

CoCo Bonds Valuation with Equity and Credit-Calibrated First Passage Structural Models

Grégoire GALLOT

May 2, 2020

Contents

1	Contexte économique et émergence des CoCos	2
1.1	La question du capital dans les institutions financières	2
1.2	Genèse des CoCos	2
1.3	Quelques exemples d'émission de CoCos	2
1.4	Conséquences de cet instrument hybride sur la modélisation	3
2	Présentation des CoCos	4
2.1	Principe des CoCos	4
2.2	Détermination du prix de conversion	4
2.3	Principe de transparence	5
3	Modélisation stochastique	5
3.1	Modèle de Merton	5
3.2	Modèle AT1P et calibration de CDS	5
3.3	Modélisation pour les CoCos	7
3.3.1	Écriture du Payoff d'une CoCo	8
3.3.2	Proxy pour le capital réglementaire	8
3.3.3	La valeur du stock dans AT1P	9
4	Calibration et Pricing	10
4.1	Conclusion des résultats de l'article	10
4.2	Retour sur la calibration du modèle	11
4.3	Détails sur les problèmes de pricing	11
4.4	Conclusion	11

Dans le cadre de l'évaluation du cours "Dérivés de crédit" de l'ENSAE, nous allons présenter l'article de recherche "*CoCo Bonds Valuation with Equity and Credit-Calibrated First Passage Structural Models*" écrit par Damiano Brigo (Imperial College, Londres), João Garcia (Fitch Solutions) et Nicola Pede (Imperial College, Londres). Cet article traite de la valorisation d'un instrument hybride crédit/equity, très particulier, l'obligation Contingent Capital, nommé également CoCo. Nous allons tout d'abord faire une mise en lumière du contexte économique qui mena à la création des CoCo. Ensuite, nous allons détailler le fonctionnement et les risques associés à cet instrument. Enfin, nous détaillerons la méthode de pricing et de calibration adoptée par cet article.

1 Contexte économique et émergence des CoCos

1.1 La question du capital dans les institutions financières

La crise des subprimes de 2007 a fortement impacté l'économie mondiale. Cela a entraîné une remise en cause importante du fonctionnement de la gestion du risque dans les institutions bancaires. Plus particulièrement, les régulateurs ont dû revoir le concept de capital. Plusieurs définitions du capital peuvent être adoptées (vision comptable, risque, marché, ...). Nous prendrons ici pour définition, la vision marché, i.e., le capital d'une firme est la ressource disponible afin de prévenir une baisse de ses actions qui peut affecter ses objectifs stratégiques.

Nous pouvons cependant distinguer deux façons de voir ce capital :

- **Côté régulation** : C'est le montant de capital demandé par les régulateurs pour être considéré sûr. Il répond à des exigences fortes et est très surveillé.
- **Côté économique** : C'est l'estimation du montant que la firme a besoin et qui reflète sa condition économique.

Le comité de Bâle a étudié la question du capital requis par les régulateurs. Jusqu'à la crise du crédit, l'exigence réglementaire était basée sur deux principes : l'invariance et l'additivité des portefeuilles. En effet, le coût de capital dépend de la position ajoutée et non de la composition du portefeuille (invariance) d'où la nécessité d'agence de notation. De plus, le capital total doit être la somme des capitaux des positions du portefeuille (additivité), cela nous mène à un risque systémique. Par suite, le comité de Bâle 3 a complexifié le calcul du capital réglementaire (ajout de ratio de liquidité, ...).

La vision économique diffère cependant. Elle doit prendre en compte l'activité et les conditions économiques à la date de calcul. Le capital associé à une position dépend du portefeuille de la position. Nous pouvons ainsi observer une corrélation importante entre les actifs du portefeuille.

1.2 Genèse des CoCos

Les récentes crises économiques ont fait ressortir un problème majeur. Les institutions financières ne provisionnent pas assez de capital réglementaire. Les différents acteurs du marché ont ainsi cherché un moyen de "recapitaliser" les banques rapidement. La solution à ce problème fut la création des obligations Contingent Capital ou CoCos. Cela peut être vu comme un outils de titrisation et fonctionnent de la même manière qu'une obligation convertible à quelques détails près.

Les CoCos sont des obligations qui peuvent être converties en actions selon le déclenchement d'un certain évènement (*trigger event*). Si l'évènement arrive, l'obligation est échangée par un certain nombre d'actions de la firme émettrice F à un prix P , déterminé dans le contrat de l'obligation CoCo. Dans le cadre spécifique des obligations CoCos, l'évènement déclencheur est la chute sous un certain seuil d'un ratio de capital. Une des difficultés de cet instrument vient du fait que chaque CoCo est unique, sur-mesure et certaines clauses peuvent être ajoutées au contrat.

Ainsi, forcer l'investisseur à convertir ses obligations en actions quand la firme échoue à maintenir son capital minimum requis, permet d'injecter du capital et éviter de passer sous le seuil réglementaire.

Il se pose inévitablement la question du prix d'un tel instrument. En effet, il y a un risque de conversion dès lors que celle-ci peut intervenir à un moment inopportun. Le détenteur de cette obligation peut ainsi demander un règlement de coupons plus élevé qu'une obligation classique.

1.3 Quelques exemples d'émission de CoCos

Afin de montrer que chaque contrat CoCo est unique, nous allons présenter quelques exemples d'émission de CoCo sur le marché¹.

¹Source : *Modeling and Pricing Contingent Convertibles* - Per Alvermar and Philip Ericson, 2012

Avant Trigger Event

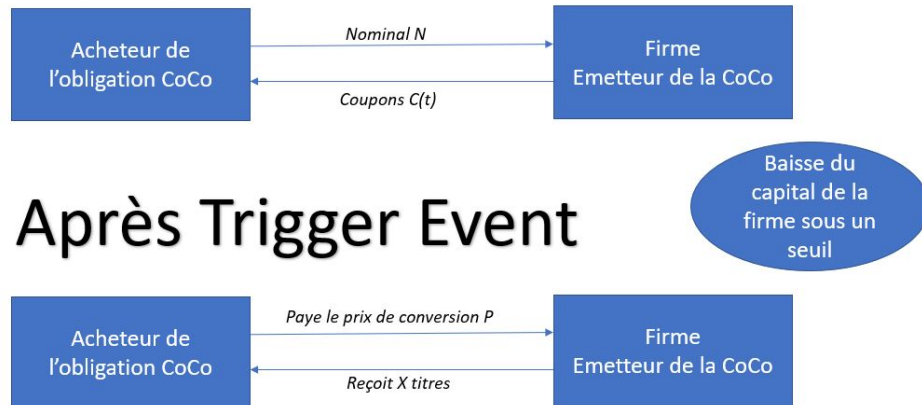


Figure 1: Schéma du fonctionnement d'une CoCo

Lloyds

La première banque à avoir émis une obligation CoCo est la banque britannique Lloyds. Au lieu d'émettre du capital, la banque a proposé à ces investisseurs de convertir leurs obligations existantes en CoCos. L'intérêt de l'opération fut énorme pour la banque et permit d'augmenter son capital réglementaire de plus de 9 milliards £. La conversion a eu lieu si le ratio Core Tier 1 de Lloyds descendait en dessous de 5%.

Rabobank

L'émission de la première CoCo par Rabobank (institution néerlandaise) a eu lieu en Mars 2010 et a permis un ajout de capital réglementaire de près de 1.25 milliards d'euros. Il n'y a cependant pas de conversion mais une dépréciation du nominal de 75% si les Risk Weighted Assets descendaient en dessous de 7%, les 25% restants étaient alors remis aux investisseurs.

Bank of Cyprus

Cette banque émettait en 2011 un instrument nommé "Convertible Enhanced Capital Securities" qui se révèle être un hybride entre les convertibles (qui laissent le choix si la conversion a lieu ou non) et les CoCos. Les actionnaires peuvent choisir de convertir leurs obligations en actions jusqu'à mai 2016. Cependant, après cette date, une conversion pouvait avoir lieu seulement si certains événements se déclenchaient (liés à un ratio de capital).

1.4 Conséquences de cet instrument hybride sur la modélisation

Puisque la conversion est dirigée par la qualité de crédit et le risque de défaut de la firme, un modèle de crédit et du défaut doit être dressé.

Le choix de l'article quant à la modélisation du crédit se porte sur le modèle structurel de Merton. En effet, ce modèle a la qualité de lier la barrière de défaut à une valeur économique. Par la suite, nous nous pencherons sur le pricing de ces CoCos en s'appuyant sur le modèle développé par Brigo et Tarenghi, "Analytically Tractable First Passage Model" (AT1P).

L'article présente ici un modèle qui fera intervenir trois facteurs :

- Le temps de la conversion
- Le prix de l'equity à la conversion
- Le temps de défaut

Cela nous permettra de calibrer notre modèle tant dans le marché equity que dans le marché crédit. Cela met en évidence les différents facteurs de risques provenant des deux marchés. Par conséquent, lors de la couverture, il faudra couvrir avec des dérivés de crédit mais aussi avec des dérivés de produits equity.

2 Présentation des CoCos

Afin de mieux comprendre l'instrument que sont les obligations CoCos, nous allons détailler leur fonctionnement.

2.1 Principe des CoCos

Prenons la situation suivante qui détaille la vie d'une CoCo. Soit une firme F qui émet une obligation CoCo pour un nominal N. Cette CoCo sera achetée par une contrepartie X. F recevra ainsi N et s'engagera à verser des coupons périodiques (prédéfinis dans le contrat) à la contrepartie X. A présent, si le ratio de capital de la firme F descend sous un seuil B (l'évènement est également prédéfini à l'initialisation du contrat), alors la firme F va émettre de nouvelles parts qu'elle échangera à X selon un prix de conversion CP. Le nombre de parts est défini lors de l'écriture du contrat. L'émission de nouvelles parts par la firme entraînera un effet de dilution, les actionnaires recevront moins de bénéfices (et la valeur liquidative de leurs titres baissera) puisqu'il y aura d'avantage de titres à rémunérer.

Dans notre cas étudié, toute la dette N sera convertie en equity, le détenteur de la CoCo recevra N/CP parts. Néanmoins, cela reste un produit "sur-mesure", toute la dette n'est pas forcément convertie mais peut être directement payé en cash au détenteur de l'instrument comme nous avons pu le voir dans la section 1.3.

2.2 Détermination du prix de conversion

Selon les contrats des CoCos, nous pouvons observer différentes façons de déterminer le prix de conversion CP. La première est de fixer le prix au moment de la conversion. Cependant le prix risque d'être trop bas, cela amènerait de nombreux investisseurs et résulterait à une possible dilution pour les actionnaires de la firme. Ils seraient alors tentés de vendre leurs parts dès qu'ils sentent que l'évènement de conversion risque d'arriver. L'aversion au risque est plus importante. Cela bénéficierait les détenteurs de la CoCo, les parts de la firme seront acquises à un prix bas.

Une autre possibilité est de spécifier dans le contrat un prix de conversion. Le CP peut être fixé au prix spot des parts de la firme à l'initialisation du contrat. Le détenteur de l'obligation va ainsi acheter des parts à un prix qui peut être beaucoup plus haut que le prix actuel. La dilution pour les actionnaires est plus petite mais la perte pour le détenteur de l'obligation peut être grande. Il peut alors demander le versement de coupons plus importants pour pallier à ce risque.

On peut également prendre un CP proportionnel à la chute en capital. Ainsi, si le capital baisse de 40%, le CP sera le prix spot amoindri de 40%.

2.3 Principe de transparence

Dans sa construction même, l'instrument dépend du ratio de capital de la firme émettrice. Dès lors, pour pouvoir analyser et bien valoriser ce type d'obligation, nous devons avoir accès à la composition du portefeuille de l'émetteur. Néanmoins, cela reste une information très difficile à obtenir voir même impossible. Nous détaillerons par la suite une façon de modéliser barrière pour s'affranchir de ses informations. Cela rejoint la problématique sur le moment de défaut. L'observation du défaut et le déclenchement de l'assurance (CDS, CDO, ...) n'est pas instantané.

3 Modélisation stochastique

3.1 Modèle de Merton

Après avoir présenter le modèle de Merton, nous allons ensuite l'étendre pour pouvoir calibrer la totalité de la structure par terme des CDS. Dans le modèle de Merton, le défaut est expliqué par la structure du bilan et n'est possible qu'à maturité T .

Soit $(V_t)_t$, la valeur de la firme, le défaut τ intervient à maturité si la valeur passe en dessous d'un certain seuil constant D , la barrière.

$$\tau = T\mathbb{1}_{V_T < D} + \infty\mathbb{1}_{V_T \geq D}$$

La valeur de la firme est la somme de ses actifs S_t et de ses dettes D_t .

$$V_t = S_t + B_t$$

Le gain des créanciers, B_T , et des actionnaires, S_T , à maturité peuvent ainsi s'écrire :

$$\begin{aligned} B_T &= \min(V_T, D) = D - (D - V_T)^+ \\ S_t &= (V_t - D)^+ \end{aligned}$$

Merton fait l'hypothèse d'une dynamique log-normale pour V_t . Cela permet d'obtenir des formules fermées tirées de Black-Scholes pour la valeur de la firme.

$$dV_t = rV_t dt + \sigma V_t dW_t^Q$$

On peut ainsi écrire :

$$\begin{aligned} S_t &= B(0, T)\mathbb{E}^Q[(V_T - D)^+ | \mathcal{F}_t] \\ S_0 &= V_0\phi(d_1) - K\phi(d_2)B(0, T) \end{aligned}$$

où ϕ est la répartition d'une gaussienne centrée réduite

La limitation de ce modèle est de restreindre le défaut à la date finale. Une extension logique de ce modèle est de travailler avec une barrière continue du défaut.

3.2 Modèle AT1P et calibration de CDS

Le modèle qui nous servira à la valorisation des CoCos est nommé "Analytically Tractable First Passage Model" (AT1P). Il est une extension des modèles de Merton et de Black-Cox. Les auteurs proposent d'améliorer le précédent modèle en ajoutant une barrière déterministe non constante et en autorisant une dépendance en temps pour la volatilité. Nous allons prendre en compte dans le modèle un monde avec des dividendes, q , et de taux sans risque r , constants.

Par ailleurs, on peut stipuler une certaine forme pour la barrière dépendant d'un paramètre B à calibrer.

$$\begin{aligned}
dV_t &= (r - q)V_t dt + \sigma(t)V_t dW_t^Q \\
\hat{H}(t) &= H \exp^{(r-q)t - B \int_0^t \sigma^2(s) ds} \\
\tau &= \inf\{t \geq 0, V_t \leq \hat{H}(t)\}
\end{aligned}$$

Grâce à ces hypothèses, nous allons pouvoir en déduire une formule fermée pour la probabilité de survie :

$$\begin{aligned}
V_t \leq \bar{H}(t) &\implies V_0 \exp(r - q)t + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma(s)^2 dW_s^Q \leq H \exp^{(r-q)t - b \int_0^t \sigma^2(s) ds} \\
&\implies \underbrace{\int_0^t \sigma(s)^2 dW_s^Q}_{\nu(t)} + \frac{1}{2}(2b - 1) \underbrace{\int_0^t \sigma^2(s) ds}_{y_0} \leq -\log(V_0/H)
\end{aligned}$$

Or grâce au principe de réflexion du mouvement brownien, nous pouvons retrouver une propriété similaire pour X_u :

$$\mathbb{Q}(\inf_{0 \leq u \leq s} X_u \geq x) = \phi\left(\frac{-x + \nu(s)}{\text{Var}(X_s)}\right) - \exp^{2\nu(s) \int_0^t (\sigma(s)^2 ds)^{-2}} \phi\left(\frac{x + \nu(s)}{\text{Var}(X_s)}\right)$$

En posant $X_u := \nu(u) + \int_0^u \sigma(s)^2 dW_s^Q$ et $Y_t := \nu(u) + \int_0^u \sigma(s)^2 dW_s^Q + y_0$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}(\tau > T) &= \mathbb{Q}(\inf_{0 \leq u \leq T} Y_u \geq 0) = \mathbb{Q}(\inf_{0 \leq u \leq T} X_u \geq -y_0) \\
&= \phi\left(\frac{-y_0 + \nu(T)}{\text{Var}(X_T)}\right) - \exp^{2\nu(T)y_0 \int_0^t (\sigma(s)^2 ds)^{-2}} \phi\left(\frac{y_0 + \nu(s)}{\text{Var}(X_T)}\right) \\
&= \phi\left(\frac{\underbrace{-\log(V_0/H) \frac{1}{2}(2b - 1) \int_0^T \sigma(s)^2 ds}_{d_1}}{\left(\int_0^T \sigma(s)^2 ds\right)^{1/2}}\right) - \exp^{(2b-1) \log(V_0/H)} \phi\left(\frac{\underbrace{-\log(V_0/H) \frac{1}{2}(2b - 1) \int_0^T \sigma(s)^2 ds}_{d_2}}{\left(\int_0^T \sigma(s)^2 ds\right)^{1/2}}\right) \\
&= \phi(d_1) - \left(\frac{V_0}{H}\right)^{2b-1} \phi(d_2)
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons pu obtenir une formule fermée pour la probabilité de survie. Pour la suite, nous allons choisir une fonction σ constante par morceaux. Cela simplifiera notre étape de calibration. Le nombre de pallier de cette fonction sera déterminé par le nombre de CDS choisi pour la calibration du modèle. Ainsi chaque volatilité, correspondra à la volatilité calibrée par un des CDS.

Nous allons maintenant calculer le prix d'un CDS dans ce modèle, avec ces propriétés :

- Taux de recouvrement R
- Spread S
- La premium Leg a un échiquier $[T_0, \dots, T_N]$
- Nominal de 1

Nous supposons un taux sans risque constant, dès lors le prix du zéro-coupon sans risque est $\beta(t)/\beta(T)$ où $\beta(t) = e^{rt}$. Ainsi, le payoff actualisé du CDS $\Pi^{T_0, T_N}(t, S)$ est pour une date $t < T_0$:

$$\Pi^{T_0, T_N}(t, S) = \sum_{i=1}^N \left(S \frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \alpha_i \mathbb{1}_{\tau > T_i} + \frac{\beta(t)}{\beta(\tau)} \alpha_d \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau < T_i} \right) - \frac{\beta(t)}{\beta(\tau)} (1 - R) \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau < T_i}$$

où $\alpha_i = T_i - T_{i-1}$, $\alpha_d = \tau - T_d$, T_d étant la dernière date avant le défaut

Ainsi, le détenteur CDS verse bien des coupons périodiques à la contrepartie. Et si le défaut intervient, alors la contrepartie versera une prime.

Calculons à présent le prix de ce CDS. Cela revient à calculer l'espérance de notre payoff actualisé sous une probabilité risque-neutre. Grâce à notre calcul de la probabilité de survie, nous pouvons rapidement obtenir une écriture pour le premier terme de notre somme. L'autre membre reste plus compliqué à calculer.

$$\mathbb{E}[\Pi^{T_0, T_N}(t, S)] = \sum_{i=1}^N S \frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \alpha_i \mathbb{Q}(\tau > T_i) + \int_0^{T_N} \left(\frac{\beta(t)}{\beta(\tau)} \alpha_d \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau < T_i} - \frac{\beta(t)}{\beta(\tau)} (1-R) \mathbb{1}_{T_{i-1} < \tau < T_i} \right) d\mathbb{Q}(\tau > t)$$

Afin de pouvoir implémenter numériquement nos formules, nous allons discrétiser cette intégrale en prenant l'échiquier de la jambe premium. Cela ne pose que peu de soucis dans le cas de spreads petits au contraire de grands spreads qui demandent une discrétisation plus raffinée. De plus, nous allons estimer $\alpha_d \frac{\beta(t)}{\beta(\tau)}$ comme étant la moitié de la prime à payer à la fin de chaque période, $\alpha_i \frac{\beta(t)}{\beta(T_i)}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[\Pi^{T_0, T_N}(t, S)] &= S \sum_{i, T_i > t}^N \alpha_i \frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} \left(\mathbb{Q}(\tau > T_i) + \frac{1}{2} (\mathbb{Q}(\tau > T_{i-1}) - \mathbb{Q}(\tau > T_i)) \right) \\ &\quad - (1-R) \sum_i \frac{\beta(t)}{\beta(T_i)} (\mathbb{Q}(\tau > T_{i-1}) - \mathbb{Q}(\tau > T_i)) \end{aligned}$$

Notons S^T , le spread implicite qui annule le CDS en 0. Nous avons ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_t[\Pi^{T_0, T_N}(t, S^T(0))] &= 0 \\ \implies S^T(0) &= \frac{(1-R) \sum_i (\mathbb{Q}(\tau > T_{i-1}) - \mathbb{Q}(\tau > T_i))}{\sum_i \frac{\beta(0)}{\beta(T_i)} \alpha_i (\mathbb{Q}(\tau > T_{i-1}) - \mathbb{Q}(\tau > T_i))} \end{aligned}$$

Nous avons réussi à écrire des formules fermées pour la probabilité de survie, le prix du CDS et son spread implicite. Celles-ci dépendent de divers paramètres. Il faut donc se poser le problème de la calibration aux données de marché.

Les auteurs définissent le problème de calibration de la façon suivante. Soient les données observées sur le marché, $\phi^M = (\phi_1, \dots, \phi_m)$, leurs équivalents calculés, $\phi(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_m(x))$ et notre vecteur de paramètre \mathbf{p} . La calibration du modèle revient à résoudre le problème :

$$C(\mathbf{p}) = \min_x C(x)$$

où C est une distance entre ϕ et ϕ^M

L'article décrit une méthode de résolution en utilisant l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Cependant, celui-ci reste sensible au point d'initialisation.

De façon plus explicite, il suffit de chercher les cotations des spreads des CDS pour les plusieurs maturités. Ensuite, en partant du spread 1 an, on peut supposer que notre volatilité est constante. Grâce au spread 2 ans, nous aurons une volatilité constante par morceaux (σ_1, σ_2) . Il suffira ensuite de résoudre le problème de calibration.

3.3 Modélisation pour les CoCos

Pour bien modéliser les Cocos, il faut non seulement prendre en compte le temps de défaut mais aussi le temps de conversion τ_c .

$$\tau_c = \inf\{t \geq 0, c_t \leq \bar{c}\}$$

avec c_t le capital réglementaire et \bar{c} le seuil de conversion.

Les deux temps font intervenir intrinsèquement la notion de capital. Dès lors, ces deux variables ne sont pas indépendantes. L'instrument a été créé afin de recapitaliser les banques pour éviter le défaut, donc le défaut avant la conversion reste peu probable. De plus, l'information sur le capital d'une firme n'est pas une information continue et n'est souvent dévoilée que deux fois par an. Cela va poser problème, il nous faudra alors développer un proxy pour pallier ce soucis. Supposons donc pour l'instant que la conversion est le dernier recours possible avant le défaut. Nous avons ainsi :

$$\mathbb{Q}(\tau < \tau_c | \tau < T) = 0$$

3.3.1 Écriture du Payoff d'une CoCo

Posons,

- $\Pi(t, T)$ le payoff actualisé d'une obligation sans risque
- $\Pi_c(t, T)$ le payoff actualisé de l'obligation CoCo
- $D(t, T) := \frac{\beta(t)}{\beta(T)}$ le facteur d'actualisation sans risque
- N le nombre de parts obtenu lors de la conversion
- E_t la valeur du stock à la date t
- E^* le prix de conversion du stock (prix d'échange) qui vérifie $NE^* = \mathbb{E}_0[\Pi_c(0, T)]$

Avec ces notations, on peut écrire le payoff d'une CoCo:

$$\begin{aligned} \Pi_c(t, T) &= \mathbb{1}_{\tau_c > T} \Pi(t, T) + \mathbb{1}_{\tau_c \leq T} (\Pi(t, \tau_c) + NE_{\tau_c} D(t, \tau_c)) \\ &= \mathbb{1}_{\tau_c > T} \Pi(t, T) + \mathbb{1}_{\tau_c \leq T} \left(\Pi(t, \tau_c) + \frac{E_{\tau_c}}{E^*} \mathbb{E}_0[\Pi_c(0, T)] D(t, \tau_c) \right) \end{aligned}$$

On remarquera que le payoff ne dépend pas du temps de défaut puisque le défaut n'intervient pas avant la conversion. Cependant, l'equity a une dépendance implicite avec le défaut. Par ailleurs, nous pouvons se ramener à un modèle à intensité en voyant le temps de conversion comme un temps de défaut et $\frac{E_{\tau_c}}{E^*}$ comme un taux de recouvrement.

3.3.2 Proxy pour le capital réglementaire

Le capital réglementaire reste une information difficile à obtenir. De plus, celle-ci n'est pas disponible de façon continue. Dévoilé lors d'assemblées générales tenant lieu environ deux fois par an, sa valeur n'est pas un bon indicateur pour le pricing des CoCos. Les auteurs de l'article ont ainsi proposé de modéliser un proxy pour le capital.

Supposons que la valeur totale des actifs de la firme A_t est égale à la valeur de la firme V_t , et que le passif de l'entreprise L_t est $\hat{H}(t)$. Nous allons également supposer que le ratio AER (Asset/Equity ratio) est l'indicateur principal du capital.

Grâce à la base de données de Fitch, *Financial Delivery Service*, nous récupérons toutes les dates des bilans des firmes que nous filtrons par leur rating individuel. Pour chaque classe γ de rating et pour chaque date de bilan, nous cherchons les paramètres de la régression des moindres carrés suivante:

$$c_i = \beta X_i + \varepsilon_i$$

$$X_i = \frac{A_i}{A_i - L_i}$$

Maintenant, pour chaque classe de rating γ , nous allons calculer une moyenne des paramètres α et β , notées $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$. Le proxy sera donc :

$$\hat{c}(V_t, \hat{H}(t); \gamma) = \begin{cases} \bar{\alpha}_\gamma + \bar{\beta}_\gamma \frac{V_t}{V_t - \hat{H}(t)} & V_t \geq \hat{H}(t) \\ 0 & V_t < \hat{H}(t) \end{cases}$$

Néanmoins, ce proxy pour correspondre à notre modèle doit vérifier la propriété de "non-défaut" avant le temps de conversion. Si $\alpha + \beta X_0 > \bar{c}$ et $\beta < 0$, alors nous avons bien $\mathbb{Q}(\tau > \tau_c) = 1$

Un autre problème se pose. Le ratio de capital et X_t ont une corrélation égale à $sign(\beta)$. Cherchons à diminuer ce facteur. Pour cela, nous allons introduire une nouvelle forme pour le capital qui ne modifie pas la variance:

$$C_t^\gamma = \bar{\alpha}_\gamma + \bar{\beta}_t^\gamma std(X_t) \left(\eta \frac{X_t}{std(X_t)} + \sqrt{1 - \eta^2} \varepsilon_t^\gamma \right)$$

Ainsi, cette nouvelle forme est une généralisation de l'ancien modèle. On le retrouve quand $\eta \rightarrow 0$. Nous avons à présent un affinage de la corrélation :

$$Cov(X_t, C_t^\gamma) = \eta sign(\beta)$$

3.3.3 La valeur du stock dans AT1P

Après avoir stipulé une forme calibrable pour le ratio de capital, il nous manque la connaissance de la valeur d'un actif dans notre modèle. Comme évoqué dans la partie 3.3.1., nous devons faire intervenir le temps de défaut dans le calcul de l'equity.

En généralisant le modèle de Merton et en faisant apparaître la possibilité du défaut à toute date, nous pouvons voir l'equity comme une option call down-and-out.

$$E_t = \beta(t) \mathbb{E}_t \left[\frac{(V_t - \hat{H}(t))^+ \mathbf{1}_{\tau > T}}{\beta(T)} \right] := f(t, V_t)$$

La littérature financière a réussi à démontrer des formules fermées pour ce type de problème. (*Pricing barriers on underlyings with time-dependent parameters* - Rapisarda)

$$f(t, V_t) = \frac{\beta(t)}{\beta(T)} \left(V_t \exp \left(\int_t^T v(s) + \frac{\sigma(s)^2}{2} ds \right) (1 - \phi(d_3)) - \hat{H}(T) (1 - \phi(d_4)) \right. \\ \left. \hat{H}(t) \left(\frac{\hat{H}(t)}{V_t} \right)^{2B} \exp \left(\int_t^T v(s) + \frac{\sigma(s)^2}{2} ds \right) (1 - \phi(d_5)) + \hat{H}(T) \left(\frac{\hat{H}(t)}{V_t} \right)^{2B-1} (1 - \phi(d_6)) \right)$$

avec

$$\begin{aligned}
v(t) &= r - q - \frac{\sigma(t)^2}{2} \\
d_3 &= \frac{\left(\log \frac{\bar{H}(T)}{H}\right)^+ - \log \frac{V_t}{H} - \int_t^T (v(s) + \sigma(s)^2) ds}{\left(\int_t^T \sigma(s)^2 ds\right)^{1/2}} \\
d_4 &= \frac{\left(\log \frac{\bar{H}(T)}{H}\right)^+ - \log \frac{V_t}{H} - \int_t^T v(s) ds}{\left(\int_t^T \sigma(s)^2 ds\right)^{1/2}} \\
d_5 &= \frac{\left(\log \frac{\bar{H}(T)}{H}\right)^+ - \log \frac{\hat{H}(t)^2}{HV_t} - \int_t^T (v(s) + \sigma(s)^2) ds}{\left(\int_t^T \sigma(s)^2 ds\right)^{1/2}} \\
d_6 &= \frac{\left(\log \frac{\bar{H}(T)}{H}\right)^+ - \log \frac{\hat{H}(t)^2}{HV_t} - \int_t^T v(s) ds}{\left(\int_t^T \sigma(s)^2 ds\right)^{1/2}}
\end{aligned}$$

En créant un proxy pour le ratio de capital, nous avons ajouté un facteur à la calibration du modèle. En effet, nous allons calibrer grâce à n CDS, mais aussi grâce à la dernière valeur de c publiée ainsi que la valeur de départ de l'equity de la firme E_0 . Par conséquent, en reprenant la section 3.2., nous allons fixer notre point de départ $x^{(0)}$ par un algorithme de "Simulated Annealing" et ensuite résoudre le problème d'initialisation pour $\phi^M = (\phi_1, \dots, \phi_m, c, E_0)$.

4 Calibration et Pricing

4.1 Conclusion des résultats de l'article

Grâce au travail effectué dans la section 3, nous avons maintenant accès à des formules fermées pour le prix d'une obligation CoCo.

Barrière	$\hat{H}(t) = H \exp^{(r-q)t - B \int_0^t \sigma^2(s) ds}$
Temps de défaut	$\tau = \inf\{t \geq 0, V_t \leq \hat{H}(t)\}$
Probabilité de survie	$\mathcal{Q}(\tau > T) = \phi(d_1) - \left(\frac{V_0}{H}\right)^{2B-1} \phi(d_2)$
Spread Implicite	$S^T(0) = \frac{(1-R) \sum_i (\mathbb{Q}(\tau > T_{i-1}) - \mathbb{Q}(\tau > T_i))}{\sum_i \frac{\beta(0)}{\beta(T_i)} \alpha_i (\mathbb{Q}(\tau > T_{i-1}) - \mathbb{Q}(\tau > T_i))}$
Temps de conversion	$\tau_c = \inf\{t \geq 0, c_t \leq \bar{c}\}$
Proxy du capital	$C_t^\gamma = \bar{\alpha}_\gamma + \bar{\beta}_t^\gamma \text{std}(X_t) \left(\eta \frac{X_t}{\text{std}(X_t)} + \sqrt{1 - \eta^2} \varepsilon_t^\gamma \right)$
Valeur de l'equity	$f(y, V_t)$

Après avoir calibré tous ces paramètres, nous pouvons enfin calculer le prix de la CoCo par méthode de Monte Carlo grâce à l'écriture de son payoff :

$$\mathbb{1}_{\tau_c > T} \Pi(t, T) + \mathbb{1}_{\tau_c \leq T} \left(\Pi(t, \tau_c) + \frac{E_{\tau_c}}{E^*} \mathbb{E}_0[\Pi_c(0, T)] D(t, \tau_c) \right)$$

4.2 Retour sur la calibration du modèle

Les paramètres à calibrer sont $\mathbf{p} = (\underbrace{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n}_{\text{A calibrer à partir des n CDS}}, B, H)$.

Nous disposons des données de marché suivantes $\phi^M(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x), c, E_0)$: n CDS de maturités différentes, la valeur des actifs de la firme E_t , et la valeur du dernier ratio AER.

Les n CDS permettront d'obtenir une volatilité constante par morceaux de n étages. L'ajout des deux derniers paramètres observés permet de obtenir une valeur pour le dernier paramètre libre.

La méthode utilisée par l'article comprend 2 étapes :

1. On utilisera un algorithme de "Simulated Annealing" pour initialiser le point $x^{(0)}$ de départ (à prendre dans l'espace $]0; 5[\times]0; 1[^{n+1}$)
2. Nous résolvons ensuite ce problème de minimisation par un algorithme de Levenberg-Marquardt

4.3 Détails sur les problèmes de pricing

Comme nous l'avons expliqué précédemment, nous pouvons trouver le prix de la CoCo par le biais d'une méthode de Monte Carlo dans le modèle AT1P.

Considérons une obligation risquée de taux de recouvrement nul, de nominal 1 et de taux fixe c . Son prix s'écrit :

$$P(t) = c \sum_{i=1}^N \alpha_i D(t, T) \mathbb{Q}_t(\tau > T_i) + D(t, T_N) \mathbb{Q}_t(t, T_N)$$

Nous pouvons trouver dans ce modèle une expression explicite pour ce prix. Dès lors, nous pouvons donner un critère quant à la grille de temps pour le Monte Carlo utilisé pour pricer notre CoCo. Le calcul de cette obligation par Monte Carlo doit être en accord avec le calcul par formule fermée selon un intervalle de confiance de 95%. Les études dans l'article montrent qu'un pas de temps de $\Delta t = \frac{1}{500}$ (en année) vérifie ce critère.

Maintenant, observons une obligation risquée de nominal 1 et de payoff :

$$\Pi_d(t, T) = \mathbf{1}_{\tau > T} \Pi(t, T) + \mathbf{1}_{\tau \leq T} (\Pi(t, T) + RD(t, \tau))$$

Nous pouvons approcher le prix de cette obligation par Monte Carlo. Les calculs faits par les auteurs de cet article pointent une petite différence entre le prix calculé et le prix observé. C'est la base CDS-Obligation.

4.4 Conclusion

Cet article présente ainsi un modèle pour pricer les CoCos. Cet instrument hybride rends la tâche plus difficile. En effet, les CoCos dépendent du marché de crédit et de l'equity. En choisissant un modèle structurel, nous avons réussi à déterminer des formules fermées et une méthode de pricing. Néanmoins, le modèle suit des hypothèses éloignées de la réalité du marché. En effet, si un modèle gaussien a l'avantage de simplifier les calculs, il ne représente pas bien le marché. Nous pourrions par ailleurs faire appel à des modèles à sauts. Enfin, dans notre article, nous travaillons avec des taux d'intérêts et des dividendes constants. Une évolution du modèle serait de les rendre stochastique. Nous pourrions également le faire pour la barrière et la volatilité.

Nous pourrions partir également dans une autre direction en considérant un modèle à intensité.