

Rapport de Stage de M2

DES TRUCS SÛREMENT TRÈS COOLS
VRAIMENT TRÈS TRÈS COOL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Michel BERTHIER, *et al.*

Master MIX - Université de La Rochelle

2024 - 2025

TABLES DES MATIÈRES

Introduction	1
<hr/>	
CHAPTIRE I — ANALYSE TEMPS-FRÉQUENCE	2
<hr/>	
I — Sur l'intérêt de transformé les signaux réels en complexes	2
1.1 Distribution de l'énergie en temps et fréquence	3
1.2 Fréquence instantanée et covariance.	4
II — Transformée en signal analytique	6
2.1 Le problème de signaux réels et comment le résoudre	6
2.2 Propriété et interprétation des signaux analytiques	9
III — Généralisation au signaux multivariés	9
IV — Réflexion autour du produit hermitien	10
V — Comprendre la phase dynamique	12
<hr/>	
CHAPTIRE II — PHASE GÉOMÉTRIQUE	14
<hr/>	
VI — Description des signaux multivariés.	14
6.1 Version Lilly [4, 6]	14
6.2 Cas bivarié et trivarié	14
6.3 Mon blabla	15
VII— Phase géométrique d'un signal	17
VIII— Trucs à voir	17
8.1 random stuff ready pour rédac (+labeled).	17
8.2 Bilan des formules	17
8.3 Général	18
8.4 Point de vue des variétés	18

Introduction

Quote : The geometric phase is also one of the most beautiful examples of what Wigner once called “the unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences.” [1, p. 4]

Des questions :

- Pourquoi on va dans les complexes ? Réponse section I
- Pourquoi Schrödinger ? Peut-être que Mukunda [7] à la réponse
- En quoi la phase géométrique est une phase ? lien avec Fourier ?
- Lien entre phase et polarisation : différences, intérêts ? La phase géo c’est une phase dans la polar IMO (oui oui, on y vient)
- La param $(a, \chi, \theta, \varphi)$ elle dit quoi vraiment ? (sûrement simple à généraliser btw) $+$ (χ, θ) est pas en bijection avec la sphère (surement osez par contre)
- Multivaluation dans les variétés [1, p. 8] ???

Note de rédac :

- Index ? rappel δ de Dirac

CHAPITRE I

ANALYSE TEMPS-FRÉQUENCE

INTRO DE LA SECTION I — *Malgré ce que l'énoncé de la problématique laisse entendre, dans toute la suite nous travaillerons avec des signaux à valeur de \mathbb{R} dans \mathbb{C}^n plutôt que \mathbb{R}^n . Il y a de très bonne raison à la transformation des signaux réels en complexes et c'est sera l'objet de cette première section.*

Et pourquoi on veut faire du temps fréquence aussi ? (t'explique pourquoi c'est bien mais pourquoi ça NOUS intéresse ?)

I — Sur l'intérêt de transformé les signaux réels en complexes

Cette partie reprends, dans les grandes lignes, les propos de COHEN dans son livre Time frequency analysis [2]

Dans l'étude de signaux, la transformée de Fourier est un outil standard puisqu'il donne accès à tout l'information fréquentielle de ce dernier. Ce gain d'information n'est pas gratuit pour autant puisqu'on perd avec tout notion de temporalité. Pourtant dans bien des cas, une information instantanée, dépendante en temps, est plus pertinente.

C'est par exemple le cas dans l'étude de la langue oral (bon terme ?). Le sens d'une phrase ne vient pas du signal, *i.e.* la voix, tout entier mais plutôt de ses valeurs locales. Lorsque l'on prononce le mot "*fleur*", c'est l'enchaînement des sons associés au "*f*", "*l*", "*eu*", *etc.* qui est important et non la structure global du signal. On pourrait également cité l'effet Döppler qui permet, entre autre, de savoir si un émetteur s'éloigne ou se rapproche. Dans ce cadre, le passage d'un signal de hautes à basses fréquences (typiquement d'un son aigu à un son grave) indique que la source, qui se rapprochait, s'est mise à s'éloigner : c'est la variation de fréquence en cours du temps qui est porteuse d'information.

Pour avoir une notion de fréquence instantanée, il serait utile de pouvoir écrire tout signal réel x sous la forme :

$$x(t) = a(t) \cos \phi(t) \quad (1)$$

où a correspondrait à l'*amplitude instantanée* du signal et ϕ sa *phase instantanée*. Le problème d'une telle décomposition est que, si elle existe bel et bien, elle n'est en revanche pas unique. L'exemple le plus simple étant le cas $x(t) = \sin(t)$ qui se représente, entre autre, par les paires :

$$(a(t), \phi(t)) = (1, t + \pi/2) \quad (a(t), \phi(t)) = (\sin(t), 0) \quad (a(t), \phi(t)) = (2 \sin(t/2), t/2)$$

Pour avoir unicité de cette décomposition, il nous faut donc une contrainte sur (a, ϕ) . Une approche serait de voir x comme la partie réelle du signal complexe :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad z_x(t) = a(t)e^{i\phi(t)} \implies x(t) = \Re z_x(t)$$

Dans ce cas on aurait bien unicité de a et ϕ par rapport à z_x (son amplitude et sa phase) mais cela ne fait que déplacer le problème puisque z_x n'est pas mieux défini : Il y a une liberté totale quant au choix sa partie imaginaire. Pour motiver la définition de z_x , sont rappeler quelques outils d'analyse temps-fréquence.

1.1 Distribution de l'énergie en temps et fréquence

Dans toute cette section, on considèrera x un signal complexe et on notera \hat{x} ou $\mathcal{F}[x]$ sa transformée de Fourier (dont on supposera quelle existe, ici on supposera au moins $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$) :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x(t) \end{array} \quad \mathcal{F}[x] = \hat{x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \nu & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \end{array}$$

DÉFINITION 1 (Densités d'énergie) — Étant donnée un signal complexe x , la *densité d'énergie* ρ de x est donnée par le carré de son module. De même on définit ϱ la *densité d'énergie spectrale* :

$$\rho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & |x(t)|^2 \end{array} \quad \varrho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \nu & \longmapsto & |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array} \quad (2)$$

La valeur $\rho(t)$ correspond à la puissance déployée pour émettre le signal à l'instant t et $\varrho(\nu)$ à l'énergie associée à la fréquence ν sur tout le signal.

La transformée étant une isométrie de l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, si $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, alors l'*énergie totale* du signal est indépendante de la représentation de ce dernier (temporelle ou spectrale) :

$$E(x) := \|x\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varrho(\nu) d\nu = \|\hat{x}\|_2^2 \quad (3)$$

Par exemple, si $x(t) = e^{2\pi i \nu_0 t}$, alors $\hat{x}(t) = \delta(x - \nu_0)$. Dans ce cas, on a les densités :

$$\rho(t) = 1 \quad \varrho(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$$

Du point de vu temporel, le signal est émis avec une puissance régulière, mais le fait que ϱ soit un dirac indique que toute l'énergie du signal est concentré en une unique fréquence ν_0 .

DÉFINITION 2 (Durée et largeur de bande) — L'espérance ces densités sont notées, pour peu qu'elles existent :

$$\mathbb{E}_\rho[t] := \int_{\mathbb{R}} t |x(t)|^2 dt \quad \mathbb{E}_\varrho[\nu] := \int_{\mathbb{R}} \nu |\hat{x}(\nu)|^2 d\nu$$

Si un signal est localisé temporellement, alors la première espérance/moyenne donne une idée de l'instant d'émission du signal. Si *a contrario*, le signal est localisé en fréquence, la seconde espérance peut s'interpréter comme la fréquence "dominante" du le signal, ou plus généralement comme sa *fréquence moyenne*.

En particulier, et ce sera important pour la suite, dans le cas des signaux réels, l'espérance de ϱ est toujours nulles.

On note de même les variances (toujours à condition d'existence) :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_\rho[t] &:= \mathbb{E}_\rho \left[(t - \mathbb{E}_\rho[t])^2 \right] & \mathbb{V}_\varrho[\nu] &:= \mathbb{E}_\varrho \left[(\nu - \mathbb{E}_\varrho[\nu])^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_\rho[t^2] - \mathbb{E}_\rho[t]^2 & &= \mathbb{E}_\varrho[\nu^2] - \mathbb{E}_\varrho[\nu]^2 \end{aligned}$$

Les écart-types associés sont plus facilement interprétable. Le premier est appelé *durée d'émission* du signal, puisqu'il renseigne l'étalement temporelle du signal ; et le second *largeur de bande (fréquentielle)* puisque, lui, renseigne l'étalement fréquentielle.

1.2 Fréquence instantanée et covariance

Pour ce qui va suivre, les formules (4) et (5) suivantes seront nécessaire :

PROPOSITION 1 (“Calculation tricks” de [2]) — Si le signal est n fois dérivable et que la densité d’énergie associée ϱ admet un moment d’ordre n , alors il est donnée par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_\varrho [\nu^n] = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt = \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \left\langle x, \frac{d^n}{dt^n} x \right\rangle \quad (4)$$

Avec les hypothèses analogues, les moments de ρ s’écrivent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_\rho [t^n] = \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu) \frac{d^n}{d\nu^n} \overline{\hat{x}(\nu)} d\nu = \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^n \left\langle \hat{x}, \frac{d^n}{d\nu^n} \hat{x} \right\rangle \quad (5)$$

Démonstration

À supposer que les intégrales existes et que le théorème de Fubini s’applique, on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho [\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \nu^n \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu^n \hat{x}(\nu) \overline{\hat{x}(\nu)} d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \nu^n \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} e^{2i\pi\nu t'} dt' d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \end{aligned}$$

Ici, on remarque que :

$$\begin{aligned} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} &= \nu^{n-1} \frac{1}{-2i\pi} \frac{d}{dt} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \\ &= \nu^{n-2} \frac{1}{(-2i\pi)^2} \frac{d^2}{dt^2} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{dt^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \end{aligned}$$

Ce qui permet, en jouant sur les ordres d’intégrations et les propriétés du Dirac, d’obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho [\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{dt^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \left(\frac{1}{-2i\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}[1](t-t') dt dt' \\ &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt dt' \\ &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt' dt \\ &= \left(\frac{i}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt \end{aligned}$$

... a moins que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varrho [\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{dt^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}[1](t-t') dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt dt' \\
&= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt dt' \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dt^n} x(t) \delta(t-t') dt dt' \\
&= \left(\frac{-1}{-2i\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}} \frac{d^n}{dt'^n} x(t') \overline{x(t')} dt' \\
&= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt
\end{aligned}$$

On notera dans toute la suite, sauf précision, l'amplitude et phase de x (resp. \hat{x}) :

$$x(t) = a(t)e^{i\phi(t)} \quad \text{resp.} \quad \hat{x}(\nu) = \alpha(\nu)e^{i\psi(\nu)}$$

Les fonctions a et ϕ (resp. α et ψ) héritent des régularités de x (resp. \hat{x}) et on a :

$$\rho = |x|^2 = a^2 \quad \varrho = |\hat{x}|^2 = \alpha^2$$

PROPOSITION 2 — Si ϱ admet une espérance et que x est dérivable, alors on a l'égalité :

$$\mathbb{E}_\varrho [\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho [\phi'] \quad (6)$$

————— Démonstration —————

Avec le hypothèses de la proposition 1 précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varrho [\nu] &= \frac{i}{2\pi} \rho(t) dt \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x'(t)} dt = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i\phi(t)} \overline{(a'(t) e^{i\phi(t)} + ia(t) \phi'(t) e^{i\phi(t)})} dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i\phi(t)} (a'(t) e^{-i\phi(t)} - ia(t) \phi'(t) e^{-i\phi(t)}) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) (a'(t) - ia(t) \phi'(t)) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \phi'(t) a(t)^2 dt
\end{aligned}$$

On peut se convaincre que le premier terme doit être nul car l'espérance doit être réelle. On peut s'en assurer par le calcul en notant que c'est l'inégale d'une dérivée :

$$\int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (a^2)'(t) dt = \frac{1}{2} \rho(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Ce qui donne bien :

$$\mathbb{E}_\varrho [\nu] = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \phi'(t) a(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt$$

DÉFINITION 3 — La dérivée ϕ' est appelé *fréquence instantanée* du signal x . Le terme est justifié par l'équation (6) précédente : C'est une fonction dont la moyenne en temps correspond à la fréquence moyenne de x .

Pour mieux de convaincre du bien fondé de cette interprétation, deux choses. D'une part, pour un signal classique de la forme $\cos(2\pi\nu t + \varphi)$ ou $e^{i(2\pi\nu t + \varphi)}$, la fréquence est clairement identifié par ν , que l'on peut voir comme dérivée de la phase ¹ :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt}(2\pi\nu t + \varphi)$$

D'autre part, on peut fait le même jeu avec la largeur de bande qu'avec la fréquence moyenne. Cela donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_e[\nu] &= \frac{1}{4\pi^2} \int a'(t)dt + \frac{1}{4\pi^2} \left(\int \phi'(t)^2 \rho(t)dt - \left(\int \phi'(t)\rho(t)dt \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho \left[\frac{a'}{a} \right] + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho[\phi'] \end{aligned}$$

On constate deux composantes (qui par ailleurs sont des variances purement temporelle). La première ne porte que sur l'amplitude du signal, et inversement, l'amplitude n'apparaît que sur la première. Il n'est donc pas surprenant que le terme restant (là où apparaît ϕ' !) porte l'information fréquentielle du signal.

Afin de clairement expliciter le problème des signaux réels pour l'analyse temps-fréquence, est introduit une dernier outils :

DÉFINITION 4 (Covariance) — Étant données deux variables aléatoire X et Y , leur covariance, qui mesure une forme de corrélation entre X et Y , est donnée par la différence :

$$\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Outil qui à tout a fait sa place dans le cadre de l'analyse temps-fréquence. Seulement, les distributions associées au temps et à la fréquence ne sont pas les mêmes et le terme $\mathbb{E}[XY]$ n'est donc pas défini. Pour y remédier on se repose sur l'interprétation de ϕ' : puisque qu'il correspond à une description temporelle de la fréquence, elle est associée à ρ . On définit alors la *covariance du signal x* comme le différence :

$$\text{Cov}(x) := \mathbb{E}_\rho[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_\rho[t]\mathbb{E}_\rho[\nu] = \mathbb{E}_\rho[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_\rho[t]\mathbb{E}_\rho[\phi'(t)] \quad (7)$$

Les concepts de base de l'analyse temps-fréquence étant posé, voyons à présent les problèmes que posent les signaux réels.

II — Transformée en signal analytique

2.1 Le problème de signaux réels et comment le résoudre

Les outils de mesures ayant la fâcheuses tendance à fournir des données réelles, ce sont les signaux réels les plus présent en physique. Pourtant, cette propriété rend les outils d'analyse temps-fréquence développés

¹Le facteur 2π s'assure que l'on parle bien de fréquence, question d'unité. Sans, ν correspondait à une pulsation et en définissant la transformée de Fourier en terme de pulsation (i.e.sans le facteur 2π dans l'exponentielle), alors la formule (6) n'aurait pas de facteur 2π non plus. En clair, c'est une question de cohérence.

²L'on a même (mais je sais pas quoi en faire) :

$$\mathbb{V}_e[\nu] = 1/4\pi^2 \mathbb{V}_\rho[\ln(a)'] + 1/4\pi^2 \mathbb{V}_\rho[\phi']$$

plus haut, si non obsolète, au moins compliqué à interpréter.

Tout vient du fait que si x est réel alors son spectre est à symétrie hermitienne et sa densité spectrale ϱ symétrique :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R} &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{x}(-\nu) = \overline{\hat{x}(\nu)} \\ &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \varrho(-\nu) = \varrho(\nu) \end{aligned}$$

Comme dit plus tôt, cela implique que la fréquence moyenne de tout signal réel est nulle (intégrale d'une fonction impaire). Ce qui, en plus de ne pas être très instructif, n'est pas cohérent avec l'interprétation physique qu'on voudrait faire cette moyenne. Par exemple, si ϱ prend la forme ci-dessous (*fig. 2.1*), alors il serait plus naturelle de demander à ce que la fréquence moyenne se trouve autour de 1,4. De même, la largeur de bande spectrale ne correspond plus à l'étalement de chaque gaussienne, mais plutôt à leur espacement.

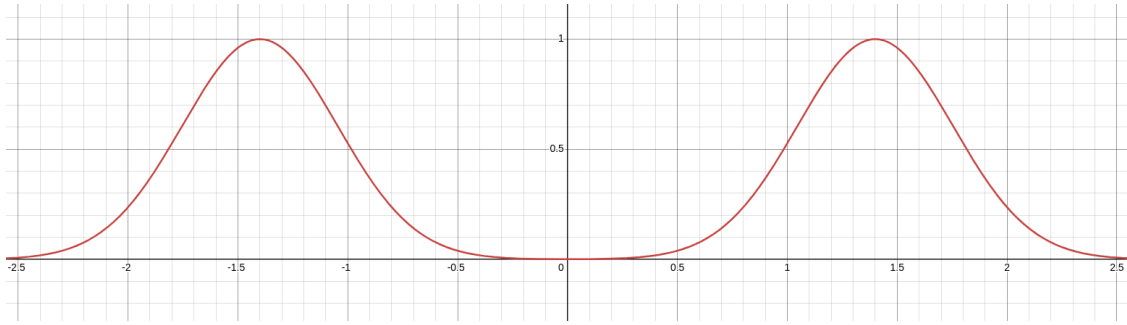


fig. 2.1 — Exemple de densité spectrale d'un signal réel ESP A 1,4

Même problème avec la covariance qui sera toujours nulle pour les signaux réels. De là en conclure que la fréquence instantanée de n'importe quel signal réel est toujours décorrélée du temps serait, pour le moins, insatisfaisant.

Pour résoudre les problèmes liés à la fréquence moyenne et la largeur de bande, il suffirait de ne conserver que la partie positive du signal. On s'intéresserait alors au signal transformée $\mathcal{A}[x]$ tel que :

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x}$$

où $\mathbb{1}_E$ est la fonction indicatrice de l'ensemble E et où le facteur 2 permet de conserver l'énergie du signal. Avec la transformée de Fourier inverse, ce nouveau signal s'écrit alors :

$$\mathcal{A}[x] = \mathcal{F}^{-1}[2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x}] = 2\mathcal{F}^{-1}[\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] * x$$

La transformée inverse de cette indicatrice (qui n'est autre que la fonction de Heavyside) n'est pas définie au sens classique, mais l'est au sens des distributions. Pour l'écrire, on introduit la distribution suivante :

DÉFINITION 5 (valeur principale de Cauchy) — On appelle *valeur principale de Cauchy* la distribution notée $\text{vp} \frac{1}{x}$ et définie par le crochet de dualité :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle = \int_0^t \frac{\varphi(t)}{t} dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \quad (8)$$

Ici $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide et la limite en ε assure que l'intégrale (impropre) converge bien. Sa valeur est également appelée *valeur principale* de l'intégrale.

La distribution $\text{vp} \frac{1}{x}$ est appelé valeur principale dans le sens où elle conserve les propriétés de la fonction inverse, dans le sens où son produit avec l'identité donne 1 ($\langle \text{id}_{\mathbb{R}} \times \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{vp} \frac{1}{x}, \text{id}_{\mathbb{R}} \times \varphi \rangle = 1$) mais avec des propriétés d'intégration supplémentaires. Entre autre :

PROPRIÉTÉ 1 — La transformée de Fourier de la valeur principale de Cauchy est donnée, au sens des distributions, par l'égalité :

$$\mathcal{F}\left[\text{vp}\frac{1}{x}\right] = -i\pi \text{sign} \quad (9)$$

On en déduit la transformée de Fourier inverse :

$$\mathcal{F}^{-1}[2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] = \mathcal{F}^{-1}[1 + \text{sign}] = \delta + \frac{i}{\pi} \text{vp}\frac{1}{x} \quad (10)$$

Démonstration

juste pour le plaisir. Par définition, la transformée de Fourier de la valeur principale est telle que, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F}\left(\text{vp}\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle &= \left\langle \text{vp}\frac{1}{x}, \hat{\varphi} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\varphi}(\nu)}{\nu} d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\hat{\varphi}(\nu) - \hat{\varphi}(-\nu)}{\nu} d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2i\pi\nu t} dt - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{2i\pi\nu t} dt \right) d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) (e^{-2i\pi\nu t} - e^{2i\pi\nu t}) dt d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} -2i\varphi(t) \sin(2\pi\nu t) dt d\nu \\ &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\nu t)}{\nu} d\nu dt \end{aligned}$$

En posant $u = 2\pi\nu t \text{sign}(t)$ (le signe de t assure que l'on ait le même signe dans et hors du sin), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F}\left[\text{vp}\frac{1}{x}\right], \varphi \right\rangle &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_0^{+\infty} \text{sign}(t) \frac{\sin(u)}{u} du dt \\ &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \frac{\pi}{2} \text{sign}(t) dt \\ &= \langle -i\pi \text{sign}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

DÉFINITION 6 (transformée en SA et de Hilbert) — On définit alors la *transformée en signal analytique* (SA) du tout signal x par l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \mathcal{A}[x] := 2x * \mathcal{F}^{-1}[\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] : & t \longmapsto & x(t) + \frac{i}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds \end{array} \quad (11)$$

Par construction, on a bien $\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x}$, est on dit plus généralement de tout signal dont le spectre est réel positif que c'est un *signal analytique*.

L'intégral à droite de (11) est appelée *transformée de Hilbert* du signal. Elle est notée :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \mathcal{H}[x] : & t \longmapsto & \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds = \frac{1}{\pi} \left(\text{vp}\frac{1}{x} \right) * x \end{array} \quad (12)$$

Par souci de commodité, plutôt que redéfinir tout le vocabulaire développé plus haut (fréquence/temps moyen, *etc.*) pour les signaux réel via la transformation \mathcal{A} , dans la suite du mémoire on travaillera directement avec $\mathcal{A}[x]$ (et on verra que c'est essentiel).

2.2 Propriété et interprétation des signaux analytiques

Dans les cas des signaux réels, la transformée de Hilbert est à valeur dans \mathbb{R} . Aussi, la transformée $\mathcal{A}[x]$ à pour partie réelle x et pour partie imaginaire $\mathcal{H}[x]$. Sous forme exponentielle, cela donne :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} \implies \begin{cases} x(t) = a(t) \cos \phi(t) \\ \mathcal{H}[x](t) = a(t) \sin \phi(t) \end{cases}$$

DÉFINITION 7 (Amplitude et phase) — On obtient alors on décomposition de x en une paire (a, ϕ) telle que discuté plus haut. On définit ainsi l'*amplitude* a_x et la *phase* ϕ_x dite *canonique* — bien que le terme ne soit vraiment approprié — du signal x comme étant respectivement l'amplitude et la phase de $\mathcal{A}[x]$:

$$a_x = |\mathcal{A}[x]| \qquad \phi_x = \arg(\mathcal{A}[x]) \qquad (13)$$

TO DO —

- Il est important de noter que si un signal s'écrit sous la forme $x = a \cos \phi$, rien n'implique $(a, \phi) = (a_x, \phi_x)$. Si ce n'est pas le cas, c'est que la première décomposition n'est "pas la bonne"
- Exemple pour dire que les hautes fréquences parties dans la phase
- théorème de Bedrosian [8]
- cas AM-FM

III — Généralisation au signaux multivariés

Dans la suite, ce qui va nous intéresser, ce sont les signaux multivariés :

DÉFINITION 8 (Signal multivarié) — Un *signal multivarié*, ou *n-varié*, est un vecteur composé de $n \in \mathbb{N}^*$ signaux x_i . Si $n = 2$, alors on parle de signal *bivarié*.

Dans la continuité de ce qui à été dit dans la sous-section 2.1, dans le cas des signaux réels, on s'intéressera au vecteur composé des transformées en SA (eq. 11, déf. 6) des x_i . **Au moins dans toute cette section**, un tel signal sera noté :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \psi(t) : \quad t &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathcal{A}[x_1] \\ \mathcal{A}[x_2] \\ \vdots \\ \mathcal{A}[x_n] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On supposera que chaque composante ψ_i de ψ aura autant de régularité et de condition d'intégrabilité que nécessaire (**il vaudra préciser lesquelles à un moment**).

Faudra parler des propriétés des trucs un peu, genre la différence pour fourier des images et des multivarées ($\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ vs $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$)

+ quelque propriété pour les cas SA, y'a moyen que ca soit pas inintéressant

Toujours dans l'optique d'une analyse temps-fréquence de ces signaux, on voudrait pouvoir écrire tout signal ψ sous la forme :

$$\psi(t) = e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\varphi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\varphi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix}$$

La phase ainsi isolée correspond à la phase instantanée du signal et sa dérivée, (à 2π près) à la fréquence instantanée. Là encore, cette phase existe mais sans unicité puisqu'il suffit de poser, pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \varphi_i = \arg(\psi_i) - \varphi$$

Il faut donc une contrainte supplémentaire sur φ . Cette fois-ci, elle ne pourra pas simplement venir du spectre puisque, d'une part il a déjà été exploité par \mathcal{A} . Mais aussi et surtout parce qu'elle doit tenir compte que des liens implicites qui existe entre chacune des composantes du signal.

VRAC

DÉFINITION 9 (Fourier de signal multivarié) — La transformée “faible” d'un signal multivarié est définie comme la transformée composantes par composantes du signal :

$$\mathcal{F}[\psi] = \left(\mathcal{F}[\psi_i] \right)_{1 \leq i \leq n}$$

REMARQUE — En posant (suivant les notations ci-dessus) $a = \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\|^2$, ψ s'écrit :

$$\psi(t) = e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\varphi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\varphi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \alpha_1(t)e^{i\varphi_1(t)} \\ \alpha_2(t)e^{i\varphi_2(t)} \\ \vdots \\ \alpha_n(t)e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ un vecteur normé de \mathbb{R}^n . α est donc définie à une rotation près et en notant cette rotation R_Θ , ψ s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1(t)} & & & \\ & e^{i\varphi_2(t)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix} R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \\ &= a(t)e^{i\varphi(t)} e^{i\text{Diag}(\varphi_i(t))} R_\Theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

IV — Réflexion autour du produit hermitien

Soit $x, y \in \mathbb{C}^n$ des vecteurs complexes et $X, Y \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ leur versions réelles. On note x^j sa j^{eme} composante complexe et x_1 (resp. x_2) le vecteur composé de ses parties réelles (resp. imaginaires) :

$$x = (x^j)_j = x_1 + ix_2 = (x_1^j)_j + i(x_2^j)_j$$

On a deux façon d'écrire le produit hermitien (canonique) de x avec y .

La première :

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \langle x_1 + ix_2, y_1 + iy_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - i\langle x_1, y_2 \rangle + i\langle x_2, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \\
&= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + i(\langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle) \\
&= \sum_j x_1^j y_1^j + x_2^j y_2^j + i \left(\sum_j x_2^j y_1^j - x_1^j y_2^j \right) \\
&= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle + i \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \langle X, Y \rangle + i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\
&= \langle X, Y \rangle - i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} Y \right\rangle
\end{aligned}$$

Cette formule peut s'interpréter en disant que le produit hermitien encode le produit scalaire entre X et Y et le produit scalaire de X avec les vecteurs $y^j = (y_1^j, y_2^j)$ auquel on aurait appliqué une rotation de 90° (rotation qui, par ailleurs, correspond à la multiplication par i dans le plan complexe). Moralement, $\langle x, y \rangle = 0$ demande une orthogonalité de X à un plan, ce qui fait sens puisque cela tient compte du fait que les x^j, y^j sont complexes (donc de dimension 2 en tant que \mathbb{R} -e.v.).

Pour les connaisseurs, on retrouve l'égalité "produit hermitien = produit scalaire $-i$ forme symplectique" !! Voir plan proj complexe et variété kählérienne

On a aussi l'écriture (quand-même moins clair) :

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle &= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + i(\langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle) \\
&= \sum_j x_1^j y_1^j + x_2^j y_2^j + i \sum_j (x_2^j y_1^j - x_1^j y_2^j) \\
&= \sum_j \langle X^j, Y^j \rangle - i \sum_j \det(X^j, Y^j)
\end{aligned}$$

Cette formule dit que les parties réelles et imaginaires du produit $\langle x, y \rangle$ encodent respectivement "l'orthogonalité moyenne" et la "linéarité moyenne" entre les familles de vecteurs $X^j \in \mathbb{R}^2$ et $Y^j \in \mathbb{R}^2$. L'orthogonalité d'une part parce que le produit scalaire s'annule en cas d'orthogonalité (no shit), la linéarité d'autre part car le déterminant s'annule en cas de colinéarité et moyenne car se sont des sommes sur j . **$\langle x, y \rangle = 0$ ne dit pas que les vecteurs sont à la fois colinéaire et orthogonaux parce que ce sont des valeurs moyennes (i.e. annuler une somme ne veut pas dire que chacun des termes sont nuls).**

Si maintenant on s'intéresse au cas $y = x$, on a $\forall h \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}
\langle x + h, x + h \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle + \langle h, h \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \overline{\langle x, h \rangle} + \langle h, h \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + 2\Re \langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle
\end{aligned}$$

Donc si $x \in \mathbb{C}^n$ est fonction d'un paramètre t , l'égalité $\langle x, \dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \partial_t \langle x, x \rangle$ du cas réel devient :

$$\langle x, \dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \partial_t \langle x, x \rangle + i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \dot{X} \right\rangle \quad (14)$$

En particulier, quand bien-même x serait de norme constante, on aurait toujours un degré de liberté pour $\langle x, \dot{x} \rangle$:

$$\|x\| = c \implies \langle x, \dot{x} \rangle = i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \dot{X} \right\rangle$$

V — Comprendre la phase dynamique

- Tout le monde introduit la phase dynamique par la formule :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) := -\Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds \quad (15)$$

- Première chose, avec (14), on a encore :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) = \int_{t_0}^t \frac{\langle \psi(s), \omega \dot{\psi}(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds$$

- En terme de fréquence, si ψ est de norme 1, alors (mais c'est vraiment pas dit que l'intégrale converge dans ce cas) :

$$\|\psi(t)\| = 1 \implies \Phi_{\text{dyn}}(\psi, -\infty, +\infty) = i \int_{\mathbb{R}} \langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle ds = \pm 2\pi \int_{\mathbb{R}} \nu |\hat{\psi}(\nu)|^2 d\nu = \pm 2\pi \mathbb{E}_{|\hat{\psi}|^2} [\nu]$$

- Lilly [6] propose de d'écrire ψ avec une phase isolé φ de sorte que :

$$\psi(t) = e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\varphi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\varphi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\varphi_n(t)} \end{pmatrix}$$

Et avec un peu de travail (qui sera développé), on obtient que le mieux c'est de poser :

$$\varphi'(t) = \frac{\Im \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle}{\|\psi(t)\|^2}$$

On voit donc que, dans le cas des signaux normée, la phase dynamique est donnée par le cumule des fréquence instantanée, ou comme le différentiel de phase de ψ :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) = -\Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds = \int_{t_0}^t \varphi'(s) ds = (\varphi(t_0) - \varphi(t))$$

- Dans la même idée, on a :

$$\begin{aligned} \langle \psi(t) | \dot{\psi}(t) \rangle &= \left\langle \left(a_i(t) e^{i(\varphi(t) + \varphi_i(t))} \right)_i \mid \left((a'_i(t) + i\varphi'(t)a_i(t) + i\varphi'_i(t)a_i(t)) e^{i(\varphi(t) + \varphi_i(t))} \right)_i \right\rangle \\ &= \sum_i a_i(t) \left(a'_i(t) - i(\varphi'(t) + \varphi'_i(t))a_i(t) \right) \\ &= \sum_i a_i(t)a'_i(t) - i \sum_i (\varphi'(t) + \varphi'_i(t))a_i(t)^2 \\ &= \sum_i a_i(t)a'_i(t) - i\varphi'(t) \sum_i a_i(t)^2 - i \sum_i \varphi'_i(t)a_i(t)^2 \\ &= \sum_i a_i(t)a'_i(t) - i\varphi'(t)\|a(t)\|^2 - i \sum_i \varphi'_i(t)a_i(t)^2 \end{aligned}$$

Avec $a = {}^t(a_1, \dots, a_n) = |\psi|$ et $\|a\| = \|\psi\|$. On a donc :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) &= \int_{t_0}^t \frac{\varphi'(s)\|a(s)\|^2}{\|a(s)\|^2} ds + \sum_i \int_{t_0}^t \frac{\varphi'_i(s)a_i(s)^2}{\|a(s)\|^2} ds \\ &= \Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) + \sum_i \mathbb{E}_{|\psi_i|^2/\|\psi\|^2} [\varphi'_i] \end{aligned} \quad ???$$

a.k.a. la fréquence moyenne sur l'intervalle + la moyenne “des fréquences moyenne de polarisation ???”. Je sais pas, c'est un peu bizarre parce que les distrib utilisé pour la deuxième espérance est très composante-wise

Lilly [6] dit que (which make it worst) :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) = \sum_i \mathbb{E}_{|\psi_i|^2 / \|\psi\|^2} [\varphi'_i]$$

Bon et la phase totale alors ?

CHAPITRE II

PHASE GÉOMÉTRIQUE

VI — Description des signaux multivariés

6.1 Version Lilly [4, 6]

- On veut écrire \mathbf{x} sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = a(t)e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix}$$

- Lilly explique comment obtenir ϕ dans le cas général (faut revoir ça parce que meh quand-même)
- Sauf que ce ϕ c'est lié à la phase dynamique est pas du tout à polarisation du signal. Pourtant c'est dans la polar qu'on a la phase géo.
- Quoi qu'il en soit, les cas dim 2 et 3 c'est fait [5, 4, 3]

6.2 Cas bivarié et trivarié

On a un signal bivarié $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ qu'on transforme (voir ??) soit la forme :

$$z_x(t) = \begin{pmatrix} x_+(t) \\ y_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ a_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

À côté de ça, on a les ellipses modulées :

$$z(t) = e^{i\theta} (a(t) \cos \phi(t) + ib(t) \sin \phi(t)) = A(t)e^{i\theta} (\sin \chi(t) \cos \phi(t) + i \sin \chi(t) \sin \phi(t)) \in \mathbb{C}$$

Qui sous forme vectoriel se réécrit :

$$z(t) = e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \end{pmatrix} = A(t)e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad R_{\theta} \in \text{SO}_2(\mathbb{R}) \quad (16)$$

Pour avoir la désinscription de \mathbf{x} en terme d'ellipse, il suffit donc de poser :³

$$z_x(t) = z(t) \iff \begin{pmatrix} a_x(t)e^{i\phi_x(t)} \\ a_y(t)e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} = A(t)e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix}$$

³C'est la version analytique du la version vectorielle de l'ellipse !

Ensuite, on pose :

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ e^{i\phi_+} \\ a_- e^{i\phi_-} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_+ + iy_+ \\ x_+ - iy_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} 2\phi &= \phi_+ + \phi_- & a &= A \cos \chi = a_+ + a_- \\ 2\theta &= \phi_+ - \phi_- & b &= A \sin \chi = a_+ - a_- \end{aligned}$$

et on en déduit :

$$A = \sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2} \quad \begin{aligned} \cos \chi &= \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2}} \\ \sin \chi &= \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2}} \end{aligned}$$

Ce qui donne *in fine* (super osef) :

$$\begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} = e^{i\frac{\phi_+ + \phi_-}{2}} R_{\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}} \begin{pmatrix} a_+ + a_- \\ -i(a_+ - a_-) \end{pmatrix}$$

L'équation (16) se généralise très bien, il suffit d'augmenter la taille de $R_\theta \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ et de lui donner le vecteur étendu :⁴

$$z_x(t) = \begin{pmatrix} x_{1+}(t) \\ \vdots \\ x_{n+}(t) \end{pmatrix} = e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A(t) e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant, la question est de savoir comment généraliser la transformation en (z_+, z_-) pour obtenir les paramètres $(A, \phi, R_\theta, \chi)$ dans ce cas...

Pour généraliser le procédé, on peut noter que :

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} U \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} \quad \text{avec } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{U}(2)$$

Ce qui ramène à se demander comment généraliser U à $\text{SU}(n)$. Le problème est que U est indépendant de tout les paramètres $(A, \phi, R_\theta, \chi)$ et sa généralisation est vraiment pas évidente sachant qu'on que le formule avec $n = 2...$ et pour $n = 3$ ca devient déjà chaud (pour rappelle $\dim \text{SO}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ et donc $\theta \in \mathbb{R}^n$, ce qui rend le problème de pire en pire à mesure qu'on augmente n).

6.3 Mon blabla

PVD OPTIMISATION — Lilly [6, p. 602/3] obtient la phase instantanée en minimisant l'erreur d'ordre 1 :

$$\min_{\omega} \|\tilde{x}(t, \omega)\|^2$$

Ce qui lui donne :

$$\omega_x(t) = \phi(t)/\tau = -\frac{\Im m \langle x, x' \rangle}{\|x\|^2}$$

QUESTION : est-ce qu'on peut tout avoir en minimisant la bonne quantité ? (oui, principe de moindre action frr)

⁴Sachant que le vecteur contenant a et b est principalement nul, on peut réécrire le produit ne considérant que les deux premières colonnes de R_θ .

PROPOSITION 3 — Les signaux bivariés se décrivent très simplement à l'aide des quaternions. En considérant $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la base canonique des quaternions \mathbb{H} , on peut voir ψ comme étant à valeur dans \mathbb{C}_j^n ($\mathbb{C}_j := \mathbb{R} \times \mathbf{j}\mathbb{R}$), de sorte que :

$$\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \exists a, \theta, \chi, \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \psi(t) = a(t)e^{i\theta(t)}e^{-\mathbf{k}\chi(t)}e^{\mathbf{j}\varphi(t)}$$

Sous cette forme, les paramètres a et φ s'interprètent respectivement comme l'amplitude et la phase instantanée du signal. Les deux paramètres restant contrôlent l'ellipticité (χ) et l'orientation (θ) de l'ellipse de polarisation instantanée. C'est-à-dire l'ellipse que suit la signal à l'instant t .

Dit autrement, à tout instant t , $\psi(t)$ est vu comme un point d'une ellipse dont la taille est caractérisée par $a(t)$, l'ellipticité par $\chi(t)$ et l'orientation par $\theta(t)$. $\phi(t)$ permet lui de situer $\varphi(t)$ sur cette ellipse.

Le problème de cette représentation est qu'elle se généralise mal aux signaux plus que 2-variés et, à notre connaissance, il n'existe pas d'extensions des quaternions à de plus haute dimension. voir Proposition 4 et 5, équations (18), (19) et (20)

Il est évident que cette représentation est présente bien plus de paramètre que nécessaire, puisse que deux devrait suffire. Pour autant, elle permet de mieux **je sais quoi mais c'est sur qu'il y'a une raison**.

Si cette représentation se généralise mal parce qu'elle demanderait d'avoir une extension de \mathbb{H} , sont interprétations graphique, elle, se généralise très bien. Par exemple, en dimension 3, alors l'ellipse devient un ellipsoïde. L'amplitude reste de dimension 1 parce qu'elle ne fait que contrôler la taille de cet ellipsoïde, mais les autres paramètres eux doivent être de dimension 2. L'ellipsoïde à besoin de deux angles pour être orienté, possède deux degrés d'ellipticité et ces points sont déterminés par deux angles.

PROPOSITION 4 — Plus généralement, tout signal multivarié ψ est (*devrait être*) caractérisé par quatre paramètres (donc $1 + (n-1)(\frac{n}{2} - 2)$ scalaires) :

$$a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \quad \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/2, \pi/2]^{\frac{n(n-1)}{2}}) \quad \chi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/4, \pi/4]^{n-1}) \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi]^{n-1})$$

À bien y réfléchir, décrire un ellipsoïde dans l'espace, c'est exactement de que font les matrices symétriques définies positives. Donc on pourrait tout à fait remplacer les informations (a, θ, χ) par une matrice symétrique positive de dimension n . Il ne resterait alors plus que φ qui, de toute façon ne devrait pas trop être lié aux autres paramètres.

Enfin, sûrement que si parce que y'a un monde pour $\varphi = 0_{\mathbb{R}}^n$ et c'est le reste des paramètres qui fait le travail. Mais clairement c'est pas intéressant comme description. L'idée serait plutôt décrire le signal ψ en minimisant les variations de (a, θ, χ) . Ça appelle clairement à chercher que dans l'espace de Siegel mais pas seulement, parce que c'est pas juste des chemins chez Siegel qui nous intéressent.

Ou alors c'est le jeu de jauge qui fait qu'on tue φ ? auquel cas tout les jours Siegel.

BTW, les quaternions c'est fait pour décrire les rotations et c'est (quasiment) ce qu'on fait avec, donc aller chercher dans un espace de matrices pour généraliser le principe c'est pas déconnant. D'ailleurs, vu que c'est pas exactement ce qu'on fait avec, dans quelle mesure c'est pas le cas et est-ce qu'on exploite vraiment la structure des quaternions ?

PROPOSITION 5 — Autre approche : un signal multivarié étant moralement un chemin de \mathbb{R}^n , son graphe est une variété (plongée) de dimension 1. Sachant cela, si en chaque instant on veut définir l'ellipsoïde sur laquelle elle repose à un instant t , il est moral que cette ellipsoïde soit en fait une ellipse puisque c'est elle-même une variété de dimension 1.

Partant de là, on aurait toujours a , χ et ϕ pour la décrire et seulement θ gagnerait en dimension pour pouvoir orienter l'ellipse dans les n axes. ψ serait alors la données de $3 + \frac{n(n-1)}{2}$ paramètres :

$$a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \quad \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi]^{\frac{n(n-1)}{2}}) \quad \chi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/4, \pi/4]) \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi])$$

On aurait beaucoup moins de paramètre et c'est quand-même bien. En même temps ça paraît plus contraignant comme modèle. Pour comparer les deux, il faudrait voir comment les deux se décomposent dans le cas d'un signal qui ne varierait sur une ellipsoïde fixe. *i.e.* dans un cas où θ, χ de la proposition 4 varie pas alors que ceux de la proposition 5 si.

VII — Phase géométrique d'un signal

La phase géométrique est invariante par action du groupe $\mathbb{U}(1)$, c'est à dire invariante par changement de la phase instantanée. Elle ne regarde donc que les paramètres a, θ et χ . En outre, elle ne regarde que la matrice semi-définie positive (potentiellement sans même regarder l'amplitude a a.k.a. la norme de la matrice).

Avec cette formulation il devient plus clair que ϕ peut être vu comme un fibré vectoriel (particulier parce que c'est bien un élément du produit $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ pas d'un espace qui s'en rapproche localement) et cette et que le groupe $\mathbb{U}(1)$ agit comme un jauge. En plus, Wikipédia dit que pour les fibrés vectoriels, il faut que l'action soit les changement de base (orthonormée ?), ce qui correspond bien à une changement de phase suivant les formules de la proposition 4.

La question reste encore de savoir comment on détermine les $(a, \theta, \chi, \varphi)$ parce que encore une fois, y'a vraiment pas unicité de la décomposition et c'est loin d'être clair comment choisir la plus pertinente (et comment la calculer aussi !)

VIII — Trucs à voir

8.1 random stuff ready pour rédac (+labeled)

DÉFINITION 10 — Ainsi, il reste tout un degré de liberté au produit $\langle x, \dot{x} \rangle$ même si $x \in \mathbb{S}^{2n}$. En intégrant ce degré de liberté supplémentaire, c'est-à-dire en tenant compte de son évolution sur la période $[t_0, t]$, l'on obtient ce qui est appelé le *phase dynamique* :

$$\Phi_{\text{dyn}} := \Phi_{\text{dyn}}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Im m \langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle ds$$

Elle dynamique en cela qu'elle est propre au variation de ψ et qu'elle considère tout l'évolution de ψ : ça dynamique.

DÉFINITION 11 (Connexion de Berry) — On appelle *connexion de Berry* le champ de forme linéaire :

$$\forall \psi \in \mathcal{M}, \quad A_\psi : \begin{array}{ccc} T_\psi \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & \Im m \langle \psi(s) | \phi(s) \rangle \end{array} \quad (17)$$

Elle a rien d'une connexion par contre :/

8.2 Bilan des formules

- Les phases de ψ entre les instants t_0 et t :

$$\Phi_{\text{tot}}(\psi, t_0, t) := \arg \langle \psi(t_0) | \psi(t) \rangle = \arctan \left(- \frac{\langle \psi(t_0), \omega \psi(t) \rangle}{\langle \psi(t_0), \psi(t) \rangle} \right) \quad (18)$$

$$\Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) := \Im m \int_{t_0}^t \langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle ds \quad (19)$$

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) := \Phi_{\text{tot}}(\psi, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\psi, t_0, t) \quad (20)$$

- (conservative) Équation Schrödinger et de Liouville-von Neumann ($h(R)$: Hamiltonien des paramètres R, W : opérateurs statistique) [1, p.6] :

$$i \frac{d\psi(t)}{dt} = h(R)\psi(t) \quad (21)$$

$$i \frac{dW(t)}{dt} = [h(R), W(t)] \quad [\cdot, \cdot] = \text{commutateur ?} \quad (22)$$

- Moment angulaire (viteuf) $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$M(t) = \Re(iz\bar{z}') = -\Im mz\bar{z}' \quad \text{thoughts ?} \quad (23)$$

8.3 Général

- D'où sort l'interprétation géométrique + son lien avec quaternions (prop. 3)
- Lien avec l'eq de Schrödinger (l'intérêt de H et K + d'où ils sortent)
- La "Berry connection" c'est une vraie connexion ? elle est où la covariance alors ?

- "horizontal lift" : pourquoi horizontal ? en quel sens ? (parce que fibré)
- Fréquence de Rubi
- Matrice/base de Pauli et généralisation, groupe $SU(n)$ (un peu de quantique ?)
- Monopole de Dirac + lien avec la phase géo (un peu d'électro-magnétisme ?)
- Invariant de Bargmann + série de Dyson

8.4 Point de vue des variétés

- Ecriture en terme de fibré (principale ? vectoriel ?)
- Choix de l'action de groupe pour la jauge : $U(1)$ *a priori*

- Lien avec Siegel : assez clair avec la visualisation des ellipses, beaucoup moins avec les Hilberts même si $|\psi\rangle\langle\psi| \in \text{Siegel}$ *a priori*
- "Symplectique" (meaning + intérêt ?) si tu savais...
-

TABLE DES FIGURES

2.1	Exemple de densité spectrale d'un signal réel ESP A 1,4	7
-----	---	---

TABLE DES CODES

RÉFÉRENCES

- [1] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [2] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [3] J. LEFEVRE, *Polarization analysis and optimization geometry*.
- [4] J. LILLY AND S. OLHEDE, *Bivariate Instantaneous Frequency and Bandwidth*, IEEE Transactions on Signal Processing, 58 (2010), pp. 591–603.
- [5] J. M. LILLY AND J.-C. GASCARD, *Wavelet ridge diagnosis of time-varying elliptical signals with application to an oceanic eddy*, Nonlinear Processes in Geophysics, 13 (2006), pp. 467–483.
- [6] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [7] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [8] M. VENOUZIOU AND H. ZHANG, *Characterizing the Hilbert transform by the Bedrosian theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 338 (2008), pp. 1477–1481.