

Mémoire de Stage de M2

PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Pierre-Olivier AMBLARD, Julien FLAMANT & Michel
BERTHIER

Master MIX – Université de La Rochelle

2024 – 2025

TABLES DES MATIÈRES

Introduction	1
Notations et conventions	2
<hr/>	
PARTIE I — INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE	3
<hr/>	
I — Introduction de la phase géométrique	3
1.1 Cas univarié : signaux AM-FM	3
1.2 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié	4
1.3 Apparition de la phase géométrique	7
II — Première étude : cas des signaux AM-FM-PM bivariés	9
2.1 Définitions et calcul des phases	9
2.2 Généralisation en plus haute dimension	11
2.3 Sur la nécessité d’avoir une approche géométrique	11
Annexes	12
Annexe A — Compléments sur l’analyse temps-fréquence	12
A.1. Un mot sur la notion de fréquence instantanée (<i>nécessaire?</i>)	12
A.2. Formalisme derrière la transformée en SA	12
A.3. Lien avec le théorème de Bedrosian	12
Annexe B — Compléments sur les signaux AM-FM-PM	12
B.1. Construction détaillée des signaux AM-FM-PM (<i>nécessaire?</i>)	12
B.2. Démonstrations	12
<hr/>	
PARTIE II — ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D’UNE PHASE ÉPONYME	15
<hr/>	
I — Prérequis mathématique	17
1.1 — Variété fibrée principale	17
1.2 — Espaces projectifs complexes	20
II — Interprétation des trois phases dans ce cadre	20
2.1 — Cas pseudo-cyclique	20
Annexe	21
Annexe A — Algèbre et groupe de Lie	21
Annexe B — Variété différentielle complexe, tiré de [15]	21
<hr/>	
PARTIE III — NOTES ‘N’ THOUGHTS	23
<hr/>	
I — Notes sur l’approche Géométrique	23
1.1 — Notes sur l’approche à avoir	23
1.2 — La vision de Bohm [1, fig. 4.3]	24
1.3 — La vision Mukunda & Simon [13, 14]	25
1.4 — Fisher (man, 42 Wallaby way, Sydney)	26

II	—	Réflexion autour du produit hermitien	26
III	—	Description des signaux AM-FM-PM	27
3.1	—	Bivarié	27
3.2	—	Trivarié	27
3.3	—	Généralisation de ces formules au cas n -varié	28
3.4	—	Plus de note (très OSEF)	29
3.4.1		Bivarié	29
3.4.2		Trivarié	31
3.5	—	Mon blabla	32
IV	—	Vrac	33
4.1	—	Random stuff ready pour rédac (+labeled)	33
4.2	—	Bilan des formules	33

INTRODUCTION

INTRO A REFAIRE QUAND ON SAURA VRAIMENT DE QUOI ON PARLE DANS CETTE PARTIE

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui demande beaucoup de contexte pour être expliqué. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant t d'un signal complexe ψ est donné par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) = \arg \langle \psi(t), \psi(t_0) \rangle \Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\psi}(s), \psi(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\psi(t) \rightsquigarrow \psi'(t) = e^{i\alpha(t)} \psi(t)$$

Cette propriété rend la phase Φ_{geo} intrinsèquement liée à la trajectoire que prend la projection de ψ dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ et par conséquent, à la géométrie de ce dernier, d'où son nom.

Ceci à largement été étudié dans le cadre de système dynamique régis par EDP [4, 12], notamment en mécanique quantique avec l'équation Schrödinger [1, 13, 15]. Ce n'est que récemment que Le Bihan, Flament et Amblard se sont intéressés à son application en traitement du signal dans le cas de signaux bivariés [7, 8].

[...]

NOTATIONS ET CONVENTIONS

OBJET/FONCTION	NOTATION
Conjugué complexe	\bar{x}
Transposée (resp. adjoint) de la matrice A	tA (resp. A^\dagger)
Distribution de Dirac	δ
Indicatrice de E	$\mathbb{1}_E$
Fonction signe	$\text{sign}(x)$
Transformée de Fourier	$\mathcal{F}[x], \hat{x}$
Transformée en SA	$\mathcal{A}[x]$
Transformée de Hilbert	$\mathcal{H}[x]$
Produit hermitien	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Espérance et variance de f suivant ρ	$\mathbb{E}_\rho[f(t)], \mathbb{V}_\rho[f(t)]$
Espace des fonctions p.p. de puissance p^{eme} intégrable à valeur de E dans F	$L^p(E, F)$
Support d'une fonction f	$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$
Matrice de rotation de paramètre Θ (resp. d'angle θ en dimension 2)	R_Θ (resp. R_θ)
Ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$)
Ensemble des matrices hermitiennes (resp. anti-hermitiennes) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$)

Note générale

- les références sont en fin de mémoire est en .bib sur le [GitHub](#)
- Idem pour les codes et un mot sur **pygeomphase**
- En italique sont les notes un peu plus informelles
- On va parler de géo diff et pour éviter de réécrire un livre, on va admettre beaucoup de résultats, on renvoi vers [6, 15] (*metts en d'autre*) pour une introduction extensive à la théorie

Notations math :

- Convention sur le produit hermitien (congué à droite)
- les vecteurs seront le plus souvent en gras, leur dérivée en temps notée par un point (ex. : $\dot{\mathbf{x}}(t)$) et celle des scalaires seront noté par un prime (ex. : $a'(t)$)

PARTIE I

INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE

En traitement du signal, la phase d'un signal est intrinsèquement liée à la notion de fréquence instantanée, qui joue un rôle important en analyse temps-fréquence. C'est donc de point que commencera notre discussion pour introduire la phase géométrique. Pour cela, seront rapidement introduit quelques notions et résultats d'analyse temps-fréquence dans le cas univarié (sec. 1.1). Suite à quoi sera définie la phase instantanée pour le cas multivarié (sec. 1.2), qui permettra enfin de mettre en évidence la phase géométrique (sec. 1.3).

OUTDATED Dans une seconde partie, seront introduit les signaux bivarié dit AM-FM-PM (sec. 2.1), dont la phase géométrique sera calculée explicitement (sec. ??), ce qui permettra de mettre en évidence certaines de ses propriétés. Dans une dernière section, seront proposées des généralisations des signaux AM-FM-PM au delà du cas bivarié et seront discutées leur pertinence quant à l'étude de la phase géométrique (sec. 2.2).

I — Introduction de la phase géométrique

1.1 Cas univarié : signaux AM-FM

En traitement du signal, l'analyse fréquentielle par la transformée de Fourier est un incontournable. Seulement, cette transformation fait perdre toute notion temporelle : si l'étude du spectre du signal permet de dire quelles fréquences apparaissent dans le signal, elle ne permet pas de dire à quel(s) moment(s). C'est en réponse à cela, entre autre, qu'est développé l'analyse temps-fréquence.

À cette fin, sont définies les paramètres instantanées d'un signal :

DÉFINITION 1 (PARAMÈTRES INSTANTANÉES) — Soit x , est un signal complexe écrit sous forme exponentielle :

$$x : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto a(t)e^{i\phi(t)} \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \phi(t) \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

a est appelé *amplitude instantanée* du signal, $1/2\pi\phi'$ sa *fréquence instantanée* et sa *phase instantanée* est définie — modulo un choix de phase initiale — par :

$$\Phi_{\text{inst}}(x, t_0, t) = \phi(t) - \phi(t_0) \quad (1.2)$$

Pour les signaux réels, ces notions sont moins évidentes à définir puisqu'elles demandent d'écrire les signaux sous la forme :

$$x(t) = a(t) \cos \phi(t)$$

Auquel cas, le choix de la pair (a, ϕ) n'est pas unique. Il existe tout de même un "bon" choix de telle pair dans le cas des signaux dit AM-FM :

DÉFINITION 2 (SIGNAL AM-FM) — Un signal réel de la forme :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a(t) \cos \phi(t) \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \quad (1.3)$$

est dit *AM-FM* (*amplitude and frequency modulated*) si a et $\cos \phi$ admettent des transformée de Fourier et si de plus la première a un spectre concentré sur les basses fréquences, la seconde concentré sur les hautes fréquences et que les deux ne se chevauchent pas. Formellement, ces conditions demandent qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda] \quad (1.4)$$

Dans ce cas, a et ϕ donne lieu au même vocabulaire que pour le cas complexe (définition 1).

Ces conditions sont liées au théorème de Bedrosian, et plus de détail se trouve dans l'annexe A. Pour le dire rapidement, elles exigent que toutes les hautes fréquences de x se trouvent dans la phase. Intuitivement, cela évite que toutes les fréquences aillent dans l'amplitude a , auquel cas, x n'aurait "pas de fréquence" au sens où ϕ pourrait être choisie constante, voir nulle.

Sous ces conditions, x peut être vu comme le signal complexe $\mathcal{A}[x]$ telle que :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} = a(t) \cos \phi(t) + ia(t) \sin \phi(t) = x + i\Im \mathcal{A}[x]$$

L'on parle alors de transformée en *signal analytique* de x et $\mathcal{A}[x]$ a, par construction, les mêmes paramètres instantanés que x . Là encore, le lecteur est renvoyé vers l'annexe A pour plus de détail.

L'intérêt d'introduire toutes ces notions est que les signaux multivariés — même complexe — souffrent du même problème que les signaux réels. En effet, en écrivant un signal \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix}$$

le fait que \mathbf{x} soit à valeur dans \mathbb{C}^n impose un choix naturel d'amplitude instantanée : sa norme. Pour ce qui est de la phase instantanée, en revanche, n'importe quel choix de ϕ convient *a priori* :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} = a(t)e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\psi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\psi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\psi_n(t)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a(t) = \|\mathbf{x}(t)\|_2 \\ \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\|_2 = 1 \\ \phi_i = \phi + \psi_i \end{cases}$$

Il suffit que les ψ_i soient ajustés pour assurer que $\phi_i = \phi + \psi_i$.

À noter, que si a et ϕ sont respectivement une amplitude et une phase, le vecteur restant $(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n}$ correspond à un vecteur de polarisation, sur lequel nous reviendrons dans la section II suivante.

1.2 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié

On se propose ici de définir la phase instantanée comme suit :

DÉFINITION 3 (PHASE DYNAMIQUE/INSTANTANÉE) — La *phase instantanée* ou *dynamique* (à l'instant t partant de t_0) d'un signal multivarié $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ quelconque, est définie par la formule :

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \int_{t_0}^t \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi'_i(s) ds \quad (1.5)$$

On s'autorisera à omettre les paramètres de Φ_{dyn} lorsque cela ne prête pas à confusion.

Outre l'aspect variationnelle de cette formule, le terme “dynamique” viens du fait que, lorsque \mathbf{x} suit une équation de Schrödinger :

$$i \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = h\mathbf{x}(t) \quad (1.6)$$

la dérivée $\dot{\mathbf{x}}$ dans la formule (1.5) ci-dessus se voit remplacé par l'hamiltonien $h\mathbf{x}$ [1, sec. 2], [13, p. 215], donnant :

$$\Phi'_{\text{dyn}} = -i \int_{t_0}^t \frac{\langle h\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds$$

Sachant que \mathbf{x} n'a aucune raison de suivre une telle équation dans notre cas, poser $h = i \frac{d}{dt}$ enlève toute contrainte, auquel cas $\Phi'_{\text{dyn}} = \Phi_{\text{dyn}}$.

Ceci étant, deux arguments sont donnés pour motiver cette définition :

Argument variationnelles

Le premier, fortement inspiré par les travaux de Lilly & Olhede [11], consiste à généraliser la condition (1.4) de séparation haute/basse fréquences sur les signaux AM-FM. Pour cela, l'on commence par faire apparaître une phase ϕ — pour l'instant inconnue — en écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\phi(t)} e^{-i\phi(t)} \mathbf{x}(t) := e^{i\phi(t)} \mathbf{y}(t)$$

Si ϕ est bien choisie, alors \mathbf{y} ne devrait contenir que les informations associées à l'amplitude et la polarisation de \mathbf{x} . Or, conformément à la condition (1.4), la phase doit contenir les hautes fréquences du signal et, inversement, les basses fréquences doivent se trouver dans le reste.

La fréquence donnant, pour le dire vite, la vitesse d'ondulation, la contrainte sur \mathbf{x} va être de limite les variations de \mathbf{y} . Concrètement, ϕ doit être choisie de sorte à minimiser la dérivée $\dot{\mathbf{y}}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \left\| e^{-i\theta(t)} (\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t)\mathbf{x}(t)) \right\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t)\mathbf{x}(t)\|_2^2$$

La contrainte ne dépendant que de la dérivée θ' , on se ramène à :

$$\min_{\theta(t)} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \min_{\theta'(t)} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - \theta'(t)\mathbf{x}(t)\|_2^2$$

En rappelant que $\frac{d}{dx} \|f(x)\|_2^2 = 2\Re\langle f(x), f'(x) \rangle$, il vient que ce minimum¹ est atteint par $\phi'(t)$ à condition que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi'} \|\dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}\|_2^2 = 0 &\iff 0 = 2\Re \left\langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}, \frac{d}{d\phi'} (\dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}) \right\rangle \\ &= 2\Re \langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}, -i\mathbf{x} \rangle \\ &= 2\Re \left(i \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle \right) + 2\phi' \Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= -2\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle + 2\phi' \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\phi' = \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$ et :

$$\phi(t) = \Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \quad (1.7)$$

¹ L'extremum obtenu est l'unique minimum globale puisque $t \mapsto \|at + b\|^2$ est strictement convexe pour $a \neq 0$.

Arguments des moyennes

Autre argument, cette fois inspiré de [2], ce base sur la notion de fréquence moyenne. D'abord dans le cas d'un signal complexe univarié, sont définies les fonctions de densités d'énergie (resp. d'énergie spectrale) comme :

$$\begin{array}{ll} \rho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & t \longmapsto |x(t)|^2 \end{array} \quad \text{resp.} \quad \begin{array}{ll} \varrho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & \nu \longmapsto |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array} \quad (1.8)$$

À partir de ces dernières est définie la fréquence moyenne de x comme l'espérance $\mathbb{E}_\varrho[\nu]$ de ϱ . Cette fréquence moyenne est liée à la fréquence instantanée par la formule :²

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho[\phi'] \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un signal $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ multivarié, les densités d'énergies se définissent comme :

$$\begin{array}{ll} \rho_i : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & t \longmapsto |x_i(t)|^2 = a(t)^2 a_i(t)^2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \varrho_i : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & \nu \longmapsto |\hat{x}_i(\nu)|^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \rho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & t \longmapsto \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) \end{array} \quad \begin{array}{ll} \varrho : & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ & \nu \longmapsto \|\hat{\mathbf{x}}(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varrho_i(t) \end{array}$$

Le second argument consiste alors à dire que l'égalité des moments (1.9) doit rester vraie dans le cas multivarié. Cela assure au moins que la fréquence instantanée de \mathbf{x} , $1/2\pi\phi'$, à pour moyenne $\mathbb{E}_\varrho[\nu]$, la fréquence moyenne en sens de Fourier.

En appliquant la formule (1.9) au ϱ_i , et en notant toujours $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \int_{\mathbb{R}} \nu \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) d\nu \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\varrho_i}[\nu] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'_i(t) \rho_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t)^2 \sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{i=1}^n \phi'_i a_i^2 \right] \end{aligned}$$

Ce qui mène à poser $\sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i^2(t)$ pour la fréquence instantanée, avec la phase associée :

$$\phi = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds \quad (1.10)$$

²cette formule se généralise à tout les moments de ϱ et existe également pour les moments de ρ , voir [3, sec. 1.4] pour une démonstration "à la physicienne" ... *ou bien en annexe ?*

Formule qui concorde bien avec celle de la phase dynamique une fois explicité :

$$\begin{aligned}
\Im m \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} &= \Im m \left(\frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n \left((aa_i)'(t) + a(t)a_i(t)i\phi_i'(t) \right) e^{i\phi_i(t)} \overline{a(t)a_i(t)e^{i\phi_i(t)}} \right) \\
&= \frac{1}{a(t)^2} \Im m \left(\sum_{i=1}^n a(t)a_i(t)(aa_i)'(t) + ia(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \right) \\
&= \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i(t)^2 \phi_i'(t)
\end{aligned}$$

D'où

$$\Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds$$

1.3 Apparition de la phase géométrique

Cela étant dit, il existe une autre façon, plus simple, d'obtenir la phase d'un signal. D'abord, dans le cas univarié, la phase instantanée de $x = ae^{i\phi}$ peut être réécrite comme :

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \arg \left(x(t) \overline{x(t_0)} \right)$$

Formule qui se généralise en cas multivarié par ce qui sera appelé la *phase totale* du signal :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle \quad (1.11)$$

D'un point de vu géométrique, il est bien connue que le produit scalaire entre deux vecteurs réels $u, v \in \mathbb{R}^n$ est lié à l'angle $\angle(u, v)$ entre ces derniers par la formule :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = \|u\|^2 \|v\|^2 \cos \angle(v, u)$$

Pour le produit hermitien, cet angle se retrouve dans l'argument, de sorte que si u et v sont complexes :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \|u\|^2 \|v\|^2 e^{i\angle(v, u)}$$

En ce sens, la phase totale calcul explicitement l'angle entre $\mathbf{x}(t_0)$ et $\mathbf{x}(t)$. La question est alors de savoir si Φ_{dyn} correspond à cette angle. Un calcul explicite montre que c'est bien le cas en univarié ; en notant $\mathbf{x} = ae^{i\phi}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) &= \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Im m \int_{t_0}^t \frac{(a'(s) + ia(s)\phi'(s))e^{i\phi(s)} \overline{a(s)e^{i\phi(s)}}}{a^2(s)} ds \\
&= \int_{t_0}^t \frac{a^2(s)\phi'(s)}{a^2(s)} ds \\
&= \phi(t) - \phi(t_0)
\end{aligned}$$

Dans le cas multivarié, en revanche, c'est une autre histoire. En notant cette fois le signal $\mathbf{x} = ae^{i\Phi_{\text{dyn}}}(a_i e^{\psi_i})_{1 \leq i \leq n}$, la phase totale se réécrit :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \arg \left(a(t)a(t_0)e^{i(\Phi_{\text{dyn}}(t) - \Phi_{\text{dyn}}(t_0))} \sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \\
&= \Phi_{\text{dyn}}(t) + \arg \left(\sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \quad \text{car } \Phi_{\text{dyn}}(t_0, t_0) = 0
\end{aligned} \quad (1.12)$$

Apparaît alors un terme de déviation de la phase dynamique par rapport à la phase totale, qui (surprise) est appelé phase géomatique et sera notée :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \quad (1.13)$$

Déviaton qui s'observe expérimentalement, comme le montre la figure 1.1 ci-dessous.



fig. 1.1 — Sur le graphe de gauche, le signal \mathbf{x} à valeur dans \mathbb{R}^2 et dans celui de droite le calcul des phases dynamique et totale ainsi que de leur différence. Résultat tiré des simulation de Le Bihan et al. [7]

Un résultat bien connue en physique [1, 13, 15] est que cette troisième phase est invariante par transformation de jauge. Dans notre contexte, cela signifie que si \mathbf{x} et $\tilde{\mathbf{x}}$ sont deux signaux multivarié complexe tel que $\tilde{\mathbf{x}} = e^{i\alpha} \mathbf{x}$, avec α une fonction continue du temps, alors :

$$\Phi_{\text{geo}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\tilde{\mathbf{x}}) - \Phi_{\text{dyn}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) = \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x})$$

Cela signifie plusieurs choses. D'une part, le fait cette phase soit invariante pas transformation de jauge montre qu'elle est associée à la composante de \mathbf{x} dont il a été mentionné (sec. 1.1) qu'elle était associée à sa polarisation. Ce point sera discuté dans la section II suivante.

D'autre part, cela suggère que la phase géométrique doit avoir une certaine robustesse au bruit. *Pas sur de ça* : Pour argumenter ce point, rappelons que le bruit d'un signal se trouve généralement dans les hautes fréquences de ce dernier. Or, en admettant, comme ça l'a été abordé dans la section 1.2 précédent, que la phase dynamique contient les hautes fréquences, il y a d'autant plus de chances que cette phase est un bon comportement par rapport au bruit.

Ainsi, s'il est possible de tirer des informations de Φ_{geo} , alors ces informations doivent pouvoir être obtenue même pour des signaux particulièrement bruités, comme c'est le cas des mesures d'ondes gravitationnelles (*j'aimerais beaucoup étudier ça mais ce sera sûrement pour une thèse, si thèse il y a*).

Cela étant dit, avec le calcul (1.12) précédent, il peut sembler que le travail sur la phase géométrique est terminée en cela qu'une formule explicite est donnée. Deux remarques à ce sujet :

D'abord, cette formule demande de connaître les ψ_i , qui eux-mêmes sont obtenue en extrayant la phase dynamique au signal. Or, la formule de Φ_{dyn} n'est pas la plus appropriée au traitement du signal puisque qu'elle fait intervenir intégral et dérivée.

Aussi mais surtout, cette formule cache la profondeur dernière l'étude de la phase géométrique, à commencer par l'origine de son nom.

À modifier en fonction de la suite : Dans ce mémoire le calcul pratique de la phase géométrique ne sera pas aborder pour, à la place, se pencher sur le second point : l'aspect géométrique d'une phase éponyme.

Est-ce que je dois parler de l'espace projectif ou est-ce que je le garde pour la grande partie II ?

II — Première étude : cas des signaux AM-FM-PM bivariés

Pour une première étude de la phase géométrique du signal, Le Bihan *et al.* se sont penchés sur un cas particulier de signal bivarié [5, 7, 8]. Ces signaux, dit AM-FM-PM, sont présentés dans une première partie et le calcul explicite de leur phases — totale, dynamique et géométrique — est présenté. Dans une seconde partie... *je sais pas trop*

2.1 Définitions et calcul des phases

Ces signaux AM-FM-PM viennent généraliser les signaux AM-FM univarié en tenant compte de l'état de polarisation permis par le passage au 2D. En quelques mots, dans le cas le plus simple, un signal bivarié à valeurs réelles s va décrire une ellipse en cours du temps. On parle de polarisation elliptique et s va s'écrire :

$$s(t) = a \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \varphi(t) \\ \sin \chi \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}^+, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \chi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Les paramètres a et χ caractérisent respectivement la taille et l'excentricité de l'ellipse, θ son orientation dans le plan et $\varphi(t)$ précise où se trouve s à l'instant t sur cette ellipse. Le tout est représenté sur la ?? ci-dessous :

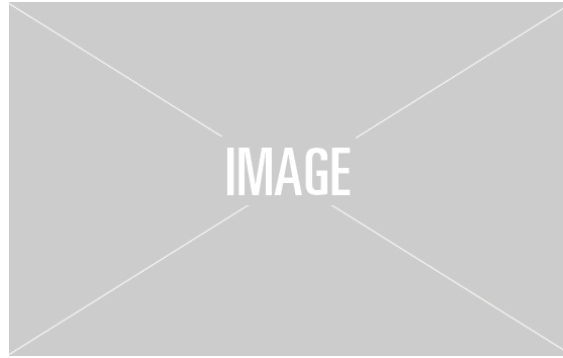


fig. 1.2 — Ellipse de polarisation du signal s sur laquelle sont représentés ses paramètres a, φ, θ, χ .

En autorisant les paramètres de polarisation à varier au cours du temps et après une transformation en signal analytique, mentionnée dans la section 1.1, on obtient la définition suivante :

DÉFINITION 4 (SIGNAL AM-FM-PM) — Un signal bivarié complexe \mathbf{x} AM-FM-PM (*amplitude, frequency and polarization modulated*) est caractérisé par quatre paramètres a, φ, θ et χ , respectivement à valeur dans $\mathbb{R}^+, \mathbb{R},]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, vérifiant :

$$|\varphi'(t)| \gg |\theta'(t)|, |\chi'(t)|, \left| \frac{a'(t)}{a(t)} \right| \quad \left| \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \right| \gg 1 \quad (1.14)$$

Auquel cas, \mathbf{x} prend la forme, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = a(t)e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

où $R_{\theta(t)}$ est la matrice de rotation d'angle $\theta(t)$.

La transformée en SA permet de transformer les signaux à valeurs réelles en complexes, ce qui est nécessaire³ pour étudier la phase géométrique car c'est uniquement dans le cadre de complexe qu'elle a été étudiée jusqu'à présent. Et, comme pour les signaux AM-FM, les hypothèses sur a, φ, θ, χ assure que les paramètres

³Nous reviendrons sur ce point dans la dernière partie de mémoire ... *est-ce qu'on le fait vraiment?*

soient interprétables comme sur la figure 1.2 précédente.

Les trois phases de tels signaux sont alors données par la proposition 1 suivante :

PROPOSITION 1 (PHASES DE SIGNAL AM-FM-PM) — Les trois phases d'un signal bivarié AM-FM-PM \mathbf{x} de paramètres $(a, \varphi, \theta, \chi)$ sont données par les formules :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arg \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin (\chi(t_0) + \chi(t)) \right) \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \left(\tan \Delta\theta \frac{\tan \chi(t_0) + \tan \chi(t)}{1 + \tan \chi(t_0) \tan \chi(t)} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \\ &= \arctan \left(\tan \Delta\theta \frac{\tan \chi(t_0) + \tan \chi(t)}{1 + \tan \chi(t_0) \tan \chi(t)} \right) - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \end{aligned} \quad (1.18)$$

où $\Delta y = y(t) - y(t_0)$ pour $y = \chi$. La démonstration se trouve en annexe B.2.

Deux remarques sur ces formules. La première est que la phase géométrique ne dépend que des paramètres de polarisations θ et χ , un résultat rassurant sachant qu'elle est invariante par transformation de jauge. La seconde, nettement plus troublante, est que φ ne s'interprète ni comme la phase totale ni comme la phase dynamique. Plus loin, [section 2.3](#), nous reviendrons sur laquelle des deux "doit" représenter φ .

Aussi, la phase géométrique est séparée en deux termes. Le premier, en arctangente, correspond à l'angle formé par les vecteurs portant la polarisation instantanée, c'est-à-dire les vecteurs :

$$R_{\theta(t_0)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t_0) \\ -i \sin \chi(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix}$$

Pour interpréter le second membre, c'est beaucoup moins clair. Il faut d'intéresser la projection $\rho_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \bar{\mathbf{x}}^t \mathbf{x}$. Avec des calculs (interminables), on obtient l'écriture :

$$\rho_{\mathbf{x}} = id + \sin 2\theta \cos 2\chi \sigma_1 + \sin 2\chi \sigma_3 + \cos 2\theta \cos 2\chi \sigma_3$$

où les σ_i sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarque alors que les coefficients associés aux σ_i sont des coordonnées sphériques lorsque les σ_i sont associés à la base canonique de \mathbb{R}^3 , conformément à la figure 1.3 ci-contre [pas à jour](#).

Posé ainsi, l'intégrale dans la phase dynamique ne s'interprète pas. Vraiment pas, [Wikipedia](#) liste une tonne de formule mais aucune ne colle avec $\theta' \sin 2\chi$ parce que les angles choisis ne le permette pas. Notre convention est que 2χ correspond à l'angle formé par σ_2 et ρ , là où sur Wikipedia, il est définie par l'angle entre la projection de ρ sur $\text{Vec}\{\sigma_{1,2}\}$ et ρ . Pour le dire rapidement, ce la change tout les $\cos 2\chi$ en $\sin 2\chi$ et inversement (modulo des signes).

Pour pouvoir interpréter l'intégrale, il faut choisir les mêmes conventions qu'eux, auquel cas, il faut poser :

$$\rho = \sin 2\theta \sin 2\chi \sigma_1 + \cos 2\chi \sigma_3 + \cos 2\theta \sin 2\chi \sigma_3$$

et notre vecteur apparaît comme la dérivée :

$$\hat{\chi} = \frac{\partial}{\partial \chi} \rho = \sin 2\theta \cos 2\chi \sigma_1 - \sin 2\chi \sigma_3 + \cos 2\theta \cos 2\chi \sigma_3$$

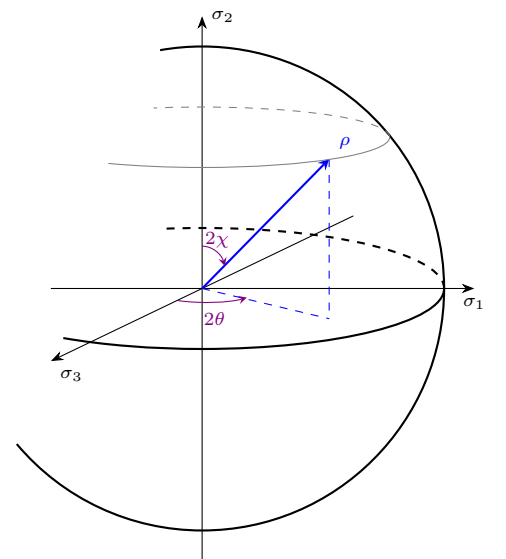


fig. 1.3 — Sphère de Poincaré, blablabla

Dans ce cas, $\theta' \sin 2\chi$ s'interprète (à un facteur près) comme la norme de la composante horizontale du vecteur vitesse de ρ , puisque :

$$\partial_t \rho = 2\chi' \hat{\chi} + 2\theta' \sin 2\chi \hat{\theta}$$

Ainsi, mais c'est vraiment pas beau, l'intégrale de Φ_{dyn} s'interprète comme la longueur du déplacement horizontale-ish de la projection ρ de \mathbf{x} .

Si on veut le voir en terme d'élément d'air dS , alors on a :

$$dS = \sin 2\chi d\theta d\chi$$

Mais comme θ et χ dépendent d'un paramètre commun t , ça serait très impropre de parler de calcul d'air sachant que $\theta'(t) \sin 2\chi(t)$ parcourt un chemin vraiment. D'autant plus que là pas d'intégrale sur θ ... même si peut-être qu'on pourrait la faire apparaître avec un changement de variable approprié (surement que non en plus parce que le passage de t à (θ, χ) à par une différentielle inversible donc au cul le det de la Jacobienne :/)

2.2 Généralisation en plus haute dimension

- Différentes écritures du bivarié pour différentes généralisation :
- Les quaternions on passe vite parce que ça se généralise très mal, Lefevre a a parlée, ça mène aux algèbres Clifford : trop de contrainte sur les dimensions des signaux
- En terme d'expo de matrice ? Lefevre [9, sec. I.3] l'a fait en trivarié mais au delà, y'a plus vraiment de choix remarquable de base pour $\mathfrak{u}(n)$
- En augmentant la taille de la matrice de rotation ? Lilly [10] l'a fait en trivarié et mais là encore, en terme de généralisation c'est pas si dingue parce que la matrice de rotation est pas calculable.

2.3 Sur la nécessité d'avoir une approche géométrique

- Dans tout ça, on ratte le plus important : La phase géo est invariante par transfo de jauge, donc il faut faire apparaître $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ dans la décomposition.
- et en fait, c'est le cas en bivarié car $\mathbb{P}\mathbb{C}^1 \cong \mathbb{S}^2$!
- $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ oui mais il faut pas non plus regarder que la projection parce qu'on perd toute les phases dans ce cas.
- Le bon compromis c'est les variétés fibrées : on est dans $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ mais on garde les phases dans les fibres.
- D'autant plus que ça à déjà était fait en physique et c'est vraiment concluant... (transition vers la grande partie suivante.)

ANNEXES

Annexe A — Compléments sur l'analyse temps-fréquence

A.1. Un mot sur la notion de fréquence instantanée (*nécessaire?*)

A.2. Formalisme derrière la transformée en SA

A.3. Lien avec le théorème de Bedrosian

Annexe B — Compléments sur les signaux AM-FM-PM

B.1. Construction détaillée des signaux AM-FM-PM (*nécessaire?*)

- Signal polarisé classique (θ, χ constants)
- Transformé en SA avec les hypothèses de Bedrosian
- Définition général en faisant dépendre θ/χ du temps
- Paramètre de Polar sur la sphère de Poincaré

B.2. Démonstrations

Démonstration de la formule (1.16), proposition 1

Par souci de lisibilité, on note $\mathcal{U} = R_\theta \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix}$ de sorte que la dérivée de \mathbf{x} s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= a' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ia\varphi' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ae^{i\varphi} \theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix} + ae^{i\varphi} \chi' \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \chi + i \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \theta \sin \chi - i \cos \theta \cos \chi \end{pmatrix} \\ &= a' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ia\varphi' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ae^{i\varphi} \theta' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + ae^{i\varphi} \chi' \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}} \end{aligned}$$

Le produit hermitien $\langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle &= \left\langle a' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ia\varphi' e^{i\varphi} \mathcal{U} + ae^{i\varphi} \theta' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + ae^{i\varphi} \chi' \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}}, ae^{i\varphi} \mathcal{U} \right\rangle \\ &= \left\langle a' \mathcal{U} + ia\varphi' \mathcal{U} + a\theta' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U} + a\chi' \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}}, a\mathcal{U} \right\rangle \\ &= aa' \langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2 \varphi' \langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + a^2 \theta' \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U}, \mathcal{U} \right\rangle - ia^2 \chi' \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}}, \mathcal{U} \right\rangle \end{aligned}$$

où les deux derniers produits hermitiens donnent :

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{U}, \mathcal{U} \right\rangle &= -\mathcal{U}_2 \overline{\mathcal{U}_1} + \mathcal{U}_1 \overline{\mathcal{U}_2} \\
&= 2i \Im m(\mathcal{U}_1 \overline{\mathcal{U}_2}) \\
&= 2i \Im m\left((\cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi) (\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi) \right) \\
&= 2i (\cos^2 \theta \cos \chi \sin \chi + \sin^2 \theta \sin \chi \cos \chi) \\
&= 4i \cos \chi \sin \chi \\
&= 2i \sin 2\chi
\end{aligned}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overline{\mathcal{U}}, \mathcal{U} \right\rangle = -\overline{\mathcal{U}_2} \mathcal{U}_1 + \overline{\mathcal{U}_1} \mathcal{U}_2 = 0$$

D'où, sachant que $\|\mathbf{x}\|^2 = a^2$ et $\|\mathcal{U}\| = 1$, la formule :

$$\begin{aligned}
\frac{\Im m\langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= \frac{1}{a^2} \Im m\left(aa' \langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2 \varphi' \langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2 \theta' \sin 2\chi \right) \\
&= \frac{1}{a^2} \left(a^2 \varphi' \|\mathcal{U}\|^2 + a^2 \theta' \sin 2\chi \right) \\
&= \varphi' + \theta' \sin 2\chi
\end{aligned}$$

■

Démonstration de la formule (1.17), proposition 1

Pour la phase totale, on note cette fois $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle &= \left\langle a(t) e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \mathcal{V}(t), a(t_0) e^{i\varphi(t_0)} R_{\theta(t_0)} \mathcal{V}(t_0) \right\rangle \\
&= a(t) e^{i\varphi(t)} a(t_0) e^{-i\varphi(t_0)} \left\langle R_{\theta(t)} \mathcal{V}(t), R_{\theta(t_0)} \mathcal{V}(t_0) \right\rangle \\
&= a(t_0) a(t) e^{i(\varphi(t) - \varphi(t_0))} \left\langle R_{\theta(t) - \theta(t_0)} \mathcal{V}(t), \mathcal{V}(t_0) \right\rangle
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on note $\Delta y = y(t) - y(t_0)$, $y_1 = y(t_0)$ et $y_2 = (t)$ pour $y = \varphi, \theta, \chi$. Le produit hermitien à droite s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\left\langle R_{\Delta\theta} \mathcal{V}(t), \mathcal{V}(t_0) \right\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\theta \cos \chi_2 + i \sin \Delta\theta \sin \chi_2 & \sin \Delta\theta \cos \chi_2 - i \cos \Delta\theta \sin \chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi_1 \\ i \sin \chi_1 \end{pmatrix} \\
&= \cos \chi_1 \left(\cos \Delta\theta \cos \chi_2 + i \sin \Delta\theta \sin \chi_2 \right) + i \sin \chi_1 \left(\sin \Delta\theta \cos \chi_2 - i \cos \Delta\theta \sin \chi_2 \right) \\
&= \cos \Delta\theta \left(\cos \chi_1 \cos \chi_2 + \sin \chi_1 \sin \chi_2 \right) + i \sin \Delta\theta \left(\cos \chi_1 \sin \chi_2 + \sin \chi_1 \cos \chi_2 \right) \\
&= \cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2)
\end{aligned}$$

D'où la phase totale :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) &= \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \arg \left(a(t_0) a(t) e^{i(\varphi(t) - \varphi(t_0))} \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2) \right) \right) \\
&= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arg \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2) \right)
\end{aligned}$$

et l'argument restant s'écrit comme une arctangente, donnant :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{tot}}(\boldsymbol{x}) &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \frac{\sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2)}{\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi} \\
&= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \left(\tan \Delta\theta \frac{\sin(\chi_1 + \chi_2)}{\cos \Delta\chi} \right) \\
&= \dots
\end{aligned}$$

■

PARTIE II

ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME

Plan approximatif de cette partie :

I — Prérequis

Dans notre cas, tout s'écrit très simplement donc pas besoin de sortir tout l'arsenal de géo diff

1.1 — Espace projectif complexe

- **Construction de $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$**
 - Définition comme espace quotient $S^{2n-1}/U(1)$
 - $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ vue comme variété différentielle complexe (voir annexe pour détails)
 - *lien avec la projection $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger$ utilisé en physique*
- **Métrique de Fubini-Study**
 - Métrique induite par la projection
 - expression de la métrique
 - expression en coordonnée local

1.2 — Fibré principaux

- **Fondamentaux**
 - Définitions de base
 - Section local (canonique)
 - changement de carte
- **Espaces horizontaux et connexion**
 - Espace verticaux
 - connexion comme ensemble d'espace horizontaux
 - 1-forme de connexion
 - notre choix de connexion (induite par le produit hermitien)

II — Interprétation géométrique des trois phases

2.1 — Cas des signaux “pseudo-cyclique” (cyclique à phase près)

- Le dessin de Bohm :
- phase dyn = signal - horizontal lift
- phase geo = horizontal lift - cyclique lift (<- indé du signal !)
- phase tot = cumul des deux

2.2 — La phase géo dans l'espace projectif

- Géodésique de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ et généralisation du cas pseudo-cyclique
- Remarque de Mukunda : phase géo est une 2-forme vs phase dyn est une 1-forme
- Bonnet-Gauss & Stokes : phase géo comme calcul d'air
- *Comme partie imaginaire de la métrique (+ lien avec Fisher)*

Annexes

A — Algèbre et groupe de Lie

- def : groupe de Lie G
- def : Algèbre de Lie \mathfrak{g} associée à G
- \mathfrak{g} vu comme tangent $T_e G$
- Cas particulier : $G = \mathrm{U}(1)$

B — Variétés différentielles complexe

- Complexification de TM
- L'intérêt de faire ça : proprement définir $\partial/\partial\bar{z}$
- Exemple : écriture de forme de Kahler de Fubini-Study

A reprendre, comme toutes les intros Pour étudier la phase géométrique d'un signal ψ , il nous faut projeter ψ sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, et ceux, tout en gardant une trace de sa phase puisque c'est le lien entre les deux qui nous intéresse. Il nous faut donc envoyer ψ dans le produit :

$$U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n \quad (\text{ou } \mathbb{C}^{n-1*}/\mathbb{C}^*)$$

Garder le lien entre cet espace et celui d'origine mène à se placer dans le cadre avec d'un *variété fibrée* (ou simplement fibré). Plus précisément, comme $U(1)$ est un groupe de lie, ce sera un *fibré principal* noté $S^{2n-1}(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$.

Comme son nom l'indique, $S^{2n-1}(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$ à une structure de variété différentielle et le lien entre les $U(1)$ et $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ va se faire par le biais d'une connexion. L'on verra alors que cette connexion est intrinsèquement lié à la phase dynamique du signal, et il sera discuté de la signification de ce résultat.

La phase géométrique, quand à elle, sera liée avec la métrique hermitienne associée aux l'espaces projectifs complexes.

Tout cela va demander quelques prérequis que nous allons voir à présent.

I — Prérequis mathématique

1.1 Variété fibrée principale

Pour le dire simplement, les *variétés fibrées* sont des variétés qui ressemble localement à des espaces produits. Le ruban de Möbius en est un exemple typique : il ne peut pas s'écrire comme le produit d'un cercle avec un segment $S^1 \times [0, 1]$ à cause de la façon dont il est construit. Mais localement, il est tout à fait comparable (*i.e.* difféomorphe) à un tel produit (*cf.* [fig. 2.1](#)).

Il existe toutes sorte de variétés fibrées dès lors qu'elles sont munies de structure remarquable. Celle qui vont nous intéresser sont les variétés dites principales⁴ :

DÉFINITION 5 (VARIÉTÉ FIBRÉE PRINCIPALE) — Une *variété fibrée principale* (VFP), ou *fibré principal* est constituée de deux variétés différentielles P et B telles que :

- Il existe un groupe de Lie G opérant à droite (ou à gauche) sur P via l'application différentiable :

$$\begin{aligned} \phi : P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto \phi(p, g) := pg = p \cdot g \end{aligned} \quad (2.1)$$

- Il existe une surjection différentiable $\pi : P \longrightarrow B$ telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}(\pi(p)) = pG \quad (2.2)$$

- P est munie d'un ensemble de paire (U_i, h_i) tel que les U_i forment un recouvrement de B et tel que les $h_i : G \times U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset P$ soient des difféomorphismes vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \forall x \in B, \quad h_i(ab, x) = h_i(a, x) \cdot b \quad \text{et} \quad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

La variété B est appelé la *base* de la VFP, que G son *groupe structural* et pG la *fibres* de P passant par p et au dessus de $\pi(p) \in B$. Le tout est notée $P(\phi, G, \pi, B)$ ou plus simplement $P(G, B)$.

Les fibres pG sont toutes difféomorphes à G et B est difféomorphe à P/G . *Le diagramme commutatif ci-contre résume la situation.*

$$\begin{array}{ccccc} & & U_i & & \\ & \nearrow \text{pr}_2 & & \nwarrow \pi & \\ G \times U_i & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U_i) \subset P & & \\ & \searrow \text{pr}_1 & & \swarrow \rho & \\ & & G & & \end{array}$$

⁴ Bien que ce ne sera pas précisé, il sera toujours sous-entendu que les différentes variétés et cartes doivent avoir les mêmes niveaux de régularités pour que le tout reste cohérent.

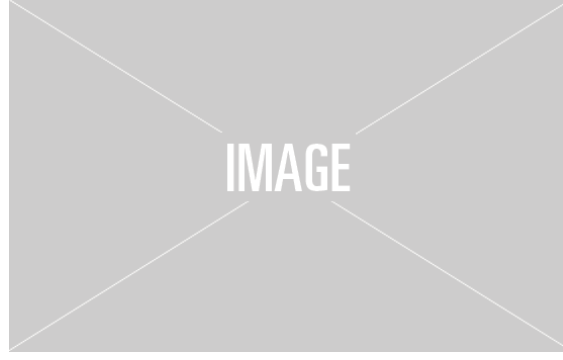


fig. 2.1 — Représentation du ruban de Modius en tant que fibré. Même s'il n'est pas principale, les notations sont reprise de la définition 5.

L'ensemble $\{(U_i, h_i)\}_i$ est l'équivalent d'un atlas pour les variétés différentielles classiques mais adapter pour tenir compte de la structure fibré de P et de l'action de G . Explicité les changements de cartes dans P , ce fait comme suit.

D'abord, P étant localement difféomorphe à un produit $G \times U_i$, on peut y tracer des graphes appelés *sections locales*, comme sur la figure 2.2 ci-dessous. Formellement, une section locale au dessus de U_i est une application $\sigma : U_i \subset B \rightarrow P$ vérifiant :

$$\pi \circ \sigma = id|_{U_i}$$

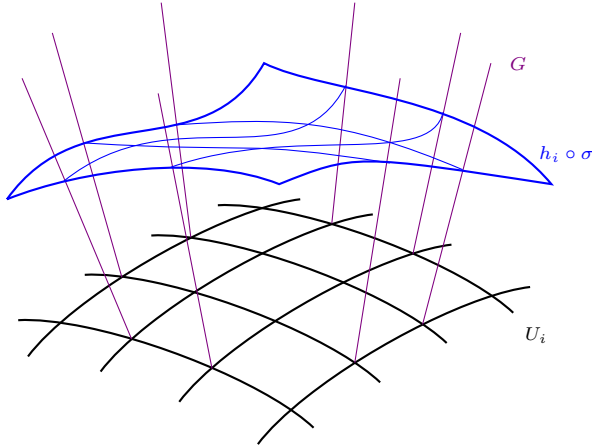


fig. 2.2 — Représentation d'une section local σ au dessus de U_i . Comme P n'est pas un produit à proprement parler, σ est représenté dans $G \times U_i$ à travers h_i .



fig. 2.3 — Représentation de la section canonique définie par rapport à G .

Ensuite, les hypothèses sur $P(G, B)$ sont telles que G agit transitivement et librement (ou sans point fixe) sur P . C'est-à-dire que, sur une même fibre, tout point peut être atteint par tout autre via l'action de G (transitivité) :

$$\forall x \in B, \quad \forall p, q \in P_x, \quad \exists t(p, q) \in G \mid p = q \cdot t(p, q)$$

et que la seule façon de laisse les points invariants par cette même action est de passer par l'élément neutre e (libre) :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad p = p \cdot g \implies g = e$$

De la transitivité de G , découle le fait que toutes les sections locales σ au dessus de U_i peuvent s'écrire à partir d'une même section σ_i via la formule :

$$\forall x \in B, \quad \sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma(x))$$

Son caractère libre, lui assure l'unicité d'un choix canonique de section σ_i sur U_i . Elle est donnée par :

$$h_i(x, e) = \sigma_i(x)$$

Cela mène à la définition :

DÉFINITION 6 (FONCTIONS DE TRANSITIONS) — L'intersection de deux cartes est noté $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et le passage d'une section local canonique est donné par :

$$\forall x \in U_{ij}, \quad \sigma_j(x) = \sigma_i(x) t(\sigma_i(x), \sigma_j(x))$$

L'élément de G , $t(\sigma_i, \sigma_j)$, est alors appelé *fonction de transition* et sera noté φ_{ij} . Elle fait effectivement la transition entre deux cartes dans le sens où :

$$\forall (g, x) \in G \times U_{ij}, \quad h_i^{-1} \circ h_j(g, x) = (\varphi_{ij}(x)g, x)$$

Dans la suite, il sera nécessaire d'associer une connexion à P , qui s'introduit comme suit. Comme P ressemble localement à un produit $G \times U_i$, il est utile de séparer ses espaces tangents $T_p P$ comme une somme directe d'espaces tangents respectivement aux fibres et à la base. Conformément aux représentations précédentes (fig. 2.1 à 2.3), les premiers sont appelées espaces tangents *verticaux*, les second *horizontaux* et sont notés :

$$\forall p \in P, \quad T_p P = V_p P \oplus H_p P$$

Si $V_p P$ est se définit canoniquement de façon unique, ce n'est pas le cas des $H_p P$, et c'est ce choix d'espace horizontaux que détermine une connexion sur P .

D'abord la construction de $V_p P$. Pour cela, la *fonction tangente* (ou *dérivée*) de π au point x est noté $T_p \pi$ avec :

$$(T_p \pi)_j^i = \frac{\partial \pi^i}{\partial x^j}(x)$$

Ainsi, $T_p \pi$ est à valeur de $T_p P$ dans $T\phi(p)B$ est l'espace tangent vertical au point p se définit par :

$$V_p P = \text{Ker}(T_p \pi) = \{X \in T_p P \mid T_p \pi(X) = 0\}$$

Une fois les espaces tangent verticaux construit, les espaces horizontaux s'obtiennent en considérant une 1-forme à valeur de P dans VP , noté \mathcal{A} , de sorte que :

$$\forall p \in P, \quad H_p P = \text{Ker}(\mathcal{A}_p)$$

Faire de même pour les espaces horizontaux demande un peu plus de travail parce que, *a priori*, les fibres sont toutes différentes. Pour les fibrés principaux, toutes les fibres s'assimile à G et l'espace tangent $T_e G$ à l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G . Comme les fibres de P sont toutes difféomorphes à G , leurs espaces tangents se représente dans l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G .

- espace tangent
- séparation en vertical \oplus horizontal
- pourquoi la découpe est pas canonique
- reformulation en terme de 1-forme
- connexion en coordo local
- toujours pas canonique tho

PROPOSITION 2 — Une 1-forme de connexion \mathcal{A} , noté \mathcal{A}_i en coordonnée local sur la carte U_i , doit vérifier le changement de coordonnée :

$$\varphi_{ij}\mathcal{A}_j = \mathcal{A}_i\varphi_{ij} + d\varphi_{ij}$$

1.2 Espaces projectifs complexes

Les espaces projectifs complexes se construisent ainsi. On se place dans $\mathbb{C}^{n+1*} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n+1}}\}$ avec la relation d'équivalence, $\forall x, y \in \mathbb{C}^{n+1*}$:

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid x = \lambda y$$

L'espace projectif complexe, noté $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est l'espace quotient :

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1} = \mathbb{C}^{n+1*} / \mathbb{C}^* = \mathbb{C}^{n+1*} / \sim$$

En notant $[z]$ la classe de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ du représentant $z = (z^i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1*}$, on définit les ensembles et cartes, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$U_i = \left\{ [z] \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n \mid z^i \neq 0 \right\} \quad \phi_i : \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^i \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-i} \cong \mathbb{C}^n \\ [z] & \longmapsto & \frac{1}{z^i} (z_0, \dots, 1, \dots, z_n) \end{array} \quad (2.3)$$

L'ensemble d'arrivée $\phi_i(U_i)$ est de dimension n et s'assimile à \mathbb{C}^n mais, par souci de comodité, on restera dans \mathbb{C}^{n+1} . Cela permet d'écrire plus simplement les formules de changement de carte en évitant de devoir enlever et rajouter des coefficients :

$$\forall [z] \in U_i \cap U_j, \quad \phi_i \circ \phi_j^{-1}(z) = \frac{z^j}{z^i} z \quad (z^{i,j} \neq 0)$$

Les (U_i, ϕ_i) forme un atlas holomorphe sur l'espace projectif complexe, faisant de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ une variété complexe de dimension $\dim_{\mathbb{C}} = n$ (voir annexe ?? pour plus de détail).

PROPOSITION 3 — La $2n+1$ -sphère S^{2n+1} est un espace fibré de base $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est de fibre type S^1 , ou $U(1)$. La fibration étant la projection canonique :

$$\pi : \begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{P}\mathbb{C}^n \\ x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

Voir [6] pour la démo

PROPOSITION 4 — $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ admet une métrique hermitienne induite par la métrique de S^{2n+1} , elle même induite du produit scalaire sur \mathbb{R}^{2n+1} . Elle est appelé *métrique de Fubini-Study* et est donnée par le formule :

II — Interprétation des trois phases dans ce cadre

2.1 Cas pseudo-cyclique

ANNEXE

Annexe A — Algèbre et groupe de Lie

Annexe B — Variété différentielle complexe, tiré de [15]

Pour mémoire, une variété différentielle de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) de dimension n est un espace topologique⁵ \mathcal{M} (ou \mathcal{M}^n) munie d'un *atlas* $(\phi_i, U_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire un ensemble fini de pair d'ouvert $U_i \subset \mathcal{M}$ et d'application $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

- les U_i forme un recouvrement de la variété : $\bigcup_{i \in I} \phi_i(U_i) = \mathcal{M}$
- les ϕ_i sont des homéomorphismes sur leur image $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$.
- si l'intersection $U_i \cap U_j$ est non vide, alors $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)}$ est un C^k difféomorphisme sur son image.

\mathcal{M} sera une *variété différentielle complexe* si elle satisfait les propriétés ci-dessus où \mathbb{R}^n est remplacé par \mathbb{C}^n et où la condition de difféomorphisme est remplacé par la condition d'holomorphisme.

Une application $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ étant holomorphe si chacune de ses composantes vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \mu, \quad \frac{\partial f}{\partial y^\mu}(x + iy) = i \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x + iy)$$

Les fonctions holomorphes étant automatiquement C^∞ , les variétés différentielles complexes sont toujours lisse, c'est-à-dire C^∞ . Aussi, \mathcal{M} est dite de dimension complexe n et dimension (réel) $2n$, notés :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) := n \qquad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) := \dim(\mathcal{M}) = 2n \quad (2.4)$$

Ensuite, pour le dire rapidement, la structure complexe de \mathcal{M} permet de séparer les espaces tangents en deux sous espaces. Pour ce faire, on commence par noter qu'en tout point $p \in \mathcal{M}$ de coordonnée $z^\nu = x^\nu + iy^\nu$, l'espace tangent $T_p\mathcal{M}$, vu comme variété réelle, admet une base :

$$T_p\mathcal{M} = \text{Vec} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\} \quad (2.5)$$

Plus tôt que de se basé sur les x^μ et y^μ pour séparer les $T_p\mathcal{M}$, on définit sur ces derniers un tenseur J_p de type (1,1) tel que :

$$J_p \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \qquad J_p \frac{\partial}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.6)$$

Ce tenseur est l'équivalent de la multiplication par $\pm i$ et le fait que \mathcal{M} soit complexe assure qu'il soit défini globalement, *i.e.* sur $T\mathcal{M}$. Il est diagonalisable dans la base :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial z^\mu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \qquad \bar{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \quad (2.7)$$

Ainsi en fonction de la base ((2.4) ou (2.7)), J_p va s'écrire :

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \qquad J_p = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

⁵ La topologie de \mathcal{M} doit vérifier des propriétés type séparable, dénombrable à l'infinie, etc., qui seront toutes admises dans la suite, voir par exemple [6, chap. 2]

Finalement, $T\mathcal{M}$ peut être séparé en deux sous-espaces engendré respectivement par les ∂_μ et $\partial_{\bar{\nu}}$. On parle de vecteur holomorphe et anti-holomorphe et on note :

$$T_p\mathcal{M}^+ = \text{Vec}\{\partial_\mu \mid 1 \leq \mu \leq n\} \qquad T_p\mathcal{M}^- = \text{Vec}\{\partial_{\bar{\mu}} \mid 1 \leq \mu \leq n\} \qquad (2.9)$$

PARTIE III

NOTES 'N' THOUGHTS

I — Notes sur l'approche Géométrie

1.1 Notes sur l'approche à avoir

- Quel espace ? Pour la gauge invariance, c'est du $U(1) \times X$ mais qui est X ?
 - les xx^\dagger sont plus calculable mais isomorphe à l'espace projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, lequel des deux choisir ? (les deux sont équivalent, 1^{er} théorème d'isomorphisme -ish)
 - Y'a aussi les Grassmanniennes $G_{n,k}(\mathbb{K})$, mais $G_{n,1}(\mathbb{C}) \cong \mathbb{P}\mathbb{C}^n$
 - En somme, sûrement que $X = \mathbb{P}\mathbb{C}^n$ (à voir comment faire les changements d'espaces)
 - $\mathbb{C}^{n*}/(1)$ sounds good mais n'a pas de structure complexe (aucune, dim impaire)
- Ensuite, comme on a un produit(-ish), on veut un côté fibré (sûrement principale)
A ce sujet, Wikipédia dit : “ La théorie des fibrés principaux recouvre la théorie des fibrés vectoriels, de leurs orientations, de leurs structures riemanniennes, de leurs structures symplectiques, etc. ” (sounds reaaaally good)
- Puis une métrique pour l'espace :
 - vu que c'est complexe j'y connais R
 - mettre la bonne connexion (A-A mais y'a aussi Fubini-Study)
 - si la connexion du fibré est équivalente à la connexion d'une variété, qu'est-ce qu'il se passe du côté de cette variété ? est-ce qu'on peut en déduire des choses ? (sûrement que non parce que $U(1)$ est pas un e.v.)
- Phase géo \cong transport parallèle ?
Réponse : holonomie
- refs de GPT pour la connexion sur fibré :
 - Kobayashi & Nomizu - Foundations of Differential Geometry (vol. 1 & 2)
C'est la bible sur les connexions et fibrés principaux ! Chapitres sur les connexions dans les fibrés principaux et leur relation avec les connexions dans les fibrés vectoriels associés.
 - J. M. Lee - Introduction to Smooth Manifolds (Chapitre sur les connexions et les fibrés principaux).
Accessible et bien expliqué, en particulier sur le lien entre les connexions dans les fibrés vectoriels et les fibrés principaux.
 - S. Helgason - Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces
Approche plus avancée et lie bien la géométrie différentielle à la théorie des groupes de Lie.

Pour la géométrie projectives complexe :

- Kobayashi, Differential Geometry of Complex Vector Bundles
Introduction aux connexions sur les fibrés vectoriels complexes, crucial pour comprendre les métriques de Fubini-Study et les structures kählériennes.

- Huybrechts, Complex Geometry: An Introduction
Introduction aux variétés complexes et kählériennes, avec des applications aux espaces projectifs complexes.
- Gunning, Introduction to Complex Analysis and Geometry
Bon compromis entre analyse complexe et géométrie différentielle.
- Wells, Differential Analysis on Complex Manifolds
Bon livre pour le lien entre la géométrie différentielle et la géométrie projective
- Ballmann, Introduction to Kähler Geometry
Très bon pour comprendre l'aspect kählérien des variétés projectives.
- Voisin, Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry (vol. 1 & 2)
Référence avancée, mais incontournable si tu veux plonger dans la topologie des variétés projectives complexes.

• Improbable mais on sait jamais :

- Spin-structure ? (c'est que PC^n + pas sur que ça ait de l'intérêt parce que ça existe qu'en dimension impair)
- Espace de Siegel ? (ellipse vs ellipsoïde tout ça tout ça)

• Autour de $U(n)$: [Classif de \$U\(n\)\$](#)

1.2 La vision de Bohm [1, fig. 4.3]

Dans cette section, ψ sera toujours supposée pseudo-cyclique :

DÉFINITION 7 — Un signal ψ sera dit *cyclique* si à l'instant t , ψ reprend les mêmes valeurs qu'en t_0 :

$$\psi(t) = \psi(t_0)$$

Et ψ sera dit *pseudo-cyclique* s'il est cyclique à une transformation de gauge près :

$$\exists \theta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \psi(t) = e^{i\theta(t)}\psi(t_0) \text{ et } \theta(t_0) = 0$$

On note \mathcal{C} le trajet effectué par ψ et \mathfrak{C} le projeté de ce trajet sur la base PC^n . On note également $\tilde{\mathcal{C}}$ (resp. \mathcal{C}_c) le lift horizontal (resp. un lift cyclique) de \mathfrak{C} , et on lui associe la paramétrisation $\tilde{\psi}$ (resp. ϕ). En clair :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{ \psi(t) \in \mathbb{C}^n \mid t \in \mathbb{R} \} \\ \mathfrak{C} &= \{ \psi(t)\psi(t)^\dagger \in \text{PC}^n \mid t \in \mathbb{R} \} \\ \tilde{\mathcal{C}} &= \{ \tilde{\psi}(t) \in \mathbb{C}^n \mid t \in \mathbb{R} \} & \tilde{\psi} \text{ horizontal lift} \\ \mathcal{C}_c &= \{ \phi(t) \in \mathbb{C}^n \mid t \in \mathbb{R} \} & \phi \text{ cyclique} \end{aligned}$$

Quand on dit que $\tilde{\psi}$ est l'*horizontal lift*, on sous entend que le fibré est muni d'une connexion. Suivant l'approche quantique, elle est de la forme :

$$\forall \eta \in \Gamma(\mathcal{M}), \quad \mathcal{A} := \int_{\gamma} \langle \eta, h(\eta) \rangle$$

où h est l'Hamiltonien de l'équation de Schrödinger (dont ψ est supposé solution) :

$$i \frac{d}{dt} \psi(t) = h(\psi(t)) \tag{3.1}$$

Mais on a le choix de h . En particulier, si on veut pas de contrainte, on peut toujours poser :

$$h = i \frac{d}{dt}$$

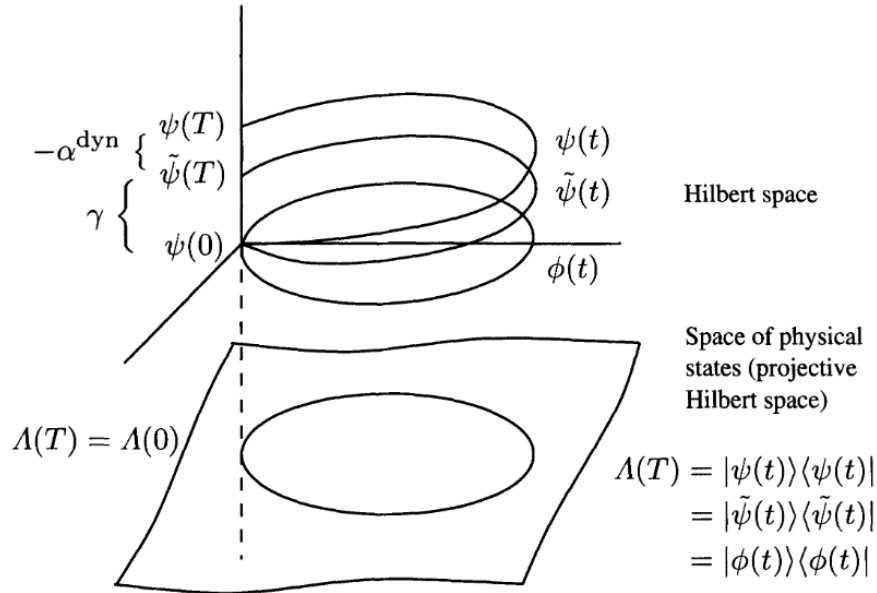


fig. 3.1 — Schéma de Bohm [1] sur les trois phases

Est-ce qu'on a le droit ? (je vois pas pourquoi on pourrait pas) Et si on le fait, qu'est-ce que ça dit du point de vue mécha Hamiltonienne ? (*a priori* rien vue l'EDP)
Aussi, du pvd calculatoire / de la phase g, qu'est-ce qu'il se passe ? Typiquement, est-ce que y'a $\tilde{\psi}$ devient un ϕ ?

Aussi, chose remarquable, le fait que la phase géométrique soit invariante par gauge transfo réapparaît dans le fait que ϕ ne soit pas définie à gauge tranfo près (sauf au bord). Par contre c'est étrange que

1.3 La vision Mukunda & Simon [13, 14]

- Mukunda & Simon[13, p. 10] partent des matrices de corrélation $\rho = \psi\psi^\dagger$ vérifiant (cas normé, p.50 pour le cas générale) :

$$\rho = \rho^\dagger \geq 0 \quad \rho^2 = \rho \quad \text{tr}(\rho) = 1 (= \|\rho\|^2)$$

et pose l'Hamiltonien (resp. l'énergie kiné) :

$$H = i(\dot{\psi}\psi^\dagger - \psi\dot{\psi}^\dagger - \langle\psi, \dot{\psi}\rangle) \quad \text{resp.} \quad K = \frac{d}{dt}(\psi\psi^\dagger) = \dot{\rho}$$

qui donne :

$$\frac{d}{dt}\psi = -iH\psi = (K + \langle\psi, \dot{\psi}\rangle)\psi$$

K est "mieux" dans le sens où il est invariant par gauge-t. Aussi, comme c'est une dérivée d'une hermitienne elle est... hermitienne ? (mmmh).

Anyway, on peut poser avec la bonne gauge :

$$\frac{d}{dt}\tilde{\psi} = K\tilde{\psi}$$

- Voir page 20 pour passer de Φ_{geo} au Birgmann invar
- La phase totale $\Phi_{\text{tot}}(\psi, t_0, t)$ est la phase dyn de la géodésique reliant $\psi(t)$ à $\psi(t_0)$ (ça commute ? surement pas)
En somme, la phase totale est complètement indépendante du chemin ψ , ce qui est rassurant puisque c'est ce qu'on attend la phase totale : qu'elle ne compare que les états $\psi(t_0)$ et $\psi(t)$.

- L'invariant de Birgmann à des propriétés sommatoires similaires à un calcul de volume... transition parfaite vers la formule de Stokes !!!
- Là où Φ_{dyn} est associée à une 1-forme sur P , Φ_{geo} elle est associée à une 2-forme sur P/G !
- SUPER IMPORTANT : [13, (8.6), p.51] pour l'origine/choix de Φ_{geo} !

1.4 Fisher (man, 42 Wallaby way, Sydney)

Pour mémoire, étant donné une distribution de paramètre $\Theta = (\theta_i)_{1 \leq i \leq n}$, la métrique de Fisher est la donnée par :

$$f_{ij}(\rho_\theta) = -\mathbb{E}_{\rho_\theta} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \ln(\rho_\theta) \right] \quad (3.2)$$

À côté de ça, la ??, donnait la formule (??) :

$$\mathbb{V}_\rho[\nu] = \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho[(\ln a)'] + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho[\phi']$$

Ce qui ressemble vachement à la variance $(\ln x)'$:

$$\mathbb{V}_\rho[(\ln x)'] = \mathbb{V}_\rho[(\ln a)'] - \mathbb{V}_\rho[\phi'] + 2i \text{Cov}((\ln a)', \phi') \quad (3.3)$$

Dans tout les cas, $\mathbb{V}_\rho[(\ln x)']$ peut pas être lié à l'information de Fisher parce qu'on a pas de paramètre. Mais admettons que ça corresponde quand-même à une information sur x . Si on fait le même calcul que pour un signal \mathbf{x} multivarié, alors avec les notations de la ??, on a :

II — Réflexion autour du produit hermitien

Soit $x, y \in \mathbb{C}^n$ des vecteurs complexes et $X, Y \in \mathbb{R}^{2 \times n}$ leur versions réelles. On note x^j sa j^{eme} composante complexe et x_1 (resp. x_2) le vecteur composé de ses parties réelles (resp. imaginaires) :

$$x = (x^j)_j = x_1 + ix_2 = (x_1^j)_j + i(x_2^j)_j$$

On a deux façon d'écrire le produit hermitien (canonique) de x avec y .
La première :

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x_1 + ix_2, y_1 + iy_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - i\langle x_1, y_2 \rangle + i\langle x_2, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \\ &= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + i(\langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle) \\ &= \sum_j x_1^j y_1^j + x_2^j y_2^j + i \left(\sum_j x_2^j y_1^j - x_1^j y_2^j \right) \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle + i \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle X, Y \rangle + i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \langle X, Y \rangle - i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} Y \right\rangle \end{aligned}$$

Cette formule peut s'interpréter en disant que le produit hermitien encode le produit scalaire entre X et Y et le produit scalaire de X avec les vecteurs $y^j = (y_1^j, y_2^j)$ auquel on aurait appliqué une rotation de 90° (rotation qui, par ailleurs, correspond à la multiplication par i dans le plan complexe). Moralement, $\langle x, y \rangle = 0$ demande une orthogonalité de X à un plan, ce qui fait sens puisque cela tient compte du fait que les x^j, y^j sont complexes (donc de dimension 2 en tant que \mathbb{R} -e.v.).

Pour les connaisseurs, on retrouve l'égalité "produit hermitien = produit scalaire $-i$ forme symplectique" !!

Voir [plan proj complexe](#) et [variété kählérienne](#)

On a aussi l'écriture (quand-même moins clair) :

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle + i(\langle x_2, y_1 \rangle - \langle x_1, y_2 \rangle) \\ &= \sum_j x_1^j y_1^j + x_2^j y_2^j + i \sum_j (x_2^j y_1^j - x_1^j y_2^j) \\ &= \sum_j \langle X^j, Y^j \rangle - i \sum_j \det(X^j, Y^j)\end{aligned}$$

Cette formule dit que les parties réelles et imaginaires du produit $\langle x, y \rangle$ encodent respectivement “l’orthogonalité moyenne” et la “linéarité moyenne” entre les familles de vecteurs $X^j \in \mathbb{R}^2$ et $Y^j \in \mathbb{R}^2$. L’orthogonalité d’une part parce que le produit scalaire s’annule en cas d’orthogonalité (no shit), la linéarité d’autre part car le déterminant s’annule en cas de colinéarité et moyenne car se sont des sommes sur j . **$\langle x, y \rangle = 0$ ne dit pas que les vecteurs sont à la fois colinéaire et orthogonaux parce que ce sont des valeurs moyennes (i.e. annuler une somme ne veut pas dire que chacun des termes sont nuls).**

Si maintenant on s’intéresse au cas $y = x$, on a $\forall h \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned}\langle x + h, x + h \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \langle h, x \rangle + \langle h, h \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, h \rangle + \overline{\langle x, h \rangle} + \langle h, h \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2\Re \langle x, h \rangle + \langle h, h \rangle\end{aligned}$$

Donc si $x \in \mathbb{C}^n$ est fonction d’un paramètre t , l’égalité $\langle x, \dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \partial_t \langle x, x \rangle$ du cas réel devient :

$$\langle x | \dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \partial_t \langle x | x \rangle + i \left\langle X \left| \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \dot{X} \right. \right\rangle \quad (3.4)$$

En particulier, quand bien-même x serait de norme constante, on aurait toujours un degré de liberté pour $\langle x, \dot{x} \rangle$:

$$\|x\| = c \implies \langle x, \dot{x} \rangle = i \left\langle X, \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \dot{X} \right\rangle$$

III — Description des signaux AM-FM-PM

3.1 Bivarié

3.2 Trivarié

- Version de Lilly [10]

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_+(t) &= e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a(t) e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\text{avec :} \quad R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc une amplitude / phase instantanée A / ϕ et une polarisation instantanée d’ellipse paramétrée par χ et orientée par la rotation $R_1 R_3 R_1$.

- On note d’abord que (Lefevre [9]) :

$$\begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \chi(t) & i \sin \chi(t) & 0 \\ -i \sin \chi(t) & \cos \chi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui, en terme de matrice de Gall-man (λ_i) (généralisation de la base de Pauli à $U(3)$), devient :

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_+(t) &= a(t)e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a(t)e^{i\phi(t)} e^{i\alpha\lambda_7} e^{i\beta\lambda_3} e^{i\theta\lambda_7} e^{-i\chi\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3.3 Généralisation de ces formules au cas n -varié

PROPOSITION 5 (PHASE DE SIGNAL AM-FM-PM n -VARIÉ) — La formule (1.16) de la ?? ce généralise très bien à plus haute dimension. En écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = a(t)e^{i\varphi} R_{\Theta(t)} \mathcal{V}(t) \quad \text{où } R_{\Theta(t)} \in SO_n(\mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{V}(t) = \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

la phase dynamique de \mathbf{x} est donnée par :

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \int_{t_0}^t \dot{\varphi}(s) + \sin 2\chi \langle \tilde{R}_{\Theta(s)} e_1, e_2 \rangle ds \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \sin 2\chi \langle \tilde{R}_{\Theta(s)} e_1, e_2 \rangle ds\end{aligned} \quad (3.7)$$

où $e_j = \delta_j^i \in \mathbb{R}^n$ et $\tilde{R}_{\Theta(t)}$ est la matrice anti-symétrique :

$$\tilde{R}_{\Theta(t)} = {}^t R_{\Theta(t)} \dot{R}_{\Theta(t)} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

En récrivant R_{Θ} comme composition d'une rotation R_{Λ} et d'une rotation R_{θ} de l'ellipse dans son plan, *i.e.* :

$$R_{\Theta} = R_{\Lambda} R_{\theta} = R_{\Lambda} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \\ & & \mathbb{O}_{n-2} \end{pmatrix}$$

alors la phase dynamique se réécrit encore :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\theta}(s) \sin 2\chi(s) ds + \int_{t_0}^t \sin 2\chi(s) \langle \tilde{R}_{\Lambda(s)} \tilde{e}_1(s), \tilde{e}_2(s) \rangle ds \quad (3.8)$$

où cette fois \tilde{e}_1 (resp. \tilde{e}_2) donne la direction du demi-grand (resp. -petit) axe de l'ellipse paramétrée par χ :

$$\tilde{e}_1 = R_{\theta} e_1 \quad \tilde{e}_2 = R_{\theta} e_2$$

Démonstration

D'abord, on a la différentielle :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \frac{d}{dt} (a e^{i\varphi} R_{\Theta} \mathcal{V}) = \dot{a} e^{i\varphi} R_{\Theta} \mathcal{V} + i a \dot{\varphi} e^{i\varphi} R_{\Theta} \mathcal{V} + a e^{i\varphi} \dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} + a e^{i\varphi} R_{\Theta} \dot{\mathcal{V}} \\ &= (\dot{a} + i a \dot{\varphi}) e^{i\varphi} R_{\Theta} \mathcal{V} + a e^{i\varphi} (\dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} + R_{\Theta} \dot{\mathcal{V}})\end{aligned}$$

où le vecteur $\dot{\mathcal{V}}$ se réécrit :

$$\dot{\mathcal{V}} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\chi} \begin{pmatrix} -\sin \chi(t) \\ -i \cos \chi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = i\dot{\chi} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & \mathbb{O}_{n-2} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} := i\dot{\chi} J\mathcal{V}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} -\frac{\Im m \langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \Im m \left\langle ae^{i\varphi} R_{\Theta} \mathcal{V}, (\dot{a} + ia\dot{\varphi}) e^{i\varphi} R_{\Theta} \mathcal{V} + ae^{i\varphi} (\dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} + i\dot{\chi} R_{\Theta} J\mathcal{V}) \right\rangle \\ &= \dot{\varphi} + \Im m \left\langle R_{\Theta} \mathcal{V}, \dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} \right\rangle + \Im m \left(i\dot{\chi} \langle R_{\Theta} \mathcal{V}, R_{\Theta} J\mathcal{V} \rangle \right) \\ &= \dot{\varphi} + \Im m \left\langle R_{\Theta} \mathcal{V}, \dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} \right\rangle + \dot{\chi} \Re e \langle \mathcal{V}, J\mathcal{V} \rangle \end{aligned}$$

On montre, avec un calcul similaire à la démonstration de la ??, que le dernier terme est nul. Le deuxième terme, lui, se réécrit en fonction de la base canonique (e_i) de \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \left\langle R_{\Theta} \mathcal{V}, \dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} \right\rangle &= \left\langle R_{\Theta} (\cos \chi e_1 - i \sin \chi e_2), \dot{R}_{\Theta} (\cos \chi e_1 - i \sin \chi e_2) \right\rangle \\ &= \cos^2 \chi \left\langle R_{\Theta} e_1, \dot{R}_{\Theta} e_1 \right\rangle + \sin^2 \chi \left\langle R_{\Theta} e_2, \dot{R}_{\Theta} e_2 \right\rangle - i \cos \chi \sin \chi \left(\left\langle R_{\Theta} e_1, \dot{R}_{\Theta} e_2 \right\rangle - \left\langle R_{\Theta} e_2, \dot{R}_{\Theta} e_1 \right\rangle \right) \end{aligned}$$

Notons à présent que comme $R_{\Theta(t)} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$, la différentielle \dot{R}_{Θ} est à valeur dans le fibré tangent $T\text{SO}_n(\mathbb{R})$. Sachant que $T_{\Theta(t)}\text{SO}_n(\mathbb{R}) = R_{\Theta(t)}\mathcal{A}_n()$, la différentielle \dot{R}_{Θ} s'écrit :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \dot{R}_{\Theta(t)} \in T_{\Theta(t)}\text{SO}_n(\mathbb{R}) \iff \exists \tilde{R}_{\Theta(t)} \in \mathcal{A}_n() \mid \dot{R}_{\Theta(t)} = R_{\Theta(t)} \tilde{R}_{\Theta(t)}$$

Cela permet d'écrire :

$$\begin{aligned} -\frac{\Im m \langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= \dot{\varphi} + \Im m \left\langle R_{\Theta} \mathcal{V}, \dot{R}_{\Theta} \mathcal{V} \right\rangle = \dot{\varphi} - \cos \chi \sin \chi \left(\left\langle R_{\Theta} e_1, \dot{R}_{\Theta} e_2 \right\rangle - \left\langle R_{\Theta} e_2, \dot{R}_{\Theta} e_1 \right\rangle \right) \\ &= \dot{\varphi} - \frac{1}{2} \sin 2\chi \left(\left\langle e_1, \tilde{R}_{\Theta} e_2 \right\rangle - \left\langle {}^t \tilde{R}_{\Theta} e_2, e_1 \right\rangle \right) \\ &= \dot{\varphi} - \sin 2\chi \left\langle e_1, \tilde{R}_{\Theta} e_2 \right\rangle \\ &= \dot{\varphi} + \sin 2\chi \left\langle \tilde{R}_{\Theta} e_1, e_2 \right\rangle \end{aligned}$$

■

- Les quaternions ça se généralise trop mal (au dessus c'est les octinions, c'est un calvaire et ça va pas plus loin)
- Ça peut s'écrire en terme d'algèbre de Clifford (Lefevre [9])... pas dingue non plus (pb de dimension principalement)
- Les bases de $U(n)$ paraît être le meilleur choix mais on a pas de "bonne base" pour de plus haute dimension.
- question : est-ce qu'on en a besoin pour la phase géométrique ? (transi vers une formulation géo diff-like ?)

3.4 Plus de note (très OSEF)

3.4.1 Bivarié

- Avec la transformation :

$$\mathbf{x} \rightsquigarrow (e^{i\phi}, \mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger) \in U(1) \times \text{PC}^1 - ish$$

On a :

$$\mathbf{x}\mathbf{x}^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 S_i(t) \sigma_i \quad \begin{cases} S_0(t) = {}^t\mathbf{x}\overline{\mathbf{x}} = \|\mathbf{x}\|^2 \\ S_1(t) = S_0(t) \cos 2\chi(t) \cos 2\theta(t) \\ S_2(t) = S_0(t) \cos 2\chi(t) \sin 2\theta(t) \\ S_3(t) = S_0(t) \sin 2\chi(t) \end{cases}$$

- En version quaternion (\mathbf{j} fait office de i) [9] :

$$\mathbf{x}_+ = a(t) e^{i\theta} e^{-\mathbf{k}\chi} e^{\mathbf{j}\phi} \quad (3.9)$$

Et les Stokes parameters sont donnée par :

$$\mathbf{x}_+ \mathbf{j} \overline{\mathbf{x}_+} = S_0 + \mathbf{i} S_3 + \mathbf{j} S_1 + \mathbf{k} S_2$$

Et le lien avec les σ_i se fait via (mais du coup les notations colles par :/) :

$$(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \rightsquigarrow (1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$$

- Et en version matrice de Pauli :

$$\mathbf{x}_+ = a(t) e^{i\phi} e^{i\theta\sigma_2} e^{-i\chi\sigma_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Plus de détail :

On a un signal bivarié $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ qu'on transforme (voir ??) soit la forme :

$$\mathbf{x}_+(t) = \begin{pmatrix} x_+(t) \\ y_+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x(t) e^{i\phi_x(t)} \\ a_y(t) e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

À côté de ça, on a les ellipses modulées :

$$z(t) = e^{i\theta} (a(t) \cos \phi(t) + ib(t) \sin \phi(t)) = a(t) e^{i\theta} (\sin \chi(t) \cos \phi(t) + i \sin \chi(t) \sin \phi(t)) \in \mathbb{C}$$

Qui sous forme vectoriel se réécrit (**pourquoi ???**) :

$$z(t) = e^{i\phi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \end{pmatrix} = a(t) e^{i\phi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad R_\theta \in \text{SO}_2(\mathbb{R}) \quad (3.11)$$

Pour avoir la désinscription de \mathbf{x} en terme d'ellipse, il suffit donc de poser :⁶

$$\mathbf{x}_+(t) = z(t) \iff \begin{pmatrix} a_x(t) e^{i\phi_x(t)} \\ a_y(t) e^{i\phi_y(t)} \end{pmatrix} = A(t) e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix}$$

Ensuite, on pose :

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ e^{i\phi_+} \\ a_- e^{i\phi_-} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_+ + iy_+ \\ x_+ - iy_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix}$$

Et on a :

$$\begin{aligned} 2\phi &= \phi_+ + \phi_- & a &= A \cos \chi = a_+ + a_- \\ 2\theta &= \phi_+ - \phi_- & b &= A \sin \chi = a_+ - a_- \end{aligned}$$

et on en déduit :

$$A = \sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2} \quad \begin{aligned} \cos \chi &= \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2}} \\ \sin \chi &= \frac{a_+ - a_-}{\sqrt{(a_+ + a_-)^2 + (a_+ - a_-)^2}} \end{aligned}$$

⁶C'est la version analytique du la version vectorielle de l'ellipse !

Ce qui donne *in fine*(super osef) :

$$\begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} = e^{i\frac{\phi_+ + \phi_-}{2}} R_{\frac{\phi_+ - \phi_-}{2}} \begin{pmatrix} a_+ + a_- \\ -i(a_+ - a_-) \end{pmatrix}$$

L'??? ce généralise très bien, il suffit d'augmenter la taille de $R_\theta \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$ et de lui donner le vecteur étendu :⁷

$$z_x(t) = \begin{pmatrix} x_{1+}(t) \\ \vdots \\ x_{n+}(t) \end{pmatrix} = e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A(t) e^{i\phi} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maintenant, la question est de savoir comment généraliser la transformation en (z_+, z_-) pour obtenir les paramètres $(A, \phi, R_\theta, \chi)$ dans ce cas...

Pour généraliser le procédé, on peut noter que :

$$\begin{pmatrix} z_+ \\ z_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} U \begin{pmatrix} x_+ \\ y_+ \end{pmatrix} \quad \text{avec } U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \in \text{U}(2)$$

Ce qui ramène à se demander comment généraliser U à $\text{U}(n)$. Le problème est que U est indépendant de tout les paramètres $(A, \phi, R_\theta, \chi)$ et sa généralisation est vraiment pas évidente sachant qu'on que le formule avec $n = 2...$ et pour $n = 3$ ca devient déjà chaud (pour rappelle $\dim \text{SO}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$ et donc $\theta \in \mathbb{R}^n$, ce qui rend le problème de pire en pire à mesure qu'on augmente n).

3.4.2 Trivarié

- Version de Lilly [10]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_+(t) &= e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} a(t) \\ -ib(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a(t) e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\text{avec :} \quad R_1(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad R_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc une amplitude / phase instantanée A / ϕ et une polarisation instantanée d'ellipse paramétrée par χ et orientée par la rotation $R_1 R_3 R_1$.

- On note d'abord que (Lefevre [9]) :

$$\begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \chi(t) & i \sin \chi(t) & 0 \\ -i \sin \chi(t) & \cos \chi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui, en terme de matrice de Gall-man (λ_i) (généralisation de la base de Pauli à $\text{U}(3)$), devient :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_+(t) &= a(t) e^{i\phi(t)} R_1(\alpha(t)) R_3(\beta(t)) R_1(\theta(t)) \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= a(t) e^{i\phi(t)} e^{i\alpha\lambda_7} e^{i\beta\lambda_3} e^{i\theta\lambda_7} e^{-i\chi\lambda_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁷Sachant que le vecteur contenant a et b est principalement nul, on peut réécrire le produit ne considérant que les deux premières colonnes de R_θ .

3.5 Mon blabla

PROPOSITION 6 — Les signaux bivariés se décrivent très simplement à l'aide des quaternions. En considérant $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ la base canonique des quaternions \mathbb{H} , on peut voir ψ comme étant à valeur dans \mathbb{C}_j^n ($\mathbb{C}_j := \mathbb{R} \times \mathbf{j}\mathbb{R}$), de sorte que :

$$\forall \psi \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{H}), \exists a, \theta, \chi, \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \psi(t) = a(t)e^{\mathbf{i}\theta(t)}e^{-\mathbf{k}\chi(t)}e^{\mathbf{j}\varphi(t)}$$

Sous cette forme, les paramètres a et φ s'interprètent respectivement comme l'amplitude et la phase instantanée du signal. Les deux paramètres restant contrôlent l'ellipticité (χ) et l'orientation (θ) de l'ellipse de polarisation instantanée. C'est-à-dire l'ellipse que suit le signal à l'instant t .

Dit autrement, à tout instant t , $\psi(t)$ est vu comme un point d'une ellipse dont la taille est caractérisée par $a(t)$, l'ellipticité par $\chi(t)$ et l'orientation par $\theta(t)$. $\phi(t)$ permet lui de situer $\varphi(t)$ sur cette ellipse.

Le problème de cette représentation est qu'elle se généralise mal aux signaux plus que 2-variés et, à notre connaissance, il n'existe pas d'extensions des quaternions à de plus haute dimension. voir propositions 7 et 8, ????????

Il est évident que cette représentation est présente bien plus de paramètres que nécessaire, puisque deux devraient suffire. Pour autant, elle permet de mieux **je sais quoi mais c'est sûr qu'il y'a une raison**. Si cette représentation se généralise mal parce qu'elle demanderait d'avoir une extension de \mathbb{H} , sont interprétations graphique, elle, se généralise très bien. Par exemple, en dimension 3, alors l'ellipse devient un ellipsoïde. L'amplitude reste de dimension 1 parce qu'elle ne fait que contrôler la taille de cet ellipsoïde, mais les autres paramètres eux doivent être de dimension 2. L'ellipsoïde a besoin de deux angles pour être orienté, possède deux degrés d'ellipticité et ces points sont déterminés par deux angles.

PROPOSITION 7 — Plus généralement, tout signal multivarié ψ est (*devrait être*) caractérisé par quatre paramètres (donc $1 + (n-1)(\frac{n}{2} - 2)$ scalaires) :

$$a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \quad \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/2, \pi/2]^{\frac{n(n-1)}{2}}) \quad \chi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/4, \pi/4]^{n-1}) \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi]^{n-1})$$

À bien y réfléchir, décrire un ellipsoïde dans l'espace, c'est exactement de quoi font les matrices symétriques définies positives. Donc on pourrait tout à fait remplacer les informations (a, θ, χ) par une matrice symétrique positive de dimension n . Il ne resterait alors plus que φ qui, de toute façon ne devrait pas trop être lié aux autres paramètres.

Enfin, sûrement que si parce qu'il y'a un monde pour $\varphi = 0_{\mathbb{R}}^n$ et c'est le reste des paramètres qui fait le travail. Mais clairement c'est pas intéressant comme description. L'idée serait plutôt décrire le signal ψ en minimisant les variations de (a, θ, χ) . Ça appelle clairement à chercher que dans l'espace de Siegel mais pas seulement, parce que c'est pas juste des chemins chez Siegel qui nous intéressent.

Où alors c'est le jeu de gauge qui fait qu'on tue φ ? auquel cas tous les jours Siegel.

BTW, les quaternions c'est fait pour décrire les rotations et c'est (quasiment) ce qu'on fait avec, donc aller chercher dans un espace de matrices pour généraliser le principe c'est pas déconnant. D'ailleurs, vu que c'est pas exactement ce qu'on fait avec, dans quelle mesure c'est pas le cas et est-ce qu'on exploite vraiment la structure des quaternions ?

PROPOSITION 8 — Autre approche : un signal multivarié étant moralement un chemin de \mathbb{R}^n , son graphe est une variété (plongée) de dimension 1. Sachant cela, si en chaque instant on veut définir l'ellipsoïde sur laquelle elle repose à un instant t , il est moral que cette ellipsoïde soit en fait une ellipse puisque c'est elle-même une variété de dimension 1.

Partant de là, on aurait toujours a , χ et ϕ pour la décrire et seulement θ gagnerait en dimension pour pouvoir orienter l'ellipse dans les n axes. ψ serait alors la donnée de $3 + \frac{n(n-1)}{2}$ paramètres :

$$a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+) \quad \theta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi]^{\frac{n(n-1)}{2}}) \quad \chi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi/4, \pi/4]) \quad \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, [-\pi, \pi])$$

On aurait beaucoup moins de paramètres et c'est quand-même bien. En même temps ça paraît plus contraignant comme modèle. Pour comparer les deux, il faudrait voir comment les deux se décomposent

dans le cas d'un signal qui ne varierait sur une ellipsoïde fixe. *i.e.* dans un cas où θ, χ de la proposition 7 varie pas alors que ceux de la proposition 8 si.

IV — Vrac

4.1 Random stuff ready pour rédac (+labeled)

DÉFINITION 8 (SIGNAL MULTIVARIÉ) — Un *signal multivarié*, ou *n-varié*, est un vecteur composé de $n \in \mathbb{N}^*$ signaux x_i . Si $n = 2$, alors on parle de signal *bivarié*. Dans la continuité de ce qui à été dit dans la ??, dans le cas des signaux réels, on s'intéressera au vecteur composé des transformées en SA (eq. ??, déf. ??) des x_i . **Au moins dans toute cette ??**, un tel signal sera noté :

$$x_+(t) : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ t & \longmapsto & \begin{pmatrix} \mathcal{A}[x_1] \\ \mathcal{A}[x_2] \\ \vdots \\ \mathcal{A}[x_n] \end{pmatrix} \end{array}$$

On supposera que chaque composante x_i de \mathbf{x} aura autant de régularité et de condition d'intégrabilité que nécessaire (**il vaudra préciser lesquelles à un moment**).

DÉFINITION 9 — Ainsi, il reste tout un degré de liberté au produit $\langle x, \dot{x} \rangle$ même si $x \in S^{2n}$. En intégrant ce degré de liberté supplémentaire, c'est-à-dire en tenant compte de son évolution sur la période $[t_0, t]$, l'on obtient ce qui est appeler la *phase dynamique* :

$$\Phi_{\text{dyn}} := \Phi_{\text{dyn}}(t_0, t) = \int_{t_0}^t \Im m \langle \psi(s) | \dot{\psi}(s) \rangle ds$$

Elle dynamique en cela qu'elle est propre au variation de ψ et qu'elle considère tout l'évolution de ψ : ça dynamique.

DÉFINITION 10 (CONNEXION DE BERRY) — On appelle *connexion de Berry* le champ de forme linéaire :

$$\forall \psi \in \mathcal{M}, \quad A_\psi : \begin{array}{ccc} T_\psi \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \longmapsto & \Im m \langle \psi(s) | \phi(s) \rangle \end{array} \quad (3.13)$$

Elle a rien d'une connexion par contre :/

4.2 Bilan des formules

- (conservative) Équation Schrödinger et de Liouville-Von Neumann ($h(R)$: Hamiltonien des paramètres R , W : opérateurs statistique) [1, p.6] :

$$i \frac{dW(t)}{dt} = [h(R), W(t)] \quad [\cdot, \cdot] = \text{commutateur ?} \quad (3.14)$$

- Moment angulaire (viteuf) $\forall z \in \mathbb{C}$:

$$M(t) = \Re e(iz\bar{z}') = -\Im m z\bar{z}' \quad \text{thoughts ?} \quad (3.15)$$

- qui est quelle phase
- mail à berthier pour les contraintes rapport
-

TABLE DES FIGURES

1.1	Déviati��n de la phase dynamique par rapport �� la phase totale	8
1.2	Ellipse de polarisation d'un signal bivarié réel	9
1.3	Sphère de Poincaré, blablabla	10
2.1	Ruban de Mobius comme variété fibrée	18
2.2	Repr��sentati��n d'une section local	18
2.3	Repr��sentati��n de la section canonique	18
3.1	Schéma de Bohm [1] sur les trois phases	25

TABLE DES CODES

RÉFÉRENCES

- [1] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [2] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [3] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [4] F. FAURE, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).
- [5] J. FLAMANT, N. LE BIHAN, AND P. CHAINAIS, *Time-frequency analysis of bivariate signals*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 46 (2019), pp. 351–383.
- [6] J. LAFONTAINE, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [7] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [8] ———, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.
- [9] J. LEFEVRE, *Polarization analysis and optimization geometry*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....] ; University of Melbourne, Dec. 2021.
- [10] J. M. LILLY, *Modulated Oscillations in Three Dimensions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 59 (2011), pp. 5930–5943.
- [11] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [12] J. E. MARSDEN AND T. S. RATIU, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, vol. 17 of Texts in Applied Mathematics, Springer New York, New York, NY, 1999.
- [13] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [14] ———, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. II. The Case of Unitary Group Representations*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 269–340.
- [15] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.