

# MÉTHODES ASYMPTOTIQUES POUR LA FINANCE 3A

---

## Multiscale Volatility Model Asymptotics

---

Grégoire GALLOT  
Adrien MEILAC

*Professeur* : Huyên PHAM

# SOMMAIRE

A	Présentation du modèle . . . . .	3
1	Introduction . . . . .	3
2	Le modèle sous la probabilité historique . . . . .	3
3	Probabilité risque-neutre et prix . . . . .	4
B	Asymptotiques et volatilité implicite . . . . .	5
1	Perturbations pour les deux échelles . . . . .	5
2	Précision de l'approximation . . . . .	7
3	Volatilité Implicite . . . . .	7
C	Calibration et Pricing . . . . .	9
1	Aspects pratiques . . . . .	9
2	Implémentation numérique . . . . .	10
3	Conclusion . . . . .	11
	Bibliographie . . . . .	12

# A PRÉSENTATION DU MODÈLE

## 1 Introduction

Nous allons présenter l'article "*Multiscale Stochastic Volatility Asymptotics*" de J.P. Fouque, G. Papanicolaou, R. Sircar et K. Solna. L'article présente une famille de modèle à volatilité stochastique dont la volatilité est une fonction de deux facteurs stochastiques, dits court et long. C'est une extension du modèle mean-reverting que l'on a étudié en cours.

Cette approche a été développée afin de pallier au recalibrage hebdomadaire des modèles par les traders. De plus, la littérature financière a motivé l'utilité de ce type de modèle afin de modéliser de façon pertinente le marché des dérivés. En effet, il a été observé que cette famille de modèle nous permet d'obtenir des queues de distributions épaisses, un kurtosis cohérent et un effet de mémoire à long terme.

Cette façon de modéliser le sous-jacent a fait l'objet de précédents articles de JP. Fouque ("*Short-time Scale in S&P 500 Volatility*"). Cet article démontre la présence significative d'un "*day effect*" sur la volatilité qui correspond à une échelle courte. De plus, la littérature financière a montré l'existence d'un facteur "lent".

L'innovation de l'article est donc de présenter une modèle faisant intervenir dans la volatilité ces deux facteurs et d'étudier les formules asymptotiques liées.

## 2 Le modèle sous la probabilité historique

Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$ , la valeur du sous-jacent,

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + f(Y_t, Z_t) X_t dW_t^{(0)} \\ dY_t = \frac{1}{\varepsilon} (m - Y_t) dt + \nu \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varepsilon}} dW_t^{(1)} \\ dZ_t = \delta c(Z_t) dt + \sqrt{\delta} g(Z_t) dW_t^{(2)} \end{cases} \quad (1)$$

Pour respecter la séparation des différentes échelles, il faut  $\delta \ll 1/\varepsilon$ . Voici quelques remarques sur les différents facteurs :

- $\varepsilon, \delta > 0$  petits,
- $Y_t$  est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, ergodique, de distribution invariante  $\tilde{Y} \sim \mathcal{N}(m, \nu^2)$
- $\mathbb{E}[(Y_s - m)(Y_t - m)] = \nu^2 \exp\left(-\frac{|t-s|}{\varepsilon}\right)$  d'où l'appellation de facteur rapide
- $c$  et  $g$ , deux fonctions suffisamment régulières

On se fixe également une matrice de corrélation :

$$\begin{pmatrix} W_t^0 \\ W_t^1 \\ W_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \sqrt{1-\rho_1^2} & 0 \\ \rho_2 & \tilde{\rho}_{12} & \sqrt{1-\rho_2^2-\tilde{\rho}_{12}^2} \end{pmatrix} \mathbf{W}_t$$

### 3 Probabilité risque-neutre et prix

A présent, réécrivons le modèle sous une probabilité risque-neutre  $\mathbb{P}^*$ , qui nous sera donnée par l'état du marché. D'après le théorème de Girsanov, nous pouvons trouver  $W_t^*$ , un mouvement brownien sous  $\mathbb{P}^*$ . Les fonctions  $\gamma$  et  $\xi$  seront donc des fonctions ne dépendant pas du modèle mais de la probabilité risque-neutre choisie préalablement.

$$\mathbf{W}_t^* = \mathbf{W}_t + \int_0^t \begin{pmatrix} (\mu - r)/f(Y_s, Z_s) \\ \gamma(Y_s, Z_s) \\ \xi(Y_s, Z_s) \end{pmatrix} dx$$

Ainsi, nous pouvons réécrire le modèle :

$$\begin{cases} \frac{dX_t}{X_t} = rdt + f(Y_t, Z_t)dW_t^{(0)*} \\ dY_t = \left( \frac{1}{\varepsilon}(m - Y_t) - \nu\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\Lambda(Y_t, Z_t) \right) dt + \nu\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}dW_t^{(1)*} \\ dZ_t = (\delta c(Z_t) - \sqrt{\delta}g(Z_t)\Gamma(Y_t, Z_t))dt + \sqrt{\delta}g(Z_t)dW_t^{(2)*} \end{cases} \quad (2)$$

où l'on introduit les primes de risques associées au facteur  $Y$  et  $Z$  :

$$\begin{aligned} \Lambda(y, z) &= \rho_1 \frac{(\mu - r)}{f(y, z)} + \gamma(y, z)\sqrt{1 - \rho_1^2} \\ \Gamma(y, z) &= \rho_2 \frac{(\mu - r)}{f(y, z)} + \gamma(y, z)\tilde{\rho}_{12} + \xi(y, z)\sqrt{1 - \rho_2^2 - \tilde{\rho}_{12}^2} \end{aligned}$$

Ce nouveau système permet d'écrire l'EDP de pricing suivante:

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{\varepsilon, \delta} P^{\varepsilon, \delta} = 0 \\ P^{\varepsilon, \delta}(T, x, y, z) = h(x) \end{cases} \quad (3)$$

où

$$\mathcal{L}^{\varepsilon, \delta} = \varepsilon^{-1}\mathcal{L}_0 + \varepsilon^{-1/2}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \sqrt{\delta}\mathcal{M}_1 + \delta\mathcal{M}_2 + \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\mathcal{M}_3$$

$\mathcal{L}_0$	$= (m - y)\partial_y + \nu^2\partial_{y^2}^2$
$\mathcal{L}_1$	$= \nu\sqrt{2}(\rho_1 f(y, z)x\partial_{xy}^2 - \Lambda(y, z)\partial_y)$
$\mathcal{L}_2$	$= \partial_t + \frac{1}{2}f^2(y, z)x^2\partial_{x^2}^2 + r(x\partial_x - \cdot)$
$\mathcal{M}_1$	$= -g(z)\Gamma(y, z)\partial_z\rho_2g(z)f(y, z)x\partial_{xy}^2$
$\mathcal{M}_2$	$= c(z)\partial_z + \frac{g(z)^2}{2}\partial_{z^2}^2$
$\mathcal{M}_3$	$= \nu\sqrt{2}\rho_{12}g(z)\partial_{yz}^2$

On pourra noter que l'opérateur  $\mathcal{L}_2$  est l'opérateur de Black-Scholes pour une volatilité effective  $f(y, z)$ . L'article décrit par la suite une façon d'obtenir des approximations du prix quand  $\varepsilon$  et  $\delta$  sont petits.

## B ASYMPTOTIQUES ET VOLATILITÉ IMPLICITE

### 1 Perturbations pour les deux échelles

Afin d'obtenir des approximations, nous allons décomposer le prix  $P^{\varepsilon, \delta}$  en fonction des puissances de  $\sqrt{\delta}$ .

$$P^{\varepsilon, \delta} = P_0^\varepsilon + \sqrt{\delta}P_1^\varepsilon + \delta P_2^\varepsilon + \dots \quad (4)$$

Afin d'obtenir une formule approchée du prix (au premier ordre), il faut que l'on calcule  $P_0^\varepsilon$  et  $P_1^\varepsilon$ . Pour cela, nous allons décomposer  $P_0^\varepsilon$  et  $P_1^\varepsilon$  en fonction des puissances de  $\sqrt{\varepsilon}$ .

#### 1.1 Calcul de $P_0^\varepsilon$

$$P_0^\varepsilon = P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_{1,0} + \varepsilon P_{2,0} + \varepsilon^{3/2}P_{3,0} + \dots \quad (5)$$

On remarquera que  $P_0^\varepsilon$  est la correction du facteur rapide de volatilité (car il ne dépend pas d'une puissance de  $\sqrt{\delta}$ ) tandis que  $P_1^\varepsilon$  correspond à la correction du facteur lent. Ainsi,  $P_0^\varepsilon$  doit vérifier l'EDP de pricing pour un modèle de volatilité stochastique mean-reverting comme vu dans le cours.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\varepsilon, \delta} P^{\varepsilon, \delta} &= \mathcal{L}^{\varepsilon, \delta} (P_0^\varepsilon + \sqrt{\delta}P_1^\varepsilon) \\ \mathcal{L}^\varepsilon P_0^\varepsilon + \left( \sqrt{\delta}\mathcal{M}_1 + \delta\mathcal{M}_2 + \sqrt{\frac{\delta}{\varepsilon}}\mathcal{M}_3 \right) P_0^\varepsilon + \sqrt{\delta}\mathcal{L}^\varepsilon P_1^\varepsilon + \left( \delta\mathcal{M}_1 + \delta^{3/2}\mathcal{M}_2 + \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{M}_3 \right) P_1^\varepsilon &= 0 \\ \Rightarrow 0 &= \mathcal{L}_3^\varepsilon P_0^\varepsilon \\ &+ \sqrt{\delta}(\mathcal{M}_1 P_0^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{M}_3 P_0^\varepsilon + \mathcal{L}^\varepsilon P_1^\varepsilon) \\ &+ \delta \left( \mathcal{M}_2 P_0^\varepsilon + \mathcal{M}_1 P_1^\varepsilon + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\mathcal{M}_3 P_1^\varepsilon \right) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

On obtient donc par identification :

$$\begin{cases} \mathcal{L}^\varepsilon P_0^\varepsilon = \mathcal{L}^{\varepsilon, 0} P_0^\varepsilon = 0 \\ P_0^\varepsilon(T, x, y) = h(x) \end{cases}$$

Il suffit ainsi de résoudre :

$$\begin{aligned} (\varepsilon^{-1}\mathcal{L}_0 + \varepsilon^{-1/2}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2)(P_0 + \sqrt{\varepsilon}P_{1,0} + \varepsilon P_{2,0} + \varepsilon^{3/2}P_{3,0} + \dots) &= 0 \\ 0 &= \varepsilon^{-1}\mathcal{L}_0 P_0 \\ &+ \varepsilon^{-1/2}(\mathcal{L}_0 P_{1,0} + \mathcal{L}_1 P_0) \\ &+ \mathcal{L}_0 P_{2,0} + \mathcal{L}_1 P_{1,0} + \mathcal{L}_2 P_0 \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Cela revient à résoudre ce nouveau système :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 P_0 = 0 \\ \mathcal{L}_0 P_{1,0} + \mathcal{L}_1 P_0 = 0 \\ \mathcal{L}_0 P_{2,0} + \mathcal{L}_1 P_{1,0} + \mathcal{L}_2 P_0 = 0 \end{cases}$$

Or  $\mathcal{L}_0$  ne possède que des dérivés en  $y$ . Cela implique que  $P_0$  ne dépend pas de  $y$ , c'est donc une fonction  $P_0 = P_0(t, x)$ . Ainsi, de la même manière,  $\mathcal{L}_1$  n'a que des dérivés simples ou croisées en  $y$ , il vient alors  $\mathcal{L}_1 P_0 = 0$ . Par conséquent, on a  $\mathcal{L}_0 P_{1,0} = 0$ .  $P_{1,0}$  est alors une fonction ne dépendant

seulement de  $t$  et  $x$  et donc  $\mathcal{L}_1 P_{1,0} = 0$ .

La dernière ligne du système peut ainsi se réécrire comme une équation de Poisson :  $\mathcal{L}_0 P_{2,0} = -\mathcal{L}_2 P_0$ .

Comme montré dans le cours, on arrive au système :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{BS}^{\bar{\sigma}} P_0 = 0 \\ P_0(T, x) = h(x) \end{cases}$$

$P_0$  est donc le prix dans le modèle de Black-Scholes pour la volatilité effective  $\bar{\sigma}(z) = \langle f^2(\cdot, z) \rangle$ .

$$P_0(t, x, z) = C_{BS}(t, x, \bar{\sigma}(z))$$

Par suite, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 P_{2,0} + \mathcal{L}^{BS} C_{BS}(t, x, \bar{\sigma}(z)) &= 0 \\ \implies \mathcal{L}_0 P_{2,0} + (\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) P_0 &= 0 \\ \implies P_{2,0} &= -\mathcal{L}_0^{-1} (\mathcal{L}_2 - \langle \mathcal{L}_2 \rangle) P_0 \end{aligned}$$

En prenant le terme d'ordre  $\varepsilon$  dans la décomposition de  $P_0^\varepsilon$ , on obtient l'équation suivante :

$$\mathcal{L}_0 P_{3,0} + \mathcal{L}_1 P_{2,0} + \mathcal{L}_2 P_{1,0} = 0$$

Comme vu dans le cours, la résolution de cette équation de Poisson, nous amène à la solution :

$$\begin{aligned} P_{1,0} &= -(T-t)\mathcal{A}P_0 \\ \mathcal{A} &= \frac{\nu\rho_1}{\sqrt{2}} \left\langle f \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle x \frac{\partial}{\partial x} \left( x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - \frac{\nu}{\sqrt{2}} \left\langle \Lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\rangle x^2 \frac{\partial^2}{\partial^2} \end{aligned} \quad (6)$$

où  $\phi$  est la solution de l'EDP que l'on peut résoudre en spécifiant notre modèle :

$$\mathcal{L}_0 \phi(y, z) = f^2(y, z) - \bar{\sigma}^2(z)$$

Suite à ces calculs, nous avons trouvé une approximation  $\tilde{P}_0^\varepsilon$  au premier ordre de  $P_0^\varepsilon$ :

$$\tilde{P}_0^\varepsilon = C_{BS}(t, x, \bar{\sigma}(z)) - \sqrt{\varepsilon}(T-t)\mathcal{A}P_0$$

## 1.2 Calcul de $P_1^\varepsilon$

De la même manière que précédemment, on va décomposer  $P_1^\varepsilon$  en puissance de  $\sqrt{\varepsilon}$  :

$$P_1^\varepsilon = P_{0,1} + \sqrt{\varepsilon}P_{1,1} + \varepsilon P_{2,1} + \dots \quad (7)$$

A partir de l'EDP de pricing, on obtient par identification de l'ordre en  $\sqrt{\delta}$ ,

$$\mathcal{L}^\varepsilon P_1^\varepsilon = - \left( \mathcal{M}_1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathcal{M}_3 \right) P_0$$

En injectant le développement de  $P_1^\varepsilon$  dans cette équation, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\varepsilon (P_{0,1} + \sqrt{\varepsilon}P_{1,1} + \varepsilon P_{2,1} + \dots) &= -(\mathcal{M}_1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \mathcal{M}_3) P_0 \\ \implies 0 &= \varepsilon^{-1} (\mathcal{L}_0 P_{0,1}) \\ &+ \varepsilon^{-1/2} (\mathcal{L}_0 P_{1,1} + \mathcal{L}_1 P_{0,1} + \mathcal{M}_3 P_0) \\ &+ (\mathcal{L}_0 P_{2,1} + \mathcal{L}_1 P_{1,1} + \mathcal{L}_2 P_{0,1} + \mathcal{M}_1 P_0 + \mathcal{M}_3 P_{1,0}) \\ &+ \sqrt{\varepsilon} (\mathcal{L}_0 P_{3,1} + \mathcal{L}_1 P_{2,1} + \mathcal{L}_2 P_{1,1} + \mathcal{M}_1 P_{1,0} + \mathcal{M}_3 P_{2,0}) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 P_{0,1} = 0 \\ \mathcal{L}_0 P_{1,1} + \mathcal{L}_1 P_{0,1} + \mathcal{M}_3 P_0 = 0 \\ \mathcal{L}_0 P_{2,1} + \mathcal{L}_1 P_{1,1} + \mathcal{L}_2 P_{0,1} + \mathcal{M}_1 P_0 + \mathcal{M}_3 P_{1,0} \end{cases}$$

Par les mêmes raisonnements que pour  $P_0^\varepsilon$ , on en déduit que  $P_{0,1}$  est une fonction dépendant de  $t$  et  $x$ . On a également  $\mathcal{M}_3 P_0 = \mathcal{L}_1 P_{0,1} = 0$  puisque  $\mathcal{M}_3$  et  $\mathcal{L}_1$  prennent des dérivés en  $y$  et que  $P_0$  et  $P_{0,1}$  sont constants en cette variable. On a alors  $\mathcal{L}_0 P_{1,1} = 0$ . Donc,  $P_{1,1}$  ne dépend pas de  $y$ .

Par suite, il vient que  $\mathcal{L}_1 P_{1,1} = \mathcal{M}_3 P_{1,0} = 0$ . On arrive ainsi à l'équation de Poisson suivante pour  $P_{2,1}$  :  $\mathcal{L}_0 P_{2,1} + \mathcal{L}_2 P_{0,1} = -\mathcal{M}_1 P_0$

Cela donne la condition de centrage suivante :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_2 P_{0,1} + \mathcal{M}_1 P_0 \rangle &= 0 \\ \implies \langle \mathcal{L}_2 \rangle P_{0,1} &= -\langle \mathcal{M}_1 \rangle P_0 \\ \implies P_{0,1} &= \frac{T-t}{2} \langle \mathcal{M}_1 \rangle P_0 \\ \langle \mathcal{M}_1 \rangle &= (-g\langle \Gamma \rangle + \rho_2 g\langle f \rangle x \partial_x) \partial_z \end{aligned}$$

L'article décrit également comment calculer les termes suivants. Cependant, ces termes n'interviennent pas dans le résultat suivant. Ils seront seulement utiles dans la démonstration.

Par conséquent, nous pouvons écrire l'approximation du prix comme :

$$\tilde{P}^{\varepsilon, \delta} = C_{BS}(t, x, \bar{\sigma}(z)) - \sqrt{\varepsilon}(T-t)\mathcal{A}P_0 + \sqrt{\delta}\frac{T-t}{2}\langle \mathcal{M}_1 \rangle P_0 \quad (8)$$

## 2 Précision de l'approximation

Les auteurs de l'article nous présentent leur premier théorème. Ils cherchent à déterminer précisément quelle est la précision de notre approximation vis à vis du véritable prix.

Pour un payoff  $h$  et pour  $(t, x, y, z)$  fixés,

$\forall \varepsilon, \delta \leq 1, \exists C > 0$  tel que :

$$\|P^{\varepsilon, \delta} - \tilde{P}^{\varepsilon, \delta}\| \leq C(\varepsilon + \delta\sqrt{\delta\varepsilon})$$

Pour un payoff de type Call ou Put, on obtient :

$$\|P^{\varepsilon, \delta} - \tilde{P}^{\varepsilon, \delta}\| \leq C(\varepsilon\|\log \varepsilon\| + \delta\sqrt{\delta\varepsilon})$$

## 3 Volatilité Implicite

Nous allons maintenant chercher à pouvoir écrire une approximation de la volatilité implicite. Avec nos notations, la volatilité implicite  $I$  est solution de :

$$C_{BS}(t, x, T, K, I) = P^{\varepsilon, \delta}(t, x, z) \quad (9)$$

Nous pouvons faire l'hypothèse du développement où  $I_1^\varepsilon$  et  $I_1^\delta$  sont respectivement proportionnels à  $\sqrt{\varepsilon}$  et  $\sqrt{\delta}$ :

$$I = I_0 + I_1^\varepsilon + I_1^\delta + \dots$$

Nous allons introduire différentes variables pour paramétrer le marché :

$$\begin{cases} V_0^\delta &= \frac{\sqrt{\delta}}{2} g\langle \Gamma \rangle \bar{\sigma} \bar{\sigma}' \\ V_1^\delta &= -\frac{\sqrt{\delta}}{2} \rho_2 \langle f \rangle \bar{\sigma} \bar{\sigma}' \\ V_2^\varepsilon &= -\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \nu \langle \Lambda \partial_y \phi \rangle \\ V_3^\varepsilon &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} \nu \rho_1 \langle f \partial_y \phi \rangle \end{cases}$$

En faisant un développement limité de  $C_{BS}$  autour de  $I_0$ , et que l'on réécrit l'équation  $C_{BS} = P^{\varepsilon, \delta}$  en fonction de ces paramètres, et en notant  $\tau = T - t$  on obtient :

$$\begin{aligned} & C_{BS}(I_0) + (I_1^\varepsilon + I_1^\delta) \partial_\sigma C_{BS}(I_0) + \dots \\ &= P_{BS} - \frac{1}{\bar{\sigma}} \{ (V_2^\varepsilon + V_3^\varepsilon x \partial_x) + \tau (V_0^\delta + V_1^\delta x \partial_x) \} \partial_\sigma P_{BS} + \dots \end{aligned}$$

Par suite, en matchant les termes  $\mathcal{O}(1)$ , on obtient :

$$I_0 = \bar{\sigma}(z)$$

De même en matchant les termes d'ordre  $\sqrt{\varepsilon}$  et  $\sqrt{\delta}$  et en calculant  $x$  fois la dérivé du Vega par rapport à  $x$ , on peut obtenir les formules suivantes :

$$\begin{cases} I_1^\varepsilon = -\frac{1}{\bar{\sigma}} \left\{ V_2^\varepsilon + V_3^\varepsilon \left( 1 - \frac{d_1}{\bar{\sigma} \sqrt{\tau}} \right) \right\} \\ I_1^\delta = -\frac{\tau}{\bar{\sigma}} \left\{ V_0^\delta + V_1^\delta \left( 1 - \frac{d_1}{\bar{\sigma} \sqrt{\tau}} \right) \right\} \end{cases}$$

Enfin, on peut réécrire cette formule en terme de LMMR ( $\log(K/x)/\tau$ ) et du log-moneyness LM ( $\log(K/x)$ )

$$\begin{aligned} I &\approx \bar{\sigma} + b^\varepsilon + a^\varepsilon LMMR + a^\delta LM + b^\delta \tau \\ &\approx \bar{\sigma} + (a^\varepsilon + a^\delta (T - t)) LMMR + (b^\varepsilon + b^\delta (T - t)) \end{aligned}$$

On prendra les notations suivantes :

$$\begin{cases} a^\varepsilon &= -\frac{V_3^\varepsilon}{\bar{\sigma}^3} \\ a^\delta &= -\frac{V_1^\delta}{\bar{\sigma}^3} \\ b^\varepsilon &= -\frac{V_2^\varepsilon}{\bar{\sigma}} + \frac{V_3^\varepsilon}{\bar{\sigma}^3} \left( r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) \\ b^\delta &= -\frac{V_0^\delta}{\bar{\sigma}} + \frac{V_1^\delta}{\bar{\sigma}^3} \left( r - \frac{\bar{\sigma}^2}{2} \right) \end{cases}$$

Cette dernière équation nous rend la question de l'implémentation numérique beaucoup plus facile. En effet,  $\bar{\sigma}$  pourra être estimé à partir de l'historique "récent" des données. C'est-à-dire que l'on estimera  $\bar{\sigma}$  sur une courte période, proche de la date actuelle, car définit à partir de l'échelle de temps court. Ensuite, nous pourrions calibrer les paramètres  $a^\varepsilon, a^\delta, b^\varepsilon, b^\delta$  pour fitter aux données observées de la volatilité.

Ceci sera traiter plus en détails dans notre prochaine section.



# C CALIBRATION ET PRICING

## 1 Aspects pratiques

Dans cette section, nous allons traiter des problèmes pratiques et numériques dont parlent l'article. Une première application du modèle présenté est le pricing d'option vanille.

**Etape 1 :** La première étape est de résoudre l'équation de Black-Scholes :

$$\begin{cases} \partial_t P_{BS} + \frac{1}{2} \bar{\sigma}^2(z) x^2 \partial_{x^2}^2 P_{BS} + r(x \partial_x P_{BS} - P_{BS}) = 0 \\ P_{BS}(T, x) = h(x) \end{cases}$$

**Etape 2 :** Il faut maintenant calculer quelques grecques à partir du prix Black-Scholes

- Delta :  $\Delta = \frac{\partial P}{\partial x}$
- Vega :  $\mathcal{V} = \frac{\partial P}{\partial \sigma}$
- DeltaVega :  $\Delta_{\mathcal{V}} = \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial \sigma}$

Nous avons pu voir précédemment que le prix approché pouvait s'écrire :

$$\tilde{P}^{\epsilon, \delta} = P_{BS} - \frac{1}{\bar{\sigma}} \{ (V_2^\epsilon + V_3^\epsilon x \partial_x) + \tau (V_0^\delta + V_1^\delta x \partial_x) \} \partial_\sigma P_{BS}$$

Cela devient :

$$\tilde{P}^{\epsilon, \delta} = P_{BS} - \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[ (V_2^\epsilon + \tau V_0^\delta) \mathcal{V} + (V_3^\epsilon + \tau V_1^\delta) \Delta_{\mathcal{V}} \right]$$

Ces différentes quantités s'expriment en fonction des paramètres  $a^\epsilon, a^\delta, b^\epsilon, b^\delta$ .

**Etape 3 :** A présent, il suffit de calibrer la structure de volatilité implicite sur les données de marché observées. Par cascade, nous pouvons ainsi approximer le prix de l'option.

Nous pouvons également utiliser cette méthode pour pricer des options path-dependent. La force de cette méthode est que les paramètres calibrés précédemment vont également nous servir pour ce type de payoff.

En effet, traiter des payoffs du type :

$$h = \left( X_T - \frac{1}{T} \int_0^T X_t dt \right)^+$$

Dans notre modèle risque-neutre, il faudra également rajouter l'information donnée par  $\int_0^t X_s ds$ . Il en suit par les mêmes méthodes qu'expliquées dans la partie 2, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_2^* \rangle q^{\epsilon, \delta} &= \mathcal{L}_s Q_0 \\ q^{\epsilon, \delta}(T, x, z, I) &= (x - I/T)^+ \\ \mathcal{L}_s &= \frac{2}{\bar{\sigma}} [V_0^\delta \partial_\sigma + V_1^\delta x \partial_{x\sigma}] + [V_2^\epsilon x^2 \partial_{x^2}^2 + V_3^\epsilon x \partial_x (x^2 \partial_{x^2}^2)] \end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}_2^* := \mathcal{L}_2 + x \partial_I$  et  $Q_0$  est approché numériquement par :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_2^* \rangle Q_0 &= 0 \\ Q_0(T, x, z, I) &= (x - I/T)^+ \end{aligned}$$

## 2 Implémentation numérique

Nous avons implémenter numériquement les méthodes de calibration et de pricing dans un notebook joint avec ce rapport, dans lequel nous détaillons notre démarche plus précisément.

Après avoir récupéré les données des calls de différentes maturités du SP500, nous avons utilisé un modèle de régression linéaire entre  $I$  et les différents facteurs  $LM$ ,  $LMMR$ ,  $\tau$  pour obtenir les paramètres  $a^\varepsilon$ ,  $b^\varepsilon$ ,  $a^\delta$  et  $b^\delta$  correspondants, qui nous ont permis de déduire  $I_1^\varepsilon$  et  $I_1^\delta$ . Nous avons alors pu obtenir une valeur de volatilité empirique pour tous ces calls.

La figure 1 correspond à la surface de volatilité empirique  $I_{emp}$  sur le plan  $K$ ,  $\tau$ . Nous pouvons constater que cette surface de volatilité est assez similaire à celle obtenue dans le modèle fast mean reverting du cours.

Pour des maturités proches ( $\tau$ ) faible, la volatilité implicite (et donc le prix) est élevé si le strike est faible et faible lorsque le strike est élevé (car le stock n'a pas le temps de varier suffisamment loin de sa valeur initiale).

La table 1 correspond aux coefficients issus de la modélisation linéaire de la volatilité implicite par  $LM$ ,  $LMMR$  et  $\tau$ . On peut constater que la volatilité implicite décroît en fonction de  $LM$  ( $I$  est faible pour les call Out of The Money) et de  $LMMR$ .

La figure 2 nous montre que l'approximation linéaire est un bon modèle pour les dates d'expirations proches.

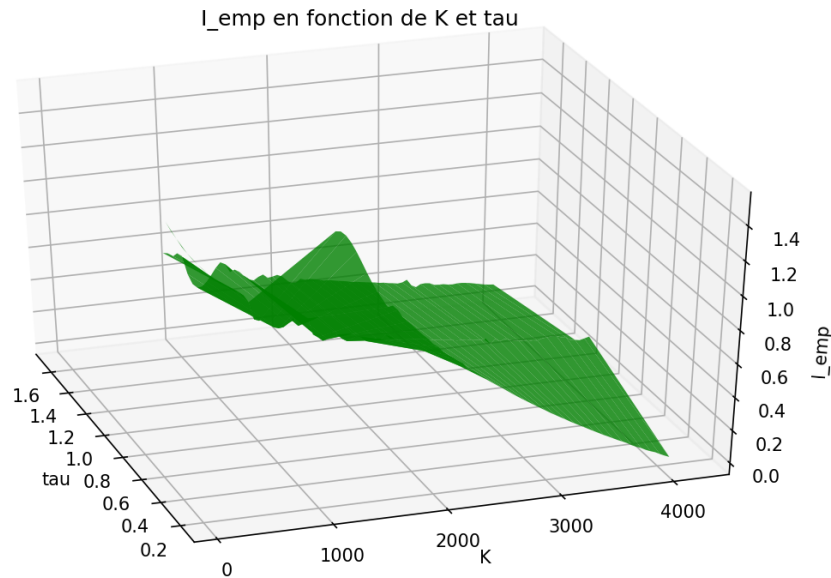
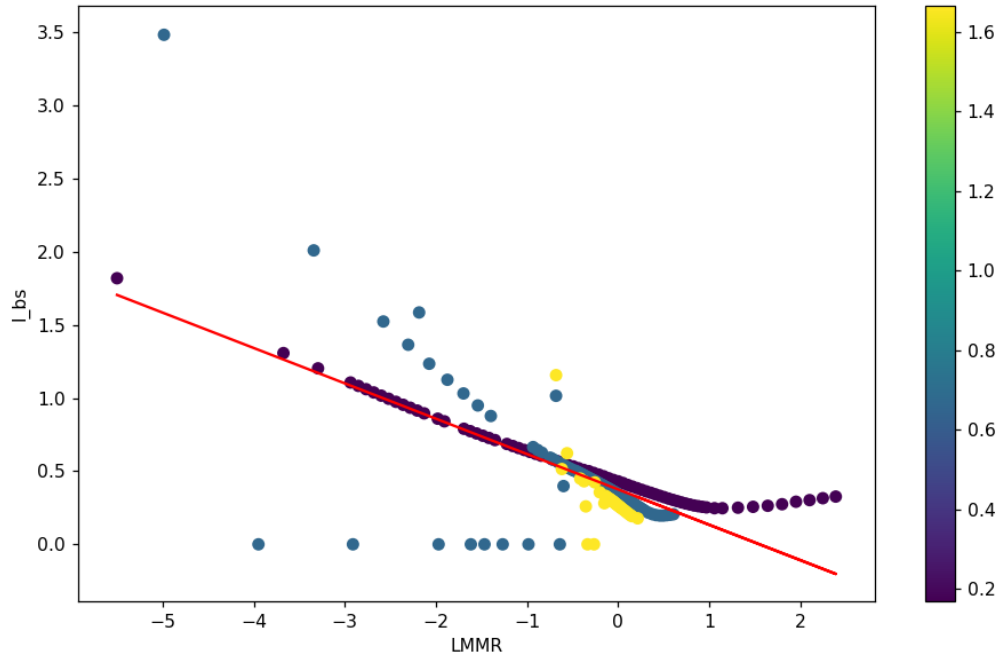


Figure 1: Surface de volatilité empirique ( $I_{emp}$ ) sur le plan  $K$ ,  $\tau$

coefficient	valeur
$a^\varepsilon$ (LMMR)	-0.167
$b^\varepsilon$ (constante)	0.461
$b^\delta$ (LM)	-0.147
$a^\delta$ ( $\tau$ )	-0.193

Table 1: Coefficients de la régression linéaire de I par LMMR, LM et  $\tau$ Figure 2: Surface de volatilité empirique ( $I_{emp}$ ) sur le plan  $K, \tau$ 

### 3 Conclusion

Cette article présente une façon assez simple d'obtenir des prix d'options dans un modèle à "multiscale volatility". Cependant, l'hypothèse d'AOA faite lors de la construction du modèle peut engendrer des soucis lors d'une utilisation pratique à cause des arbitrages présents sur les marchés. Néanmoins, ce modèle reste parcimonieux car il utilise peu de paramètres à calculer pour obtenir nos prix.

# BIBLIOGRAPHY

- [1] Caio Almeida C. Tessari. “Option Pricing under Multiscale Stochastic Volatility”. In: (2016).
- [2] JP Fouque. “Multiscale Stochastic Volatility Models : Heston 1.5”. In: (2011).
- [3] JP Fouque. “Volatility Time Scales and Perturbations”. In: (2005).
- [4] Julien Guyon. “Volatilité stochastique : étude d’un modèle ergodique”. In: (2002).
- [5] R. Sircar et K. Solna J.P. Fouque G.Papanicolaou. “Multiscale Stochastic Volatility Asymptotics”. In: (2002).
- [6] R. Sircar et K. Solna JP Fouque G. Papanicolaou. “Short time-scale in S&P 500 volatility”. In: (2002).