

Mémoire de Stage de M2

PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Pierre-Olivier AMBLARD, Julien FLAMANT & Michel
BERTHIER

Master MIX – Université de La Rochelle

2024 – 2025

TABLES DES MATIÈRES

Introduction	1
Notations et conventions	2
<hr/>	
PARTIE I — ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D’UNE PHASE ÉPONYME	3
<hr/>	
I — Cadre d’étude	5
1.1 Construction de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$	5
1.1.1 Rappels de géométrie différentielle et notations	5
1.1.2 $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ comme variété différentielle	5
1.2 $\mathbb{S}^n \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n$ comme fibré principal	6
1.2.1 Définition générale	6
1.2.2 Le fibré $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$	8
1.3 Connexion sur VFP	9
1.3.1 Définition général	9
1.3.2 Choix de connexion sur $\mathbb{S}^n(\mathbf{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$	10
II — Interprétation des trois phases dans ce cadre	10
2.1 Cas pseudo-cyclique	10
Annexe	11
Annexe A — Connexion induite par une métrique	11
Annexe B — Algèbre et groupe de Lie	11
Annexe C — Variété différentielle complexe, tiré de [16]	11

INTRODUCTION

INTRO A REFAIRE QUAND ON SAURA VRAIMENT DE QUOI ON PARLE DANS CETTE PARTIE

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui demande beaucoup de contexte pour être expliqué. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant t d'un signal complexe ψ est donné par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) = \arg \langle \psi(t), \psi(t_0) \rangle \Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\psi}(s), \psi(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\psi(t) \rightsquigarrow \psi'(t) = e^{i\alpha(t)} \psi(t)$$

Cette propriété rend la phase Φ_{geo} intrinsèquement liée à la trajectoire que prend la projection de ψ dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ et par conséquent, à la géométrie de ce dernier, d'où son nom.

Ceci à largement été étudié dans le cadre de système dynamique régis par EDP [4, 13], notamment en mécanique quantique avec l'équation Schrödinger [1, 14, 16]. Ce n'est que récemment que Le Bihan, Flament et Amblard se sont intéressés à son application en traitement du signal dans le cas de signaux bivariés [8, 9].

[...]

NOTATIONS ET CONVENTIONS

OBJET/FONCTION	NOTATION
Conjugué complexe	\bar{x}
Transposée (resp. adjoint) de la matrice A	tA (resp. A^\dagger)
Distribution de Dirac	δ
Indicatrice de E	$\mathbb{1}_E$
Fonction signe	$\text{sign}(x)$
Transformée de Fourier	$\mathcal{F}[x], \hat{x}$
Transformée en SA	$\mathcal{A}[x]$
Transformée de Hilbert	$\mathcal{H}[x]$
Produit hermitien	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Espérance et variance de f suivant ρ	$\mathbb{E}_\rho[f(t)], \mathbb{V}_\rho[f(t)]$
Espace des fonctions p.p. de puissance p^{eme} intégrable à valeur de E dans F	$L^p(E, F)$
Support d'une fonction f	$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$
Matrice de rotation de paramètre Θ (resp. d'angle θ en dimension 2)	R_Θ (resp. R_θ)
Ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$)
Ensemble des matrices hermitiennes (resp. anti-hermitiennes) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$)

Note générale

- les références sont en fin de mémoire est en .bib sur le [GitHub](#)
- Idem pour les codes et un mot sur **pygeomphase**
- En italique sont les notes un peu plus informelles
- On va parler de géo diff et pour éviter de réécrire un livre, on va admettre beaucoup de résultats, on renvoi vers [7, 16] (*metts en d'autre*) pour une introduction extensive à la théorie

Notations math :

- Convention sur le produit hermitien (congué à droite)
- les vecteurs seront le plus souvent en gras, leur dérivée en temps notée par un point (ex. : $\dot{\mathbf{x}}(t)$) et celle des scalaires seront noté par un prime (ex. : $a'(t)$)

PARTIE I

ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME

Plan approximatif de cette partie :

I — Cadre d'étude

Dans notre cas, tout s'écrit très simplement donc pas besoin de sortir tout l'arsenal de géo diff

1.1 — Construction de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$

1.1.1 — Rappel de géométrie différentielle et notation

- Atlas, carte coordo local
- Espace tangent
- Différentielle et image réciproque
- Variété riemannienne
- *un mot sur les variétés différentielles complexes (voir annexe pour plus de détail)*

1.1.2 — Le cas de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$

- Définition comme espace quotient $\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^*$
- C'est variété différentielle (voir annexe pour détails)
- *Un mot sur la projection $x \mapsto xx^\dagger$ utilisé en physique (c'est équivalent)*

1.2 — Fibré principaux

1.2.1 — Définitions de base

- Définition de VFP
- Section local (canonique)
- Changement de carte

1.2.2 — Application à notre cas

- $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ comme quotient $\mathbb{S}^n/U(1)$
- explicite les cartes, sections, etc
- Interprétation des paramètres (amplitude, phase, polar)
- le pb du choix de phase (version géo diff)

1.3 — Espaces horizontaux et connexion

1.2.1 — Définitions générales

- Espace verticaux
- connexion comme ensemble d'espace horizontaux
- 1-forme de connexion

1.2.2 — Connexion sur $\mathbb{S}^n(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$

- Connexion induite par la métrique
- Explicitation de ω
- Formule de changement de carte dans ce cas

II — Interprétation géométrique des trois phases

2.1 — Première interprétation

- La découpe de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{+*} \times U(1) \times \text{PC}^n$ fait exactement ce qu'on veut (et fuck l'amplitude)
- la phase instantanée revient faire un choix de jauge, un choix de relèvement. Mais pas possible avec h_i parce que carte-dépendant
- c'est là qu'intervient l'horizontal lift : ça fait office de valeur de référence modulo un choix de phase initiale
-

2.2 — Cas pseudo-cyclique

- Le dessin de Bohm :
- phase dyn = signal - horizontal lift
- phase geo = horizontal lift - cyclique lift (<- indé du signal !)
- phase tot = cumul des deux

2.3 — La phase géo dans l'espace projectif

- Géodésique de PC^n et généralisation du cas pseudo-cyclique
- Bonnet-Gauss & Stokes : phase géo comme calcul d'air
- *Comme partie imaginaire de la métrique (+ lien avec Fisher)*

Annexes

A — Algèbre et groupe de Lie

- def : groupe de Lie G
- def : Algèbre de Lie \mathfrak{g} associée à G
- \mathfrak{g} vu comme tangent $T_e G$
- Cas particulier : $G = \text{U}(1)$

Au niveau ensemble, Décomposer un signal multivarié complexe en paramètre d'amplitude, phase et polarisation instantanée, revient à décomposer \mathbb{C}^n en un produit de trois ensembles. Pour cela, un vecteur de \mathbb{C}^n est vu comme la donnée d'une direction, *i.e.* un élément de la sphère unité $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, et d'une norme, de sorte que :

$$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{+*} \times S^{2n-1}$$

Pour faire apparaître une phase au signal, S^{2n-1} est lui-même décomposé de sorte à faire apparaître $U(1)$, donnant :

$$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{+*} \times U(1) \times S^{2n-1}/U(1)$$

A reprendre, comme toutes les intros Pour étudier la phase géométrique d'un signal ψ , il nous faut projeter ψ sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, et ceux, tout en gardant une trace de sa phase puisque c'est le lien entre les deux qui nous intéresse. Il nous faut donc envoyer ψ dans le produit :

$$U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n \quad (\text{ou } \mathbb{C}^{n-1*}/\mathbb{C}^*)$$

Garder le lien entre cet espace et celui d'origine mène à se placer dans le cadre avec d'un *variété fibrée* (ou simplement fibré). Plus précisément, comme $U(1)$ est un groupe de lie, ce sera un *fibré principal* noté $S^{2n+1}(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$.

Comme son nom l'indique, $S^{2n+1}(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$ à une structure de variété différentielle et le lien entre les $U(1)$ et $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ va se faire par le biais d'une connexion. L'on verra alors que cette connexion est intrinsèquement lié à la phase dynamique du signal, et il sera discuté de la signification de ce résultat. La phase géométrique, quand à elle, sera liée avec la métrique hermitienne associée aux l'espaces projectifs complexes.

Tout cela va demander quelques prérequis que nous allons voir à présent.

I — Cadre d'étude

1.1 Construction de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$

1.1.1 Rappels de géométrie différentielle et notations

1.1.2 $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ comme variété différentielle

Un façon de définir l'espace projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est une structure quotient qui peut être obtenue de deux façon. La première, analogue aux espaces projectifs réels, est de poser :

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^n := \mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^*$$

C'est-à-dire l'ensemble des classes de $\mathbb{C}^{n+1*} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n+1}}\}$ par la relation d'équivalence :

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid x = \lambda y$$

Cette formulation de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ permet de le munir d'une structure de variété. Pour cela, la classe de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ du représentant $z = (z^i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1*}$ est noté $[z]$ et sont définis les ensembles et cartes, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$U_i = \left\{ [z] \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n \mid z \in \mathbb{C}^{n+1}, z^i \neq 0 \right\} \quad \phi_i : \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^i \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-i} \cong \mathbb{C}^n \\ [z] & \longmapsto & \frac{1}{z^i} z = (z^0/z^i, \dots, 1, \dots, z^n/z^i) \end{array} \quad (1.1)$$

Si l'ensemble d'arrivée $\phi_i(U_i)$ est équivalent à un ouvert de \mathbb{C}^n , il est plus commode de travailler dans \mathbb{C}^{n+1} puisque cela évite de devoir enlever et rajouter des coefficient dans les formules de

changement de carte :

$$\forall z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z^{i,j} \neq 0 \quad (i.e. [z] \in U_i \cap U_j), \quad \phi_i \circ \phi_j^{-1}(z) = \frac{z^j}{z^i} z$$

Les (U_i, ϕ_i) forment un atlas sur l'espace projectif complexe, faisant de ce dernier une variété de dimension $\dim = 2n$. Comme $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est plus précisément une variété complexe¹, il est utile d'écrire ses coordonnées locales sous la forme $(w^\mu, \bar{w}^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$, où :

$$\forall w \in U_i, \forall \mu \neq i, \quad w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i}, \quad \text{où } [z] = w$$

1.2 $\mathbb{S}^n \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n$ comme fibré principal

1.2.1 Définition générale

Pour le dire simplement, les *variétés fibrées* sont des variétés qui ressemblent localement à des espaces produits. Le ruban de Möbius en est un exemple typique : il ne peut pas s'écrire comme le produit d'un cercle avec un segment $S^1 \times [0, 1]$ à cause de la façon dont il est construit. Mais localement, il est tout à fait comparable (*i.e.* difféomorphe) à un tel produit (*cf.* [fig. 1.1](#)).



fig. 1.1 — Représentation du ruban de Möbius en tant que fibré. Les notations sont reprises de la définition 1.

Il existe toutes sortes de variétés fibrées dès lors qu'elles sont munies de structure remarquable. Celles qui vont nous intéresser sont celles dites principales² :

DÉFINITION 1 (VARIÉTÉ FIBRÉE PRINCIPALE) — Une *variété fibrée principale* (VFP), ou *fibré principal* est constituée de deux variétés différentielles P et B telles que :

- Il existe un groupe de Lie G opérant à droite (ou à gauche) sur P via l'application différentiable :

$$R : \begin{array}{ccc} P \times G & \longrightarrow & P \\ (p, g) & \longmapsto & R_g(p) := p \cdot g = pg \end{array} \quad (1.2)$$

- Il existe une surjection différentiable $\pi : P \longrightarrow B$ telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}(\pi(p)) = pG \quad (1.3)$$

- P est munie d'un ensemble de paire (U_i, h_i) tel que les U_i forment un recouvrement de B et tel

¹ Le formalisme des variétés complexes ne sera pas nécessaire outre mesure, certains concepts seront tout de même utiles et une rapide introduction de ces derniers se trouve en annexe C

² Bien que ce ne sera pas précisé, il sera toujours sous-entendu que les différentes variétés et cartes doivent avoir les mêmes niveaux de régularités pour que le tout reste cohérent.

que les $h_i : G \times U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset P$ soient des difféomorphismes vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \forall x \in B, \quad h_i(ab, x) = h_i(a, x) \cdot b \quad \text{et} \quad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

La variété B est appelé la *base* de la VFP, G son *groupe structural* et pG la *fibres* de P passant par p et au dessus de $\pi(p) \in B$. Le tout est notée $P(R, G, \pi, B)$ ou plus simplement $P(G, B)$.

Les fibres pG sont toutes difféomorphes à G et B est difféomorphe à P/G . Le diagramme commutatif ci-contre résume la situation (pr_i est la projection canonique sur la i -ème composante).

$$\begin{array}{ccc} G \times U_i & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U_i) \subset P \\ \text{pr}_2 \downarrow & \swarrow \pi & \\ U_i & & \end{array}$$

L'ensemble $\{(U_i \times G, h_i)\}_i$ est l'équivalent d'un atlas pour les variétés différentielles classiques mais adapter pour tenir compte de la structure fibré de P et de l'action de G . Explicité les changements de cartes dans P , ce fait comme suit.

D'abord, P étant localement difféomorphe à un produit $G \times U_i$, on peut y tracer des graphes appelés *sections locales*, comme sur la figure 1.2 ci-dessous. Formellement, une section locale au dessus de $U_i \subset B$ est une application $\sigma : U_i \longrightarrow P$ vérifiant :

$$\pi \circ \sigma = \text{id}|_{U_i}$$

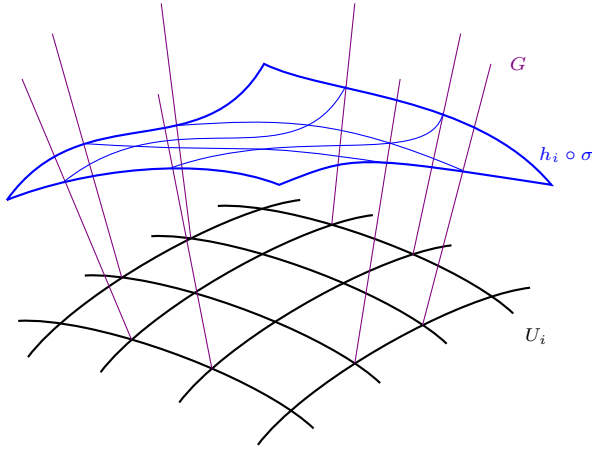


fig. 1.2 — Représentation d'une section local σ au dessus de $U_i \subset B$ de dimension 2. Comme P n'est pas un produit à proprement parler, σ est représenté dans $G \times U_i$ à travers h_i .



fig. 1.3 — Représentation de la section canonique définie par rapport à G avec une seconde section $\sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot g(x)$. Cette fois B est une variété de dimension 1.

Ensuite, les hypothèses sur $P(G, B)$ sont telles que G agit transitivement et librement (ou sans point fixe) sur P . C'est-à-dire que, sur une même fibre, tout point peut être atteint par n'importe quel autre via l'action de G (transitivité) :

$$\forall x \in B, \quad \forall p, q \in P_x, \quad \exists t(p, q) \in G \mid p = q \cdot t(p, q)$$

et que la seule façon de laisse les points invariants par cette même action est de passer par l'élément neutre e (libre) :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad p = p \cdot g \implies g = e$$

De la transitivité de G , découle le fait que toutes les sections locales σ au dessus de U_i peuvent s'écrire à partir d'une même section σ_i via la formule :

$$\forall x \in B, \quad \sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma(x))$$

Son caractère libre, lui assure l'unicité d'un choix canonique de section σ_i sur U_i . Elle est donnée par :

$$h_i(x, e) = \sigma_i(x)$$

Cela mène à la définition :

DÉFINITION 2 (FONCTIONS DE TRANSITIONS) — L'intersection de deux cartes est noté $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et le passage d'une section local canonique est donné par :

$$\forall x \in U_{ij}, \quad \sigma_j(x) = \sigma_i(x)t(\sigma_i(x), \sigma_j(x))$$

L'élément de G , $t(\sigma_i, \sigma_j)$, est alors appelé *fonction de transition* et sera noté φ_{ij} . Elle fait effectivement la transition entre deux cartes dans le sens où :

$$\forall (g, x) \in G \times U_{ij}, \quad h_i^{-1} \circ h_j(g, x) = (\varphi_{ij}(x)g, x)$$

Dans la suite, il sera nécessaire de munir P d'une connexion, qui s'introduit comme suit.

1.2.2 Le fibré $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{PC}^n)$

Une deuxième façon d'aborder \mathbb{PC}^n est de se débarrasser de la norme (resp. du module) des vecteurs de \mathbb{C}^{n+1*} (resp. des scalaires \mathbb{C}^*). Le troisième théorème d'isomorphisme permet ainsi décrire :

$$\mathbb{PC}^n := \mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{R}^{+*})/(\mathbb{C}^*/\mathbb{R}^{+*}) \cong \mathbb{S}^n/\mathbb{U}(1)$$

où $\mathbb{S}^n := S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est la sphère unité de dimension (réelle) $2n+1$, vue comme sous-ensemble de \mathbb{C}^{n+1} . Une autre façon de le comprendre est de voir qu'en écrivant $\lambda = re^{i\theta}$, moralement $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{U}(1)$. \mathbb{PC}^n peut alors être vu comme des vecteurs de \mathbb{C}^{n+1*} à une normalisation près puis à un $e^{i\theta}$ près. Ce qui revient à prendre des vecteurs normés de \mathbb{C}^{n+1} (i.e. dans \mathbb{S}^n) modulo l'action de $\mathbb{U}(1)$.

De façon plus concrète, là où dans $\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^*$, les coordonnées de $w \in U_i$ s'écrivaient $w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i}$; dans \mathbb{S}^n , z est déjà normé auquel cas :

$$w^\mu = \frac{z^\mu}{|z^i|e^{i\arg(z^i)}} = \frac{z^\mu}{\sqrt{1 - \sum_{\nu \neq i} |z^\nu|^2}} e^{-i\arg(z^i)}$$

et on constate bien que w^ν est définie modulo un choix de $e^{-i\arg(z^i)} \in \mathbb{U}(1)$. Réciproquement, à chaque paire $(w, e^{i\theta}) \in U_i \times \mathbb{U}(1)$, est associée un unique vecteur $z_i = h_i(w, e^{i\theta}) \in \mathbb{S}^n$ avec :

$$z_i^\mu = \frac{w^\mu}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta}$$

Par ailleurs, cette écriture est bien plus intéressante pour notre propos puisque le passage au quotient par $\mathbb{U}(1)$ traduit l'invariance par transformation de jauge.

Comme \mathbb{PC}^n est une variété quotient, elle induit naturellement une variété principale :

PROPOSITION 1 — La $2n+1$ -sphère S^{2n+1} , vu comme variété plongée dans \mathbb{C}^n est une VFP de base \mathbb{PC}^n et de fibre type $\mathbb{U}(1)$. L'action de $\mathbb{U}(1)$ sur S^{2n+1} étant induite par le produit complexe classique et où :

- La fibration π est la projection canonique de S^{2n+1} sur \mathbb{PC}^n :

$$\pi : \begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{PC}^n \\ z & \longmapsto & [z] \end{array}$$

- Les cartes locales h_i sont telles que :

$$\forall z \in \pi^{-1}(U_i), \forall e^{i\theta} \in \mathbb{U}(1), h_i(z, e^{i\theta}) = \frac{w^\mu}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta} \in \mathbb{S}^n \quad \text{où les}$$

- Tout les représentant z d'un élément de la base $\zeta \in \mathbb{PC}^n$ sont normé, ainsi, alors tout La section

canonique au dessus des U_i , σ_i elle est définie par :

Voir [7, lemme 2.17] pour une démonstration de l'aspect fibré.

1.3 Connexion sur VFP

1.3.1 Définition général

Comme P ressemble localement à un produit $G \times U_i$, il est utile de séparer ses espaces tangents $T_p P$ comme une somme directe d'espaces tangents respectivement aux fibres et à la base. Conformément aux représentations précédentes (fig. 1.1 à 1.3), les premiers sont appelées espaces tangents *verticaux*, les seconds *horizontaux* et l'on note :

$$\forall p \in P, \quad T_p P = V_p P \oplus H_p P$$

Les tangents verticaux $V_p P$ se définissent canoniquement par rapport à π . Pour cela, la *fonction tangente* (ou *dérivée*) de π au point p est noté $T_p \pi$ avec :

$$(T_p \pi)_j^i = \frac{\partial \pi^i}{\partial x^j}(p) = \partial_j \pi^i(p)$$

Ainsi, $T_p \pi$ est à valeur de $T_p P$ dans $T_{\pi(p)} B$ et l'espace tangent vertical au point p se définit comme :

$$V_p P := \text{Ker}(T_p \pi) = \{v \in T_p P \mid T_p \pi(v) = 0\}$$

Il s'avère que les espaces horizontaux ne peuvent pas être construits de cette façon. Il faut donc faire un choix pour les $H_p P$ et c'est ce choix qui est appelé connexion (elle connecte les espaces tangents entre eux). Ces sous-espaces peuvent être caractérisés par une 1-forme différentiable ω sur P à valeur dans $V_p P$, auquel cas :

$$\forall p \in P, \quad H_p P = \text{Ker}(\omega_p)$$

Dans le cas des VFP, une connexion doit en plus avoir de bonnes propriétés au regard de l'action R , aboutissant à la définition :

DÉFINITION 3 (CONNEXION SUR VFP) — Une *connexion* sur une VFP $P(G, B)$ est la donnée d'un sous-espace tangent, $H_p P \subset T_p P$, en tout point de $p \in P$ tel que :

- $H_p P$ dépend différentiellement de p ("dépendre différentiellement" à un sens précis mais qui ne sera pas utile pour la suite).
- $H_p P$ est supplémentaire à $V_p P$ dans $T_p P$:

$$T_p P = V_p P \oplus H_p P \tag{1.4}$$

- l'assignation des $H_p P$ est invariante par l'action de G au sens où :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad H_{R_g(p)} P = R_{g*}(H_p P) = \{R_{g*}(v) \mid v \in H_p P\} \tag{1.5}$$

Au delà d'assurer une compatibilité avec la connexion, l'équation (1.5) permet de n'avoir à définir la connexion qu'en un seul point de chaque fibre, les autres se déduisant par l'action de G . Entre autre, pour tout point de la base $x \in B$, il suffit de la définir en $\sigma_i(x) = h_i(e, x)$ et l'espace horizontal en tout autre point $p = h_i(x, g) = \sigma_i(x) \cdot g$ au dessus de x est donné par :

$$H_p P = T_{\sigma_i(x)} R_g(H_{\sigma_i(x)} P)$$

De même, la 1-forme de connexion n'a besoin d'être définie que sur un point particulier au dessus de chaque fibre. Les espaces verticaux étant tous difféomorphes à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \cong T_e G$ de G , c'est sur \mathfrak{g} qu'elle est définie :

DÉFINITION 4 — La 1-forme de connexion ω d'une VFP $P(G, B)$ est définie comme la 1-forme différentiable sur P à valeur dans \mathfrak{g} (*i.e.* en tout point $p \in P$, ω_p est valeur de $T_p P$ dans \mathfrak{g}), telle que :

$$\forall p \in P, \quad H_p P := \text{Ker}(\omega_p) \quad (1.6)$$

En terme de coordonnée local, ω elle n'a pas besoin d'être défini sur $U_i \times G$, mais seulement sur $U_i \cong U_i \times \{e\}$. Ainsi, ω induit une 1-forme sur les cartes U_i par l'image réciproque des sections canonique σ_i . Elles sont notées $\mathcal{A}_i := \sigma_i^* \omega$ et sur le chevauchement U_{ij} , elles vérifient :

$$\mathcal{A}_j = \varphi_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \varphi_{ij} + \varphi_{ij}^{-1} d\varphi_{ij} \quad (1.7)$$

Si \mathcal{A}_i est définie sur les U_i , plutôt que $U_i \times G$, c'est encore grâce à la compatibilité de la connexions avec la l'action de G sur P , qui l'information sur G redondante. *MEH.*

1.3.2 Choix de connexion sur $\mathbb{S}^n(\text{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$

II — Interprétation des trois phases dans ce cadre

2.1 Cas pseudo-cyclique

Mais si γ est horizontal, alors pas de phase dynamique et :

$$\Phi_{\text{geo}} = \Phi_{\text{tot}}$$

Du point de vue de \mathbb{S}^n , Φ_{tot} est la distance (géodésique) entre $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$. Si γ_g est cette géodésique et que, de plus, elle n'a pas d'holonomie (*i.e.* $\omega_{\gamma(0)}(\dot{\gamma}(0)) = \omega_{\gamma(1)}(\dot{\gamma}(1))$)

ANNEXE

Annexe A — Connexion induite par une métrique

Si $P(G, B)$ une VFP munie d'une métrique riemannienne g . La connexion induite par g sur P est définie par :

$$\forall p \in P, \quad H_p P = V_p P^\perp \quad (1.8)$$

Plus concrètement, $V_p P$ est isomorphe à \mathfrak{g} via la transformation :

$$\forall p \in P, \forall a \in \mathfrak{g}, \quad a^*(p) = \left. \frac{d}{dt} p \cdot \exp(ta) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} p \cdot \exp(ta) \right|_{t=0} := pa$$

Avec, une base $\{\mathfrak{e}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ de \mathfrak{g} induit une base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq k} = \{\mathfrak{e}_i^*\}_{1 \leq i \leq k}$ sur $V_p P$. La métrique g induit alors une connexion de 1-forme :

$$\omega_g(X) = \sum_i g(X, e_i) \mathfrak{e}_i = \sum_i g_{ij} X^j \mathfrak{e}_i$$

et on la projection de X sur VP est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{ver} X = \omega(X)^* &\iff \text{ver}(X^i e_i) = \sum_i g_{ij} X^j e_i \\ &\iff (\text{ver} X)^i = g_{ij} X^j \end{aligned}$$

Annexe B — Algèbre et groupe de Lie

Annexe C — Variété différentielle complexe, tiré de [16]

Pour mémoire, une variété différentielle de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) de dimension n est un espace topologique³ \mathcal{M} (ou \mathcal{M}^n) munie d'un *atlas* $(\phi_i, U_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire un ensemble fini de pair d'ouvert $U_i \subset \mathcal{M}$ et d'application $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

- les U_i forme un recouvrement de la variété : $\bigcup_{i \in I} \phi_i(U_i) = \mathcal{M}$
- les ϕ_i sont des homéomorphismes sur leur image $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$.
- si l'intersection $U_i \cap U_j$ est non vide, alors $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)}$ est un C^k difféomorphisme sur son image.

\mathcal{M} sera une *variété différentielle complexe* si elle satisfait les propriétés ci-dessus où \mathbb{R}^n est remplacé par \mathbb{C}^n et où la condition de difféomorphisme est remplacé par la condition d'holomorphisme.

Une application $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ étant holomorphe si chacune de ses composantes vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \mu, \quad \frac{\partial f}{\partial y^\mu}(x + iy) = i \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x + iy)$$

Les fonctions holomorphes étant automatiquement C^∞ , les variétés différentielles complexes sont toujours lisse, c'est-à-dire C^∞ . Aussi, \mathcal{M} est dite de dimension complexe n et dimension (réel) $2n$, notés :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) := n \qquad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) := \dim(\mathcal{M}) = 2n \quad (1.9)$$

³La topologie de \mathcal{M} doit vérifier des propriétés type séparable, dénombrable à l'infinie, etc., qui seront toutes admises dans la suite, voir par exemple [7, chap. 2]

Ensuite, pour le dire rapidement, la structure complexe de \mathcal{M} permet de séparer les espaces tangents en deux sous espaces. Pour ce faire, on commence par noter qu'en tout point $p \in \mathcal{M}$ de coordonnée $z^\nu = x^\nu + iy^\nu$, l'espace tangent $T_p\mathcal{M}$, vu comme variété réelle, admet une base :

$$T_p\mathcal{M} = \text{Vec} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\} \quad (1.10)$$

Plus tôt que de se basé sur les x^μ et y^μ pour séparer les $T_p\mathcal{M}$, on définit sur ces derniers un tenseur J_p de type (1,1) tel que :

$$J_p \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad J_p \frac{\partial}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (1.11)$$

Ce tenseur est l'équivalent de la multiplication par $\pm i$ et le fait que \mathcal{M} soit complexe assure qu'il soit défini globalement, *i.e.* sur $T\mathcal{M}$. Il est diagonalisable dans la base :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial z^\mu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \quad \partial_{\bar{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \quad (1.12)$$

Ainsi en fonction de la base ((1.9) ou (1.12)), J_p va s'écrire :

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \quad J_p = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Finalement, $T\mathcal{M}$ peut être séparé en deux sous-espaces engendré respectivement par les ∂_μ et $\partial_{\bar{\nu}}$. On parle de vecteur holomorphe et anti-holomorphe et on note :

$$T_p\mathcal{M}^+ = \text{Vec}\{\partial_\mu \mid 1 \leq \mu \leq n\} \quad T_p\mathcal{M}^- = \text{Vec}\{\partial_{\bar{\mu}} \mid 1 \leq \mu \leq n\} \quad (1.14)$$

- qui est quelle phase
- mail à berthier pour les contraintes rapport
- modulo 2π ?
- *G. Feldman – Multivariate Analytic Signals and the Hilbert Transform*

TABLE DES FIGURES

<i>1.1</i>	Ruban de Mobius comme variété fibrée	6
<i>1.2</i>	Représentation d'une section local	7
<i>1.3</i>	Représentation de la section canonique	7

TABLE DES CODES

RÉFÉRENCES

- [1] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [2] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [3] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [4] F. FAURE, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).
- [5] J. FLAMANT, *Une approche générique pour l'analyse et le filtrage des signaux bivariés*, these de doctorat, Ecole centrale de Lille, Sept. 2018.
- [6] J. FLAMANT, N. LE BIHAN, AND P. CHAINAIS, *Time-frequency analysis of bivariate signals*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 46 (2019), pp. 351–383.
- [7] J. LAFONTAINE, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [8] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [9] ———, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.
- [10] J. LEFEVRE, *Polarization analysis and optimization geometry*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....] ; University of Melbourne, Dec. 2021.
- [11] J. M. LILLY, *Modulated Oscillations in Three Dimensions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 59 (2011), pp. 5930–5943.
- [12] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [13] J. E. MARSDEN AND T. S. RATIU, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, vol. 17 of Texts in Applied Mathematics, Springer New York, New York, NY, 1999.
- [14] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [15] ———, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. II. The Case of Unitary Group Representations*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 269–340.
- [16] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.