

# Controlli Automatici T

## Parte 6: Sistemi di controllo: stabilità e prestazioni

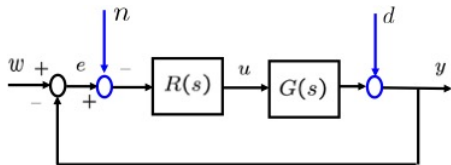
| Prof. Giuseppe Notarstefano  
Prof. Andrea Testa

Department of Electrical, Electronic, and Information Engineering  
Alma Mater Studiorum Università di Bologna  
[giuseppe.notarstefano@unibo.it](mailto:giuseppe.notarstefano@unibo.it)  
[a.testa@unibo.it](mailto:a.testa@unibo.it)

Queste slide sono ad uso interno del corso  
Controlli Automatici T dell'Università di Bologna a.a. 22/23.

# Schema di controllo in retroazione

Consideriamo il seguente schema di controllo in retroazione.



**Obiettivo:** garantire che l'uscita  $y(t)$  segua il riferimento  $w(t)$  (scelto dall'utente) in presenza di

- disturbi (non misurabili) in uscita  $d(t)$  e disturbi di misura  $n(t)$
- incertezze sul modello  $G(s)$  del sistema fisico (impianto) considerato

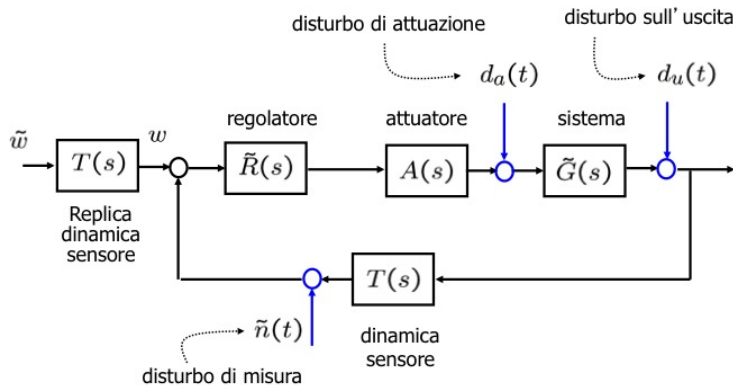
soddisfacendo opportune specifiche di prestazione.

$$L(s) = R(s)G(s) \text{ funzione d'anello}$$

(funzione di trasferimento in anello aperto)

# Schema generale e semplificazione

Lo schema precedente cattura anche strutture più complesse che includono attuatori e trasduttori.



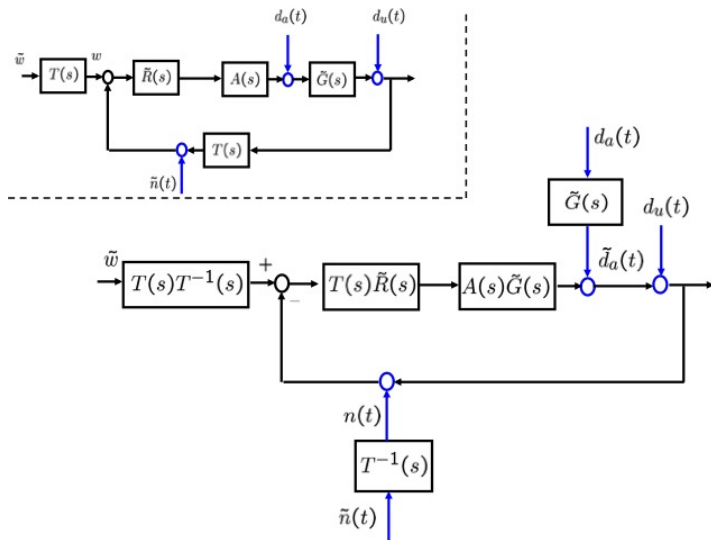
**Nota:** il riferimento  $w$  viene filtrato con una replica della dinamica del sensore  $T(s)$  in modo che sia “compatibile” con la dinamica dell’uscita  $y$  retroazionata.

# Schema generale e semplificazione

---

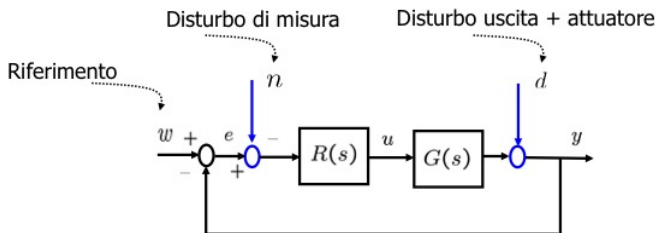
Usando le proprietà di schemi a blocchi interconnessi, si può riscrivere lo schema precedente in modo equivalente.

# Schema generale e semplificazione



# Schema generale e semplificazione

Ridefinendo opportunamente i vari blocchi e segnali lo schema semplificato cattura anche lo schema generale.



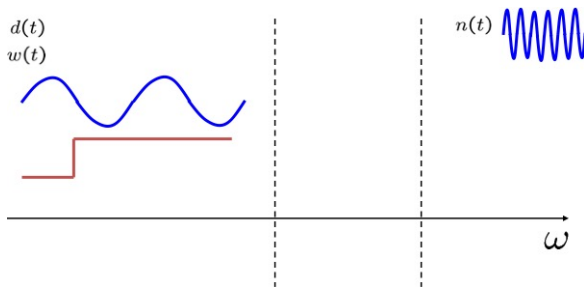
**Sistemi:**  $R(s) = T(s)\tilde{R}(s)$ ,  $G(s) = A(s)\tilde{G}(s)$ .

**Segnali:**  $W(s) = \tilde{W}(s)$ ,  $N(s) = T^{-1}(s)\tilde{N}(s)$ ,  $D(s) = D_a(s)\tilde{G}(s) + D_u(s)$ .

**Nota:** il disturbo sull'attuatore  $d_a(t)$  viene filtrato del sistema. Bisogna tenerne conto quando si fanno considerazioni sul disturbo in uscita  $d(t)$ .

# Disaccoppiamento frequenziale dei segnali

Nelle applicazioni di interesse ingegneristico tipicamente le bande dei segnali di ingresso  $w(t)$ ,  $d(t)$ ,  $n(t)$  sono limitate in opportuni range.



$w(t)$  e  $d(t)$  hanno bande a “basse frequenze”  
(e.g., posizioni, rotazioni, velocità, etc. di sistemi meccanici)

$n(t)$  hanno bande ad “alte frequenze”  
(e.g., disturbi termici in componenti elettronici, accoppiamenti con campi e.m., etc.)

# Requisiti di un sistema di controllo: stabilità

---

## Stabilità nominale

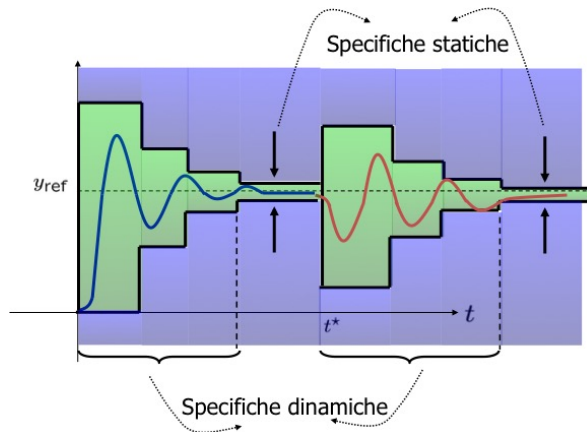
Requisito fondamentale è l'asintotica stabilità o stabilità BIBO (esterna) se solo rappresentazione ingresso-uscita.

## Stabilità robusta

La stabilità deve essere garantita anche in condizioni perturbate (errori di modello o incertezze nei parametri).



# Requisiti di un sistema di controllo: prestazioni



# Requisiti di un sistema di controllo: prestazioni

## Prestazioni statiche

Prestazioni a transitorio esaurito ( $t \rightarrow \infty$ ): tipicamente  $e(t)$  limitato o nullo a fronte di ingressi  $w$ ,  $d$ ,  $n$  con determinate caratteristiche.

Esempi:

- errore in risposta ad un ingresso a gradino (transizione ad un nuovo riferimento o disturbi costanti su attuatori/sensori) o rampa,
- risposta a un ingresso sinusoidale a date frequenze (disturbi con certe componenti frequenziali).

# Requisiti di un sistema di controllo: prestazioni

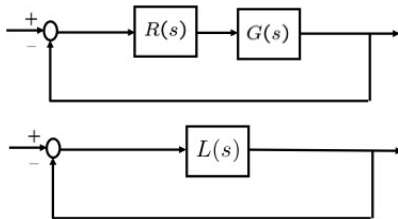
## Prestazioni dinamiche

Prestazioni del sistema in transitorio relative a

- risposta a un riferimento  $w$ , date in termini di tempo di assestamento  $T_{a,\epsilon}$  e sovraelongazione  $S\%$  massimi;
- risposta a disturbi  $d$  ed  $n$ , date in termini di attenuazione in certi range di frequenze (bande di frequenza dei disturbi)
- moderazione della variabile di controllo  $u$ , date in termini di contenimento dell'ampiezza (per evitare saturazione attuatori, uscita da range in cui la linearizzazione è valida, costi eccessivi).

# Stabilità robusta del sistema retroazionato

Poichè la stabilità di un sistema lineare non dipende dagli ingressi, consideriamo il seguente schema a blocchi.



Per studiare la stabilità robusta (in presenza di incertezze) del sistema retroazionato enunceremo un risultato fondamentale

## Criterio di Bode

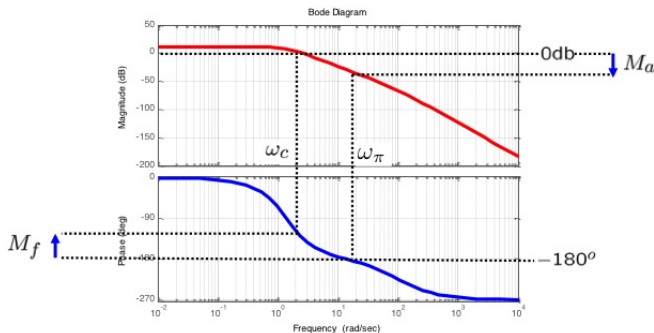
lega la stabilità del sistema retroazionato  
a quella del  
sistema in anello aperto  $L(s)$

# Margini di fase e ampiezza

Margine di fase:

$$M_f = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c)) \text{ con } \omega_c \text{ t.c. } |L(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 0$$

**Nota:**  $M_f = \arg(L(j\omega_c)) - (-180^\circ) = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c))$

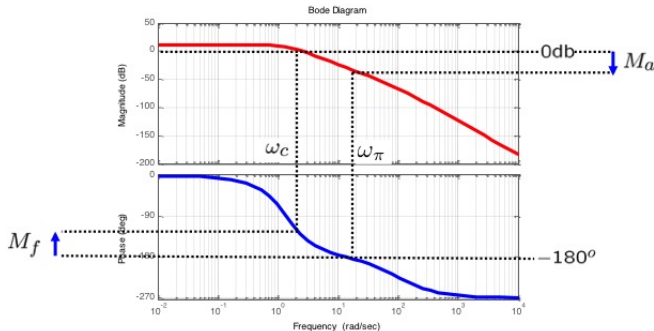


# Margini di fase e ampiezza

Margine di fase:

$$M_f = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c)) \text{ con } \omega_c \text{ t.c. } |L(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 0$$

**Nota:**  $\omega_c$  è detta pulsazione critica.



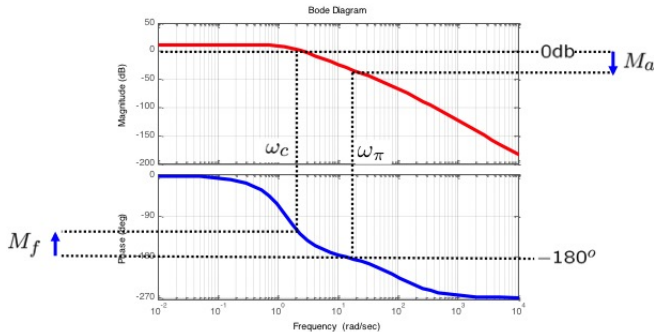
# Margini di fase e ampiezza

Margine di fase:

$$M_f = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c)) \text{ con } \omega_c \text{ t.c. } |L(j\omega_c)|_{\text{dB}} = 0$$

Margine di ampiezza:

$$M_a = -|L(j\omega_\pi)|_{\text{dB}} \text{ con } \omega_\pi \text{ t.c. } \arg(L(j\omega_\pi)) = -180^\circ$$



# Margini di fase e ampiezza: casi patologici

---

Ci sono casi in cui  $M_f$  e  $M_a$  non sono definiti o non sono informativi.

**Intersezioni multiple:** il diagramma delle ampiezze  $|L(j\omega)|_{\text{dB}}$  attraversa l'asse a 0 dB più di una volta.

**Assenza di intersezioni:** il diagramma delle ampiezze  $|L(j\omega)|_{\text{dB}}$  non attraversa l'asse a 0 dB.

**Segni discordi:** margini di fase e ampiezza  $M_f$  e  $M_a$  hanno segno discorde (per essere informativi  $M_f$  e  $M_a$  devono avere lo stesso segno).



# Criterio di Bode

---

## Teorema (Criterio di Bode)

Si supponga che

1.  $L(s)$  non abbia poli a parte reale (strettamente) positiva
2. il diagramma di Bode del modulo di  $L(j\omega)$  attraversi una sola volta l'asse a 0 dB.

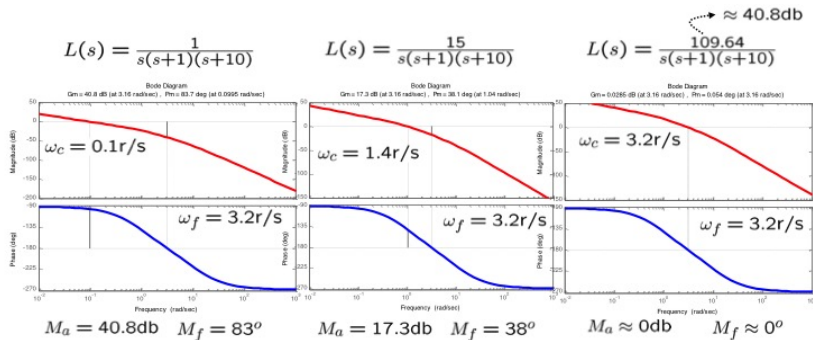
Allora, condizione necessaria e sufficiente perché il **sistema retroazionato** sia asintoticamente stabile è che risulti  $\mu > 0$  (con  $\mu$  guadagno statico di  $L(j\omega)$ ) e  $M_f > 0$ .

**Nota:** la stabilità del sistema in retroazione è determinata dalla lettura di un solo punto sul diagramma di Bode di  $L(j\omega)$ .

**Nota:**  $M_f$  e  $M_a$  in genere vanno considerati simultaneamente e forniscono una misura della robustezza rispetto a incertezze su  $L(s)$ .

# Robustezza rispetto a incertezze sul guadagno

Il margine di ampiezza  $M_a$  rappresenta la massima incertezza tollerabile sul guadagno statico  $\mu$ .



**Nota:** variazioni di  $\mu$  determinano traslazioni del diagramma delle ampiezza e non alterano il diagramma delle fasi.

# Robustezza rispetto a ritardi temporali

---

Un sistema che ritarda di  $\tau$  ha funzione di trasferimento  $e^{-s\tau}$ .

Il diagramma di Bode delle ampiezze di un ritardo è costante a 0 dB.

Lo sfasamento è  $-\omega\tau$  che nel diagramma di Bode delle fasi, in scala semi-logaritmica, ha un andamento di tipo esponenziale.

**Nota:** se  $L(s) = e^{-s\tau}\tilde{L}(s)$  la pulsazione critica  $\omega_c$  non cambia, ovvero quella di  $L(s)$  è la stessa di  $\tilde{L}(s)$ .

**Nota:** un ritardo riduce quindi il margine di fase in quanto per  $\omega = \omega_c$  riduce la fase, ovvero

$$\arg(L(j\omega_c)) = \arg(\tilde{L}(j\omega_c)) - \tau\omega_c.$$

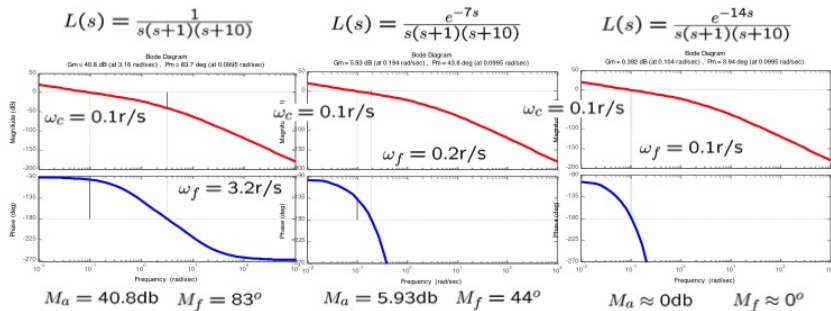
Quindi il massimo ritardo tollerabile  $\tau_{\max}$  deve soddisfare

$$\tau_{\max} < \frac{M_f}{\omega_c}.$$

# Robustezza rispetto a ritardi temporali

Consideriamo il sistema  $\tilde{L}(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+10)}$ .

Il sistema con un ritardo di  $\tau$  sarà  $L(s) = e^{-s\tau} \tilde{L}(s)$ .



# Matlab: margini di stabilità

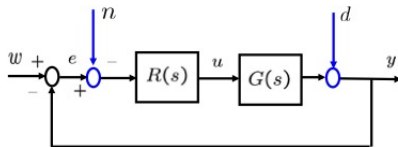
Esempio:  $G(s) = \frac{\mu}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$  con  $\mu = 2$  e  $T_1 = 1$ ,  $T_2 = T_3 = 0.5$

```
mu = 2;  
T1 = 1;  
T2 = 0.5;  
T3 = 0.5;  
  
s = tf('s');  
G = mu/(1+T1*s)/(1+T2*s)/(1+T3*s);  
  
% se richiediamo l'output non viene fatto alcun plot  
[M_a,M_f,omega_pi,omega_c] = margin(G);  
M_a_db = 20*log10(M_a);
```

Risultato:  $M_a = 13$  dB,  $M_f = 72^\circ$ ,  $\omega_\pi = 2.82$  rad/s,  $\omega_c = 1.13$  rad/s.

```
% senza output visualizziamo i margini sul diagramma di Bode  
margin(G);
```

# Funzioni di sensitività



Ingressi (del sistema in anello chiuso):

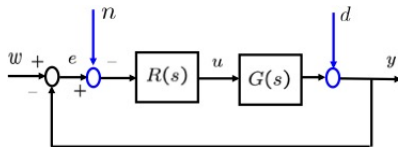
- $w(t)$  riferimento (andamento desiderato per  $y(t)$ )
- $d(t)$  disturbo in uscita
- $n(t)$  disturbo di misura

Uscite di interesse:

- $e(t) = w(t) - y(t)$  errore di inseguimento
- $y(t)$  uscita controllata
- $u(t)$  ingresso di controllo del sistema in anello aperto (impianto)

# Funzioni di sensitività

---



Funzioni di sensitività:

funzioni di trasferimento tra ingressi e uscite di interesse.

# Funzioni di sensitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}$$

Funzione di sensitività

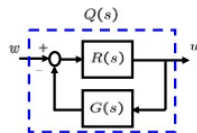
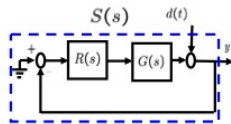
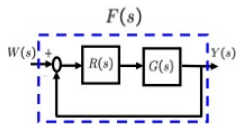
$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

Funzione di sensitività complementare

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

Funzione di sensitività del controllo

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ U(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) & S(s) & -F(s) \\ Q(s) & -Q(s) & -Q(s) \\ S(s) & -S(s) & F(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$





# Funzioni di sensitività

---

Sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti

$$Y(s) = Y_w(s) + Y_d(s) + Y_n(s),$$

con

- $Y_w(s)$  uscita con ingresso  $W(s)$  e ponendo  $D(s) = 0$  e  $N(s) = 0$ ;
- $Y_d(s)$  uscita con ingresso  $D(s)$  e ponendo  $W(s) = 0$  e  $N(s) = 0$ ;
- $Y_n(s)$  uscita con ingresso  $N(s)$  e ponendo  $W(s) = 0$  e  $D(s) = 0$ .

In modo analogo possiamo definire

$$E(s) = E_w(s) + E_d(s) + E_n(s),$$

e

$$U(s) = U_w(s) + U_d(s) + U_n(s).$$

# Funzione di sensitività complementare

Calcoliamo  $Y_w(s)$  come

$$Y_w(s) = R(s)G(s)(W(s) - Y_w(s))$$

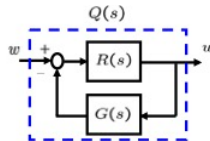
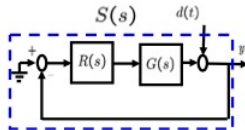
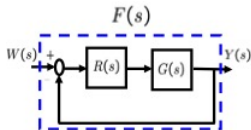
Quindi

$$Y_w(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}W(s)$$

$$Y_w(s) = F(s)W(s)$$

Funzione di sensitività complementare

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}$$



# Funzioni di sensitività

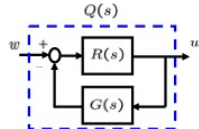
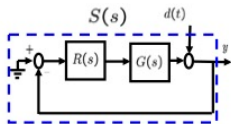
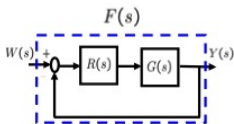
Con calcoli analoghi possono essere ottenute tutte le altre relazioni

$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)} \quad \text{Funzione di sensitività}$$

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} \quad \text{Funzione di sensitività complementare}$$

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)} \quad \text{Funzione di sensitività del controllo}$$

$$\begin{bmatrix} Y(s) \\ U(s) \\ E(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(s) & S(s) & -F(s) \\ Q(s) & -Q(s) & -Q(s) \\ S(s) & -S(s) & F(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$$



# Funzioni di sensitività: considerazioni

---

## Stabilità

Il denominatore di tutte le funzioni di sensitività è lo stesso. Si ricordi che la stabilità è determinata dai poli della funzione di trasferimento.

**Nota:** Questo è consistente con il fatto che la stabilità del sistema (retroazionato) non dipende dal particolare ingresso considerato.

## Relazioni tra le funzioni di sensitività

Le funzioni di sensitività  $S(s)$  e  $F(s)$  dipendono dal prodotto  $L(s) = R(s)G(s)$ , mentre  $Q(s)$  dipende esplicitamente da  $R(s)$ .

Le funzioni di sensitività  $S(s)$  e  $F(s)$  sono legate tra loro, infatti

$$F(s) + S(s) = 1.$$

Per seguire fedelmente il riferimento  $w(t)$  vorremmo  $F(s) = 1$  e per annullare l'effetto del disturbo  $d(t)$  vorremmo  $S(s) = 0$ .

Tuttavia se  $F(s) = 1$  il disturbo  $n(t)$  non sarebbe per niente attenuato.

# Funzioni di sensitività: considerazioni

---

Sarà fondamentale la separazione di banda vista in precedenza:

- riferimento  $w(t)$  e disturbo in uscita  $d(t)$  in basse frequenze
- disturbo di misura  $n(t)$  ad alte frequenze.

## Importante

Per  $F(j\omega) = \frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}$  cercheremo di avere

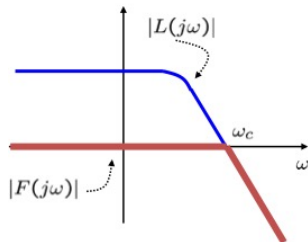
- $|F(j\omega)| \approx 1$  a basse frequenze (inseguimento di  $w(t)$ )
- $|F(j\omega)| \approx 0$  ad alte frequenze (abbattimento di  $n(t)$ )

Quindi progetteremo  $R(j\omega)$  in modo che

- $|L(j\omega)| \gg 1$  a basse frequenze
- $|L(j\omega)| \ll 1$  ad alte frequenze

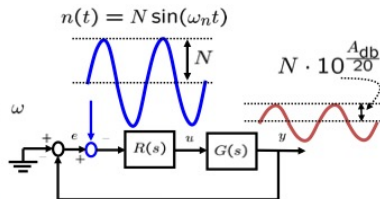
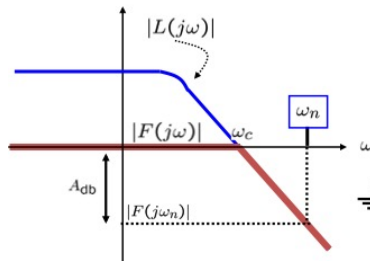
È utile effettuare una analisi in frequenza delle funzioni di sensitività.

# Funzione di sensitività complementare



Andamento approx. di  $|F(j\omega)|$  :

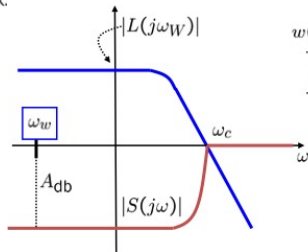
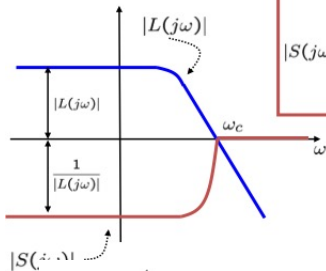
$$|F(j\omega)| = \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| \approx \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ |L(j\omega)| & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases}$$



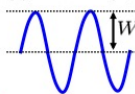
# Funzione di sensitività

Andamento approx. di  $|S(j\omega)|$ :

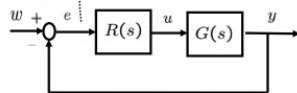
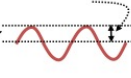
$$|S(j\omega)| = \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| \approx \begin{cases} \frac{1}{|L(j\omega)|} = -|L(j\omega)|_{db} & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ 1 & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases}$$



$$w(t) = W \sin(\omega_w t)$$



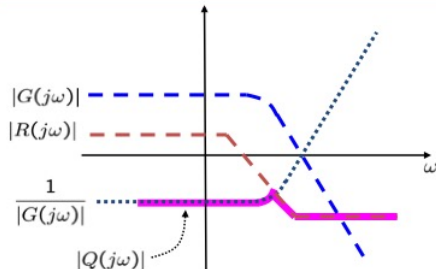
$$W \cdot 10^{\frac{A_{db}}{20}}$$



# Funzione di sensitività del controllo

Andamento approx. di  $|Q(j\omega)|$ :

$$|Q(j\omega)| = \left| \frac{R(j\omega)}{1 + R(j\omega)G(j\omega)} \right| \approx \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)| & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases}$$



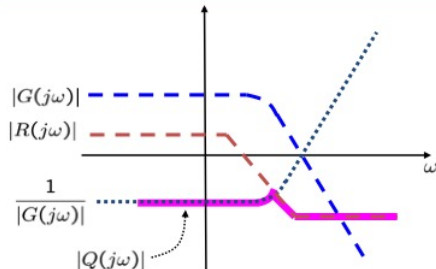
**Nota:** a basse frequenze il modulo di  $Q(j\omega)$  dipende da  $G(j\omega)$ , quindi non possiamo influenzarlo con il regolatore. Occorre evitare valori di  $\omega_c$  “troppo elevati”.



# Funzione di sensitività del controllo

Andamento approx. di  $|Q(j\omega)|$ :

$$|Q(j\omega)| = \left| \frac{R(j\omega)}{1 + R(j\omega)G(j\omega)} \right| \approx \begin{cases} \frac{1}{|G(j\omega)|} & \text{se } \omega \leq \omega_c \\ |R(j\omega)| & \text{se } \omega > \omega_c \end{cases}$$



**Nota:** è importante progettare regolatori che attenuino a frequenze alte.

# Matlab: funzioni di sensitività (I)

Esempio:  $L(s) = \frac{\mu}{(1+T_1s)(1+T_2s)(1+T_3s)}$  con  $\mu = 40$  e  $T_1 = 10$ ,  $T_2 = 2$ ,  $T_3 = 0.2$

```
mu = 40;  
T1 = 10;  
T2 = 2;  
T3 = 0.2;  
  
s = tf('s');  
L = mu/(1 + T1*s)/(1 + T2*s)/(1 + T3*s); % sistema
```

Calcoliamo la funzione di sensitività complementare  $F(s)$ .

**Alternativa 1:** usare la funzione connect

```
L.OutputName = 'y'; % chiamiamo 'y' l'uscita di L  
L.InputName = 'e'; % chiamiamo 'e' l'ingresso di L  
Sum = sumblk('e = w - y'); % nodo sommatore  
F_connect = connect(L, Sum, 'w', 'y'); % sistema interconnesso
```

Con il precedente codice creiamo un nodo sommatore  $e = w - y$  e creiamo l'interconnessione del sistema ottenendo la funzione di trasferimento da  $w$  a  $y$ .

## Matlab: funzioni di sensitività (II)

F\_connect è un modello nello spazio degli stati e potrebbe richiedere delle cancellazioni poli/zeri. Per effettuarle usiamo minreal e successivamente convertiamo in un oggetto transfer function:

```
% funzione di trasferimento in anello chiuso  
F_connect = tf(minreal(F_connect))
```

Risultato: 
$$F(s) = \frac{10}{s^3 + 5.6s^2 + 3.05s + 10.25}$$

Si può anche convertire la funzione di trasferimento in forma fattorizzata usando zpk:

```
F_connect = zpk(F_connect)
```

Risultato: 
$$F(s) = \frac{10}{(s + 5.387)(s^2 + 0.213s + 1.903)}$$

# Matlab: funzioni di sensitività (III)

Altri modi per calcolare  $F(s)$ :

**Alternativa 2:** usare feedback per fare la retroazione unitaria (cioè senza alcun blocco sul ramo di retroazione)

```
F_feedback = feedback(L, 1); % retroazione unitaria
F_feedback.InputName = 'w'; % correggiamo il nome dell'ingresso
F_connect = tf(minreal(F_connect));
```

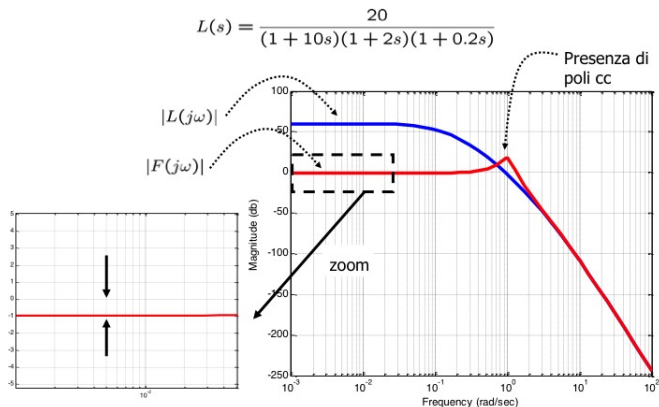
**Alternativa 3:** usare la formula  $F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$

```
F = L / (1 + L);
F.OutputName = 'y';
F.InputName = 'w';
F = tf(minreal(F));
```

**Nota:** il risultato nei tre casi è perfettamente identico

## Poli c.c. di $F(s)$ e margine di fase

La funzione di sensitività complementare può avere una coppia di poli c.c. dominanti.



Mettiamo in relazione il picco di risonanza di  $F(j\omega)$  con lo smorzamento  $\xi$  associato, assumendo che  $\omega_n \approx \omega_c$ .

## Poli c.c. di $F(s)$ e margine di fase

$$\begin{aligned}|F(j\omega_c)| &= \frac{|L(j\omega_c)|}{|1 + L(j\omega_c)|} = \frac{1}{|1 + e^{j\varphi_c}|} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \cos \varphi_c)^2 + \sin^2 \varphi_c}} \\&= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos \varphi_c)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos M_f^{\text{rad}})}} = \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 M_f^{\text{rad}}}} = \frac{1}{2 \sin \frac{M_f^{\text{rad}}}{2}}\end{aligned}$$

Assumendo che  $\omega_n \approx \omega_c$

$$|F(j\omega_c)| = \frac{1}{2\xi}$$

dove  $\xi$  è lo smorzamento dei poli c.c. di  $F(s)$ . Uguagliando le due espressioni si ha

$$\xi = \sin \frac{M_f^{\text{rad}}}{2} \approx \frac{M_f^{\text{rad}}}{2} = \frac{M_f}{2} \frac{\pi}{180}$$

e quindi

$$\xi \approx \frac{M_f}{100}.$$

# Analisi statica: errore a un gradino

Sia  $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  con  $e(t) = w(t) - y(t)$  errore in risposta a un gradino  $w(t) = W1(t)$ .

Utilizzando il teorema del valore finale (sistema in anello chiuso asintoticamente stabile)

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{W}{s} = W \lim_{s \rightarrow 0} S(s)$$

Sia  $L(s) = \frac{N_L(s)}{D_L(s)} = \frac{N_L(s)}{s^g D'_L(s)}$  con  $N_L(0) = \mu$  e  $D'_L(0) = 1$  abbiamo

$$\lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{D_L(s)}{N_L(s) + D_L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g D'_L(s)}{N_L(s) + s^g D'_L(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{\mu + s^g}$$

Si ha quindi

$$e_\infty = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^g}{\mu + s^g} = \begin{cases} \frac{W}{1+\mu} & g = 0 \\ 0 & g > 0 \end{cases}$$

## Analisi statica: errore a ingressi $\frac{W}{s^k}$

Sia  $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  con  $e(t) = w(t) - y(t)$  errore in risposta a un ingresso con trasformata  $W(s) = \frac{W}{s^k}$ .

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} sS(s) \frac{W}{s^k} = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-k+1}}{\mu + s^g} = \begin{cases} \infty & g < k-1 \\ \frac{W}{\mu} & g = k-1 \\ 0 & g > k-1 \end{cases}$$

Quindi

- se  $g < k-1$  l'errore diverge,
- se  $g = k-1$  l'errore a regime è finito e diminuisce all'aumentare di  $\mu$
- se  $g > k-1$  l'errore a regime è nullo.

**Nota:** il sistema in anello chiuso deve essere asintoticamente stabile.



## Analisi statica: errore a ingressi $\frac{W}{s^k}$

Sia  $e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t)$  con  $e(t) = w(t) - y(t)$  errore in risposta a un ingresso con trasformata  $W(s) = \frac{W}{s^k}$ .

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s S(s) \frac{W}{s^k} = W \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g-k+1}}{\mu + s^g} = \begin{cases} \infty & g < k - 1 \\ \frac{W}{\mu} & g = k - 1 \\ 0 & g > k - 1 \end{cases}$$

Quindi

- se  $g < k - 1$  l'errore diverge,
- se  $g = k - 1$  l'errore a regime è finito e diminuisce all'aumentare di  $\mu$
- se  $g > k - 1$  l'errore a regime è nullo.

**Nota:** affinché l'errore a regime a  $W(s) = \frac{W}{s^k}$  sia nullo occorre che  $L(s)$  abbia un numero di poli almeno pari a  $k$  (**principio del modello interno**).

# Principio del modello interno

---

Il risultato precedente può essere generalizzato come segue.

## Principio del modello interno

Affinché un segnale di riferimento (risp. un disturbo di misura) con una componente spettrale alla frequenza  $\omega_0$  sia inseguito (risp. neutralizzato) a regime perfettamente in uscita è necessario e sufficiente che

1. il sistema chiuso in retroazione sia asintoticamente stabile,
2. il guadagno d'anello  $L(s)$  abbia una coppia di poli c.c. sull'asse immaginario con pulsazione naturale pari a  $\omega_0$ .