1 Naloga 2

S homogenizacijo dobimo $F = x^3 - x^2y - 5y^2z - 2xyz - xz^2$ in $G = x^2 - xy + xz + yz$. Vidimo da $[1,0,0]$ ne leži v $F \cap G$ zato računamo rezultanto po x koordinati. Dobimo matriko

$$\begin{bmatrix} 1 & -y & -2yz - z^2 & -5y^2z & 0 \\ 0 & 1 & -y & -2yz - z^2 & -5y^2z \\ 1 & -y + z & yz & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -y + z & yz & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -y + z & yz \end{bmatrix}$$

, ki nam da rezultanto $45y^4z^2 - 18y^3z^3 + 5y^2z^4$

To se razstavi v $45y^2z^2\left(y + z\left(-\frac{1}{5} - \frac{4i}{15}\right)\right)\left(y + z\left(-\frac{1}{5} + \frac{4i}{15}\right)\right)$.

Delamo po delih.

$y = 0$ nam da $F = x^3 - xz^2$ in $G = x^2 + xz$. Dobimo rešitvi $[0,0,1]$ in $[1,0,-1]$. Vsota večkratnosti presečišč je 2, zato imata obe presečišči stopnjo 1.

$z = 0$ nam da $F = x^3 - x^2y = x^2(x - y)$ in $G = x^2 - xy = x \cdot (x - y)$. Dobimo rešitvi $[0,1,0]$(pri primeru $x = 0$) in $[1,1,0]$(pri primeru $x - y = 0$). Vsota večkratnosti presečišč je 2, zato imata obe presečišči stopnjo 1.

Če vstavimo $y = z(\frac{1}{5} + \frac{4i}{15})$ dobimo

$$F = x^3 - x^2z\left(\frac{1}{5} + \frac{4i}{15}\right) - xz^2 - 2xz^2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{4i}{15}\right) - 5z^3\left(\frac{1}{5} + \frac{4i}{15}\right)^2$$

in

$$G = x^2 + xz - xz\left(\frac{1}{5} + \frac{4i}{15}\right) + z^2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{4i}{15}\right)$$

Presečišče bo tukaj večkratnosti 1 in samo eno kar vidimo iz rezultante. F in G lahko razstavimo kot

$$F = \left(x + \frac{iz}{3}\right)\left(x^2 + xz\left(-\frac{1}{5} - \frac{3i}{5}\right) + z^2\left(-\frac{8}{5} - \frac{7i}{15}\right)\right)$$

in

$$G = \left(x + \frac{iz}{3}\right)\left(x + z\left(\frac{4}{5} - \frac{3i}{5}\right)\right)$$

Vidimo da je $x + \frac{iz}{3}$ skupni faktor in dobimo presečišče $[-i/3, 0, 1]$.

Podobno dobimo pri $y = z(\frac{1}{5} - \frac{4i}{15})$ kjer je potem

$$F = \left(x - \frac{iz}{3}\right)\left(x^2 + xz\left(-\frac{1}{5} + \frac{3i}{5}\right) + z^2\left(-\frac{8}{5} + \frac{7i}{15}\right)\right)$$

in

$$G = \left(x - \frac{iz}{3}\right)\left(x + z\left(\frac{4}{5} + \frac{3i}{5}\right)\right)$$

Spet je vsota večkratnosti ena torej le eno presečišče ki je $[-i/3, 0, 1]$.

S tem smo našteli vsa presečišča ki jih je 6 in imajo vsa večkratnost 1.