Controlli Automatici T

Parte 3: Trasformata di Laplace e Funzione di Trasferimento

Prof. Giuseppe Notarstefano

Department of Electrical, Electronic, and Information Engineering
Alma Mater Studiorum Università di Bologna
giuseppe.notarstefano@unibo.it

Richiami sui numeri complessi

Forma cartesiana

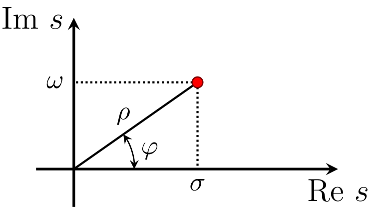
$s = \sigma + j\omega$

(σ parte reale, ω parte immaginaria)

Forma polare

$s = \rho e^{j\varphi}$

(ρ modulo, φ argomento)



$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \qquad \varphi = \text{atan}\frac{\omega}{\sigma} \ (-\pi \leq \varphi \leq \pi \text{ biunivoca})$$

$$\sigma = \rho \cos\varphi \qquad \omega = \rho \sin\varphi$$

Trasformata di Laplace: definizione

Data una funzione complessa f di variabile reale t, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$
(NOTA: per noi tipicamente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Sia $s = \sigma + j\omega$ una variabile complessa (σ parte reale, ω parte immagin.)

$$F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$ Trasformata di Laplace di f(t)

(se esiste per qualche s, ovvero se l'integrale converge)

Notazione
Trasformazione di Laplace $\mathcal{L}$ $\qquad f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$

$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$

Trasformata di Laplace: osservazioni

Ascissa di convergenza

Sia $\bar{\sigma} > -\infty$ estremo inferiore di $s = \sigma + j\omega$ per cui l'integrale converge. Allora trasformata esiste nel semipiano Re$(s)> \bar{\sigma}$.

$\bar{\sigma}$ ascissa di convergenza

Definizione estesa anche a Re$(s)\leq \bar{\sigma}$.

NOTA: solo i valori di $f(t)$ per $t \geq 0$ determinano la trasformata

NOTA: $\int_{0^-}^{+\infty}$ impulsi in 0 considerati nell'integrazione

Trasformata di Laplace: osservazioni

Trasformate razionali

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad \text{N(s), D(s) polinomi primi tra loro}$$

Se f reale allora $N(s), D(s)$ a coefficienti reali.
Zeri radici di $N(s) = 0$
Poli radici di $D(s) = 0$

Trasformata di Laplace: antitrasformazione

Formula di antitrasformazione

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

con $\sigma > \bar{\sigma}$.

Notazione

Antitrasformazione di Laplace $\mathcal{L}^{-1}$ $\qquad F(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t)$

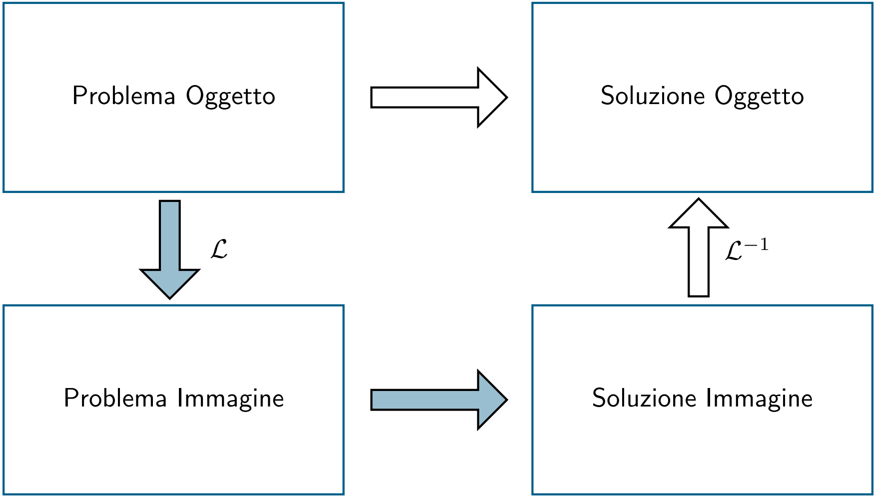
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$

Nota: $f(t)$ fornita solo per $t \geq 0$. Si assume $f(t) = 0$ per $t < 0$.

Nota: Considerando solo $f(t)$ t.c. $f(t) = 0$ per $t < 0$ allora corrispondenza biunivoca tra $f(t)$ e $F(s)$ (stesso contenuto informativo).

Nota: definizione poco usata per l'antitrasformazione. Vedremo un metodo per le trasformate razionali.

Perché la Trasformata di Laplace?



Trasformata di Laplace: proprietà

Linearità

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Traslazione temporale

$$\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-\tau s} F(s) \qquad \forall \tau > 0$$

Traslazione nel dominio della variabile complessa

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t} f(t)] = F(s-\alpha) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

Derivazione (nel tempo)

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt} f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Iterando

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} f(t)|_{t=0}$$

Trasformata di Laplace: proprietà

Integrazione (nel tempo) (f integrabile tra 0 e $+\infty$)

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

Convoluzione (nel tempo) Assumendo funzioni nulle per $t < 0$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right] = F_1(s)F_2(s)$$

Teoremi del valore iniziale e finale

Teorema del valore iniziale Se $f(t)$ reale con trasformata razionale $F(s)$ con grado denominatore maggiore grado numeratore, allora

$$f(0) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

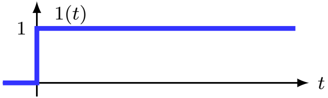
Teorema del valore finale Se $f(t)$ reale con trasformata razionale $F(s)$ con grado denominatore maggiore grado numeratore e poli nulli o a parte reale negativa, allora

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

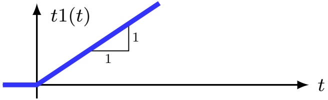
Trasformata di segnali elementari

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

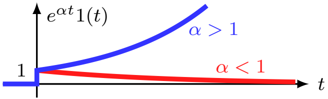
$$\mathcal{L}[1(t)] = \frac{1}{s}$$



$$\mathcal{L}[t1(t)] = \frac{1}{s^2}$$

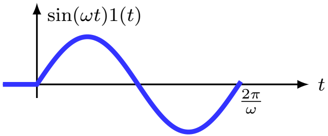


$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}1(t)] = \frac{1}{s-\alpha}$$

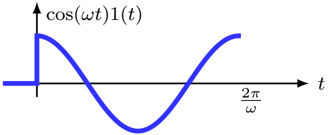


Trasformata di segnali elementari

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)\,1(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$



$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)\,1(t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$



$$\mathcal{L}[\sin(\omega t \pm \varphi)] = \frac{\omega\cos\varphi \pm s\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t \pm \varphi)] = \frac{s\cos\varphi \mp \omega\sin\varphi}{s^2+\omega^2}$$

Nota: vedere testo per altre trasformate.

Introduzione alla funzione di trasferimento

Sistema lineare tempo invariante (LTI) $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^p$.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \qquad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{aligned}$$

Siano $X(s) := \mathcal{L}[x(t)]$, $U(s) := \mathcal{L}[u(t)]$ e $Y(s) := \mathcal{L}[y(t)]$. Trasformiamo entrambi i membri. Ricordando che $\mathcal{L}[\frac{d}{dt}x(t)] = sX(s) - x(0)$,

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (sI - A)X(s) &= x_0 + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1}x_0 + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}x_0 + \Big(C(sI - A)^{-1}B + D\Big)U(s). \end{aligned}$$

Introduzione alla funzione di trasferimento

Trasformate dello stato e dell'uscita in funzione di x_0 e $U(s)$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \boxed{(sI-A)^{-1}x_0} + \boxed{(sI-A)^{-1}BU(s)} \\
Y(s) &= \underbrace{\boxed{C(sI-A)^{-1}x_0}}_{\text{evoluzione libera}} + \underbrace{\boxed{\Big(C(sI-A)^{-1}B+D\Big)U(s).}}_{\text{evoluzione forzata}}
\end{aligned}
$$

Si possono individuare le trasformate di evoluzione libera

$$
\begin{aligned}
X_\ell(s) &= (sI-A)^{-1}x_0 \\
Y_\ell(s) &= C(sI-A)^{-1}x_0.
\end{aligned}
$$

ed evoluzione forzata

$$
\begin{aligned}
X_f(s) &= (sI-A)^{-1}BU(s) \\
Y_f(s) &= \Big(C(sI-A)^{-1}B+D\Big)U(s).
\end{aligned}
$$

Funzione di trasferimento

Consideriamo la trasformata dell'evoluzione forzata dell'uscita

$$Y_f(s) = \Big(C(sI - A)^{-1}B + D\Big)U(s)$$

La matrice

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

è detta funzione di trasferimento. Se sistema SISO è una funzione scalare.

Funzione di trasferimento

Abbiamo quindi una rappresentazione ingresso-uscita (rappres. esterna)

$$Y_f(s) = G(s)U(s)$$

Se assumiamo che $x(0) = 0$ allora

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

Nota: La funzione di trasferimento è data dal rapporto tra la trasformata dell'uscita e dell'ingresso nel caso $x(0) = 0$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Richiami di calcolo matriciale

- notazione (dimensioni, triangolare, diagonale, triangolare/diagonale a blocchi, matrice nulla, matrice identità, trasposta)
- $\hat{A}_{ij}$ complemento algebrico dell'elemento a_{ij}: determinante della matrice ottenuta eliminando da A la riga i e la colonna j e moltiplicando per $(-1)^{i+j}$
- determinante di una matrice

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\hat{A}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{A}_{ij}$$

Nota: determinante di una matrice 2×2 dato da $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$.

- operazioni tra matrici (somma, prodotto, potenza, inversa)

Funzione di trasferimento

Funzione di traferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

Operativamente può essere calcolata come

$$G(s) = C\frac{\text{adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}B + D$$

Nel caso SISO funzione razionale fratta (rapporto di polinomi):

- denominatore di grado n e numeratore di grado $\leq n$ ($= n$ se $D \neq 0$);
- numeratore e denominatore possono avere radici comuni, quindi possono esserci cancellazioni (contenuto informativo minore della forma di stato);
- la differenza tra grado del numeratore e denominatore è detta grado relativo.

Funzione di trasferimento

Funzione di traferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\beta_\nu s^\nu + \beta_{\nu-1} s^{\nu-1} + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{s^\nu + \alpha_{\nu-1} s^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0}$$

- Le radici di $N(s)$ si dicono zeri
- Le radici di $D(s)$ si dicono poli

Importante: I poli sono radici di $\det(sI - A)$ quindi sono autovalori di A

Nota: Poli e zeri sono reali o complessi coniugati (poiché radici di polinomi a coefficienti reali).

Perché la trasformata di Laplace?

Problema Oggetto

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Soluzione Oggetto

$\mathcal{L}$

$\mathcal{L}^{-1}$

Problema Immagine

$$sX(s) - x^0 = AX(s) + BU(s)$$
$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Soluzione Immagine

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) + (sI - A)^{-1}x^0$$
$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + C(sI - A)^{-1}x^0$$

Funzione di trasferimento: rappresentazioni e parametri

Forme fattorizzate

$$G(s) = \frac{\rho \Pi_i (s + z_i) \Pi_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \Pi_i (s + p_i) \Pi_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

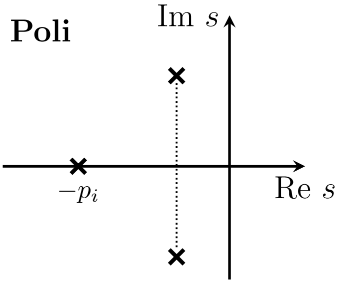
e

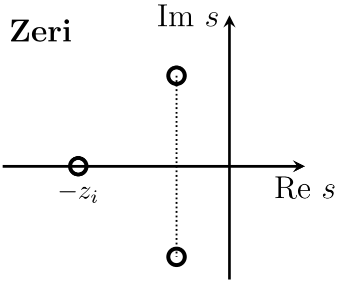
$$G(s) = \frac{\mu \Pi_i (1 + \tau_i s) \Pi_i (1 + \frac{2\zeta_i}{\alpha_{ni}} s + \frac{s^2}{\alpha_{ni}^2})}{s^g \Pi_i (1 + T_i s) \Pi_i (1 + \frac{2\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2})}$$

Notazione

- ρ costante di trasferimento, μ guadagno
- g tipo
- $-z_i$ zeri reali, $-p_i$ poli reali, τ_i e T_i costanti di tempo
- $\alpha_{ni} > 0$, $\omega_{ni} > 0$ pulsazioni naturali di zeri e poli complessi coniugati
- ζ_{ni}, ξ_{ni} ($|\zeta_{ni}| < 1$, $|\xi_{ni}| < 1$), smorzamenti di zeri e poli complessi coniugati.

Rappresentazione di poli e zeri nel piano complesso





Esempi di cancellazioni

Esempio 1

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2$$
$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

$$y = x_2$$

$$\begin{aligned} G(s) &= C(sI - A)^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \end{aligned}$$

$G(s) = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$

Esempi di cancellazioni

Esempio 2

$$\dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2 + u$$
$$\dot{x}_2 = 4x_2$$
$$y = x_1$$

Trasformando entrambi i membri

$$sX_1(s) - x_1(0) = -X_1(s) - 2X_2(s) + U(s)$$
$$sX_2(s) - x_2(0) = 4X_2(s)$$
$$Y(s) = X_1(s)$$

In alternativa calcolandola come $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ si ha $G(s) = \frac{s-4}{(s-4)(s+1)} = \frac{1}{s+1}$

Antitrasformazione di Laplace

Ricordiamo che la trasformata della risposta di un sistema Lineare Tempo Invariante (LTI) singolo ingresso singola uscita (SISO) è data da

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)U(s)$$

con $C(sI - A)^{-1} \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Si può fare vedere che gli elementi di $C(sI - A)^{-1}$ sono rapporti di polinomi.

Nel corso della trattazione considereremo ingressi tali che $U(s)$ sia un rapporto di polinomi (gradino, rampa, funzioni sinusoidali).

Quindi possiamo scrivere

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

con $N(s)$ e $D(s)$ opportuni polinomi.

Modi naturali come risposta all'impulso

Ricordiamo che per $x(0) = 0$ (risposta forzata)

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

Quindi applicando in ingresso una delta di Dirac $u(t) = \delta(t)$ (con trasformata $U(s) = 1$) si ha

$$Y(s) = G(s).$$

Quindi per la risposta all'impulso le radici di $D(s)$ sono i poli di $G(s)$.

Sviluppo di Heaviside o in fratti semplici (poli distinti)

Caso 1: poli reali o complessi coniugati distinti (molteplicità 1)

Possiamo scrivere $Y(s)$ come

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\Pi_{i=1}^{n}(s+p_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s+p_i}$$

con k_i detti residui. Consideriamo

$$(s+p_i)\frac{N(s)}{D(s)}\Big|_{s=-p_i} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{k_j(s+p_i)}{s+p_j}\Big|_{s=-p_i} + k_i.$$

Quindi ciascun residuo k_i può essere calcolato come

$$k_i = (s+p_i)\frac{N(s)}{D(s)}\Big|_{s=-p_i}$$

Nota: k_i reali se associati a poli reali, complessi coniugati se associati a una coppia di poli complessi coniugati.

Sviluppo di Heaviside o in fratti semplici (poli distinti)

Caso 1: poli reali o complessi coniugati distinti (molteplicità 1)

Riassumendo

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\Pi_{i=1}^{n}(s+p_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{s+p_i}$$

con

$$k_i = (s+p_i)\frac{N(s)}{D(s)}\Big|_{s=-p_i}$$

Quindi antitrasformando $Y(s)$ sviluppata in fratti semplici

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \sum_{i=1}^{n} k_i \mathcal{L}\left[\frac{1}{s+p_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} k_i e^{-p_i t} 1(t).$$

Forma reale per poli complessi coniugati (molteplicità 1)

Consideriamo la coppia di poli complessi coniugati

$$p_{i,1} = \sigma + j\omega \quad \text{e} \quad p_{i,2} = \sigma - j\omega$$

con residui associati (complessi coniugati)

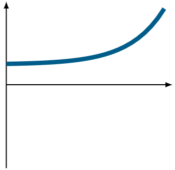
$$k_{i,1} = Me^{-j\varphi} \quad \text{e} \quad k_{i,2} = Me^{j\varphi}.$$

L'antitrasformata dei due termini associati è data da

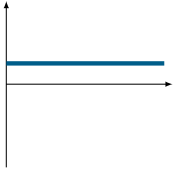
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k_{i,1}}{s+p_{i,1}} + \frac{k_{i,2}}{s+p_{i,2}}\right] &= Me^{-j\varphi}e^{-p_{i,1}t}1(t) + Me^{j\varphi}e^{-p_{i,2}t}1(t) \\
&= Me^{-j\varphi}e^{-(\sigma+j\omega)t}1(t) + Me^{j\varphi}e^{-(\sigma-j\omega)t}1(t) \\
&= Me^{-\sigma t}(e^{-j(\omega t+\varphi)} + e^{j(\omega t+\varphi)})1(t) \\
&= 2Me^{-\sigma t}\frac{(e^{-j(\omega t+\varphi)} + e^{j(\omega t+\varphi)})}{2}1(t) \\
&= 2Me^{-\sigma t}\cos(\omega t+\varphi)1(t).
\end{aligned}$$

Modi naturali: poli reali distinti

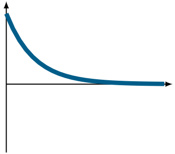
- $e^{-p_i t}$, $-p_i > 0$



- $e^{-p_i t}$, $-p_i = 0$

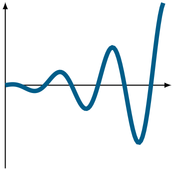


- $e^{-p_i t}$, $-p_i < 0$

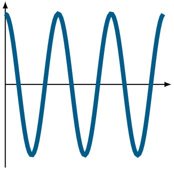


Modi naturali: poli complessi coniugati distinti

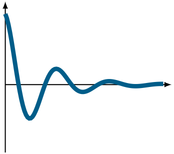
- $e^{-\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \varphi_i)$, $-\sigma_i > 0$



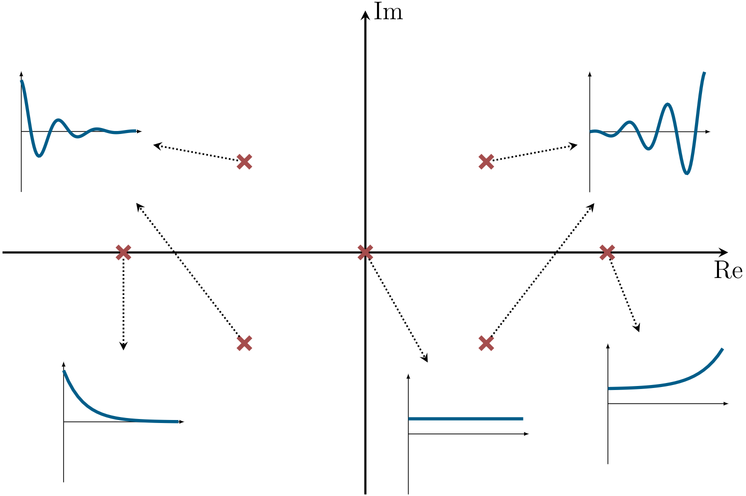
- $e^{-\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \varphi_i)$, $-\sigma_i = 0$



- $e^{-\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \varphi_i)$, $-\sigma_i < 0$



Modi naturali di un sistema LTI: poli distinti



Sviluppo di Heaviside o in fratti semplici (poli multipli)

Caso 2: poli reali o complessi coniugati multipli (molteplicità > 1)

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{\Pi_{i=1}^{q}(s+p_i)^{n_i}} = \sum_{i=1}^{q}\sum_{h=1}^{n_i}\frac{k_{i,h}}{(s+p_i)^h}$$

con $k_{i,h}$, $h = 1, \ldots, n_i$, residui del polo $-p_i$. Consideriamo

$$\begin{aligned}
(s+p_i)^{n_i}\frac{N(s)}{D(s)} &= \\
&= (s+p_i)^{n_i}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{q}\sum_{h=1}^{n_j}\frac{k_{j,h}}{(s+p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i}(s+p_i)^{n_i-h}k_{i,h} \\
&= (s+p_i)^{n_i}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{q}\sum_{h=1}^{n_j}\frac{k_{j,h}}{(s+p_j)^h} + \sum_{h=1}^{n_i-1}(s+p_i)^{n_i-h}k_{i,h} + k_{i,n_i}
\end{aligned}$$

Sviluppo di Heaviside o in fratti semplici (poli multipli)

Caso 2: poli reali o complessi coniugati multipli (molteplicità > 1)

Quindi il residuo k_{i,n_i} è dato da

$$k_{i,n_i} = (s+p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)}\bigg|_{s=-p_i}$$

Derivando $(s+p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)}$ si calcolano gli altri residui come

$$k_{i,h} = \frac{1}{(n_i-h)!} \frac{d^{n_i-h}}{ds^{n_i-h}} \left[(s+p_i)^{n_i} \frac{N(s)}{D(s)} \right] \bigg|_{s=-p_i}.$$

Antitrasformando $Y(s)$ sviluppata in fratti semplici

$$\begin{aligned} y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] &= \sum_{i=1}^{q} \sum_{h=1}^{n_i} k_{i,h} \mathcal{L}\left[\frac{1}{(s+p_i)^h} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{q} \sum_{h=1}^{n_i} k_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-p_i t} 1(t) \end{aligned}$$

Forma reale per poli complessi coniugati (molteplicità > 1)

Si può dimostrare che per una coppia di poli complessi coniugati,

$$\sigma_i + j\omega_i \quad \text{e} \quad \sigma_i - j\omega_i,$$

con molteplicità n_i, il contributo elementare associato è dato da

$$\sum_{h=1}^{n_i} 2M_{i,h} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_{i,h}) 1(t).$$

Modi naturali (poli multipli)

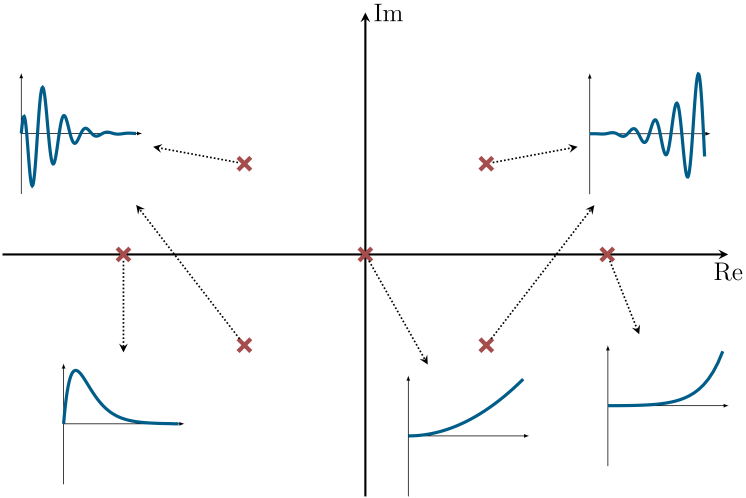
Polo reale (multiplo) $-p_i$

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!}e^{-p_i t}1(t)$$

Coppia di poli complessi coniugati (multipli) $-(\sigma_i + j\omega_i)$ e $-(\sigma_i - j\omega_i)$

$$\frac{t^{h-1}}{(h-1)!}e^{-\sigma_i t}\cos(\omega_i t + \varphi_{i,h})1(t)$$

Modi naturali di un sistema LTI: poli multipli



Modi naturali come risposta all'impulso

Ricordiamo che per $x(0) = 0$ (risposta forzata)

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

Quindi applicando in ingresso una delta di Dirac $u(t) = \delta(t)$ (con trasformata $U(s) = 1$) si ha

$$Y(s) = G(s).$$

Quindi la risposta ad un impulso è una combinazione lineare dei modi naturali del sistema lineare tempo invariante (SISO) descritto da $G(s)$.

Risposta ad un ingresso generico

Ricordiamo che

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}x(0) + G(s)U(s)$$

in cui $C(sI - A)^{-1}x(0)$, $G(s)$ e $U(s)$ sono rapporti di polinomi.

Quindi

$$\begin{aligned} y(t) &= y_\ell(t) + y_f(t) \\ &= y_\ell(t) + y_{f,G}(t) + y_{f,U}(t) \end{aligned}$$

in cui

- $y_\ell(t)$ e $y_{f,G}(t)$ sono combinazioni lineari di modi naturali del sistema con matrici A, B, C e D,
- $y_{f,U}(t)$ è combinazione lineare di “modi” presenti nell’ingresso $u(t)$ (dovuti alle radici del denominatore di $U(s)$).

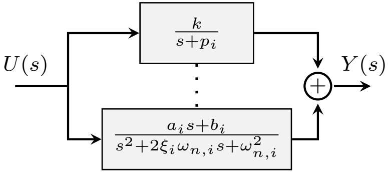
Risposte di sistemi elementari

Ricordiamo che

$$G(s) = \frac{\rho \Pi_i (s + z_i) \Pi_i (s^2 + 2\zeta_i \alpha_{ni} s + \alpha_{ni}^2)}{s^g \Pi_i (s + p_i) \Pi_i (s^2 + 2\xi_i \omega_{ni} s + \omega_{ni}^2)}$$

Consideriamo il caso di poli distinti. Da quanto visto fino ad ora risulta che per $x(0) = 0$ (risposta forzata)

$$Y(s) = G(s)U(s) = \sum_i \frac{k_i}{s + p_i} + \sum_i \frac{a_i s + b_i}{s^2 + 2\xi_i \omega_{n,i} s + \omega_{n,i}^2}$$



Quindi è importante studiare le risposte di sistemi elementari.

Stabilità esterna o BIBO

Un sistema si dice BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) stabile se la sua uscita forzata è limitata per ogni ingresso limitato.

Consideriamo l'uscita forzata ($x(0) = 0$)

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

Da quanto visto fino ad ora con lo sviluppo di Heaviside (fratti semplici) si può dedurre che un sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ è BIBO stabile se e solo se tutti i poli di $G(s)$ sono a parte reale strettamente minore di zero.