ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Introduzione alla Logica

Federico Chesani

DISI

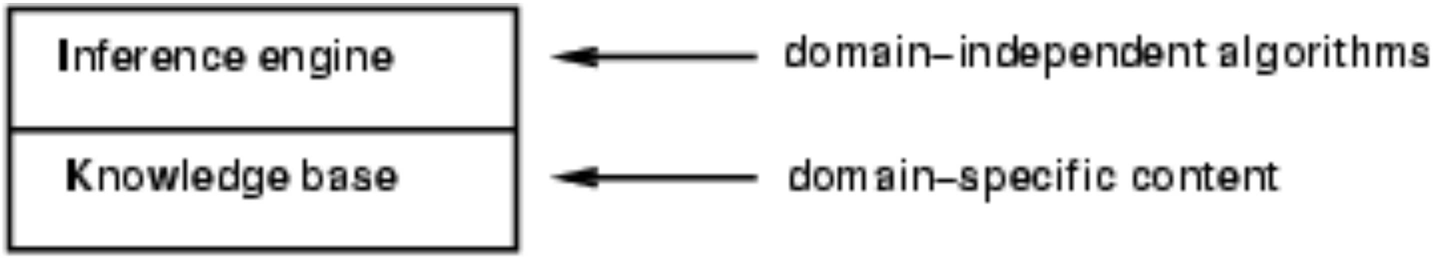
Department of Informatics – Science and Engineering

Disclaimer & Further Reading

- These slides are largely based on previous work by Prof. Paola Mello

- Russell Norvig, AIMA, vol. 1 ed. italiana:
  - Cap. 7.3, 7.4, 7.5 (parte)

Basi di Conoscenza



- Knowledge base (KB) = insiemi di sentenze scritte in un linguaggio formale.
- Le risposte devono "derivare" dalla KB.
- Inference Engine: strutture dati ed algoritmi per utilizzare la KB e arrivare ad una risposta.

Consideremo come linguaggio formale la **logica dei predicati del primo ordine** sia come linguaggio di **rappresentazione** della conoscenza sia come metodo di ragionamento (**inferenza**).

LA LOGICA DEI PREDICATI DEL PRIMO ORDINE

Materiale in parte estratto dal libro: L. Console, E. Lamma, P. Mello, M.Milano: Programmazione Logica e Prolog, Seconda Edizione UTET editore.

- La logica è quella scienza che fornisce all'uomo gli strumenti indispensabili per controllare con sicurezza la rigorosità dei ragionamenti.
- **La logica** fornisce gli strumenti formali per:
  - analizzare le inferenze in termini di operazioni su espressioni simboliche;
  - dedurre conseguenze da certe premesse;
  - studiare la verità o falsità di certe proposizioni data la verità o falsità di altre proposizioni;
  - stabilire la consistenza e la validità di una data teoria.

LOGICA E INFORMATICA

- La logica è utilizzata:
  - In Intelligenza Artificiale come linguaggio formale per la rappresentazione di conoscenza
    - semantica non ambigua
    - sistemi formali di inferenza
  - per sistemi di dimostrazione automatica di teoremi e studio di meccanismi efficienti per la dimostrazione
  - Per la progettazione di reti logiche;
  - Nei database relazionali, come potente linguaggio per l'interrogazione intelligente;
  - Come linguaggio di specifica di programmi che per eseguire prove formali di correttezza;
  - Come un vero e proprio linguaggio di programmazione (programmazione logica e PROLOG).

LOGICA CLASSICA

Si suddivide in due classi principali:

- **logica proposizionale**
- **logica dei predicati.**

- Permettono di esprimere proposizioni (cioè frasi) e relazioni tra proposizioni.
- La principale differenza tra le due classi è in termini di espressività: nella logica dei predicati è possibile esprimere variabili e quantificazioni, mentre questo non è possibile nella logica proposizionale.
- Il linguaggio della logica dei predicati del primo ordine è definito da:
  - una **sintassi,** che stabilisce le caratteristiche strutturali del linguaggio formale (mediante una grammatica) senza attribuire alcun significato ai simboli;
  - una **semantica,** che interpreta le frasi sintatticamente corrette del linguaggio. Si dà una interpretazione alle formule stabilendo se una frase è vera o falsa.

LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

Alfabeto, che consiste di cinque insiemi:

- l'insieme dei simboli di costante, C;
- l'insieme dei simboli di funzione, F;
- l'insieme dei simboli di predicato (o relazione), P;
- l'insieme dei simboli di variabile, V;
- i connettivi logici:

$\sim$ (negazione),

$\wedge$ (congiunzione),

$\vee$ (disgiunzione),

$\leftarrow$ (implicazione),

$\leftrightarrow$ (equivalenza),

le parentesi "(" ")"

e i quantificatori esistenziale ($\exists$) e universale ($\forall$).

LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

- **Costanti**: singole entità del dominio del discorso.
  - Es. "maria", "giovanna", "3" $\Rightarrow$ iniziale minuscola

- **Variabili**: entità non note del dominio,
  - Es. X, Y $\Rightarrow$ iniziale maiuscola

- **Funzioni n-arie**: individua univocamente un oggetto del dominio del discorso mediante una relazione tra altri "n" oggetti del dominio.
  - Es. madre(maria)
- Importante: le funzioni, in logica, non presuppongono alcun concetto di valutazione

- **Predicati n-ari**: generica relazione (che può essere vera o falsa) fra "n" oggetti del dominio del discorso.
  - Es. parente(giovanna,maria)

LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

Date queste definizioni principali possiamo definire:

- **Termine** (definito ricorsivamente):
  - una variabile è un termine;
  - una costante è un termine;
  - se f è un simbolo di funzione n-aria e $t_1, \ldots t_n$ sono termini, allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine.
  - Es. maria, f(X)

- **Atomo o formula atomica**:
  - l'applicazione di un simbolo di predicato n-ario p a n termini $t_1, \ldots, t_n$: $p(t_1, \ldots, t_n)$.
  - Es. parente(giovanna,maria)

LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

- **Espressione o formula**: sequenza di simboli appartenenti all'alfabeto.
  - `parente(giovanna, maria)` **(E1)**
  - `∃X (uomo(X) ∧ felice(X))` **(E2)**
  - `∀X (uomo(X) → mortale(X))` **(E3)**
  - `∃X (uomo(X) ∧)` **(E4)**
  - `∃X (uomo(f(X)` **(E5)**

- **Formule ben formate (fbf):** frasi sintatticamente corrette del linguaggio. Si ottengono attraverso combinazione di formule atomiche, utilizzando i connettivi e i quantificatori. Sono definite ricorsivamente come segue (next slide).

LOGICA DEI PREDICATI: SINTASSI

- **Formule ben formate (fbf)**: frasi sintatticamente corrette del linguaggio. Si ottengono attraverso combinazione di formule atomiche, utilizzando i connettivi e i quantificatori. Sono definite ricorsivamente come segue:
  - ogni atomo è una fbf;
  - se A e B sono fbf, allora lo sono anche $\sim A$, $A \land B$, $A \lor B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ (eventualmente racchiuse tra parentesi tonde bilanciate);
  - se A è una fbf e X è una variabile, $\forall X\ A$ e $\exists X\ A$ sono fbf.

- Le espressioni (E1), (E2), (E3) sono formule ben formate, mentre non lo sono (E4) e (E5).

- **Letterale**: fbf atomica o la sua negazione. Ad esempio, la formula (E1) è un letterale.

REGOLE DI PRECEDENZA TRA OPERATORI

Regole di precedenza, nell'ordine:

$\sim\ \exists \quad \forall \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$

Esempio

La fbf: $a \vee \sim b \wedge \exists X\ c(X) \rightarrow d(X,Y)$

è equivalente a: $(a \vee ((\sim b) \wedge (\exists X\ c(X)))) \rightarrow d(X,Y)$

Campo di azione (scope) di un quantificatore: fbf che lo segue immediatamente. Nel caso di ambiguità si utilizzano le parentesi tonde.

- Esempio
  - Nella fbf: $\forall X\ (p(X,Y) \wedge q(X)) \vee q(X)$
  - la quantificazione sulla variabile **X** ha come campo d'azione la formula $p(X,Y) \wedge q(X)$

Forme normali disgiuntive e congiuntive

- **fbf in forma normale prenessa disgiuntiva** ("disjunctive prenex normal form"): disgiunzione di una o più fbf composte da congiunzioni di letterali; le quantificazioni compaiono tutte in testa a F.
- **fbf in forma normale prenessa congiuntiva** ("conjunctive prenex normal form"): congiunzione di una o più fbf composte da disgiunzioni di letterali; le quantificazioni compaiono tutte in testa ad F.

Esempio

- La fbf: $\exists X \forall Y \exists Z \ (a(X) \wedge b(Y,Z)) \vee (c(X) \wedge \sim a(Z) \wedge d) \vee f$

è in forma normale disgiuntiva.

- La fbf: $\exists X \ \forall Y \ \exists Z \ (a(X) \vee b(Y,Z)) \wedge (c(X) \vee \sim a(Z) \vee d) \wedge f$

è in forma normale congiuntiva.

Qualunque fbf può essere trasformata in forma normale prenessa (congiuntiva o disgiuntiva) attraverso opportune trasformazioni sintattiche.

NOMENCLATURA SULLE FORMULE

- **Variabili libere**: variabili che non compaiono all'interno del campo di azione di un quantificatore.
- Esempio nella fbf: $\mathbf{F = \forall X\ (p(X,Y) \wedge q(X))}$ la variabile Y risulta libera in F.

- **Formule chiuse**: fbf che non contengono alcuna variabile libera. Ad esempio, le formule (E1), (E2) ed (E3) sono fbf chiuse. Nel seguito considereremo solo formule fbf chiuse.
- **Formule ground**: formule che non contengono variabili. Ad esempio la formula (E1) è una formula "ground".

- **Varianti**: una formula F2, ottenuta rinominando le variabili di una formula F1, è detta variante di F1.
- Esempio La formula: $\mathbf{\forall X\ \exists Y\ p(X,Y)}$ è una variante della formula $\mathbf{\forall W\ \exists Z\ p(W,Z)}$.

SEMANTICA

- Che significato hanno i simboli ?
- Ogni sistema formale è la modellizzazione di una certa realtà (ad esempio la realtà matematica).
- Un'interpretazione è la costruzione di un rapporto fra i simboli del sistema formale e tale realtà (chiamata anche dominio del discorso).

- Ogni formula atomica o composta della logica dei predicati del primo ordine può assumere il valore vero o falso in base alla frase che rappresenta nel dominio del discorso.
- **Esempio:**
  - $\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ \ (op(X, Y, Z) \rightarrow op(Y, X, Z))$
  - se X, Y, Z variano sull'insieme dei numeri reali tale formula è vera se il simbolo di predicato "op" ha il significato di un operatore commutativo (es: somma o moltiplicazione), falsa se l'operatore non è commutativo (es. sottrazione o divisione).

INTERPRETAZIONE

Dato un linguaggio del primo ordine L **un'interpretazione** per L definisce un dominio non vuoto D e assegna:

- a ogni simbolo di costante in C, una costante in D;
- a ogni simbolo di funzione n-ario F, una funzione:
- F: $D^n \rightarrow D$;
- a ogni simbolo di predicato n-ario in P una relazione in D^n, cioè un sottoinsieme di D^n.

- Esempio: Linguaggio del primo ordine, L, nel quale si ha una costante "0", un simbolo di funzione unaria "s" e un simbolo di predicato binario "p".

INTERPRETAZIONE

- Interpretazione I1 D: numeri naturali.
  - "0" rappresenta il numero zero.
  - "s" rappresenta il successore di un numero naturale
  - "p" rappresenta la relazione binaria " $\leq$ "

- Interpretazione I2 D: numeri interi negativi.
  - "0" rappresenta il numero zero.
  - "s" rappresenta il predecessore di un numero naturale
  - "p" rappresenta la relazione binaria " $\leq$ "

VALORE DI VERITÀ DI UNA fbf

Data un'interpretazione il valore di verità di una fbf si definisce secondo le seguenti regole.

- **Formula atomica "ground"** ha valore vero sotto un'interpretazione quando il corrispondente predicato è soddisfatto (cioè quando la corrispondente relazione è vera nel dominio). La formula atomica ha valore falso quando il corrispondente predicato non è soddisfatto.

Esempio: Interpretazione I1

p(0,s(0)) vero

p(s(0), 0) falso

Esempio: Interpretazione I2

p(0,s(0)) falso

p(s(0), 0) vero

VALORE DI VERITÀ DI UNA fbf (2)

- **Formula composta** il valore di verità di una formula composta rispetto a un'interpretazione si ottiene da quello delle sue componenti utilizzando le tavole di verità dei connettivi logici.

A	B	~A	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Nota: l'implicazione $A \rightarrow B$ è diversa rispetto al "se ..... allora" utilizzato nel linguaggio naturale.
A: antecedente B: conseguente

VALORE DI VERITÀ DI UNA fbf (3)

- Data la formula F:

  volano(asini) $\Rightarrow$ ha_scritto(manzoni,promessi_sposi)

  assumendo l'interpretazione più intuitiva, F ha valore vero, poiché l'antecedente ha valore falso in tale interpretazione.

- La formula F:

  $$p(s(0),0) \Rightarrow p(0,s(0))$$

  ha valore vero nell'interpretazione I1 poiché l'antecedente ha valore falso, mentre ha valore falso in I2 poiché a un antecedente vero corrisponde un conseguente falso.

VALORE DI VERITÀ DI UNA fbf (4)

- **Formula quantificata esistenzialmente**: una formula del tipo $\exists X$ F è vera in un'interpretazione I se esiste almeno un elemento d del dominio D tale che la formula F', ottenuta assegnando d alla variabile X, è vera in I. In caso contrario F ha valore falso.

- Esempio:

  La formula $\exists X\ p(X,s(0))$ ha valore vero nell'interpretazione I1 in quanto esiste un numero naturale, zero, minore di uno, tale che la formula $F'=p(0,s(0))$ ha valore vero in I1.

VALORE DI VERITÀ DI UNA fbf (5)

- **Formula quantificata universalmente**: una formula del tipo $\forall X\ F$ è vera in un'interpretazione I se per ogni elemento d del dominio D, la formula F', ottenuta da F sostituendo d alla variabile X, è vera in I. Altrimenti F ha valore falso.

- Esempio

  La fbf $\forall Y\ p(0,Y)$ ha valore vero rispetto alle interpretazioni I1 (dove viene interpretata come "0 è minore o uguale a ogni intero positivo Y"), mentre ha valore falso rispetto a I2 poiché esiste almeno un elemento del dominio che la falsifica (esempio non è vero che "0 è minore o uguale a –1").

MODELLI

Data un'interpretazione I e una fbf chiusa F, I è un **modello** per F se e solo se F è vera in I.

- Esempio: Per la fbf $\forall Y\ p(0,Y)$ l'interpretazione I1 è un modello, mentre I2 non lo è.

- Una fbf è **soddisfacibile** se e solo se è vera almeno in una interpretazione, ovvero se esiste almeno un modello per essa.
- Una fbf che ha valore vero per tutte le possibili interpretazioni, cioè per cui ogni possibile interpretazione è un modello, è detta **logicamente valida**.
  - Esempio: La fbf $\forall X\ p(X) \vee \sim(\forall Y\ p(Y))$ è logicamente valida. Infatti, le formule $\forall X\ p(X)$ e $\forall Y\ p(Y)$ sono semplici varianti della stessa formula F e quindi hanno i medesimi valori di verità per qualunque interpretazione. In generale, $F \vee \sim F$ ha sempre valore vero, in modo indipendente dall'interpretazione.

NOTA:

- F logicamente valida $\Leftrightarrow$ ~F è non soddisfacibile.
- F è soddisfacibile $\Leftrightarrow$ ~F non è logicamente valida.

INSIEMI DI FORMULE SODDISFACIBILI (1)

Un insieme di formule chiuse del primo ordine S è **soddisfacibile** se esiste una interpretazione I che soddisfa tutte le formule di S (cioè che è un modello per ciascuna formula di S). Tale interpretazione è detta modello di S.

Esempio. Si consideri il seguente insieme di formule S:

- $S=\{\forall Y\ p(Y,Y),\ p(s(0),0) \Rightarrow p(0,s(0))\}$.
- L'interpretazione I1 è modello di S, mentre I2 non lo è. In I2 è infatti soddisfatta la prima formula dell'insieme, ma non la seconda.

Un insieme di formule S che non può essere soddisfatto da alcuna interpretazione, è detto **insoddisfacibile** (o inconsistente).

Ad esempio l'insieme di formule {A,~A} è insoddisfacibile.

INSIEMI DI FORMULE (2)

- Esempi di insiemi di formule insoddisfacibili sono:
  - $S1 = \{\sim (\exists X\ \forall Y\ p(X,Y)),\ \exists X\ \forall Y\ p(X,Y)\}$
  - $S2 = \{p(s(0),0) \Rightarrow p(0,s(0)),\ p(s(0),0),\ \sim p(0,s(0))\}$
  - In S1, infatti, compaiono una formula e la sua negazione. In S2, per ogni interpretazione in cui $p(s(0),0)$ e $\sim p(0,s(0))$ sono vere, la formula $p(s(0),0) \Rightarrow p(0,s(0))$ non è vera, per la tabella di verità della negazione e dell'implicazione.

CONSEGUENZA LOGICA (1)

Una formula F **segue logicamente** (o **è conseguenza logica**) da un insieme di formule S (e si scrive S **|=** F), se e solo se ogni interpretazione I che è un modello per S, è un modello per F.

Esempio. Si consideri l'insieme di fbf S:

- $\{\ p(0,0),\ \forall X\ p(X,X),\ \forall X\ \forall Y\ (p(X,Y) \Rightarrow p(X,s(Y)))\ \}$
- Da S segue logicamente la formula F=p(0,s(0)) poiché ogni interpretazione I che soddisfa S soddisfa anche F.
- Dall'insieme S, invece, non segue logicamente la formula F1: p(s(0),0) in quanto esiste un'interpretazione (I1) che soddisfa S, ma non F1.

CONSEGUENZA LOGICA (2)

Una formula F **segue logicamente** (o è conseguenza logica) da un insieme di formule S (e si scrive S |= F), se e solo se ogni interpretazione I che è un modello per S, è un modello per F.

Proprietà:

- Se una fbf F segue logicamente da S (S |= F), allora l'insieme S ∪ {~F} è insoddisfacibile.
- Viceversa, se S ∪ {~F} è insoddisfacibile (e S era soddisfacibile), allora F segue logicamente da S.

Nota: difficile lavorare a livello semantico (interpretazione, modelli). **Quindi si lavora a livello sintattico**.

SISTEMI DI REFUTAZIONE

I sistemi di refutazione si basano su questa **proprietà**: per dimostrare S |= F supposto S soddisfacibile è sufficiente dimostrare che $S \cup \{\sim F\}$ è insoddisfacibile.

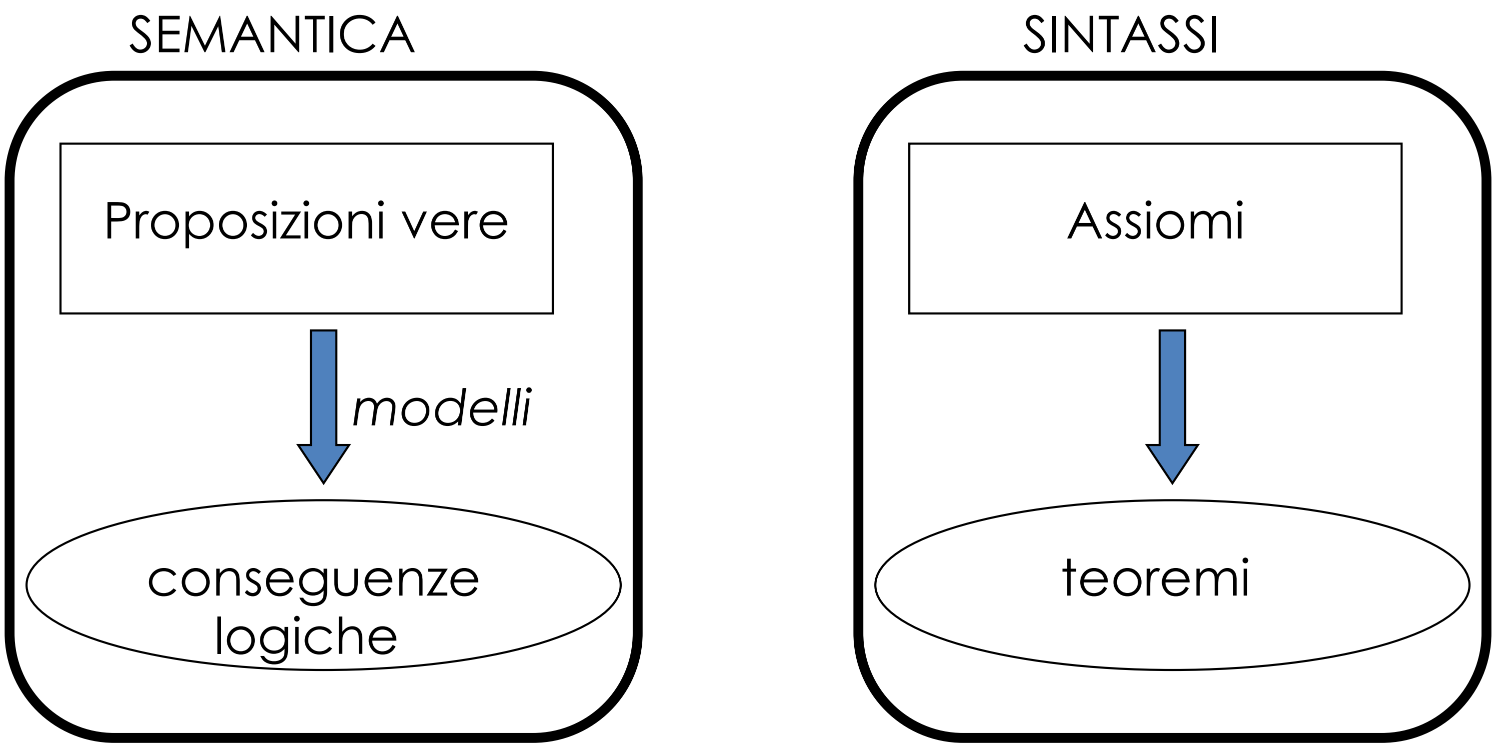
Problema interessante:

Determinare se una formula F segue logicamente da S

(ovvero che $S \cup \{\sim F\}$ è insoddisfacibile)

utilizzando solo semplici trasformazioni sintattiche (regole di inferenza), possibilmente ripetitive e quindi automatizzabili, e non introducendo concetti quali significato o interpretazione o modello.

Logica: apparato semantico e sintattico



TEORIE DEL PRIMO ORDINE (1)

Per dimostrare un teorema potremmo

- nel Calcolo proposizionale: verifica di formula/e vera/e tramite le tavole di verità
- nel Calcolo dei predicati del primo ordine: tavole di verità troppo complesse. Dominio di interpretazione estremamente grande, se non infinito. Si ricorre al metodo assiomatico (noto come proof theory).

Osservazione: **la logica dei predicati proposizionale e del primo ordine possono essere formulate come sistemi assiomatico-deduttivi**.

Teoria assiomatica:

- formule ben formate ritenute vere: assiomi
- criteri di manipolazione sintattica: regole di inferenza derivano fbf da fbf
- Scopo: produrre nuove formule sintatticamente corrette (teoremi).

TEORIE DEL PRIMO ORDINE (1)

- Semplificazioni:

$(A \wedge B)$	equivale a	$(\sim(A \rightarrow (\sim B)))$
$(A \vee B)$	equivale a	$((\sim A) \rightarrow B)$
$(A = B)$	equivale a	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

- Inoltre, per i quantificatori:

$\exists X\ A$	abbrevia	$\sim(\forall X \sim A)$
$\forall X\ A$	abbrevia	$\sim(\exists X \sim A)$

REGOLE DI INFERENZA

- **Modus Ponens (MP):**

$$\frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$$

  che deriva da due formule del tipo A e $A \rightarrow B$ la nuova formula B.

- **Specializzazione (Spec):**

$$\frac{\forall X \quad A(X)}{A(t)}$$

  Da una formula quantificata universalmente è possibile derivare una formula identica all'originale in cui la variabile X è sostituita da un elemento del dominio del discorso (costante e funzione).

DIMOSTRAZIONE DI TEOREMI (1)

- **Dimostrazione**: sequenza finita di fbf f_1, f_2, ..., f_n, tale che ciascuna f_i o è un assioma oppure è ricavabile dalle fbf precedenti mediante una regola di inferenza.
- **Teorema**: L'ultima fbf di ogni dimostrazione.
- **Prova del teorema**: sequenza di regole di inferenza applicate.

Una fbf F è **derivabile** in una teoria T (T **|-** F) se esiste una sequenza di fbf f_1, f_2, ..., f_n, tale che f_n = F e, per ogni i, o f_i è un assioma di T, oppure è ricavabile dalle fbf precedenti mediante una regola di inferenza di T.

DIMOSTRAZIONE DI TEOREMI (2)

Esempio

- Teoria T: assiomi propri (relazione di minore uguale sui numeri naturali):

$$p(0,0) \qquad \text{(A1)}$$

$$\forall X\ \forall Y\ (p(X,Y) \Rightarrow p(X,s(Y))) \qquad \text{(A2)}$$

$$\forall X\ p(X,X) \qquad \text{(A3)}$$

- Teorema $p(0,s(0))$ (cioè T **|-** $p(0,s(0))$)

- Dimostrazione: trasformazione da Spec e A2:

  $p(0,0) \Rightarrow p(0,s(0)))$

  applicando MP $\quad p(0,s(0))$

DECIDIBILITÀ

Teoria decidibile: teoria per la quale esiste un metodo meccanico per stabilire se una qualunque fbf è un teorema o non lo è.

Il calcolo dei predicati del primo ordine non è decidibile, ma **semi-decidibile**: se una formula è un teorema, esiste un metodo meccanico che la deriva in un numero finito di passi. Se invece la formula non è un teorema, non è garantita, in generale, la terminazione del metodo meccanico (Turing 1936, Church 1936).

- Una teoria del primo ordine è un insieme di fbf chiuse (assiomi) e si può quindi parlare di modello di una teoria.
- Un modello per una teoria del primo ordine T è un'interpretazione che soddisfa tutti gli assiomi di T (assiomi logici e assiomi propri).
- Se T ha almeno un modello viene detta consistente (o soddisfacibile).

CORRETTEZZA E COMPLETEZZA (1)

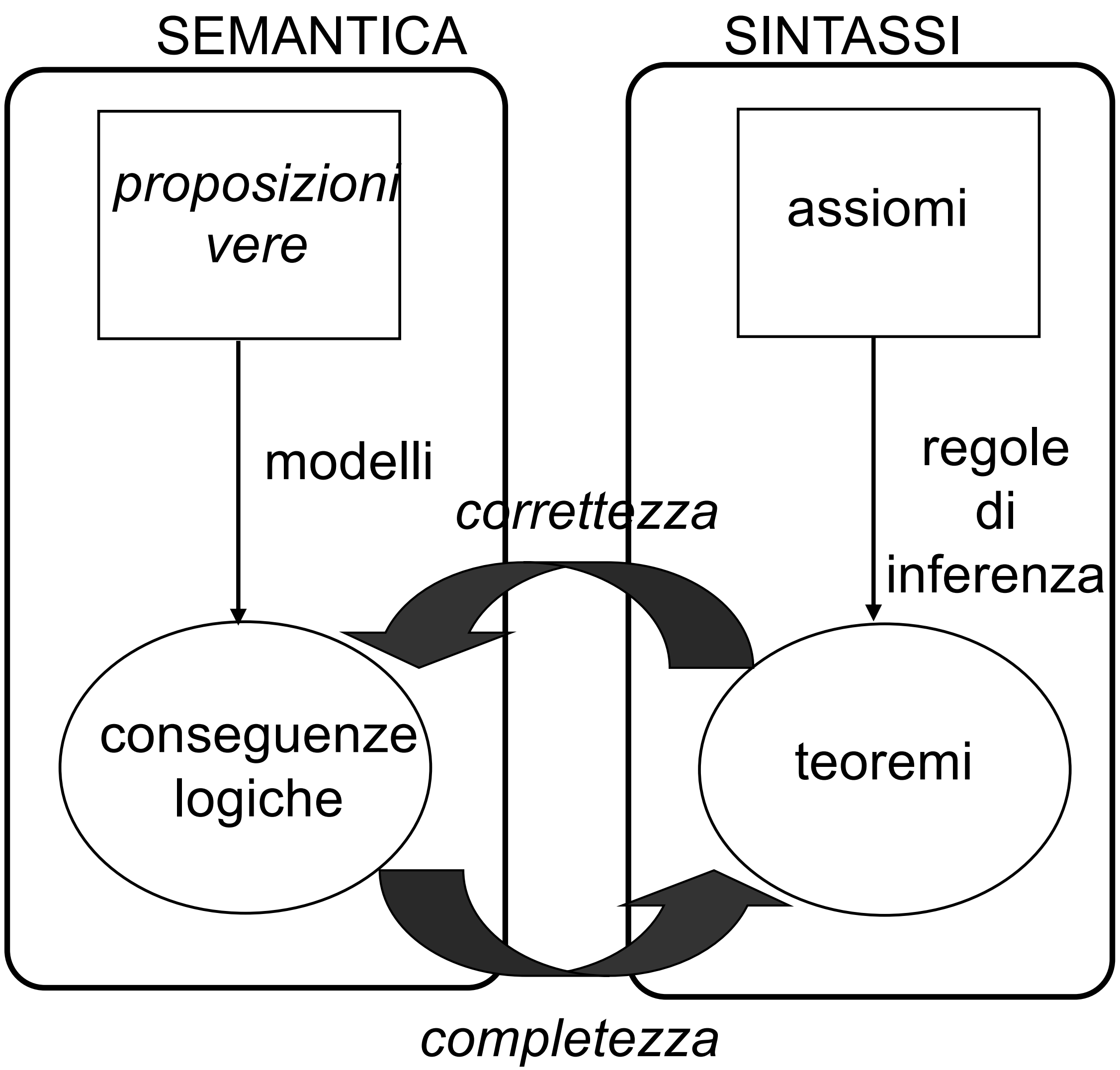
Una teoria assiomatica è **corretta** se i teoremi dimostrati seguono logicamente dagli assiomi della teoria.

Una teoria assiomatica è **completa** se tutte le fbf che seguono logicamente dalla teoria possono essere dimostrati come teoremi della teoria.

Se T è corretta e completa è garantita l'equivalenza tra l'aspetto sintattico e semantico

T I- F ⇔ TI= F.

CORRETTEZZA E COMPLETEZZA (2)



ESEMPIO DI TEORIA ASSIOMATICO-DEDUTTIVA NON CORRETTA (1)

- Si consideri una teoria del primo ordine T, data dai seguenti assiomi propri che rappresentano la relazione di minore sui numeri naturali:

$p(0,s(0))$	(A1)
$\forall X \forall Y (p(X,Y) \rightarrow p(X,s(Y)))$	(A2)
$\forall X\, p(X,s(X))$	(A3)

- Le regole di inferenza di T siano Modus Ponens, Specializzazione e la seguente regola:
- **Abduzione (ABD):**

$$\frac{B, A \rightarrow B}{A}$$

ESEMPIO (2)

- In T si deriva come teorema la formula p(0,0) applicando le seguenti trasformazioni:
  - da Spec. e A2:
  - $\forall X \forall Y(p(X,Y) \rightarrow p(X,s(Y))) \Rightarrow \forall Y\ (p(0,Y) \rightarrow p(0,s(Y)))$ (T1)
- da Spec. e T1:
  - $p(0,0) \rightarrow p(0,s(0))$ (T2)
- applicando ABD a T2 e A6:
  - $p(0,0)$ (T5)

ESEMPIO (3)

- A causa dell'applicazione dell'abduzione, questa teoria **non è corretta**: un'interpretazione che ha come dominio l'insieme dei numeri naturali e associa al simbolo di funzione "s" la funzione successore e al simbolo di predicato "p" la relazione $<$ (minore) è un modello per gli assiomi, ma non per la formula p(0,0).

Esempio

- sta-male(mario).
- $\forall$ X (ha-epatite(X) $\rightarrow$ sta-male(X)).

si conclude:

- ha-epatite(mario).

ERRORE !!

RAGIONAMENTO ABDUTTIVO: ESEMPIO (1)

- $\forall$ X (person(X) $\rightarrow$ mortal(X)).
- mortal(tweety).

Allora deriviamo: person(tweety).

- Vincoli:
  - $\forall$ X not(person(X) and bird(X)).
  - Se aggiungiamo: bird(tweety)
  - violiamo i vincoli.

Esempio: ragionamento abduttivo usato per diagnosi di guasti

RAGIONAMENTO ABDUTTIVO: ESEMPIO (2)

Teoria:

- ruota_traballante ← raggi_rotti.
- ruota_traballante ← gomma_sgonfia.
- gomma_sgonfia ← valvola_difettosa.
- gomma_sgonfia ← forata_camera_aria.
- gomma_mantiene_aria.

Vincoli:

- false ← gomma_sgonfia, gomma_mantiene_aria

Goal

- ?- ruota_traballante.

Risposta: yes if raggi_rotti

Mentre:

- yes if valvola_difettosa
- yes if forata_camera_aria

non sono accettabili in quanto violano i vincoli.

MONOTONICITÀ E MONDO CHIUSO

Un'altra proprietà fondamentale delle teorie del primo ordine è la **monotonicità**. Una teoria T è monotona se l'aggiunta di nuovi assiomi non invalida i teoremi trovati precedentemente.

Proprietà

Sia Th(T) l'insieme dei teoremi derivabili da T. Allora T è **monotona** se $Th(T) \subseteq Th(T \cup H)$ per qualunque insieme aggiuntivo di assiomi H.

Esistono regole di inferenza non monotone. Ad esempio la regola nota come Assunzione di Mondo Chiuso ("Closed World Assumption"):
Assunzione di Mondo Chiuso (CWA):

$$\frac{T \mid\neq A}{\sim A}$$

se una formula atomica "ground" A non è conseguenza logica di una teoria T, ~A si può considerare un teorema di T. Se alla teoria T si aggiunge l'assioma A, non si può più derivare ~A, da cui segue la non monotonicità del sistema di inferenza.

Sommario

- Gli agenti logici applicano inferenze a una base di conoscenza per derivare nuove informazioni.

- Concetti base della logica come linguaggio per la rappresentazione della conoscenza e ragionamento:
  - sintassi: struttura formale delle sentenze
  - semantica: verita` di sentenze rispetto ad interpretazioni/modelli
  - conseguenza logica (entailment): sentenza necessariamente vera data un'altra sentenza
  - inferenza: derivare (sintatticamente) sentenze da altre sentenze
  - correttezza (soundness): la derivazione produce solo sentenze che sono conseguenza logica.
  - completezza (completeness): la derivazione puo' prdurre tutte le conseguenze logiche.