Mémoire de Stage de M2

Phase Géométrique de Signal Multivarié
et puis c'est déjà pas mal

Grégoire Doat

Encadré par Nicolas Le Bihan, Pierre-Olivier Amblard, Julien Flamant & Michel Berthier

Master Mix – Université de La Rochelle

2024 – 2025

Introduction

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui demande beaucoup de contexte pour être expliqué. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant t d'un signal complexe ψ est donné par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) = \arg \big\langle \psi(t), \psi(t_0) \big\rangle \Im m \int_{t_0}^{t} \frac{\big\langle \dot{\psi}(s), \psi(s) \big\rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\psi(t) \ \rightsquigarrow \ \psi'(t) = e^{i\alpha(t)} \psi(t)$$

Cette propriété rend la phase Φ_{geo} intrinsèquement liée à la trajectoire que prend la projection de ψ dans l'espace projectif complexe $\mathrm{P}\mathbb{C}^{n-1}$ et par conséquence, à la géométrie de ce dernier, d'où son nom.

Ceci à largement été étudié dans le carde de système dynamique régis par EDP [4, 11], notamment en mécanique quantique avec l'équation Schrödinger [1, 12, 13]. Ce n'est que récemment que Le Bihan, Flamant et Amblard se sont intéressés à son application en traitement du signal dans le cas de signaux bivariés [6, 7].

[...]

Notations et conventions

Objet/fonction	Notation
Conjugué complexe	$\overline{x}$
Transposée (resp. adjoint) de la matrice A	${}^tA$ (resp. $A^\dagger$)
Distribution de Dirac	δ
Indicatrice de E	$\mathbb{1}_E$
Fonction signe	$\mathrm{sign}(x)$
Transformée de Fourier	$\mathcal{F}[x]$, $\hat{x}$
Transformée en SA	$\mathcal{A}[x]$
Transformée de Hilbert	$\mathcal{H}[x]$
Produit hermitien	$\langle\cdot,\cdot\rangle$
Espérance et variance de f suivant ρ	$\mathbb{E}_\rho[\,f(t)\,]$, $\mathbb{V}_\rho[\,f(t)\,]$
Espace des fonctions p.p. de puissance p^{eme} intégrable à valeur de E dans F	$L^p(E,F)$
Support d'une fonction f	$\mathrm{supp}\, f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$
Matrice de rotation de paramètre Θ (resp. d'angle θ en dimension 2)	R_Θ (resp. R_θ)
Ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$)
Ensemble des matrices hermitiennes (resp. anti-hermitiennes) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$)

Note générale

- les références sont en fin de mémoire est en .bib sur le GitHub
- Idem pour les codes et un mot sur `pygeomphase`
- En italique sont les notes un peu plus informelle
- Y'a des annexes pour chaque partie mais ce sera précisé si elles sont nécessaire pour suivre
- On va parler de géo diff et pour éviter de réécrire un livre, on va admettre beaucoup de résultats, on renvoit vers [5] (mets en d'autre) pour une introduction extensive à la théorie

Notations math :

- Convention sur le produit hermitien (congué à droite)
- les vecteurs seront le plus souvent en gras, leur dérivée en temps noté par un point (ex. : $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$) et celle des scalaires seront noté par un prime (ex. : $a'(t)$)
- convention de sommation d'Einstein ? (oui mais est-ce qu'on en parle maintenant)

Tables des Matrières

Partie I

Aspects Géométriques d'une Phase Éponyme

I — Prérequis

Dans notre cas, tout s'écrit très simplement donc pas besoin de sortir tout l'arsenal de géo diff

1.1 — Espace projectif complexe

1.2.1 — Construction de $\mathrm{P}\mathbb{C}^{n-1}$

- Définition comme espace quotient $\mathrm{S}^{2n-1}/\mathrm{U}(1)$
- lien avec la projection $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^\dagger$
- $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ vue comme variété différentielle complexe (voir annexe pour détails)

1.2.2 — Métrique de Fubini-Study

- Métrique induite par la projection
- expression de la métrique
- expression en coordonnée local

1.2 — Fibré principaux

1.1.1 — Fondamentaux

- Définitions de base
- Section local (canonique)
- changement de carte

1.1.2 — Espaces horizontaux et connexion

- Espace verticaux
- connexion comme ensemble d'espace horizontaux
- 1-forme de connexion
- notre choix de connexion (induite par le produit hermitien)

II — Interprétation géométrique des trois phases

2.1 — Cas des signaux "pseudo-cyclique" (cyclique à phase près)

- Le dessin de Bohm :
- phase dyn = signal - horizontal lift
- phase geo = horizontal lift - cyclique lift (<- indé du signal !)
- phase tot = cumul des deux

2.2 — La phase géo dans l'espace projectif

- Géodésique de $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ et généralisation du cas pseudo-cyclique
- Remarque de Mukunda : phase géo est une 2-forme vs phase dyn est une 1-forme
- Bonnet-Gauss & Stokes : phase géo comme calcul d'air
- *Comme partie imaginaire de la métrique (+ lien avec Fisher)*

Annexes

A — Forme différentielles *(nécessaire ?)*

B — Algèbre et groupe de Lie

- def : groupe de Lie G
- def : Algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ associée à G
- $\mathfrak{g}$ vu comme tangent $\mathrm{T}_e G$
- Cas particulier : $G = \mathrm{U}(1)$

C — Variétés différentielles complexe

- Complexification de TM
- L'intérêt de faire ça : proprement définir $\partial/\partial\bar{z}$
- Exemple : écriture de forme de Kahler de Fubini-Study

Pour étudier la phase géométrique d'un signal ψ, il nous faut projeter ψ sur $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$, et ceux, tout en gardant une trace de sa phase puisque c'est le lien entre les deux qui nous intéresse. Il nous faut donc envoyer ψ dans le produit :

$$\mathrm{U}(1) \times \mathrm{P}\mathbb{C}^n \qquad\qquad (\text{ou} \;\; \mathbb{C}^{n-1*}/\mathbb{C}^*)$$

Garder le lien entre cet espace et celui d'origine mène à se placer dans le cadre avec d'un *variété fibrée* (ou simplement fibré). Plus précisément, comme $\mathrm{U}(1)$ est un groupe de lie, ce sera un *fibré principal* noté $\mathrm{S}^{2n-1}\big(\mathrm{U}(1), \mathrm{P}\mathbb{C}^n\big)$.

Comme son nom l'indique, $\mathrm{S}^{2n-1}\big(\mathrm{U}(1), \mathrm{P}\mathbb{C}^n\big)$ à une structure de variété différentielle et le lien entre les $\mathrm{U}(1)$ et $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ va se faire par le biais d'une connexion. L'on verra alors que cette connexion est intrinsèquement lié à la phase dynamique du signal, et il sera discuté de la signification de ce résultat.
La phase géométrique, quand à elle, sera liée avec la métrique hermitienne associée aux l'espaces projectifs complexes.
Tout cela va demander quelques prérequis que nous allons voir à présent.

I — Prérequis mathématique

1.1 Variété fibrée principale

Pour le dire simplement, les *variétés fibrés* sont des variétés qui ressemble localement à des espaces produits. Le ruban de Modiüs en est un exemple typique : il ne peut pas s'écrire comme le produit d'un cercle avec un segment $\mathrm{S}^1 \times [0, 1]$ à cause de la façon dont il est construit. Mais localement, le ruban est tout à fait comparable (difféomorphe) à un tel produit (*cf. fig. 1.3*).

fig. 1.1 — Fibration du ruban de Mobiüs.

fig. 1.2 — Représentation d'un fibré principale

Il exsite toutes sorte de variétés fibrées dès lors qu'elles sont munies de structure remarquable. Celle qui vont nous intéresser sont les variétés dites principales[1] :

> Définition 1 (Variété fibrée principale) — Une *variété fibrée principale*(VFP), ou *fibré principal* est constituée de deux variétés différentielles P et B telles que :
>
> - Il existe un groupe de Lie G opérant à droite (ou à gauche) sur P via une application différentiable :
>
> $$\phi \;:\; \begin{array}{ccc} P \times G & \longrightarrow & P \\ (p, g) & \longmapsto & \phi(p, g) := pg = p \cdot g \end{array} \tag{1.1}$$
>
> - Il existe une surjection différentiable $\pi : P \longrightarrow B$ telle que :
>
> $$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}\big(\pi(p)\big) = pG \tag{1.2}$$

[1] *Bien que ce ne sera pas précisé, il sera toujours sous-entendu que les différentes variétés et cartes doivent avoir les mêmes niveaux de régularités pour que le tout reste cohérent.*

- P est munie d'un ensemble de paire (U_i, h_i) tel que les U_i forment un recouvrement de B et tel que les $h_i : G \times U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset P$ soient des difféomorphismes vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \ \forall x \in B, \qquad h_i(ab, x) = h_i(a, x)b \qquad \text{et} \qquad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

On dit alors que B est la *base* de la VFP, que G est son *groupe structural* et pG est la *fibre de P passant par p* et *au dessus de* $\pi(p) \in B$. Le tout est notée $P(\phi, G, \pi, B)$ ou plus simplement $P(G, B)$.

L'ensemble $\big\{(U_i, h_i)\big\}_i$ est l'équivalent d'un atlas pour les variétés différentielles classiques mais adapter pour tenir compte de la structure fibré de P et de l'action de G. Explicité les changements de cartes dans P, ce fait comme suit.

D'abord, P étant localement difféomorphe à un produit $G \times U_i$, on peut y tracer des graphes appelés *sections locales*, comme sur la figure *1.2 ci-dessous*. Formellement, une section locale au dessus de U_i est une application $\sigma : U_i \subset B \longrightarrow P$ vérifiant :

$$\pi \circ \sigma = id_{|U_i}$$

Ensuite, les hypothèses sur $P(G, B)$ sont telles que G agit transitivement et librement (ou sans point fixe)

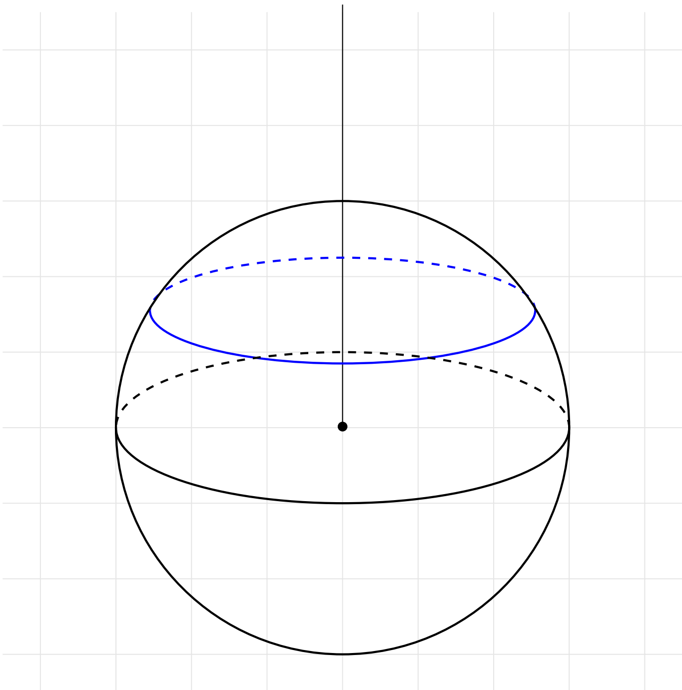

fig. 1.3 — Fibration du ruban de Mobiüs.

sur P. C'est-à-dire que, sur une même fibre, tout point peut être atteint par tout autre via l'action de G (transitivité) :

$$\forall x \in B, \quad \forall p, q \in P_x, \ \exists t(p, q) \in G \mid p = qt(p, q)$$

et que le seul moyen laisse les points invariants par cette même action est de passer par l'élément neutre e (libre) :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad p = pg \implies g = e$$

De la transitivité de G, découle le fait que toutes les sections locales σ au dessus de U_i peuvent s'écrire à partir d'une même section σ_i via la formule :

$$\forall x \in B, \qquad \sigma(x) = \sigma_i(x) t\big(\sigma_i(x), \sigma(x)\big)$$

Son caractère libre, lui assure l'unicité d'un choix canonique de section σ_i sur U_i. Elle est donnée par :

$$h_i(x, e) = \sigma_i(x)$$

Cela mène à la définition :

Définition 2 (Fonctions de transitions) — L'intersection de deux cartes est noté $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et le passage d'une section local canonique est donné par :

$$\forall x \in U_{ij}, \qquad \sigma_j(x) = \sigma_i(x) t\big(\sigma_i(x), \sigma_j(x)\big)$$

L'élément de G, $t(\sigma_i, \sigma_j)$, est alors appelé *fonction de transition* et est noté φ_{ij}. Elle fait effectivement la transition entre deux cartes dans le sens où :

$$\forall (g, x) \in G \times U_{ij}, \qquad {h_i}^{-1} \circ h_j(g, x) = \big(\varphi_{ij}(x) g, x\big)$$

$$\begin{tikzcd}
 & G \times B \arrow[dl, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\
G \arrow[r, "\phi"'] & P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & B \\
 & P/G \arrow[ur, "\overline{\pi}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & U_i & \\
G \times U_i \arrow[ur, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_i) \subset P \arrow[ul, "\pi"'] \arrow[dl, "\rho"] \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

fig. 1.4 — Digrame surement osef des jeux de projections entre P est les cartes locales

- espace tangent
- séparation en vertical $\oplus$ horizontal
- pourquoi la découpe est pas canonique
- reformulation en terme de 1-forme
- connexion en coordo local
- toujours pas canonique tho

Proposition 1 — Une 1-forme de connexion $\mathcal{A}$, noté $\mathcal{A}_i$ en coordonnée local sur la carte U_i, doit vérifier le changement de coordonnée :

$$\varphi_{ij} \mathcal{A}_j = \mathcal{A}_i \varphi_{ij} + \mathrm{d}\varphi_{ij}$$

1.2 Espaces projectifs complexes

Les espaces projectifs complexes se construisent ainsi. On se place dans $\mathbb{C}^{n+1^*} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n+1}}\}$ avec la relation d'équivalence, $\forall x, y \in \mathbb{C}^{n+1^*}$:

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid x = \lambda y$$

L'espace projectif complexe, noté $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ est l'espace quotient :

$$\mathrm{P}\mathbb{C}^{n-1} = \mathbb{C}^{n+1^*} / \mathbb{C}^* = \mathbb{C}^{n+1^*} / \sim$$

En notant $[z]$ la classe de $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ du représentant $z = (z^i)_{0 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{C}^{n+1^*}$, on définit les ensembles et cartes, $\forall i \in [\![0, n]\!]$:

$$U_i = \Big\{ [z] \in \mathrm{P}\mathbb{C}^n \;\Big|\; z^i \neq 0 \Big\} \qquad\qquad \phi_i \;:\; \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^i \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-i} \cong \mathbb{C}^n \\ [z] & \longmapsto & \dfrac{1}{z^i}\big(z_0, \cdots, 1, \cdots, z_n\big) \end{array} \tag{1.3}$$

L'ensemble d'arrivé $\phi_i(U_i)$ est de dimension n et s'assimile à $\mathbb{C}^n$ mais, par souci de comodité, on restera dans $\mathbb{C}^{n+1}$. Cela permet d'écrire plus simplement les formules de changement de carte en évitant de devoir enlever et rajouter des coefficients :

$$\forall [z] \in U_i \cap U_j, \qquad \phi_i \circ {\phi_j}^{-1}(z) = \frac{z^j}{z^i} z \qquad\qquad (z^{i,j} \neq 0)$$

Les (U_i, ϕ_i) forme un atlas holomorphe sur l'espace projectif complexe, faisant de $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ une variété complexe de dimension $\dim_{\mathbb{C}} = n$ (voir annexe **??** pour plus de détail).

Proposition 2 — La $2n+1$–sphère S^{2n+1} est un espace fibré de base $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ est de fibre type S^1, ou $\mathrm{U}(1)$. La fibration étant la projection canonique :

$$\pi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathrm{S}^{2n+1} & \longrightarrow & \mathrm{P}\mathbb{C}^n \\ x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

Voir [5] pour la démo

Proposition 3 — $\mathrm{P}\mathbb{C}^n$ admet une métrique hermitienne induite par la métrique de S^{2n+1}, elle même induite du produit scalaire sur $\mathbb{R}^{2n+1}$. Elle est appelé *métrique de Fubini-Study* et est donnée par le formule :

II — Interprétation des trois phases dans ce cadre

2.1 Cas pseudo-cyclique

Annexe

Annexe A — Variété différentielle complexe, tiré de [13]

Pour mémoire, une variété différentielle de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) de dimension n est un espace topologique[2] $\mathcal{M}$ (ou $\mathcal{M}^n$) munie d'un *atlas* $(\phi_i, U_i)_{i\in I}$, c'est-à-dire un ensemble finie de pair d'ouvert $U_i \subset \mathcal{M}$ et d'application $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

- les U_i forme un recouvrement de la variété : $\bigcup_{i\in I} \phi_i(U_i) = \mathcal{M}$
- les ϕ_i sont des homéomorphismes sur leur image $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^4$.
- si l'intersection $U_i \cap U_j$ est non vide, alors $\phi_j \circ {\phi_i}^{-1}{}_{|\phi_i{}^{-1}(U_i \cap U_j)}$ est un C^k difféomorphisme sur son image.

$\mathcal{M}$ sera une *variété différentielle complexe* si elle satisfait les propriétés ci-dessus où $\mathbb{R}^n$ est remplacé par $\mathbb{C}^n$ et où la condition de difféomorphisme est remplacé par la condition d'holomorphisme.
Une application $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ étant holomorphe si chacune de ses composantes vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \forall \mu, \qquad \frac{\partial f}{\partial y^\mu}(x+iy) = i\frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x+iy)$$

Les fonctions holomorphes étant automatiquement C^∞, les variétés différentielles complexes sont toujours lisse, c'est-à-dire C^∞. Aussi, $\mathcal{M}$ est dite de dimension complexe n et dimension (réel) $2n$, notés :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) := n \qquad\qquad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) := \dim(\mathcal{M}) = 2n \tag{1.4}$$

Ensuite, pour le dire rapidement, la structure complexe de $\mathcal{M}$ permet de séparer les espaces tangents en deux sous espaces. Pour ce faire, on commence par noter qu'en tout point $p \in \mathcal{M}$ de coordonnée $z^\nu = x^\nu + iy^\nu$, l'espace tangent $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$, vu comme variété réelle, admet une base :

$$\mathrm{T}_p\mathcal{M} = \mathrm{Vec}\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y^n}\right\} \tag{1.5}$$

Plus tôt que de se basé sur les x^μ et y^μ pour séparer les $\mathrm{T}_p\mathcal{M}$, on définit sur ces derniers un tenseur J_p de type (1,1) tel que :

$$J_p\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \qquad\qquad J_p\frac{\partial}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{1.6}$$

Ce tenseur est l'équivalent de la multiplication par $\pm i$ et le fait que $\mathcal{M}$ soit complexe assure qu'il soit défini globalement, *i.e.* sur $\mathrm{T}\mathcal{M}$. Il est diagonaliseable dans la base :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial z^\mu} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right) \qquad\qquad \partial_{\bar\mu} = \frac{\partial}{\partial \bar z^\mu} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right) \tag{1.7}$$

Ainsi en fonction de la base ((1.4) ou (1.7)), J_p va s'écrire :

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad J_p = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Finalement, $\mathrm{T}\mathcal{M}$ peut être séparé en deux sous-espaces engendré respectivement par les ∂_μ et $\partial_{\bar\nu}$. On parle de vecteur holomorphe et anti-holomorphe et on note :

$$\mathrm{T}_p\mathcal{M}^+ = \mathrm{Vec}\big\{\partial_\mu \mid 1 \leqslant \mu \leqslant n\big\} \qquad\qquad \mathrm{T}_p\mathcal{M}^- = \mathrm{Vec}\big\{\partial_{\bar\mu} \mid 1 \leqslant \mu \leqslant n\big\} \tag{1.9}$$

[2] *La topologie de $\mathcal{M}$ doit vérifier des propriétés type séparable, dénombrable à l'infinie, etc., qui seront toutes admises dans la suite, voir par exemple [5, chap. 2]*

- qui est quelle phase
- mail à berthier pour les contraintes rapport

Table des Figures

Table des Codes

Références

[1] A. Bohm, A. Mostafazadeh, H. Koizumi, Q. Niu, and J. Zwanziger, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.

[2] C. Cano, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.

[3] L. Cohen, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.

[4] F. Faure, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).

[5] J. Lafontaine, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.

[6] N. Le Bihan, J. Flamant, and P.-O. Amblard, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.

[7] ——, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.

[8] J. Lefevre, *Polarization analysis and optimization geometry*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....] ; University of Melbourne, Dec. 2021.

[9] J. M. Lilly, *Modulated Oscillations in Three Dimensions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 59 (2011), pp. 5930–5943.

[10] J. M. Lilly and S. C. Olhede, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.

[11] J. E. Marsden and T. S. Ratiu, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, vol. 17 of Texts in Applied Mathematics, Springer New York, New York, NY, 1999.

[12] N. Mukunda and R. Simon, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. II. The Case of Unitary Group Representations*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 269–340.

[13] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.