1 Naloga 5

Imamo projektivno krivuljo podano z $F = -y^4 - z^4 + 2\left(x^2 - 2xy + y^2 - yz\right)^2$. Izračunamo

$$F_x = 2 \cdot (4x - 4y)\left(x^2 - 2xy + y^2 - yz\right) = 0$$
$$F_y = -4y^3 + 2\left(-4x + 4y - 2z\right)\left(x^2 - 2xy + y^2 - yz\right) = 0$$
$$F_z = -4y\left(x^2 - 2xy + y^2 - yz\right) - 4z^3 = 0$$

Enačbe delimo z 8 ali 4 da jih malo poenostavimo

$$(x - y)\left(x^2 - 2xy + y^2 - yz\right) = 0$$
$$-y^3 - (2x - 2y + z)\left(x^2 - 2xy + y^2 - yz\right) = 0$$
$$-y\left(x^2 - 2xy + y^2 - yz\right) - z^3 = 0$$

Iz prve enačbe delimo na 2 primera.

1.) $x - y = 0$. Sledi da je $y = x$ kar vstavimo v drugo in tretjo enačbo in poenostavimo da dobimo

$$-x^3 + xz^2 = 0$$
$$x^2 z - z^3 = 0$$

Če je $x = 0$ potem dobimo $z = 0$ kar ni v redu ker smo v projektivnem prostoru. Zato lahko delimo z x da dobimo $-x^2 + z^2 = 0$ oziroma $z^2 = x^2$. Delimo na 2 primera.

1.1) $z = x$. Vidimo da to ustreza vsem enačbam kar nam da singularno točko $(1, 1, 1)$.

1.2) $z = -x$. To spet ustreza vsem enačbam in dobimo točko $(1, 1, -1)$.

2.) $x^2 - 2xy + y^2 - yz = 0$. Tukaj imamo srečo in izraz prepoznamo v drugi in tretji enačbi ki se poenostavita da dobimo

$$-y^3 = 0$$
$$-z^3 = 0$$

Hitro vidimo da bo le trojica $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ rešila ta sistem, zato ne dobimo singularnih točk v projektivnem.

1.1 Preverjanje singularnih točk

Sedaj za točki $(1,1,1)$ in $(1,1,-1)$ preverimo, če res ležita na C. Če ju vstavimo v F res dobimo 0 tako da moramo le še preveriti rede.

Vidimo da je $F_{xx}(1,1,1) = 8x^2 - 16xy + 8y^2 - 8yz + (2x - 2y)(8x - 8y) = -8 \neq 0$, zato je točka reda 2.

Vidimo tudi da je $F_{xx}(1,1,-1) = 8 \neq 0$ po podobnem izračunu zato je ta točka tudi reda 2.