

Mémoire de Stage de M2

PHASE GÉOMÉTRIQUE DE SIGNAL MULTIVARIÉ ET PUIS C'EST DÉJÀ PAS MAL

Grégoire DOAT

Encadré par Nicolas LE BIHAN, Pierre-Olivier AMBLARD, Julien FLAMANT & Michel
BERTHIER

Master MIX – Université de La Rochelle

2024 – 2025

TABLES DES MATIÈRES

Introduction	1
Notations et conventions	2
<hr/>	
PARTIE I — INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE	3
<hr/>	
I — Introduction de la phase géométrique	3
1.1 Cas univarié : signaux AM-FM	3
1.2 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié	4
1.3 Apparition de la phase géométrique	7
II — Première étude : cas des signaux AM-FM-PM	8
2.1 Définitions et calcul des phases	9
2.2 Interprétation dans la sphère de Poincaré	10
2.3 Généralisation en plus haute dimension	11
Annexes	13
Annexe A — Compléments sur l'analyse temps-fréquence	13
A.1. Un mot sur la notion de fréquence instantanée (<i>nécessaire?</i>)	13
A.2. Formalisme derrière la transformée en SA	13
A.3. Lien avec le théorème de Bedrosian	13
Annexe B — Compléments sur les signaux AM-FM-PM	13
B.1. Construction détaillée des signaux AM-FM-PM (<i>nécessaire?</i>)	13
B.2. Démonstrations	13
<hr/>	
PARTIE II — ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME	16
<hr/>	
I — Prérequis mathématique	18
1.1 — Variété fibrée principale et connexion	18
1.1.1 Première définition	18
1.1.2 Connexion sur VFP	20
1.2 — Application au signal multivariée complexe	21
1.2.1 PC^n comme variété différentielle	21
1.2.2 PC^n comme base du fibré principale $S^n(U(1), PC^n)$	22
II — Interprétation des trois phases dans ce cadre	23
2.1 — HHHHH	23
2.2 — Cas pseudo-cyclique	23
Annexe	24
Annexe A — Connexion induite par une métrique	24
Annexe B — Algèbre et groupe de Lie	24
Annexe C — Variété différentielle complexe, tiré de [16]	24

INTRODUCTION

INTRO A REFAIRE QUAND ON SAURA VRAIMENT DE QUOI ON PARLE DANS CETTE PARTIE

La phase géométrique fait partie de ces concepts qui apparaissent régulièrement en physique, mais qui demande beaucoup de contexte pour être expliqué. Pour l'introduire rapidement, la phase géométrique à l'instant t d'un signal complexe ψ est donné par :

$$\Phi_{\text{geo}}(\psi, t_0, t) = \arg \langle \psi(t), \psi(t_0) \rangle \Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\psi}(s), \psi(s) \rangle}{\|\psi(s)\|^2} ds$$

Ce qui rend cette phase si intéressante c'est qu'elle est invariante par transformation de jauge, c'est-à-dire invariante par toute transformation du type :

$$\psi(t) \rightsquigarrow \psi'(t) = e^{i\alpha(t)} \psi(t)$$

Cette propriété rend la phase Φ_{geo} intrinsèquement liée à la trajectoire que prend la projection de ψ dans l'espace projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ et par conséquent, à la géométrie de ce dernier, d'où son nom.

Ceci à largement été étudié dans le cadre de système dynamique régis par EDP [4, 13], notamment en mécanique quantique avec l'équation Schrödinger [1, 14, 16]. Ce n'est que récemment que Le Bihan, Flament et Amblard se sont intéressés à son application en traitement du signal dans le cas de signaux bivariés [8, 9].

[...]

NOTATIONS ET CONVENTIONS

OBJET/FONCTION	NOTATION
Conjugué complexe	\bar{x}
Transposée (resp. adjoint) de la matrice A	tA (resp. A^\dagger)
Distribution de Dirac	δ
Indicatrice de E	$\mathbb{1}_E$
Fonction signe	$\text{sign}(x)$
Transformée de Fourier	$\mathcal{F}[x], \hat{x}$
Transformée en SA	$\mathcal{A}[x]$
Transformée de Hilbert	$\mathcal{H}[x]$
Produit hermitien	$\langle \cdot, \cdot \rangle$
Espérance et variance de f suivant ρ	$\mathbb{E}_\rho[f(t)], \mathbb{V}_\rho[f(t)]$
Espace des fonctions p.p. de puissance p^{eme} intégrable à valeur de E dans F	$L^p(E, F)$
Support d'une fonction f	$\text{supp } f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$
Matrice de rotation de paramètre Θ (resp. d'angle θ en dimension 2)	R_Θ (resp. R_θ)
Ensemble des matrices symétriques (resp. anti-symétriques) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$)
Ensemble des matrices hermitiennes (resp. anti-hermitiennes) de taille n	$\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$)

Note générale

- les références sont en fin de mémoire est en .bib sur le [GitHub](#)
- Idem pour les codes et un mot sur **pygeomphase**
- En italique sont les notes un peu plus informelles
- On va parler de géo diff et pour éviter de réécrire un livre, on va admettre beaucoup de résultats, on renvoi vers [7, 16] (*metts en d'autre*) pour une introduction extensive à la théorie

Notations math :

- Convention sur le produit hermitien (congué à droite)
- les vecteurs seront le plus souvent en gras, leur dérivée en temps notée par un point (ex. : $\dot{\mathbf{x}}(t)$) et celle des scalaires seront noté par un prime (ex. : $a'(t)$)

PARTIE I

INTRODUCTION DE LA PHASE GÉOMÉTRIQUE

En traitement du signal, la phase d'un signal est intrinsèquement liée à la notion de fréquence instantanée, qui joue un rôle important en analyse temps-fréquence. C'est donc de point que commencera notre discussion pour introduire la phase géométrique. Pour cela, seront rapidement introduit quelques notions et résultats d'analyse temps-fréquence dans le cas univarié (sec. 1.1). Suite à quoi sera définie la phase instantanée pour le cas multivarié (sec. 1.2), qui permettra enfin de mettre en évidence la phase géométrique (sec. 1.3).

Dans une seconde partie, seront introduit les signaux bivarié dit AM-FM-PM (sec. 2.1), dont la phase géométrique sera calculée explicitement (sec. ??), ce qui permettra de mettre en évidence certaines de ses propriétés. Dans une dernière section, seront proposées des généralisations des signaux AM-FM-PM au delà du cas bivarié et seront discutées leur pertinence quant à l'étude de la phase géométrique (sec. ??).

I — Introduction de la phase géométrique

1.1 Cas univarié : signaux AM-FM

En traitement du signal, l'analyse fréquentielle par la transformée de Fourier est un incontournable. Seulement, cette transformation fait perdre toute notion temporelle : si l'étude du spectre du signal permet de dire quelles fréquences apparaissent dans le signal, elle ne permet pas de dire à quel(s) moment(s). C'est en réponse à cela, entre autre, qu'est développé l'analyse temps-fréquence. À cette fin, sont définies les paramètres instantanées d'un signal :

DÉFINITION 1 (PARAMÈTRES INSTANTANÉES) — Soit x , est un signal complexe écrit sous forme exponentielle :

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & a(t)e^{i\phi(t)} \end{array} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \phi(t) \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

a est appelé *amplitude instantanée* du signal, $1/2\pi\phi'$ sa *fréquence instantanée* et sa *phase instantanée* est définie — modulo un choix de phase initiale — par :

$$\Phi_{\text{inst}}(x, t_0, t) = \phi(t) - \phi(t_0) \quad (1.2)$$

Pour les signaux réels, ces notions sont moins évidentes à définir puisqu'elles demandent d'écrire les signaux sous la forme :

$$x(t) = a(t) \cos \phi(t)$$

Auquel cas, le choix de la pair (a, ϕ) n'est pas unique. Il existe tout de même un “bon” choix de telle pair dans le cas des signaux dit AM-FM :

DÉFINITION 2 (SIGNAL AM-FM) — Un signal réel de la forme :

$$x : \begin{matrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & a(t) \cos \phi(t) \end{matrix} \quad \text{où } a(t) \in \mathbb{R}^+ \quad (1.3)$$

est dit *AM-FM* (*amplitude and frequency modulated*) si a et $\cos \phi$ admettent des transformées de Fourier et si de plus la première a un spectre concentré sur les basses fréquences, la seconde concentré sur les hautes fréquences et que les deux ne se chevauchent pas. Formellement, ces conditions demandent qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ telle que :

$$\text{supp } \mathcal{F}[a] \subset [-\lambda, \lambda], \quad \text{supp } \mathcal{F}[\cos \phi] \subset \mathbb{R} \setminus [-\lambda, \lambda] \quad (1.4)$$

Dans ce cas, a et ϕ donne lieu au même vocabulaire que pour le cas complexe (définition 1).

Ces conditions sont liées au théorème de Bedrosian, et plus de détail se trouve dans l'annexe A. Pour le dire rapidement, elles exigent que toutes les hautes fréquences de x se trouvent dans la phase. Intuitivement, cela évite que toutes les fréquences aillent dans l'amplitude a , auquel cas, x n'aurait "pas de fréquence" au sens où ϕ pourrait être choisie constante, voir nulle.

Sous ces conditions, x peut être vu comme le signal complexe $\mathcal{A}[x]$ telle que :

$$\mathcal{A}[x](t) = a(t)e^{i\phi(t)} = a(t) \cos \phi(t) + ia(t) \sin \phi(t) = x + i\Im \mathcal{A}[x]$$

L'on parle alors de transformée en *signal analytique* de x et $\mathcal{A}[x]$ a, par construction, les mêmes paramètres instantanés que x . Là encore, le lecteur est renvoyé vers l'annexe A pour plus de détail.

L'intérêt d'introduire toutes ces notions est que les signaux multivariés — même complexe — souffrent du même problème que les signaux réels. En effet, en écrivant un signal \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix}$$

le fait que \mathbf{x} soit à valeur dans \mathbb{C}^n impose un choix naturel d'amplitude instantanée : sa norme. Pour ce qui est de la phase instantanée, en revanche, n'importe quel choix de ϕ convient *a priori* :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} A_1(t)e^{i\phi_1(t)} \\ A_2(t)e^{i\phi_2(t)} \\ \vdots \\ A_n(t)e^{i\phi_n(t)} \end{pmatrix} = a(t)e^{i\phi(t)} \begin{pmatrix} a_1(t)e^{i\psi_1(t)} \\ a_2(t)e^{i\psi_2(t)} \\ \vdots \\ a_n(t)e^{i\psi_n(t)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a(t) = \|\mathbf{x}(t)\|_2 \\ \|(a_i)_{1 \leq i \leq n}\|_2 = 1 \\ \phi_i = \phi + \psi_i \end{cases}$$

Il suffit que les ψ_i soient ajustés pour assurer que $\phi_i = \phi + \psi_i$.

À noter, que si a et ϕ sont respectivement une amplitude et une phase, le vecteur restant $(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n}$ correspond à un vecteur de polarisation, sur lequel nous reviendrons dans la section II suivante.

1.2 Phase et fréquence instantanée de signal multivarié

On se propose ici de définir la phase instantanée comme suit :

DÉFINITION 3 (PHASE DYNAMIQUE/INSTANTANÉE) — La *phase instantanée* ou *dynamique* (à l'instant t partant de t_0) d'un signal multivarié $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ quelconque, est définie par la formule :

$$\forall t_0, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \int_{t_0}^t \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi'_i(s) ds \quad (1.5)$$

On s'autorisera à omettre les paramètres de Φ_{dyn} lorsque cela ne prête pas à confusion.

Outre l'aspect variationnelle de cette formule, le terme “dynamique” viens du fait que, lorsque \mathbf{x} suit une équation de Schrödinger :

$$i \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = h\mathbf{x}(t) \quad (1.6)$$

la dérivée $\dot{\mathbf{x}}$ dans la formule (1.5) ci-dessus se voit remplacé par l'hamiltonien $h\mathbf{x}$ [1, sec. 2], [14, p. 215], donnant :

$$\Phi'_{\text{dyn}} = -i \int_{t_0}^t \frac{\langle h\mathbf{x}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds$$

Sachant que \mathbf{x} n'a aucune raison de suivre une telle équation dans notre cas, poser $h = i \frac{d}{dt}$ enlève toute contrainte, auquel cas $\Phi'_{\text{dyn}} = \Phi_{\text{dyn}}$.

Ceci étant, deux arguments sont donnés pour motiver cette définition :

Argument variationnelles

Le premier, fortement inspiré par les travaux de Lilly & Olhede [12], consiste à généraliser la condition (1.4) de séparation haute/basse fréquences sur les signaux AM-FM. Pour cela, l'on commence par faire apparaître une phase ϕ — pour l'instant inconnue — en écrivant \mathbf{x} sous la forme :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x}(t) = e^{i\phi(t)} e^{-i\phi(t)} \mathbf{x}(t) := e^{i\phi(t)} \mathbf{y}(t)$$

Si ϕ est bien choisie, alors \mathbf{y} ne devrait contenir que les informations associées à l'amplitude et la polarisation de \mathbf{x} . Or, conformément à la condition (1.4), la phase doit contenir les hautes fréquences du signal et, inversement, les basses fréquences doivent se trouver dans le reste.

La fréquence donnant, pour le dire vite, la vitesse d'ondulation, la contrainte sur \mathbf{x} va être de limite les variations de \mathbf{y} . Concrètement, ϕ doit être choisie de sorte à minimiser la dérivée $\dot{\mathbf{y}}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \left\| e^{-i\theta(t)} (\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t)\mathbf{x}(t)) \right\|_2^2 = \underset{\theta(t)}{\operatorname{argmin}} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - i\theta'(t)\mathbf{x}(t)\|_2^2$$

La contrainte ne dépendant que de la dérivée θ' , on se ramène à :

$$\min_{\theta(t)} \|\dot{\mathbf{y}}(t)\|_2^2 = \min_{\theta'(t)} \|\dot{\mathbf{x}}(t) - \theta'(t)\mathbf{x}(t)\|_2^2$$

En rappelant que $\frac{d}{dx} \|f(x)\|_2^2 = 2\Re\langle f(x), f'(x) \rangle$, il vient que ce minimum¹ est atteint par $\phi'(t)$ à condition que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\phi'} \|\dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}\|_2^2 = 0 &\iff 0 = 2\Re \left\langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}, \frac{d}{d\phi'} (\dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}) \right\rangle \\ &= 2\Re \langle \dot{\mathbf{x}} - i\phi'\mathbf{x}, -i\mathbf{x} \rangle \\ &= 2\Re \left(i \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle \right) + 2\phi' \Re \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \\ &= -2\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle + 2\phi' \|\mathbf{x}\|_2^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\phi' = \frac{\Im \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$ et :

$$\phi(t) = \Im \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \quad (1.7)$$

¹ L'extremum obtenu est l'unique minimum globale puisque $t \mapsto \|at + b\|^2$ est strictement convexe pour $a \neq 0$.

Arguments des moyennes

Autre argument, cette fois inspiré de [2], ce base sur la notion de fréquence moyenne. D'abord dans le cas d'un signal complexe univarié, sont définies les fonctions de densités d'énergie (resp. d'énergie spectrale) comme :

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto |x(t)|^2 \end{aligned} \quad \text{resp.} \quad \begin{aligned} \varrho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \nu &\longmapsto |\hat{x}(\nu)|^2 \end{aligned} \quad (1.8)$$

À partir de ces dernières est définie la fréquence moyenne de x comme l'espérance $\mathbb{E}_\varrho[\nu]$ de ϱ . Cette fréquence moyenne est liée à la fréquence instantanée par la formule :²

$$\mathbb{E}_\varrho[\nu] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'(t) \rho(t) dt = \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho[\phi'] \quad (1.9)$$

Dans le cas d'un signal $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ multivarié, les densités d'énergies se définissent comme :

$$\begin{aligned} \rho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto |x_i(t)|^2 = a(t)^2 a_i(t)^2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \varrho_i : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \nu &\longmapsto |\hat{x}_i(\nu)|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t &\longmapsto \|\mathbf{x}(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \varrho : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \nu &\longmapsto \|\hat{\mathbf{x}}(\nu)\|^2 = \sum_{i=1}^n \varrho_i(t) \end{aligned}$$

Le second argument consiste alors à dire que l'égalité des moments (1.9) doit rester vraie dans le cas multivarié. Cela assure au moins que la fréquence instantanée de \mathbf{x} , $1/2\pi\phi'$, à pour moyenne $\mathbb{E}_\varrho[\nu]$, la fréquence moyenne en sens de Fourier.

En appliquant la formule (1.9) au ϱ_i , et en notant toujours $\mathbf{x} = a(a_i e^{i\phi_i})_{1 \leq i \leq n}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\varrho[\nu] &= \int_{\mathbb{R}} \nu \varrho(\nu) d\nu = \int_{\mathbb{R}} \nu \sum_{i=1}^n \varrho_i(\nu) d\nu \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}_{\varrho_i}[\nu] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \phi'_i(t) \rho_i(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} a(t)^2 \sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i(t)^2 dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \mathbb{E}_\rho \left[\sum_{i=1}^n \phi'_i a_i^2 \right] \end{aligned}$$

Ce qui mène à poser $\sum_{i=1}^n \phi'_i(t) a_i^2(t)$ pour la fréquence instantanée, avec la phase associée :

$$\phi = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \phi'_i(s) a_i(s)^2 ds \quad (1.10)$$

²cette formule se généralise à tout les moments de ϱ et existe également pour les moments de ρ , voir [3, sec. 1.4] pour une démonstration "à la physicienne" ... *ou bien en annexe ?*

Formule qui concorde bien avec celle de la phase dynamique une fois explicité :

$$\begin{aligned}
\Im m \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{x}(t) \rangle}{\|\mathbf{x}(t)\|^2} &= \Im m \left(\frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n \left((aa_i)'(t) + a(t)a_i(t)i\phi_i'(t) \right) e^{i\phi_i(t)} \overline{a(t)a_i(t)e^{i\phi_i(t)}} \right) \\
&= \frac{1}{a(t)^2} \Im m \left(\sum_{i=1}^n a(t)a_i(t)(aa_i)'(t) + ia(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \right) \\
&= \frac{1}{a(t)^2} \sum_{i=1}^n a(t)^2 a_i(t)^2 \phi_i'(t) \\
&= \sum_{i=1}^n a_i(t)^2 \phi_i'(t)
\end{aligned}$$

D'où

$$\Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a_i(s)^2 \phi_i'(s) ds$$

1.3 Apparition de la phase géométrique

Cela étant dit, il existe une autre façon, plus simple, d'obtenir la phase d'un signal. D'abord, dans le cas univarié, la phase instantanée de $x = ae^{i\phi}$ peut être réécrite comme :

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \arg \left(x(t) \overline{x(t_0)} \right)$$

Formule qui se généralise en cas multivarié par ce qui sera appelé la *phase totale* du signal :

$$\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle \quad (1.11)$$

D'un point de vu géométrique, il est bien connue que le produit scalaire entre deux vecteurs réels $u, v \in \mathbb{R}^n$ est lié à l'angle $\angle(u, v)$ entre ces derniers par la formule :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{R}} = \|u\|^2 \|v\|^2 \cos \angle(v, u)$$

Pour le produit hermitien, cet angle se retrouve dans l'argument, de sorte que si u et v sont complexes :

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \|u\|^2 \|v\|^2 e^{i\angle(v, u)}$$

En ce sens, la phase totale calcul explicitement l'angle entre $\mathbf{x}(t_0)$ et $\mathbf{x}(t)$. La question est alors de savoir si Φ_{dyn} correspond à cette angle. Un calcul explicite montre que c'est bien le cas en univarié ; en notant $\mathbf{x} = ae^{i\phi}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) &= \Im m \int_{t_0}^t \frac{\langle \dot{\mathbf{x}}(s), \mathbf{x}(s) \rangle}{\|\mathbf{x}(s)\|^2} ds = \Im m \int_{t_0}^t \frac{(a'(s) + ia(s)\phi'(s))e^{i\phi(s)} \overline{a(s)e^{i\phi(s)}}}{a^2(s)} ds \\
&= \int_{t_0}^t \frac{a^2(s)\phi'(s)}{a^2(s)} ds \\
&= \phi(t) - \phi(t_0)
\end{aligned}$$

Dans le cas multivarié, en revanche, c'est une autre histoire. En notant cette fois le signal $\mathbf{x} = ae^{i\Phi_{\text{dyn}}}(a_i e^{\psi_i})_{1 \leq i \leq n}$, la phase totale se réécrit :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \arg \left(a(t)a(t_0)e^{i(\Phi_{\text{dyn}}(t) - \Phi_{\text{dyn}}(t_0))} \sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \\
&= \Phi_{\text{dyn}}(t) + \arg \left(\sum_{i=1}^n a_i(t)a_i(t_0)e^{i(\psi_i(t) - \psi_i(t_0))} \right) \quad \text{car } \Phi_{\text{dyn}}(t_0, t_0) = 0
\end{aligned} \quad (1.12)$$

Apparaît alors un terme de déviation de la phase dynamique par rapport à la phase totale, appelé (surprise) phase géomatique et noté :

$$\Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) := \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \quad (1.13)$$

Déviaton qui s'observe expérimentalement, comme le montre la figure 1.1 ci-dessous.



fig. 1.1 — Sur le graphe de gauche, le signal \mathbf{x} à valeur dans \mathbb{R}^2 et dans celui de droite le calcul des phases dynamique et totale ainsi que de leur différence. Résultat tiré des simulation de Le Bihan et al. [8]

Un résultat bien connue en physique [1, 14, 16] est que cette troisième phase est invariante par transformation de jauge et par reparamétrisation. Dans notre contexte, cela signifie d'une part que si \mathbf{x} et $\tilde{\mathbf{x}}$ sont deux signaux multivarié complexe tel que $\tilde{\mathbf{x}} = e^{i\alpha}\mathbf{x}$, avec α une fonction dérivable du temps, alors :

$$\Phi_{\text{geo}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\tilde{\mathbf{x}}) - \Phi_{\text{dyn}}(\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}) = \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x})$$

Et d'autre part que, pour γ un difféomorphisme de \mathbb{R} telle que :

$$\gamma([s_0, s]) = [t_0, t] \quad \mathbf{x} \circ \gamma(s_0) = s_0 \quad \mathbf{x} \circ \gamma(s) = s$$

alors :

$$\Phi_{\text{geo}}(\tilde{\mathbf{x}}, s_0, s) = \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t)$$

Le fait cette phase soit invariante pas transformation de jauge montre qu'elle est associée à la polarisation du signal, comme on va le voir dans la section 2.1 suivante.

Aussi, avec le calcul (1.12) précédent, il peut sembler que le travail sur la phase géométrique est terminée en cela qu'une formule explicite est donnée. D'abord, cette formule demande de connaître les ψ_i , qui eux-mêmes sont obtenus en extrayant la phase dynamique au signal. Or, la formule de Φ_{dyn} n'est pas la plus appropriée au traitement du signal puisque qu'elle fait intervenir intégral et dérivée. Aussi et surtout, cette formule ne permet pas de faire honneur à tout l'aspect géométrique qui se cache derrière cette phase. Chose qui sera abordée extensivement dans la prochaine partie du mémoire.

II — Première étude : cas des signaux AM-FM-PM

Pour une première étude de la phase géométrique du signal, Le Bihan *et al.* se sont penchés sur un cas particulier de signal bivarié [6, 8, 9]. Ces signaux, dit AM-FM-PM, sont présentés dans une première partie et le calcul explicite de leur phases — totale, dynamique et géométrique — est présenté. Dans une seconde partie... *je sais pas trop*

2.1 Définitions et calcul des phases

Ces signaux AM-FM-PM viennent généraliser les signaux AM-FM univarié en tenant compte de l'état de polarisation permis par le passage au 2D. En quelques mots, dans le cas le plus simple, un signal bivarié à valeurs réelles s va décrire une ellipse en cours du temps. On parle de polarisation elliptique et s va s'écrire :

$$s(t) = a \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi \cos \varphi(t) \\ \sin \chi \sin \varphi(t) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{R}^+, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \chi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Les paramètres a et χ caractérisent respectivement la taille et l'excentricité de l'ellipse, θ son orientation dans le plan et $\varphi(t)$ précise où se trouve s à l'instant t sur cette ellipse. Le tout est représenté sur la ?? ci-dessous :



fig. 1.2 — Ellipse de polarisation du signal s sur laquelle sont représentés ses paramètres a, φ, θ, χ .

En autorisant les paramètres de polarisation à varier au cours du temps et après une transformation en signal analytique, mentionnée dans la section 1.1, on obtient la définition suivante :

DÉFINITION 4 (SIGNAL AM-FM-PM) — Un signal bivarié complexe \mathbf{x} AM-FM-PM (*amplitude, frequency and polarization modulated*) est caractérisé par quatre paramètres a, φ, θ et χ , respectivement à valeur dans $\mathbb{R}^+, \mathbb{R},]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$, vérifiant :

$$|\varphi'(t)| \gg |\theta'(t)|, |\chi'(t)|, \left| \frac{a'(t)}{a(t)} \right| \quad \left| \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} \right| \gg 1 \quad (1.14)$$

Auquel cas, \mathbf{x} prend la forme, $\forall t \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{x}(t) = a(t)e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix} = a(t)e^{i\varphi(t)} \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix} \quad (1.15)$$

où $R_{\theta(t)}$ est la matrice de rotation d'angle $\theta(t)$. Voir [5, ann. 4.B] pour une construction détaillée.

La transformation en signal à valeurs complexes est nécessaire ³ pour étudier la phase géométrique car c'est uniquement dans le cadre de complexe qu'elle a été étudiée jusqu'à présent. Et, comme pour les signaux AM-FM, les hypothèses sur a, φ, θ, χ assure que les paramètres soient interprétables comme sur la figure 1.2 précédente.

Les trois phases de tels signaux sont données par la proposition 1 suivante :

PROPOSITION 1 (PHASES DE SIGNAL AM-FM-PM) — Les trois phases d'un signal bivarié AM-

³ Nous reviendrons sur ce point dans la dernière partie du mémoire (.. si je trouve le temps et que je trouve des choses à en dire)

FM-PM \mathbf{x} de paramètres $(a, \varphi, \theta, \chi)$ sont données par les formules :

$$\Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arg \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin (\chi(t_0) + \chi(t)) \right) \\ &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \left(\tan \Delta\theta \frac{\tan \chi(t_0) + \tan \chi(t)}{1 + \tan \chi(t_0) \tan \chi(t)} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geo}}(\mathbf{x}, t_0, t) &= \Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t_0, t) - \Phi_{\text{dyn}}(\mathbf{x}, t_0, t) \\ &= \arctan \left(\tan \Delta\theta \frac{\tan \chi(t_0) + \tan \chi(t)}{1 + \tan \chi(t_0) \tan \chi(t)} \right) - \int_{t_0}^t \theta'(s) \sin 2\chi(s) ds \end{aligned} \quad (1.18)$$

où $\Delta y = y(t) - y(t_0)$ pour $y = \chi$. La démonstration se trouve en annexe B.2.

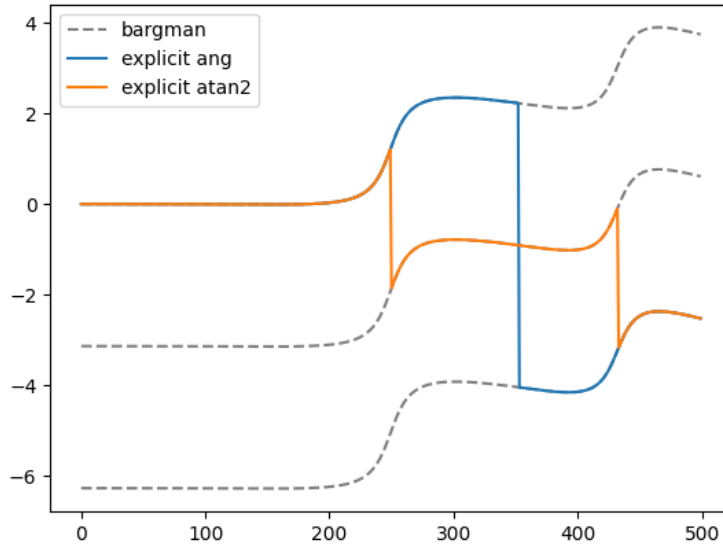


fig. 1.3 — Evolution de la phase géométrique d'un signal AM-FM-PM généré. En gris la phase géométrique du signal calculé via l'invariant de Bargmann. Les deux autres sont calculées avec la formule équation (1.18), en bleu en utilisant de l'argument pour la phase totale et en orange en utilisant atan2.

Deux remarques sur ces formules. La première est que la phase géométrique ne dépend que des paramètres de polarisations θ et χ , un résultat rassurant sachant qu'elle est invariante par transformation de jauge. La seconde, nettement plus troublante, est que φ ne s'interprète ni comme la phase totale ni comme la phase dynamique. Plus loin, [section 2.3](#), nous reviendrons sur laquelle des deux “doit” représenter φ .

Aussi, la phase géométrique est séparée en deux termes. Le premier, en arctangente, correspond à l'angle formé par les vecteurs portant la polarisation instantanée, c'est-à-dire les vecteurs :

$$R_{\theta(t_0)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t_0) \\ -i \sin \chi(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_{\theta(t)} \begin{pmatrix} \cos \chi(t) \\ -i \sin \chi(t) \end{pmatrix}$$

2.2 Interprétation dans la sphère de Poincaré

Pour interpréter le second membre, c'est beaucoup moins clair. Il faut d'intéresser la projection $\rho_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \bar{\mathbf{x}}^t \mathbf{x}$. Avec des calculs (interminables), on obtient l'écriture :

$$\rho_{\mathbf{x}} = id + \sin 2\theta \cos 2\chi \sigma_1 + \sin 2\chi \sigma_3 + \cos 2\theta \cos 2\chi \sigma_3$$

où les σ_i sont les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarque alors que les coefficients associés aux σ_i sont des coordonnées sphériques lorsque les σ_i sont associés à la base canonique de \mathbb{R}^3 , conformément à la figure 1.4 *pas à jour* ci-contre.

Posé ainsi, l'intégrale dans la phase dynamique ne s'interprète pas. Vraiment pas, [Wikipedia](#) liste une tonne de formule mais aucune ne colle avec $\theta' \sin 2\chi$ parce que les angles choisis ne le permette pas. Notre convention est que 2χ correspond à l'angle formé par σ_2 et ρ , là où sur Wikipedia, il est définie par l'angle entre la projection de ρ sur $\text{Vec}\{\sigma_{1,2}\}$ et ρ . Pour le dire rapidement, ce la change tout les $\cos 2\chi$ en $\sin 2\chi$ et inversement (modulo des signes).

Pour pouvoir interpréter l'intégrale, il faut choisir les mêmes conventions qu'eux, auquel cas, il faut poser :

$$\rho = \sin 2\theta \sin 2\chi \sigma_1 + \cos 2\chi \sigma_3 + \cos 2\theta \sin 2\chi \sigma_3$$

et notre vecteur apparaît comme la dérivée :

$$\hat{\chi} = \frac{\partial}{\partial \chi} \rho = \sin 2\theta \cos 2\chi \sigma_1 - \sin 2\chi \sigma_3 + \cos 2\theta \cos 2\chi \sigma_3$$

Dans ce cas, $\theta' \sin 2\chi$ s'interprète (à un facteur près) comme la norme de la composante horizontale du vecteur vitesse de ρ , puisque :

$$\partial_t \rho = 2\chi' \hat{\chi} + 2\theta' \sin 2\chi \hat{\theta}$$

Ainsi, mais c'est vraiment pas beau, l'intégrale de Φ_{dyn} s'interprète comme la longueur du déplacement horizontale-ish de la projection ρ de \mathbf{x} .

Si on veut le voir en terme d'élément d'air dS , alors on a :

$$dS = \sin 2\chi d\theta d\chi$$

Mais comme θ et χ dépendent d'un paramètre commun t , ça serait très impropre de parler de calcul d'air sachant que $\theta'(t) \sin 2\chi(t)$ parcourt un chemin vraiment. D'autant plus que là pas d'intégrale sur θ ... même si peut-être qu'on pourrait la faire apparaître avec un changement de variable approprié (surement que non en plus parce que le passage de t à (θ, χ) à par une différentielle inversible donc au cul le det de la Jacobienne :/)

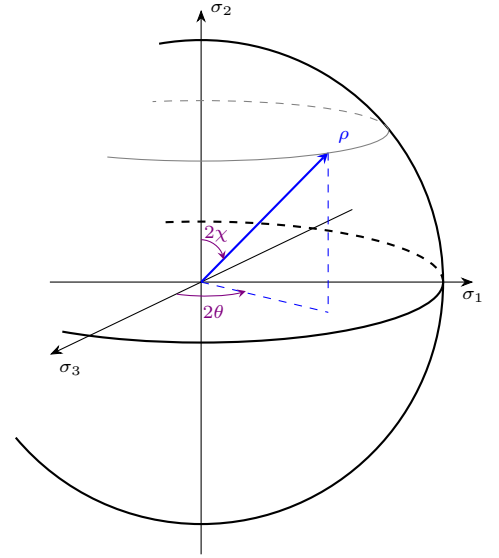


fig. 1.4 — Sphère de Poincaré, blablabla

2.3 Généralisation en plus haute dimension

- Différentes écritures du bivarié pour différentes généralisation :
- Les quaternions on passe vites parce que ca se généralise très mal, Lefevre a a parlée, ca mène aux algèbres Clifford : trop de contrainte sur les dimensions des signaux
- En terme d'expo de matrice ? Lefevre [10, sec. I.3] l'a fait en trivarié mais au delà, y'a plus vraiment de choix remarquable de base pour $u(n)$
- En augmentant la taille de la matrice de rotation ? Lilly [11] l'a fait en trivarié et mais là encore, en terme de généralisation c'est pas si dingue parce que la matrice de rotation est pas calculable.
- Dans tout ça, on ratte le plus important : La phase géo est invariante par transfo de jauge, donc il faut faire apparaître PC^{n-1} dans la décomposition.
- et en fait, c'est le cas en bivarié car $PC^1 \cong S^2$!
- PC^{n-1} oui mais il faut pas non plus regarder que la projection parce qu'on perd toute les phases dans ce cas.

- Le bon compromis c'est les variétés fibrées : on est dans $\mathbb{P}\mathbb{C}^{n-1}$ mais on garde les phases dans les fibres.
- D'autant plus que ça à déjà été fait en physique et c'est vraiment concluant... (transition vers la grande partie suivante.)

ANNEXES

Annexe A — Compléments sur l'analyse temps-fréquence

A.1. Un mot sur la notion de fréquence instantanée (*nécessaire?*)

A.2. Formalisme derrière la transformée en SA

A.3. Lien avec le théorème de Bedrosian

Annexe B — Compléments sur les signaux AM-FM-PM

B.1. Construction détaillée des signaux AM-FM-PM (*nécessaire?*)

- Signal polarisé classique (θ, χ constants)
- Transformé en SA avec les hypothèses de Bedrosian
- Définition général en faisant dépendre θ/χ du temps
- Paramètre de Polar sur la sphère de Poincaré

B.2. Démonstrations

Démonstration de la formule (1.16), proposition 1

Par souci de lisibilité, on note $\mathcal{U} = R_\theta \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) \cos \chi(t) + i \sin \theta(t) \sin \chi(t) \\ \sin \theta(t) \cos \chi(t) - i \cos \theta(t) \sin \chi(t) \end{pmatrix}$, de sorte que la dérivée de $\mathbf{x} = ae^{i\varphi}\mathcal{U}$ s'écrit :

$$\dot{\mathbf{x}} = a'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\varphi'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix} + ae^{i\varphi}\chi' \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \chi + i \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \theta \sin \chi - i \cos \theta \cos \chi \end{pmatrix}$$

Les vecteurs des deux derniers membres s'expriment en fonction des composantes $\mathcal{U}_{1,2}$ de \mathcal{U} :

$$\begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi \\ \cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \chi + i \sin \theta \cos \chi \\ -\sin \theta \sin \chi - i \cos \theta \cos \chi \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{U}}_2 \\ -\overline{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}$$

Le produit hermitien $\langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle$ s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle &= \left\langle a'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ia\varphi'e^{i\varphi}\mathcal{U} + ae^{i\varphi}\theta' \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix} + ia\varphi'\chi' \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{U}}_2 \\ -\overline{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, ae^{i\varphi}\mathcal{U} \right\rangle \\ &= \left\langle a'\mathcal{U} + ia\varphi'\mathcal{U} + a\theta' \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix} + ia\chi' \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{U}}_2 \\ -\overline{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, a\mathcal{U} \right\rangle \\ &= aa'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2\varphi'\langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + a^2\theta' \left\langle \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle + ia^2\chi' \left\langle \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{U}}_2 \\ -\overline{\mathcal{U}}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle \end{aligned}$$

où les deux derniers produits hermitiens donnent :

$$\begin{aligned}
\left\langle \begin{pmatrix} -\mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle &= -\mathcal{U}_2 \overline{\mathcal{U}_1} + \mathcal{U}_1 \overline{\mathcal{U}_2} \\
&= 2i \Im m(\mathcal{U}_1 \overline{\mathcal{U}_2}) \\
&= 2i \Im m\left((\cos \theta \cos \chi + i \sin \theta \sin \chi) (\sin \theta \cos \chi + i \cos \theta \sin \chi) \right) \\
&= 2i (\cos^2 \theta \cos \chi \sin \chi + \sin^2 \theta \sin \chi \cos \chi) \\
&= 2i \cos \chi \sin \chi \\
&= i \sin 2\chi
\end{aligned}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \overline{\mathcal{U}_2} \\ -\overline{\mathcal{U}_1} \end{pmatrix}, \mathcal{U} \right\rangle = \overline{\mathcal{U}_2} \mathcal{U}_1 - \overline{\mathcal{U}_1} \mathcal{U}_2 = 0$$

D'où, sachant que $\|\mathbf{x}\|^2 = a^2$ et $\|\mathcal{U}\| = 1$, la formule :

$$\begin{aligned}
\frac{\Im m \langle \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} &= \frac{1}{a^2} \Im m \left(aa' \langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2 \varphi' \langle \mathcal{U}, \mathcal{U} \rangle + ia^2 \theta' \sin 2\chi \right) \\
&= \frac{1}{a^2} \left(a^2 \varphi' \|\mathcal{U}\|^2 + a^2 \theta' \sin 2\chi \right) \\
&= \varphi' + \theta' \sin 2\chi
\end{aligned}$$

■

Démonstration de la formule (1.17), proposition 1

Pour la phase totale, on note cette fois $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \cos \chi \\ -i \sin \chi \end{pmatrix}$ et on a :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle &= \left\langle a(t) e^{i\varphi(t)} R_{\theta(t)} \mathcal{V}(t), a(t_0) e^{i\varphi(t_0)} R_{\theta(t_0)} \mathcal{V}(t_0) \right\rangle \\
&= a(t) e^{i\varphi(t)} a(t_0) e^{-i\varphi(t_0)} \left\langle R_{\theta(t)} \mathcal{V}(t), R_{\theta(t_0)} \mathcal{V}(t_0) \right\rangle \\
&= a(t_0) a(t) e^{i(\varphi(t) - \varphi(t_0))} \left\langle R_{\theta(t) - \theta(t_0)} \mathcal{V}(t), \mathcal{V}(t_0) \right\rangle
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, on note $\Delta y = y(t) - y(t_0)$, $y_1 = y(t_0)$ et $y_2 = (t)$ pour $y = \varphi, \theta, \chi$. Le produit hermitien à droite s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
\left\langle R_{\Delta\theta} \mathcal{V}(t), \mathcal{V}(t_0) \right\rangle &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\theta \cos \chi_2 + i \sin \Delta\theta \sin \chi_2 & \sin \Delta\theta \cos \chi_2 - i \cos \Delta\theta \sin \chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \chi_1 \\ i \sin \chi_1 \end{pmatrix} \\
&= \cos \chi_1 \left(\cos \Delta\theta \cos \chi_2 + i \sin \Delta\theta \sin \chi_2 \right) + i \sin \chi_1 \left(\sin \Delta\theta \cos \chi_2 - i \cos \Delta\theta \sin \chi_2 \right) \\
&= \cos \Delta\theta \left(\cos \chi_1 \cos \chi_2 + \sin \chi_1 \sin \chi_2 \right) + i \sin \Delta\theta \left(\cos \chi_1 \sin \chi_2 + \sin \chi_1 \cos \chi_2 \right) \\
&= \cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2)
\end{aligned}$$

D'où la phase totale :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{tot}}(\mathbf{x}) &= \arg \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_0) \rangle = \arg \left(a(t_0) a(t) e^{i(\varphi(t) - \varphi(t_0))} \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2) \right) \right) \\
&= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arg \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi + i \sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2) \right)
\end{aligned}$$

et l'argument restant s'écrit comme une arctangente, donnant :

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{tot}}(\boldsymbol{x}) &= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \frac{\sin \Delta\theta \sin(\chi_1 + \chi_2)}{\cos \Delta\theta \cos \Delta\chi} \\
&= \varphi(t) - \varphi(t_0) + \arctan \left(\tan \Delta\theta \frac{\sin(\chi_1 + \chi_2)}{\cos \Delta\chi} \right) \\
&= \dots
\end{aligned}$$

■

PARTIE II

ASPECTS GÉOMÉTRIQUES D'UNE PHASE ÉPONYME

Plan approximatif de cette partie :

I — Cadre d'étude

Dans notre cas, tout s'écrit très simplement donc pas besoin de sortir tout l'arsenal de géo diff

1.1 — Construction de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$

1.1.1 — Rappel de géométrie différentielle et notation

- Atlas, carte coordo local
- Espace tangent
- Différentielle et image réciproque
- Variété riemannienne
- *un mot sur les variétés différentielles complexes (voir annexe pour plus de détail)*

1.1.2 — Le cas de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$

- Définition comme espace quotient $\mathbb{C}^{n+1*}/\mathbb{C}^*$
- C'est variété différentielle (voir annexe pour détails)
- *Un mot sur la projection $x \mapsto xx^\dagger$ utilisé en physique (c'est équivalent)*

1.2 — Fibré principaux

1.2.1 — Définitions de base

- Définition de VFP
- Section local (canonique)
- Changement de carte

1.2.2 — Application à notre cas

- $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ comme quotient $\mathbb{S}^n/U(1)$
- explicite les cartes, sections, etc
- Interprétation des paramètres (amplitude, phase, polar)
- le pb du choix de phase (version géo diff)

1.3 — Espaces horizontaux et connexion

1.2.1 — Définitions générales

- Espace verticaux
- connexion comme ensemble d'espace horizontaux
- 1-forme de connexion

1.2.2 — Connexion sur $\mathbb{S}^n(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$

- Connexion induite par la métrique
- Explicitation de ω
- Formule de changement de carte dans ce cas

II — Interprétation géométrique des trois phases

2.1 — Première interprétation

- La découpe de $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{+*} \times U(1) \times \text{PC}^n$ fait exactement ce qu'on veut (et fuck l'amplitude)
- la phase instantanée revient faire un choix de jauge, un choix de relèvement. Mais pas possible avec h_i parce que carte-dépendant
- c'est là qu'intervient l'horizontal lift : ça fait office de valeur de référence modulo un choix de phase initiale
-

2.2 — Cas pseudo-cyclique

- Le dessin de Bohm :
- phase dyn = signal - horizontal lift
- phase geo = horizontal lift - cyclique lift (<- indé du signal !)
- phase tot = cumul des deux

2.3 — La phase géo dans l'espace projectif

- Géodésique de PC^n et généralisation du cas pseudo-cyclique
- Bonnet-Gauss & Stokes : phase géo comme calcul d'air
- *Comme partie imaginaire de la métrique (+ lien avec Fisher)*

Annexes

A — Algèbre et groupe de Lie

- def : groupe de Lie G
- def : Algèbre de Lie \mathfrak{g} associée à G
- \mathfrak{g} vu comme tangent $T_e G$
- Cas particulier : $G = U(1)$

A reprendre, comme toutes les intros Pour étudier la phase géométrique d'un signal ψ , il nous faut projeter ψ sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$, et ceux, tout en gardant une trace de sa phase puisque c'est le lien entre les deux qui nous intéresse. Il nous faut donc envoyer ψ dans le produit :

$$U(1) \times \mathbb{P}\mathbb{C}^n \quad (\text{ou } \mathbb{C}^{n-1*}/\mathbb{C}^*)$$

Garder le lien entre cet espace et celui d'origine mène à se placer dans le cadre avec d'un *variété fibrée* (ou simplement fibré). Plus précisément, comme $U(1)$ est un groupe de lie, ce sera un *fibré principal* noté $S^{2n+1}(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$.

Comme son nom l'indique, $S^{2n+1}(U(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$ à une structure de variété différentielle et le lien entre les $U(1)$ et $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ va se faire par le biais d'une connexion. L'on verra alors que cette connexion est intrinsèquement lié à la phase dynamique du signal, et il sera discuté de la signification de ce résultat.

La phase géométrique, quand à elle, sera liée avec la métrique hermitienne associée aux l'espaces projectifs complexes.

Tout cela va demander quelques prérequis que nous allons voir à présent.

I — Prérequis mathématique

1.1 Variété fibrée principale et connexion

1.1.1 Première définition

Pour le dire simplement, les *variétés fibrés* sont des variétés qui ressemble localement à des espaces produits. Le ruban de Modius en est un exemple typique : il ne peut pas s'écrire comme le produit d'un cercle avec un segment $S^1 \times [0, 1]$ à cause de la façon dont il est construit. Mais localement, il est tout à fait comparable (*i.e.* difféomorphe) à un tel produit (*cf.* [fig. 2.1](#)).

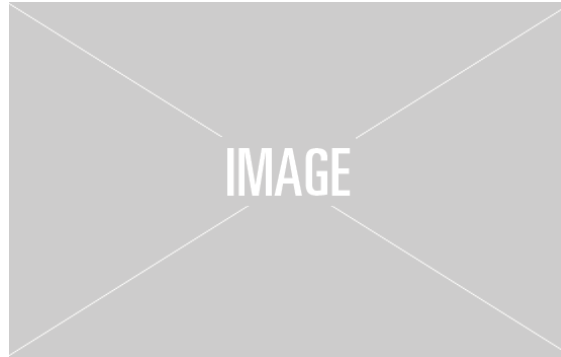


fig. 2.1 — Représentation du ruban de Modius en tant que fibré. Les notations sont reprise de la définition 5.

Il existe toutes sorte de variétés fibrées dès lors qu'elles sont munies de structure remarquable. Celles qui vont nous intéresser sont celle dites principales⁴ :

DÉFINITION 5 (VARIÉTÉ FIBRÉE PRINCIPALE) — Une *variété fibrée principale* (VFP), ou *fibré principal* est constituée de deux variétés différentielles P et B telles que :

- Il existe un groupe de Lie G opérant à droite (ou à gauche) sur P via l'application différentiable :

$$R : \begin{aligned} P \times G &\longrightarrow P \\ (p, g) &\longmapsto R_g(p) := p \cdot g = pg \end{aligned} \quad (2.1)$$

⁴ Bien que ce ne sera pas précisé, il sera toujours sous-entendu que les différentes variétés et cartes doivent avoir les mêmes niveaux de régularités pour que le tout reste cohérent.

- Il existe une surjection différentiable $\pi : P \longrightarrow B$ telle que :

$$\forall p \in P, \quad \pi^{-1}(\pi(p)) = pG \quad (2.2)$$

- P est munie d'un ensemble de paire (U_i, h_i) tel que les U_i forment un recouvrement de B et tel que les $h_i : G \times U_i \longrightarrow \pi^{-1}(U_i) \subset P$ soient des difféomorphismes vérifiant :

$$\forall a, b \in G, \quad \forall x \in B, \quad h_i(ab, x) = h_i(a, x) \cdot b \quad \text{et} \quad \pi \circ h_i(a, x) = x$$

La variété B est appelé la *base* de la VFP, G son *groupe structural* et pG la *fibres* de P passant par p et au dessus de $\pi(p) \in B$. Le tout est notée $P(R, G, \pi, B)$ ou plus simplement $P(G, B)$.

Les fibres pG sont toutes difféomorphes à G et B est difféomorphe à P/G . Le diagramme commutatif ci-contre résume la situation (pr_i est la projection canonique sur la i -ème composante).

$$\begin{array}{ccc} G \times U_i & \xrightarrow{h} & \pi^{-1}(U_i) \subset P \\ \text{pr}_2 \downarrow & \swarrow \pi & \\ U_i & & \end{array}$$

L'ensemble $\{(U_i \times G, h_i)\}_i$ est l'équivalent d'un atlas pour les variétés différentielles classiques mais adapter pour tenir compte de la structure fibré de P et de l'action de G . Explicité les changements de cartes dans P , ce fait comme suit.

D'abord, P étant localement difféomorphe à un produit $G \times U_i$, on peut y tracer des graphes appelés *sections locales*, comme sur la figure 2.2 ci-dessous. Formellement, une section locale au dessus de $U_i \subset B$ est une application $\sigma : U_i \longrightarrow P$ vérifiant :

$$\pi \circ \sigma = \text{id}|_{U_i}$$

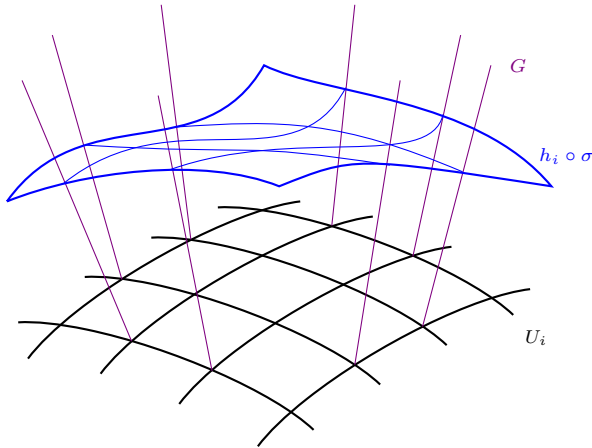


fig. 2.2 — Représentation d'une section local σ au dessus de $U_i \subset B$ de dimension 2. Comme P n'est pas un produit à proprement parler, σ est représenté dans $G \times U_i$ à travers h_i .

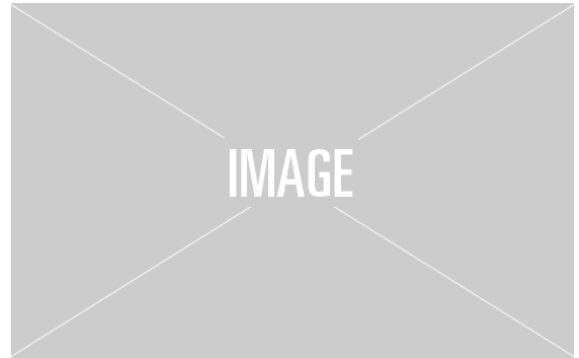


fig. 2.3 — Représentation de la section canonique définie par rapport à G avec une seconde section $\sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot g(x)$. Cette fois B est une variété de dimension 1.

Ensuite, les hypothèses sur $P(G, B)$ sont telles que G agit transitivement et librement (ou sans point fixe) sur P . C'est-à-dire que, sur une même fibre, tout point peut être atteint par n'importe quel autre via l'action de G (transitivité) :

$$\forall x \in B, \quad \forall p, q \in P_x, \quad \exists t(p, q) \in G \mid p = q \cdot t(p, q)$$

et que la seule façon de laisse les points invariants par cette même action est de passer par l'élément neutre e (libre) :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad p = p \cdot g \implies g = e$$

De la transitivité de G , découle le fait que toutes les sections locales σ au dessus de U_i peuvent s'écrire à partir d'une même section σ_i via la formule :

$$\forall x \in B, \quad \sigma(x) = \sigma_i(x) \cdot t(\sigma_i(x), \sigma(x))$$

Son caractère libre, lui assure l'unicité d'un choix canonique de section σ_i sur U_i . Elle est donnée par :

$$h_i(x, e) = \sigma_i(x)$$

Cela mène à la définition :

DÉFINITION 6 (FONCTIONS DE TRANSITIONS) — L'intersection de deux cartes est noté $U_{ij} = U_i \cap U_j$ et le passage d'une section local canonique est donné par :

$$\forall x \in U_{ij}, \quad \sigma_j(x) = \sigma_i(x) t(\sigma_i(x), \sigma_j(x))$$

L'élément de G , $t(\sigma_i, \sigma_j)$, est alors appelé *fonction de transition* et sera noté φ_{ij} . Elle fait effectivement la transition entre deux cartes dans le sens où :

$$\forall (g, x) \in G \times U_{ij}, \quad h_i^{-1} \circ h_j(g, x) = (\varphi_{ij}(x)g, x)$$

Dans la suite, il sera nécessaire de munir P d'une connexion, qui s'introduit comme suit.

1.1.2 Connexion sur VFP

Comme P ressemble localement à un produit $G \times U_i$, il est utile de séparer ses espaces tangents $T_p P$ comme une somme directe d'espaces tangents respectivement aux fibres et à la base. Conformément aux représentations précédentes (fig. 2.1 à 2.3), les premiers sont appelées espaces tangents *verticaux*, les seconds *horizontaux* et l'on note :

$$\forall p \in P, \quad T_p P = V_p P \oplus H_p P$$

Les tangents verticaux $V_p P$ se définissent canoniquement par rapport à π . Pour cela, la *fonction tangente* (ou *dérivée*) de π au point p est noté $T_p \pi$ avec :

$$(T_p \pi)_j^i = \frac{\partial \pi^i}{\partial x^j}(p) = \partial_j \pi^i(p)$$

Ainsi, $T_p \pi$ est à valeur de $T_p P$ dans $T_{\pi(p)} B$ et l'espace tangent vertical au point p se définit comme :

$$V_p P := \text{Ker}(T_p \pi) = \{v \in T_p P \mid T_p \pi(v) = 0\}$$

Il s'avère que les espaces horizontaux ne peuvent pas être construits de cette façon. Il faut donc faire un choix pour les $H_p P$ et c'est ce choix qui est appelé connexion (elle connecte les espaces tangents entre eux). Ces sous-espaces peuvent être caractérisés par une 1-forme différentiable ω sur P à valeur dans $V_p P$, auquel cas :

$$\forall p \in P, \quad H_p P = \text{Ker}(\omega_p)$$

Dans le cas des VFP, une connexion doit en plus avoir de bonnes propriétés au regard de l'action R , aboutissant à la définition :

DÉFINITION 7 (CONNEXION SUR VFP) — Une *connexion* sur une VFP $P(G, B)$ est la donnée d'un sous-espace tangent, $H_p P \subset T_p P$, en tout point de $p \in P$ tel que :

- $H_p P$ dépend différentiellement de p ("dépendre différentiellement" à un sens précis mais qui ne sera pas utile pour la suite).
- $H_p P$ est supplémentaire à $V_p P$ dans $T_p P$:

$$T_p P = V_p P \oplus H_p P \tag{2.3}$$

- l'assignation des $H_p P$ est invariante pas l'action de G au sens où :

$$\forall (p, g) \in P \times G, \quad H_{R_g(p)} P = T_p R_g(H_p P) = \{T_p R_g(v) \mid v \in H_p P\} \quad (2.4)$$

Au delà d'assurer une compatibilité avec la connexion, l'équation (2.4) permet de n'avoir à définir la connexion qu'en un seul point de chaque fibre, les autres se déduisant par l'action de G . Entre autre, pour tout point de la base $x \in B$, il suffit de la définir en $\sigma_i(x) = h_i(e, x)$ et l'espace horizontale en tout autre point $p = h_i(x, g) = \sigma_i(x) \cdot g$ au dessus de x est donné par :

$$H_p P = T_{\sigma_i(x)} R_g(H_{\sigma_i(x)} P)$$

De même, la 1-forme de connexion n'a besoin d'être définie que sur un point particulier au dessus de chaque fibre. Les espaces verticaux étant tous difféomorphes à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} \cong T_e G$ de G , c'est sur \mathfrak{g} qu'elle est définie :

DÉFINITION 8 — La 1-forme de connexion ω d'une VFP $P(G, B)$ est définie comme la 1-forme différentiable sur P à valeur dans \mathfrak{g} (i.e. en tout point $p \in P$, ω_p est valeur de $T_p P$ dans \mathfrak{g}), telle que :

$$\forall p \in P, \quad H_p P := \text{Ker}(\omega_p) \quad (2.5)$$

En terme de coordonnée local, ω elle n'a pas besoin d'être défini sur $U_i \times G$, mais seulement sur $U_i \cong U_i \times \{e\}$. Ainsi, ω induit une 1-forme sur les cartes U_i par l'image réciproque des sections canonique σ_i . Elles sont notées $\mathcal{A}_i := \sigma_i^* \omega$ et sur le chevauchement U_{ij} , elles vérifient :

$$\mathcal{A}_j = \varphi_{ij}^{-1} \mathcal{A}_i \varphi_{ij} + \varphi_{ij}^{-1} d\varphi_{ij} \quad (2.6)$$

Si \mathcal{A}_i est définie sur les U_i , plutôt que $U_i \times G$, c'est encore grâce à la compatibilité de la connexions avec la l'action de G sur P , qui l'information sur G redondante. **MEH.**

1.2 Application au signal multivariée complexe

1.2.1 $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ comme variété différentielle

Un façon de définir l'espace projectif complexe $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est une structure quotient qui peut être obtenue de deux façon. La première, analogue aux espaces projectifs réels, est de poser :

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^n := \mathbb{C}^{n+1*} / \mathbb{C}^*$$

C'est-à-dire l'ensemble des classes de $\mathbb{C}^{n+1*} = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0_{\mathbb{C}^{n+1}}\}$ par la relation d'équivalence :

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in \mathbb{C}^* \mid x = \lambda y$$

Cette formulation de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ permet de le munir d'une structure de variété. Pour cela, la classe de $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ du représentant $z = (z^i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1*}$ est noté $[z]$ et sont définis les ensembles et cartes, $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$U_i = \left\{ [z] \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n \mid z \in \mathbb{C}^{n+1}, z^i \neq 0 \right\} \quad \phi_i : \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & \mathbb{C}^i \times \{1\} \times \mathbb{C}^{n-i} \cong \mathbb{C}^n \\ [z] & \longmapsto & \frac{1}{z^i} z = (z^0/z^i, \dots, 1, \dots, z^n/z^i) \end{array} \quad (2.7)$$

Si l'ensemble d'arrivé $\phi_i(U_i)$ est équivalent à un ouvert de \mathbb{C}^n , il est plus commode de travailler dans \mathbb{C}^{n+1} puisque cela évite de devoir enlever et rajouter des coefficient dans les formules de

changement de carte :

$$\forall z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z^{i,j} \neq 0 \quad (i.e. [z] \in U_i \cap U_j), \quad \phi_i \circ \phi_j^{-1}(z) = \frac{z^j}{z^i} z$$

Les (U_i, ϕ_i) forment un atlas sur l'espace projectif complexe, faisant de ce dernier une variété de dimension $\dim = 2n$. Comme $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est plus précisément une variété complexe⁵, il est utile d'écrire ses coordonnées locales sous la forme $(w^\mu, \bar{w}^\mu)_{1 \leq \mu \leq n}$, où :

$$\forall w \in U_i, \forall \mu \neq i, \quad w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i}, \quad \text{où } [z] = w$$

1.2.2 $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ comme base du fibré principale $\mathbb{S}^n(\mathbb{U}(1), \mathbb{P}\mathbb{C}^n)$

Une deuxième façon d'aborder $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est de se débarrasser de la norme (resp. du module) des vecteurs de \mathbb{C}^{n+1*} (resp. des scalaires \mathbb{C}^*). Le troisième théorème d'isomorphisme permet ainsi décrire :

$$\mathbb{P}\mathbb{C}^n := \mathbb{C}^{n+1*} / \mathbb{C}^* \cong (\mathbb{C}^{n+1*} / \mathbb{R}^{+*}) / (\mathbb{C}^* / \mathbb{R}^{+*}) \cong \mathbb{S}^n / \mathbb{U}(1)$$

où $\mathbb{S}^n := S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est la sphère unité de dimension (réelle) $2n+1$, vue comme sous-ensemble de \mathbb{C}^{n+1} . Une autre façon de le comprendre est de voir qu'en écrivant $\lambda = re^{i\theta}$, moralement $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{U}(1)$. $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ peut alors être vu comme des vecteurs de \mathbb{C}^{n+1*} à une normalisation près puis à un $e^{i\theta}$ près. Ce qui revient à prendre des vecteurs normés de \mathbb{C}^{n+1} (i.e. dans \mathbb{S}^n) modulo l'action de $\mathbb{U}(1)$.

De façon plus concrète, là où dans $\mathbb{C}^{n+1*} / \mathbb{C}^*$, les coordonnées de $w \in U_i$ s'écrivaient $w^\mu = \frac{z^\mu}{z^i}$; dans \mathbb{S}^n , z est déjà normé auquel cas :

$$w^\mu = \frac{z^\mu}{|z^i| e^{i \arg(z^i)}} = \frac{z^\mu}{\sqrt{1 - \sum_{\nu \neq i} |z^\nu|^2}} e^{-i \arg(z^i)}$$

et on constate bien que w^ν est définie modulo un choix de $e^{-i \arg z^i} \in \mathbb{U}(1)$. Réciproquement, à chaque paire $(w, e^{i\theta}) \in U_i \times \mathbb{U}(1)$, est associée un unique vecteur $z_i = h_i(w, e^{i\theta}) \in \mathbb{S}^n$ avec :

$$z_i^\mu = \frac{w^\mu}{\sqrt{1 + w^\nu \bar{w}_\nu}} e^{i\theta}$$

Par ailleurs, cette écriture est bien plus intéressante pour notre propos puisque le passage au quotient par $\mathbb{U}(1)$ traduit l'invariance par transformation de jauge.

II — Interprétation des trois phases dans ce cadre

2.1 HHHHH

blablabla maintenant on peut recoller les morceaux.

Comme $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ est une variété quotient, elle induit naturellement une variété principale :

PROPOSITION 2 — La $2n+1$ -sphère S^{2n+1} , vu comme variété plongée dans \mathbb{C}^n est une VFP de base $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$ et de fibre type $\mathbb{U}(1)$. L'action de $\mathbb{U}(1)$ sur S^{2n+1} étant induite par le produit complexe classique et où :

- La fibration π est la projection canonique de S^{2n+1} sur $\mathbb{P}\mathbb{C}^n$:

$$\pi : \begin{array}{ccc} S^{2n+1} & \longrightarrow & \mathbb{P}\mathbb{C}^n \\ z & \longmapsto & [z] \end{array}$$

⁵ Le formalisme des variétés complexes ne sera pas nécessaire outre mesure, certains concepts seront tout de même utiles et une rapide introduction de ces derniers se trouve en annexe C

- Les cartes locales h_i sont telles que :

$$\forall z \in \pi^{-1}(U_i), \forall e^{i\theta} \in U(1), h_i(z, e^{i\theta}) = \frac{[z]}{\sqrt{1 + w^\nu \overline{w}_\nu}} e^{i\theta} \in \mathbb{S}^n \quad \text{où les}$$

- Tout les représentant z d'un élément de la base $\zeta \in \mathbb{P}\mathbb{C}^n$ sont normé, ainsi, alors tout La section canonique au dessus des U_i , σ_i elle est définie par :

Voir [7, lemme 2.17] pour une démonstration de l'aspect fibré.

2.2 Cas pseudo-cyclique

ANNEXE

Annexe A — Connexion induite par une métrique

Si $P(G, B)$ une VFP munie d'une métrique riemannienne g . La connexion induite par g sur P est définie par :

$$\forall p \in P, \quad H_p P = V_p P^\perp \quad (2.8)$$

Plus concrètement, $V_p P$ est isomorphe à \mathfrak{g} via la transformation :

$$\forall p \in P, \forall a \in \mathfrak{g}, \quad a^*(p) = \left. \frac{d}{dt} p \cdot \exp(ta) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} p \cdot \exp(ta) \right|_{t=0} := pa$$

Avec, une base $\{\mathfrak{e}_i\}_{1 \leq i \leq k}$ de \mathfrak{g} induit une base $\{e_i\}_{1 \leq i \leq k} = \{\mathfrak{e}_i^*\}_{1 \leq i \leq k}$ sur $V_p P$. La métrique g induit alors une connexion de 1-forme :

$$\omega_g(X) = \sum_i g(X, e_i) \mathfrak{e}_i = \sum_i g_{ij} X^j \mathfrak{e}_i$$

et on la projection de X sur VP est donnée par :

$$\begin{aligned} \text{ver} X = \omega(X)^* &\iff \text{ver}(X^i e_i) = \sum_i g_{ij} X^j e_i \\ &\iff (\text{ver} X)^i = g_{ij} X^j \end{aligned}$$

Annexe B — Algèbre et groupe de Lie

Annexe C — Variété différentielle complexe, tiré de [16]

Pour mémoire, une variété différentielle de classe C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) de dimension n est un espace topologique⁶ \mathcal{M} (ou \mathcal{M}^n) munie d'un *atlas* $(\phi_i, U_i)_{i \in I}$, c'est-à-dire un ensemble fini de pair d'ouvert $U_i \subset \mathcal{M}$ et d'application $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

- les U_i forme un recouvrement de la variété : $\bigcup_{i \in I} \phi_i(U_i) = \mathcal{M}$
- les ϕ_i sont des homéomorphismes sur leur image $\phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$.
- si l'intersection $U_i \cap U_j$ est non vide, alors $\phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i^{-1}(U_i \cap U_j)}$ est un C^k difféomorphisme sur son image.

\mathcal{M} sera une *variété différentielle complexe* si elle satisfait les propriétés ci-dessus où \mathbb{R}^n est remplacé par \mathbb{C}^n et où la condition de difféomorphisme est remplacé par la condition d'holomorphisme. Une application $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ étant holomorphe si chacune de ses composantes vérifie l'équation de Cauchy-Riemann :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \mu, \quad \frac{\partial f}{\partial y^\mu}(x + iy) = i \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(x + iy)$$

Les fonctions holomorphes étant automatiquement C^∞ , les variétés différentielles complexes sont toujours lisse, c'est-à-dire C^∞ . Aussi, \mathcal{M} est dite de dimension complexe n et dimension (réel) $2n$, notés :

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}) := n \qquad \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{M}) := \dim(\mathcal{M}) = 2n \quad (2.9)$$

⁶La topologie de \mathcal{M} doit vérifier des propriétés type séparable, dénombrable à l'infinie, etc., qui seront toutes admises dans la suite, voir par exemple [7, chap. 2]

Ensuite, pour le dire rapidement, la structure complexe de \mathcal{M} permet de séparer les espaces tangents en deux sous espaces. Pour ce faire, on commence par noter qu'en tout point $p \in \mathcal{M}$ de coordonnée $z^\nu = x^\nu + iy^\nu$, l'espace tangent $T_p\mathcal{M}$, vu comme variété réelle, admet une base :

$$T_p\mathcal{M} = \text{Vec} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\} \quad (2.10)$$

Plus tôt que de se basé sur les x^μ et y^μ pour séparer les $T_p\mathcal{M}$, on définit sur ces derniers un tenseur J_p de type (1,1) tel que :

$$J_p \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \quad J_p \frac{\partial}{\partial y^\mu} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.11)$$

Ce tenseur est l'équivalent de la multiplication par $\pm i$ et le fait que \mathcal{M} soit complexe assure qu'il soit défini globalement, *i.e.* sur $T\mathcal{M}$. Il est diagonalisable dans la base :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial z^\mu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \quad \partial_{\bar{\mu}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\mu} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \quad (2.12)$$

Ainsi en fonction de la base ((2.9) ou (2.12)), J_p va s'écrire :

$$J_p = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \quad J_p = \begin{pmatrix} iI_n & 0 \\ 0 & -iI_n \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Finalement, $T\mathcal{M}$ peut être séparé en deux sous-espaces engendré respectivement par les ∂_μ et $\partial_{\bar{\nu}}$. On parle de vecteur holomorphe et anti-holomorphe et on note :

$$T_p\mathcal{M}^+ = \text{Vec}\{\partial_\mu \mid 1 \leq \mu \leq n\} \quad T_p\mathcal{M}^- = \text{Vec}\{\partial_{\bar{\mu}} \mid 1 \leq \mu \leq n\} \quad (2.14)$$

- qui est quelle phase
- mail à berthier pour les contraintes rapport
- *G. Feldman – Multivariate Analytic Signals and the Hilbert Transform*

TABLE DES FIGURES

1.1	Déviatiion de la phase dynamique par rapport à la phase totale	8
1.2	Ellipse de polarisation d'un signal bivarié réel	9
1.3	Evolution de la phase géométrique d'un signal AM-FM-PM	10
1.4	Sphère de Poincaré, blablabla	11
2.1	Ruban de Mobius comme variété fibrée	18
2.2	Représentation d'une section local	19
2.3	Représentation de la section canonique	19

TABLE DES CODES

RÉFÉRENCES

- [1] A. BOHM, A. MOSTAFAZADEH, H. KOIZUMI, Q. NIU, AND J. ZWANZIGER, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [2] C. CANO, *Mathematical tools and signal processing algorithms for the study of gravitational waves polarization*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....], Oct. 2022.
- [3] L. COHEN, *Time frequency analysis*, Prentice Hall signal processing series, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1995.
- [4] F. FAURE, *Introduction à la géométrie et la topologie des espaces fibrés en physique*, (2022).
- [5] J. FLAMANT, *Une approche générique pour l'analyse et le filtrage des signaux bivariés*, these de doctorat, Ecole centrale de Lille, Sept. 2018.
- [6] J. FLAMANT, N. LE BIHAN, AND P. CHAINAIS, *Time-frequency analysis of bivariate signals*, Applied and Computational Harmonic Analysis, 46 (2019), pp. 351–383.
- [7] J. LAFONTAINE, *An Introduction to Differential Manifolds*, Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [8] N. LE BIHAN, J. FLAMANT, AND P.-O. AMBLARD, *Modèles physiques à deux états pour les signaux bivariés : modulation de polarisation et phase géométrique*, in GRETSI 2023 - XXIXème Colloque Francophone de Traitement du Signal et des Images, Grenoble, France, Aug. 2023, GRETSI - Groupe de Recherche en Traitement du Signal et des Images.
- [9] ———, *The Geometric Phase of Bivariate Signals*, in 2024 32nd European Signal Processing Conference (EUSIPCO), Lyon, France, Aug. 2024, IEEE, pp. 2562–2566.
- [10] J. LEFEVRE, *Polarization analysis and optimization geometry*, phdthesis, Université Grenoble Alpes [2020-....] ; University of Melbourne, Dec. 2021.
- [11] J. M. LILLY, *Modulated Oscillations in Three Dimensions*, IEEE Transactions on Signal Processing, 59 (2011), pp. 5930–5943.
- [12] J. M. LILLY AND S. C. OLHEDE, *Analysis of Modulated Multivariate Oscillations*, IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (2012), pp. 600–612.
- [13] J. E. MARSDEN AND T. S. RATIU, *Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, vol. 17 of Texts in Applied Mathematics, Springer New York, New York, NY, 1999.
- [14] N. MUKUNDA AND R. SIMON, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 205–268.
- [15] ———, *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. II. The Case of Unitary Group Representations*, Annals of Physics, 228 (1993), pp. 269–340.
- [16] M. NAKAHARA, *Geometry, Topology and Physics, Second Edition*, Taylor & Francis, June 2003.