Controlli Automatici T

Parte 2: Sistemi dinamici in forma di stato

Prof. Giuseppe Notarstefano

Department of Electrical, Electronic, and Information Engineering
Alma Mater Studiorum Università di Bologna
giuseppe.notarstefano@unibo.it

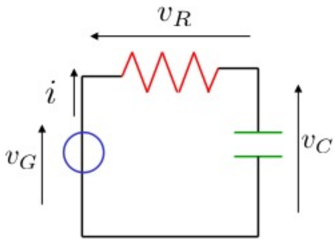
Esempio di sistema di controllo: circuito elettrico

Legge delle tensioni

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

Leggi del condensatore e del resistore

$$C\dot{v}_C(t) = i(t)$$
$$v_R(t) = Ri(t)$$



Scrivendo in termini di $v_C(t)$ ("stato interno") e $v_G(t)$ ("ingresso di controllo")

$$\dot{v}_C(t) = \frac{1}{RC}(v_G(t) - v_C(t))$$

Sistemi in forma di stato

Sistemi continui Il tempo t è una variabile reale, i.e., $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{equazione di stato} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{equazione (trasformazione) di uscita} \end{aligned}$$

NOTA: $\dot{x}(t) := \frac{d}{dt}x(t)$

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ *stato* del sistema all'istante t
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ *ingresso* del sistema all'istante t
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ *uscita* del sistema all'istante t

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \qquad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

Sistemi in forma di stato

Equazione di stato: equazione differenziale ordinaria (ODE) vettoriale del primo ordine

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x(t), u(t), t)\\ &\vdots\\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x(t), u(t), t)\end{aligned}$$

- $\mathbb{R}^n$ spazio di stato, n ordine del sistema
- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funzione di stato

Sistemi in forma di stato

Equazione di stato: equazione differenziale ordinaria (ODE) vettoriale del primo ordine

$$\dot{x}_1(t) = f_1\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

$$\vdots$$

$$\dot{x}_n(t) = f_n\left(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t\right)$$

- $\mathbb{R}^n$ spazio di stato, n ordine del sistema
- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ funzione di stato

Sistemi in forma di stato

Equazione di uscita: equazione algebrica

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= h_1(x(t), u(t), t) \\
&\vdots \\
y_p(t) &= h_p(x(t), u(t), t)
\end{aligned}
$$

$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ funzione di uscita

Sistemi in forma di stato

Equazione di uscita: equazione algebrica

$$y_1(t) = h_1(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t)$$

$$\vdots$$

$$y_p(t) = h_p(\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, t)$$

$h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ funzione di uscita

Sistemi in forma di stato

- Se la soluzione $x(t)$ a partire da un istante iniziale t_0 è univocamente determinata da $x(t_0)$ e $u(\tau)$, $\tau \geq t_0$, allora il sistema è detto causale.
- Sotto opportune ipotesi di regolarità della funzione f si dimostra esistenza e unicità della soluzione dell'equazione (differenziale) di stato (Teorema di Cauchy-Lipschitz)

Sistemi in forma di stato

Sistemi discreti Il tempo t è una variabile intera, i.e., $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), u(t), t) \qquad \text{equazione di stato} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \qquad \text{equazione (trasformazione) di uscita} \end{aligned}$$

NOTA: Equazione di stato: equazione alle differenze finite (FDE)

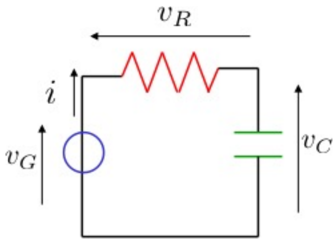
- $x(t) \in \mathbb{R}^n$ *stato* del sistema all'istante t
- $u(t) \in \mathbb{R}^m$ *ingresso* del sistema all'istante t
- $y(t) \in \mathbb{R}^p$ *uscita* del sistema all'istante t

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} \qquad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

Esempio: circuito elettrico

Legge delle tensioni

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$



Leggi del condensatore e del resistore

$$C\dot{v}_C(t) = i(t)$$
$$v_R(t) = Ri(t)$$

Scrivendo in termini di $v_C(t)$ ("stato interno") e $v_G(t)$ ("ingresso di controllo")

$$\dot{v}_C(t) = \frac{1}{RC}(v_G(t) - v_C(t))$$

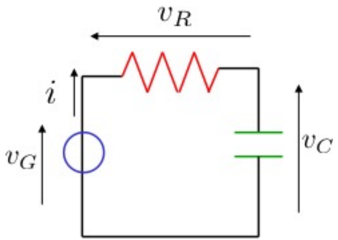
Esempio: circuito elettrico

Legge delle tensioni

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

Leggi del condensatore e del resistore

$$C\dot{v}_C(t) = i(t)$$
$$v_R(t) = Ri(t)$$



Definiamo $x := v_C$ (stato) e $u := v_G$ (ingresso).
Supponiamo di misurare (sensore) $v_R(t)$, allora $y := v_R$

$$\dot{x}(t) = \frac{1}{RC}(u(t) - x(t))$$
$$y(t) = u(t) - x(t)$$

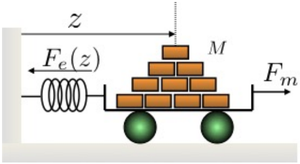
Esempio: carrello

Legge di Newton (z posizione centro di massa)

$$M\ddot{z} = -F_{\mathsf{e}} + F_{\mathsf{m}}$$

con M massa e F_{e} data da

$$F_{\mathsf{e}}(z(t), t) = k(t)z(t)$$



Equazione della dinamica

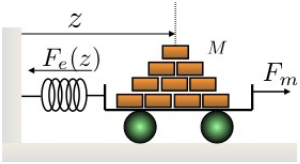
$$M\ddot{z}(t) = -k(t)z(t) + F_{\mathsf{m}}(t)$$

Definiamo $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$ (stato $x := [x_1 \; x_2]^T$) e $u := F_{\mathsf{m}}$ (ingresso).

Esempio: carrello

Legge di Newton (z posizione centro di massa)

$$M\ddot{z} = -F_\mathsf{e} + F_\mathsf{m}$$



con M massa e F_e data da

$$F_\mathsf{e}(z(t), t) = k(t)z(t)$$

Definiamo $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$ (stato $x := [x_1\, x_2]^T$) e $u := F_\mathsf{m}$ (ingresso).

Supponiamo di misurare $z(t)$ (sensore posizione), allora $y := z$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

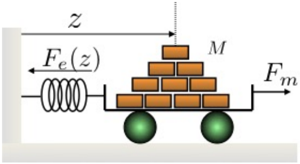
Esempio: carrello

Legge di Newton (z posizione centro di massa)

$$M\ddot{z} = -F_{\mathsf{e}} + F_{\mathsf{m}}$$

con M massa e F_{e} data da

$$F_{\mathsf{e}}(z(t), t) = k(t)z(t)$$



Definiamo $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$ (stato $x := [x_1\, x_2]^T$) e $u := F_{\mathsf{m}}$ (ingresso).

Sia $k(t) = k$ e consideriamo come uscita l'energia totale $E_T(t) = \frac{1}{2}(k\, z^2(t) + M\dot{z}^2(t))$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(k(t)x_1^2(t) + Mx_2^2(t))$$

Esempio: auto in rettilineo

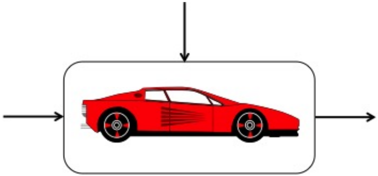
Legge di Newton (z posizione centro di massa)

$$M\ddot{z} = F_{\text{drag}} + F_{\text{m}}$$

con M massa e F_{drag} data da

$$F_{\text{drag}} = -b\dot{z}$$

con b coefficiente d'attrito.



Equazione della dinamica

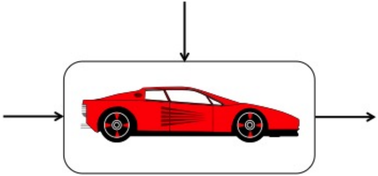
$$M\ddot{z}(t) = -b\dot{z}(t) + F_{\text{m}}(t)$$

Definiamo $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$ (stato $x := [x_1\, x_2]^T$) e $u := F_{\text{m}}$ (ingresso).

Esempio: auto in rettilineo

Legge di Newton (z posizione centro di massa)

$$M\ddot{z} = F_{\text{drag}} + F_{\text{m}}$$



con M massa e F_{drag} data da

$$F_{\text{drag}} = -b\dot{z}$$

con b coefficiente d'attrito.

Definiamo $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$ (stato $x := [x_1\, x_2]^T$) e $u := F_{\text{m}}$ (ingresso).
Supponiamo di misurare $z(t)$ (sensore posizione), allora $y := z$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{b}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t)\end{aligned}$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Esempio: auto in rettilineo

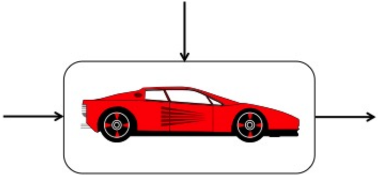
Legge di Newton (z posizione centro di massa)

$$M\ddot{z} = F_{\mathsf{drag}} + F_{\mathsf{m}}$$

con M massa e F_{drag} data da

$$F_{\mathsf{drag}} = -b\dot{z}$$

con b coefficiente d'attrito.



Definiamo $x_1 := z$ e $x_2 := \dot{z}$ (stato $x := [x_1 \, x_2]^T$) e $u := F_{\mathsf{m}}$ (ingresso).
Supponiamo di misurare $\dot{z}(t)$ (sensore velocità), allora $y := \dot{z}$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{b}{M}x_2(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

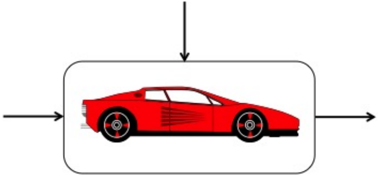
$$y(t) = x_2(t)$$

Esempio: cruise control

"Cruise control" (controllo velocità di crociera)

Equazione della dinamica

$$M\ddot{z}(t) = -b\dot{z}(t) + F_{\text{m}}(t)$$



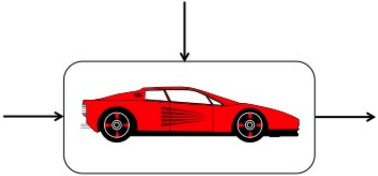
Interessati a controllare la velocità (non la posizione) allora consideriamo come stato solo la velocità. Definiamo $x := \dot{z}$ ($x \in \mathbb{R}$), $u := F_{\text{m}}$.

Esempio: cruise control

"Cruise control" (controllo velocità di crociera)

Equazione della dinamica

$$M\ddot{z}(t) = -b\dot{z}(t) + F_{\mathsf{m}}(t)$$



Interessati a controllare la velocità (non la posizione) allora consideriamo come stato solo la velocità. Definiamo $x := \dot{z}$ ($x \in \mathbb{R}$), $u := F_{\mathsf{m}}$.

Supponiamo di misurare $\dot{z}(t)$ (sensore velocità), allora $y := x$

$$\dot{x}(t) = -\frac{b}{M}x(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x(t)$$

Esempio: pendolo

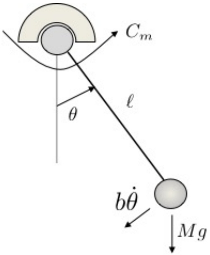
Equazione dei momenti

$$M\ell^2\ddot{\theta} = C_{\text{grav}} + C_{\text{drag}} + C_{\text{m}}$$

con M massa e C_{grav} e C_{drag} date da

$$C_{\text{grav}} = -Mg\ell\sin(\theta), \quad C_{\text{drag}} = -b\dot{\theta}$$

con b coefficiente d'attrito.



Equazione della dinamica

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta(t)) - \frac{b}{M\ell^2}\dot{\theta}(t) + \frac{1}{M\ell^2}C_{\text{m}}(t)$$

Definiamo $x_1 := \theta$ e $x_2 := \dot{\theta}$ (stato $x := [x_1\, x_2]^T$) e $u := C_{\text{m}}$ (ingresso).

Esempio: pendolo

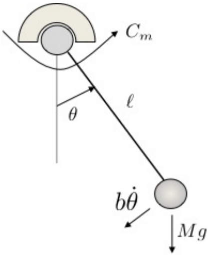
Equazione dei momenti

$$M\ell^2\ddot{\theta} = C_{\text{grav}} + C_{\text{drag}} + C_{\text{m}}$$

con M massa e C_{grav} e C_{drag} date da

$$C_{\text{grav}} = -Mg\ell\sin(\theta), \quad C_{\text{drag}} = -b\dot{\theta}$$

con b coefficiente d'attrito.



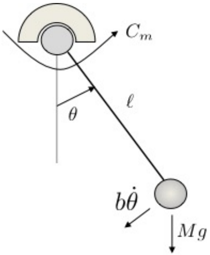
Definiamo $x_1 := \theta$ e $x_2 := \dot{\theta}$ (stato $x := [x_1\, x_2]^T$) e $u := C_{\text{m}}$ (ingresso).
Supponiamo di misurare θ (sensore angolo) , allora $y := \theta$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{\ell}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2}x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2}u(t)\\
y(t) &= x_1(t)
\end{aligned}$$

Esempio: pendolo

Equazione dei momenti

$$M\ell^2\ddot{\theta} = C_{\text{grav}} + C_{\text{drag}} + C_{\text{m}}$$



con M massa e C_{grav} e C_{drag} date da

$$C_{\text{grav}} = -Mg\ell\sin(\theta), \quad C_{\text{drag}} = -b\dot{\theta}$$

con b coefficiente d'attrito.

Definiamo $x_1 := \theta$ e $x_2 := \dot{\theta}$ (stato $x := [x_1\, x_2]^T$) e $u := C_{\text{m}}$ (ingresso).
Se misuriamo la posizione verticale, allora $y := -\ell\cos(\theta)$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{\ell}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2}x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2}u(t)\\ y(t) &= -\ell\cos(x_1(t))\end{aligned}$$

Traiettoria (movimento) di un sistema

Traiettoria

Dato un istante iniziale t_0 e uno stato iniziale x_{t_0}, la funzione del tempo $(x(t), u(t))$, $t \geq t_0$, che soddisfa l'equazione di stato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$ si dice traiettoria (movimento) del sistema. In particolare, $x(t)$ si dice traiettoria dello stato. Consistentemente, $y(t)$ si dice traiettoria dell'uscita.

Nota: per sistemi senza ingresso (non forzati) la traiettoria (dello stato) $x(t)$, $t \geq t_0$, è determinata solo dallo stato iniziale x_{t_0}.

Equilibrio di un sistema

Equilibrio per sistema $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$ (sistema non forzato)

Dato un sistema (non forzato) $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, uno stato x_e si dice equilibrio del sistema se $x(t) = x_e$, $t \geq t_0$ è una traiettoria del sistema.

Coppia di equilibrio

Dato un sistema (forzato) $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, (x_e, u_e) si dice coppia di equilibrio del sistema se $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e)$, $t \geq t_0$, è una traiettoria del sistema.

Proprietà per sistemi $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ (tempo invarianti continui)

Data una coppia di equilibrio (x_e, u_e) vale $f(x_e, u_e) = 0$.
Per sistemi non forzati, dato un equilibrio x_e vale $f(x_e) = 0$.

Esempio di traiettoria

Sistema LTI scalare: circuito RC con $u(t) = U\sin(\omega t)$

$$x(t) = e^{-\frac{t}{RC}}x(0) + \frac{U\omega RC}{1+\omega^2R^2C^2}e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{U}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\sin(\omega t - \gamma)$$

con $\gamma = \arctan(\omega RC)$.

Esempio equilibrio (traiettoria costante nel tempo)
Pendolo (vedere testo)

Richiami di calcolo matriciale

- notazione (dimensioni, triangolare, diagonale, triangolare/diagonale a blocchi, matrice nulla, matrice identità, trasposta)
- $\hat{A}_{ij}$ complemento algebrico dell'elemento a_{ij}: determinante della matrice ottenuta eliminando da A la riga i e la colonna j e moltiplicando per $(-1)^{i+j}$
- determinante di una matrice

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \hat{A}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \hat{A}_{ij}$$

Nota: determinante di una matrice 2×2 dato da $\det(A) = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$.

- operazioni tra matrici (somma, prodotto, potenza, inversa)

Richiami di calcolo matriciale

- matrice aggiunta

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \cdots & \hat{A}_{n1} \\ & \ddots & \\ \hat{A}_{1n} & \cdots & \hat{A}_{nn} \end{bmatrix}$$

  Nota: è la trasposta della matrice dei complementi algebrici.

- matrice inversa (matrice quadrata)

$$A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$$

Richiami di calcolo matriciale

- autovalori e autovettori di una matrice

  Polinomio caratteristico:

$$\varphi(\lambda) = \text{det}(\lambda I - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

  Le n radici λ_i dell'equazione caratteristica $\varphi(\lambda) = 0$ si dicono autovalori di A.

  Nota: se A reale, allora $\varphi(\lambda)$ polinomio a coefficienti reali, allora radici reali o complesse coniugate.

  Ad ogni autovalore λ_i di A si può associare un vettore v_i (non nullo) detto autovettore che soddisfa

$$Av_i = \lambda_i v_i.$$

Classificazione di sistemi in forma di stato

Classe generale, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{equazione di stato} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{equazione di uscita.} \end{aligned}$$

Monovariabili (SISO) sotto classe di Multivariabili (MIMO)
SISO (Single Input Single Output) se $m = p = 1$ altrimenti MIMO.

Classificazione di sistemi in forma di stato

Classe generale, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{equazione di stato} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{equazione di uscita.} \end{aligned}$$

Strettamente propri sotto classe di propri
Strettamente propri se $y = h(x(t), t)$.

Classificazione di sistemi in forma di stato

Classe generale, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{equazione di stato} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{equazione di uscita.} \end{aligned}$$

Non forzati sotto classe di forzati
Sistemi non forzati

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), t) \\ y(t) &= h(x(t), t) \end{aligned}$$

Classificazione di sistemi in forma di stato

Classe generale, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{equazione di stato} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{equazione di uscita.} \end{aligned}$$

Tempo invarianti sotto classe di tempo varianti

Tempo invarianti se data una traiettoria $(x(t), u(t))$, $t \geq t_0$, con $x(t_0) = x_0$, per ogni $\Delta \in \mathbb{R}$, vale che per $x(t_0 + \Delta) = x_0$ allora $(x_\Delta(t), u_\Delta(t)) = (x(t - \Delta), u(t - \Delta))$ è una traiettoria.

Si può dimostrare che sistemi tempo invarianti sono del tipo

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) && x(0) = x_0 \\ y(t) &= h(x(t), u(t)) \end{aligned}$$

Nota: senza perdita di generalità possiamo scegliere $t_0 = 0$.

Classificazione di sistemi in forma di stato

Classe generale, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{equazione di stato} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{equazione di uscita.} \end{aligned}$$

Lineari sotto classe di non lineari

Sistemi lineari se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in x e u.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) \\ &\quad + b_{11}(t)u_1(t) + b_{12}(t)u_2(t) + \ldots + b_{1m}(t)u_m(t) \\ \dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) \\ &\quad + b_{21}(t)u_1(t) + b_{22}(t)u_2(t) + \ldots + b_{2m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) \\ &\quad + b_{n1}(t)u_1(t) + b_{n2}(t)u_2(t) + \ldots + b_{nm}(t)u_m(t) \end{aligned}$$

Classificazione di sistemi in forma di stato

Classe generale, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{equazione di stato} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{equazione di uscita.} \end{aligned}$$

Lineari sotto classe di non lineari

Sistemi lineari se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in x e u.

$$\begin{aligned} y_1(t) &= c_{11}(t)x_1(t) + c_{12}(t)x_2(t) + \ldots + c_{1n}(t)x_n(t) \\ &\quad + d_{11}(t)u_1(t) + d_{12}(t)u_2(t) + \ldots + d_{1m}(t)u_m(t) \\ y_2(t) &= c_{21}(t)x_1(t) + c_{22}(t)x_2(t) + \ldots + c_{2n}(t)x_n(t) \\ &\quad + d_{21}(t)u_1(t) + d_{22}(t)u_2(t) + \ldots + d_{2m}(t)u_m(t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= c_{p1}(t)x_1(t) + c_{p2}(t)x_2(t) + \ldots + c_{pn}(t)x_n(t) \\ &\quad + d_{p1}(t)u_1(t) + d_{p2}(t)u_2(t) + \ldots + d_{pm}(t)u_m(t) \end{aligned}$$

Classificazione di sistemi in forma di stato

Classe generale, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{equazione di stato} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{equazione di uscita.} \end{aligned}$$

Lineari sotto classe di non lineari

Sistemi lineari se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in x e u.

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \qquad B(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & \dots & b_{1m}(t) \\ \vdots & & \\ b_{n1}(t) & \dots & b_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

$$C(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ c_{p1}(t) & \dots & c_{pn}(t) \end{bmatrix} \qquad D(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & \dots & d_{1m}(t) \\ \vdots & & \\ d_{p1}(t) & \dots & d_{pm}(t) \end{bmatrix}$$

$A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C(t) \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{p \times m}$

Classificazione di sistemi in forma di stato

Classe generale, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) && \text{equazione di stato} \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) && \text{equazione di uscita.} \end{aligned}$$

Lineari sotto classe di non lineari

Sistemi lineari se le funzioni di stato e di uscita sono lineari in x e u.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

Classificazione (Riepilogo)

Monovariabili (SISO) $\subset$ Multivariabili (MIMO)
SISO (Single Input Single Output) se $m = p = 1$.

Strettamente propri $\subset$ propri
Strettamente propri se $y = h(x(t), t)$.

Non forzati sotto classe di forzati
Sistemi non forzati

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t)$$
$$y(t) = h(x(t), t)$$

Tempo invarianti $\subset$ Tempo varianti
Sistemi tempo invarianti

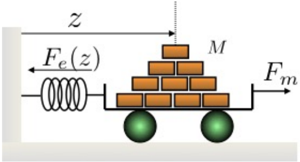
$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$
$$y(t) = h(x(t), u(t))$$

Lineari $\subset$ non lineari
Sistemi lineari

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Esempio: carrello

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$
$$y(t) = x_1(t)$$



$$f_1(x,u,t) = x_2$$
$$f_2(x,u,t) = -\frac{k(t)}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

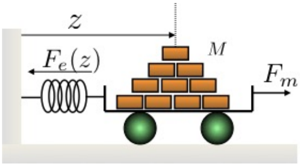
- f_2 dipende esplicitamente da t attraverso $k(t)$ quindi sistema tempo variante. Se $k(t) = \bar{k}$ per ogni t allora tempo invariante.
- f_1 e f_2 dipendono linearmente da x e u allora sistema lineare.
(Se $k(t) = \bar{k}$ lineare tempo invariante.)

Esempio: carrello

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k(t)}{M}x_1(t) + \frac{1}{M}u(t)$$

$$y(t) = x_1(t)$$



$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k(t)}{M} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + 0u(t)$$

Sistemi Lineari Tempo Invarianti (LTI)

Sistema LTI se le funzioni di stato e uscita sono lineari in x e u (lineare) e non dipendono esplicitamente da t (tempo invariante).

Sistemi lineari tempo invarianti (LTI)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ matrici costanti.

Sistemi lineari tempo invarianti SISO (LTI SISO)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$, ovvero B è un vettore, C un vettore riga e D uno scalare.

Principio di sovrapposizione degli effetti

Sistema lineare (anche tempo variante)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Principio di sovrapposizione degli effetti

Sistema lineare (anche tempo variante)

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$
$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

Principio di sovrapposizione degli effetti

Sia $(x_a(t), u_a(t))$ traiettoria con $x_a(t_0) = x_{0a}$.
Sia $(x_b(t),\ u_b(t))$ traiettoria con $x_b(t_0) = x_{0b}$.

Allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dato lo stato iniziale $x_{ab}(t_0) = \alpha x_{0a} + \beta x_{0b}$, si ha che

$$(x_{ab}(t), u_{ab}(t)) = (\alpha x_a(t) + \beta x_b(t), \alpha u_a(t) + \beta u_b(t))$$

è traiettoria del sistema, (ovvero applicando come ingresso $u_{ab} = \alpha u_a(t) + \beta u_b(t)$ la traiettoria di stato è $x_{ab}(t) = \alpha x_a(t) + \beta x_b(t)$).

IMPORTANTE: NON vale per sistemi non lineari.

Principio di sovrapposizione degli effetti

Materiale aggiuntivo

Sistema lineare (anche tempo variante)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t)\\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

Dimostrazione (mostrare che soddisfa l'equazione differenziale)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_{ab}(t) &= \alpha\dot{x}_a(t) + \beta\dot{x}_b(t)\\ &= \alpha(A(t)x_a(t) + B(t)u_a(t)) + \beta(A(t)x_b(t) + B(t)u_b(t))\\ &= A(t)(\alpha x_a(t) + \beta x_b(t)) + B(t)(\alpha u_a(t) + \beta u_b(t))\end{aligned}$$

Per sistemi lineari sotto opportune ipotesi su A(t) e B(t) si può dimostrare che la soluzione è unica.

Nota: dimostrare che vale anche per l'uscita.

Evoluzione libera ed evoluzione forzata

Sia $x_\ell(t)$, $t \geq t_0$, la traiettoria di stato ottenuta per $x_\ell(t_0) = x_0$ e $u_\ell(t) = 0$, $t \geq t_0$.

Sia $x_f(t)$, $t \geq t_0$, la traiettoria di stato ottenuta per $x_f(t_0) = 0$ e $u_f(t) = u(t)$, $t \geq t_0$.

Evoluzione libera ed evoluzione forzata

Sia $x_\ell(t)$, $t \geq t_0$, la traiettoria di stato ottenuta per $x_\ell(t_0) = x_0$ e $u_\ell(t) = 0$, $t \geq t_0$.

Sia $x_f(t)$, $t \geq t_0$, la traiettoria di stato ottenuta per $x_f(t_0) = 0$ e $u_f(t) = u(t)$, $t \geq t_0$.

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che fissato lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e applicando l'ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$, la traiettoria di stato è data da

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t).$$

Evoluzione libera ed evoluzione forzata

Sia $x_\ell(t)$, $t \geq t_0$, la traiettoria di stato ottenuta per $x_\ell(t_0) = x_0$ e $u_\ell(t) = 0$, $t \geq t_0$.

Sia $x_f(t)$, $t \geq t_0$, la traiettoria di stato ottenuta per $x_f(t_0) = 0$ e $u_f(t) = u(t)$, $t \geq t_0$.

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che fissato lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e applicando l'ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$, la traiettoria di stato è data da

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t).$$

Evoluzione libera: $x_\ell(t)$, $t \geq t_0$, tale che $x_\ell(t_0) = x_0$ e $u_\ell(t) = 0$, $t \geq t_0$.
(uscita $y_\ell(t) = C(t)x_\ell(t)$)

Evoluzione forzata: $x_f(t), t \geq t_0$, tale che $x_f(t_0) = 0$ e $u_f(t) = u(t)$, $t \geq t_0$.
(uscita $y_f(t) = C(t)x_f(t) + D(t)u(t)$)

Evoluzione libera ed evoluzione forzata

Sia $x_\ell(t)$, $t \geq t_0$, la traiettoria di stato ottenuta per $x_\ell(t_0) = x_0$ e $u_\ell(t) = 0$, $t \geq t_0$.

Sia $x_f(t)$, $t \geq t_0$, la traiettoria di stato ottenuta per $x_f(t_0) = 0$ e $u_f(t) = u(t)$, $t \geq t_0$.

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ha che fissato lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e applicando l'ingresso $u(t)$, $t \geq t_0$, la traiettoria di stato è data da

$$x(t) = x_\ell(t) + x_f(t).$$

Evoluzione libera: $x_\ell(t)$, $t \geq t_0$, tale che $x_\ell(t_0) = x_0$ e $u_\ell(t) = 0$, $t \geq t_0$.
(uscita $y_\ell(t) = C(t)x_\ell(t)$)

Evoluzione forzata: $x_f(t), t \geq t_0$, tale che $x_f(t_0) = 0$ e $u_f(t) = u(t)$, $t \geq t_0$.
(uscita $y_f(t) = C(t)x_f(t) + D(t)u(t)$)

IMPORTANTE: NON vale per sistemi non lineari.

Traiettorie di un sistema LTI: esempio scalare

Sistema lineare tempo invariante (LTI) scalare $x \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + bu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= cx(t) + du(t). \end{aligned}$$

Evoluzione libera + evoluzione forzata
(da Analisi Matematica soluzione omogenea + soluzione particolare)

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{at}x_0 + \int_0^t e^{a(t-\tau)} bu(\tau) d\tau \\ y(t) &= ce^{at}x_0 + c\int_0^t e^{a(t-\tau)}\, b\, u(\tau) d\tau + du(t) \end{aligned}$$

Funzione esponenziale

$$e^{at} = 1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \ldots$$

Traiettorie di un sistema LTI: caso generale

Sistema lineare tempo invariante (LTI) $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Evoluzione libera + evoluzione forzata

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \\ y(t) &= Ce^{At}x_0 + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\,B\,u(\tau)d\tau + Du(t) \end{aligned}$$

Esponenziale di matrice

$$e^{At} := I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \ldots$$

Proprietà della matrice esponenziale

Esponenziale e cambio di base

$e^{TAT^{-1}t} = Te^{At}T^{-1}$

Esponenziale di una matrice diagonale a blocchi

L'esponenziale di una matrice diagonale a blocchi è una matrice diagonale a blocchi in cui ogni blocco è l'esponenziale del blocco corrispondente della matrice di partenza.

Nota: esponenziale di una matrice diagonale $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$
$e^{\Lambda t} = \text{diag}\{e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}$.

Rappresentazioni equivalenti

Effettuiamo un cambio di base mediante una matrice T

$$\hat{x}(t) = Tx(t)$$

ed essendo T invertibile

$$x(t) = T^{-1}\hat{x}(t).$$

Sostituendo nell'equazione della dinamica si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t) \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ y(t) &= \hat{C}\hat{x}(t) + \hat{D}u(t). \end{aligned}$$

con
$\hat{A} = TAT^{-1}$, $\hat{B} = TB$, $\hat{C} = CT^{-1}$ e $\hat{D} = D$.

Modi di un sistema LTI

Sistema lineare tempo invariante (LTI) $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Modi di un sistema LTI

Sistema lineare tempo invariante (LTI) $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Indichiamo con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ gli $r \leq n$ autovalori (reali o complessi coniugati) distinti della matrice A, con molteplicità algebrica $n_1, \ldots, n_r \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^r n_i = n$.

Le componenti dell'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$ si possono scrivere come

$$x_{\ell,j}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{jiq} t^{q-1} e^{\lambda_i t}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

per opportuni valori di $h_i \leq n_i$, dove i coefficienti γ_{jiq} dipendono dallo stato iniziale $x(0)$.

Modi di un sistema LTI

Sistema lineare tempo invariante (LTI) $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Indichiamo con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ gli $r \leq n$ autovalori (reali o complessi coniugati) distinti della matrice A, con molteplicità algebrica $n_1, \ldots, n_r \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^r n_i = n$.

Le componenti dell'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$ si possono scrivere come

$$x_{\ell,j}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{jiq} t^{q-1} e^{\lambda_i t}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

per opportuni valori di $h_i \leq n_i$, dove i coefficienti γ_{jiq} dipendono dallo stato iniziale $x(0)$.

IMPORTANTE

I termini $t^{q-1}e^{\lambda_i t}$ sono detti modi naturali del sistema.
L'evoluzione libera dello stato è combinazione lineare dei modi.

Modi di un sistema LTI

Sistema lineare tempo invariante (LTI) $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Indichiamo con $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ gli $r \leq n$ autovalori (reali o complessi coniugati) distinti della matrice A, con molteplicità algebrica $n_1, \ldots, n_r \geq 0$ tali che $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.

Le componenti dell'evoluzione libera dello stato $x_\ell(t)$ si possono scrivere come

$$x_{\ell,j}(t) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{q=1}^{h_i} \gamma_{jiq} t^{q-1} e^{\lambda_i t}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

per opportuni valori di $h_i \leq n_i$, dove i coefficienti γ_{jiq} dipendono dallo stato iniziale $x(0)$.

Nota: Poiché l'uscita è lineare nello stato, anche l'evoluzione libera dell'uscita è combinazione lineare dei modi.

Forma reale dei modi di un sistema LTI

Sistema lineare tempo invariante (LTI) $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t).\end{aligned}$$

Se la matrice A è reale e $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ è un autovalore complesso, allora il suo complesso coniugato $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$ è anche autovalore di A.

Si dimostra che i coefficienti γ_{jiq} corrispondenti a λ_i e $\bar{\lambda}_i$ sono anch'essi complessi coniugati.

Si verifica quindi per calcolo diretto che le soluzioni $x_{\ell,j}(t)$ sono sempre reali e che i modi del sistema corrispondenti ad autovalori complessi coniugati $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ e $\bar{\lambda}_i$ sono del tipo

$$t^{q-1} e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i),$$

con opportuni valori della fase ϕ_i.

Forma reale dei modi di un sistema LTI

Sistema lineare tempo invariante (LTI) $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Caso particolare: supponiamo che le moltiplicità algebriche $n_1, \ldots, n_r$ degli autovalori di A coincidano con le molteplicità geometriche (ad es. quando gli autovalori sono distinti).

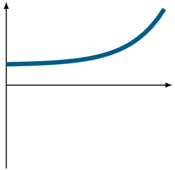
Allora i coefficienti h_i sono tutti pari ad 1 e l'espressione dei modi si semplifica in

$e^{\lambda_i t}$ per autovalori reali

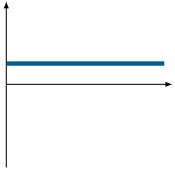
$e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$ per autovalori complessi coniugati

Modi naturali: autovalori reali semplici

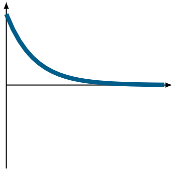
- $e^{\lambda_i t}$, $\lambda_i > 0$



- $e^{\lambda_i t}$, $\lambda_i = 0$

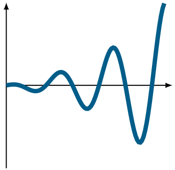


- $e^{\lambda_i t}$, $\lambda_i < 0$

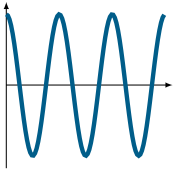


Modi naturali: autovalori complessi coniugati semplici

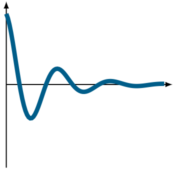
- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$, $\sigma_i > 0$



- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$, $\sigma_i = 0$

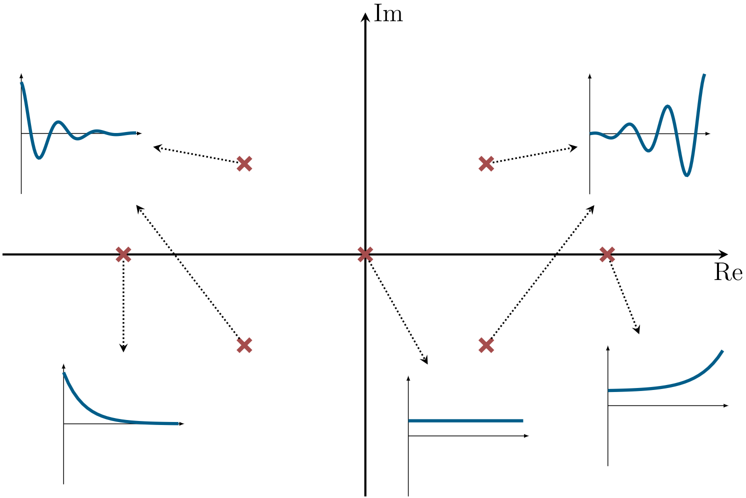


- $e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$, $\sigma_i < 0$



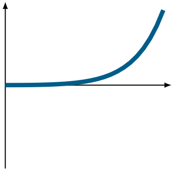
Modi naturali: molt. algebrica = molt. geometrica

Importante: se "molteplicità algebrica n_i" = "molteplicità geometrica" (anche se $n_i > 1$)

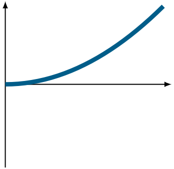


Modi naturali: autovalori reali con m.a. $>$ m.g.

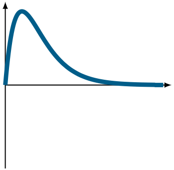
- $t^q e^{\lambda_i t}$, $\lambda_i > 0$



- $t^q e^{\lambda_i t}$, $\lambda_i = 0$

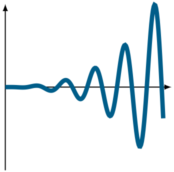


- $t^q e^{\lambda_i t}$, $\lambda_i < 0$

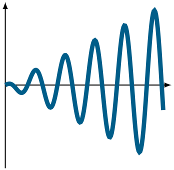


Modi naturali: autovalori complessi coniugati con m.a. $>$ m.g.

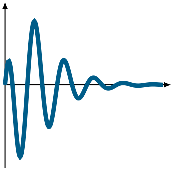
- $t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$, $\sigma_i > 0$



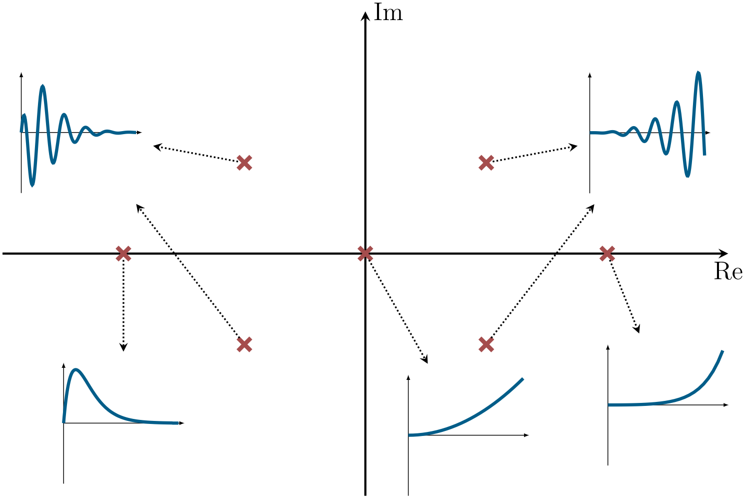
- $t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$, $\sigma_i = 0$



- $t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$, $\sigma_i < 0$



Modi naturali: molt. algebrica > molt. geometrica



Matrici diagonalizzabili

Materiale aggiuntivo

Se una matrice A ha autovalori tutti distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, allora esistono n autovettori $v_1, \ldots, v_n$ associati, i.e., $Av_i = \lambda_i v_i$.

In forma compatta

$$A\begin{bmatrix} v_1 \mid \ldots \mid v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \mid \ldots \mid v_n \end{bmatrix} \text{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

Autovettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti e costituiscono una base. Allora la matrice $T^{-1} = \begin{bmatrix} v_1 \mid \ldots \mid v_n \end{bmatrix}$ è invertibile.

Allora

$$\begin{aligned} \text{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} &= \begin{bmatrix} v_1 \mid \ldots \mid v_n \end{bmatrix}^{-1} A \begin{bmatrix} v_1 \mid \ldots \mid v_n \end{bmatrix} \\ &= TAT^{-1} \end{aligned}$$

Evoluzione libera di un sistema LTI: A diagonalizzabile

Materiale aggiuntivo

Sistema lineare tempo invariante (LTI) $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

IPOTESI: A diagonalizzabile, $A = T^{-1}\text{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}T = T^{-1}\Lambda T$

Allora effettuando un cambio di base mediante T

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \Lambda\hat{x}(t) + TBu(t) \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \\ y(t) &= CT^{-1}\hat{x}(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Evoluzione libera di un sistema LTI: A diagonalizzabile

Materiale aggiuntivo

$$\dot{\hat{x}}(t) = \Lambda \hat{x}(t) + TBu(t) \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$
$$y(t) = CT^{-1}\hat{x}(t) + Du(t).$$

Usando le proprietà dell'esponenziale di una matrice diagonale

$$\begin{aligned}\hat{x}_\ell(t) &= e^{\Lambda t}\hat{x}(0)\\ &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}\hat{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}\hat{x}_1(0) \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t}\hat{x}_n(0)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Nota: $y_\ell(t) = CT^{-1}\hat{x}_\ell(t)$.

$e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ modi naturali (reali o complessi)

Evoluzione libera di un sistema LTI: A diagonalizzabile

Materiale aggiuntivo

$$\dot{\hat{x}}(t) = \Lambda \hat{x}(t) + TBu(t) \qquad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$
$$y(t) = CT^{-1}\hat{x}(t) + Du(t).$$

Nelle coordinate originali

$$\begin{aligned} x_\ell(t) &= T^{-1}\hat{x}_\ell(t) \\ &= T^{-1}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix} Tx(0) \end{aligned}$$

Nota: per ogni condizione iniziale $x(0) = x_0$, l'evoluzioni libera è sempre combinazione lineare dei modi naturali $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ (reali o complessi).

Modi reali associati ad autovalori complessi coniugati

Materiale aggiuntivo

Autovalori reali

Se λ_i reale allora modo naturale $e^{\lambda_i t}$.

Autovalori complessi coniugati

Poiché A è una matrice reale, per ogni autovalore complesso $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ esiste il suo complesso coniugato $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$.

I termini associati, nella risposta $x_\ell(t)$, sommati danno luogo a termini reali del tipo

$$e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

con opportuni valori di ϕ_i.

Forma di Jordan di una matrice

Per una generica A si può dimostrare che esiste sempre T tale che

$$J = TAT^{-1}$$

μ autovalori distinti, $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$, e n_i molteplicità (algebrica) di λ_i.

$$J = \text{diag}\{J_1, \ldots, J_\mu\}$$

con J_i blocco di Jordan associato all'autovalore λ_i dato da

$$J_i = \text{diag}\{J_{i1}, \ldots, J_{i\nu_i}\}$$

con $J_{ih} \in \mathbb{R}^{\eta_{ih} \times \eta_{ih}}$ miniblocchi di Jordan dell'autovalore λ_i dati da

$$J_{ih} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & & & \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \ldots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

dove $\sum_{h=1}^{\nu_i} \eta_{ih} = n_i$.

Esponenziale di un miniblocco

Dato

$$J_{ih} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Il suo esponenziale $e^{J_{ih}t}$ è dato da

$$e^{J_{ih}t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{\eta_{ih}-1}}{(\eta_{ih}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \\ \vdots & \dots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & t \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: λ_i reale o complesso.

Esponenziale di miniblocchi: autovalori complessi coniugati

Materiale aggiuntivo

Autovalori reali

Se λ_i reale, tutti i miniblocchi associati avranno elementi del tipo

$$t^q e^{\lambda_i t}$$

con opportuni valori di q.

Autovalori complessi coniugati

Poiché A è una matrice reale, per ogni autovalore complesso $\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$ esiste il suo complesso coniugato $\bar{\lambda}_i = \sigma_i - j\omega_i$.

I miniblocchi associati possono essere riscritti in modo da avere solo elementi reali del tipo

$$t^q e^{\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \phi_i)$$

con opportuni valori di q e ϕ_i.

Evoluzione libera di un sistema LTI

Materiale aggiuntivo

Sistema lineare tempo invariante (LTI) $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Nota: A generica, $A = T^{-1}JT$, J forma di Jordan.

Allora effettuando un cambio di base mediante T

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= J\hat{x}(t) + TBu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= CT^{-1}\hat{x}(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Evoluzione libera di un sistema LTI: A generica

Materiale aggiuntivo

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t) &= J\hat{x}(t) + TBu(t) \qquad x(0) = x_0\\ y(t) &= CT^{-1}\hat{x}(t) + Du(t).\end{aligned}$$

Usando le proprietà dell'esponenziale di una matrice di Jordan si ha

$$\begin{aligned}\hat{x}_\ell(t) &= e^{Jt}\hat{x}(0)\\ y_\ell(t) &= CT^{-1}e^{Jt}\hat{x}(0).\end{aligned}$$

I modi naturali sono del tipo:

- $t^q e^{\lambda_i t}$ per λ_i autovalore reale
- $t^q e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \phi_i)$ per $\sigma_i \pm j\omega_i$ coppia di autovalori complessi coniugati.

Evoluzione libera di un sistema LTI: A generica

Materiale aggiuntivo

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= J\hat{x}(t) + TBu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= CT^{-1}\hat{x}(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Nelle coordinate originali

$$\begin{aligned} x_\ell(t) &= T^{-1}\hat{x}_\ell(t) \\ &= T^{-1}e^{Jt}\,T\,x(0) \end{aligned}$$

Nota: per ogni condizione iniziale $x(0) = x_0$, l'evoluzioni libera è sempre combinazione lineare di modi naturali del tipo $t^q e^{\lambda_i t}$, per λ_i autovalore reale, e $t^q e^{\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \phi_i)$ per $\sigma_i \pm j\omega_i$ coppia di autovalori complessi coniugati.

Esempio (I)

Consideriamo il seguente sistema LTI con $x \in \mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{R}^3$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

Mediante un cambio di coordinate usando la matrice $T = \left[\begin{smallmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ e ponendo $\hat{x}(t) = Tx(t)$, il sistema si può riformulare come

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\hat{A}=TAT^{-1}} \hat{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{B}=TB} u(t)$$

Esempio (I)

Consideriamo il seguente sistema LTI con $x \in \mathbb{R}^3$ e $u \in \mathbb{R}^3$

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

Mediante un cambio di coordinate usando la matrice $T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e ponendo $\hat{x}(t) = Tx(t)$, il sistema si può riformulare come

$$\dot{\hat{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\hat{A}=TAT^{-1}} \hat{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\hat{B}=TB} u(t)$$

Autovalori di $\hat{A}$: -1, -2 con molteplicità algebrica 2, 1

Esempio (II)

Per calcolare l'evoluzione libera consideriamo la formula vista in precedenza

$$\hat{x}_\ell(t) = e^{\hat{A}t}\hat{x}_0$$

Calcoliamo l'esponenziale di matrice $e^{\hat{A}t}$ per $\hat{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$:

$$e^{\hat{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^k \frac{t^k}{k!} = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & \displaystyle t\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k t^k}{k!} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Esempio (II)

Evoluzione libera dello stato:

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \hat{x}_0$$

Esempio (II)

Evoluzione libera dello stato:

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \hat{x}_0$$

Esempio 1: condizione iniziale è $\hat{x}_0 = [1 \;\; 0 \;\; 0]^\top$. Allora

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nelle coordinate originali:

$$x_\ell(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

Esempio (II)

Evoluzione libera dello stato:

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \hat{x}_0$$

Esempio 2: condizione iniziale è $\hat{x}_0 = [0 \;\; 1 \;\; 0]^\top$. Allora

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} te^{-t} \\ e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nelle coordinate originali:

$$x_\ell(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} \\ e^{-t} \\ e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix}$$

Esempio (II)

Evoluzione libera dello stato:

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \hat{x}_0$$

Esempio 3: condizione iniziale è $\hat{x}_0 = [0 \;\; 0 \;\; 1]^\top$. Allora

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

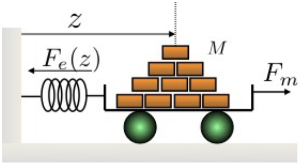
Nelle coordinate originali:

$$x_\ell(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Esempio: carrello

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{M} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + 0u(t)$$



Nota: consideriamo k costante, quindi sistema LTI.

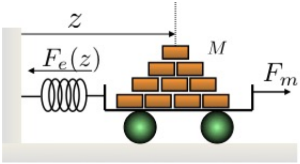
Autovalori

$\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}$, $\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}}$ immaginari puri

Esempio: carrello

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{M} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + 0u(t)$$



Applichiamo un controllo $u = -hx_2$

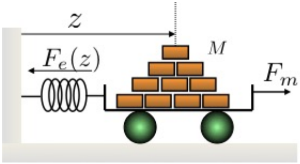
$$\lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}},\ \lambda_2 = -\frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$$

Se $h^2 > 4Mk$ autovalori reali. Se $h^2 < 4Mk$ complessi coniugati.

Esempio: carrello

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{M} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + 0u(t)$$



Applichiamo un controllo $u = -hx_2$

Se $h^2 = 4Mk$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$, (molteplicità algebrica $= 2$). Si può mostrare che molteplicità geometrica $= 1$, quindi blocco di Jordan 2×2.

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix}-\frac{h}{2M} & 1\\ 0 & -\frac{h}{2M}\end{bmatrix} \qquad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t}\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix}e^{-\frac{h}{2M}t}\,\hat{x}_1(0) + te^{-\frac{h}{2M}t}\,\hat{x}_2(0)\\ e^{-\frac{h}{2M}t}\,\hat{x}_2(0)\end{bmatrix}$$

Equilibrio: richiami

Equilibrio (sistema non forzato)

Dato un sistema non forzato

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t),$$

uno stato x_e si dice equilibrio del sistema se $x(t) = x_e$, $t \geq t_0$, è una traiettoria del sistema.

Coppia di equilibrio

Dato un sistema forzato $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$, (x_e, u_e) si dice coppia di equilibrio del sistema se $(x(t), u(t)) = (x_e, u_e)$, $t \geq t_0$, è una traiettoria del sistema.

Proprietà (sistemi tempo invarianti continui)

Data una coppia di equilibrio (x_e, u_e), vale che $f(x_e, u_e) = 0$.

Per sistemi non forzati, dato un equilibrio x_e, vale che $f(x_e) = 0$.

Stabilità interna

Ipotesi: Sistemi tempo-invarianti (si può generalizzare)

Stabilità (interna): conseguenze sulla traiettoria legate a incertezze sullo stato iniziale con ingressi fissi e noti.

Poichè l'ingresso è fissato, $u(t) = \bar{u}(t)$, $t \geq 0$, il sistema $\dot{x}(t) = f(x(t), \bar{u}(t))$ è non forzato.

Consideriamo quindi sistemi non forzati

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

e sia x_e un equilibrio, ovvero $f(x_e) = 0$.

Stabilità interna: cosa accade se $x(0) = x_e + \Delta x_0$?

Stabilità interna: definizioni

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \qquad x_e \text{ equilibrio, i.e., } f(x_e) = 0$$

Equilibrio stabile Uno stato di equilibrio x_e si dice stabile se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$ tale che $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\|x(t) - x_e\| \leq \epsilon$ per tutti i $t \geq 0$.

Equilibrio instabile Uno stato di equilibrio x_e si dice instabile se non è stabile. (Esercizio: scrivere esplicitamente.)

Equilibrio attrattivo Uno stato di equilibrio x_e si dice attrattivo se $\exists \delta > 0$ tale che $\forall x_0$ tale che $\|x_0 - x_e\| \leq \delta$ allora risulti $\lim_{t\to\infty} \|x(t) - x_e\| = 0$.

Equilibrio asintoticamente stabile Uno stato di equilibrio x_e si dice asintoticamente stabile se è stabile e attrattivo.

Stabilità interna: osservazioni

Stabilità locale: le definizioni date sottintendono la parola locale, ovvero la proprietà vale in un intorno dello stato di equilibrio x_e.

Stabilità globale: le proprietà di stabilità e asintotica stabilità sono globali se valgono per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Stabilità di una traiettoria: le definizioni di stabilità si possono generalizzare a una traiettoria $\bar{x}(t)$, $t \geq 0$. (Esercizio: riscriverle.)

Stabilità interna di sistemi LTI

Nei sistemi lineari $x = 0$ è sempre un equilibrio (con $u = 0$)

Per sistemi lineari si può mostrare che tutti gli equilibri e tutte le traiettorie hanno le stesse proprietà di stabilità (stesse di $x = 0$). Per questo motivo si parla di stabilità del sistema.

Teorema Un sistema LTI è asintoticamente stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale (strettamente) negativa (< 0).

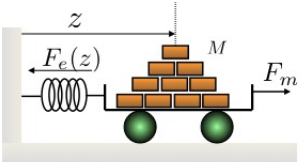
Teorema Un sistema LTI è stabile se e solo se tutti gli autovalori hanno parte reale minore o uguale a zero e tutti gli autovalori a parte reale nulla hanno molteplicità geometrica uguale alla molteplicità algebrica (i miniblocchi di Jordan associati hanno dimensione uno).

Nota: si ha instabilità se almeno un autovalore ha parte reale positiva o se almeno un autovalore con parte reale nulla ha molt. algebrica $>$ molt. geometrica.

Esempio: carrello

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{M} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + 0u(t)$$



Nota: consideriamo k costante, quindi sistema LTI.

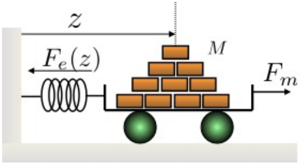
Autovalori

$\lambda_1 = j\sqrt{\frac{k}{M}}$, $\lambda_2 = -j\sqrt{\frac{k}{M}}$ immaginari puri, quindi sistema semplicemente stabile.

Esempio: carrello

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$



Applichiamo un controllo $u = -hx_2$

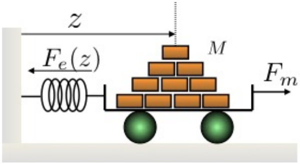
$$\lambda_1 = -\frac{h}{2M} + \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}},\ \lambda_2 = -\frac{h}{2M} - \sqrt{\frac{h^2}{4M^2} - \frac{k}{M}}$$

Se $h^2 > 4Mk$ autovalori reali. Se $h^2 < 4Mk$ complessi coniugati. Parte reale nulla in entrambi i casi, quindi sistema asintoticamente stabile.

Esempio: carrello

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{M} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{M}\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix} + 0u(t)$$



Applichiamo un controllo $u = -hx_2$

Se $h^2 = 4Mk$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$, (molteplicità algebrica $= 2$). Si può mostrare che molteplicità geometrica $= 1$, quindi blocco di Jordan 2×2.

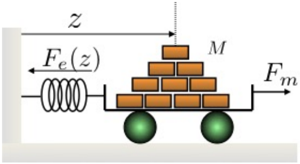
$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix}-\frac{h}{2M} & 1\\ 0 & -\frac{h}{2M}\end{bmatrix} \qquad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t}\begin{bmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\hat{x}_\ell(t) = \begin{bmatrix}e^{-\frac{h}{2M}t}\,\hat{x}_1(0) + te^{-\frac{h}{2M}t}\,\hat{x}_2(0)\\ e^{-\frac{h}{2M}t}\,\hat{x}_2(0)\end{bmatrix}$$

Esempio: carrello

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0u(t)$$



Se $h^2 = 4Mk$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{h}{2M}$, (molteplicità algebrica $= 2$). Si può mostrare che molteplicità geometrica $= 1$, quindi blocco di Jordan 2×2.

$$J = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{h}{2M} & 1 \\ 0 & -\frac{h}{2M} \end{bmatrix} \qquad e^{Jt} = e^{-\frac{h}{2M}t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalori a parte reale negativa, quindi sistema asintoticamente stabile.

Linearizzazione di sistemi non lineari (tempo invarianti)

Linearizzazione di un sistema non lineare nell'intorno di un equilibrio

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t))\\ y(t) &= h(x(t), u(t))\end{aligned}$$

Sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio, $f(x_e, u_e) = 0$, consideriamo una traiettoria a partire da stato iniziale $x(0) = x_e + \Delta x_0$

$$\begin{aligned}x(t) &= x_e + \Delta x(t)\\ u(t) &= u_e + \Delta u(t)\end{aligned}$$

con $y(t) = h(x_e, u_e) + \Delta y(t) = y_e + \Delta y(t)$.
Essendo una traiettoria vale

$$\frac{d}{dt}(x_e + \Delta x(t)) = f(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t))$$

$$y_e + \Delta y(t) = h(x_e + \Delta x(t), u_e + \Delta u(t))$$

Linearizzazione di sistemi non lineari (tempo invarianti)

Sviluppando in serie di Taylor (f e h suff. regolari) in (x_e, u_e)

$$\frac{d}{dt}(x_e + \Delta x(t)) = f(x_e, u_e) + \frac{\partial}{\partial x} f(x,u)\bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x(t) + \frac{\partial}{\partial u} f(x,u)\bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u(t) + \text{term. ord. sup.}$$

$$y_e + \Delta y(t) = h(x_e, u_e) + \frac{\partial}{\partial x} h(x,u)\bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta x(t) + \frac{\partial}{\partial u} h(x,u)\bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \Delta u(t) + \text{term. ord. sup.}$$

Linearizzazione di sistemi non lineari (tempo invarianti)

$$\dot{\Delta x}(t) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,u)\Big|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} \Delta x(t) + \frac{\partial}{\partial u} f(x,u)\Big|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} \Delta u(t) + \text{term. ord. sup.}$$

$$\Delta y(t) = \frac{\partial}{\partial x} h(x,u)\Big|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} \Delta x(t) + \frac{\partial}{\partial u} h(x,u)\Big|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}} \Delta u(t) + \text{term. ord. sup.}$$

Linearizzazione di sistemi non lineari (tempo invarianti)

$$\dot{\Delta x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t) + \text{term. ord. sup.} \qquad \Delta x(0) = \Delta x_0$$

$$\Delta y(t) = C\Delta x(t) + D\Delta u(t) + \text{term. ord. sup.}$$

Linearizzazione di sistemi non lineari (tempo invarianti)

$$\dot{\Delta x}(t) = A\Delta x(t) + B\Delta u(t) + \text{term. ord. sup.} \qquad \Delta x(0) = \Delta x_0$$

$$\Delta y(t) = C\Delta x(t) + D\Delta u(t) + \text{term. ord. sup.}$$

$$\dot{\Delta x}(t) \approx A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) \approx C\Delta x(t) + D\Delta u(t)$$

Linearizzazione di sistemi non lineari (tempo invarianti)

$$\dot{\Delta x}(t) \approx A\Delta x(t) + B\Delta u(t)$$

$$\Delta y(t) \approx C\Delta x(t) + D\Delta u(t)$$

Sistema linearizzato

$$\dot{\delta x}(t) = A\delta x(t) + B\delta u(t)$$

$$\delta y(t) = C\delta x(t) + D\delta u(t)$$

Le traiettorie del sistema non lineare soddisfano

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e + \Delta x(t) \approx x_e + \delta x(t) \\ u(t) &= u_e + \Delta u(t) = u_e + \delta u(t) \\ y(t) &= y_e + \Delta y(t) \approx y_e + \delta y(t). \end{aligned}$$

per variazioni "sufficientemente piccole".

Nota: $(\delta x(t), \delta u(t))$, $t \geq 0$, traiettoria del sistema linearizzato.

Stabilità e linearizzazione

Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invariante, $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio. Se il sistema linearizzato intorno ad (x_e, u_e) è asintoticamente stabile, allora l'equilibrio x_e, relativo all'ingresso u_e, è (localmente) asintoticamente stabile.

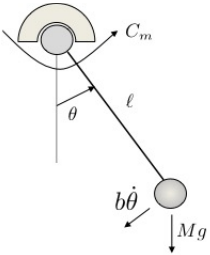
Teorema

Dato un sistema non lineare tempo invariante, $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$, sia (x_e, u_e) una coppia di equilibrio. Se il sistema linearizzato intorno ad (x_e, u_e) ha almeno un autovalore a parte reale positiva, allora l'equilibrio x_e, relativo all'ingresso u_e, è instabile.

Nota: Non si può dire nulla in caso si abbiano solo autovalori a parte reale minore o uguale a zero con almeno un autovalore a parte reale nulla.

Esempio: pendolo

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{\ell}\sin(x_1(t)) - \frac{b}{M\ell^2}x_2(t) + \frac{1}{M\ell^2}u(t)
\end{aligned}
$$



1. $y(t) = x_1(t)$
2. $y(t) = -\ell\cos(x_1(t))$

Retroazione dallo stato (I)

Sistema lineare tempo invariante (LTI)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Supponendo di misurare l'intero stato, ovvero se $y(t) = x(t)$, allora possiamo progettare

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

con $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matrice di guadagni e $v(t)$ un ulteriore ingresso per il sistema retroazionato

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t)$$

Se vogliamo il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile allora dobbiamo progettare K tale che $(A + BK)$ abbia autovalori tutti a parte reale negativa.

Retroazione dallo stato (I)

Sistema lineare tempo invariante (LTI)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

Supponendo di misurare l'intero stato, ovvero se $y(t) = x(t)$, allora possiamo progettare

$$u(t) = Kx(t) + v(t)$$

con $K \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matrice di guadagni e $v(t)$ un ulteriore ingresso per il sistema retroazionato

$$\dot{x}(t) = (A + BK)x(t) + Bv(t)$$

Se vogliamo il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile allora dobbiamo progettare K tale che $(A + BK)$ abbia autovalori tutti a parte reale negativa.

Nota: a volte non esiste K che rende $(A + BK)$ con autovalori tutti a parte reale negativa. Questo dipende dalla coppia (A, B) ed è legata alla proprietà di raggiungibilità.

Retroazione dallo stato (II)

Sistema lineare tempo invariante (LTI)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Se non è possibile misurare l'intero stato, ovvero se $y(t) \neq x(t)$, esistono tecniche per ricostruire lo stato a partire dalle misure.

In questi casi si considerano sistemi ausiliari chiamati osservatori che stimano lo stato del sistema. Se sia possibile o meno ricostruire lo stato dipende dalla proprietà di osservabilità.

Controllo nonlineare mediante linearizzazione (I)

Consideriamo il sistema nonlineare

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

Linearizzazione intorno all'equilibrio (x_e, u_e) $\left(A_e = \frac{\partial}{\partial x} f(x,u)\big|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}},\ \ B_e = \frac{\partial}{\partial u} f(x,u)\big|_{\substack{x=x_e\\u=u_e}}\right)$:

$$\dot{\delta x}(t) = A_e \delta x(t) + B_e \delta u(t)$$

Obiettivo: portare $\delta x(t)$ a zero, ovvero $x(t)$ a x_e "in modo approssimato". Usando retroazione dallo stato $\delta u(t) = K \delta x(t) + \delta v(t)$ otteniamo il sistema in anello chiuso

$$\dot{\delta x}(t) = (A_e + B_e K)\delta x(t) + B_e \delta v(t)$$

Posso progettare K in modo che $(A_e + B_e K)$ è asintoticamente stabile. Grazie ai teoremi sulla linearizzazione, $\delta x(t)$ convergerà a 0 (cioè $x(t)$ convergerà effettivamente a x_e) se $\delta x(0)$ è in un intorno sufficientemente piccolo dell'origine (cioè $x(0)$ è in un intorno sufficientemente piccolo di x_e).

Controllo nonlineare mediante linearizzazione (II)

Ricordiamo che $u(t) = u_e + \delta u(t) + \delta v(t)$ e $\delta x(t) \approx x(t) - x_e$. Quindi

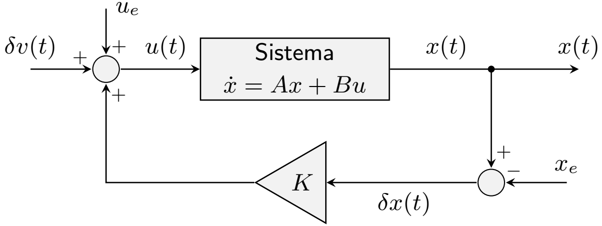
$$u_{\text{tmp}}(t) = u_e + K\delta x(t) + \delta v(t) \approx u_e + K(x(t) - x_e) + \delta v(t)$$

Perciò la legge di controllo finale sarà

$$\boxed{u(t) = u_e + K(x(t) - x_e) + \delta v(t)}$$

feedback (retroazione) per il sistema nonlineare

progettata sul sistema linearizzato



Controllo ottimo

Problema di ottimizzazione Linear Quadratic Regulation (LQR)

$$\underset{x(\cdot),u(\cdot)}{\text{minimize}} \int_0^{+\infty} \left\{ x(\tau)^\top Q x(\tau) + u(\tau)^\top R u(\tau) \right\} d\tau$$

$$\text{subject to } \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

dove con $x(\cdot), u(\cdot)$ si denotano le funzioni del tempo x e u

Soluzione del problema è un feedback dello stato del tipo $u(t) = Kx(t)$

La matrice K si può ricavare risolvendo l'equazione algebrica di Riccati:

$$A^\top P + PA - PBR^{-1}B^\top P + Q = 0$$

$$K = R^{-1}B^\top P$$