



# Crittografia a Chiave Pubblica

1

## Problemi difficili

**Assunzione:** per certi problemi della Teoria dei numeri non si troveranno mai algoritmi con tempo polinomiale

**P1: logaritmo discreto (gruppo ciclico o  $\text{GF}(p^n)$ )**

**Scambio DH, Cifrario ElGamal, Firma DSS**

*Safe prime:  $p = 2q+1$  con  $q$  primo di Sophie Germain*

*$q$  si ottiene dalla progressione  $6k-1$*

**P2: radice e-esima** - Dato un  $n$  prodotto di due primi, un  $e$  coprimo con  $\Phi(n)$  ed un elemento  $c \in \mathbb{Z}_n$  trovare un intero  $m$  tale che

$$c \equiv m^e \pmod{n} \qquad m \equiv \sqrt[e]{c}$$

**Cifrario RSA**

Il problema è facile se si conoscono i fattori di  $n$  o se  $n$  è primo

2

## P3: fattorizzazione

• **P3: problema della fattorizzazione** - Dato un intero positivo  $n$ , trovare i numeri primi  $p_i$  ed i coefficienti interi  $e_i \geq 1$  tali che  

$$n = p_1^{e_1} \times \dots \times p_k^{e_k}$$
 (Crittografia asimmetrica:  $n = p_1 \times p_2$ )

### Cifrario RSA

- ❖ Gauss e Fermat: **20** cifre decimali
- ❖ 1970: **41** cifre decimali con un main frame
- ❖ 1977, Rivest: **125** cifre decimali è un calcolo impossibile
- ❖ 1994: **129** cifre decimali in 8 mesi con 1.600 workstations
- ❖ 2000 (stima): **150** cifre decimali in un anno con una macchina parallela da 10 milioni di dollari
- ❖ 2004: TWINCLE, setaccio "optoelettronico" (2-3 ordini di grandezza)
- ❖ 2004 (prev.): **300** cifre decimali (1024 bit)
- ❖ 2014 (prev.): **450** cifre decimali (1500 bit)
- ❖ 2025 **617** cifre decimali (2048 bit fino al 2030)
- ❖ 2030.... 927 cifre decimali (3072 bit)

3

## Teoria dei numeri (1)

Utilizzata per: DH

Firma digitale

Cifratura a chiave pubblica

- **b divisore di a:**  
 $b \mid a$  se  $a = m \times b$  con  $m$  intero
- **p numero primo:**  
 se i suoi divisori sono solo 1 e  $p$
- **fattorizzazione di n:**  
 $n = p_1^{e_1} \times p_2^{e_2} \dots \times p_k^{e_k}$  con  $p_1 \dots p_k$  primi,  $e_i$  interi  $\geq 0$
- **massimo comun divisore di a,b:**  
 $\text{MCD}(a,b) = k$  con  $k$  più grande divisore di  $a$  e di  $b$
- **a, b coprimi (o relativamente primi): non hanno fattori primi in comune**  
 $\text{MCD}(a,b) = 1$
- **a mod n:**  
 resto della divisione di  $a \geq 0$  per  $n > 0$
- **a congruo a b modulo n:**  
 $a \equiv b \pmod{n}$  se  $a \bmod n = b \bmod n$

4

## Teoria dei numeri (2)

- Dato un intero positivo  $n$  si indica con  $Z_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$  l'insieme di tutti gli interi non negativi  $< n$  ( $Z_n$  denota un anello in cui sono definite operazioni di addizione e moltiplicazione mod  $n$ )
- $Z_n^* = \{a \in Z_n \mid \text{MCD}(a, n) = 1\}$  insieme dei coprimi con  $n$
- $Z_p^* = \{1, \dots, p-1\}$  insieme di tutti gli elementi non nulli di  $Z_p$  quando  $p$  è primo ( $\text{gcd}(0, p) = p$ )
- funzione totiente di Eulero:**  $n^\circ$  di interi  $< n$  e coprimi con  $n$ 

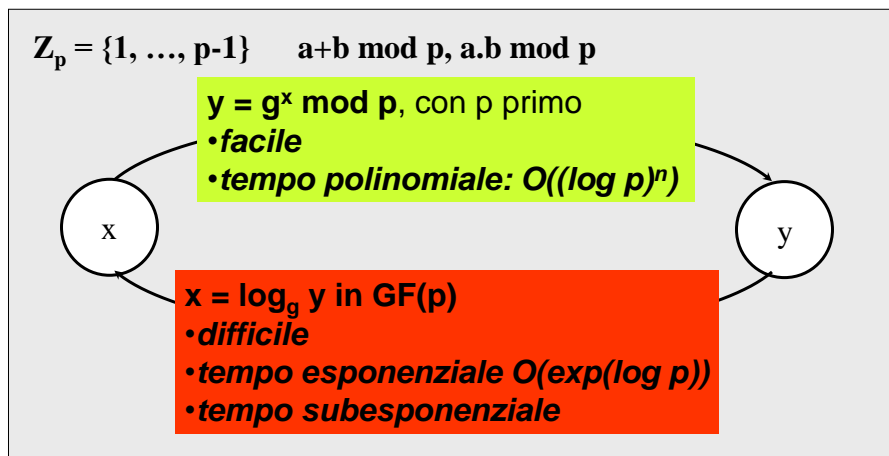
$$\Phi(n) = n \times (1 - 1/p_1) \times \dots \times (1 - 1/p_k)$$
 dove i  $p_k$  sono i primi che compongono la fattorizzazione di  $n$ 
  - $\Phi(n) = n-1$  se  $n$  è primo
  - $\Phi(n) = (p-1)(q-1)$  se  $n$  è il prodotto di due primi  $p$  e  $q$ $\Phi(6) = 2$  (1 e 5)

5

## Crittografia asimmetrica



Scambio DH (nel campo finito  $GF(p)$ )



6

# Esponenziazione modulare

$$a = b^e \bmod m$$

$$a = (\underbrace{b \times b \times \dots \times b}_e) \bmod m$$

*e volte*

$$a = [(b \bmod m) \times (b \bmod m) \times \dots \times (b \bmod m)] \bmod m$$

*e volte*

$$\text{Hp: } 1 \leq b \leq m-1, 0 \leq e < m$$

$$b, e \in \mathbb{Z}_m$$

Caso peggiore  $e=m-1$   
 $m$  moltiplicazioni  $\rightarrow 2^{\log m}$  moltiplicazioni  
 $O(\exp(\log m))$  !!  
 Algoritmi più efficienti

16

# Exponentiation

Finite cyclic group  $G$  (for example  $G = \mathbb{Z}_p^*$ )

Goal: given  $g$  in  $G$  and  $x$  compute  $g^x$

**Example:** suppose  $x = 53 = (110101)_2 = (1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0) = 32 + 16 + 4 + 1$

Then:  $g^{53} = g^{32+16+4+1} = g^{32} \cdot g^{16} \cdot g^4 \cdot g^1$

$g \rightarrow g^2 \rightarrow g^4 \rightarrow g^8 \rightarrow g^{16} \rightarrow g^{32} \rightarrow g^{53}$

**9 moltiplicazioni!!!!**

18

## A0: un primo algoritmo di esponenziazione

**$b^e \bmod m$**

$b, e \in \mathbb{Z}_m$

$m$  primo o composto

Sia  $t = \lceil \log_2 m \rceil$

La rappresentazione in base 2 di  $e$  è:

$$e = e_{t-1} 2^{t-1} + e_{t-2} 2^{t-2} + \dots + e_1 2^1 + e_0 2^0$$

Di conseguenza si ha:

$$b^e = b^{e_{t-1} 2^{t-1}} \times b^{e_{t-2} 2^{t-2}} \times \dots \times b^{e_1 2^1} \times b^{e_0 2^0}$$

1: si calcola  $b, b^2, b^4, b^8$  ecc.

2: si moltiplicano tra loro i  $b^i$  per cui  $e_i = 1$

3: si divide per  $m$ , trattenendo il resto

Caso peggiore: circa  $2 \cdot t$  moltiplicazioni (..ma su numeri sempre più grandi!)

19

## The repeated squaring alg.

**Input:**  $g$  in  $G$  and  $x > 0$  ; **Output:**  $g^x$

write  $x = (x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0)_2$

```

y <- g , z <- 1
for i = 0 to n do:
  if (x[i] == 1): z = z·y
  y <- y2
output z
    
```

example:  $g^{53}$

<u>y</u>	<u>z</u>
$g^2$	$g$
$g^4$	$g$
$g^8$	$g^5$
$g^{16}$	$g^5$
$g^{32}$	$g^{21}$
$g^{64}$	$g^{53}$

20

## Repeated square and multiply: A1

Riducendo in modulo il risultato di ogni moltiplicazione si riesce ad operare sempre e solo su numeri inferiori a  $m$

Non separando il calcolo dei  $b^i$  da quello di  $\prod(b^i)^{e_i}$  (calcolo elevamenti a quadrato dalle moltiplicazioni) si ottengono tempi di esecuzione più brevi

INPUT:  $b \in \mathbb{Z}_m$ ,  $0 \leq e < m$ ,  $e = (e_{t-1} \dots e_0)_2$

OUTPUT:  $b^e \bmod m$

1. Set  $y \leftarrow 1$ . If  $e = 0$  then return  $(y)$
2. Set  $A \leftarrow b$
3. If  $e_0 = 1$  then set  $y \leftarrow b$
4. For  $i$  from 1 to  $t-1$  do the following:
  - 4.1 Set  $A \leftarrow A^2 \bmod m$
  - 4.2 If  $e_i = 1$  then set  $y \leftarrow A y \bmod m$
5. Return  $(y)$

$m = 11$ ,  $b = 7$ ,  $e = 5 = (101)_2$

1.  $y = 1$
2.  $A = 7$
3.  $y = 7$
4.  $i = 1$ 
  - 4.1  $A = 7 \times 7 \bmod 11 = 5$
- $i = 2$ 
  - 4.1  $A = 5 \times 5 \bmod 11 = 3$
  - 4.2  $y = 3 \times 7 \bmod 11 = 10$
5.  $7^5 \bmod 11 = 10$

21

## Repeated square and multiply: A2

INPUT:  $b \in \mathbb{Z}_m$ ,  $0 \leq e < m$ ,  $e = (e_{t-1} \dots e_0)_2$

OUTPUT:  $b^e \bmod m$

1.  $y \leftarrow 1$
2. For  $i$  from  $t-1$  down to 1 do the following
  - 2.1  $y \leftarrow y^2 \bmod m$
  - 2.2 If  $e_i = 1$  then  $y \leftarrow y b \bmod m$
3. Return  $(y)$

1.  $y = 1$
2.  $i = 2$ 
  - 2.1  $y = 1 \times 1 \bmod 11 = 1$
  - 2.2  $y = 1 \times 7 \bmod 11 = 7$
- $i = 1$ 
  - 2.1  $y = 7 \times 7 \bmod 11 = 5$
- $i = 0$ 
  - 2.1  $y = 5 \times 5 \bmod 11 = 3$
  - 2.2  $y = 3 \times 7 \bmod 11 = 10$
5.  $7^5 \bmod 11 = 10$

Proprietà notevole di A1 e di A2:

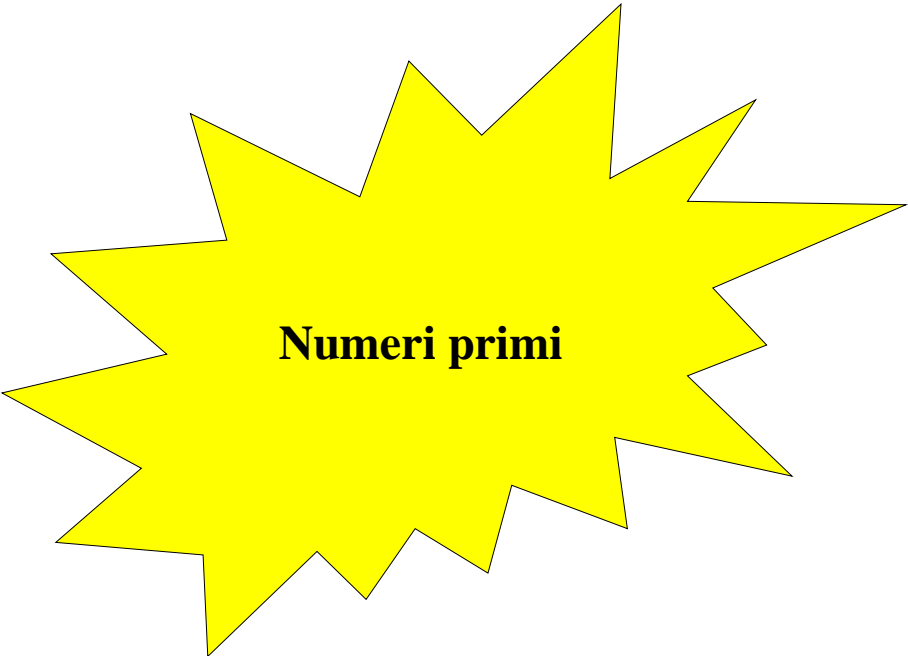
Sia  $t$  il numero di bit della rappresentazione binaria dell'esponente  $e$

Sia  $n$  il numero di bit dell'esponente con valore 1

TEMPO DI ESECUZIONE  $\rightarrow t+n$  moltiplicazioni

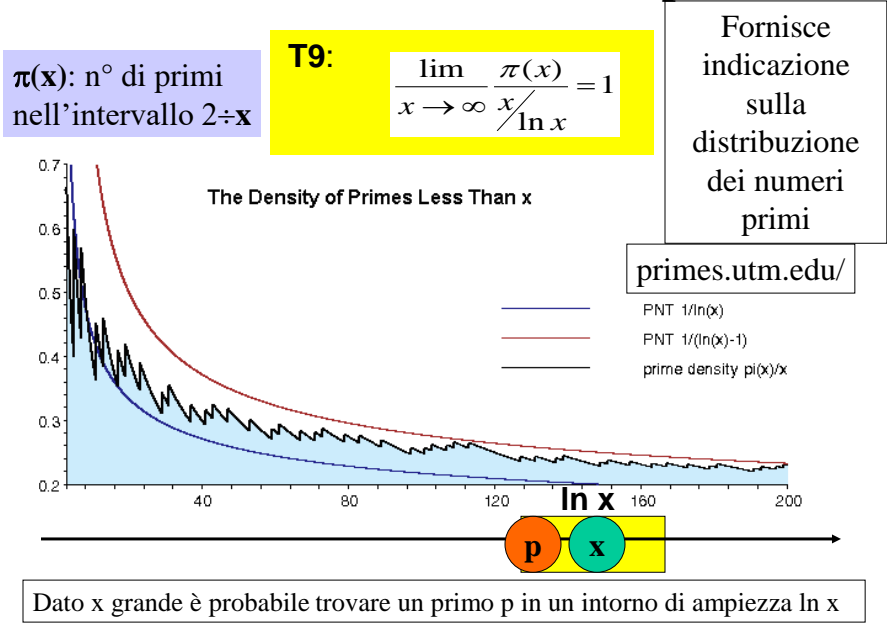
TEMPO MEDIO  $\rightarrow \frac{3}{2} t$  moltiplicazioni

22



25

# Distribuzione dei numeri primi



26

# Ricerca di numeri primi grandi

## Ricerca di un numero primo

1.  $x$  dispari, generato a caso nel desiderato intervallo
2. If  $(x \text{ primo?}) = false$  \_\_\_\_\_  
then  $x = x + 2$  and repeat 2.
3. Return  $x$

Test di primalità

27

## Test di primalità

1. Test **deterministici**: se  $n$  non lo supera è **composto**,  
se lo supera è **primo**
2. Test **probabilistici**: se  $n$  fallisce il test è **composto**;  
se lo supera è **probabilmente primo**

I test deterministici sono computazionalmente più onerosi dei test probabilistici.

I test probabilistici (Miller Rabin) sono polinomiali, ma devono essere poi ripetuti più e più volte per far tendere a 1 la probabilità di avere realmente individuato un primo.

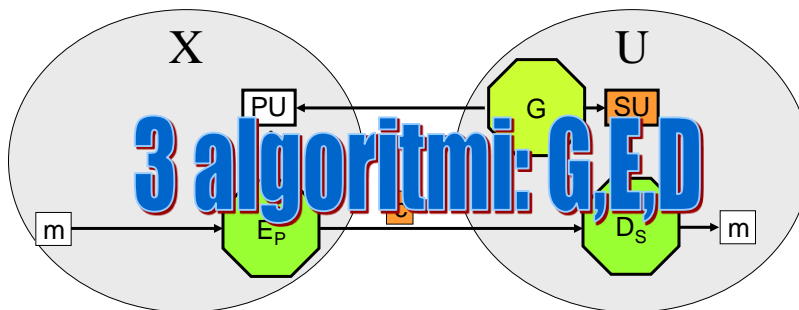
28



## Cifrari asimmetrici

30

### Aspetti caratteristici

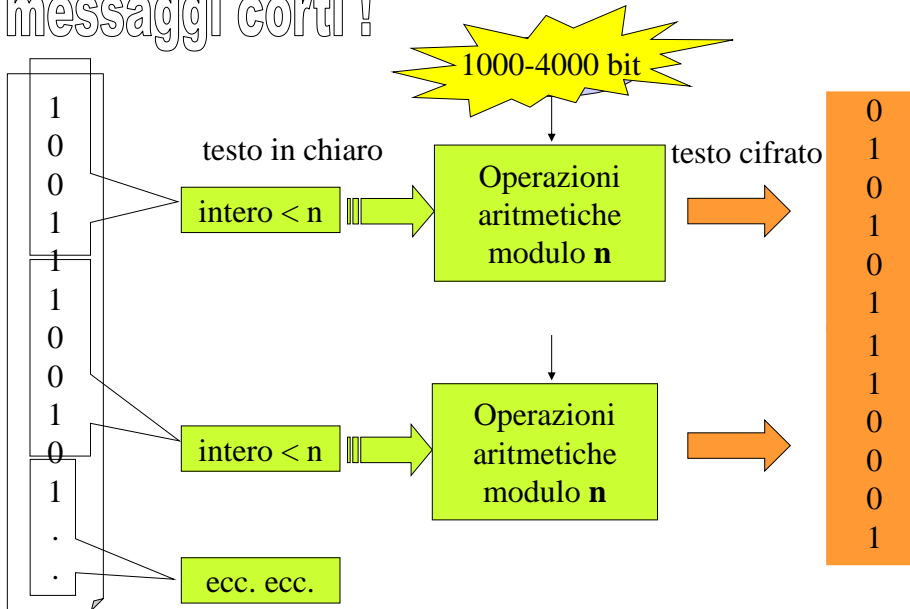


1. Frammentazione del testo in chiaro
2. Aleatorietà del testo cifrato
3. Variabilità della trasformazione
4. Problema difficile su cui si basa la sicurezza
5. Modalità d'impiego

31

# 1 - Frammentazione del testo in chiaro

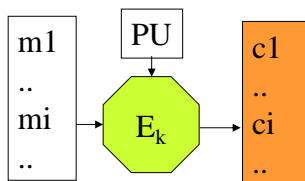
messaggi corti !



32

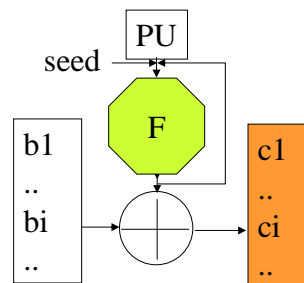
## Cifratura a blocchi ed a flusso

### Cifratura a blocchi



$$ci = E_{PU}(mi)$$

### Cifratura a flusso



$$ci = bi \oplus k(i)$$

$$k(i+1) = F(k(i), PU)$$

$$k(0) = seed \& PU$$

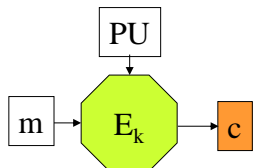
I bit di chiave sono ottenuti con moltiplicazioni ed esponenziazioni => molto lenti

33

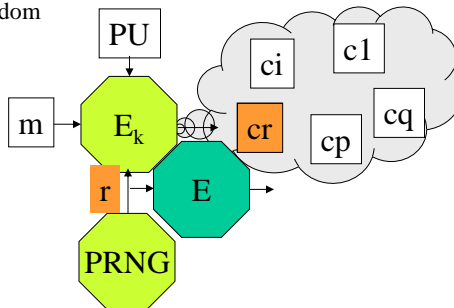
# Cifrari deterministici e Cifrari probabilistici

a parità di chiave il testo cifrato è scelto di volta in volta tra molti possibili in base a un numero random

fissati m e chiave il testo cifrato è unico



$$c = E_{PU}(m)$$



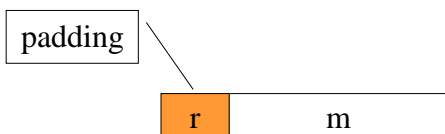
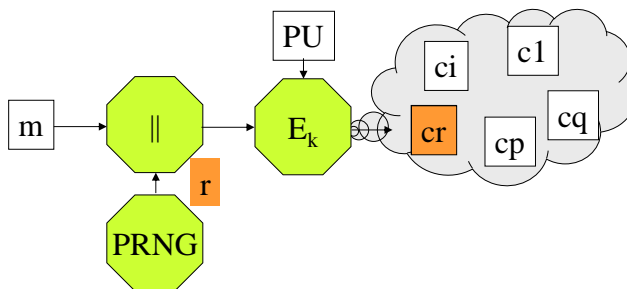
$$c = E_{PU}(m, r) || E(r)$$

I Cifrari deterministici sono più efficienti, ma ..

- 1: blocchi in chiaro identici producono blocchi cifrati identici
- 2: sono vulnerabili ad attacchi con testo in chiaro noto (es. si/no in voto elettronico)

34

## Randomizzazione di un Cifrario deterministico



$$\text{Ridondanza: } c = E(r || m)$$

Oppure CBC e IV

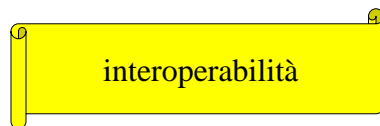
35

## 4 – I problemi difficili dei cifrari asimmetrici

Cifrario	Proprietà	Tipo	Sicurezza
RSA	deterministico	a blocchi	P2, P3
ElGamal	probabilistico	a blocchi	P1
Rabin	deterministico	a blocchi	P3, P5
Golwasser-Micali	probabilistico	a flusso	P6
Blum-Goldwasser	probabilistico	a flusso	P3, P5
Chor-Rivest	deterministico	a blocchi	P4

36

## 5 - Public Key Cryptography Standards



- PKCS # 1 - The RSA encryption standard
- PKCS # 3 - The Diffie-Hellman key-agreement standard
- PKCS # 5 - The password-based encryption standard (PBE)
- PKCS # 6 - The extended-certificate syntax standard (X509)
- PKCS # 7 - The cryptographic message syntax standard
- PKCS # 8 - The private-key information syntax standard
- PKCS # 9 - This defines selected attribute types for use in other PKCS standards.
- PKCS # 10 - The certification request syntax standard
- PKCS # 11 - The cryptographic token interface standard
- PKCS # 12 - The personal information exchange syntax standard.
- PKCS # 13 - The elliptic curve cryptography standard
- PKCS # 14 - This covers pseudo random number generation (PRNG).
- PKCS # 15 - The cryptographic token information format standard.

37



38

## The RSA Algorithm (1978)

Encryption

**Public key:  $\{n, e\}$**   
 $n = p \times q$  con  $p$  e  $q$  primi  
 $e$  coprimo con  $\Phi(n) = (p-1)(q-1)$

- Plaintext:  $m < n$   
 con  $m$  con dimensione di  $k$  bit dove  $2^k < n \leq 2^{k+1}$
- Ciphertext:  $c = m^e \bmod n$

Decryption

**Private key:  $\{n, d\}$**   
 $d = e^{-1} \bmod \Phi(n)$

- Ciphertext:  $c < n$
- Plaintext:  $m = c^d \bmod n$

39

# The RSA Algorithm (1978)

**Public key: {n,e}**

**n = p × q** con p e q primi  
e coprimo con  $\Phi(n) = (p-1)(q-1)$

**Private key: {n,d}**

**d = e<sup>-1</sup> mod  $\Phi(n)$**   
**d coprimo con  $\Phi(n)$**

Decryption

• Ciphertext:	$c < n$
• Plaintext:	$m = c^d \bmod n$
anzichè $m \equiv \sqrt[e]{c}$	

dato che **d = e<sup>-1</sup> mod  $\Phi(n)$**  inverso moltiplicativo  
si dimostra formalmente che  $c^d \bmod n \equiv m^{ed} \bmod n$   
 $\equiv m$  se  $m < n$  ed e coprimo con  $\Phi(n)$  (ad ogni testo  
cifrato deve corrispondere un solo testo in chiaro)

40

## L'algoritmo G: RSA Key Pair Generation

• Select $p, q$	$p$ and $q$ both prime
• Calculate $n$	$n = p \times q$
• Calculate $\Phi(n)$	$\Phi(n) = (p-1)(q-1)$
• Select integer $e$	$\gcd(\Phi(n), e) = 1; 1 < e < \Phi(n)$
• Calculate $d$	$d = e^{-1} \bmod \Phi(n)$
• Public Key	$k[\text{pub}] = \{e, n\}$
• Private key	$k[\text{priv}] = \{d, n\}$

Tutti gli algoritmi in gioco sono polinomiali

41

## Generazione delle chiavi $e$ e $d$

- $n=pxq$  NOTO=> per impedire di trovare  $p$  e  $q$  con metodi esaustivi  $p$  e  $q$  scelti in un insieme di sufficientemente esteso ( $p$  e  $q$  numeri molto estesi)

Anche il metodo per trovare numeri primi di grandi dimensioni deve essere ragionevolmente efficiente



Non esistono ora tecniche utili per fornire numeri primi arbitrariamente estesi. La procedura normalmente scelta è: si sceglie casualmente un numero dispari dell'ordine di grandezza desiderato e si verifica se tale numero è primo tramite test probabilistici (test ad es. Miller Rabin)

42

## Generazione della chiave

- Si sceglie casualmente un intero dispari (con PRNG)
- Si esegue un test di primalità, se non è primo si ripete di nuovo dall'inizio

Quanti numeri rifiutati? Circa  $\ln(n)$  ma visto che i numeri pari vanno scartati solo circa  $\ln(n)/2$

Se si cercasse un primo dell'ordine di  $N=2^{200}$  ci vorrebbero circa 70 tentativi

43

## Generazione della chiave

- Scelti  $p$  e  $q$  si scelgono  $o$  e  $d$ . Supponiamo  $e$ : con il metodo di euclide esteso si sceglie  $e$  coprimo con  $\Phi(n)$  e si calcola l'inverso di uno degli interi modulo l'altro. Si generano numeri casuali e si confrontano con  $\Phi(n)$ , fino a trovare un coprimo (pochi test). In caso contrario si itera il procedimento. **Di solito bastano poche prove (si dimostra che la probabilità che due numeri casuali siano primi relativi è circa 0,6)**

44

## Aspetti Computazionali

- Generazione della chiave
- Cifratura/decifrazione

Per rendere efficiente:

- la cifratura ( $x^e \bmod n$ ) si adottano gli algoritmi “repeated square and multiply” con scelta opportuna di  $e$ ;  $x < n$
- la decifrazione si ricorre al teorema cinese dei resti (CTR) (impiego efficiente della chiave privata)

46



## La scelta di $e$ per cifrare (impiego efficiente della chiave pubblica)

N.B. Se il numero binario  $e$  contiene pochi “uni”  
il calcolo di  $m^e$  è più efficiente !

$e = 3$  (insicuro)

$e = 2^{16} - 1$

$e = 2^{32} - 1$

Se viene scelto  $e=65537$  e poi si generano  $p$  e  $q$  potrebbe accadere  
che  $\text{MCD}(\Phi(n), e)$  sia diverso da 1, quindi vanno rifiutati perché  $e$   
deve essere coprimo con  $\Phi(n)$

$n$	$e$
$n$	$e$

47

## Sicurezza di RSA

- Forza bruta
- Attacchi matematici
- Attacchi a tempo
- Attacchi a testo cifrato scelto

50

## Attacchi Matematici

Tre approcci :

- Fattorizzazione di  $n$  nei suoi due fattori primi  $\Rightarrow$  questo permette di calcolare la funzione totiente di Eulero  $(p-1)(q-1)$  e quindi  $d$
- Determinare direttamente la funzione totiente di Eulero  $(p-1) \times (q-1)$  senza prima determinare  $p$  e  $q$
- Determinare direttamente  $d$  senza prima determinare la funzione totiente di Eulero  $(p-1) \times (q-1)$

caso più frequente è la fattorizzazione

51

## Attacchi a Tempo

- Si basano unicamente sul testo cifrato
- Si è dimostrato che si può determinare una chiave privata analizzando il tempo impiegato dai computer per decifrare i messaggi
- Sono analoghi a un ladro che cerca di indovinare la combinazione di sicurezza di una cassaforte osservando il tempo impiegato per ruotare la manopola

Contromisure: ad es. tecnica di blinding con  
degrado prestazionale dal 2 al 10%



- Si genera numero casuale segreto  $r$  compreso tra 0 e  $n-1$
- Si calcola  $c' = c(r^e)$
- Si calcola  $m' = (c')^d \bmod n$
- Si calcola  $m = m' r^{-1} \bmod n$  con  $r^{-1}$  inverso moltiplicativo di  $r$  modulo  $n$

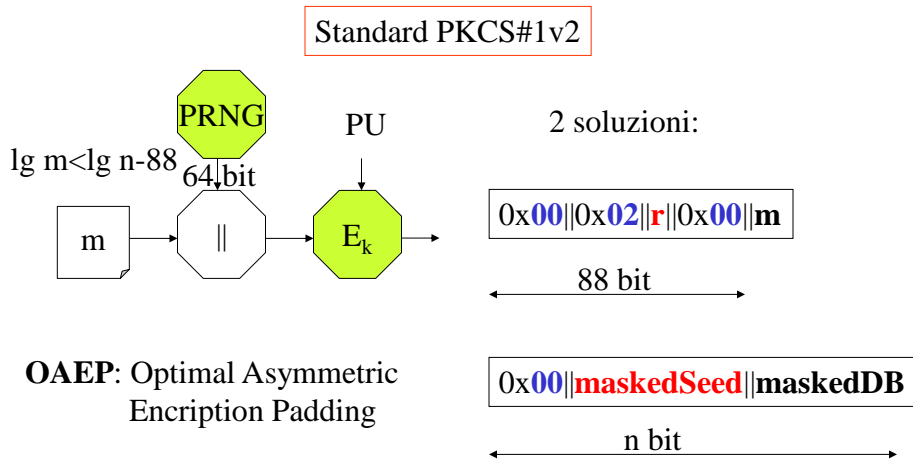
53

## Randomizzazione di RSA

RSA esegue una sostituzione semplice di blocchi ed è deterministico:

1-  $m$  identici generano  $c$  identici

2 - per certi  $m$  si ha  $c = m$



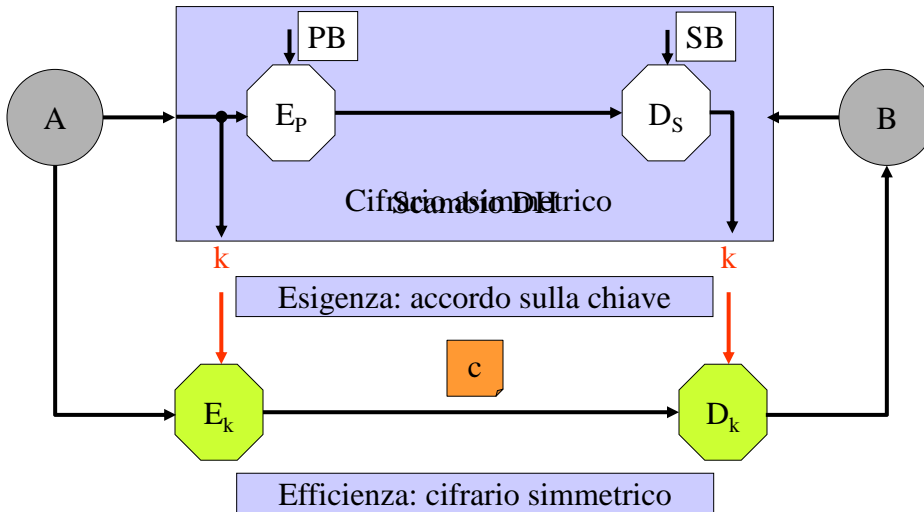
55



60

## KA con Cifrario asimmetrico

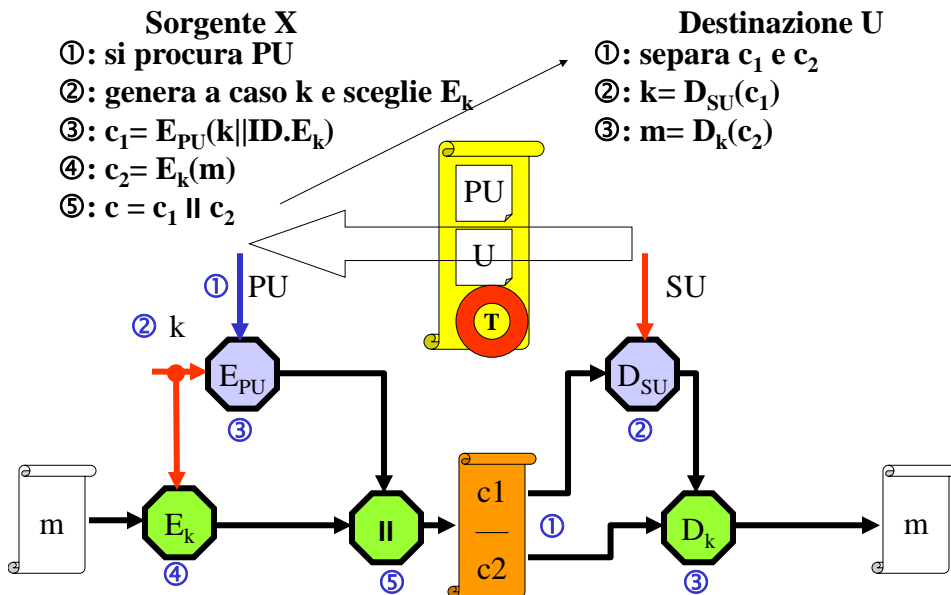
Problema: A e B vogliono scambiarsi informazioni riservate in assenza di accordi precedenti



61

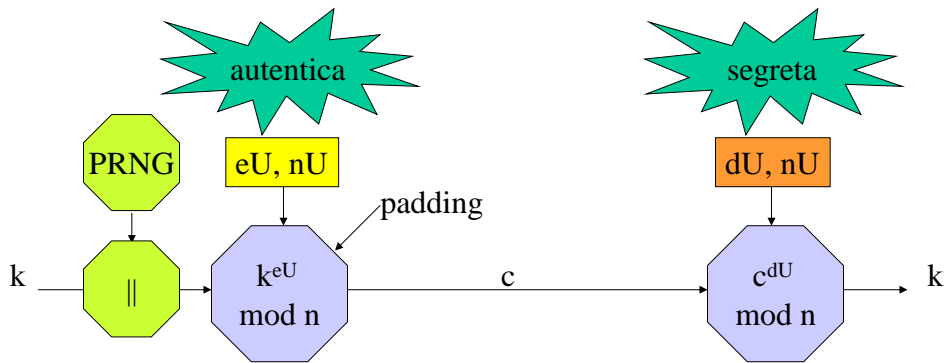
## Il cifrario ibrido

(asimmetrico   e simmetrico   )



62

## Chiave di sessione con RSA



**Vulnerabilità:  $k^{eU} < n$  con  $k$  ed  $e$  numeri piccoli**

### Contromisura PKCS#1v2

- 1: padding con  $r$  di 64 bit
- 2: padding OAEP

63



64

# Firma digitale

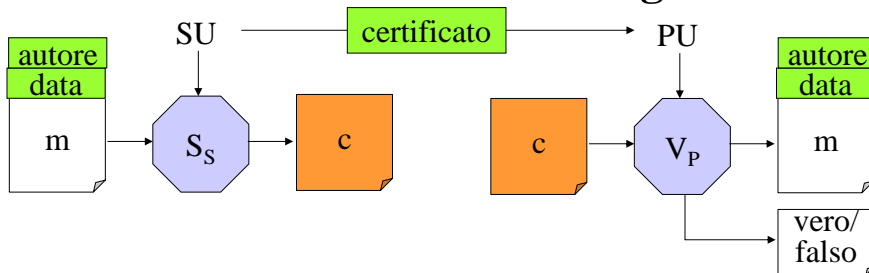
La firma digitale di un documento informatico deve:

- 1- consentire a **chiunque** di identificare **univocamente** il firmatario,
- 2- non poter essere **imitata** da un impostore,
- 3- non poter essere **trasportata** da un documento ad un altro,
- 4- non poter essere **ripudiata** dall'autore,
- 5- rendere **inalterabile** il documento in cui è stata apposta.

**Crittografia asimmetrica**

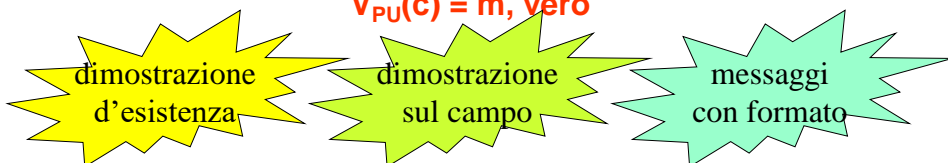
65

## Sicurezza della firma digitale



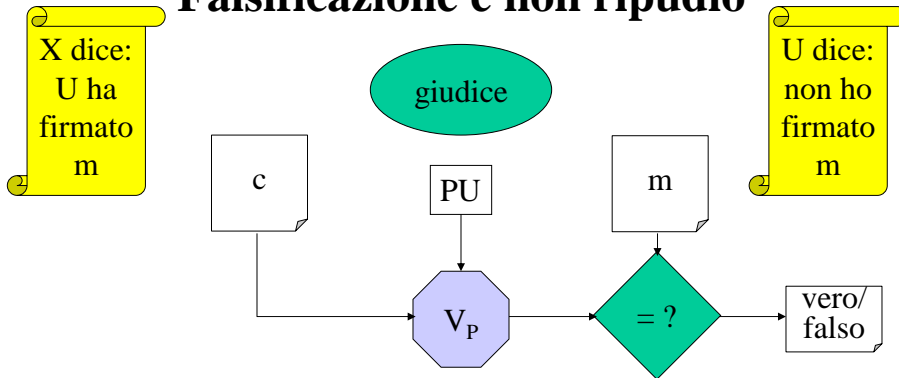
- Per ogni SU, per ogni m e per  $c = S_{SU}(m)$ , deve essere  **$V_{PU}(c) = m, \text{ vero}$**
- Per chi non ha SU e per ogni m di sua invenzione deve essere infattibile costruire un c tale che

**$V_{PU}(c) = m, \text{ vero}$**



66

## Falsificazione e non ripudio



### Valore legale della firma digitale

1989: USA e poi ONU  
 1997: ITALIA  
 1999: Comunità Europea  
 2002: ITALIA

67

## Algoritmi di firma a chiave pubblica

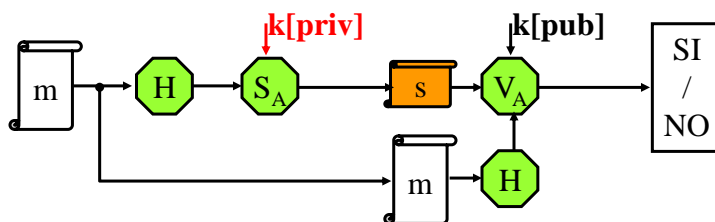
Nome	Tipo	Anno
RSA	ricupero	1978
Rabin	ricupero	1979
ElGamal	appendice	1984
DSA	appendice	1991
Schorr	appendice	1991
Nyberg-Rueppel	ricupero	1993

68

## Algoritmi di firma con appendice

Messaggi di lunghezza arbitraria

Appendice:  $S(H(m), k[\text{priv}A])$

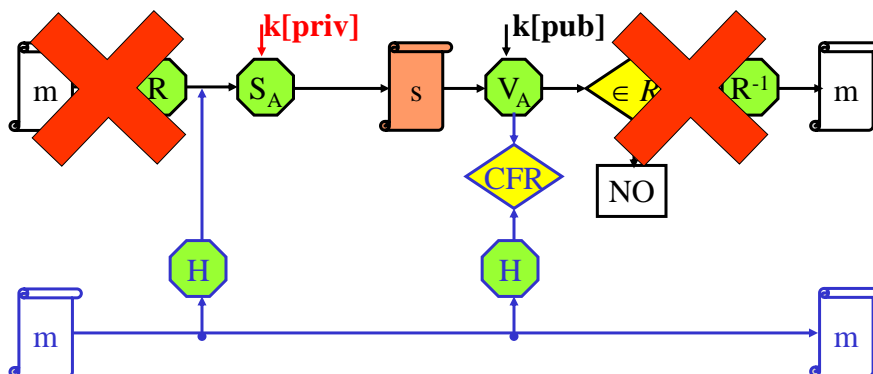


69

## Algoritmi di firma con recupero

Messaggi "corti":  $< \text{modulo}$

Funzione di ridondanza  $R$



N.B. - Gli algoritmi con recupero possono essere impiegati anche in uno **schema con appendice** (l'hash ha sicuramente una dimensione inferiore a quella del modulo)

70



# Proprietà di reversibilità di RSA

**Reversibilità delle chiavi (impiego di SU al posto di PU e viceversa)**

$$E_{SU}(m) = c = m^{SU} \bmod n$$

**messaggio non riservato**

$$D_{PU}(c) = (m^{SU})^{PU} \bmod n = m$$

**ma con origine verificabile**

## Schema di firma con recupero

**inefficiente se  $m > n$  e insicura**

$\lceil \log_2 n \rceil$  bit di etichetta

## Schema di firma con appendice:

ossia un bit in meno rispetto a n

### 1. FIRMA

$$S_{SU}(H(m)) = (H(m))^{SU} \bmod n$$

**autenticazione del messaggio**

$$m \parallel S_{SU}(H(m))$$

**comunicazione del messaggio**

### 2: VERIFICA

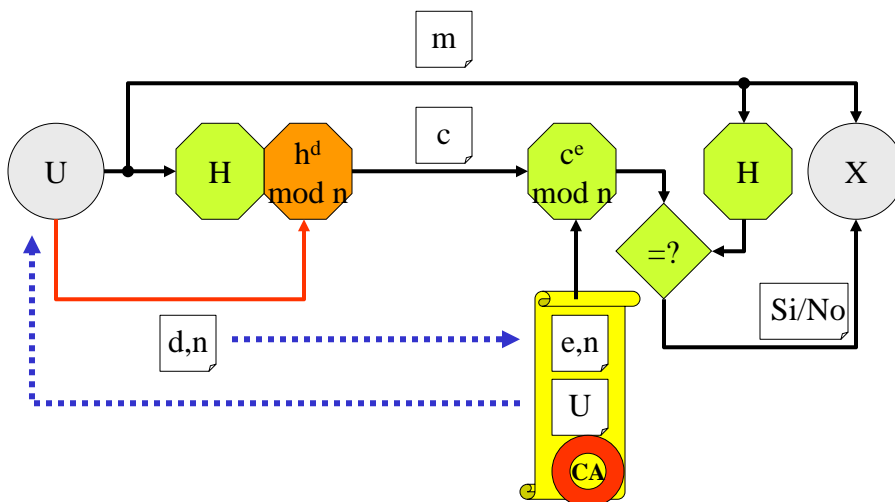
•calcolo di  $H(m')$

•calcolo di  $H(m) = (S_{SU}(H(m)))^{PU} \bmod n$

•confronto

71

## Firma con RSA



72

# Padding

deterministico

PKCS#1: 0x00 0x01 0xFF ...0xFF 0x00||H(m)

FDH: H(c<sub>0</sub>.m)|| H(c<sub>1</sub>.m)|| H(c<sub>2</sub>.m)||....

Funzione hash ideale che  
genera impronte di  $\lceil \log_2 n \rceil$

probabilistico

PKCS#1v2: PPS (Probabilistic Signature Scheme)

“Practical cryptography”

73

## Proprietà moltiplicativa di RSA

Sia  $m = m_1 \times m_2 < nU$

Firma di  $m$  da parte di  $U$ :

$$\begin{aligned} c &= m^{dU} \bmod nU = (m_1 \times m_2)^{dU} \bmod nU \\ &= ((m_1^{dU} \bmod nU) \times (m_2^{dU} \bmod nU)) \bmod nU \end{aligned}$$

Proprietà moltiplicativa dell'algoritmo RSA:  
***il testo cifrato (con chiave pubblica o con chiave privata)  
del prodotto di due testi in chiaro  
è congruo (mod n) al prodotto dei due testi cifrati***

75

## Autenticazione di un messaggio oscurato

**X vuole farsi autenticare da T un messaggio m senza che T possa conoscerne il contenuto**

Autorizzazioni per voto elettronico, commercio elettronico, ecc.

### Autenticazione “a occhi chiusi” di un messaggio m

1. **X** sceglie a caso un numero **r** **coprivo con nT**
2. invia a **T** il testo cifrato  $c1 = m \times r^{eT} \bmod nT$
3. **T** firma **c1** e restituisce a **X**  
 $c2 = m^{dT} \times r^{eT \cdot dT} \bmod nT = (m^{dT} \times r) \bmod nT$
4. **X** moltiplica **c2** per  $r^{-1}$   
 $c3 = (m^{dT} \times r \times r^{-1}) \bmod nT = m^{dT} \bmod nU$
5. Il destinatario di **m** può verificare che è autenticato da **T**  
 $(c3)^{eT} \bmod nT = m$

76

## Attacchi Matematici alla Firma

- Un attaccante può chiedere di firmare qualunque messaggio di sua scelta tranne m di suo interesse. Per ottenere la firma di m genera r, costruisce  $m1 = m \times r$ , calcola  $m2 = r^{-1}$  chiede ad X di firmare entrambi i messaggi e moltiplica infine le firme di m1 e m2 che gli vengono restituite
- Posso sfruttare questo attacco per intercettare un cifrato RSA destinato a X, l'intruso oscura c, se lo fa firmare da X, elimina il numero a caso ed ottiene il testo in chiaro

77

