

Mémoire de Stage de M2

PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Michel BERTHIER, *et al.*

Master MIX - Université de La Rochelle

2024 - 2025

TABLES DES MATIÈRES

Introduction	1
-------------------------------	----------

Indexe des notations	2
---------------------------------------	----------

PARTIE	I	—	PHASE ET FRÉQUENCE INSTANTANÉE D’UN SIGNAL	3
---------------	----------	---	---	----------

I	—	Paramètre instantanée dans la cas complexe		3
		1.1 Quelques définitions		3
		1.2 Amplitude, phase et fréquence instantanée		4
II	—	Transformée en signal analytique		5
		2.1 Le problème de signaux réels et comment le résoudre		5
		2.2 Interprétabilité de la transformée en SA.		6
III	—	Généralisation aux signaux multivariés		9
		3.1 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié		9
		3.2 Apparition de la phase géométrique.		12
Annexe	—	Complément sur l’analyse temps-fréquence		13
	A	Un bon moment...		13
	B	Transformée inverse de la fonction de Heaviside.		15

PARTIE	II	—	DESCRIPTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE	17
---------------	-----------	---	--	-----------

I	—	Etude du cas pseudo-cyclique		17
		1.1 S^n vu comme variété fibrée principale.		17
II	—	Prérequis mathématique — send to appendix		17
		2.1 Variété différentielle complexe, tiré de [11]		17
		2.2 Variété fibrée principale		18
		2.3 Espaces projectifs complexes		20

INTRODUCTION

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui demande énormément de prérequis pour être expliqué proprement. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant t d'un signal complexe ψ est donné par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) = \arg \langle \psi(t), \psi(t_0) \rangle + \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \psi(s), \dot{\psi}(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\psi(t) \rightsquigarrow \psi'(t) = e^{i\alpha(t)} \psi(t)$$

Cette propriété rend la phase Φ_{geo} intrinsèquement liée à la trajectoire que prend la projection $[\psi] \in \mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ de ψ dans l'espace complexe. En d'autre terme à la géométrie de l'espace projectif $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, d'où son nom.

Cela étant dit, ces résultats ont toujours été décrit, à notre connaissant, dans le cadre de système dynamique régis par une EDP (généralement Schrödinger). L'objectif de ce mémoire sera donc de décrire ce phénomène pour un signal quelconque et ceux avec une approche géométrique.

Cela demandera de faire appelle, entre autre, à des outils de variété différentielle complexe et fibrée principale ; et comme il serait inapproprié de considérer que le lecteur a toutes les bases nécessaire sur le sujet, des **nombreuses** annexes seront dédiées aux mathématiques utile à cette fin.

... sûrement plus de blabla pour détailler le plan du mémoire...

INDEXE DES NOTATIONS

OBJET/FONCTION	NOTATION
Conjugué complexe	\bar{x}
Transposée (resp. adjoint) de la matrice A	${}^t A$ (resp. A^\dagger)
Distribution de Dirac	δ
Indicatrice de E	$\mathbb{1}_E$
Fonction signe	$\text{sign}(x)$
Transformée de Fourier	$\mathcal{F}[x], \hat{x}$
Transformée en SA	$\mathcal{A}[x]$
Transformée de Hilbert	$\mathcal{H}[x]$
Produit hermitien	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Espérance et variance de f suivant ρ	$\mathbb{E}_\rho[f(t)], \mathbb{V}_\rho[f(t)]$
Espace des fonctions p.p. de puissance p^{eme} intégrable à valeur de E dans F	$L^p(E, F)$
Support d'une fonction f	$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$
Matrice de rotation de paramètre Θ (resp. d'angle θ en dimension 2)	R_Θ (resp. R_θ)
Ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$)
Ensemble des matrices hermitiennes (resp. anti-hermitiennes) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$)

PARTIE I

PHASE ET FRÉQUENCE INSTANTANÉE D'UN SIGNAL

Les deux premières section de cette partie sont fortement inspirées des propos de COHEN dans son livre Time frequency analysis [3], chapitre 1 & 2.

I — Paramètre instantanée dans la cas complexe

1.1 Quelques définitions

Soit x un signal complexe dont \hat{x} ou $\mathcal{F}[x]$ est la transformée de Fourier (dont on supposera quelle existe, ici au moins $x \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$) :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & x(t) \end{array} \qquad \mathcal{F}[x] = \hat{x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \nu & \longmapsto & \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \end{array}$$

Avant de parlé de fréquences instantanée, il nous faut introduire quelle que définition afin de pouvoir proprement argumenter sa définition. Tout d'abord, à x sont associées deux densités d'énergie :

DÉFINITION 1 (DENSITÉS D'ÉNERGIE) — La *densité d'énergie* (resp. *spectrale*) du signal x , noté ρ (resp. ϱ), est définie comme :

$$\rho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & |x(t)|^2 \end{array} \qquad \varrho : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ \nu & \longmapsto & |\hat{x}(\nu)|^2 \end{array} \quad (1.1)$$

La transformée de Fourier étant une isométrie de l'espace $L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'*énergie totale* $E(x) = \|x\|_{L^2}^2$ du signal est indépendante de la représentation de ce dernier (temporelle ou spectrale) :

$$E(x) := \int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \varrho(\nu) d\nu \quad (1.2)$$

La première densité, $\rho(t)$, correspond à la puissance (énergie par unité de temps) déployée pour émettre le signal à l'instant t et la seconde, $\varrho(\nu)$, à l'énergie associée à la fréquence ν sur tout le signal. Par exemple, si $x(t) = e^{2\pi i \nu_0 t}$, alors $\hat{x}(t) = \delta(x - \nu_0)$ et on a les densités :

$$\rho(t) = 1 \qquad \varrho(\nu) = \delta(\nu - \nu_0)$$

On comprend alors que, du point de vu temporel, le signal a été émis avec une puissance régulière, mais le fait que ϱ soit un dirac indique que toute l'énergie du signal est concentré en une unique fréquence ν_0 .

Les espérances et écart-type on également une interprétation physique :

DÉFINITION 2 (DURÉE ET LARGEUR DE BANDE) — L'espérance ces densités, pour peu qu'elles existent, sont notées :

$$\mathbb{E}_\rho[t] := \int_{\mathbb{R}} t |x(t)|^2 dt \quad \mathbb{E}_\varrho[\nu] := \int_{\mathbb{R}} \nu |\hat{x}(\nu)|^2 d\nu$$

Si un signal est localisé temporellement, alors la première espérance/moyenne donne une idée de l'instant d'émission du signal. Si *a contrario*, le signal est localisé en fréquence, la seconde espérance peut s'interpréter comme la fréquence "dominante" du signal, ou plus généralement comme sa *fréquence moyenne*.

En particulier, et ce sera important pour la suite, dans le cas des signaux réels, l'espérance de ϱ est toujours nulles.

On note de même les variances (toujours à condition d'existence) :

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_\rho[t] &:= \mathbb{E}_\rho \left[(t - \mathbb{E}_\rho[t])^2 \right] & \mathbb{V}_\varrho[\nu] &:= \mathbb{E}_\varrho \left[(\nu - \mathbb{E}_\varrho[\nu])^2 \right] \\ &= \mathbb{E}_\rho[t^2] - \mathbb{E}_\rho[t]^2 & &= \mathbb{E}_\varrho[\nu^2] - \mathbb{E}_\varrho[\nu]^2 \end{aligned}$$

Les écart-types associés sont plus facilement interprétable. Le premier est appelé *durée d'émission* du signal, puisqu'il renseigne l'étalement temporelle du signal ; et le second *largeur de bande (fréquentielle)* puisque, lui, renseigne l'étalement fréquentielle.

Ces interprétations reste limité à des cas particulier. Par exemple, et nous y reviendrons, si le support de \hat{x} n'est pas connexe, alors la fréquence moyenne devient beaucoup moins pertinente parce qu'elle à toutes les chances de donnée une fréquence qu'il n'est pas dans le support de \hat{x} . Idem pour la largeur de bande qui, dans ce cas, aura plutôt tendance à donnée la distance entre la première et la dernière composante connexe.

1.2 Amplitude, phase et fréquence instantanée

Dans le cas des signaux purement complexe, sont très naturellement définit les notions d'*amplitude* et de *phase instantanée* puisqu'elles correspondent respectivement au module et à l'argument de x à l'instant t . Dans le cas le plus simple, où $x(t) = e^{2\pi i \nu t + \varphi}$, la fréquence ν du signal peut s'écrire comme la dérivée :

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} (2\pi \nu t + \varphi) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg x(t)$$

Cela invite poser les définitions suivantes :

DÉFINITION 3 — Étant donnée un signal $x : t \mapsto a(t)e^{i\phi(t)}$, on appelle a l'*amplitude instantanée* du signal x , ϕ sa *phase instantanée* et respectivement ϕ' et $1/2\pi\phi'$ son *impulsion* et *fréquence instantanée*.

Pour mieux justifier ces choix de définition, considérons la proposition suivante :

PROPOSITION 1 — Si ϱ admet une espérance, que x est dérivable et que l'on note : alors a et ϕ hérite des régularité de x et on a l'égalité (cf. section A pour une démonstration) :

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho[\phi'] \quad (1.3)$$

De même pour la variance de ϱ :

$$\mathbb{V}_\varrho[\nu] = \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho[(\ln a)'] + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho[\phi'] \quad (1.4)$$

La première égalité (1.3) montre que la moyenne (temporelle) de la fréquence instantanée est égale à la fréquence moyenne (au sens de Fourier). Exprimer ainsi cela paraît évident, ce qui est tout à fait rassurant.

Pour la seconde (1.4), on constate deux composantes (qui, par ailleurs, sont des variances purement temporelle). La première ne porte que sur l'amplitude du signal, et inversement, l'amplitude n'apparaît que sur la première. Il donc cohérent que le terme restant, *i.e.* là où apparaît ϕ' , porte l'information fréquentielle du signal.

II — Transformée en signal analytique

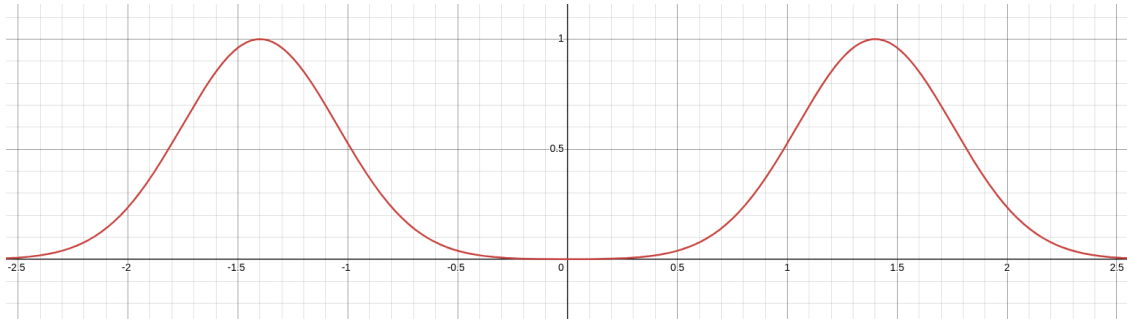
Maintenant que la fréquence instantanée est proprement définie pour les signaux complexes, il nous faut adresser le cas réel.

2.1 Le problème de signaux réels et comment le résoudre

D'abord, du point de vue de l'analyse temps-fréquence, les signaux réels sont problématiques car leur spectre sont à symétrie hermitienne et leur densité spectrale symétrique :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, x(t) \in \mathbb{R} &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \hat{x}(-\nu) = \overline{\hat{x}(\nu)} \\ &\implies \forall \nu \in \mathbb{R}, \varrho(-\nu) = \varrho(\nu) \end{aligned}$$

Comme mentionné plus haut, cela implique que la fréquence moyenne de tout signal réel est nulle (intégrale d'une fonction impaire). Ce qui, en plus de ne pas être très instructif, n'est pas cohérent avec l'interprétation physique qu'on voudrait faire cette moyenne. Par exemple, si ϱ prend la forme ci-dessous (*fig. 1.1*), alors il serait plus naturelle de demander à ce que la fréquence moyenne se trouve autour de **1,4**. De même, la largeur de bande spectrale ne correspond plus à l'étalement de chaque gaussienne, mais plutôt à leur espacement.



*fig. 1.1 — Exemple de densité spectrale d'un signal réel **ESP A 1,4***

Même problème avec la covariance : sachant l'égalité des deux notions de fréquences moyenne (équation (1.3), proposition 1), on peut définir la covariance temps-fréquence d'un signal x par :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(x) &:= \text{Cov}(t, \phi'(t)) = \mathbb{E}_\rho[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_\rho[t]\mathbb{E}_\rho[\phi'(t)] \\ &= \mathbb{E}_\rho[t\phi'(t)] - \mathbb{E}_\rho[t]\mathbb{E}_\varrho[\nu] \end{aligned}$$

Ce coefficient est sensé mesurer une corrélation entre l'évolution d'un signal au cours du temps avec ses fréquences. S'il est réel, alors $\text{Cov}(x)$ sera toujours nulle ; de là à en conclure que la fréquence instantanée de n'importe quel signal (réel) est toujours décorrélée du temps serait, pour le moins, insatisfaisant.

Pour résoudre le problème, une méthode consiste à construire un nouveau signal $\mathcal{A}[x]$ en supprimant les fréquences négatives de x :

$$\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}\hat{x}$$

où $\mathbb{1}_E$ est la fonction indicatrice sur l'ensemble E et où le facteur 2 assure la conservation de l'énergie du signal. Cela mène à la définition :

DÉFINITION 4 (TRANSFORMÉE DE HILBERT ET EN SA) — On appelle *transformé de Hilbert* de x , l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{H}[x] : t &\longmapsto \frac{1}{\pi} \oint_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds \end{aligned} \quad (1.5)$$

où l'intégrale barrée représente la *valeur principale de Cauchy* (voir section B pour plus de détail) :

$$\oint_{\mathbb{R}} \frac{x(s)}{t-s} ds := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

Avec, on définit la *transformée en signal analytique* (SA) de tout signal x comme l'unique application $\mathcal{A}[x]$ telle que $\mathcal{F}[\mathcal{A}[x]] = 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x}$. Elle est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \mathcal{A}[x] : t &\longmapsto x(t) + i\mathcal{H}[x](t) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Plus généralement, tout signal dont le spectre est à support dans \mathbb{R}^+ sera dit *analytique*.

Pour mieux comprendre ce que fait la transformation en signal analytique, revenons sur la notion de fréquence instantanée pour les signaux réels.

2.2 Interprétabilité de la transformée en SA

Pour définir l'amplitude et la phase instantanée d'un signaux réel, on par a nouveau du cas le plus simple. Si x est un signal pur, il va s'écrire :

$$x(t) = a \cos(2\pi\nu t + \varphi), \quad a, \nu, \varphi \in \mathbb{R}$$

Pour généraliser cette écriture, il suffit donc de poser les amplitude et phase instantanée a et ϕ telles que :

$$x(t) = a(t) \cos(\phi(t))$$

Contrairement au cas complexe, ici la pair (a, ϕ) n'est pas unique et pour contraindre ce choix, on s'appuie sur la transformée $\mathcal{A}[x]$. Sachant que, dans le cas $x(t) \in \mathbb{R}$, la transformée de Hilbert est à valeur dans \mathbb{R} (intégrale d'une fonction réelle), on a :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} \implies \begin{cases} x(t) = \Re \mathcal{A}[x] = a(t) \cos \phi(t) \\ \mathcal{H}[x](t) = \Im \mathcal{A}[x] = a(t) \sin \phi(t) \end{cases}$$

D'où la définition :

DÉFINITION 5 (AMPLITUDE ET PHASE INSTANTANÉE) — L'*amplitude instantanée* a_x et la *phase instantanée* ϕ_x de tout signal x réel sont définies comme étant respectivement l'amplitude et la phase de $\mathcal{A}[x]$:

$$a_x = |\mathcal{A}[x]| \quad \phi_x = \arg(\mathcal{A}[x]) \quad (1.7)$$

De même, les *impulsion* et *fréquence instantanée* sont données par ϕ'_x et $1/2\pi\phi'_x$.

Si un signal est présenté sous la forme $x = a \cos \phi$, rien n'implique que a et ϕ correspondent bel et bien à l'amplitude et la phase instantanée. Si ce n'est pas le cas, c'est que cette décomposition n'est "pas la bonne", en cela qu'elles ne s'interprètent pas comme l'on aimerait.

Aussi, quand bien même x peut toujours être écrit comme partie réel de sa transformé en SA, cette écriture

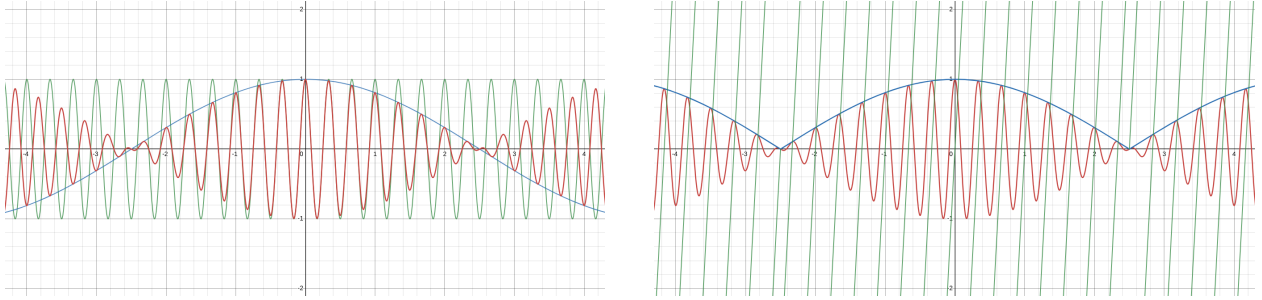


fig. 1.2 — Représentation graphique du signal x (rouge) avec $\nu_1 = 3$ et $\nu_2 = 0.1$. Sur l'image de gauche, avec signaux de fréquences pures (bleu et vert). Sur l'image de droite, avec son amplitude (bleu) et sa phase instantanée (vert). Les discontinuités de la phase sont dû à l'arrondi à 2π près de l'argument de $\mathcal{A}[x_1]$ et à la façon dont il est calculé lorsque le signal s'annule (mise à 0). Voir [ici](#) pour un graphique dynamique.

n'est nécessairement toujours satisfaisante. Pour le comprendre, détaillons le cas où x s'écrit comme produit de deux signaux pures (fig. 1.2) :

$$x_1(t) = \cos(2\pi\nu_1 t) \cos(2\pi\nu_2 t)$$

On montre sans mal¹ que si $\nu_1 \geq \nu_2$, alors la transformée en SA de x_1 s'écrit :

$$\mathcal{A}[x_1] = \cos(2\pi\nu_2 t) e^{2\pi\nu_1 t}$$

Le signal $\mathcal{A}[x_1]$ n'est ici pas sous forme exponentielle à proprement parler puisque le cosinus peut être négatif (pour s'y ramener, il suffit de passer le cos en valeur absolue et d'ajouter π à l'argument lorsque nécessaire) mais l'avantage de cette forme est qu'elle fait clairement apparaître les fréquences $\nu_{1,2}$. En particulier, la fréquence instantanée du signal est la plus grande des deux fréquences ν_1 et ν_2 . La plus petite, elle, se retrouve dans l'amplitude.

Ce résultat est rassurant en cela qu'il est plus naturel de voir le cosinus de basse fréquence comme modulant celui de haute fréquence que l'inverse comme on le voit sur la première image de la figure 1.2.

Aussi, en mettant les hautes fréquences du signal dans la fréquence instantanée, on s'assure de limiter les variations de l'amplitude. Cela apporte bien plus de contrainte en terme de décomposition (a_{x_1}, ϕ_{x_1}) , en cela que si l'inverse étant vrai, alors toute les fréquences pourrait être envoyé dans l'amplitude, ce qui laisserait la phase invariante.

Cela étant dit, lorsque l'on fait varier ν_1 et ν_2 , le résultat n'est pas toujours si intuitif. C'est notamment le cas lorsque les deux deviennent de plus en plus proche :

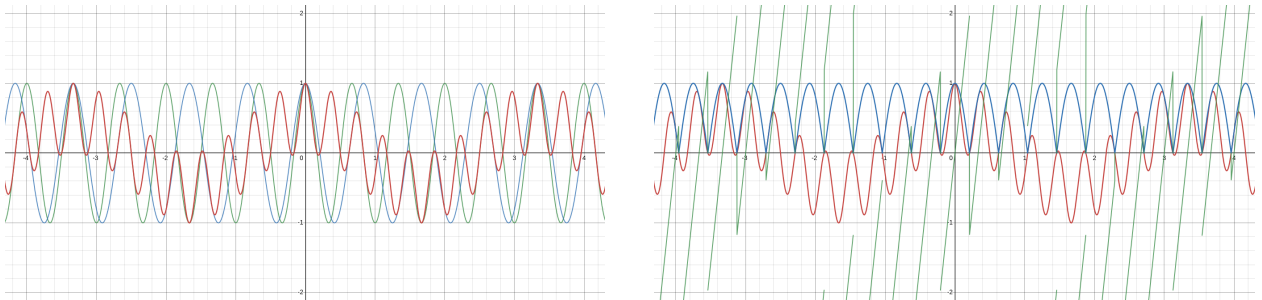


fig. 1.3 — Idem que pour la figure 1.2 précédente, avec cette fois $\nu_1 = 1.5$ et $\nu_2 = 1.3$.

Pour comprendre pourquoi l'amplitude ne fait pas ce qu'on attendrait d'elle, est introduit le théorème de Bedrosian :

THÉORÈME DE BEDROSIAN (1) — Dans sa formulation la plus générale, le théorème de Bedrosian énonce que si deux fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ sont telles l'une des trois assertions suivantes est vraie :

- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda, +\infty[, \text{supp } \hat{g} \subset [\lambda, +\infty[$

¹ \hat{x}_1 est donné par 4 Diracs, en ne gardant que ce non nul sur \mathbb{R}^+ on obtient le spectre de $\mathcal{A}[x_1]$ et il reste plus qu'à inverser la transformée de Fourier.

- $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+ \mid \text{supp } \hat{f} \subset]-\infty, \lambda], \text{ supp } \hat{g} \subset]-\infty, -\lambda]$
- $\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \setminus \{(0, 0)\} \mid \text{supp } \hat{f} \subset [-\lambda_1, \lambda_2], \text{ supp } \hat{g} \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda_2, \lambda_1]$

alors la transformée de Hilbert de leur produit s'écrit (voir [12] pour une démonstration) :

$$\mathcal{H}[fg] = f\mathcal{H}[g] \quad (1.8)$$

Dans le cas d'un signal réel, suivant la définition 5 on peut écrire $x = a_x \cos \phi_x$. Comme a_x et $\cos \phi_x$ sont réelles, seule la troisième condition du théorème de Bedrosian peut être satisfaite pour peu que $\lambda_1 = \lambda_2$. Ainsi :

COROLLAIRE 1.1 — Toujours avec les même notations, si $a_x \in L^2(\mathbb{R})$, $\cos \phi_x \in L^2(\mathbb{R})$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a_x] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi_x] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda] \quad (1.9)$$

Alors on a :

$$\mathcal{H}[x] = a_x \mathcal{H}[\cos \phi_x] \quad \text{et si } a_x(t) \neq 0, \quad \mathcal{H}[\cos \phi_x](t) = \sin \phi_x(t) \quad (1.10)$$

Pour interpréter ce corollaire, prenons un autre exemple : $x_2(t) = a(t) \cos(2\pi\nu_0 t)$. Sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{x}_2(\nu) &= \hat{a}(\nu) * \frac{1}{2} \left(\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\hat{a}(\nu + \nu_0) + \hat{a}(\nu - \nu_0) \right) \end{aligned}$$

Graphiquement, la transformée de Fourier de x_2 duplique le graphe de \hat{a} en $\pm\nu_0$ et somme les deux. La condition (1.9) du corollaire 1.1 demande alors que ν_0 soit choisie de telle sorte que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a] \subset [-\nu_0, \nu_0]$$

C'est-à-dire qu'il n'y ait pas de chevauchement entre les deux courbes $\Gamma_{\pm} : \nu \mapsto \hat{a}(\nu \mp \nu_0)$ (voir fig. 1.4 ci-dessous). Moralement, cela assure qu'en ne prenant que la partie positive du spectre de x_2 , l'on ne ramène pas avec une partie de $\hat{a}(\nu + \nu_0)$. Quant bien même cette explication est simpliste puisqu'ici ϕ est linéaire, on peut voir que le phénomène est finalement très proche de celui d'aliasing.

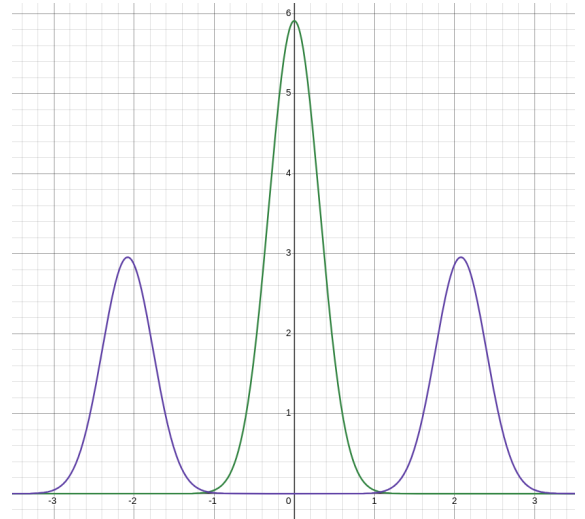
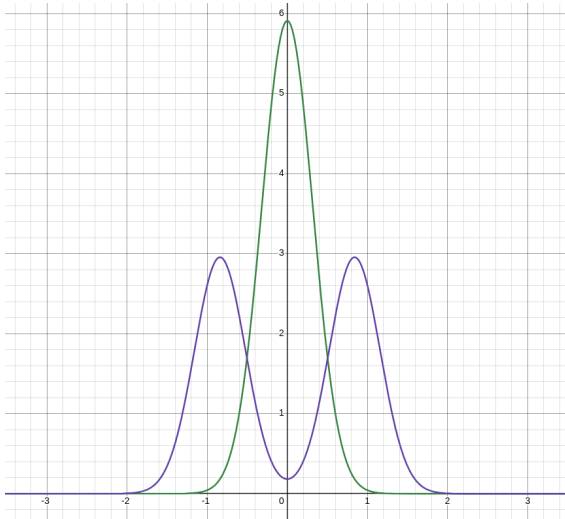


fig. 1.4 — Sur les deux graphiques sont représentés en vert \hat{a} et en violet \hat{x}_2 . Dans le premier cas l'hypothèse de Bedrosian est respectée mais pas dans le second.

Pour revenir sur l'exemple x_1 précédent, dans la seconde figure 1.3, l'amplitude ne colle plus à l'interprétation que l'on voudrait justement parce que la condition de Bedrosian n'est plus respectée (à savoir $\nu_1 \geq 2\nu_2$).
Formellement, **JE COMPRENDS TOUJOURS PAS COMMENT CA POSE PROBLEME DANS LA DEFINITION / INTERPRETATION DE $\mathcal{A}[x]$! HHHHHH !!!**

III — Généralisation aux signaux multivariés

Maintenant que les paramètres instantanée sont proprement définie pour les cas réel et complexe, qu'en est il des signaux multivariés :

DÉFINITION 6 (SIGNAL MULTIVARIÉ) — Un *signal multivarié*, ou *n-varié*, est un vecteur composé de $n \in \mathbb{N}^*$ signaux x_i . Pour $n = 2$ (resp. $= 3$), on parle de signal *bivarié* (resp. *trivarié*). Dans la continuité de ce qui a été dit dans l'plus tôt, dans le cas des signaux réels, on s'intéressera au vecteur composé des transformées en SA (eq. (1.6), déf. 4) des x_i . On supposera que chaque composante x_i de \mathbf{x} aura autant de régularité et de condition d'intégrabilité que nécessaire (**il vaudra préciser lesquelles éventuellement**).

Le fait que \mathbf{x} soit à valeur dans \mathbb{C}^n impose un choix naturel de d'amplitude instantanée : sa norme. L'on notera alors dans tout la suite (sauf précision) :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = a(t) \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\| = 1, \quad a \geq 0$$

Le choix de la phase instantanée, en revanche, n'est pas plus commode. Si l'on cherche à écrire \mathbf{x} sous la forme :

$$a(t)e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\alpha_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\alpha_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\alpha_n(t)} \end{pmatrix}$$

alors n'importe quel choix de ϕ est valable, il suffit que $\alpha_i = \phi_i - \phi$.

3.1 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié

Afin de contraindre ce choix, on s'inspire propriétés de la phase instantanée vu plus tôt pour en déduire deux approches :

- D'une part, l'espérance de la fréquence instantanée (ici vu comme dérivée à 2π près de la phase²) doit donner la fréquence moyenne au sens de Fourier, eq. (1.3).
- D'autre part, les conditions d'interprétation (1.9) de la décomposition (a_x, ϕ_x) , corollaire 1.1, exige que les hautes fréquences du signal se retrouve dans la phase.

Pour cela on introduit les notations utiles au cas multivarié :

²La pertinence de cette définition dans le cas multivarié sera discuté plus loin... **or is it ? (si oui, dis cref où)**

DÉFINITION 7 (DENSITÉ D'ÉNERGIE) — Étant donné un signal multivarié $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$, les densités d'énergie de chaque composante x_i sont notées :

$$\begin{aligned} \rho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto |x_i(t)|^2 = a(t)^2 a_i(t)^2 \end{aligned} \quad \varrho_i : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \nu &\longmapsto |\hat{x}_i(\nu)|^2 \quad (1.11)$$

Et les densités d'énergies associées au signal \mathbf{x} complet :

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) \end{aligned} \quad \varrho : \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \nu &\longmapsto \|\hat{\mathbf{x}}(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) \quad (1.12)$$

La première approche, inspiré de [2] consiste donc de reprendre le “calculation trick” (1.18), pour en déduire la fréquence moyenne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \int_{\mathbb{R}} \nu \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) d\nu \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\varrho_i}[\nu] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'_i(t) \rho_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t)^2 \sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{i=1}^n \phi'_i a_i^2 \right] \end{aligned}$$

Ce qui mène à une première (potentielle) définition de la phase instantanée :

$$\phi = \int \sum_{i=1}^n \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds = \sum_{i=1}^n \int \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds \quad (1.13)$$

La seconde approche, fortement inspirée par les travaux de Lilly & Olhede [8], se base sur l'idée de séparation haute/basse fréquences du signal \mathbf{x} . Pour cela, l'on commence par faire apparaître la phase ϕ — pour l'instant inconnue — en écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\phi(t)} e^{-i\phi(t)} \mathbf{x}(t) := e^{i\phi(t)} \mathbf{y}(t)$$

Si ϕ est bien choisie, alors \mathbf{y} ne devrait contenir que les informations associées à l'amplitude et la polarisation de \mathbf{x} . Or, la phase doit contenir les hautes fréquences du signal. Pour s'en assurer on demande, à l'inverse, que les basses fréquences du signal soient données par \mathbf{y} en limitant ces variations. Concrètement, ϕ doit être choisie de sorte à minimiser la dérivée $\dot{\mathbf{y}}'$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \left\| e^{-i\theta(t)} (\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t) \mathbf{x}(t)) \right\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t) \mathbf{x}(t)\|_2^2$$

La contrainte ne dépendant que de la dérivée θ' , on se ramène à :

$$\min_{\theta(t)} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \min_{\theta'(t)} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - \theta'(t) \mathbf{x}(t)\|_2^2$$

En rappelant que $\frac{d}{dx} \|f(x)\|_2^2 = 2\Re \langle f(x), f'(x) \rangle$, il vient que ce minimum³ est atteint par $\phi'(t)$ à condition

³ L'extremum obtenu est l'unique minimum globale puisque $t \mapsto \|at + b\|^2$ est strictement convexe pour $a \neq 0$.

que :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\phi'} \|\dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}\|_2^2 = 0 &\iff 0 = 2\Re \left\langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}, \frac{d}{d\phi'} (\dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}) \right\rangle \\
&= 2\Re \langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi' \mathbf{x}, -i\mathbf{x} \rangle \\
&= 2\Re \left(i \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle \right) + 2\phi' \Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\
&= -2\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle + 2\phi' \|\mathbf{x}\|_2^2
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\phi' = \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2} = \frac{-\Im \langle \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \quad \text{et} \quad \phi = -\Im \int \frac{\langle \mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|_2^2} ds \quad (1.14)$$

Ce qui, sous forme exponentiel, se réécrit :

$$\begin{aligned}
-\Im \frac{\langle \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|_2^2} &= -\Im \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t) a_i(t) e^{i\phi_i(t)} \overline{\left((aa_i)'(t) + a(t) a_i(t) i\phi_i'(t) \right) e^{i\phi_i(t)}} \\
&= -\Im \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t) a_i(t) (aa_i)'(t) - ia(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \\
&= -\frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n -a(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i(t)^2 \phi_i'(t)
\end{aligned}$$

Soit la même expression que (1.13) obtenue par le premier raisonnement :

$$-\Im \int \frac{\langle \mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|_2^2} ds = \int \sum_{i=1}^n a_i(s)^2 \phi_i'(s) = \sum_{i=1}^n \int a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds$$

Cela justifie la définition :

DÉFINITION 8 (PHASE DYNALIQUE/INSTANTANÉE) — Étant donné un signal $\mathbf{x} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ quelconque, on appelle *phase instantanée* ou *dynamique* à l'instant t partant du t_0 , le réel :

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) := - \int_{t_0}^t \frac{\Im \langle \mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|_2^2} ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds \quad (1.15)$$

On s'autorisera à omettre les paramètres de Φ_{dyn} lorsque cela ne prête pas à confusion.

Le terme “dynamique” viens, entre autre, du fait que dans son cadre d'étude habituelle, la dérivée $\dot{\mathbf{x}}$ se voit remplacé par un hamiltonien $h\mathbf{x}$, voir par exemple [1, sec. 2], [9, p. 215]. En particulier, en mécanique quantique, cet hamiltonien régie l'équation de Schödinger :

$$i \frac{d\psi(t)}{dt} = h\psi(t) \quad (1.16)$$

Sachant que \mathbf{x} n'a aucune raison de suivre une telle équation dans notre cas, poser $h = i \frac{d}{dt}$ enlève toute contrainte. On retrouve ainsi, modulo un jeu de convention sur le produit hermitien, la formule (1.15) ci-dessus.

Notons enfin qu'une fois la phase dynamique “extraite” de \mathbf{x} , le vecteur restant \mathbf{y} n'a évidemment pas de phase dynamique, ce qui se traduit par la formule :

3.2 Apparition de la phase géométrique

Pour rendre compte de la pertinence de cette expression, commençons par noter qu'il existe une autre façon standard de définir la phase d'un signal, la *phase totale* :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle \quad (1.17)$$

Il n'est pas clair, dans un cadre générale, comment et pourquoi cela s'interprète bien comme une phase et c'est encore pire lorsque l'on explicite sa valeur :

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \arg \left(\sum_{i=1}^n a_i(t) a_i(t_0) e^{i(\phi_i(t) - \phi_i(t_0))} \right) \\ &= \Phi_{\text{dyn}} + \arg \left(\sum_{i=1}^n a_i(t) a_i(t_0) e^{i(\alpha_i(t) - \alpha_i(t_0))} \right) \quad \text{où } \phi_i = \Phi_{\text{dyn}} + \alpha_i \\ &= \Phi_{\text{dyn}} + \arctan \left(\frac{\sum_i a_i(t) a_i(t_0) \sin(\alpha_i(t) - \alpha_i(t_0))}{\sum_i a_i(t) a_i(t_0) \cos(\alpha_i(t) - \alpha_i(t_0))} \right) \end{aligned}$$

Cela étant dit, si \mathbf{x} est cyclique à une phase près, cette formule fait plus sens. C'est-à-dire lorsque, entre deux instant t_0 et t donnés, \mathbf{x} vérifie :

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \mid \mathbf{x}(t) = e^{i\theta} \mathbf{x}(t_0)$$

Dès lors, la phase totale donne bien :

$$\arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \arg \langle e^{i\theta} \mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \theta$$

Dans le cas univarié, la phase instantanée vaut également θ , ce qui n'est plus le cas dès que $n \geq 2$ (voir *fig. 1.5*, ci-dessous). Apparaît alors une nouvelle phase qui est dû au caractère multivarié du signal : la phase géométrique introduite au début du mémoire.



fig. 1.5 — Sur le graphe de gauche, le signal \mathbf{x} à valeur dans \mathbb{R}^2 et dans celui de droite la calcul de la phase dynamique, totale et de leur différence. Résultat tiré des simulation de Le Bihan et al.[5]

... un peu plus de blabla pour faire transition sur la suite ...

COMPLÉMENT SUR L'ANALYSE TEMPS-FRÉQUENCE

Annexe A — Un bon moment...

Pour montrer les formules de la proposition 1, on commence par montrer ce que Cohen [3] appelle les :

LEMME 1 (“CALCULATION TRICKS”) — Si le signal est n fois dérivable et que la densité d'énergie spectrale associée ϱ admet un moment d'ordre n , alors ce moment est donnée par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_\varrho[\nu^n] = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \left\langle x, \frac{d^n}{dt^n} x \right\rangle \quad (1.18)$$

Avec les hypothèses analogues, les moments de ρ s'écrivent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{E}_\rho[t^n] = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu) \frac{d^n}{d\nu^n} \overline{\hat{x}(\nu)} d\nu = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \left\langle \hat{x}, \frac{d^n}{d\nu^n} \hat{x} \right\rangle \quad (1.19)$$

Démonstration du lemme 1

À supposer que les intégrales existes et que le théorème de Fubini s'applique, on a $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \nu^n \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu^n \hat{x}(\nu) \overline{\hat{x}(\nu)} d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \nu^n \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-2i\pi\nu t} dt \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} e^{2i\pi\nu t'} dt' d\nu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \end{aligned}$$

Ici, on remarque que :

$$\begin{aligned} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} &= \nu^{n-1} \frac{1}{-2i\pi} \frac{d}{d\nu} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \\ &= \nu^{n-2} \frac{1}{(-2i\pi)^2} \frac{d^2}{d\nu^2} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{d\nu^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} \end{aligned}$$

En jouant sur les ordres d'intégrations, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu^n] &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \nu^n e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(-2i\pi)^n} \frac{d^n}{d\nu^n} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \frac{1}{(-2i\pi)^n} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\nu(t-t')} d\nu dt dt' \\ &= \left(\frac{1}{-2i\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}[1](t-t') dt dt' \end{aligned}$$

La transformée de Fourier de 1 est un dirac, il vient, modulo quelques jeux d'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varrho[\nu^n] &= \left(\frac{1}{-2i\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \mathcal{F}[1](t-t') dt dt' \\
&= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt dt' \\
&= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} \frac{d^n}{dt^n} \delta(t-t') dt' dt \\
&= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \int_{\mathbb{R}} \overline{x(t')} \delta(t-t') dt' dt \\
&= \left(\frac{i}{2\pi}\right)^n \int_{\mathbb{R}} x(t) \frac{d^n}{dt^n} \overline{x(t)} dt
\end{aligned}$$

■

Démonstration de la proposition 1, équation (1.3)

Avec le hypothèses de la lemme 1 précédente, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \frac{i}{2\pi} \rho(t) \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{x'(t)} dt = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i\phi(t)} \overline{(a'(t) e^{i\phi(t)} + ia(t) \phi'(t) e^{i\phi(t)})} dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) e^{i\phi(t)} (a'(t) e^{-i\phi(t)} - ia(t) \phi'(t) e^{-i\phi(t)}) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t) (a'(t) - ia(t) \phi'(t)) dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \phi'(t) a(t)^2 dt
\end{aligned}$$

On peut se convaincre que le premier terme doit être nul car l'espérance doit être réelle. On peut s'en assurer par le calcul en notant que c'est l'inégale d'une dérivée :

$$\int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (a^2)'(t) dt = \frac{1}{2} \rho(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$$

Ce qui donne bien :

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a'(t) a(t) dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi} \phi'(t) a(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt$$

■

Démonstration de la proposition 1, équation (1.4)

La démonstration est similaire, d'abord, la dérivée seconde de x s'écrit :

$$\begin{aligned}
x''(t) &= \frac{d}{dt} (a'(t) e^{i\phi(t)} + ia(t) \phi'(t) e^{i\phi(t)}) \\
&= \left(a''(t) + ia'(t) \phi'(t) + i(a'(t) \phi'(t) + a(t) \phi''(t) + ia(t) \phi'(t) \phi'(t)) \right) e^{i\phi(t)} \\
&= \left(a''(t) - a(t) \phi'(t)^2 + i(2a'(t) \phi'(t) + a(t) \phi''(t)) \right) e^{i\phi(t)}
\end{aligned}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}
x(t)\overline{x''(t)} &= a(t)\left(a''(t) - a(t)\phi'(t)^2 - i(2a'(t)\phi'(t) + a(t)\phi''(t))\right) \\
&= a(t)a''(t) - a(t)^2\phi'(t)^2 - i(2a(t)a'(t)\phi'(t) + a(t)^2\phi''(t)) \\
&= a(t)a''(t) - a(t)^2\phi'(t)^2 - i(a^2\phi')'(t)
\end{aligned}$$

Ce dont on déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\rho [\nu^2] &= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} x(t)\overline{x''(t)} dt \\
&= -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}} a(t)a''(t) - a(t)^2\phi'(t)^2 - i(a^2\phi')'(t) dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\mathbb{R}} a'(t)^2 dt + \int_{\mathbb{R}} a(t)^2\phi'(t)^2 dt - i a^2(t)\phi'(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \right) \quad \text{IPP sur le premier membre} \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{a'(t)}{a(t)} \right)^2 a(t)^2 dt + \int_{\mathbb{R}} a(t)^2\phi'(t)^2 dt \right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left(\mathbb{E}_\rho \left[((\ln a)')^2 \right] + \mathbb{E}_\rho \left[(\phi')^2 \right] \right) \quad \text{car } (\ln a)' = \frac{a'}{a}
\end{aligned}$$

Sachant que $\mathbb{E}_\rho [(\ln a)'] = 0$ (cf. démonstration précédente), il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_\rho [\nu] &= \mathbb{E}_\rho [\nu^2] - \mathbb{E}_\rho [\nu]^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \left(\mathbb{E}_\rho \left[((\ln a)')^2 \right] + \mathbb{E}_\rho \left[(\phi')^2 \right] \right) - \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{E}_\rho [\phi']^2 \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{E}_\rho \left[((\ln a)')^2 \right] + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{E}_\rho [(\ln a)']^2 + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho [\phi'] \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho [(\ln a)'] + \frac{1}{4\pi^2} \mathbb{V}_\rho [\phi']
\end{aligned}$$

■

Annexe B — Transformée inverse de la fonction de Heaviside

Définissons d'abord proprement la valeur principale de Cauchy :

DÉFINITION 9 (VALEUR PRINCIPALE DE CAUCHY) — La *valeur principale de Cauchy* est la distribution, notée $\text{vp} \frac{1}{x}$, définie par dualité :

$$\begin{aligned}
\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle &= \int_0^t \frac{\varphi(t)}{t} dt := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Ici $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide et la limite en ε assure que l'intégrale (impropre) converge bien.

La distribution $\text{vp} \frac{1}{x}$ est la valeur principale de la fonction inverse dans le sens où son produit avec l'identité donne 1 ($\langle id_{\mathbb{R}} \times \text{vp} \frac{1}{x}, \varphi \rangle = \langle \text{vp} \frac{1}{x}, id_{\mathbb{R}} \times \varphi \rangle = 1$) mais avec des propriétés d'intégration supplémentaires. Entre autre :

PROPRIÉTÉ 1 — La transformée de Fourier de la valeur principale de Cauchy est donnée, au sens

des distributions, par :

$$\mathcal{F} \left[\text{vp} \frac{1}{x} \right] = -i\pi \text{sign} \quad (1.21)$$

Il en découle la transformée de Fourier inverse :

$$\mathcal{F}^{-1} [2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] = \mathcal{F}^{-1} [1 + \text{sign}] = \delta + \frac{i}{\pi} \text{vp} \frac{1}{x} \quad (1.22)$$

Démonstration

Par définition, la transformée de Fourier de la valeur principale est telle que,
 $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F} \left[\text{vp} \frac{1}{x} \right], \varphi \right\rangle &= \left\langle \text{vp} \frac{1}{x}, \hat{\varphi} \right\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{\hat{\varphi}(\nu)}{\nu} d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\hat{\varphi}(\nu) - \hat{\varphi}(-\nu)}{\nu} d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{-2i\pi\nu t} dt - \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{2i\pi\nu t} dt \right) d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) (e^{-2i\pi\nu t} - e^{2i\pi\nu t}) dt d\nu \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\nu} \int_{\mathbb{R}} -2i\varphi(t) \sin(2\pi\nu t) dt d\nu \\ &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2\pi\nu t)}{\nu} d\nu dt \end{aligned}$$

En posant $u = 2\pi\nu t \text{sign}(t)$ (le signe de t assure que l'on ait le même signe dans et hors du sin), on obtient :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{F} \left[\text{vp} \frac{1}{x} \right], \varphi \right\rangle &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \int_0^{+\infty} \text{sign}(t) \frac{\sin(u)}{u} du dt \\ &= -2i \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \frac{\pi}{2} \text{sign}(t) dt \\ &= \langle -i\pi \text{sign}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

■

Finalement, la condition sur le spectre de $\mathcal{A}[x]$ se traduit bien par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [\mathcal{A}[x]] &= 2\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x} \iff \mathcal{A}[x] = \mathcal{F}^{-1} [\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+} \hat{x}] \\ &= \mathcal{F}^{-1} [\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}] * \mathcal{F} [\hat{x}] \\ &= \left(\delta + \frac{i}{\pi} \text{vp} \frac{1}{x} \right) * x \\ &= x + \frac{i}{\pi} \text{vp} \frac{1}{x} * x \end{aligned}$$

PARTIE II

DESCRIPTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE

Pour étudier la phase géométrique d'un signal ψ , il nous faut projeter ψ sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, et ceux, tout en gardant une trace de sa phase puisque c'est le lien entre les deux qui nous intéresse. Il nous faut donc envoyer ψ dans le produit :

$$\mathrm{U}(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n \quad (\text{ou } \mathbb{C}^{n-1*}/\mathbb{C}^*)$$

Garder le lien entre cet espace et celui d'origine mène à se placer dans le cadre avec d'un *variété fibrée* (ou simplement fibré). Plus précisément, comme $\mathrm{U}(1)$ est un groupe de lie, ce sera un *fibré principal* noté $S^{2n-1}(\mathrm{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$.

Comme son nom l'indique, $S^{2n-1}(\mathrm{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$ à une structure de variété différentielle et le lien entre les $\mathrm{U}(1)$ et $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ va se faire par le biais d'une connexion. L'on verra alors que cette connexion est intrinsèquement liée à la phase dynamique du signal, et il sera discuté de la signification de ce résultat.

La phase géométrique, quand à elle, sera liée avec la métrique hermitienne associée aux l'espaces projectifs complexes.

Tout cela va demander quelques prérequis qui seront détaillés dans les annexes.

I — Etude du cas pseudo-cyclique

1.1 S^n vu comme variété fibrée principale

•

II — Prérequis mathématique — send to appendix

2.1 Variété différentielle complexe, tiré de [11]

Pour mémoire, une variété différentielle de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) de dimension n est un espace topologique⁴ \mathcal{M} (ou \mathcal{M}^n) munie d'un *atlas* $(\phi_i, U_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire un ensemble finie de pair d'ouvert $U_i \subset \mathcal{M}$ et d'application $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

- les U_i forme un recouvrement de la variété : $\bigcup_{i \in I} \phi_i(U_i) = \mathcal{M}$
- les ϕ_i sont des homéomorphismes sur leur image $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$.
- si l'intersection $U_i \cap U_j$ est non vide, alors $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)}$ est un C^k difféomorphisme sur son image.

⁴La topologie de \mathcal{M} doit vérifier des propriétés type séparable, dénombrable à l'infinie, etc., qui seront toutes admises dans la suite, voir par exemple [4, chap. 2]

\mathcal{M} sera une *variété différentielle complexe* si elle satisfait les propriétés ci-dessus où \mathbb{R}^n est remplacé par \mathbb{C}^n et où la condition de difféomorphisme est remplacé par la condition d'holomorphisme. Une application $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ étant holomorphe si chacune de ses composantes vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \mu, \quad \frac{\partial f}{\partial y^\mu}(x + iy) = i \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x + iy)$$

Les fonctions holomorphes étant automatiquement C^∞ , les variétés différentielles complexes sont toujours lisse, c'est-à-dire C^∞ . Aussi, \mathcal{M} est dite de dimension complexe n et dimension (réel) $2n$, notés :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) := n \qquad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) := \dim(\mathcal{M}) = 2n \quad (2.1)$$

Ensuite, pour le dire rapidement, la structure complexe de \mathcal{M} permet de séparer les espaces tangents en deux sous espaces. Pour ce faire, on commence par noter qu'en tout point $p \in \mathcal{M}$ de coordonnée $z^\nu = x^\nu + iy^\nu$, l'espace tangent $T_p\mathcal{M}$, vu comme variété réelle, admet une base :

$$T_p\mathcal{M} = \text{Vec} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\} \quad (2.2)$$

Plus tôt que de se basé sur les x^μ et y^μ pour séparer les $T_p\mathcal{M}$, on définit sur ces derniers un tenseur J_p de type (1,1) tel que :

$$J_p \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \qquad J_p \frac{\partial}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.3)$$

Ce tenseur est l'équivalent de la multiplication par $\pm i$ et le fait que \mathcal{M} soit complexe assure qu'il soit défini globalement, *i.e.* sur $T\mathcal{M}$. Il est diagonalisable dans la base :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial z^\mu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \qquad \partial_{\bar{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \quad (2.4)$$

Ainsi en fonction de la base ((2.1) ou (2.4)), J_p va s'écrire :

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \qquad J_p = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Finalement, $T\mathcal{M}$ peut être séparé en deux sous-espaces engendré respectivement par les ∂_μ et $\partial_{\bar{\nu}}$. On parle de vecteur holomorphe et anti-holomorphe et on note :

$$T_p\mathcal{M}^+ = \text{Vec}\{\partial_\mu \mid 1 \leq \mu \leq n\} \qquad T_p\mathcal{M}^- = \text{Vec}\{\partial_{\bar{\mu}} \mid 1 \leq \mu \leq n\} \quad (2.6)$$

2.2 Variété fibrée principale

DÉFINITION 10 (VARIÉTÉ FIBRÉE) — Étant donnée deux variétés différentielles P et B de même classe, une *fibration de base B et d'espace total P* et une application $\pi : P \rightarrow B$ telle qu'en tout point $x \in B$ de la base, il existe un voisinage $U_x \subset B$ et une variété différentielle F_x telle que $U_x \times F_x$ soit difféomorphe à $\pi^{-1}(U_x)$.

On dit de P que c'est une *variété fibrée*, un *espace fibré* ou tout simplement un *fibré* et $P_x := \pi^{-1}(U_x)$ est appelé *fibres de P au (dessus du) point x* . Si de plus B est connexe, alors les fibres F_x sont toutes difféomorphes à un même F et on parle de *fibres type de P* .

L'idée derrière cette définition est de formaliser l'idée des espaces qui, comme le ruban de Möbius, "ressemble" à un produit $F \times B$ (d'où la notation P) sans vraiment en être un : P est localement difféomorphe à une variété produit $U \times_F$ (voir *fig. 2.1*, ci-dessous).



fig. 2.1 — Fibration du ruban de Möbius.

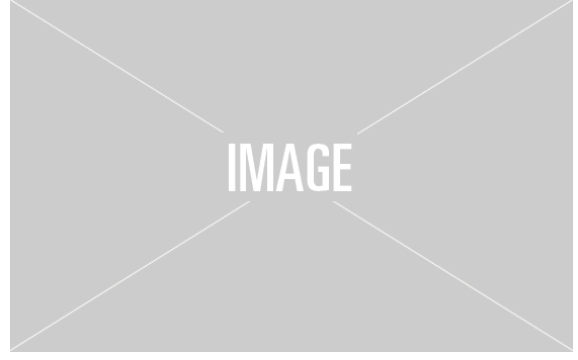


fig. 2.2 — Section local d'un fibré principal

DÉFINITION 11 (VARIÉTÉ FIBRÉE PRINCIPALE) — Un fibré P sera de plus dit *principal* (VFP) si sa fibre type est un groupe de Lie G agissant sur P . Plus précisément, une variété fibrée principale P (VFP, ou fibré principal) doit vérifier les propriétés suivantes :

- Le groupe de Lie G opère différentiellement à droite (ou à gauche) sur P via :

$$\phi : \begin{array}{ccc} P \times G & \longrightarrow & P \\ (p, g) & \longmapsto & \phi(p, g) := pg \end{array} \quad (2.7)$$

- Il existe une surjection différentiable $\pi : P \longrightarrow B$ telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}(\pi(p)) = pG \quad (2.8)$$

- P est munie d'un ensemble de paire (U_i, h_i) tel que les U_i forment un recouvrement de B et que les h_i soient des difféomorphismes à valeur de $G \times U_i$ dans $\pi^{-1}(U_i) \subset P$ vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \forall x \in B, \quad h_i(ab, x) = h_i(a, x)b \quad \text{et} \quad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

On dit alors que B est la *base* de la VFP, que G est son *groupe structural* et pG est la *fibre de P passant par p* et au dessus de $\pi(p) \in B$. Une telle variété est notée $P(\phi, G, \pi, B)$ ou plus simplement $P(G, B)$.

L'ensemble $\{(U_i, h_i)\}_i$ est l'équivalent d'un atlas pour les variétés différentielles classiques mais adapter pour tenir compte de la structure fibrée de P et de l'action de G . Explicité les changements de cartes dans P , ce fait comme suit.

D'abord, P étant localement difféomorphe à un produit $G \times U_i$, on peut y tracer des graphes appelés *sections locales*, comme sur la figure 2.2 ci-dessous. Formellement, ce sont des applications $\sigma : U_i \subset B \longrightarrow P$ vérifiant :

$$\pi \circ \sigma = Id_U$$

Ensuite, les hypothèses sur $P(G, B)$ sont telles que G agit transitivement et librement (ou sans point fixe) sur P . C'est-à-dire que, sur une même fibre, tout point peut être atteint par tout autre via l'action de G (transitivité) :

$$\forall x \in B, \quad \forall p, q \in P_x, \quad \exists t(p, q) \in G \mid p = qt(p, q)$$

et que le seul moyen laisse les points invariants par cette même action est de passer par l'élément neutre e (libre) :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad p = pg \implies g = e$$

L'action de G sur $P(G, B)$ est telle que toute section locale σ sur U_i , peut s'écrire à partir d'une même section locale σ_i via la formule :

$$\forall x \in B, \quad \sigma(x) = \sigma_i(x)t(\sigma_i(x), \sigma(x))$$

Et il existe une choix de section σ_i canonique par rapport à la carte U_i , elle doit être telle que :

$$h_i(x, e) = \sigma_i(x)$$



2.3 Espaces projectifs complexes

Les espaces projectifs complexes se construisent ainsi. On se place dans $\mathbb{C}^{n+1*} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n+1}}\}$ avec la relation d'équivalence, $\forall x, y \in \mathbb{C}^{n+1*}$:

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid x = \lambda y$$

L'espace projectif complexe, noté $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est l'espace quotient :

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1} = \mathbb{C}^{n+1*} / \mathbb{C}^* = \mathbb{C}^{n+1*} / \sim$$

En notant $[z]$ la classe de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ du représentant $z = (z^i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1*}$, on définit les ensembles et cartes, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$U_i = \left\{ [z] \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n \mid z^i \neq 0 \right\} \quad \phi_i : \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^i \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-i} \cong \mathbb{C}^n \\ [z] & \longmapsto & \frac{1}{z^i} (z_0, \dots, 1, \dots, z_n) \end{array} \quad (2.9)$$

L'ensemble d'arrivé $\phi_i(U_i)$ est de dimension n et s'assimile à \mathbb{C}^n mais, par souci de comodité, on restera dans \mathbb{C}^{n+1} . Cela permet d'écrire plus simplement les formules de changement de carte en évitant de devoir enlever et rajouter des coefficients :

$$\forall [z] \in U_i \cap U_j, \quad \phi_i \circ \phi_j^{-1}(z) = \frac{z^j}{z^i} z \quad (z^{i,j} \neq 0)$$

Les (U_i, ϕ_i) forme un atlas holomorphe sur l'espace projectif complexe, faisant de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ une variété complexe de dimension $\dim_{\mathbb{C}} = n$ (voir annexe ?? pour plus de détail).

PROPOSITION 2 — La $2n+1$ -sphère S^{2n+1} est un espace fibré de base $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est de fibre type S^1 , ou $U(1)$. La fibration étant la projection canonique :

$$\pi : \begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{P}\mathbb{C}^n \\ x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

Voir [4] pour la démo

PROPOSITION 3 — $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ admet une métrique hermitienne induite par la métrique de S^{2n+1} , elle même induite du produit scalaire sur \mathbb{R}^{2n+1} . Elle est appelé *métrique de Fubini-Study* et est donnée par le formule :

TABLE DES FIGURES

1.1	Exemple de densité spectrale d'un signal réel ESP A 1,4	5
1.2	Représentation graphique du signal x (rouge) avec $\nu_1 = 3$ et $\nu_2 = 0.1$. Sur l'image de gauche, avec signaux de fréquences pures (bleu et vert). Sur l'image de droite, avec son amplitude (bleu) et sa phase instantanée (vert). Les discontinuités de la phase sont dû à l'arrondi à 2π près de l'argument de $\mathcal{A}[x_1]$ et à la façon dont il est calculé lorsque le signal s'annule (mise à 0). Voir ici pour un graphique dynamique.	7
1.3	Idem que pour la figure 1.2 précédente, avec cette fois $\nu_1 = 1.5$ et $\nu_2 = 1.3$	7
1.4	Sur les deux graphiques sont représentés en vert \hat{a} et en violet \hat{x}_2 . Dans le premier cas l'hypothèse de Bedrosian et respectée mais pas dans le second.	8
1.5	Sur le graphe de gauche, le signal \mathbf{x} à valeur dans \mathbb{R}^2 et dans celui de droite la calcul de la phase dynamique, totale et de leur différence. Résultat tiré des simulation de Le Bihan <i>et al.</i> [5]	12
2.1	Fibration du ruban de Möbius.	19
2.2	Section local d'un fibré principal	19

TABLE DES CODES

RÉFÉRENCES

- [1] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [2] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [3] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [4] J. LAFONTAINE, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [5] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [6] J. LEFEVRE, *Polarization analysis and optimization geometry*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....] ; University of Melbourne, Dec. 2021.
- [7] J. M. LILLY, *Modulated Oscillations in Three Dimensions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 59 (2011), pp. 5930–5943.
- [8] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [9] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [10] ———, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. II. The Case of Unitary Group Representations*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 269–340.
- [11] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.
- [12] S. WANG, *Simple proofs of the Bedrosian equality for the Hilbert transform*, Science in China Series A: Mathematics, 52 (2009), pp. 507–510.