1 Naloga 3

Imamo izraz $F(x,y) = (x^2+y^2)^3 - 4x^2y^2$. Dobimo

$$F_x = -8xy^2 + 6x\left(x^2+y^2\right)^2 = 2x\left(3x^4+6x^2y^2+3y^4-4y^2\right)$$

in

$$F_y = -8x^2y + 6y\left(x^2+y^2\right)^2 = 2y\left(3x^4+6x^2y^2-4x^2+3y^4\right)$$

Precej očitno je da je $(0,0)$ singularna točka, saj je tudi $F(0,0)=0$. Dokazali bomo da je to edina singularna točka. Precej očitno je tudi da če je $x=0$ je tudi $y=0$ in obratno. Zato se omejimo na primere $x \neq 0$ in $y \neq 0$.

Rešujemo sistem $F_x = 0$ in $F_y = 0$ kar se s predpostavko $x \neq 0$ in $y \neq 0$ poenostavi v $3x^4+6x^2y^2+3y^4-4y^2 = 0$ in $3x^4+6x^2y^2-4x^2+3y^4 = 0$ Če od prve enačbe odštejemo drugo dobimo $4x^2-4y^2=0$, torej je $x^2=y^2$. Vstavimo v prvo enačbo in dobimo $3x^4+6x^4+3x^4-4x^2=0$ kar preprosto rešimo da dobimo $x = \pm\sqrt{3}$ in enako $y = \pm\sqrt{3}$. S preprostim preizkusom vidimo da te točke niso na krivulji zato niso singularne točke.

Red točke $(0,0)$ je očitno 4 ker je to stopnja najmanjšega monoma.

Sedaj pridobimo tangente kot rešitve $F=0$ kjer pa vzamemo le monome stopnje 4. Dobimo $-4x^2y^2=0$ od koder dobimo tangenti $x=0$ in $y=0$. Določimo presečne večkratnosti obeh tangent.

Če v F vstavimo $x=0$ dobimo $-y^6=0$, torej je presečna večkratnost enaka 6.

Če v F vstavimo $y=0$ dobimo $x^6=0$, torej je presečna večkratnost spet enaka 6.