1 Splošno

Če kje piše očitno in ni očitno bi bilo super če bi lahko dobil email da popravim, ne vem točno koliko detajlov je treba pisat.

2 Naloga 1

Ugibamo $u(x, y) = \sinh(x)\sin(y)/\sinh(\pi)$

(Ugibanje ni naključno. Naredil sem simulacijo funkcije in pogledal grafe. Kalkulacije so v mapi kalkulacije n1_1_plots.ipynb, ki bi jih moral github lepo prikazat.) Preverimo da funkcija ustreza pogojem

$u(x, 0) = \sinh(x)\sin(0)/\sinh(\pi) = 0$ in $u(x, \pi) = \sinh(x)\sin(\pi)/\sinh(\pi) = 0$.

$u(0, y) = \sinh(0)\sin(y)/\sinh(\pi) = 0$ in $u(\pi, y) = \sinh(\pi)\sin(y)/\sinh(\pi) = sin(y)$.

$u_x = \cosh(x)\sin(y)/\sinh(\pi)$ in $u_y = \sinh(x)\cos(y)/\sinh(\pi)$.

$u_{xx} = \sinh(x)\sin(y)/\sinh(\pi)$ in $u_{yy} = -\sinh(x)\sin(y)/\sinh(\pi)$.

Vidimo da je u harmonična funkcija ki ustreza pogojem naloge.

3 Naloga 2

Naj bo $v = u-y-y^2$. Rešujemo nalogo $v_{|\partial\Omega} = 0$ in $\Delta v = 2$ na Ω. Iz Vaje 8 stran 6 vemo da je $v(x, y) = \frac{x^2+y^2-1}{2}$. Sledi $u = \frac{x^2-y^2-2y-1}{2}$

4 Naloga 3

Vidimo da je u na robu vedno znotraj $[0, 1]$. Dokazujemo $0 < u < 1$ na Ω. Po šibkem principu maksima očitno sledi da je $0 \leq u \leq 1$ na Ω.

Dokazati je potrebno le še da $u(x, y) \neq 0$ in $u(x, y) \neq 1$ znotraj Ω. Vemo že da je u omejen z $[0, 1]$ vrednostmi na robu. Po krepkem principu maksima bi moral biti u konstanten če bi dosegel ekstreme na Ω. Vendar u po robu ni konstanten zato u ne more doseči ekstremov znotraj Ω.

$u(0)$ izračunamo po princupu povprečja:

$$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2(2\phi)d\phi$$

To je precej preprost integral ki nam da $u(0) = \frac{1}{4}$.

5 Naloga 4

Najprej predelamo poissonovo jedro v kartezične koordinate da dobimo

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - x^2 - y^2}{1 - 2x\cos(\theta) - 2y\sin(\theta) + x^2 + y^2} f(\theta)d\theta$$

$f(\theta)$ je enak nič za $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$ in enak $\cos(\theta)$ za ostale θ.

Torej je

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(\theta)}{1 - 2x\cos(\theta) - 2y\sin(\theta) + x^2 + y^2} d\theta$$

Rešujemo torej

$$\int \frac{\cos(\theta)}{1 - 2x\cos(\theta) - 2y\sin(\theta) + x^2 + y^2} d\theta$$

Z nekaj spretnosti integral pretvorimo v

$$\begin{aligned}-\frac{4y}{4x^2+4y^2}\int\frac{x\sin(\theta)-y\cos(\theta)}{1-2x\cos(\theta)-2y\sin(\theta)+x^2+y^2}d\theta\\+\frac{2x(1+x^2+y^2)}{4x^2+4y^2}\int\frac{1}{1-2x\cos(\theta)-2y\sin(\theta)+x^2+y^2}d\theta\\+\frac{2x}{4x^2+4y^2}\int 1d\theta\end{aligned}$$

Prvi del preprosto rešimo s substitucijo $u=1-2x\cos(\theta)-2y\sin(\theta)+x^2+y^2$, torej je $du=2x\sin(\theta)-2y\cos(\theta)d\theta$ in dobimo

$$\int\frac{x\sin(\theta)-y\cos(\theta)}{1-2x\cos(\theta)-2y\sin(\theta)+x^2+y^2}d\theta=\frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du=\frac{1}{2}\ln(u)$$

Tretji integral je seveda trivialen, problem povzroča le drugi integral.

Za minimizacijo tipkanja rešimo

$$\int\frac{1}{a\sin(x)+b\cos(x)+c}dx$$

Naredimo substitucijo

$$u=-\frac{2arctanh(\frac{a+(c-b)\tan(x/2)}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}})}{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}$$

Odvajamo in poenostavimo da dobimo

$$du=\frac{1}{a\sin(x)+b\cos(x)+c}dx$$

Torej se integral poenostavi v $\int du$ kar pa je trivialno.

Ko vstavimo vse spremenljivke nazaj vstavimo meje in poenostavimo, dobimo

$$u(x,y)=\frac{2x(x^2+y^2+1)(\arctan(\frac{y^2-2y+x^2+2x+1}{1-x^2-y^2})+\arctan(\frac{y^2+2y+x^2+2x+1}{1-x^2-y^2}))-(1-x^2-y^2)(\pi x+y\log\frac{x^2+(y-1)^2}{x^2+(y+1)^2})}{4\pi(x^2+y^2)}$$

6 Naloga 6

Očitno so vsi polinomi stopnje nič in ena harmonični.

Gledamo polinome stopnje vsaj 2 Naj bo $p(x,y)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^{n-i}y^i$ polinom z monomi stopnje n. Potem je

$$p_{xx}+p_{yy}=\sum_{i=0}^{n-2}a_i(n-i)(n-i-1)x^{n-i-2}y^i+\sum_{i=2}^{n}a_ii(i-1)x^{n-i}y^{i-2}$$

Z zamikom druge vsote dobimo

$$p_{xx}+p_{yy}=\sum_{i=0}^{n-2}a_i(n-i)(n-i-1)x^{n-i-2}y^i+\sum_{i=0}^{n-2}a_{i+2}(i+2)(i+1)x^{n-i-2}y^i$$

.

Iz literature vemo da je polinom enak nič na $\mathbb{R}^2$ če je vsak monom enak nič zato združimo vsote

$$0=\sum_{i=0}^{n-2}(a_i(n-i)(n-i-1)+a_{i+2}(i+2)(i+1))x^{n-i-2}y^i$$

Dobimo torej sistem

$$\begin{aligned}
a_0(n)(n-1)+a_2(2)(1)&=0\\
a_1(n-1)(n-2)+a_3(3)(2)&=0\\
&\vdots\\
a_{n-2}(2)(1)+a_n(n)(n-1)&=0
\end{aligned}$$

Vidimo da lahko za vsako (neničelno) izbiro konstant a_0 in a_1 ostale konstante izračunamo rekurzivno kot

$$a_{i+2}=-\frac{a_i(n-i)(n-i-1)}{(i+2)(i+1)}$$

Torej s tem postopkom dobimo vse možne harmonične homogene polinome.

Poglejmo si še primer z več spremenljivkami. Naj bo n stopnja vsakega monoma. Za $n<2$ je spet očitno da je p harmoničen. Edini zanimiv primer je $n=2$. Naj bo p polinom v $d>2$ spremeljivkah. Lahko pišemo

$$p(x_1,\dots,x_d)=\sum_1^d a_i x_i^2+\sum_{i<j}^d b_{ij}x_ix_j$$

Potem je $\Delta p=2\sum_1^d a_i=0$ natanko tedaj ko je $\sum_1^d a_i=0$ kar nam da karakterizacijo teh polinomov $\square$.

7 Naloga 10

M je naraščajoča funkcija ker z večjim r pobiramo maksimum večje množice. Potrebno je torej le dokazati da je strogo naraščajoča. Denimo da obstajata r_1, r_2 da je $r_1<r_2$ in $M(r_1)=M(r_2)$. Poglejmo območje $D=B((0,0),r_2)$. Iz $M(r_1)=M(r_2)$ vidimo da u doseže ekstrem znotraj območja D kar po krepkem principu maksima pomeni da je u konstanten. To pa je v protislovju s predpostavko naloge.

8 Naloga 13

Dokazali bomo le eno neenakost ker je dokaz druge očiten iz dokaza prve. Poissonovo jedro nam da

$$u(r,\phi)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rrcos(\phi-\theta)+r^2}f(\theta)d\theta$$

V kompleksnem dobimo

$$u(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-|z|^2}{R^2-2R|z|cos(arg(z)+\theta)+|z|^2}f(\theta)d\theta$$

Ker je kosinus omejen z $[-1,1]$ in so vsi členi v integralu očitno večji od 0, lahko dobimo zgornjo mejo tako da čim bolj znižamo imenovalec. Nastaviomo kosinus na 1 da dobimo

$$\begin{aligned}
u(z)\le\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-|z|^2}{R^2-2R|z|+|z|^2}f(\theta)d\theta\\
=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-|z|^2}{(R-|z|)^2}f(\theta)d\theta\\
=\frac{R^2-|z|^2}{(R-|z|)^2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta\\
=\frac{R+|z|}{R-|z|}f(0)
\end{aligned}$$

kjer v zadnjem koraku uporabimo princip povprečja in krajšamo razliko kvadratov.

9 Naloga 14

BŠS je u omejena navzdol z neko spodnjo mejo L. Funkcija $v = u+L$ je potem očitno harmonična in pozitivna zato rajši dokazujemo da je v konstantna kar je očitno dovolj da rešimo nalogo. Naj bo $m = v(0,0)$. Dokazali bomo da je $v(z) \leq 3m$, torej ima v zgornjo in spodnjo mejo in je zato konstantna.

Vemo da je v harmonična na $B(0,r)$ za recimo $r = 2|z|$. Potem lahko ocenimo

$$v(z) \leq \frac{r+|z|}{r-|z|}v(0)$$
$$v(z) \leq \frac{3|z|}{|z|}m$$
$$v(z) \leq 3m$$

$\square$.

10 Naloga 16

Naj bo $D = B(0,R)$. Definiramo $\Omega_- = \{x+iy : x^2+y^2 < R^2, y < 0\}$. D razdelimo na 3 dele $D = \Omega \cup \Omega_- \cup \{x, |x| < R\}$.

Naj bo v definiran kot v navodilu. Dovolj je dokazati da je v harmonična na vsakem delu D posebej. Očitno je da je v harmonična na Ω ker je tam enaka u. v je harmonična tudi na Ω_- ker je tam enaka $-u$ in je produkt neke konstante s harmonično funkcijo še vedno harmonična funkcija. Zanimiv del naloge je le dokazati harmoničnost pri $y = 0$. Naj bo torej $x \in (-R,R)$. Iz literature(predavanja ali pa bom citiral wikipedijo) vemo da je u na neki točki harmonična če izpolnjuje princip povprečja. Naj bo torej r poljubno število da je $B((x,0),r) \subset D$. Vemo da je $v(x,0) = 0$. Moramo torej le dokazati da je

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(x + r\cos(\phi), r\sin(\phi))d\phi$$

Množimo z 2π in računamo

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} v(x + r\cos(\phi), r\sin(\phi))d\phi \\
&= \int_0^{\pi} v(x + r\cos(\phi), r\sin(\phi))d\phi + \int_\pi^{2\pi} v(x + r\cos(\phi), r\sin(\phi))d\phi \\
&= \int_0^{\pi} u(x + r\cos(\phi), r\sin(\phi))d\phi + \int_\pi^{2\pi} -u(x + r\cos(\phi), -r\sin(\phi))d\phi \\
&= \int_0^{\pi} u(x + r\cos(\phi), r\sin(\phi))d\phi - \int_\pi^{2\pi} u(x + r\cos(\phi), -r\sin(\phi))d\phi =
\end{aligned}$$

kjer sem upošteval da je $\sin(phi) < 0$ za $\phi \in (\pi, 2\pi)$ Načeloma smo konec ampak je treba narediti malo rotacije da vidimo da je to res enako 0.

Uporabimo substitucijo $\psi = \phi - \pi$ v drugi integral in dobimo

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} u(x + r\cos(\phi), r\sin(\phi))d\phi - \int_0^{\pi} u(x + r\cos(\psi+\pi), -r\sin(\psi+\pi))d\psi \\
&= \int_0^{\pi} u(x + r\cos(\phi), r\sin(\phi))d\phi - \int_0^{\pi} u(x - r\cos(\psi), r\sin(\psi))d\psi \\
&= \int_0^{\pi} u(x + r\cos(\phi), r\sin(\phi))d\phi - \int_0^{\pi} u(x - r\cos(\phi), r\sin(\phi))d\phi
\end{aligned}$$

Uporabimo substitucijo $\psi = \pi - \phi$ v drugi integral in dobimo

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi u(x + r\cos(\phi), r\sin(\phi))d\phi - \int_0^\pi u(x + r\cos(\psi), r\sin(\psi))d\psi \\ &= \int_0^\pi u(x + r\cos(\phi), r\sin(\phi))d\phi - \int_0^\pi u(x + r\cos(\phi), r\sin(\phi))d\phi \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

11 Naloga 17

Naj bo v funckija definirana na R^2 kot

$$v(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & y \geq 0 \\ -u(x,-y) & y < 0 \end{cases}$$

Očitno je v omejena funkcija na R^2, zato je dovolj da dokažem da je harmonična ker je potem konstanta in je $v(0,0) = 0$ torej je $v = 0$ in je potem tudi $u = 0$.

Naj bo torej (x,y) poljubna točka iz R^2 na razdalji $r = \sqrt{(}x^2 + y^2)$.

Naj bo $\Omega = \{x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 < (r+1)^2, y > 0\} \subset \mathbb{H}$. Očitno je u zožan na Ω harmonična funkcija.

Potem je po prejšnji nalogi v harmonična na $B(0, r+1)$ kar pa vsebuje (x,y) po konstrukciji.

Torej je v harmonična na R^2 ker sem ravnokar dokazal da je harmonična na poljubni točki v R^2. □