quad \omega_{p \cdot g}(\mathbf{v} \cdot g) := \omega_{p \cdot g}(R_{g*}(\mathbf{v})) = g^{-1} \omega_p(\mathbf{v}) g \quad (2.16)$$

Tout comme les $H[p]P$, la troisième égalité assure que ω n'a besoin d'être définie que sur un point de chaque fibre. Cela permet de définir ω localement non pas sur $U_i \times G$, mais seulement sur $U_i \cong U_i \times \{e\}$. Ainsi, ω induit une 1-forme sur les cartes U_i par l'image réciproque des sections canoniques σ_i . Elles sont notées $\mathcal{A}_i := \sigma_i^* \omega$ et sur le chevauchement $U_i \cap U_j$, elles vérifient :

$$\mathcal{A}_j = \varphi_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \varphi_{ij} + \varphi_{ij}^{-1} d\varphi_{ij} \quad (2.17)$$

Munir $P(G, B)$ d'une connexion permet, entre autre de définir la notion de relèvement horizontal :

DÉFINITION 10 (RELÈVEMENT HORIZONTAL) — Étant donné une trajectoire $\rho : \mathbb{R} \rightarrow B$ sur la base et un point $\gamma_0 \in \rho(0)G$ au dessus de $\rho(0)$, il existe un unique relèvement γ de ρ dont les vecteurs tangents sont tous horizontaux. i.e. tel que $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\pi \circ \gamma(t) = \rho(t) \quad \dot{\gamma}(t) \in H_{\gamma(t)} P \quad \gamma(0) = \gamma_0 \quad (2.18)$$

On parle de *relèvement horizontal* (*horizontal lift*, ou *transport parallèle* de γ_0 le long de ρ) puisque γ n'a pas de déplacement vertical au sens de la connexion. Du point de vue de la 1-forme ω , si γ s'écrit localement $\gamma_i = \sigma_i(\rho)g_i$, alors g_i vérifie l'équation (d'où vient l'unicité du relèvement) :

$$\frac{d}{dt} g_i(t) = -\mathcal{A}_i \rho(t) \cdot g_i(t) \quad (2.19)$$

Si maintenant γ est une trajectoire de P , on dira, par abus de langage, que $\tilde{\gamma}$ est le relèvement horizontal de γ si c'est le relèvement horizontal de sa projection $\pi \circ \gamma$ avec la condition initiale $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0)$.

Pour la suite, il sera utile d'avoir l'expression d'une trajectoire $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow P$ par rapport à son relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$. Pour l'obtenir, on note $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot g$, de sorte que sa dérivée s'écrit :

$$\dot{\gamma} = \dot{\tilde{\gamma}} \cdot g + \tilde{\gamma} \cdot dg = \dot{\tilde{\gamma}} \cdot g + \gamma \cdot g^{-1} dg$$

¹⁰ Les vecteurs tangents étant des formes linéaires, $A^\#(p)$ est plus exactement définie par l'application :

$$A^\#(p) : f \mapsto \left. \frac{d}{dt} f(p \cdot \exp(tA)) \right|_{t=0}$$

Ce à quoi on applique ω , donnant :

$$\begin{aligned}\omega_\gamma(\dot{\gamma}) &= \omega_\gamma(\dot{\tilde{\gamma}} \cdot g) + \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) \\ &= g^{-1}\omega_{\tilde{\gamma}}(\dot{\tilde{\gamma}})g + \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) && \text{d'après (2.16)} \\ &= \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) && \text{car } \tilde{\gamma} \text{ est horizontale}\end{aligned}$$

Le terme $g^{-1}dg$ restant étant un vecteur de $g^{-1}T_gG \cong T_eG \cong \mathfrak{g}$ et :

$$\omega_\gamma(\dot{\gamma}) = \omega_\gamma(\gamma \cdot g^{-1}dg) = \omega_\gamma((g^{-1}dg)^\#(p)) = g^{-1}dg$$

D'où $\gamma = \tilde{\gamma} \cdot g$ avec g est solution de :

$$\frac{d}{dt}g(t) = g(t)\omega_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \quad (2.20)$$

Un Commentaire sur cette Formule peut-être ? (mais je sais pas quoi

1.3.2 Choix de connexion sur $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$

Dans le cas de $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$, la métrique sur \mathbb{S}^n induit naturellement un choix de connexion car la projection π est une submersion dite riemannienne [16]. Formellement, c'est dire que la projection de \mathbb{S}^n sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est telle que¹¹ :

$$\forall p \in \pi^{-1}(w), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n, \quad \frac{1}{2}g_{\pi(p)}(\pi_*\mathbf{u}, \pi_*\mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}_H, \mathbf{v}_H \rangle \quad (2.21)$$

où g est la partie réelle¹² hermitienne de la métrique de Fubini-Study. Plus concrètement, les espaces tangents de \mathbb{S}^n s'écrivent :

$$T_p\mathbb{S}^n = \mathrm{Vec}\{p\}^\perp := \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \Re e \langle \mathbf{v}, p \rangle = 0\}$$

et sachant que $ip \in \mathrm{Vec}\{p\}^\perp$, ils se séparent en deux composantes orthogonales :

$$T_p\mathbb{S}^n = \mathrm{Vec}\{p\}^\perp = \mathrm{Vec}\{ip\} \oplus \mathrm{Vec}\{ip\}^\perp$$

Ainsi, la nature de π (2.21) est telle que le premier membre est l'espace tangent vertical à p et le second invariant par l'action de $\mathrm{U}(1)$:

$$\forall e^{i\theta} \in \mathrm{U}(1), \quad \mathrm{Vec}\{i(e^{i\theta}p)\}^\perp = \mathrm{Vec}\{ip\}^\perp$$

Ce qui permet de poser $H_p\mathbb{S}^n := \mathrm{Vec}\{ip\}^\perp$ et donne directement la 1-forme associée :

$$\begin{aligned}H_p\mathbb{S}^n &= \{\mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n \mid \Re e \langle \mathbf{v}, ip \rangle = 0\} \\ &= \{\mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n \mid \Im m \langle \mathbf{v}, p \rangle = 0\} && \iff \omega_p(\mathbf{v}) = \Im m \langle \mathbf{v}, p \rangle\end{aligned}$$

Enfin, comme l'algèbre de Lie de $\mathrm{U}(1)$ est $\mathfrak{u}(1) \cong i\mathbb{R}$, il convient de de poser :

$$\forall p \in \mathbb{S}^n, \forall \mathbf{v} \in T_p\mathbb{S}^n, \quad \omega_p(\mathbf{v}) := i\Im m \langle \mathbf{v}, p \rangle \quad (2.22)$$

Un tel choix de connexion n'est pas anodin d'un point de vue signal puisque ω donne la fréquence instantanée telle que définie dans la partie I précédente. Son intérêt dans l'étude de la phase géométrique était déjà bien connue et porte généralement le nom de *connexion de Aharonov-Anandan* [5, sec. 4.2]. En revanche, le fait qu'elle soit induite par la métrique est bien moins connue et, à notre connaissance, seul Mukunda & Simon en font mention [23], même s'ils n'évoquent pas la métrique de Fubini-Study.

Reste alors une question : pourquoi la fréquence instantanée apparaît ici et comment le comprendre en terme de signal ?

¹¹ Le facteur $1/2$ est hérité du choix de définition de la métrique de Fubini-Study, expliqué plus tôt (ss-sec. 1.1.2)

¹² Cette métrique induite ne peut pas être hermitienne car \mathbb{S}^n n'est pas une variété complexe.

II — Interprétation des phases sur $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$

2.1 Fréquence instantanée et phase dynamique sur $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$

Pour y apporter une réponse, on se propose de prendre le problème par l'autre bout : comment définir la notion de fréquence instantanée d'un signal dans le fibré $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$?

Comme, à chaque instant t , un signal γ sur \mathbb{S}^n est représenté par une paire $(e^{i\alpha(t)}, \rho(t)) \in \mathbf{U}(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n$ à travers les h_i , il serait tentant de voir $\alpha(t)$ comme la fréquence du signal et $\rho(t)$ comme son état de polarisation.

Le problème de cette représentation est qu'elle dépend du choix de carte U_i , ainsi sur l'intersection U_{ij} , γ aurait (au moins) deux notions de fréquence instantanée.

C'est là qu'intervient la connexion. D'une part, la 1-forme ω associée est définie globalement sur le fibré, autrement dit, elle est indépendante des représentations locales de γ .

D'autre part, le relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$ d'une courbe $\rho \subset \mathbb{P}\mathbb{C}^n$, par définition, n'a pas de variation verticale. Dans notre contexte, cela signifie que $\tilde{\gamma}$ n'a pas de variation dans la direction de $\mathbf{U}(1)$, donc son état de polarisation (composante sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$) varie mais pas ses "fréquences".

Ainsi, le relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$ d'un signal γ s'interprète comme une version de ce dernier dénuée de toute fréquence instantanée. L'action α permettant de passer de $\tilde{\gamma}(t)$ à $\gamma(t)$ (i.e. $\gamma(t) = e^{i\alpha(t)}\tilde{\gamma}(t)$) peut alors être comprise comme l'ajout d'une fréquence instantanée (voir [fig. 2.6](#) et ?? ci-dessous)

Un signal qui n'aurait pas de fréquence instantanée mais une polarisation instantanée n'a pas vraiment de sens. Cela renvoie à notre discussion de première partie : la fréquence instantanée d'un signal univarié devait contenir les hautes fréquences et son amplitude les basses. Ici le problème est le même, mais avec l'état de polarisation en lieu de l'amplitude. Pour s'en convaincre, il est utile de retourner sur le cas bivarié.

La projection sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$ de γ représente l'ellipse de polarisation instantanée. Mais si γ n'a pas de fréquence instantanée, alors $\gamma(t)$ n'est plus représenté que par le sommet de l'ellipse paramétrée par ρ_γ . L'on pourrait alors argumenter que tout signal peut être décrit par la seule variation de son état de polarisation, ce qui est parfaitement inintéressant.

Cette vision du relèvement horizontal est donc purement formelle et, si elle a bien un sens géométrique, elle n'a pas vraiment de sens du point de vue du signal.



fig. 2.6 — Fréquence instantanée d'un signal x vu comme variation vertical de x par rapport à son relèvement horizontal \tilde{x} associé. À noter que \tilde{x} ne dépend pas des cartes mais dépend de la trajectoire ρ_x de x sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$.

En admettant l'interprétation de la 1-forme de connexion comme fréquence instantanée, les discussions de première partie ([sec. 1.2](#)) suggèrent de choisir là encore :

$$\forall p \in \mathbb{S}^n, \forall \mathbf{v} \in T_x \mathbb{S}^n, \quad \omega_p(\mathbf{v}) = i \Im \langle \mathbf{v}, p \rangle \quad (2.23)$$

La phase dynamique, s'interprète alors comme la déviation du signal par rapport à son relèvement horizontal. Ainsi, $g = e^{i\Phi_{\text{dyn}}(\gamma)}$ est solution de (2.20), qui se réécrit alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} g'(t) = g(t) i \Im \langle \dot{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle \\ g(t_0) = 1 \end{cases} \iff g(t) = e^{i \int_{t_0}^t \Im \langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) \rangle ds}$$

Ce qui redonne la formule :

$$\Phi_{\text{dyn } \gamma}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Im \langle \dot{\gamma}(s), \gamma(s) \rangle ds \quad (2.24)$$

Ici, deux remarques. D'abord, il avait été fait mention dans la première partie que la phase φ des signaux AM-FM-PM, formule (1.15) :

$$\mathbf{x}(t) = a(t) e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} = a(t) e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix}$$

n'avait pas d'interprétation directe par rapport à Φ_{tot} et Φ_{dyn} . Cette discussion permet de faire sens de ce problème.

En effet, cette formule "force" un choix de présentation \mathbf{x} par le triplet $(a, \varphi, \mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger)$. Or, on vient de le voir, du point de vue géométrique, ce choix de représentation n'a de sens que localement et pour cette raison φ ne peut pas avoir d'interprétation directe.

Ensuite, si cette définition (2.24) de la phase dynamique est bien indépendante du choix de carte, elle dépend en revanche du relèvement horizontal de γ et, *a fortiori*, de la projection ρ_γ . C'est là que va pouvoir émerger la phase géométrique, ce que nous allons voir à présent.

2.2 Phase géométrique dans le cas cyclique

Notamment dans le cadre quantique, la phase géométrique est connue pour avoir deux interprétations géométriques [5, 7, 11] : soit comme conséquence d'un transport parallèle sur \mathbb{S}^n soit comme une mesure de l'aire de la surface entourée par le signal projeté sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$. Résultats qui sont présentés et redémontrés (avec les détails en annexes) dans cette section.

Pour se faire, sera d'abord traité le cas particulier des signaux cycliques (*ss-sec.* 2.2.1 et 2.2.2) et il sera ensuite montré que, du cas général, il est toujours possible de s'y ramener (*ss-sec.* 2.3.1).

2.2.1 ... du point de vue de la connexion

D'abord une définition :

DÉFINITION 11 (TRAJECTOIRE CYCLIQUE) — Un signal γ de \mathbb{S}^n sera dit *cyclique* si entre les instants t_0 et t , il retourne dans la même fibre :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \gamma(t) = e^{i\alpha} \gamma(t_0) \quad (2.25)$$

Dit autrement, la projection de γ , $\rho_\gamma := \pi \circ \gamma$ forme un lacet sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$.

Cette hypothèse est très restrictive puisqu'elle ne peut être vérifiée que ponctuellement, sans quoi γ n'aurait qu'un mouvement vertical (*i.e.* serait de la forme $\gamma(t) = e^{i\alpha(t)} p$), ce qui n'est pas particulièrement intéressant.

Cela étant dit, elle a le bon goût d'énormément simplifier les choses puisque, comme tout ce passe dans la même fibre, il est très simple calculer et d'annuler individuellement les phases de γ .

Suivant les travaux de Aharonov & Anandan [1] et les explications de Bohm [5], la première remarque est que, comme $\gamma(t_0)$ et $\gamma(t)$ sont dans une même fibre, la phase totale est donné par le paramètre α de (2.25)¹³ :

$$e^{i\Phi_{\text{tot}}} = e^{i\alpha} = t(\gamma(t_0), \gamma(t)) \quad (2.26)$$

¹³ Pour mémoire, $t(p, q)$ est l'élément $e^{i\alpha}$ de $U(1)$ telle que $q = e^{i\alpha} p$

La phase dynamique, conformément à ce qui a été dit plutôt, donne la déviation au relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$:

$$e^{i\Phi_{\text{dyn}}} = t(\tilde{\gamma}(t), \gamma(t)) \quad (2.27)$$

Et la phase géométrique s'écrit alors :

$$\begin{aligned} e^{i\Phi_{\text{geo}}} &= e^{i\Phi_{\text{tot}}} e^{-i\Phi_{\text{dyn}}} = t(\gamma(t_0), \gamma(t)) \, t(\tilde{\gamma}(t), \gamma(t))^{-1} \\ &= t(\gamma(t_0), \gamma(t)) \, t(\gamma(t), \tilde{\gamma}(t)) \\ &= t(\tilde{\gamma}(t_0), \tilde{\gamma}(t)) \quad \text{car } \gamma(t_0) = \tilde{\gamma}(t_0) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Elle correspond donc au déplacement vertical de $\tilde{\gamma}$ dû à la courbure de \mathbb{S}^n . Dit autrement, elle mesure la déviation dû au transport parallèle le long de γ . Les trois dernières formules, eqs. (2.26), (2.27) et (2.28), sont représentées dans la figure 2.7 ci-dessous :



fig. 2.7 — Représentation des trois phases de γ dans le cas cyclique. Schéma repris de [5, fig. 4.1]

Vu ainsi, il apparaît clairement que Φ_{geo} est indépendante du relèvement γ par rapport à ρ_γ , autrement dit qu'elle est invariante par transformation de jauge. De même, elle ne dépend que de $\gamma(t_0)$ et $\tilde{\gamma}(t)$, ce qui montre qu'elle est invariante par reparamétrisation de γ .

Du point de vue signal, cela se traduit par le fait que l'évolution de l'état de polarisation (ρ_γ ou $\tilde{\gamma}$), quand bien-même indépendant que la fréquence instantanée, cause un déphasage (décalage vertical). Là encore, c'est quelque chose que le modèle AM-FM-PM peut difficilement représenté car demanderait de faire apparaître une exponentielle qui ne dépend du relèvement horizontal $\tilde{\gamma}$, dont l'écriture en une paire (φ, ρ) dépend de la carte locale.

Du point de vue géométrique, cette description de $e^{i\Phi_{\text{geo}}}$ est plus connue sous le nom d'*holonomie* du lacet ρ_γ . De façon généralement, le groupe d'holonomie du point $p \in P$ associé à la (1-forme de) connexion ω sur $P(B, G)$, est l'ensemble des points de pG qui peuvent être atteint par une relèvement horizontal partant de p :

$$\text{Hol}_p(\omega) := \{g \in G \mid \exists \gamma, \tilde{\gamma}(0) = p \text{ et } p \cdot g = \tilde{\gamma}(1)\} \quad (2.29)$$

Cette formulation, si elle est très élégante, n'est en revanche que très peu instructive. En effet, en fonction des propriétés de l'espace total et de la base du fibré, Hol peut avoir diverses propriétés.

Dans notre cas, $\text{Hol}_p(\omega)$ est un sous-groupe de Lie connexe non trivial du groupe structural. Concrètement, cela signifie dans notre cas que $\text{Hol}_p(\omega) = \text{U}(1)$ ¹⁴, i.e. Φ_{geo} peut prendre absolument n'importe quelle valeur (alors même que l'on est toujours dans le cas particulier des signaux cycliques).

¹⁴ $\text{Hol}_p(\omega)$ est toujours un sous-groupe de Lie. Ici connexe car $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est simplement connexe, et non trivial car la connexion sur \mathbb{S}^n n'est pas plate. Or, le seul sous-groupe de Lie de $\text{U}(1)$ ayant cette propriété est lui-même. Ces informations sont tirées de Wikipédia, voir également [24, sec. 8.5.3] pour plus d'information sur le cas particulier des $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$.

2.2.2 ... du point de vue de la métrique

Cela dit, la phase géométrique étant invariante par transformation de jauge, elle doit s'écrire uniquement dans $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$. Pour cela l'on suppose, sans perte de généralité, que γ reste au dessus de la carte U_i , de sorte que :

$$\gamma = h_i(w, e^{i\theta}) = \sigma_i(w) e^{i\theta}$$

Avec, et toujours sous l'hypothèse que γ est cyclique, Φ_{geo} se réécrit (cf. annexe B.1.)¹⁵ :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\gamma) &= \Phi_{\text{tot}}(\gamma) - \Phi_{\text{dyn}}(\sigma_i(w) e^{i\theta}) \\ &= \theta(t) - \theta(t_0) - \left(\frac{1}{i} \int_{t_0}^t \mathcal{A}_i(\rho(s)) ds + \theta(t) - \theta(t_0) \right) \\ &= i \int_{t_0}^t \mathcal{A}_i(\rho(s)) ds \end{aligned} \quad (2.30)$$

Or, ρ étant fermée sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, Φ_{geo} est l'intégrale d'une forme linéaire le long d'un lacet, ce à quoi le théorème de Stokes s'applique et donne :

$$\Phi_{\text{geo}}(\gamma) = i \oint_{\rho} \mathcal{A}_i = i \iint_{\Sigma} d\mathcal{A}_i$$

Où Σ est une surface de bord ρ et où la dérivée extérieure de ω n'est autre que la forme de Kähler de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ (cf. annexe B.2. & B.3. pour une démonstration) :

$$\Phi_{\text{geo}}(\gamma) = \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \Omega \quad (2.31)$$

Ainsi, conformément à l'interprétation de la forme de Kähler, la phase géométrique de toute courbe cyclique γ est donnée par la demi-aire de la surface entourée par sa projection $\pi(\gamma)$ sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$.

2.3 Phase géométrique dans le cas le plus générale

De retour au cas général, si maintenant γ est qu'elle conque, pour retrouver les interprétation précédente, le plus simple est encore de se ramener au cas cyclique. Pour cela, il suffit de refermer la courbe tracée par γ dans \mathbb{S}^n de sorte à que cet ajout n'altère pas la phase géométrique de γ .

Pour se faire, et sachant que Φ_{geo} est intimement lié à la métrique (par la connexion) de $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$, c'est naturellement du côté des géodésiques de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ que l'on se tourne.

2.3.1 Les géodésiques et leurs phases

Il est montrer – cf. annexe C, ou [4, sec. 3.E] – que, étant donnée une géodésique ρ_g de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, tout relèvement horizontale¹⁶ $\tilde{\gamma}_g$ de cette dernière vérifie :

$$\forall t \geq t_0, \quad \tilde{\gamma}_g(t) = \tilde{\gamma}_g(t_0) \cos(t - t_0) + \dot{\tilde{\gamma}}_g(t_0) \sin(t - t_0) \quad (2.32)$$

La courbe γ_g étant horizontale, elle n'a pas de phase dynamique, et donc :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\rho_g) &= \Phi_{\text{tot}}(\tilde{\gamma}_g) = \arg \left\langle \tilde{\gamma}_g(t_0) \cos(t - t_0) + \dot{\tilde{\gamma}}_g(t_0) \sin(t - t_0), \tilde{\gamma}_g(t_0) \right\rangle \\ &= \arg \left(\cos(t - t_0) \langle \tilde{\gamma}_g(t_0), \tilde{\gamma}_g(t_0) \rangle \right) \quad \text{car } \langle \dot{\tilde{\gamma}}_g, \tilde{\gamma}_g \rangle = 0 \\ &= \arg \left(\cos(t - t_0) \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ce qui vaut 0 ou π (modulo 2π) selon le signe du cosinus. Contrairement à ce qui était dit dans [23], la

¹⁵ Quel ressemblance avec la calcul de la calotte dans la partie précédente...

¹⁶ Tout relèvement horizontale oui, mais avec une paramétrisation particulière (trajectoire uniforme). Φ_{geo} étant, comme on la vu, invariante par le choix de paramétrisation cela n'a pas d'importance.

phase géométrique n'est donc pas systématiquement nulle sur les géodésique de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ et tenir compte de cela va permettre de renforcer le lien en cette l'écriture géométrique des signaux n -variés vue dans cette partie et le celle des signaux AM-FM-PM.

Toujours d'après [4, sec. 3.E], l'ensemble des géodésiques de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ passent par deux points donnés, reposent sur une unique ligne complexe, c'est-à-dire une sous-variété difféomorphe à $\mathbb{P}\mathbb{C}^1 \cong S^2$. De plus, ces géodésiques, sont des grands cercles.

La phase géométrique d'un de ces grands cercles ρ_c , il est donc cyclique, à pour phase géométrique l'intégrale de $1/2\Omega$ sur la moitié de S^2 :

$$\Phi_{\text{geo}}(\rho_c) = \frac{1}{4} \iint_{S^2} \Omega$$

D'autre part, cette intégrale est un résultat connue [15, p. 119] et vaut 4π , ce qui donne :

$$\Phi_{\text{geo}}(\rho_c) = \frac{1}{4} \iint_{S^2} \Omega = \pi$$

Ainsi, la courbe ρ_g , qui n'est donc d'une portion de ρ_c , a une phase géométrique qui est soit nul, soit égale à celle de son prolongement ρ_c . Cela suggère que, dans le second cas, la phase géométrique du complémentaire de ρ_g par rapport à ρ_c , noté $\widehat{\rho}_c$ est nulle.

Pour le montrer, il suffit de considérer un nouveau relèvement γ_c (resp. $\gamma_g, \widehat{\gamma}_g$) de ρ_c (resp. $\rho_g, \widehat{\rho}_g$) tel que chacune de leur phase totale soit nul – ce qui est toujours possible et n'affecter pas la phase géométrique de ρ_c . De cette façon, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\rho_c) &= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma_c) = -\int_{\gamma_c} \omega = -\int_{\gamma_g} \omega - \int_{\widehat{\gamma}_g} \omega \\ &= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma_g) - \Phi_{\text{dyn}}(\widehat{\gamma}_g) \\ &= \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) + \Phi_{\text{geo}}(\widehat{\gamma}_g) \end{aligned}$$

Il vient alors que, si jamais la géodésique reliant deux points est non nulle, il est toujours possible de considérer son complémentaire par rapport à γ_g , qui sera alors de phase géométrique nulle :

$$\Phi_{\text{geo}}(\rho_c) = \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) = \pi \implies \Phi_{\text{geo}}(\widehat{\gamma}_g) = \Phi_{\text{geo}}(\gamma_c) - \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) = 0$$

De retour sur l'exemple de la partie I, section 2.2, on a vu qu'un signal décrivant une boucle horizontale sur la sphère de Poincaré, sa phase géométrique était donné par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = \pi - \pi \sin(2\chi_0) \quad \text{avec } 2\chi_0 \text{ la latitude}$$

En considérant le cas $\chi_0 = 0$, \mathbf{x} décrit alors une géodésique et Φ_{geo} donne à nouveau π . Aussi, et surtout, si l'on se met à faire varier θ entre 0 et π , un rapide calcul montre que :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = \arg \left(\cos(\theta(t) - \theta(t_0)) \right)$$

Avec l'interprétation graphique en tête, cette formule suggère que la géodésique, au sens du chemin le plus court, reliant deux points sera toujours 0, car le " $\cos \Delta\theta$ " est positif. Ceux, hors mis dans le cas le cas où les points sont antipodaux, auquel cas $\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}) = \pi$.

Ce n'est en revanche pas démontrer et ce qui est, de toute façon, sans conséquence pour la suite du mémoire.

2.3.2 Phase géométrique dans le cas le plus générale

Considérons à présent un signal $\gamma : [t_0, t] \rightarrow \mathbb{S}^n$ quelconque de projection ρ sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, et γ_g le relèvement de la géodésique reliant $\rho(t)$ à $\rho(t_0)$ n'ayant pas de phase géométrique et vérifiant :

$$\gamma_g(t_0) = \gamma(t) \quad \gamma_g(t) = \gamma(t_0)$$

De cette façon, la concaténation des deux, notée $\gamma \frown \gamma_g$, vérifie :

$$\Phi_{\text{tot}}(\gamma \frown \gamma_g) = \arg \langle \gamma(t_0), \gamma(t_0) \rangle = 0 \quad \Phi_{\text{tot}}(\gamma_g) = \arg \langle \gamma(t_0), \gamma(t) \rangle = -\Phi_{\text{tot}}(\gamma)$$

et donc :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\gamma \frown \gamma_g) &= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma \frown \gamma_g) \\ &= -\Phi_{\text{dyn}}(\gamma) - \Phi_{\text{dyn}}(\gamma_g) && \text{en séparant l'intégrale de la phase dynamique, (2.24)} \\ &= \Phi_{\text{geo}}(\gamma) + \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) - \Phi_{\text{tot}}(\gamma) - \Phi_{\text{tot}}(\gamma_g) \\ &= \Phi_{\text{geo}}(\gamma) + \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) \\ &= \Phi_{\text{geo}}(\gamma) && \text{car } \Phi_{\text{geo}}(\gamma_g) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, $\gamma \frown \gamma_g$ est cyclique et on peut appliquer les résultats de la section 2.3, aboutissant à la formule :

$$\Phi_{\text{geo}}(\gamma) = \Phi_{\text{geo}}(\gamma \frown \gamma_g) = \frac{1}{2} \iint_{\widehat{\Sigma}} \Omega \quad (2.34)$$

où $\widehat{\Sigma}$ est la surface entourée par $\gamma \frown \gamma_g$.

Y'aurait un truc sympa à dire ici mais j'ai pas encore trouvé quoi... genre pourquoi j'ai mis un facteur 2 sur la métrique de Fubini-Study...

III — Coclusion

On a donner une nouvelle

PARTIE III

* APPLICATIONS ET GÉNÉRALISATION

C'est juste un premier jet du plan, ça va surement bouger. Notamment l'exemple 3D qu'est en fait 2D :/

- On va donner trois exemples qui permettront de voir à quoi ce peut servir, quelles sont les limites du notre modèle et comment les généraliser en corps (et pourquoi)
- On va montrer crescendo dans les dimensions :
 - en 2D : pour faire le lien avec la première partie
 - en 3D : ondes gravitationnelles générées par un système binaire. L'occasion de voir le problème d'interprétabilité du modèle avec le modèle et de parler de bruit
 - en nD : système de capteur. Pour parler de "l'état de polarisation" (composante sur PC^n) même si le terme n'est plus approprié et du cas non commutatif
- conséquence de l'hypothèse bédro ?

I — * Calcul pratique de la phase géométrique

Dans la partie II précédente, deux formulations de la phase géométrique ont été présentées. Cela dit, elle ne sont que très peu pertinentes en pratique car passant par des intégrales dans PC^n qui ne s'écrivent explicitement qu'avec des coordonnées locales.

Que ce soit par rapport à la connexion ou à la forme de Kähler, les termes intégrales sont principalement dû à l'écriture de la phase dynamique. Mais la phase géométrique étant invariante par transformation de jauge, il est tout à fait possible de s'en débarrasser en considérant un

- Il faut faire du calcul approximé d'aire sur PC^n . 2 pb :
 - Calcul d'aire : MEH
 - PC^n est une variété quotient : MEH
- Solution :
 - $\pi(\mathbf{x}) \cong \rho_{\mathbf{x}}$
 - On simplifie tout par des approxes de géodésique
- géodésique $\implies \Phi_{\text{geo}} = \Phi_{\text{tot}}$ donc c'est juste des arg ! (super fast)
- En cumulant le tout, ça fait donner l'invariant de Bargmann :
- Bonus : c'est super parce que, en pratique, on a toujours des données ponctuelles, dont pas de besoin de "choisir" les points de subdivision !

II — * Exemples d'applications

2.1 * Cas 2D : lien avec la première partie

- $\mathbb{P}\mathbb{C}^1 \cong S^2$
- Stokes donne exactement le calcul de la demi-aire

-
- Présentations des résultats de [18]
 - *je trouve qu'on s'éloigne un peu trop du sujet : Φ_{geo} pour les SIGNAUX. Là on a un EDP qui dirige le truc + j'ai rien à apporté dessus*

2.2 * Cas 3D : application aux ondes gravitationnelles

- Deux trous noirs tournent autour l'un de l'autre
- Ils sont caractérisés par 3 paramètres : masse, spin, l'autre
- 4 simulations :
 - leur axe de rotations sont de moins en moins aligné
 - ca affecte l'état de polarisation
 - ... et ca engendre de la phase géométrique qui se mesure
- Cet exemple amène 2 questions :
 - comment le modèle AM-FM-PM se généralise en hauteD ?
 - comment la phase géométrique réagit au bruit
 - on en reparle en dernière partie

2.3 * Cas nD : système de capteurs

- cf [ici](#) pour les détails
- invariance par $U(n)$? vraiment ?

III — * Pour la suite

3.1 * Limite du modèle

- $\mathbb{P}\mathbb{C}^1 \cong S^2$ est super satisfaisant mais au delà c'est beaucoup moins claire.
- Pour passer de 2D à 3D, on a juste augmenté les matrices de rotation, *i.e.* $SO(3)$ au lieu de $SO(2)$.
- C'est ce qu'on fait par Lilly & Olhede [21] et Lefèvre a discuté des généralisations dans sa thèse [20]
- Ca fait sens physiquement mais par rapport à $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ c'est loin d'être évident
- ... est-ce que c'est là que se cache le lien avec le double-cover de SO par SU ???
 - Il serait vraiment intéressant (instructif) de faire ce lien
 - peut-être notre travail sur la phase g est une généralisation de ça ?

3.2 * Rapport de la phase géométrique au bruit

- Si une source d'information n'est pas sensé changer d'état de polarisation, mais qu'on constate qu'il y a phase géométrique, alors ce n'est (quasiment) que du bruit. Ça peut donc être un premier filtre pour débruiter.
 - pour le corriger en revanche, c'est un peu plus technique parce que ça veut dire qu'il faut tuer la polarisation du signal ou au moins la réduire à une géodésique.
 - une idée serait de regarder la moyenne du signal projeté dans $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ et du tout simplement remplacer l'état de polarisation du signal par ca moyenne.
 - ca devrait pas affecter le phase dynamique
 - En étant un peu moins restrictif l'évolution de l'état de polarisation du signal, on a vu qu'un la phase instantanée doit contenir les hautes fréquences du signal, Peut-être qu'on pourrait se servir de ça pour contraindre les variations de l'état de polar et, là encore, en faire un critère de débruitage.
 - par exemple en tuant les hautes fréquences de la phase géométrique
 - d'ailleurs, ca amène la question : quide de faire du Fourier sur les phases ? La phase totale est pas très intéressante (j'imagine), mais les deux autres ?
 - c'est un peu flou quand-même parce Φ_{geo} vient de l'état de polar, qui lui n'est affecté parles transfo de jauge
-
- Il faudrait voir comment la phase géométrique réagit au bruit.
 - Si elle y est très résiliente, elle pourrait être source d'information sur des données. Voir même, être une information de base pour reconstruire une signal (genre en utilisant le fait qu'elle soit à propos des basse-fréquence)
 - Plus généralement, il serait bien de voir comment elle réagit en fonction de la distribution spectrale du bruit

3.3 * Cas non commutatif

- En gros on va devoir aller Stiefel, aka $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ va devenir une grassmannienne $Stiefel/U(k)$
- Fubini-Study s'étend à ces espaces, et les grassmannienne sont toujours des variétés complexes
- La formule de la phase dyn va changer par contre (path ordering) et donc son interprétations sera à revoir :/
- Autres potentielles applications :
 - Subspace tracking
 - ?

ANNEXES

ANNEXES DE LA PARTIE I

Annexe A — Compléments sur l'analyse temps-fréquence

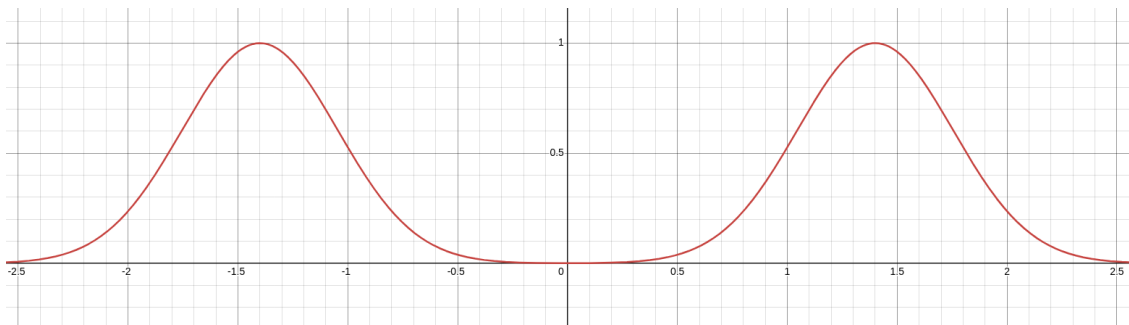
C'est un copier collé du premier jet du mémoire, c'est pas très cohérent avec le reste là tout de suite. Je la retoucherai plus tard.

A.1. * Formalisme derrière la transformée en SA ou le problème de signaux réels et comment le résoudre

D'abord, du point de vue de l'analyse temps-fréquence, les signaux réels sont problématiques car leur spectre sont à symétrie hermitienne et leur densité spectrale symétrique :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R} &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{x}(-\nu) = \overline{\hat{x}(\nu)} \\ &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \varrho(-\nu) = \varrho(\nu)\end{aligned}$$

Comme mentionné plus haut, cela implique que la fréquence moyenne de tout signal réel est nulle (intégrale d'une fonction impaire). Ce qui, en plus de ne pas être très instructif, n'est pas cohérent avec l'interprétation physique qu'on voudrait faire cette moyenne. Par exemple, si ϱ prend la forme ci-dessous (*fig. 3.1*), alors il serait plus naturelle de demander à ce que la fréquence moyenne se trouve autour de **1,4**. De même, la largeur de bande spectrale ne correspond plus à l'étalement de chaque gaussienne, mais plutôt à leur espacement.



*fig. 3.1 — Exemple de densité spectrale d'un signal réel **ESP A 1,4***

Même problème avec la covariance : sachant l'égalité des deux notions de fréquences moyenne (*eq. (1.9)*),

??), on peut définir la covariance temps-fréquence d'un signal x par :

$$\begin{aligned}\text{Cov}(x) &:= \text{Cov}(t, \phi'(t)) = \mathbb{E}_\rho[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_\rho[t] \mathbb{E}_\rho[\phi'(t)] \\ &= \mathbb{E}_\rho[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_\rho[t] \mathbb{E}_\rho[\nu]\end{aligned}$$

Ce coefficient est sensé mesurer une corrélation entre l'évolution d'un signal au cours du temps avec ses fréquences. S'il est réel, alors $\text{Cov}(x)$ sera toujours nulle ; de là à en conclure que la fréquence instantanée de n'importe quel signal (réel) est toujours décorrélée du temps serait, pour le moins, insatisfaisant.

Pour résoudre le problème, une méthode consiste à construire un nouveau signal $\mathcal{A}[x]$ en supprimant les fréquences négatives de x :

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\hat{x}$$

où $\mathbb{1}_E$ est la fonction indicatrice sur l'ensemble E et où le facteur 2 assure la conservation de l'énergie du signal. Cela mène à la définition :

DÉFINITION 12 (TRANSFORMÉE DE HILBERT ET EN SA) — On appelle *transformé de Hilbert de x* , l'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{H}[x] : t &\longmapsto \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds\end{aligned}\tag{3.1}$$

où l'intégrale barrée représente la *valeur principale de Cauchy* (voir ?? pour plus de détail) :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

Avec, on définit la *transformée en signal analytique* (SA) de tout signal x comme l'unique application $\mathcal{A}[x]$ telle que $\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\hat{x}$. Elle est donnée par la formule :

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{A}[x] : t &\longmapsto x(t) + i\mathcal{H}[x](t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Plus généralement, tout signal dont le spectre est à support dans \mathbb{R}^+ sera dit *analytique*.

Pour mieux comprendre ce que fait la transformation en signal analytique, revenons sur la notion de fréquence instantanée pour les signaux réels.

A.2. * Interprétabilité de la transformée en SA ou le lien avec le théorème de Bedrosian

Pour définir l'amplitude et la phase instantanée d'un signaux réel, on par a nouveau du cas le plus simple. Si x est un signal pur, il va s'écrire :

$$x(t) = a \cos(2\pi\nu t + \varphi), \quad a, \nu, \varphi \in \mathbb{R}$$

Pour généraliser cette écriture, il suffit donc de poser les amplitude et phase instantanée a et ϕ telles que :

$$x(t) = a(t) \cos(\phi(t))$$

Contrairement au cas complexe, ici la pair (a, ϕ) n'est pas unique et pour contraindre ce choix, on s'appuie sur la transformée $\mathcal{A}[x]$. Sachant que, dans le cas $x(t) \in \mathbb{R}$, la transformée de Hilbert est à valeur dans \mathbb{R} (intégrale d'une fonction réelle), on a :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} \implies \begin{cases} x(t) = \Re \mathcal{A}[x] = a(t) \cos \phi(t) \\ \mathcal{H}[x](t) = \Im \mathcal{A}[x] = a(t) \sin \phi(t) \end{cases}$$

D'où la définition :

DÉFINITION 13 (AMPLITUDE ET PHASE INSTANTANÉE) — L'amplitude instantanée a_x et la phase instantanée ϕ_x de tout signal x réel sont définies comme étant respectivement l'amplitude et la phase de $\mathcal{A}[x]$:

$$a_x = |\mathcal{A}[x]| \quad \phi_x = \arg(\mathcal{A}[x]) \quad (3.3)$$

De même, les *impulsion* et *fréquence instantanée* sont données par ϕ'_x et $1/2\pi\phi'_x$.

Si un signal est présenté sous la forme $x = a \cos \phi$, rien n'implique que a et ϕ correspondent bel et bien à l'amplitude et la phase instantanée. Si ce n'est pas le cas, c'est que cette décomposition n'est "pas la bonne", en cela qu'elles ne s'interprètent pas comme l'on aimerait.

Aussi, quand bien même x peut toujours être écrit comme partie réel de sa transformée en SA, cette écriture n'est nécessairement toujours satisfaisante. Pour le comprendre, détaillons le cas où x s'écrit comme produit de deux signaux purs (fig. 3.2) :

$$x_1(t) = \cos(2\pi\nu_1 t) \cos(2\pi\nu_2 t)$$

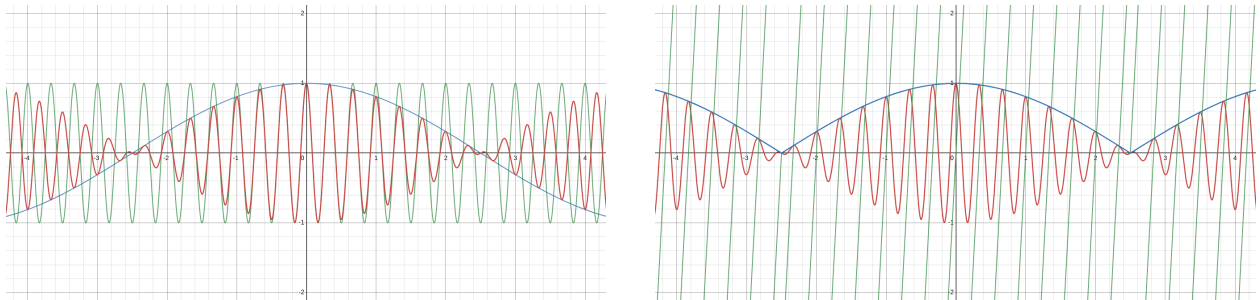


fig. 3.2 — Représentation graphique du signal x (rouge) avec $\nu_1 = 3$ et $\nu_2 = 0.1$. Sur l'image de gauche, avec signaux de fréquences pures (bleu et vert). Sur l'image de droite, avec son amplitude (bleu) et sa phase instantanée (vert). Les discontinuités de la phase sont dû à l'arrondi à 2π près de l'argument de $\mathcal{A}[x_1]$ et la façon dont il est calculé lorsque le signal s'annule (mise à 0). Voir [ici](#) pour un graphique dynamique.

On montre sans mal¹⁷ que si $\nu_1 \geq \nu_2$, alors la transformée en SA de x_1 s'écrit :

$$\mathcal{A}[x_1] = \cos(2\pi\nu_2 t) e^{2i\pi\nu_1 t}$$

Le signal $\mathcal{A}[x_1]$ n'est ici pas sous forme exponentielle à proprement parler puisque le cosinus peut être négatif (pour s'y ramener, il suffit de passer le cos en valeur absolue et d'ajouter π à l'argument lorsque nécessaire) mais l'avantage de cette forme est qu'elle fait clairement apparaître les fréquences $\nu_{1,2}$. En particulier, la fréquence instantanée du signal est la plus grande des deux fréquences ν_1 et ν_2 . La plus petite, elle, se retrouve dans l'amplitude.

Ce résultat est rassurant en cela qu'il est plus naturel de voir le cosinus de basse fréquence comme modulant celui de haute fréquence que l'inverse comme on le voit sur la première image de la figure 3.2.

Aussi, en mettant les hautes fréquences du signal dans la fréquence instantanée, on s'assure de limiter les variations de l'amplitude. Cela apporte bien plus de contrainte en terme de décomposition (a_{x_1}, ϕ_{x_1}) , en cela que si l'inverse étant vrai, alors toutes les fréquences pourraient être envoyées dans l'amplitude, ce qui laisserait la phase invariante.

Cela étant dit, lorsque l'on fait varier ν_1 et ν_2 , le résultat n'est pas toujours si intuitif. C'est notamment le cas lorsque les deux deviennent de plus en plus proche :

Pour comprendre pourquoi l'amplitude ne fait pas ce qu'on attendrait d'elle, est introduit le théorème de Bedrosian :

THÉORÈME DE BEDROSIAN (1) — Dans sa formulation la plus générale, le théorème de Bedrosian énonce que si deux fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ sont telles l'une des trois assertions suivantes est vraie :

- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda, +\infty[, \text{supp } \hat{g} \subset [\lambda, +\infty[$

¹⁷ \hat{x}_1 est donné par 4 Diracs, en ne gardant que ce non nul sur \mathbb{R}^+ on obtient le spectre de $\mathcal{A}[x_1]$ et il reste plus qu'à inverser la transformée de Fourier.

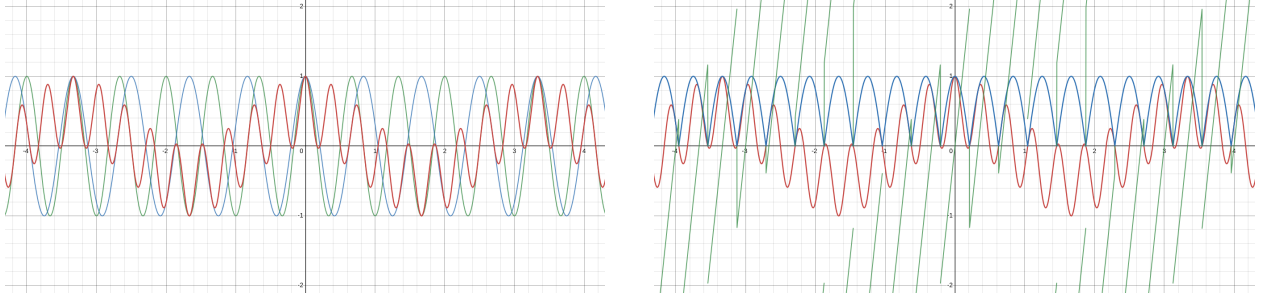


fig. 3.3 — Idem que pour la figure 3.2 précédente, avec cette fois $\nu_1 = 1.5$ et $\nu_2 = 1.3$.

- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset]-\infty, \lambda], \text{supp } \hat{g} \subset]-\infty, -\lambda]$
- $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \setminus \{(0, 0)\} \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda_1, \lambda_2], \text{supp } \hat{g} \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda_2, \lambda_1]$

alors la transformée de Hilbert de leur produit s'écrit (voir [27] pour une démonstration) :

$$\mathcal{H}[fg] = f\mathcal{H}[g] \quad (3.4)$$

Dans le cas d'un signal réel, suivant la définition 13 on peut écrire $x = a_x \cos \phi_x$. Comme a_x et $\cos \phi_x$ sont réelles, seule la troisième condition du théorème de Bedrosian peut être satisfaite pour peu que $\lambda_1 = \lambda_2$. Ainsi :

COROLLAIRE 1.1 — Toujours avec les mêmes notations, si $a_x \in L^2(\mathbb{R})$, $\cos \phi_x \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a_x] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi_x] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda] \quad (3.5)$$

Alors on a :

$$\mathcal{H}[x] = a_x \mathcal{H}[\cos \phi_x] \quad \text{et si } a_x(t) \neq 0, \quad \mathcal{H}[\cos \phi_x](t) = \sin \phi_x(t) \quad (3.6)$$

Pour interpréter ce corollaire, prenons un autre exemple : $x_2(t) = a(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$. Sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{x}_2(\nu) &= \hat{a}(\nu) * \frac{1}{2} \left(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{a}(\nu + \nu_0) + \hat{a}(\nu - \nu_0) \right) \end{aligned}$$

Graphiquement, la transformée de Fourier de x_2 duplique le graphe de \hat{a} en $\pm\nu_0$ et somme les deux. La condition (3.5) du corollaire 1.1 demande alors que ν_0 soit choisie de telle sorte que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a] \subset [-\nu_0, \nu_0]$$

C'est-à-dire qu'il n'y ait pas de chevauchement entre les deux courbes $\Gamma_{\pm} : \nu \mapsto \hat{a}(\nu \mp \nu_0)$ (voir fig. 3.4 ci-dessous). Moralement, cela assure qu'en ne prenant que la partie positive du spectre de x_2 , l'on ne ramène pas avec une partie de $\hat{a}(\nu + \nu_0)$. Quant bien même cette explication est simpliste puisqu'ici ϕ est linéaire, on peut voir que le phénomène est finalement très proche de celui d'aliasing.

Pour revenir sur l'exemple x_1 précédent, dans la seconde figure 3.3, l'amplitude ne colle plus à l'interprétation que l'on voudrait justement parce que la condition de Bedrosian n'est plus respectée (à savoir $\nu_1 \geq 2\nu_2$).

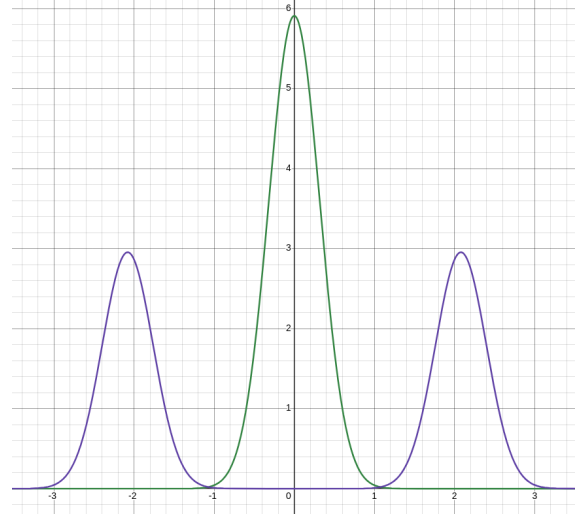
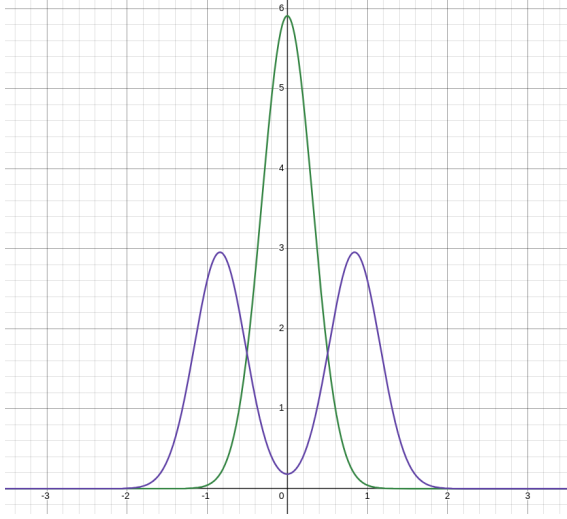


fig. 3.4 — Sur les deux graphiques sont représentés en vert \hat{a} et en violet \hat{x}_2 . Dans le premier cas l'hypothèse de Bedrosian est respectée mais pas dans le second.

Annexe B — Démonstrations de la proposition 1

B.1. Formule de la phase totale (1.16)

On note $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix}$ et on a :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}} \mathbf{x} &= \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \left\langle a(t)e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \mathcal{V}(t), a(t_0)e^{i\varphi(t_0)} R_{\theta(t_0)} \mathcal{V}(t_0) \right\rangle \\ &= a(t)e^{i\varphi(t)} a(t_0)e^{-i\varphi(t_0)} \left\langle R_{\theta(t)} \mathcal{V}(t), R_{\theta(t_0)} \mathcal{V}(t_0) \right\rangle \\ &= a(t_0)a(t)e^{i(\varphi(t)-\varphi(t_0))} \left\langle R_{\theta(t)-\theta(t_0)} \mathcal{V}(t), \mathcal{V}(t_0) \right\rangle \end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on note $\Delta y = y(t) - y(t_0)$, $y_1 = y(t_0)$ et $y_2 = (t)$ pour $y = \varphi, \theta, \chi$. Le produit hermitien à droite s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \left\langle R_{\Delta\theta} \mathcal{V}(t), \mathcal{V}(t_0) \right\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\theta \cos \chi_2 + i \sin \Delta\theta \sin \chi_2 & \sin \Delta\theta \cos \chi_2 - i \cos \Delta\theta \sin \chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi_1 \\ i \sin \chi_1 \end{pmatrix} \\ &= \cos \chi_1 \left(\cos \Delta\theta \cos \chi_2 + i \sin \Delta\theta \sin \chi_2 \right) + i \sin \chi_1 \left(\sin \Delta\theta \cos \chi_2 - i \cos \Delta\theta \sin \chi_2 \right) \\ &= \cos \Delta\theta \left(\cos \chi_1 \cos \chi_2 + \sin \chi_1 \sin \chi_2 \right) + i \sin \Delta\theta \left(\cos \chi_1 \sin \chi_2 + \sin \chi_1 \cos \chi_2 \right) \\ &= \cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2) \end{aligned}$$

D'où la phase totale :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) &= \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \arg \left(a(t_0)a(t)e^{i(\varphi(t)-\varphi(t_0))} \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2) \right) \right) \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arg \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2) \right) \end{aligned}$$

et l'argument restant s'écrit comme une arctangente, donnant :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \frac{\sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2)}{\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi} \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \left(\tan \Delta\theta \frac{\sin(\chi_1 + \chi_2)}{\cos \Delta\chi} \right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

B.2. Formule de la phase dynamique (1.17)

Par souci de lisibilité, on note $\mathcal{U} = R_\theta \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix}$, de sorte que la dérivée de $\mathbf{x} = ae^{i\varphi}\mathcal{U}$ s'écrit :

$$\dot{\mathbf{x}} = a'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\varphi'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix} + ae^{i\varphi}\chi' \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \chi + i \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \theta \sin \chi - i \cos \theta \cos \chi \end{pmatrix}$$

Les vecteurs des deux derniers membres s'expriment en fonction des composantes $\mathcal{U}_{1,2}$ de \mathcal{U} :

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \chi + i \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \theta \sin \chi - i \cos \theta \cos \chi \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{U}}_2 \\ -\bar{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}$$

Le produit hermitien $\langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle &= \left\langle a'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\varphi'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\theta' \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix} + ia\varphi'\chi' \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{U}}_2 \\ -\bar{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, ae^{i\varphi}\mathcal{U} \right\rangle \\ &= \left\langle a'\mathcal{U} + ia\varphi'\mathcal{U} + a\theta' \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix} + ia\chi' \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{U}}_2 \\ -\bar{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, a\mathcal{U} \right\rangle \\ &= aa'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2\varphi'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + a^2\theta' \left\langle \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle + ia^2\chi' \left\langle \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{U}}_2 \\ -\bar{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle \end{aligned}$$

où les deux derniers termes donnent :

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle &= -\mathcal{U}_2\bar{\mathcal{U}}_1 + \mathcal{U}_1\bar{\mathcal{U}}_2 \\ &= 2i\Im(\mathcal{U}_1\bar{\mathcal{U}}_2) \\ &= 2i\Im\left((\cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi)(\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi)\right) \\ &= 2i(\cos^2 \theta \cos \chi \sin \chi + \sin^2 \theta \sin \chi \cos \chi) \\ &= 2i \cos \chi \sin \chi \\ &= i \sin 2\chi \end{aligned}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{U}}_2 \\ -\bar{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle = \bar{\mathcal{U}}_2\mathcal{U}_1 - \bar{\mathcal{U}}_1\mathcal{U}_2 = 0$$

D'où, sachant que $\|\mathbf{x}\|^2 = a^2$ et $\|\mathcal{U}\| = 1$, la formule :

$$\begin{aligned} \frac{\Im\langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= \frac{1}{a^2} \Im\left(aa'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2\varphi'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2\theta' \sin 2\chi\right) \\ &= \frac{1}{a^2} \left(a^2\varphi'\|\mathcal{U}\|^2 + a^2\theta' \sin 2\chi\right) \\ &= \varphi' + \theta' \sin 2\chi \end{aligned}$$

Annexe C — * Lien entre Poincaré et Bloch (EN VRAC)

Un paquet de calculs, comme pour l'annexe A, il faudra que je le remette en forme, remette du contexte et que j'enlève des choses.

C.1. * Lien entre les deux types de signaux

Soit le signal :

$$\mathbf{x}_B(\varphi, \theta, \chi) = e^{i\varphi} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 \\ e^{i\theta} \sin \chi/2 \end{pmatrix}$$

Pour le réécrire en terme de vecteur AM-FM-PM, il faut faire apparaître une matrice de rotation, matrice qui est diagonalisable dans $\mathbb{C}^{n \times n}$ via la relation :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \\ \iff \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix}$$

Cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B(\varphi, \theta, \chi) &= e^{i\varphi} e^{i\theta/2} \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 \\ \sin \chi/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} e^{i\varphi} e^{i\theta/2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 \\ \sin \chi/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\varphi+\theta/2)} U R_{\theta/2} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 - \sin \chi/2 \\ i(\cos \chi/2 + \sin \chi/2) \end{pmatrix} \quad \text{où } U = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \in \text{U}(2) \end{aligned}$$

Ensuite, pour réduire les sommes dans le vecteur de droite, on a rappel les formules :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha \mp \sin \alpha) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha \pm \sin \alpha)$$

On a donc deux choix pour chaque composante du vecteur mais celle avec un signe moins son préférable sachant que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$$

On choisi donc la seconde formule pour la première composante et la premier pour la seconde composante, donnant :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B(\varphi, \theta, \chi) &= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i(\varphi+\theta/2)} U R_{\theta/2} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 - \sin \chi/2 \\ i(\cos \chi/2 + \sin \chi/2) \end{pmatrix} \\ &= e^{i(\varphi+\theta/2)} U R_{\theta/2} \begin{pmatrix} \sin(\frac{\pi}{2} - \chi/2) \\ i \cos(\frac{\pi}{2} - \chi/2) \end{pmatrix} \\ &= e^{i(\varphi+\theta/2)} U R_{\theta/2} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 \\ i \sin \chi/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ne reste alors plus qu'à ajuster les signes pour obtenir une écriture de signal \mathbf{x}_P AM-FM-PM :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_B(\varphi, \theta, \chi) &= e^{i(\varphi+\theta/2)} U R_{\theta/2} \begin{pmatrix} \cos \chi/2 \\ i \sin \chi/2 \end{pmatrix} \\ &= U e^{i(\varphi+\theta/2)} R_{\theta/2} \begin{pmatrix} \cos(-\chi/2) \\ -i \sin(-\chi/2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En somme :

$$\mathbf{x}_B(\psi, \alpha, \beta) = U \mathbf{x}_P(\psi + \alpha/2, \alpha/2, -\beta/2) \quad \mathbf{x}_P(\varphi, \theta, \chi) = U^\dagger \mathbf{x}_B(\varphi - \theta, 2\theta, -2\chi) \quad (3.7)$$

C.2. * Lien entre les projections

Avec la formule (3.7) ci-dessus, on a :

$$\rho_B(\alpha, \beta) = U \rho_P(\alpha/2, -\beta/2) U^\dagger \quad \rho_P(\theta, \chi) = U^\dagger \rho_B(2\theta, -2\chi) U \quad (3.8)$$

Mais on a aussi, dans la base Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

les expressions :

$$\begin{aligned} \rho_P(\theta, \chi) &= \frac{1}{2} \left(id + \sin(2\theta) \cos(2\chi) \sigma_1 - \sin(2\chi) \sigma_2 + \cos(2\theta) \cos(2\chi) \sigma_3 \right) \\ \rho_B(\alpha, \beta) &= \frac{1}{2} \left(id + \cos(\alpha) \sin(\beta) \sigma_1 + \sin(\alpha) \sin(\beta) \sigma_2 + \cos(\beta) \sigma_3 \right) \end{aligned}$$

Pour les lier, on pose $2\theta = \pi/2 - \alpha$ et $2\chi = \pi/2 - \beta$, donnant :

$$\begin{aligned} \rho_P(\theta, \chi) - id &= \sin(\pi/2 - \alpha) \cos(\pi/2 - \beta) \sigma_1 - \sin(\pi/2 - \beta) \sigma_2 + \cos(\pi/2 - \alpha) \cos(\pi/2 - \beta) \sigma_3 \\ &= \cos(\alpha) \sin(\beta) \sigma_1 - \cos(\beta) \sigma_2 + \sin(\alpha) \sin(\beta) \sigma_3 \end{aligned}$$

Ce qui sous forme matricielle se réécrit :

$$\begin{pmatrix} \sin(2\theta) \cos(2\chi) \\ -\sin(2\chi) \\ \cos(2\theta) \cos(2\chi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ -\cos(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Donc la passage de ρ_B à ρ_S se fait via un changement d'angle et une rotation de $\pi/2$ autour de σ_1 .

Même calcul, cette fois, en partant de (3.7) :

$$\begin{aligned} 2\rho_P(\theta, \chi) &= 2U^\dagger \rho_B(2\theta, -2\chi) U \\ &= U^\dagger \left(id + \cos(2\theta) \sin(-2\chi) \sigma_1 + \sin(2\theta) \sin(-2\chi) \sigma_2 + \cos(-2\chi) \sigma_3 \right) U \\ &= id - \cos(2\theta) \sin(2\chi) U^\dagger \sigma_1 U - \sin(2\theta) \sin(2\chi) U^\dagger \sigma_2 U + \cos(2\chi) U^\dagger \sigma_3 U \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} U^\dagger \sigma_1 U &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -\sigma_3 \\ U^\dagger \sigma_2 U &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_1 \\ U^\dagger \sigma_3 U &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2 \end{aligned}$$

Qui donne :

$$\begin{aligned} 2\rho_P(\theta, \chi) &= id - \cos(2\theta) \sin(2\chi) U^\dagger \sigma_1 U - \sin(2\theta) \sin(2\chi) U^\dagger \sigma_2 U + \cos(2\chi) U^\dagger \sigma_3 U \\ &= id + \cos(2\theta) \sin(-2\chi) \sigma_3 + \sin(2\theta) \sin(-2\chi) \sigma_1 + \cos(-2\chi) \sigma_2 \\ &= id + \sin(2\theta) \sin(2\chi) \sigma_1 + \cos(2\chi) \sigma_2 + \cos(2\theta) \sin(2\chi) \sigma_3 \end{aligned}$$

Le tout reste cohérent et avec les notations :

$$w_P(\theta, \chi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\chi) \\ -\sin(\chi) \\ \cos(\theta) \cos(\chi) \end{pmatrix} \quad w_B(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

Cela devient :

$$w_P(2\theta, 2\chi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} w_B((\pi/2 - \theta), (\pi/2 - \chi))$$

C.3. * Transformation de phases

Première chose, le produit hermitien est invariant par $U \in \text{U}(2)$ (si si). Ainsi :

$$\begin{aligned}\langle U\mathbf{x}(t_0), U\mathbf{x}(t) \rangle &= \langle \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t) \rangle \\ \langle (U\mathbf{x})', U\mathbf{x} \rangle &= \langle U\mathbf{x}', U\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant les formules (1.16) et (3.7), on a :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}_B(\psi, \alpha, \beta)) &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}_P(\psi + \alpha/2, \alpha/2, -\beta/2)) \\ &= (\psi + \alpha/2)(t) - (\psi + \alpha/2)(t_0) - \arctan \left(\tan \frac{\Delta\theta}{2} \frac{\tan 2\beta(t_0) + \tan 2\chi(t)}{1 + \tan 2\beta(t_0) \tan 2\beta(t)} \right)\end{aligned}$$

Mais avec un calcul immédiat, on a aussi :

$$aoerinagrqobne$$

Avec la formule de la phase dynamique dans Poincaré (1.17), on a :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_B(\psi, \alpha, \beta)) &= \Im m \int_{t_0}^t \left\langle \frac{d}{ds} \mathbf{x}_B(\psi, \alpha, \beta), \mathbf{x}_B(\psi, \alpha, \beta) \right\rangle ds \\ &= \Im m \int_{t_0}^t \left\langle \frac{d}{ds} \mathbf{x}_P(\psi + \alpha/2, \alpha/2, -\beta/2), \mathbf{x}_P(\psi + \alpha/2, \alpha/2, -\beta/2) \right\rangle ds \\ &= \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_P(\psi + \alpha/2, \alpha/2, -\beta/2)) \\ &= \psi(t) + \alpha(t)/2 - (\psi(t_0) + \alpha(t_0)/2) - \int_{t_0}^t \frac{\alpha'(s)}{2} \sin(-2\beta(s)/2) ds \\ &= \psi(t) - \psi(t_0) + \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{2} + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \alpha'(s) \sin \beta(s) ds\end{aligned}$$

Mais dans le même temps, si on calcul la phase dynamique de \mathbf{x}_B , on tombe cette fois sur :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_B(\psi, \alpha, \beta)) &= \psi(t) - \psi(t_0) + \int_{t_0}^t \alpha'(s) \frac{1 - \cos \beta(s)}{2} ds \\ &= \psi(t) - \psi(t_0) + \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{2} - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \alpha'(s) \cos \beta(s) ds\end{aligned}$$

Auquel cas :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_S(\varphi, \theta, \chi)) &= \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_B(\varphi - \theta, 2\theta, -2\chi)) \\ &= \varphi(t) - \theta(t) - (\varphi(t_0) - \theta(t_0)) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t 2\theta'(1 - \cos 2\chi) ds \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) - (\theta(t) - \theta(t_0)) + \int_{t_0}^t \theta'(1 - \cos 2\chi) ds \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) - (\theta(t) - \theta(t_0)) + (\theta(t) - \theta(t_0)) - \int_{t_0}^t \theta' \cos 2\chi ds \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^t \theta' \cos 2\chi ds\end{aligned}$$

Ce qui voudrait dire que :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}_S(\varphi, \theta, \chi)) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \theta' \sin 2\chi ds = \varphi(t) - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^t \theta' \cos 2\chi ds$$

... bizarre

ANNEXES DE LA PARTIE II

Annexe A — * Variété différentielle complexe

Pas sur que je la garde cette annexe, c'est beaucoup de math pour pas grande chose... enfin c'est plus rigoureux mais pas sur que ça serve le propos vraiment.

Pour plus de détails, voir [24, 2].

\mathcal{M} sera une *variété différentielle complexe* si elle satisfait les propriétés ci-dessus où \mathbb{R}^n est remplacé par \mathbb{C}^n et où la condition de difféomorphisme est remplacée par la condition d'holomorphisme. Une application $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ étant holomorphe si chacune de ses composantes vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \mu, \quad \frac{\partial f}{\partial y^\mu}(x + iy) = i \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x + iy)$$

Les fonctions holomorphes étant automatiquement C^∞ , les variétés différentielles complexes sont toujours lisse, c'est-à-dire C^∞ . Aussi, \mathcal{M} est dite de dimension complexe n et dimension (réel) $2n$, notés :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) := n \qquad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) := \dim(\mathcal{M}) = 2n \quad (3.9)$$

Ensuite, pour le dire rapidement, la structure complexe de \mathcal{M} permet de séparer les espaces tangents en deux sous espaces. Pour ce faire, on commence par noter qu'en tout point $p \in \mathcal{M}$ de coordonnée $z^\nu = x^\nu + iy^\nu$, l'espace tangent $T_p\mathcal{M}$, vu comme variété réelle, admet une base :

$$T_p\mathcal{M} = \text{Vec} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\} \quad (3.10)$$

Plus tôt que de se basé sur les x^μ et y^μ pour séparer les $T_p\mathcal{M}$, on définit sur ces derniers un tenseur J_p de type (1,1) tel que :

$$J_p \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \qquad J_p \frac{\partial}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (3.11)$$

Ce tenseur est l'équivalent de la multiplication par $\pm i$ et le fait que \mathcal{M} soit complexe assure qu'il soit défini globalement, *i.e.* sur $T\mathcal{M}$. Il est diagonalisable dans la base :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial z^\mu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \qquad \bar{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \quad (3.12)$$

Ainsi en fonction de la base ((3.9) ou (3.12)), J_p va s'écrire :

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \qquad J_p = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Finalement, $T\mathcal{M}$ peut être séparé en deux sous-espaces engendré respectivement par les ∂_μ et $\bar{\partial}_\nu$. On parle de vecteur holomorphe et anti-holomorphe et on note :

$$T_p\mathcal{M}^+ = \text{Vec}\{\partial_\mu \mid 1 \leq \mu \leq n\} \qquad T_p\mathcal{M}^- = \text{Vec}\{\bar{\partial}_\mu \mid 1 \leq \mu \leq n\} \quad (3.14)$$

forme kahlerienne :

$$\Omega = g_{\mu\bar{\alpha}} J^{\bar{\alpha}}_{\bar{\nu}} dw^{\mu} \wedge d\bar{w}^{\nu} \quad (3.15)$$

sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$:

$$\Omega(w) = i \frac{(1 + w^{\alpha} \bar{w}_{\alpha}) \delta_{\mu\nu} - w_{\mu} \bar{w}_{\nu}}{(1 + w^{\alpha} \bar{w}_{\alpha})^2} dw^{\mu} \wedge d\bar{w}^{\nu}$$

Annexe B — Démonstration des résultats sous-section 2.2.2

B.1. Formule pour Φ_{geo} sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$

Ici γ est supposé cyclique et au dessus d'une unique carte U_i (par commodité), avec :

$$\gamma = h_i(\rho, e^{i\theta}) = \sigma_i(\rho) e^{i\theta}$$

Avec ces notations, la phase totale de γ va s'écrire :

$$\Phi_{\text{tot}}(\gamma, t_0, t) = t(\gamma(t), \gamma(t_0)) = \theta(t) - \theta(t_0)$$

Pour ce qui est de la phase dynamique, on comment par calculer la connexion le long de γ , ce qui nécessite d'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \frac{d}{dt} (\sigma_i(\rho) e^{i\theta}) = \sigma_{i*}(\dot{\rho}) e^{i\theta} + i\theta' \sigma_i(\rho) e^{i\theta} \\ &= \sigma_{i*}(\dot{\rho}) e^{i\theta} + (i\theta')^{\#} (\sigma_i(\rho) e^{i\theta}) \quad \text{par définition de } \#, \text{ eq. (2.14)} \end{aligned}$$

Avec, et sachant les propriétés de ω (eqs. (2.15) et (2.16), def. 9), on a :

$$\begin{aligned} i\omega_{\gamma}(\dot{\gamma}) &= i\omega_{\sigma_i(\rho) e^{i\theta}} (\sigma_{i*}(\dot{\rho}) e^{i\theta} + (i\theta')^{\#} (\sigma_i(\rho) e^{i\theta})) \\ &= \omega_{\sigma_i(\rho) e^{i\theta}} (\sigma_{i*}(\dot{\rho}) e^{i\theta}) + \omega_{\sigma_i(\rho) e^{i\theta}} ((i\theta')^{\#} (\sigma_i(\rho) e^{i\theta})) \\ &= e^{-i\theta} \omega_{\sigma_i(\rho)} (\sigma_{i*}(\dot{\rho})) e^{i\theta} + i\theta' \end{aligned}$$

D'où la phase dynamique (eq. (2.24)) :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{dyn}}(\gamma) &= \frac{1}{i} \int_{t_0}^t \omega_{\gamma(s)}(\dot{\gamma}(s)) ds = \frac{1}{i} \int_{t_0}^t (\mathcal{A}_{i\rho(s)}(\dot{\rho}(s)) + i\theta'(s)) ds \\ &= -i \oint \mathcal{A}_{i\rho}(\dot{\rho}) + \theta(t) - \theta(t_0) \end{aligned}$$

et par conséquent la phase géométrique :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\gamma) &= \Phi_{\text{tot}}(\gamma) - \Phi_{\text{dyn}}(\gamma) \\ &= \theta(t) - \theta(t_0) - \left(-i \oint \mathcal{A}_{i\rho}(\dot{\rho}) + \theta(t) - \theta(t_0) \right) \\ &= i \oint \mathcal{A}_{i\rho}(\dot{\rho}) \end{aligned}$$

Maintenant, pour pouvoir appliquer le théorème de Stokes, il faut s'assurer que la variété étudiée est orientable, ce qui est le cas de toute les variétés complexes [24, sec. 8.4.2] (y compris $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$). Ainsi, pour peu que ρ soit suffisamment régulière, le théorème s'applique et :

$$\oint \mathcal{A}_i = \iint_{\Sigma} d\mathcal{A}_i$$

avec Σ une surface de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ de bord ρ .

B.2. Dérivation de Φ_{geo} en tant qu'aire de PC^n

Par définition, sur l'ouvert U_i , la 1-forme de connexion local est définie par :

$$\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega = \omega \circ \sigma_{i*}$$

Soit, $\forall w \in U_i$, $\forall \mathbf{v} \in T_w \text{PC}^n$:

$$\mathcal{A}_i(w) \mathbf{v} = i \Im m \langle \sigma_{i*}(\mathbf{v}), \sigma_i(w) \rangle$$

où les σ_{i*} s'écrivent, $\forall \mu$:

$$\begin{aligned} \mu \neq i : \quad \sigma_i(w)^\mu &= \frac{w^\mu}{\sqrt{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha}} \implies \sigma_{i*}(w)^\mu = \frac{dw^\mu}{\sqrt{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha}} - \frac{w^\mu}{2(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^{3/2}} 2\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha}} \left(dw^\mu - w^\mu \frac{\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha)}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha}} \left(dw^\mu - w^\mu \frac{\bar{w}^\alpha dw_\alpha + w^\alpha d\bar{w}_\alpha}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} \right) \end{aligned}$$

$$\mu = i : \quad \sigma_i(w)^\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha}} \implies \sigma_{i*}(w)^\mu = -\frac{\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha)}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^{3/2}} = -\frac{\bar{w}^\alpha dw_\alpha + w^\alpha d\bar{w}_\alpha}{(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^{3/2}}$$

Ce qui donne¹⁸ :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i(w) &= i \Im m \langle \sigma_{i*}(w), \sigma_i(w) \rangle \\ &= i \Im m \left\langle \frac{1}{\sqrt{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha}} \left((dw^0, \dots, 0, \dots, dw^n) - (w^0, \dots, 1, \dots, w^n) \frac{\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha)}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} \right), \frac{(w^0, \dots, 1, \dots, w^n)}{\sqrt{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} i \Im m \left(\left\langle (dw^0, \dots, 0, \dots, dw^n), (w^0, \dots, 1, \dots, w^n) \right\rangle \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha)}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} \left\langle (w^0, \dots, 1, \dots, w^n), (w^0, \dots, 1, \dots, w^n) \right\rangle \right) \\ &= \frac{1}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} i \Im m \left(dw^\mu \bar{w}_\mu - \frac{\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha)}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} (w^\nu \bar{w}_\nu + 1) \right) \end{aligned}$$

Enfin, sachant que le second membre dans la partie imaginaire est réel, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i(w) &= \frac{1}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} i \Im m \left(dw^\mu \bar{w}_\mu - \frac{\Re(w^\alpha d\bar{w}_\alpha)}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} (w^\nu \bar{w}_\nu + 1) \right) = \frac{1}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} i \Im m (dw^\mu \bar{w}_\mu) \\ &= \frac{1}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} \frac{dw^\mu \bar{w}_\mu - d\bar{w}^\nu w_\nu}{2} \end{aligned}$$

Maintenant, pour avoir les coefficients de $d\mathcal{A}_i$, il faut calculer respectivement :

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \mathcal{A}_{i\mu} &= \partial_\lambda \frac{\bar{w}_\mu}{2(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)} \\ &= \frac{\bar{w}_\mu \bar{w}_\lambda}{2(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} \\ \partial_{\bar{\lambda}} \mathcal{A}_{i\mu} &= \partial_{\bar{\lambda}} \frac{\bar{w}_\mu}{2(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)} \\ &= \frac{1}{2(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)} \left(\delta_{\lambda\mu} - \frac{\bar{w}_\mu w_\lambda}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{4} g_{\mu\bar{\lambda}} \\ \partial_\lambda \mathcal{A}_{i\bar{\nu}} &= \partial_\lambda \frac{-w_\nu}{2(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)} \\ &= \frac{-1}{2(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)} \left(\delta_{\lambda\nu} - \frac{w_\nu \bar{w}_\lambda}{1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha} \right) \\ &= -\frac{1}{4} g_{\lambda\bar{\nu}} \\ \partial_{\bar{\lambda}} \mathcal{A}_{i\bar{\nu}} &= \partial_{\bar{\lambda}} \frac{-w_\nu}{2(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)} \\ &= -\frac{w_\nu w_\lambda}{2(1 + w^\alpha \bar{w}_\alpha)^2} \end{aligned}$$

¹⁸ Dans la formule ci-dessous, les 0 et 1 sont placés à la i^{eme} coordonnées.

On remarque alors les coefficient $d\mathcal{A}_i{}_{\lambda\mu}$ et $d\mathcal{A}_i{}_{\overline{\lambda}\overline{\mu}}$ sont symétriques, ce qui fait qu'avec le produit extérieur il s'annule (anti-symétrie). Par exemple :

$$(d\mathcal{A}_i)_{\lambda\mu} dw^\lambda \wedge dw^\mu = \frac{\overline{w}_\mu \overline{w}_\lambda}{2(1 + w^\alpha \overline{w}_\alpha)^2} dw^\lambda \otimes dw^\mu - \frac{\overline{w}_\mu \overline{w}_\lambda}{2(1 + w^\alpha \overline{w}_\alpha)^2} dw^\mu \otimes dw^\lambda = 0$$

Ce qui mène finalement à :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_i &= \frac{1}{4} g_{\mu\overline{\lambda}} d\overline{w}^\lambda \wedge dw^\mu - \frac{1}{2} g_{\lambda\overline{\nu}} dw^\lambda \wedge d\overline{w}^\nu \\ &= -\frac{1}{4} (g_{\mu\overline{\nu}} dw^\mu \wedge d\overline{w}^\nu + g_{\mu\overline{\nu}} dw^\mu \wedge d\overline{w}^\nu) \quad \text{par anti-symétrie du produit extérieur} \\ &= -\frac{1}{2} g_{\mu\overline{\nu}} dw^\mu \wedge d\overline{w}^\nu \\ &= i \frac{1}{2} \Omega_{\mu\overline{\nu}} dw^\mu \wedge d\overline{w}^\nu \end{aligned}$$

B.3. * Idem que B.2. depuis \mathbb{S}^n (plus simple, mais j'arrive à finir le calcul)

Cela étant dit, plutôt que de faire le calcul dans PC^n , qui demanderait de calculer les $\mathcal{A}_i = \sigma_i^* \omega$, le plus simple est encore de se ramener dans \mathbb{S}^n :

$$\oint \mathcal{A}_i{}_\rho(\dot{\rho}) = \oint \omega_{\sigma_i(\rho)}(\sigma_{i*}(\dot{\rho}))$$

Où, en notant $z = \sigma_i(\rho)^\mu$ et $dz = \sigma_{i*}(\dot{\rho})$, ω s'écrit en coordonnées locales :

$$\begin{aligned} \omega_z(dz) &= i \Im \langle dz, z \rangle = \frac{1}{2} (\langle dz, z \rangle - \langle z, dz \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\delta_{\mu\nu} \overline{z}^\nu dz^\mu - \delta_{\mu\nu} z^\mu d\overline{z}^\nu) \\ &= \frac{1}{2} (\overline{z}_\nu dz^\mu - z_\nu d\overline{z}^\nu) \end{aligned}$$

Donc ω à pour coefficient :

$$\omega_\mu = \frac{1}{2} \overline{z}_\mu \quad \omega_{\overline{\nu}} = -\frac{1}{2} z_\nu = -\overline{\omega}_\nu \quad (3.16)$$

Ce qui donne pour dérivée extérieure :

$$d\omega = \partial_\lambda \omega_\mu dz^\lambda \wedge dz^\mu + \partial_\lambda \omega_{\overline{\nu}} dz^\lambda \wedge d\overline{z}^\nu + \partial_{\overline{\lambda}} \omega_\mu d\overline{z}^\lambda \wedge dz^\mu + \partial_{\overline{\lambda}} \omega_{\overline{\nu}} d\overline{z}^\lambda \wedge d\overline{z}^\nu$$

avec :

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \omega_\mu &= \frac{1}{2} \partial_\lambda \overline{z}_\mu = 0 & \partial_\lambda \omega_{\overline{\nu}} &= -\frac{1}{2} \partial_\lambda z_\nu = -\delta_{\lambda\nu} \\ \partial_{\overline{\lambda}} \omega_\mu &= \frac{1}{2} \partial_{\overline{\lambda}} \overline{z}_\mu = \delta_{\lambda\mu} & \partial_{\overline{\lambda}} \omega_{\overline{\nu}} &= -\frac{1}{2} \partial_{\overline{\lambda}} z_\nu = 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\begin{aligned} d\omega &= \partial_\lambda \omega_\mu dz^\lambda \wedge dz^\mu + \partial_\lambda \omega_{\overline{\nu}} dz^\lambda \wedge d\overline{z}^\nu + \partial_{\overline{\lambda}} \omega_\mu d\overline{z}^\lambda \wedge dz^\mu + \partial_{\overline{\lambda}} \omega_{\overline{\nu}} d\overline{z}^\lambda \wedge d\overline{z}^\nu \\ &= -\frac{1}{2} \delta_{\lambda\nu} dz^\lambda \wedge d\overline{z}^\nu + \frac{1}{2} \delta_{\lambda\mu} d\overline{z}^\lambda \wedge dz^\mu \\ &= -\frac{1}{2} (\delta_{\lambda\nu} dz^\lambda \wedge d\overline{z}^\nu + \delta_{\mu\lambda} dz^\mu \wedge d\overline{z}^\lambda) \quad \text{par anti-symétrique de } \wedge \\ &= -\delta_{\mu\nu} dz^\mu \wedge d\overline{z}^\nu \quad \text{par simple changement de notations} \end{aligned}$$

Pour ramener le résultat dans $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, on a :

$$\begin{aligned}
d\mathcal{A}_i(w) &= d(\sigma_i^* \omega_{\sigma_i(w)}) \\
&= \sigma_i^*(d\omega_{\sigma_i(w)}) \\
&= d\omega_{\sigma_i(w)} \circ \sigma_{i*} \\
\implies d\mathcal{A}_i(w)_\mu &= \sigma_{i*}^\alpha (d\omega_{\sigma_i(w)})_{\alpha\mu} \\
&= \sigma_i^* (-\delta_{\mu\nu} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu) \\
&= -\delta_{\mu\nu} \sigma_i^*(dz^\mu) \wedge \sigma_{i*}(d\bar{z}^\nu) \\
&= -\delta_{\mu\nu} \left(dw^\alpha \sigma_{i*}^\mu{}_\alpha + d\bar{w}^\beta \sigma_{i*}^\mu{}_{\bar{\beta}} \right) \wedge \left(dw^\lambda \sigma_{i*}^{\bar{\nu}}{}_\lambda + d\bar{w}^\kappa \sigma_{i*}^{\bar{\nu}}{}_{\bar{\kappa}} \right) \\
&= -\delta_{\mu\nu} \left(\sigma_{i*}^\mu{}_\alpha \sigma_{i*}^{\bar{\nu}}{}_\lambda dw^\alpha \wedge dw^\lambda + \sigma_{i*}^\mu{}_\alpha \sigma_{i*}^{\bar{\nu}}{}_{\bar{\kappa}} dw^\alpha \wedge d\bar{w}^\kappa + \sigma_{i*}^\mu{}_{\bar{\beta}} \sigma_{i*}^{\bar{\nu}}{}_\lambda d\bar{w}^\beta \wedge dw^\lambda + \sigma_{i*}^\mu{}_{\bar{\beta}} \sigma_{i*}^{\bar{\nu}}{}_{\bar{\kappa}} d\bar{w}^\beta \wedge d\bar{w}^\kappa \right)
\end{aligned}$$

Enfin, comme π est une submersion riemannienne, l'on retombe sur :

$$d\mathcal{A}_i(w) = d\sigma_{i*}\omega_w = -\delta_{\mu\nu} dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu = -g_{\mu\bar{\nu}}(w) dw^\mu \wedge d\bar{w}^\nu = i\Omega(w)$$

Annexe C — Géodésique de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$

- Géodésique de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$: [4, sec. 3.E]
- longueur et aire sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$: [15, p. 119]

C.1. Métrique relevée dans les espaces horizontaux

D'abord les vecteurs tangent de \mathbb{S}^n sont séparés en composantes verticale et horizontale :

$$\forall \mathbf{v} \in T_p \mathbb{S}^n, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \omega_p(\mathbf{v})^\# = \mathbf{v}_H + \frac{d}{dt} p \cdot \exp(it\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle) \Big|_{t=0} \quad (3.17)$$

$$= \mathbf{v}_H + i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle p \quad (3.18)$$

Ainsi, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p \mathbb{S}^n$:

$$\begin{aligned}
g_{\pi(p)}(\pi_* \mathbf{u}, \pi_* \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{u}_H, \mathbf{v}_H \rangle = \langle \mathbf{u} - \omega_p(\mathbf{u})^\#, \mathbf{v} - \omega_p(\mathbf{v})^\# \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \omega_p(\mathbf{v})^\# \rangle - \langle \omega_p(\mathbf{u})^\#, \mathbf{v} \rangle + \langle \omega_p(\mathbf{u})^\#, \omega_p(\mathbf{v})^\# \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle p \rangle - \langle i\Im\langle \mathbf{u}, p \rangle p, \mathbf{v} \rangle + \langle i\Im\langle \mathbf{u}, p \rangle p, i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle p \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle \langle \mathbf{u}, p \rangle - i\Im\langle \mathbf{u}, p \rangle \langle p, \mathbf{v} \rangle - i\Im\langle \mathbf{u}, p \rangle i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle \langle p, p \rangle
\end{aligned}$$

Sachant que $\|p\| = 1$ et $\Re\langle \mathbf{v}, p \rangle = 0$, il vient :

$$\begin{aligned}
g_{\pi(p)}(\pi_* \mathbf{u}, \pi_* \mathbf{v}) &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle \langle \mathbf{u}, p \rangle - i\Im\langle \mathbf{u}, p \rangle \langle p, \mathbf{v} \rangle - i\Im\langle \mathbf{u}, p \rangle i\Im\langle \mathbf{v}, p \rangle \langle p, p \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \Im\langle \mathbf{v}, p \rangle \Im\langle \mathbf{u}, p \rangle + \Im\langle \mathbf{u}, p \rangle \Im\langle p, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, p \rangle \langle \mathbf{v}, p \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, p \rangle \langle \mathbf{v}, p \rangle
\end{aligned}$$

Ce qui donne en coordonnées locales sur \mathbb{S}^n :

$$g = \delta_{\mu\nu} dz^\mu d\bar{z}^\nu - \delta_{\mu\beta} z^\mu d\bar{z}^\beta \delta_{\alpha\nu} dz^\alpha \bar{z}^\nu = (\delta_{\mu\nu} - z_\nu \bar{z}_\mu) dz^\mu d\bar{z}^\nu$$

C.2. Ecriture des géodésiques

Les calculs de cette section reprennent en partie les calculs de Mukunda & Simon [23, sec. 4, p. 219].

Etant donnée, sur une variété \mathcal{M} , une métrique g de symbole de Christoffel associé Γ , une géodésique γ de \mathcal{M} vérifie [10] :

$$\forall \sigma, \quad \ddot{\gamma}^\sigma + \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\nu = 0 \quad (3.19)$$

Pour une variété complexe, les contraintes apportées par les composantes holomorphe et anti-holomorphe sont les mêmes. Le système reste donc le même à la différence près que cette fois les symboles de Christoffel vont s'écrire¹⁹ :

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\sigma = g^{\sigma\bar{\beta}} \partial_\mu (g_{\alpha\bar{\beta}}) \quad \Gamma_{\nu\bar{\beta}}^{\bar{\sigma}} = g^{\alpha\bar{\sigma}} \partial_{\bar{\nu}} (g_{\alpha\bar{\beta}}) \quad (3.20)$$

Le système d'EDP (3.19) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma}^\sigma + \Gamma_{\mu\alpha}^\sigma \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\alpha = 0 & \iff \ddot{\gamma}^\sigma + g^{\sigma\bar{\beta}} \partial_\mu (g_{\alpha\bar{\beta}}) \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\alpha = 0 \\ & \iff g_{\sigma\bar{\beta}} \ddot{\gamma}^\sigma + g_{\sigma\bar{\beta}} g^{\sigma\bar{\beta}} \partial_\mu (g_{\alpha\bar{\beta}}) \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\alpha = 0 \\ & \iff g_{\sigma\bar{\beta}} \ddot{\gamma}^\sigma + \partial_\mu (g_{\alpha\bar{\beta}}) \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\alpha = 0 \end{aligned}$$

Dans le cas de $\mathbb{S}^n(\mathrm{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$, les $\partial g_{\alpha\bar{\beta}}$ s'écrivent :

$$\partial_\mu (g_{\alpha\bar{\beta}}) = \partial_\mu (\delta_{\alpha\beta} - \bar{z}_\alpha z_\beta) = -\delta_{\mu\beta} \bar{z}_\alpha \quad \partial_{\bar{\nu}} (g_{\alpha\bar{\beta}}) = \partial_{\bar{\nu}} (\delta_{\alpha\beta} - \bar{z}_\alpha z_\beta) = -\delta_{\nu\alpha} z_\beta$$

Donnant les équations :

$$\begin{aligned} \forall \beta, \quad 0 &= g_{\sigma\bar{\beta}} \ddot{\gamma}^\sigma + \partial_\mu (g_{\alpha\bar{\beta}}) \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\alpha \\ &= (\delta_{\sigma\beta} - \bar{\gamma}_\sigma \gamma_\beta) \ddot{\gamma}^\sigma - \delta_{\mu\beta} \bar{\gamma}_\alpha \dot{\gamma}^\mu \dot{\gamma}^\alpha \iff 0 = \ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle \gamma - \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle \dot{\gamma} \\ &= \ddot{\gamma}_\beta - \gamma_\beta \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle - \dot{\gamma}_\beta \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle \end{aligned}$$

Où l'équivalence est justifiée par le fait que les composantes anti-holomorphes des $\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}$ suivent les mêmes contraintes (à conjugaison près) celles holomorphes.

Pour résoudre ce système, le produit hermitien de ce dernier avec γ est calculé :

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} &= \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle \gamma + \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle \dot{\gamma} \implies \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle = \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle \langle \gamma, \gamma \rangle + \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle^2 \\ &\implies 0 = \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle \end{aligned}$$

On retrouve alors le fait que $\dot{\gamma}$ est horizontale et $\ddot{\gamma} = \gamma \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle$.

En appliquant à nouveau le produit hermitien mais de l'autre côté, cette fois :

$$\ddot{\gamma} = \gamma \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle \implies \langle \gamma, \ddot{\gamma} \rangle = \langle \gamma, \gamma \rangle \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle = \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle$$

Sachant que $\gamma \in \mathbb{S}^n$, on a alors :

$$\begin{aligned} \|\gamma\| = 1 &\implies \langle \gamma, \dot{\gamma} \rangle + \langle \dot{\gamma}, \gamma \rangle = 0 \\ &\implies \langle \gamma, \ddot{\gamma} \rangle + 2\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle + \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle = 0 \\ &\implies \langle \gamma, \ddot{\gamma} \rangle = -\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \end{aligned}$$

Finalement l'EDP devient :

$$\ddot{\gamma} = -\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \gamma$$

Or, il existe une paramétrisation de γ telle que $\|\gamma\| = 1$. D'où les solutions :

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) \cos(t - t_0) + \dot{\gamma}(t_0) \sin(t - t_0)$$

¹⁹ Les symétries imposées à g par la forme symplectique J annule la majorité des composantes de g et a fortiori, de Γ . Voir [24, sec. 8.4.3]

TABLE DES FIGURES

1.1	Déviati�n de la phase dynamique d'un signal bivarié par rapport à sa phase totale	8
1.2	DONE Ellipse de polarisation d'un signal bivarié r��l	9
1.3	Evolution de la phase g��m��trique d'un signal AM-FM-PM	10
1.4	DONE Projection sur la sphère de Poincaré	11
1.5	DONE ��tats de polarisation associés à divers point de la sphère de Poincaré.	11
2.1	DONE La première figure de tout bon livre de géométrie différentielle	15
2.2	Diagramme de passage de f � f_* et f^*	15
2.3	DONE Ruban de M��bius comme variété fibrée	18
2.4	DONE Représentation d'une section local	19
2.5	DONE Représentation de la section canonique	19
2.6	Interprétation géométrique de la fréquence instantanée	24
2.7	Représentation des trois phases de γ dans le cas pseudo-cyclique	26
3.1	Exemple de densité spectrale d'un signal réel ESP A 1,4	33
3.2	Décomposition en	35
3.3	Idem que pour la figure 3.2 précédente, avec cette fois $\nu_1 = 1.5$ et $\nu_2 = 1.3$	36
3.4	Sur les deux graphiques sont représentés en vert \hat{a} et en violet \hat{x}_2 . Dans le premier cas l'hypothèse de Bedrosian et respectée mais pas dans le second.	37

TABLE DES CODES

RÉFÉRENCES

- [1] Y. AHARONOV AND J. ANANDAN, *Phase change during a cyclic quantum evolution*, Physical Review Letters, 58 (1987), pp. 1593–1596.
- [2] W. BALLMANN, *Lectures on Kähler Manifolds*, vol. 2 of ESI Lectures in Mathematics and Physics, EMS Press, 1 ed., July 2006.
- [3] M. V. BERRY, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences, 392 (1997), pp. 45–57. Publisher: Royal Society.
- [4] A. L. BESSE, *Manifolds all of whose Geodesics are Closed*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1978.
- [5] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [6] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [7] D. CHRUŚCIŃSKI AND A. JAMIOŁKOWSKI, *Geometric Phases in Classical and Quantum Mechanics*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.
- [8] E. COHEN, H. LAROCQUE, F. BOUCHARD, F. NEJADSATTARI, Y. GEFEN, AND E. KARIMI, *Geometric phase from Aharonov–Bohm to Pancharatnam–Berry and beyond*, Nature Reviews Physics, 1 (2019), pp. 437–449.
- [9] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [10] M. DO CARMO, *Riemannian Geometry*, Mathematics (Boston, Mass.), Birkhäuser, 1992.
- [11] F. FAURE, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).
- [12] J. FLAMANT, *Une approche générique pour l’analyse et le filtrage des signaux bivariés*, these de doctorat, Ecole centrale de Lille, Sept. 2018.
- [13] J. FLAMANT, N. LE BIHAN, AND P. CHAINAIS, *Time–frequency analysis of bivariate signals*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 46 (2019), pp. 351–383.
- [14] H. HOPF, *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Mathematische Annalen, 104 (1931), pp. 637–665.
- [15] D. HUYBRECHTS, ed., *Complex Geometry: An Introduction*, Universitext, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [16] N. KAYBAN, *Riemannian Immersions and Submersions*.
- [17] J. LAFONTAINE, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [18] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [19] ———, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.
- [20] J. LEFEVRE, *Polarization analysis and optimization geometry*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....] ; University of Melbourne, Dec. 2021.
- [21] J. M. LILLY, *Modulated Oscillations in Three Dimensions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 59 (2011), pp. 5930–5943.

- [22] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [23] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [24] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.
- [25] PHAM MÂU QUÂN, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Monographies universitaires de mathématiques, Dunod, Paris, 1969.
- [26] E. M. RABEI, ARVIND, N. MUKUNDA, AND R. SIMON, *Bargmann invariants and geometric phases: A generalized connection*, Physical Review A, 60 (1999), pp. 3397–3409.
- [27] S. WANG, *Simple proofs of the Bedrosian equality for the Hilbert transform*, Science in China Series A: Mathematics, 52 (2009), pp. 507–510.
- [28] P. WOIT, *Quantum Theory, Groups and Representations*, Springer International Publishing, Cham, 2017.