

Controlli Automatici T

Parte 5: Risposta in frequenza

| Prof. Giuseppe Notarstefano
Prof. Andrea Testa

Department of Electrical, Electronic, and Information Engineering
Alma Mater Studiorum Università di Bologna
giuseppe.notarstefano@unibo.it
a.testa@unibo.it

Queste slide sono ad uso interno del corso
Controlli Automatici T dell'Università di Bologna a.a. 22/23.

Risposta ad un segnale di ingresso sinusoidale

Dato un sistema lineare tempo invariante SISO con funzione di trasferimento $G(s)$ vogliamo calcolare l'uscita in corrispondenza di un ingresso sinusoidale

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi).$$

Ricordiamo che

$$U(s) = U \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2},$$

quindi

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)U \frac{s \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{s^2 + \omega^2}.$$

Consideriamo $G(s)$ con poli distinti **a parte reale negativa (BIBO stabile)**. Sviluppando in fratti semplici si ha

$$\begin{aligned} Y(s) &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{s + p_i}}_{Y_1(s)} + \underbrace{\frac{k_u}{s - j\omega} + \frac{\bar{k}_u}{s + j\omega}}_{Y_2(s)} \\ &= Y_1(s) + Y_2(s) \end{aligned}$$

Risposta ad un segnale di ingresso sinusoidale

Antitrasformando $Y(s)$ si ha

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n k_i e^{-p_i t} 1(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{2|k_u| \cos(\omega t + \arg(k_u)) 1(t)}_{y_2(t)} \\ &= y_1(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

Poichè i poli di $G(s)$ sono a parte reale negativa, i contributi $e^{-p_i t} 1(t)$ sono tutti convergenti a zero. Pertanto $y_1(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$.

Risposta ad un segnale di ingresso sinusoidale

Il residuo k_u è dato da

$$\begin{aligned}k_u &= (s - j\omega)Y(s) \Big|_{s=j\omega} = UG(j\omega) \frac{j\omega \cos(\varphi) - \omega \sin(\varphi)}{j\omega + j\omega} \\&= UG(j\omega) \frac{j \cos(\varphi) - \sin(\varphi)}{2j} = UG(j\omega) \frac{\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)}{2}\end{aligned}$$

Ricordando che $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$, si ha

$$k_u = UG(j\omega) \frac{e^{j\varphi}}{2} = \frac{U|G(j\omega)|}{2} e^{j(\arg(G(j\omega)) + \varphi)}$$

dove abbiamo scritto $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\arg(G(j\omega))}$.

Risposta ad un segnale di ingresso sinusoidale

Antitrasformando $Y(s)$ si ottiene

$$y(t) = y_1(t) + U|G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega)))$$

Ricordando che $y_1(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \infty$, l'uscita $y(t)$ converge a

$$y_2(t) = U|G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega))),$$

ovvero per t sufficientemente grande si ha

$$y(t) \approx U|G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega))).$$

Nota: quanto trovato si può generalizzare fornendo il seguente risultato.

Risposta ad un segnale di ingresso sinusoidale

Teorema

Se a un sistema lineare tempo invariante con funzione di trasferimento $G(s)$ avente poli a parte reale negativa si applica l'ingresso sinusoidale

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi)$$

l'uscita a transitorio esaurito è data da

$$y_2(t) = U|G(j\omega)| \cos(\omega t + \varphi + \arg(G(j\omega))).$$

Risposta a segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier

Consideriamo un segnale d'ingresso $u(t)$ periodico ($\exists T > 0$ tale che $\forall t \geq 0 \ u(t+T) = u(t)$) che può essere sviluppato in serie di Fourier

$$u(t) = U_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |U_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(U_n))$$

con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e

$$U_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad n = 0, 1, \dots$$

Risposta a segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier

In base a quanto visto per un ingresso sinusoidale e sfruttando il **principio di sovrapposizione degli effetti** per sistemi BIBO stabili si può dimostrare che **per t elevati**

$$y(t) \approx Y_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} |Y_n| \cos(n\omega_0 t + \arg(Y_n))$$

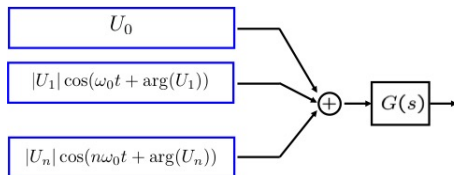
con $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ e

$$Y_n = G(jn\omega_0)U_n \quad n = 0, 1, \dots$$

Risposta a segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier

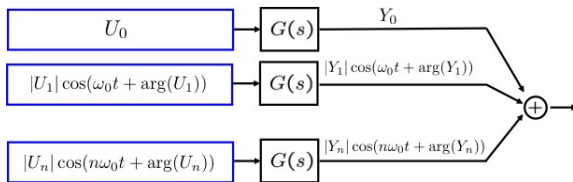
Il risultato appena visto può essere schematizzato come segue.

Dato in ingresso un segnale periodico, esso può essere rappresentato come la somma delle armoniche dello sviluppo in serie di Fourier



Risposta a segnali periodici sviluppabili in serie di Fourier

Sfruttando la sovrapposizione degli effetti tale schema è equivalente a considerare lo schema seguente per t elevati



Risposta a segnali dotati di trasformata di Fourier

Dato un segnale non periodico dotato di **trasformata di Fourier**, possiamo scriverlo come

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2|U(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(U(j\omega))) d\omega,$$

con

$$U(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Ovvero l'ingresso è scomponibile come una infinità non numerabile di armoniche con valori di ω reali maggiori o uguali a zero.

Quindi se il sistema è BIBO stabile **per t elevati**

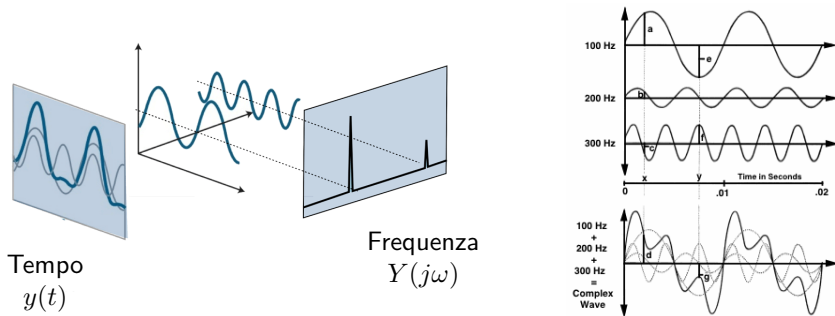
$$y(t) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2|Y(j\omega)| \cos(\omega t + \arg(Y(j\omega))) d\omega,$$

con

$$Y(j\omega) = G(j\omega)U(j\omega).$$

Richiami: spettro di un segnale

Ogni segnale reale si può ottenere sommando opportune onde sinusoidali



Uno stesso segnale può essere quindi visto equivalentemente nel dominio del tempo ($y(t)$) o della frequenza ($Y(j\omega)$). Le funzioni $y(t)$ e $Y(j\omega)$ sono ugualmente informative e offrono due prospettive complementari per osservare lo stesso fenomeno.

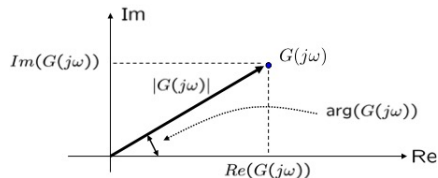
Nota: pulsazione ω e frequenza f legate dalla relazione $\omega = 2\pi f$

Risposta in frequenza

La funzione complessa $G(j\omega)$ ottenuta valutando $G(s)$ per $s = j\omega$ è detta **risposta in frequenza**.

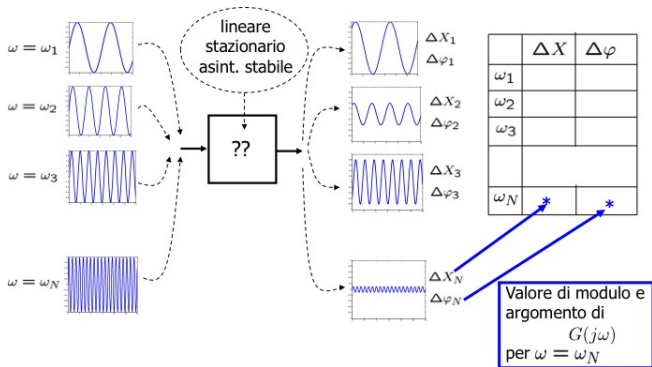
La risposta in frequenza viene estesa anche a sistemi non asintoticamente stabili.

Per un certo valore di ω , $G(j\omega)$ è un numero complesso.



Identificazione sperimentale della risposta in frequenza

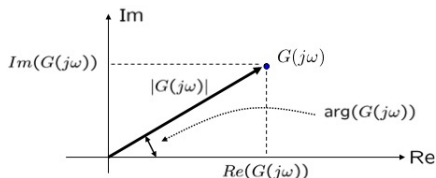
Nel caso in cui la risposta in frequenza non sia nota possiamo sfruttare i risultati precedenti per ricavarla sperimentalmente.



Nota: vedremo che dalla rappresentazione grafica di $G(j\omega)$ sarà possibile ricavare guadagno statico, poli e zeri della funzione di trasferimento $G(s)$.

Rappresentazione della risposta in frequenza

Per un certo valore di ω , $G(j\omega)$ è un numero complesso.



Vi sono diversi modi di rappresentare la risposta in frequenza.

Uno dei modi più usati sono i **diagrammi di Bode** in cui si rappresentano separatamente $|G(j\omega)|$ e $\arg(G(j\omega))$ in funzione di ω .

Diagrammi di Bode

Funzione di trasferimento in forma fattorizzata

$$G(s) = \mu \frac{\prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + 2 \frac{\zeta_i}{\alpha_{n,i}} s + \frac{s^2}{\alpha_{n,i}^2})}{s^g \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + 2 \frac{\xi_i}{\omega_{n,i}} s + \frac{s^2}{\omega_{n,i}^2})}$$

Risposta in frequenza associata

$$G(j\omega) = \mu \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i) \prod_i (1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2})}{(j\omega)^g \prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_i (1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2})}$$

Scala logaritmica in base 10 per le ascisse.

Diagramma delle ampiezze espresso in **decibel**: $|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |G(j\omega)|$ (log in base 10)

Diagramma delle fasi espresso in gradi: $\arg(G(j\omega))$.

Proprietà di numeri complessi e logaritmi

Ricordiamo che dati due numeri complessi $a \in \mathcal{C}$ e $b \in \mathcal{C}$ si ha

$$|ab| = |a| |b|$$

e

$$\log(|a| |b|) = \log(|a|) + \log(|b|)$$

$$\log\left(\frac{|a|}{|b|}\right) = \log(|a|) - \log(|b|)$$

$$\log(|a|^k) = k \log(|a|)$$

$$\arg(ab) = \arg(a) + \arg(b)$$

$$\arg\left(\frac{a}{b}\right) = \arg(a) - \arg(b)$$

$$\arg(a^k) = k \arg(a)$$

Diagrammi di Bode

Risposta in frequenza

$$G(j\omega) = \mu \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i) \prod_i (1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2})}{(j\omega)^g \prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_i (1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2})}$$

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20 \log |G(j\omega)| \\ &= 20 \log |\mu| - 20g \log |j\omega| \\ &\quad + \sum_i 20 \log |1 + j\omega\tau_i| + \sum_i 20 \log |1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2}| \\ &\quad - \sum_i 20 \log |1 + j\omega T_i| - \sum_i 20 \log |1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2}| \end{aligned}$$

Diagrammi di Bode

Risposta in frequenza

$$G(j\omega) = \mu \frac{\prod_i (1 + j\omega\tau_i) \prod_i (1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2})}{(j\omega)^g \prod_i (1 + j\omega T_i) \prod_i (1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2})}$$

$$\begin{aligned} \arg(G(j\omega)) &= \\ &= \arg \mu - g \arg(j\omega) \\ &\quad + \sum_i \arg(1 + j\omega\tau_i) + \sum_i \arg\left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\alpha_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\alpha_{n,i}^2}\right) \\ &\quad - \sum_i \arg(1 + j\omega T_i) - \sum_i \arg\left(1 + 2j\xi_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2}\right) \end{aligned}$$

Diagrammi di Bode: contributi elementari

Possiamo quindi studiare l'andamento dei seguenti contributi elementari

$$G_a(j\omega) = \mu$$

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g}$$

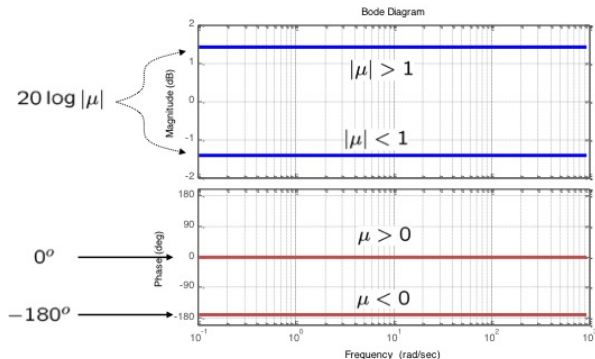
$$G_c(j\omega) = (1 + j\omega\tau_i) \quad \text{e} \quad G_c(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_i}$$

$$G_d(j\omega) = \left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2}\right) \quad \text{e} \quad G_d(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + 2j\zeta_i \frac{\omega}{\omega_{n,i}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n,i}^2}\right)}$$

e poi “sommare” i diagrammi di tali contributi.

Diagrammi di Bode: guadagno statico

$$G_a(j\omega) = \mu \quad |G_a(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |\mu| \quad \arg(G_a(j\omega)) = \arg(\mu)$$



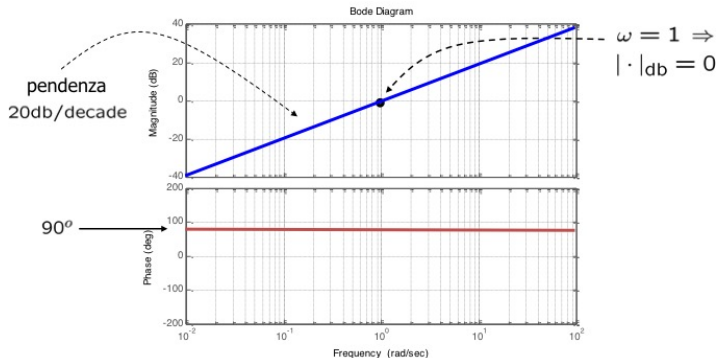
Ampiezza: se $|\mu| \geq 1$ allora $20 \log |\mu| \geq 0$, se $|\mu| < 1$ allora $20 \log |\mu| < 0$.

Fase: se $\mu > 0$ allora $\arg(\mu) = 0$, se $\mu < 0$ allora $\arg(\mu) = 180^\circ$.

Diagrammi di Bode: zeri nell'origine

Consideriamo uno zero nell'origine (ovvero $g = -1$)

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = j\omega \quad |G_b(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \omega \quad \arg(G_b(j\omega)) = \arg(j\omega)$$

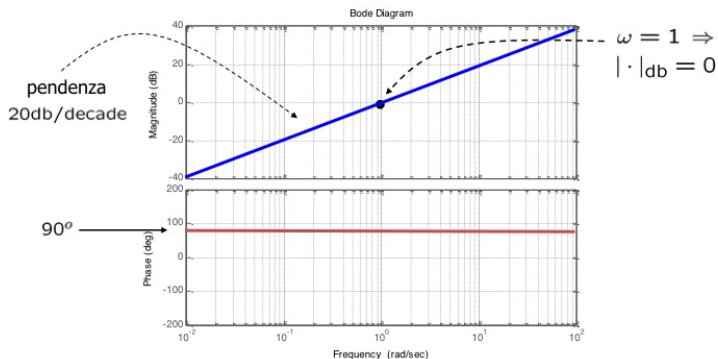


Nota (ampiezza): scala logaritmica quindi $\log \omega \mapsto 20 \log \omega$ è una retta con pendenza 20dB/dec.

Diagrammi di Bode: zeri nell'origine

Consideriamo uno zero nell'origine (ovvero $g = -1$)

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = j\omega \quad |G_b(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \omega \quad \arg(G_b(j\omega)) = \arg(j\omega)$$

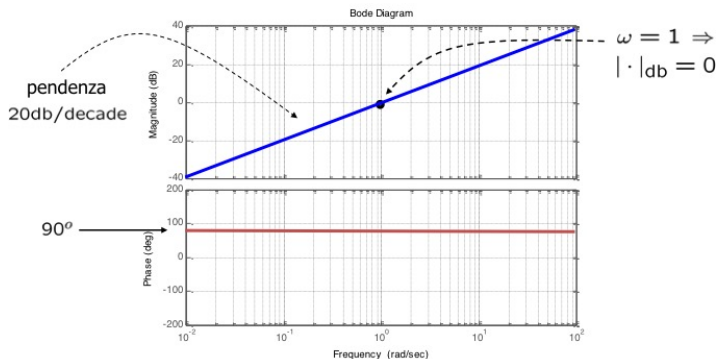


Nota (ampiezza): se ho g zeri nell'origine allora pendenza $20g$ dB/dec

Diagrammi di Bode: zeri nell'origine

Consideriamo uno zero nell'origine (ovvero $g = -1$)

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = j\omega \quad |G_b(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \omega \quad \arg(G_b(j\omega)) = \arg(j\omega)$$

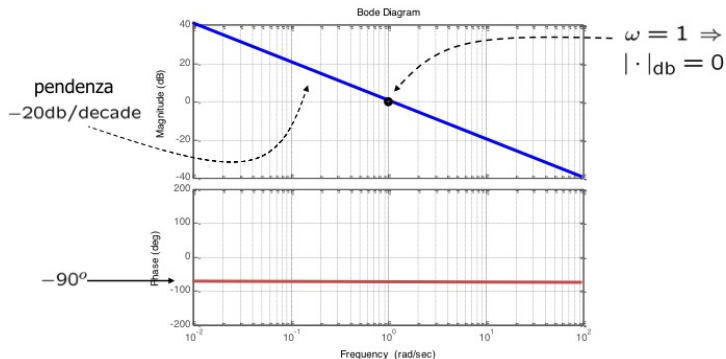


Nota (fase): $j\omega$ punto sul semiasse immaginario positivo $\forall \omega > 0$, quindi fase $90^\circ \forall \omega > 0$.

Diagrammi di Bode: poli nell'origine

Consideriamo un polo nell'origine, ovvero $g = 1$

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = \frac{1}{j\omega} \quad |G_b(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \omega \quad \arg(G_b(j\omega)) = -\arg(j\omega)$$

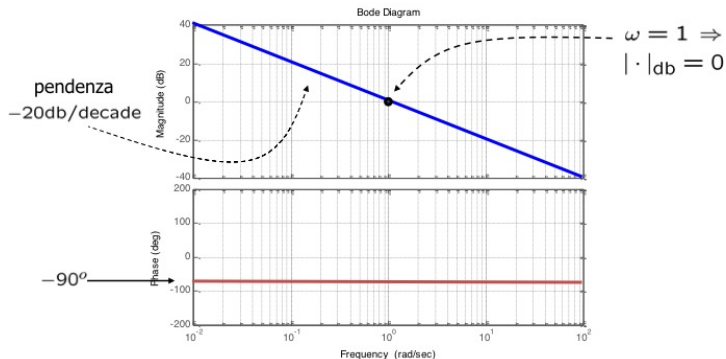


Nota (ampiezza): scala logaritmica quindi $\log \omega \mapsto -20 \log \omega$ è una retta con pendenza $-20\text{dB}/\text{dec}$

Diagrammi di Bode: poli nell'origine

Consideriamo un polo nell'origine, ovvero $g = 1$

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = \frac{1}{j\omega} \quad |G_b(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \omega \quad \arg(G_b(j\omega)) = -\arg(j\omega)$$

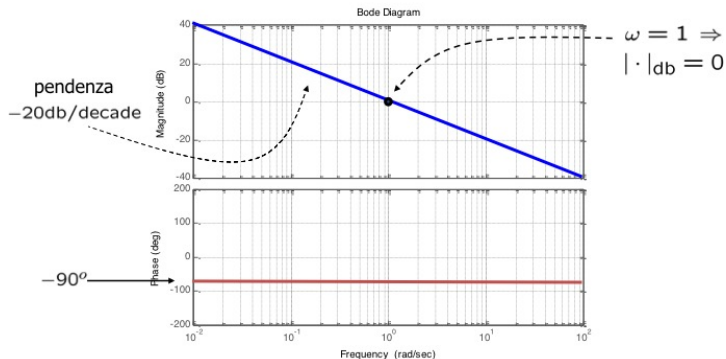


Nota (ampiezza): se ho g poli nell'origine allora pendenza $-20g$ dB/dec

Diagrammi di Bode: poli nell'origine

Consideriamo un polo nell'origine, ovvero $g = 1$

$$G_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^g} = \frac{1}{j\omega} \quad |G_b(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \omega \quad \arg(G_b(j\omega)) = -\arg(j\omega)$$

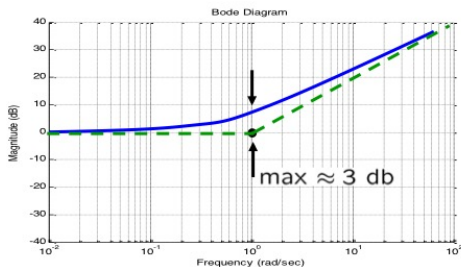


Nota (fase): $-j\omega$ punto sul semiasse immaginario negativo $\forall \omega > 0$, quindi fase $-90^\circ \forall \omega > 0$.

Diagrammi di Bode: zero reale (ampiezza)

Consideriamo $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ (zero reale)

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \approx \begin{cases} 20 \log 1 = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log \omega |\tau| = -20 \log \frac{1}{|\tau|} + 20 \log \omega & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

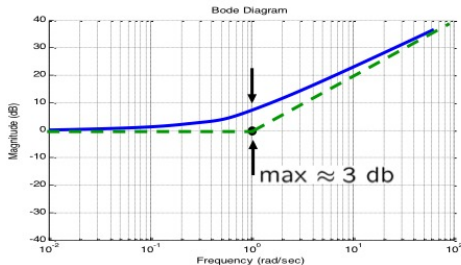


Nota (diagramma asintotico): fino a $\omega = \frac{1}{|\tau|}$, **pulsazione di taglio**, andamento costante a 0dB.

Diagrammi di Bode: zero reale (ampiezza)

Consideriamo $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ (zero reale)

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \approx \begin{cases} 20 \log 1 = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log \omega |\tau| = -20 \log \frac{1}{|\tau|} + 20 \log \omega & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

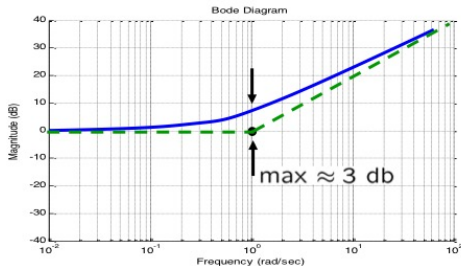


Nota (diagramma asintotico): A partire da $\omega = \frac{1}{|\tau|}$, **pulsazione di taglio**, retta $\log \omega \mapsto -20 \log \frac{1}{|\tau|} + 20 \log \omega$ con pendenza 20dB/dec.

Diagrammi di Bode: zero reale (ampiezza)

Consideriamo $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$ (zero reale)

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \approx \begin{cases} 20 \log 1 = 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ 20 \log \omega |\tau| = -20 \log \frac{1}{|\tau|} + 20 \log \omega & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$



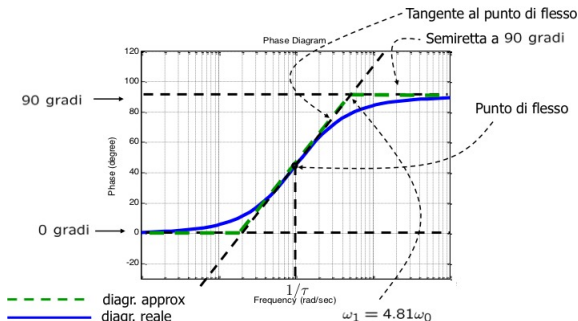
Nota (diagramma reale): scostamento massimo per $\omega = \frac{1}{|\tau|}$ dove

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{1 + 1} = 20 \log \sqrt{2} \approx 3.$$

Diagrammi di Bode: zero reale negativo (fase)

Consideriamo $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$, $\tau > 0$ (zero reale negativo)

$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ 90^\circ & \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}$$

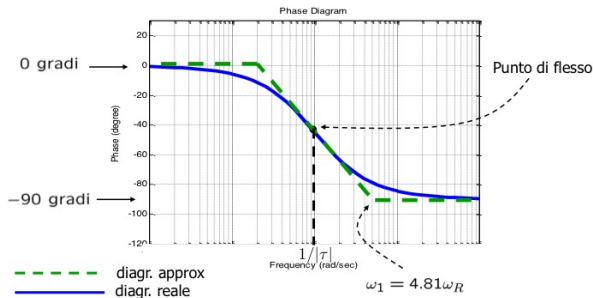


Nota (diagramma reale): il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la **pulsazione di taglio** $\omega = \frac{1}{\tau}$.

Diagrammi di Bode: zero reale positivo (fase)

Consideriamo $G_c(j\omega) = 1 + j\omega\tau$, $\tau < 0$ (zero reale positivo)

$$\arg(G_c(j\omega)) = \arg(1 + j\omega\tau) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \frac{1}{|\tau|} \\ -90^\circ & \omega \gg \frac{1}{|\tau|} \end{cases}$$

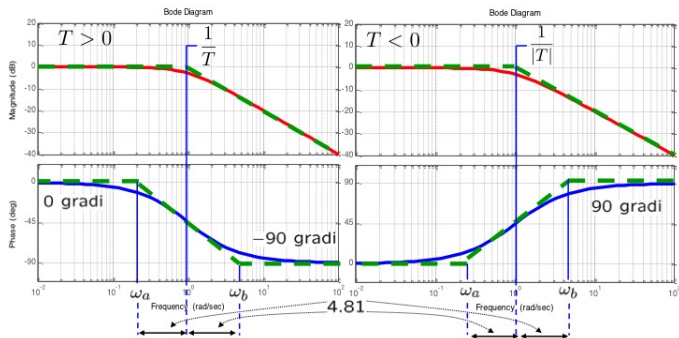


Nota (diagramma reale): il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la **pulsazione di taglio** $\omega = \frac{1}{|\tau|}$.

Diagrammi di Bode: polo reale

Consideriamo $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$ (polo reale)

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

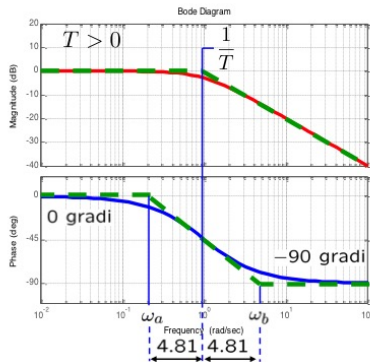


Nota: diagramma ottenuto da quello dello zero ribaltando rispetto all'asse reale (consistentemente con il segno di T).

Diagrammi di Bode: polo reale negativo

Consideriamo $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$, $T > 0$ (polo reale negativo).

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

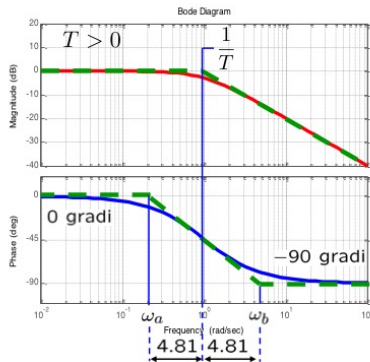


Nota (diagramma asintotico): Fino a $\omega = \frac{1}{T}$, **pulsazione di taglio**, andamento costante a 0dB.

Diagrammi di Bode: polo reale negativo

Consideriamo $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$, $T > 0$ (polo reale negativo).

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

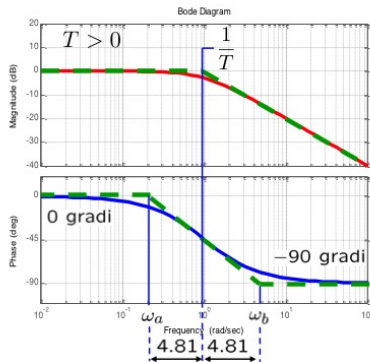


Nota (diagramma asintotico): A partire da $\omega = \frac{1}{T}$, **pulsazione di taglio**, retta $\log \omega \mapsto 20 \log \frac{1}{|T|} - 20 \log \omega$ con pendenza -20dB/dec .

Diagrammi di Bode: polo reale negativo

Consideriamo $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$, $T > 0$ (polo reale negativo).

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

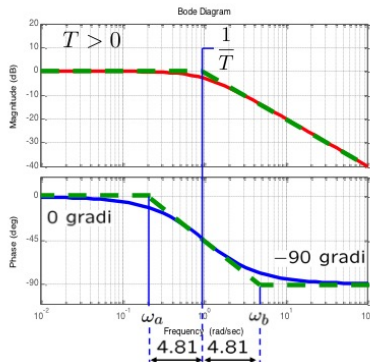


Nota (diagramma reale): scostamento massimo per $\omega = \frac{1}{T}$ dove
 $|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + 1} = -20 \log \sqrt{2} \approx -3$.

Diagrammi di Bode: polo reale negativo

Consideriamo $G_c(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$, $T > 0$ (polo reale negativo).

$$|G_c(j\omega)|_{\text{dB}} = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad \arg(G_c(j\omega)) = -\arg(1 + j\omega T)$$

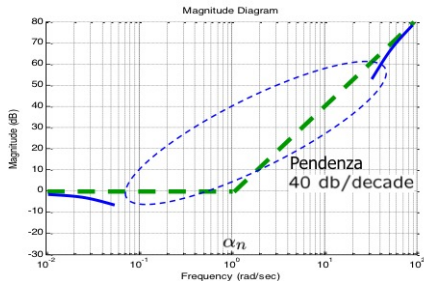


Nota (diagramma reale): il cambio di fase inizia circa una decade prima e finisce circa una decade dopo la **pulsazione di taglio** $\omega = \frac{1}{T}$.

Diagrammi di Bode: zeri c.c. (ampiezza)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta \frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ (coppia di zeri c.c.)

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \approx \begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} = & \omega \gg \alpha_n \\ -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega & \end{cases}$$

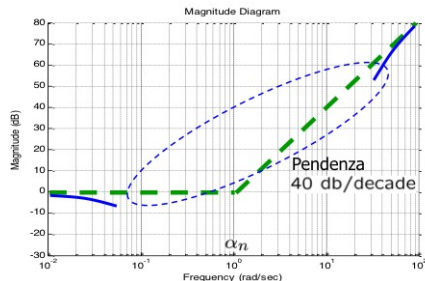


Nota (diagramma asintotico): Fino a $\omega = \alpha_n$, **pulsazione di taglio**, andamento costante a 0dB.

Diagrammi di Bode: zeri c.c. (ampiezza)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ (coppia di zeri c.c.)

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \approx \begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} = & \omega \gg \alpha_n \\ -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega & \end{cases}$$

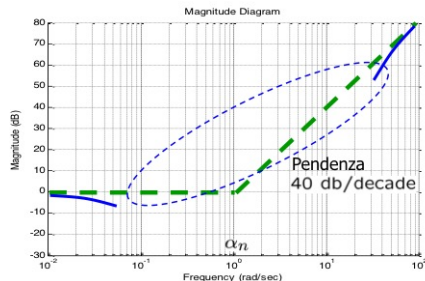


Nota (diagramma asintotico): A partire da $\omega = \alpha_n$, **pulsazione di taglio**, retta $\log \omega \mapsto -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega$ con pendenza 40dB/dec.

Diagrammi di Bode: zeri c.c. (ampiezza)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ (coppia di zeri c.c.)

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \approx \begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} = & \omega \gg \alpha_n \\ -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega & \end{cases}$$

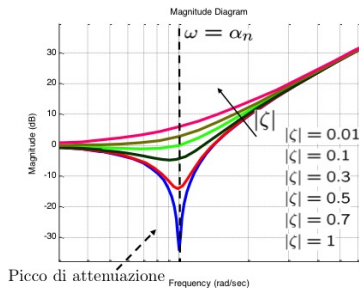


Nota (diagramma reale): scostamento significativo nella zona tratteggiata dipendente dal valore di ζ .

Diagrammi di Bode: zeri c.c. (ampiezza)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$ (coppia di zeri c.c.)

$$|G_d(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}} \approx \begin{cases} 20 \log(1) = 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 20 \log \frac{\omega^2}{\alpha_n^2} = & \omega \gg \alpha_n \\ -40 \log \alpha_n + 40 \log \omega & \end{cases}$$

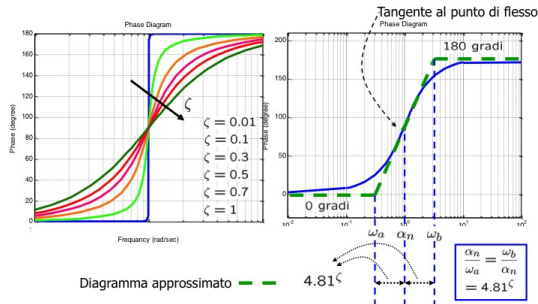


Minimo a pulsazione $\omega_r = \alpha_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ con $|G_d(j\omega_r)| = 2|\zeta| \sqrt{1 - \zeta^2}$

Diagrammi di Bode: zeri c.c. parte reale negativa (fase)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$, $\zeta > 0$ (coppia di zeri c.c.)

$$\arg(G_c(j\omega)) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \alpha_n \\ 180^\circ & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$

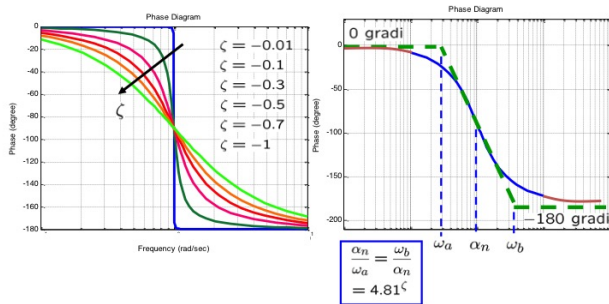


Nota (diagramma reale): il cambio di fase dipende in modo significativo dal valore di ζ .

Diagrammi di Bode: zeri c.c. parte reale positiva (fase)

Consideriamo $G_d(j\omega) = 1 + 2j\zeta\frac{\omega}{\alpha_n} - \frac{\omega^2}{\alpha_n^2}$, $\zeta < 0$ (coppia di zeri c.c.)

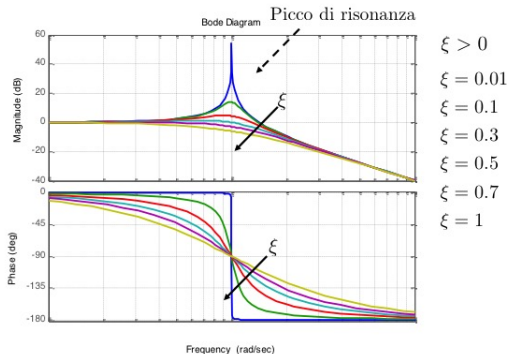
$$\arg(G_c(j\omega)) \approx \begin{cases} 0 & \omega \ll \alpha_n \\ -180^\circ & \omega \gg \alpha_n \end{cases}$$



Nota (diagramma reale): il cambio di fase dipende in modo significativo dal valore di ζ .

Diagrammi di Bode: poli c.c. parte reale negativa

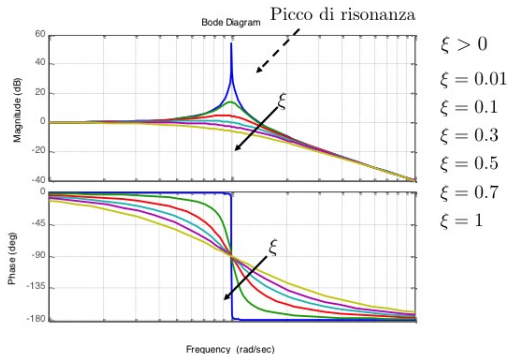
Consideriamo $G_d(j\omega) = \frac{1}{1+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$, $\xi > 0$ (coppia di poli c.c.)



Nota: diagramma ottenuto da quello degli zeri ribaltando rispetto all'asse reale (caso $\xi > 0$ corrispondente a $\zeta > 0$).

Diagrammi di Bode: poli c.c. parte reale negativa

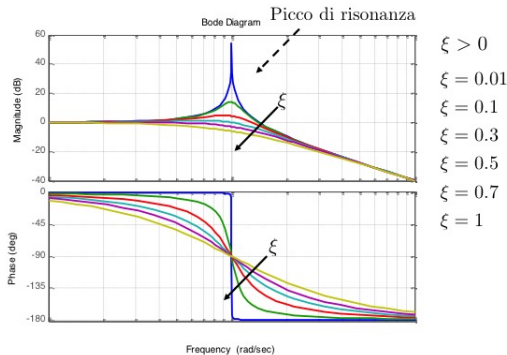
Consideriamo $G_d(j\omega) = \frac{1}{1+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$, $\xi > 0$ (coppia di poli c.c.)



Picco di risonanza alla pulsazione di risonanza $\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ con $|G_d(j\omega_r)| = \frac{1}{2|\xi|\sqrt{1-\xi^2}}$.

Diagrammi di Bode: poli c.c. parte reale negativa

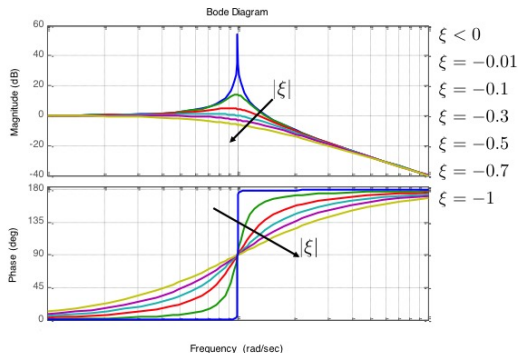
Consideriamo $G_d(j\omega) = \frac{1}{1+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$, $\xi > 0$ (coppia di poli c.c.)



Alla frequenza ω_n si ha $|G_d(j\omega_n)| = \frac{1}{2|\xi|}$.

Diagrammi di Bode: poli c.c. parte reale positiva

Consideriamo $G_d(j\omega) = \frac{1}{1+2j\xi\frac{\omega}{\omega_n}-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$, $\xi < 0$ (coppia di poli c.c.)



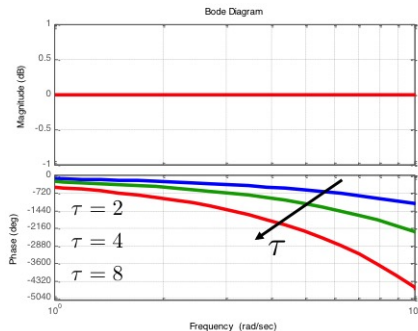
Nota: diagramma ottenuto da quello degli zeri ribaltando rispetto all'asse reale (caso $\xi < 0$ corrispondente a $\zeta < 0$).

Diagrammi di Bode: ritardo temporale

Consideriamo $G(s) = e^{-\tau s}$ con $G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |e^{-j\omega\tau}| = 20 \log 1 = 0$$

$$\arg G(j\omega) = \arg e^{-j\omega\tau} = -\omega\tau.$$



Proprietà bloccante degli zeri

Supponiamo di avere $G(s) = \mu \frac{s^2 + \alpha_n^2}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$, con $T_1, T_2 > 0$ (asintoticamente stabile). Calcoliamo l'uscita del sistema supponendo un ingresso del tipo $u(t) = U \cos(\omega_u t)$. La trasformata dell'ingresso è $U(s) = \frac{Us}{s^2 + \omega_u^2}$.

Caso 1: $\omega_u \neq \alpha_n$. La trasformata dell'uscita sarà uguale a

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu \frac{Us(s^2 + \alpha_n^2)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(s^2 + \omega_u^2)}$$

In base al denominatore, i modi presenti nell'uscita sono:

- $e^{-\frac{t}{T_1}}$ (dovuto al termine $1 + T_1 s$)
- $e^{-\frac{t}{T_2}}$ (dovuto al termine $1 + T_2 s$)
- $|G(j\omega_u)|U \cos(\omega_u t + \arg(G(j\omega_u)))$ (dovuto al termine $s^2 + \omega_u^2$)

Proprietà bloccante degli zeri

Supponiamo di avere $G(s) = \mu \frac{s^2 + \alpha_n^2}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$, con $T_1, T_2 > 0$ (asintoticamente stabile). Calcoliamo l'uscita del sistema supponendo un ingresso del tipo $u(t) = U \cos(\omega_u t)$. La trasformata dell'ingresso è $U(s) = \frac{Us}{s^2 + \omega_u^2}$.

Caso 2: $\omega_u = \alpha_n$. La trasformata dell'uscita sarà uguale a

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu \frac{Us \cancel{(s^2 + \alpha_n^2)}}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) \cancel{(s^2 + \alpha_n^2)}} = \mu \frac{Us}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

In base al denominatore, i modi presenti nell'uscita sono:

- $e^{-\frac{t}{T_1}}$ (dovuto al termine $1 + T_1 s$)
- $e^{-\frac{t}{T_2}}$ (dovuto al termine $1 + T_2 s$)

Pertanto, in questo caso nell'uscita $y(t) = k_1 e^{-\frac{t}{T_1}} + k_2 e^{-\frac{t}{T_2}}$ **NON** sono presenti i modi corrispondenti agli zeri del sistema.

Risonanza

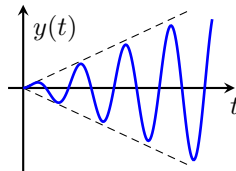
Supponiamo di avere un sistema con poli immaginari coniugati $\pm j\omega_n$, ovvero $G(s) = \mu \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2}$. Abbiamo visto che il diagramma di Bode ha un picco di risonanza infinito corrispondente alla pulsazione ω_n . Verifichiamolo calcolando l'uscita del sistema in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = U \cos(\omega_n t)$. La trasformata dell'ingresso è $U(s) = U \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}$, quindi quella dell'uscita è

$$Y(s) = G(s)U(s) = \mu \frac{U\omega_n^2 s}{(s^2 + \omega_n^2)^2} = \frac{k_1}{s - j\omega_n} + \frac{\bar{k}_1}{s + j\omega_n} + \frac{k_2}{(s - j\omega_n)^2} + \frac{\bar{k}_2}{(s + j\omega_n)^2},$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo scritto lo sviluppo in fratti semplici per poli multipli. A causa della presenza dei termini al quadrato al denominatore, avremo un'uscita del tipo

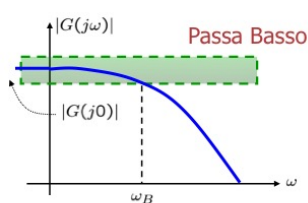
$$y(t) = A_1 t \cos(\omega_n t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega_n t + \phi_2),$$

il cui valore assoluto tende ad infinito per $t \rightarrow \infty$.



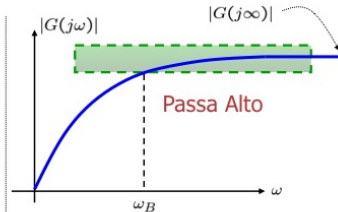
Azione filtrante dei sistemi dinamici

Quanto visto mostra che un sistema dinamico si comporta come un **filtro** per l'ingresso "modellandolo" per produrre l'uscita.



$$\begin{aligned} \underbrace{-3\text{dB}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} &\leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \underbrace{3\text{dB}}_{\sqrt{2}} \quad \forall \omega \leq \omega_B \\ \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} &< \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall \omega > \omega_B \end{aligned}$$

$[0, \omega_B] \rightarrow$ **Banda passante**



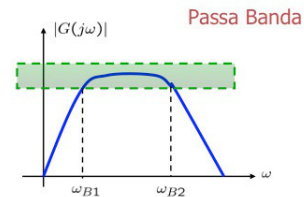
$$\frac{|G(j\omega)|}{|G(j\infty)|} < \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall \omega < \omega_B$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\infty)|} \leq \sqrt{2} \quad \forall \omega \geq \omega_B$$

$[\omega_B, \infty] \rightarrow$ **Banda passante**

Azione filtrante dei sistemi dinamici

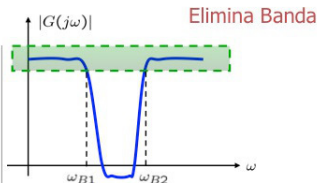
Quanto visto mostra che un sistema dinamico si comporta come un **filtro** per l'ingresso "modellandolo" per produrre l'uscita.



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{max})|} \leq \sqrt{2}$$
$$\forall \omega \in [\omega_{B1}, \omega_{B2}]$$

$$\frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{max})|} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\forall \omega \in [0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, \infty]$$

$[\omega_{B1}, \omega_{B2}] \rightarrow$ Banda passante



$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{max})|} \leq \sqrt{2}$$
$$\forall \omega \in [0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, \infty]$$

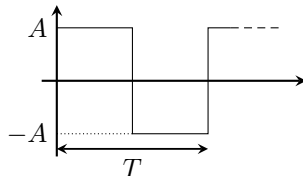
$$\frac{|G(j\omega)|}{|G(j\omega_{max})|} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\forall \omega \in [\omega_{B1}, \omega_{B2}]$$

$[0, \omega_{B1}] \cup [\omega_{B2}, \infty] \rightarrow$ Banda passante

Esempio: filtrare onda quadra con disturbo in alta frequenza

Consideriamo un segnale $s(t)$ ad onda quadra con periodo T e ampiezza A :

$$s(t) = A \operatorname{sign} \left(\sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \right) = \begin{cases} A & \text{se } \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) \geq 0 \\ -A & \text{se } \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \right) < 0 \end{cases}$$



Supponiamo che l'ingresso consista nell'onda quadra più un disturbo sinusoidale ad alta frequenza $\omega_N \gg \frac{2\pi}{T}$ con ampiezza A_N :

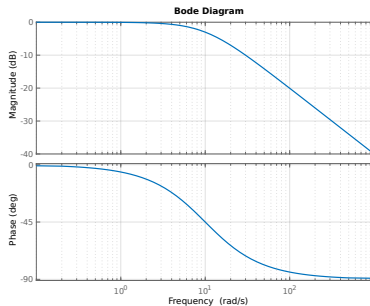
$$u(t) = s(t) + A_N \sin(\omega_N t)$$

Per filtrare il disturbo in alta frequenza possiamo usare un filtro passabasso, cioè un sistema dinamico del primo ordine con un polo reale in $-1/T_p$: $G(s) = \frac{1}{1+sT_p}$. Scegliendo opportunamente la costante di tempo T_p il segnale in uscita sarà una versione filtrata dell'onda quadra con disturbo in alta frequenza quasi completamente attenuato

Risposta in frequenza su Matlab

Esempio: sistema del primo ordine con poli reali $G(s) = \frac{\mu}{1+Ts}$ con $\mu = 1$ e $T = 0.1$ s

```
mu = 1;  
T = 0.1;  
  
s = tf('s');  
G = mu/(1+T*s);  
bode(G);
```



Valutazione di modulo e argomento di $G(j\omega)$ in un certo ω (es. $\omega = 10$):

```
omega = 10;  
Gjw = evalfr(G, 1j*omega); % numero complesso  
Gjw_mod = abs(Gjw) % 0.701 (-3.01 dB)  
Gjw_phase = angle(Gjw) % -0.7854 rad (-45 gradi)
```