La percolation

Laura LEVRAUD Grégoire PELLETIER

Lycée Louis Le Grand

10 mars 2020

La percolation

Introduction : point historique

Introduction : point historique

John Hammersley (1920-2004) a été le premier à introduire le modèle mathématique de la percolation en 1957.
La percolation désigne, à l'origine, le passage d'un fluide à travers un solide perméable, mais la théorie de la percolation s'intéresse plus généralement aux caractéristiques des milieux aléatoires qui sont des ensembles de sommets connectés dans un graphe aléatoire.

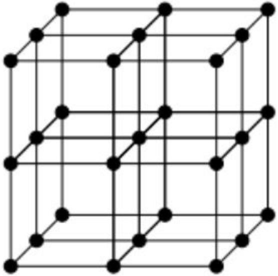
Introduction : point historique

Introduction : point historique

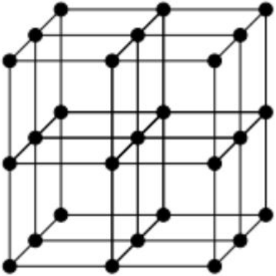
La percolation permet d'étudier plusieurs modèles : le passage d'eau dans une roche poreuse, la propagation d'une épidémie ou d'un feu de forêt, mais aussi le modèle d'Ising.
Le modèle d'Ising est un modèle de physique statistique étudié dès 1920 par Ernst Ising (1900-1998) qui lui a donné son nom. Le modèle d'Ising était donc étudié avant même la création de la théorie de la percolation. Il est utilisé pour modéliser différents phénomènes dans lesquels des particules qui intéragissent localement produisent des effets collectifs, le phénomène principalement étudié étant le ferromagnétisme.

Modélisation : le modèle de percolation

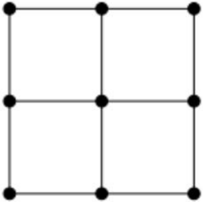
Modélisation de la roche poreuse par un cube :



Modélisation de la roche poreuse par un cube :

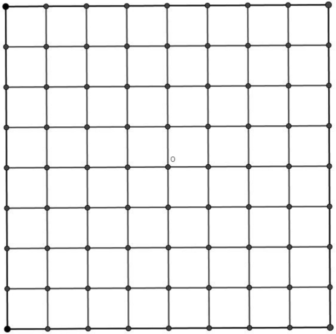


On considère seulement un plan de ce cube :

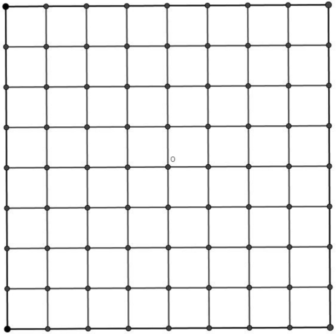


Construction du modèle : le graphe

Plan utilisé :



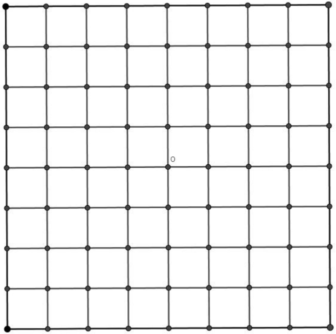
Plan utilisé :



Graphe $(\mathbb{Z}^2, E^2)$

Construction du modèle : le graphe

Plan utilisé :



Graphe $(\mathbb{Z}^2, E^2)$

De manière générale on considère $(\mathbb{Z}^d, E^d)$ en dimension d

Une arête $e \in E^d$ a une probabilité p d'être ouverte (et $1 - p$ d'être fermée).

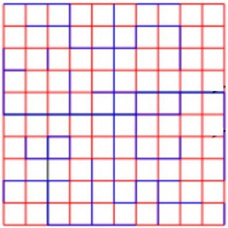
On construit donc la famille de variables aléatoires de Bernoulli $\mathbb{B}_p$ telle que

- $\mathbb{B}_p(e) = 1 \iff$ l'arête est "ouverte" (en bleue)
- $\mathbb{B}_p(e) = 0 \iff$ l'arête est "fermée" (en rouge ou effacée)

Une arête $e \in E^d$ a une probabilité p d'être ouverte (et $1 - p$ d'être fermée).
On construit donc la famille de variables aléatoires de Bernoulli $\mathbb{B}_p$ telle que

- $\mathbb{B}_p(e) = 1 \iff$ l'arête est "ouverte" (en bleue)
- $\mathbb{B}_p(e) = 0 \iff$ l'arête est "fermée" (en rouge ou effacée)

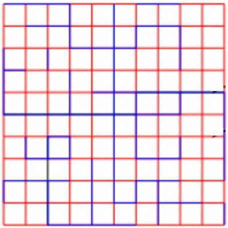
On obtient les graphes aléatoires suivants :

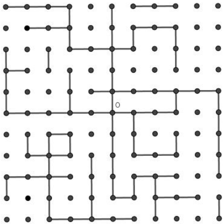


Une arête $e \in E^d$ a une probabilité p d'être ouverte (et $1 - p$ d'être fermée).
On construit donc la famille de variables aléatoires de Bernoulli $\mathbb{B}_p$ telle que

- $\mathbb{B}_p(e) = 1 \Longleftrightarrow$ l'arête est "ouverte" (en bleue)
- $\mathbb{B}_p(e) = 0 \Longleftrightarrow$ l'arête est "fermée" (en rouge ou effacée)

On obtient les graphes aléatoires suivants :





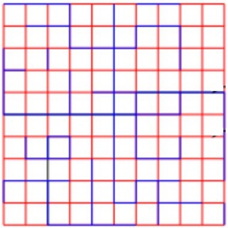
Graphe aléatoire de percolation :

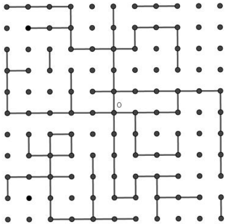
Une arête $e \in E^d$ a une probabilité p d'être ouverte (et $1 - p$ d'être fermée).

On construit donc la famille de variables aléatoires de Bernoulli $\mathbb{B}_p$ telle que

- $\mathbb{B}_p(e) = 1 \iff$ l'arête est "ouverte" (en bleue)
- $\mathbb{B}_p(e) = 0 \iff$ l'arête est "fermée" (en rouge ou effacée)

On obtient les graphes aléatoires suivants :





Graphe aléatoire de percolation :

$$\mathcal{G}_p = (\mathbb{Z}^d, e \in E^d | \mathbb{B}_p(e) = 1)$$

Modélisation informatique

On modélise ces graphes, dans le cas où ils sont de dimensions finies, en python par des tableaux du module numpy de dimension 2 ou 3

Modélisation informatique

On modélise ces graphes, dans le cas où ils sont de dimensions finies, en python par des tableaux du module numpy de dimension 2 ou 3
On utilise le module random pour déterminer si l'eau peut "passer" ou non par une case et ainsi obtenir un graphe aléatoire

Modélisation informatique

On modélise ces graphes, dans le cas où ils sont de dimensions finies, en python par des tableaux du module numpy de dimension 2 ou 3

On utilise le module random pour déterminer si l'eau peut "passer" ou non par une case et ainsi obtenir un graphe aléatoire

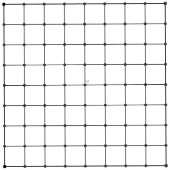
On peut alors observer l'écoulement de l'eau

Modélisation informatique

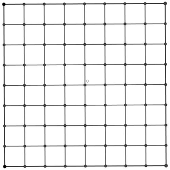
On modélise ces graphes, dans le cas où ils sont de dimensions finies, en python par des tableaux du module numpy de dimension 2 ou 3
On utilise le module random pour déterminer si l'eau peut "passer" ou non par une case et ainsi obtenir un graphe aléatoire
On peut alors observer l'écoulement de l'eau

Une grille avant et après percolation pour $p = 0{,}61$.

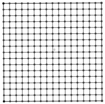
Composante connexe



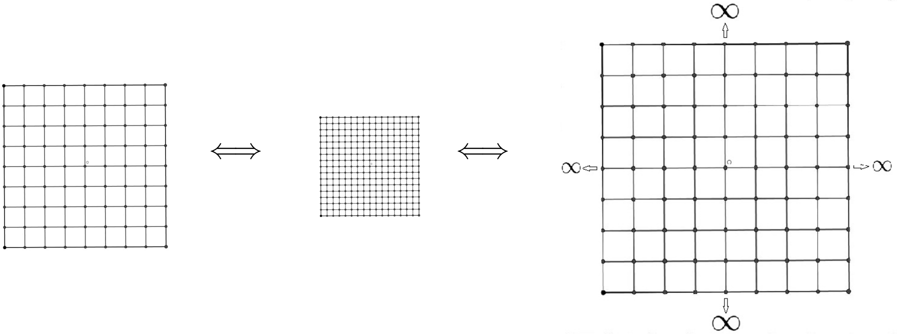
Composante connexe



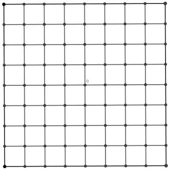
$\Longleftrightarrow$



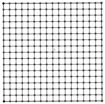
Composante connexe



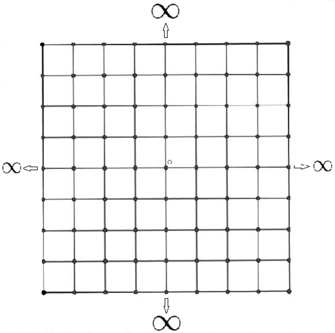
Composante connexe



$\Longleftrightarrow$



$\Longleftrightarrow$



La question : 0 relié avec ∞ ?

Composante connexe

Définition Composante connexe du point A

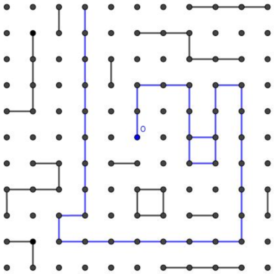
Sous-graphe connexe contenant A, ou sous-graphe $\mathscr{C}(A)$ comprenant A tel que pour tous points u et v dans le sous-graphe $\mathscr{C}(A)$, il existe une chaîne reliant u et v entre eux. On note $\mathscr{C}_p(A) = \{z \in \mathbb{Z}^d | \ A \xleftrightarrow{\mathcal{G}_p} z \ \}$

Composante connexe

Définition Composante connexe du point A

Sous-graphe connexe contenant A, ou sous-graphe $\mathscr{C}(A)$ comprenant A tel que pour tous points u et v dans le sous-graphe $\mathscr{C}(A)$, il existe une chaîne reliant u et v entre eux. On note $\mathscr{C}_p(A) = \{z \in \mathbb{Z}^d |\ A \xleftrightarrow{\mathcal{G}_p} z\ \}$

Notre but :

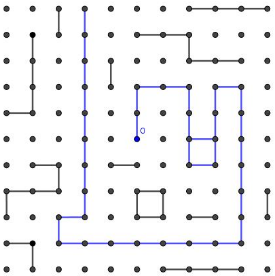


Composante connexe

Définition Composante connexe du point A

Sous-graphe connexe contenant A, ou sous-graphe $\mathscr{C}(A)$ comprenant A tel que pour tous points u et v dans le sous-graphe $\mathscr{C}(A)$, il existe une chaîne reliant u et v entre eux. On note $\mathscr{C}_p(A) = \{z \in \mathbb{Z}^d \mid A \xleftrightarrow{\mathcal{G}_p} z \}$

Notre but :



avoir
$\|\mathscr{C}_p(0)\| = \infty$

Dans le cas où les dimensions sont finies, on récupère la liste représentant une composante connexe par récursivité en s'intéressant aux voisins du point en entrée et en explorant les points qui n'ont pas encore été vu

Etude du modèle

Définition Probabilité de percolation

$\theta_d(p) = \mathbb{P}(\ 0 \overset{\mathcal{G}_p}{\longleftrightarrow} \infty)$ représente la probabilité que 0 soit connecté à l'infini dans le graphe G_p.

Définition Probabilité de percolation

$\theta_d(p) = \mathbb{P}(0 \overset{\mathcal{G}_p}{\longleftrightarrow} \infty)$ représente la probabilité que 0 soit connecté à l'infini dans le graphe G_p.

- On a $\theta_d(0) = 0, \theta_d(1) = 1$.
- Montrons que θ_d est croissante.
  Soit $p < q \in [0, 1]$. On considère une famille de loi uniforme ([0,1]) $(U(e))_{e \in E^d}$.
  Soit e in E^d, $B_p(e) = \mathbb{1}_{U(e)<p}, B_q(e) = \mathbb{1}_{U(e)<q}$.
  On a donc $B_p(e) < B_q(e), \mathcal{G}_p \subset \mathcal{G}_q$. On obtient donc $\theta_p < \theta_q$.

Etude du modèle

Définition Probabilité critique

$p_c = sup\{p \in [0, 1] | \theta_d(p) = 0\}$

Définition Probabilité critique

$p_c = sup\{p \in [0,1] | \theta_d(p) = 0\}$

- La probabilité critique marque une transition de phase puisque pour $p < p_c, \theta_d(p) = 0$, et pour $p > p_c, \theta_d(p) > 0$.
- Pour une dimension $d \geq 2$, $p_c(d) \in]0,1[$.

Probabilité critique

- Probabilité de percolation : $\theta_d(p) = \mathbb{P}(\ 0 \xleftrightarrow{\mathcal{G}_p} \infty)$
- Définition d'une probabilité critique : $p_c = sup\{p \in]0,1[| \theta_d(p) = 0\}$

Probabilité critique

- Probabilité de percolation : $\theta_d(p) = \mathbb{P}(\ 0 \overset{\mathcal{G}_p}{\longleftrightarrow} \infty)$
- Définition d'une probabilité critique : $p_c = sup\{p \in]0,1[| \theta_d(p) = 0\}$

Théorème de Simon Broadbent et John Hammersley, 1957-1959

Pour d > 1, il existe une probabilité critique p_c telle que $p_c \in]0,1[$ et

- $p < p_c \Rightarrow \theta_d(p) = 0$: la roche n'est pas poreuse
- $p > p_c \Rightarrow \theta_d(p) > 0$: la roche est poreuse.

Probabilité critique

- Probabilité de percolation : $\theta_d(p) = \mathbb{P}(\ 0 \overset{\mathcal{G}_p}{\longleftrightarrow} \infty)$
- Définition d'une probabilité critique : $p_c = sup\{p \in]0,1[| \theta_d(p) = 0\}$

Théorème de Simon Broadbent et John Hammersley, 1957-1959

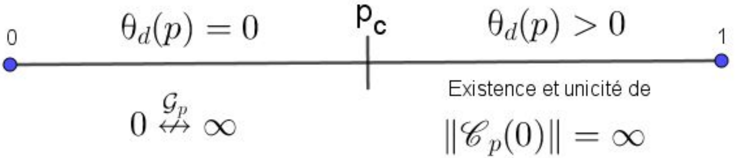
Pour d > 1, il existe une probabilité critique p_c telle que $p_c \in]0,1[$ et

- $p < p_c \Rightarrow \theta_d(p) = 0$: la roche n'est pas poreuse
- $p > p_c \Rightarrow \theta_d(p) > 0$: la roche est poreuse.

$p_c(1) = 1$, pas de transition de phase

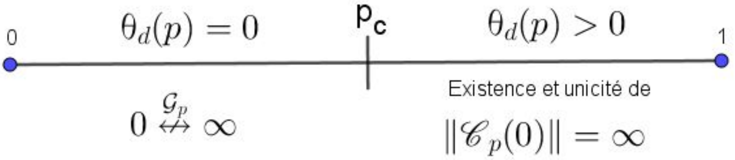
Pour d > 1, on a une transition de phase en p_c telle que :

- pour une probabilité $p < p_c$, on ne trouve pas de chemin entre un point et l'infini,
- pour $p < p_c$, on trouve exactement une composante connexe de cardinal infini. On a donc existence et unicité d'un chemin entre le centre de la roche et sa surface.



Pour d > 1, on a une transition de phase en p_c telle que :

- pour une probabilité $p < p_c$, on ne trouve pas de chemin entre un point et l'infini,
- pour $p < p_c$, on trouve exactement une composante connexe de cardinal infini. On a donc existence et unicité d'un chemin entre le centre de la roche et sa surface.



Les travaux récents de mathématiciens comme W.Werner et S.Smirnov on permis de prouvé proprement ces propriétés, mais aussi que : pour d $= 2$, on a $p_c = 1/2$ et $\theta_2(p_c) = 0$.

Pour d > 2, on conjecture $\theta_d(p_c) = 0$.

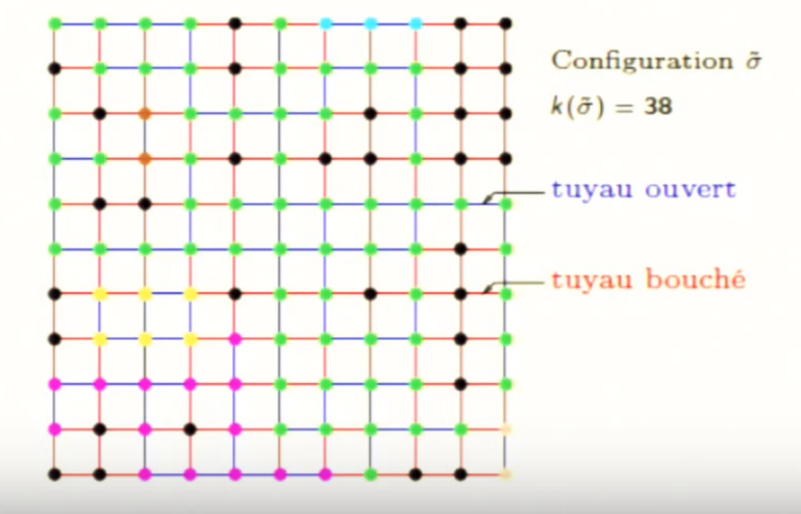
$p_c = ?$

Le modèle de FK-percolation

La FK percolation permet de relier la percolation et le modèle d'Ising. Elle tire son nom des initials de ses inventeurs, Cees Fortuin et Peet Kasteleyn.

- On associe à une configuration σ le nombre de ses composantes connexes $k(\sigma)$.
- On fixe q $\in [1, \infty[$, un autre paramètre.
- La probabilité d'être dans une configuration $\mathbb{P}_{p,q}(\sigma)$ est proportionelle à $p^o * (1-p)^f * q^{k(\sigma)}$, avec
  o = nombre de tuyaux ouverts dans σ
  f = nombre de tuyaux bouchés dans σ

Le modèle de FK-percolation



Le modèle de FK-percolation

La probabilité critique qui marque la transition de phase dépend de q.
On peut lier la percolation et le modèle d'Ising grâce à la FK percolation.

Le modèle de FK-percolation

La probabilité critique qui marque la transition de phase dépend de q.
On peut lier la percolation et le modèle d'Ising grâce à la FK percolation.

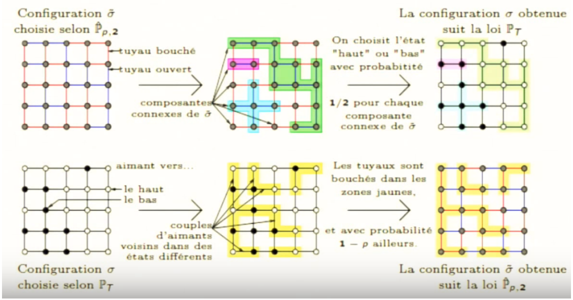
- Pour q=1, $P_{p,1}$=P_p, on retrouve le modèle de percolation standard.
- Pour q=2, $P_{p,2}$ permet de retrouver $P_T \ avecp = 1 - e^{-1/T}$, on obtient le modèle d'Ising.

Le modèle de FK-percolation

On peut donc partir d'une configuration d'un modèle d'Ising pour obtenir une configuration de FK percolation avec q=2 et inversement.

Le modèle de FK-percolation

On peut donc partir d'une configuration d'un modèle d'Ising pour obtenir une configuration de FK percolation avec q=2 et inversement.

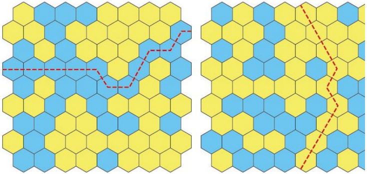


Des exemples d'application du modèle de percolation

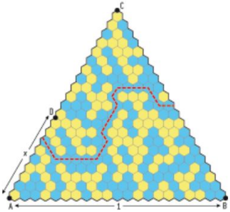
- Les feux de fôret,
- La propagation d'épidémie,
- Le passage du courant électrique dans un mélange de matériaux conducteurs et isolants, ...

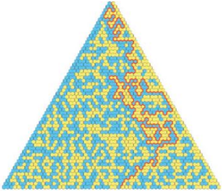
On peut aussi utiliser la théorie de la percolation par d'autres considérations, ou avec d'autres formes :

On peut aussi utiliser la théorie de la percolation par d'autres considérations, ou avec d'autres formes :



Deux pavages possibles d'une pièce où la couleur des carreaux est tirée au hasard équitablement, à pile ou fac
faisons face à une alternative, ou bien un chemin bleu traverse de gauche à droite, ou bien le bord extérieur c
l'ensemble des hexagones bleus reliés au bord gauche constitue un chemin jaune de haut en bas.





Sources

- Conférence Math Park du 21 septembre 2019 : Barbara Dembin, *La Percolation de premier passage*
- Conférence Math Park du 9 avril 2016 : Marie Théret, *La Percolation, un modèle mathématique ...*
- *La matière en désordre*, vulgarisation du savoir actuel, E.Guyon, JP.Hulin, D.Bideau, édition CNRS
- *La percolation, jeu de pavages aléatoires*, H.Duminil-Copin, professeur à l'Université de Genève, Pour la Science
- *Pavages, arbres et labyrinthes aléatoires*, Wendelin Werner, mathématicien et professeur à l'Université Paris Sud Orsay, et l'ENS, Images des mathématiques
- *Les travaux de Stanislas Smirnov*, Julie Rehmeyer, Images des mathématiques 2010