

Mémoire de Stage de M2

PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Pierre-Olivier AMBLARD, Julien FLAMANT & Michel
BERTHIER

Master MIX – Université de La Rochelle

2024 – 2025

INTRODUCTION

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui demande beaucoup de contexte pour être expliqué. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant t d'un signal complexe ψ est donné par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) = \arg \langle \psi(t), \psi(t_0) \rangle \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\psi}(s), \psi(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\psi(t) \rightsquigarrow \psi'(t) = e^{i\alpha(t)}\psi(t)$$

Cette propriété rend la phase Φ_{geo} intrinsèquement liée à la trajectoire que prend la projection de ψ dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ et par conséquent, à la géométrie de ce dernier, d'où son nom.

Ceci à largement été étudié dans le cadre de système dynamique régis par EDP [4, 12], notamment en mécanique quantique avec l'équation Schrödinger [1, 13, 15]. Ce n'est que récemment que Le Bihan, Flament et Amblard se sont intéressés à son application en traitement du signal dans le cas de signaux bivariés [7, 8].

[...]

NOTATIONS ET CONVENTIONS

OBJET/FONCTION	NOTATION
Conjugué complexe	\bar{x}
Transposée (resp. adjoint) de la matrice A	tA (resp. A^\dagger)
Distribution de Dirac	δ
Indicatrice de E	$\mathbb{1}_E$
Fonction signe	$\text{sign}(x)$
Transformée de Fourier	$\mathcal{F}[x], \hat{x}$
Transformée en SA	$\mathcal{A}[x]$
Transformée de Hilbert	$\mathcal{H}[x]$
Produit hermitien	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Espérance et variance de f suivant ρ	$\mathbb{E}_\rho[f(t)], \mathbb{V}_\rho[f(t)]$
Espace des fonctions p.p. de puissance p^{eme} intégrable à valeur de E dans F	$L^p(E, F)$
Support d'une fonction f	$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$
Matrice de rotation de paramètre Θ (resp. d'angle θ en dimension 2)	R_Θ (resp. R_θ)
Ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$)
Ensemble des matrices hermitiennes (resp. anti-hermitiennes) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$)

Note générale

- les références sont en fin de mémoire est en .bib sur le [GitHub](#)
- Idem pour les codes et un mot sur **pygeomphase**
- En italique sont les notes un peu plus informelle
- Y'a des annexes pour chaque partie mais ce sera précisé si elles sont nécessaire pour suivre
- On va parler de géo diff et pour éviter de réécrire un livre, on va admettre beaucoup de résultats, on renvoie vers [6] (mets en d'autre) pour une introduction extensive à la théorie

Notations math :

- Convention sur le produit hermitien (congué à droite)
- les vecteurs seront le plus souvent en gras, leur dérivée en temps noté par un point (ex. : $\dot{x}(t)$) et celle des scalaires seront noté par un prime (ex. : $a'(t)$)
- convention de sommation d'Einstein ? (oui mais est-ce qu'on en parle maintenant)

TABLES DES MATIÈRES

Introduction	1
Notations et conventions	2
<hr/>	
PARTIE I — INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE	4
<hr/>	
I — Introduction de la phase géométrique	4
1.1 Cas univarié : signaux AM-FM	4
1.2 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié	5
1.3 Apparition de la phase géométrique	8
II — Première étude de la phase géométrique	10
2.1 Cas des signaux AM-FM-PM bivariés	10
2.2 Généralisation en plus haute dimension	12
2.3 Sur la nécessité d’avoir une approche géométrique	12
Annexes	13
Annexe A — Compléments sur l’analyse temps-fréquence	13
A.1. Un mot sur la notion de fréquence instantanée (<i>nécessaire?</i>)	13
A.2. Formalisme derrière la transformée en SA	13
A.3. Lien avec le théorème de Bedrosian	13
Annexe B — Compléments sur les signaux AM-FM-PM	13
B.1. Construction détaillée des signaux AM-FM-PM (<i>nécessaire?</i>)	13
B.2. Démonstrations	13

PARTIE I

INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE

En traitement du signal, la phase d'un signal est intrinsèquement liée à la notion de fréquence instantanée, qui joue un rôle important en analyse temps-fréquence. C'est donc de point que commencera notre discussion pour introduire la phase géométrique. Pour cela, seront rapidement introduit quelques notions et résultats d'analyse temps-fréquence dans le cas univarié (sec. 1.1). Suite à quoi sera définie la phase instantanée pour le cas multivarié (sec. 1.2), qui permettra enfin de mettre en évidence la phase géométrique (sec. 1.3).

Dans une seconde partie, seront introduit les signaux bivarié dit AM-FM-PM (sec. 2.1), dont la phase géométrique sera calculée explicitement (sec. ??), ce qui permettra de mettre en évidence certaines de ses propriétés. Dans une dernière section, seront proposées des généralisations des signaux AM-FM-PM au delà du cas bivarié et seront discutées leur pertinence quant à l'étude de la phase géométrique (sec. 2.2). (*Pas super convaincu par ce paragraphe*)

I — Introduction de la phase géométrique

1.1 Cas univarié : signaux AM-FM

En traitement du signal, l'analyse fréquentielle par la transformée de Fourier est un incontournable. Seulement, cette transformation fait perdre toute notion temporelle : si l'étude du spectre du signal permet de dire quelles fréquences apparaissent dans le signal, elle ne permet pas de dire à quel moment. C'est en réponse à cela, entre autre, qu'est développé l'analyse temps-fréquence. À cette fin, sont définies les paramètres instantanées d'un signal :

DÉFINITION 1 (PARAMÈTRES INSTANTANÉES) — Soit x , est un signal complexe écrit sous forme exponentielle :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & a(t)e^{i\phi(t)} \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \phi(t) \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

a est appelé *amplitude instantanée* du signal, $1/2\pi\phi'$ sa *fréquence instantanée* et sa *phase instantanée* est définie, modulo un choix de phase initiale, par :

$$\Phi_{\text{inst}}(x, t_0, t) = \phi(t) - \phi(t_0) \quad (1.2)$$

Pour les signaux réels, ces notions sont moins évidentes à définir puisqu'elles demandent d'écrire les signaux sous la forme :

$$x(t) = a(t) \cos \phi(t)$$

Auquel cas, le choix de la pair (a, ϕ) n'est pas unique. Il existe tout de même un "bon" choix de telle pair dans le cas des signaux dit AM-FM :

DÉFINITION 2 (SIGNAL AM-FM) — Un signal réel de la forme :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a(t) \cos \phi(t) \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \quad (1.3)$$

est dit *AM-FM* (*amplitude and frequency modulated*) si a et $\cos \phi$ admettent des transformées de Fourier et si de plus la première a un spectre concentré sur les basses fréquences, la seconde concentré sur les hautes fréquences et que les deux ne se chevauchent pas. Formellement, ces conditions demandent qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda] \quad (1.4)$$

Dans ce cas, a et ϕ donne lieu à la même définition que pour le cas complexe.

Ces conditions sont liées au théorème de Bedrosian, et plus de détail se trouve dans l'annexe ???. Pour le dire rapidement, elles évitent que toutes les fréquences du signal se trouvent dans l'amplitude a dans la décomposition (a, ϕ) , auquel cas, x n'aurait "pas de fréquence" au sens où ϕ pourrait être choisie constante, voir nulle.

Sous ces conditions, x peut être vu comme le signal complexe $\mathcal{A}[x]$ telle que :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} = a(t) \cos \phi(t) + ia(t) \sin \phi(t) = x + i\Im \mathcal{A}[x]$$

L'on parle alors de transformée en *signal analytique* et $\mathcal{A}[x]$ a naturellement les mêmes paramètres instantanés que x .

L'intérêt d'introduire toutes ces notions est que les signaux analytiques souffrent du même problème que les signaux réels. En effet, en écrivant un signal \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\Phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\Phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\Phi_n(t)} \end{pmatrix}$$

Le fait que \mathbf{x} soit à valeur dans \mathbb{C}^n impose un choix naturel d'amplitude instantanée : sa norme. Pour ce qui est de la phase instantanée, en revanche, n'importe quel choix de ϕ convient *a priori* :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} = a(t)e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\psi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\psi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\psi_n(t)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a(t) = \|\mathbf{x}(t)\|_2 \\ \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\|_2 = 1 \\ \phi_i = \phi + \psi_i \end{cases}$$

Il suffit que les ψ_i soient ajustés pour assurer que $\phi_i = \phi + \psi_i$.

À noter, que si a et ϕ sont respectivement une amplitude et une phase, le vecteur restant $(a_i e^{i\psi_i})_{1 \leq i \leq n}$ correspond à un vecteur de polarisation, sur lequel nous reviendrons dans la section II suivante.

1.2 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié

On se propose ici de définir la phase instantanée comme suit :

DÉFINITION 3 (PHASE DYNAMIQUE/INSTANTANÉE) — La *phase instantanée* ou *dynamique* (à l'instant t partant de t_0) d'un signal multivarié $\mathbf{x} = (a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ quelconque, est définie par la formule :

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \int_{t_0}^t \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi'_i(s) ds \quad (1.5)$$

On s'autorisera à omettre les paramètres de Φ_{dyn} lorsque cela ne prête pas à confusion.

Outre l'aspect variationnelle de cette formule, le terme “dynamique” viens du fait que, lorsque \mathbf{x} suit une équation de Schrödinger :

$$i \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = h\mathbf{x}(t) \quad (1.6)$$

la dérivée $\dot{\mathbf{x}}$ dans la formule (1.5) ci-dessus se voit remplacé par l'hamiltonien $h\mathbf{x}$ [1, sec. 2], [13, p. 215], donnant :

$$\Phi'_{\text{dyn}} = -i \int_{t_0}^t \frac{\langle h\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds$$

Sachant que \mathbf{x} n'a aucune raison de suivre une telle équation dans notre cas, poser $h = i \frac{d}{dt}$ enlève toute contrainte, auquel cas $\Phi'_{\text{dyn}} = \Phi_{\text{dyn}}$.

Cela étant, deux arguments sont donnés pour motiver cette définition :

Argument variationnelles

Le premier, fortement inspirée par les travaux de Lilly & Olhede [11], consiste à généraliser la condition (1.4) de séparation haute/basse fréquences sur les signaux AM-FM. Pour cela, l'on commence par faire apparaître une phase ϕ — pour l'instant inconnue — en écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\phi(t)} e^{-i\phi(t)} \mathbf{x}(t) := e^{i\phi(t)} \mathbf{y}(t)$$

Si ϕ est bien choisie, alors \mathbf{y} ne devrait contenir que les informations associées à l'amplitude et la polarisation de \mathbf{x} . Or, conformément à la condition (1.4), la phase doit contenir les hautes fréquences du signal et, inversement, les basses fréquences doivent se trouver dans ce qui reste.

La fréquence donnant, pour le dire vite, la vitesse d'ondulation, la contrainte sur \mathbf{x} va être de limite les variations de \mathbf{y} . Concrètement, ϕ doit être choisie de sorte à minimiser la dérivée $\dot{\mathbf{y}}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \left\| e^{-i\theta(t)} (\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t)\mathbf{x}(t)) \right\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t)\mathbf{x}(t)\|_2^2$$

La contrainte ne dépendant que de la dérivée θ' , on se ramène à :

$$\min_{\theta(t)} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \min_{\theta'(t)} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - \theta'(t)\mathbf{x}(t)\|_2^2$$

En rappelant que $\frac{d}{dx} \|f(x)\|_2^2 = 2\Re\langle f(x), f'(x) \rangle$, il vient que ce minimum¹ est atteint par $\phi'(t)$ à condition que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi'} \|\dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}\|_2^2 = 0 &\iff 0 = 2\Re \left\langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}, \frac{d}{d\phi'} (\dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}) \right\rangle \\ &= 2\Re \langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}, -i\mathbf{x} \rangle \\ &= 2\Re \left(i \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle \right) + 2\phi' \Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= -2\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle + 2\phi' \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\phi' = \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$ et :

$$\phi(t) = \Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \quad (1.7)$$

¹ L'extremum obtenu est l'unique minimum globale puisque $t \mapsto \|at + b\|^2$ est strictement convexe pour $a \neq 0$.

Arguments des moyennes

Autre argument, cette fois inspiré de [2], ce base sur la notion de fréquence moyenne. D'abord dans le cas d'un signal complexe univarié, sont définies les fonctions de densités d'énergie (resp. d'énergie spectrale) comme :

$$\begin{array}{ll} \rho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & t \longmapsto |x(t)|^2 \end{array} \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{ll} \varrho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & \nu \longmapsto |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array} \quad (1.8)$$

À partir de ces dernières est définie la fréquence moyenne de x comme l'espérance de ϱ , $\mathbb{E}_\varrho[\nu]$. Cette fréquence moyenne est liée à la fréquence instantanée par la formule :²

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho[\phi'] \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un signal $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ multivarié, les densités d'énergies se définissent comme :

$$\begin{array}{ll} \rho_i : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & t \longmapsto |x_i(t)|^2 = a(t)^2 a_i(t)^2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \varrho_i : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & \nu \longmapsto |\hat{x}_i(\nu)|^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \rho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & t \longmapsto \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \varrho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & \nu \longmapsto \|\hat{\mathbf{x}}(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varrho_i(t) \end{array}$$

Le second argument consiste alors à dire que l'égalité des moments (1.9) doit resté vrai dans le cas multivarié. Cela assure au moins que la fréquence instantanée de \mathbf{x} , $1/2\pi\phi'$, à pour moyenne la fréquence moyenne en sens de Fourier.

En appliquant la formule (1.9) au ϱ_i , et en notant toujours $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \int_{\mathbb{R}} \nu \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) d\nu \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\varrho_i}[\nu] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'_i(t) \rho_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t)^2 \sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{i=1}^n \phi'_i a_i^2 \right] \end{aligned}$$

Ce qui mène à poser $\sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i^2(t)$ pour la fréquence instantanée, avec la phase associée :

$$\phi = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds \quad (1.10)$$

²cette formule se généralise à tout les moments de ϱ et existe également pour les moments de ρ , voir [3, sec. 1.4] pour une démonstration "à la physicienne" ... *ou bien en annexe ?*

Formule qui concorde bien avec celle de la phase dynamique une fois explicité :

$$\begin{aligned}
\Im m \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} &= \Im m \left(\frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n \left((aa_i)'(t) + a(t)a_i(t)i\phi_i'(t) \right) e^{i\phi_i(t)} \overline{a(t)a_i(t)e^{i\phi_i(t)}} \right) \\
&= \frac{1}{a(t)^2} \Im m \left(\sum_{i=1}^n a(t)a_i(t)(aa_i)'(t) + ia(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \right) \\
&= \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i(t)^2 \phi_i'(t)
\end{aligned}$$

D'où

$$\Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds$$

1.3 Apparition de la phase géométrique

Cela étant dit, il existe une autre façon, plus simple, d'obtenir la phase d'un signal. D'abord, dans le cas univarié, la phase instantanée de $x = ae^{i\phi}$ peut être réécrite comme :

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \arg \left(x(t) \overline{x(t_0)} \right)$$

Formule qui se généralise en cas multivarié par ce qui sera appelé la *phase totale* du signal :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle \quad (1.11)$$

D'un point de vu géométrique, il est bien connue que le produit scalaire entre deux vecteurs réels $u, v \in \mathbb{R}^n$ est lié à l'angle $\angle(u, v)$ entre ces derniers par la formule :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = \|u\| \|v\| \cos \angle(u, v)$$

Pour le produit hermitien, cet angle se retrouve dans l'argument, de sorte que si u et v sont complexes :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \|u\| \|v\| e^{i\angle(u, v)}$$

En ce sens, la phase totale calcul explicitement l'angle entre $\mathbf{x}(t_0)$ et $\mathbf{x}(t)$. La question est alors de savoir si Φ_{dyn} correspond à cette angle. Un calcul explicite montre que c'est bien le cas en univarié : en notant $\mathbf{x} = ae^{i\phi}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) &= \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Im m \int_{t_0}^t \frac{(a'(s) + ia(s)\phi'(s))e^{i\phi(s)} \overline{a(s)e^{i\phi(s)}}}{a^2(s)} ds \\
&= \int_{t_0}^t \frac{a^2(s)\phi'(s)}{a^2(s)} ds \\
&= \phi(t) - \phi(t_0)
\end{aligned}$$

Dans le cas multivarié, en revanche, c'est une autre histoire. En reprenant les notations $\mathbf{x} = ae^{i\Phi_{\text{dyn}}} (a_i e^{i\psi_i})_{1 \leq i \leq n}$, la phase totale se réécrit :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \arg \left(a(t)a(t_0)e^{i(\Phi_{\text{dyn}}(t) - \Phi_{\text{dyn}}(t_0))} \sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \\
&= \Phi_{\text{dyn}}(t) + \arg \left(\sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \quad \text{car } \Phi_{\text{dyn}}(t_0, t_0) = 0
\end{aligned} \quad (1.12)$$

Apparaît alors un terme de déviation de la phase dynamique par rapport à la phase totale, qui (surprise) est appelé phase géométrique et sera notée :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \quad (1.13)$$

Déviation qui s'observe expérimentalement, comme le montre la figure 1.1 ci-dessous.

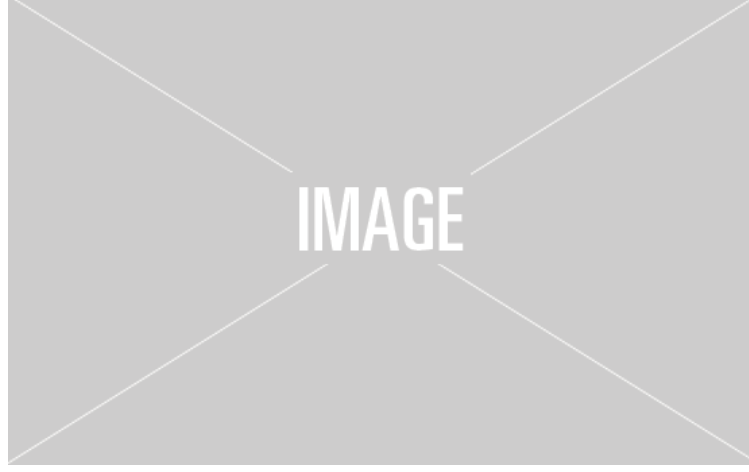


fig. 1.1 — Sur le graphe de gauche, le signal \mathbf{x} à valeur dans \mathbb{R}^2 et dans celui de droite la calcul de la phase dynamique, totale et de leur différence. Résultat tiré des simulation de Le Bihan et al. [7]

Un résultat bien connue en physique [1, 13, 15] est que cette troisième phase est invariante par transformation de jauge. Dans notre contexte, cela signifie que si \mathbf{x} et $\tilde{\mathbf{x}}$ sont deux signaux multivarié complexe tel que $\tilde{\mathbf{x}} = e^{i\alpha} \mathbf{x}$, avec α une fonction continue du temps, alors :

$$\Phi_{\text{geo}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\tilde{\mathbf{x}}) - \Phi_{\text{dyn}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) = \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x})$$

Cela signifie plusieurs choses. D'une part, le fait cette phase soit invariante pas transformation de jauge montre qu'elle est associée / issue de la composante de \mathbf{x} dont à mentionné qu'elle était associée à sa polarisation. Ce point sera discuté dans la section II suivante.

D'autre part, cela suggère que la phase géométrique doit avoir une certaine robustesse au bruit. Pour argumenter ce point, rappelons que le bruit d'un signal se trouve généralement dans les hautes fréquences de ce dernier. Or, en admettant, comme ça l'a été abordé dans la section 1.2 précédent, que la phase dynamique contient les hautes fréquences, il y a d'autant plus de chances que cette phase est un bon comportement par rapport au bruit.

Ainsi, s'il est possible de tirer des informations de Φ_{geo} , alors ces informations doivent pouvoir être obtenue même pour des signaux particulièrement bruités, comme c'est le cas des mesures d'ondes gravitationnelles (*j'aimerais beaucoup étudier ça mais ce sera sûrement pour une thèse, si thèse il y a*).

Cela étant dit, avec le calcul (1.12) précédent, il peut sembler que le travail sur la phase géométrique est terminée en cela qu'une formule explicite est donnée. Deux remarques à ce sujet :

D'abord, cette formule demande de connaître les ψ_i , qui eux-mêmes sont obtenue en extrayant la phase dynamique. Or, la formule de Φ_{dyn} n'est pas la plus appropriée au traitement du signal puisque qu'elle fait intervenir intégral et dérivée.

Aussi mais surtout, cette formule cache la profondeur dernière l'étude de la phase géométrique, à commencer par l'origine de son nom.

À modifier en fonction de la suite : Dans ce mémoire le calcul pratique de la phase géométrique ne sera pas aborder pour, à la place, se pencher sur le second point : l'aspect géométrique d'une phase éponyme.

Est-ce que je dois parler de l'espace projectif ou est-ce que je le garde pour la grande partie II ?

II — Première étude de la phase géométrique

Pour une première étude de la phase géométrique du signal, Le Bihan *et al.* se sont penché sur un cas particulier de signaux bivariés [5, 7, 8]. Ces signaux, dit AM-FM-PM sont présentés dans une première partie et le calcul explicite de leur phases — totale, dynamique et géométrique — est présenté. Dans une seconde partie... **A VOIR POUR LA SUITE**

2.1 Cas des signaux AM-FM-PM bivariés

Ces signaux AM-FM-PM viennent généraliser les signaux AM-FM univarié en tenant compte de l'état de polarisation permis par le passage au 2D. Ils sont rapidement introduit ici et une construction plus détaillé de ces dernier se trouve en annexe B.1. (*est-ce que je fais vraiment une annexe là-dessus ?*).

En quelques mots. Dans le cas le plus simple, un signal bivarié à valeurs réelles, s , va décrire une ellipse en cours du temps. On parle alors de polarisation elliptique et s va s'écrire :

$$s(t) = a \cos \varphi(t) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi \\ \sin \chi \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}^+, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \chi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Les paramètres a et χ caractérisent respectivement la taille et l'excentricité de l'ellipse, θ son orientation dans le plan et $\varphi(t)$ précise où se trouve s à l'instant t sur cette ellipse. Le tout est représenté sur la ?? ci-dessous.

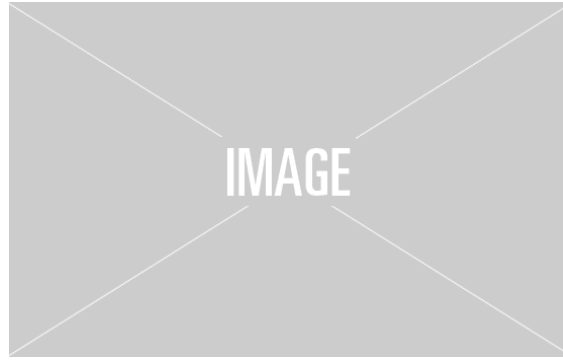


fig. 1.2 — Ellipse de polarisation du signal s sur laquelle sont représentés ses paramètres a, φ, θ, χ .

L'expression (1.15) est obtenue en autorisant les paramètres de polarisation à varier au cours du temps et après une transformation en signal analytique, mentionné dans la section 1.1 :

DÉFINITION 4 (SIGNAL AM-FM-PM) — Un signal bivarié complexe \mathbf{x} AM-FM-PM (*amplitude, frequency and polarization modulated*) est caractérisé par quatre paramètres a, φ, θ et χ , respectivement à valeur dans $\mathbb{R}^+, \mathbb{R},]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et tels que :

$$|\varphi'(t)| \gg |\theta'(t)|, |\chi'(t)|, \left| \frac{a'(t)}{a(t)} \right| \quad \left| \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \right| \gg 1 \quad (1.14)$$

Sous ces conditions, \mathbf{x} prend alors la forme, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = a(t)e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

où $R_{\theta(t)}$ est la matrice de rotation d'angle $\theta(t)$

IMPOSSIBLE DE TROUVER UNE SOURCE SUR L'ORIGINE DES HYPOTHESES + QU'EST-CE QU'ON ENTEND PAR “ \gg ” ?

La transformée en SA permet de transformer les signaux à valeurs réelles en complexes, ce qui nécessaire³ pour étudier la phase géométrique car c'est uniquement dans le cadre de complexe qu'elle a été étudiée jusqu'à présent. Et, comme pour les signaux AM-FM, les hypothèses sur a, φ, θ, χ assure que les paramètres soient interprétables comme sur la figure 1.2 précédente (là encore, voir annexe A).

Les trois phases de tels signaux est alors donnée par la proposition 1 suivante :

PROPOSITION 1 (PHASES DE SIGNAL AM-FM-PM) — Les trois phases d'un signal bivarié AM-FM-PM \mathbf{x} de paramètres $(a, \varphi, \theta, \chi)$ sont données par les formules :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arg \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin (\chi(t_0) + \chi(t)) \right) \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \left(\tan \Delta\theta \frac{\tan \chi(t_0) + \tan \chi(t)}{1 + \tan \chi(t_0) \tan \chi(t)} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \\ &= \arctan \left(\tan \Delta\theta \frac{\tan \chi(t_0) + \tan \chi(t)}{1 + \tan \chi(t_0) \tan \chi(t)} \right) - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \end{aligned} \quad (1.18)$$

où $\Delta y = y(t) - y(t_0)$ pour $y = \varphi, \theta, \chi$. La démonstration se trouve en annexe B.2. (*démo outdated*)

Deux remarques sur ces formules. La première est la phase géométrique ne dépend que des paramètres polarisations θ et χ . Un résultat rassurant sachant qu'elle est invariante pas transformation de jauge. La seconde, nettement plus troublante, est que φ ne s'interprète ni comme la phase totale ni dynamique. Plus loin, nous reviendrons, *section 2.3*, sur laquelle des deux doit représenter φ .

Pour le moment, remarquons que si à l'instant t , \mathbf{x} est tel que :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x}(t) = e^{i\alpha} \mathbf{x}(t_0)$$

alors le terme en arctangente disparaît, auquel cas :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) = - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds$$

Pour la suite :

- C'est bizarre, φ ne correspond ni à Φ_{tot} ni à Φ_{dyn}
- D'ailleurs, lequel des deux φ doit représenter ? La question est vraiment intéressante et on y revient plus loin
- En attendant, y'a un cas où ça s'explique mieux : cas pseudo-cyclique
- Rq : on dit rien sur ce que doit faire \mathbf{x} entre t_0 et t , c'est que à t qu'y a contrainte
- Là, le terme moche de Φ_{tot} disparaît et la phase géométrique est toute belle et on verra dans la partie II que c'est un cas très intéressant pour comprendre la phase g
- pour l'interpréter, va dans point carré
- *dans les deux cas, la phase g est indépendante de φ : elle regarde que la polar !!*

OLD :

- Représentation par expo (matrice et quaternions)

³Nous reviendrons sur ce point dans la dernière partie de mémoire ... *est-ce qu'on le fait vraiment tho?*

- calcul des 3 phases pour le cas bivarié
- *lien avec le calcul d'aire*
- discussion sur l'interprétation de φ par rapport aux $\Phi_{\text{tot,dyn,géo}}$: quelle phase φ est sensée représenter, totale ou dynamique ?

2.2 Généralisation en plus haute dimension

- Différentes écritures du bivarié pour différentes généralisation :
- Les quaternions on passe vite parce que ça se généralise très mal, Lefevre a a parlé, ça mène aux algèbres Clifford : trop de contrainte sur les dimensions des signaux
- En terme d'expo de matrice ? Lefevre [9, sec. I.3] l'a fait en trivarié mais au delà, y'a plus vraiment de choix remarquable de base pour $\mathfrak{u}(n)$
- En augmentant la taille de la matrice de rotation ? Lilly [10] l'a fait en trivarié et mais là encore, en terme de généralisation c'est pas si dingue parce que la matrice de rotation est pas calculable.

2.3 Sur la nécessité d'avoir une approche géométrique

- Mais surtout, dans tout ça, on ratte le plus important :
- La phase géo est invariante par transfo de jauge, donc il faut faire apparaître $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ dans la décomposition.
- et en fait, c'est le cas en bivarié car $\mathbb{P}\mathbb{C}^1 \cong \mathbb{S}^2$!
- $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ oui mais il faut pas non plus regarder que la projection parce qu'on perd toute les phases dans ce cas.
- Le bon compromis c'est les variétés fibrées : on est dans $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ mais on garde les phases dans les fibres.
- D'autant plus que ça à déjà était fait en physique et c'est vraiment concluant... (transition vers la grande partie suivante.)

ANNEXES

Annexe A — Compléments sur l'analyse temps-fréquence

A.1. Un mot sur la notion de fréquence instantanée (*nécessaire?*)

A.2. Formalisme derrière la transformée en SA

A.3. Lien avec le théorème de Bedrosian

Annexe B — Compléments sur les signaux AM-FM-PM

B.1. Construction détaillée des signaux AM-FM-PM (*nécessaire?*)

- Signal polarisé classique (θ, χ constants)
- Transformé en SA avec les hypothèses de Bedrosian
- Définition général en faisant dépendre θ/χ du temps
- Paramètre de Polar sur la sphère de Poincaré

B.2. Démonstrations

Démonstration de la proposition 1

- Il existe un groupe de Lie G opérant à droite (ou à gauche) sur P via une application différentiable :

$$\begin{aligned} \phi : P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto \phi(p, g) := pg = p \cdot g \end{aligned} \quad (1.19)$$

- Il existe une surjection différentiable $\pi : P \longrightarrow B$ telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}(\pi(p)) = pG \quad (1.20)$$

- P est munie d'un ensemble de paire (U_i, h_i) tel que les U_i forment un recouvrement de B et tel que les $h_i : G \times U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset P$ soient des difféomorphismes vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \forall x \in B, \quad h_i(ab, x) = h_i(a, x) \cdot b \quad \text{et} \quad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

Par souci de lisibilité, on note $\mathcal{U} = R_\theta \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix}$ de sorte que la dérivée de \mathbf{x} s'écrive :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= a' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ia\varphi' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ae^{i\varphi} \theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix} + ae^{i\varphi} \chi' \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \chi + i \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \theta \sin \chi - i \cos \theta \cos \chi \end{pmatrix} \\ &= a' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ia\varphi' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ae^{i\varphi} \theta' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + ae^{i\varphi} \chi' \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \bar{\mathcal{U}} \end{aligned}$$

Le produit hermitien $\langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle &= \left\langle ae^{i\varphi}\mathcal{U}, a'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\varphi'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\theta' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + ae^{i\varphi}\chi' \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}} \right\rangle \\
&= \left\langle a\mathcal{U}, a'\mathcal{U} + ia\varphi'\mathcal{U} + a\theta' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + a\chi' \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}} \right\rangle \\
&= aa'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle - ia^2\varphi'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + a^2\theta' \left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} \right\rangle + ia^2\chi' \left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}} \right\rangle
\end{aligned}$$

où les deux derniers produits hermitiens donnent :

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} \right\rangle &= -\mathcal{U}_1\overline{\mathcal{U}_2} + \mathcal{U}_2\overline{\mathcal{U}_1} \\
&= 2i\Im(\overline{\mathcal{U}_1}\mathcal{U}_2) \\
&= 2i\Im(\cos\theta\cos\chi - i\sin\theta\sin\chi)(\sin\theta\cos\chi - i\cos\theta\sin\chi) \\
&= 2i(-\cos^2\theta\cos\chi\sin\chi - \sin^2\theta\sin\chi\cos\chi) \\
&= -2i(\cos\chi\sin\chi + \sin\chi\cos\chi) \\
&= -i\sin 2\chi
\end{aligned}$$

$$\left\langle \mathcal{U}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}} \right\rangle = -\mathcal{U}_1\mathcal{U}_2 + \mathcal{U}_2\mathcal{U}_1 = 0$$

D'où, sachant que $\|\mathbf{x}\|^2 = a^2$ et $\|\mathcal{U}\| = 1$, la formule :

$$\begin{aligned}
-\frac{\Im\langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= -\frac{1}{a^2}\Im(aa'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle - ia^2\varphi'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle - ia^2\theta'\sin 2\chi) \\
&= \frac{1}{a^2}(a^2\varphi'\|\mathcal{U}\|^2 + a^2\theta'\sin 2\chi) \\
&= \varphi' + \theta'\sin 2\chi
\end{aligned}$$

Pour la phase totale, on note cette fois $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \cos\chi \\ -i\sin\chi \end{pmatrix}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t) \rangle &= \left\langle a(t_0)e^{i\varphi(t_0)}R_{\theta(t_0)}\mathcal{V}(t_0), a(t)e^{i\varphi(t)}R_{\theta(t)}\mathcal{V}(t) \right\rangle \\
&= a(t_0)e^{i\varphi(t_0)}a(t)e^{-i\varphi(t)}\left\langle R_{\theta(t_0)}\mathcal{V}(t_0), R_{\theta(t)}\mathcal{V}(t) \right\rangle \\
&= a(t_0)a(t)e^{i(\varphi(t_0)-\varphi(t))}\left\langle \mathcal{V}(t_0), R_{\theta(t)-\theta(t_0)}\mathcal{V}(t) \right\rangle
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on note $\Delta y = y(t) - y(t_0)$, $y_1 = y(t_0)$ et $y_2 = (t)$ pour $y = \varphi, \theta, \chi$. Le produit hermitien à droite s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathcal{V}(t_0), R_{\Delta\theta}\mathcal{V}(t) \right\rangle &= (\cos\chi_1 \quad -i\sin\chi_1) \begin{pmatrix} \cos\Delta\theta\cos\chi_2 - i\sin\Delta\theta\sin\chi_2 \\ \sin\Delta\theta\cos\chi_2 + i\cos\Delta\theta\sin\chi_2 \end{pmatrix} \\
&= \cos\chi_1(\cos\Delta\theta\cos\chi_2 - i\sin\Delta\theta\sin\chi_2) - i\sin\chi_1(\sin\Delta\theta\cos\chi_2 + i\cos\Delta\theta\sin\chi_2) \\
&= \cos\Delta\theta(\cos\chi_1\cos\chi_2 + \sin\chi_1\sin\chi_2) - i\sin\Delta\theta(\cos\chi_1\sin\chi_2 + \sin\chi_1\cos\chi_2) \\
&= \cos\Delta\theta\cos\Delta\chi - i\sin\Delta\theta\sin(\chi_1 + \chi_2)
\end{aligned}$$

■

- qui est quelle phase
- mail à berthier pour les contraintes rapport

TABLE DES FIGURES

<i>1.1</i>	Déviati��n de la phase dynamique par rapport �� la phase totale	9
<i>1.2</i>	Ellipse de polarisation d'un signal bivarié réel	10

TABLE DES CODES

RÉFÉRENCES

- [1] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [2] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [3] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [4] F. FAURE, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).
- [5] J. FLAMANT, N. LE BIHAN, AND P. CHAINAIS, *Time-frequency analysis of bivariate signals*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 46 (2019), pp. 351–383.
- [6] J. LAFONTAINE, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [7] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [8] ———, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.
- [9] J. LEFEVRE, *Polarization analysis and optimization geometry*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....] ; University of Melbourne, Dec. 2021.
- [10] J. M. LILLY, *Modulated Oscillations in Three Dimensions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 59 (2011), pp. 5930–5943.
- [11] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [12] J. E. MARSDEN AND T. S. RATIU, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, vol. 17 of Texts in Applied Mathematics, Springer New York, New York, NY, 1999.
- [13] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [14] ———, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. II. The Case of Unitary Group Representations*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 269–340.
- [15] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.