Ricerca Operativa M

IV Esercitazione

Tutor: Alberto Locatelli

Dipartimento di Informatica - Scienza e Ingegneria - Università di Bologna

Esercizio 7

Esercizio 7

Sia dato un problema KP01 con $n = 5$, $p' = (49, 100, 36, 15, 18)$, $w' = (12, 15, 9, 4, 5)$ e $c = 30$.

1. Si risolva il problema KP01 con l'algoritmo branch-and-bound. Si utilizzi la strategia di esplorazione depth-first.
2. Si disegni l'albero decisionale generato dall'algoritmo branch-and-bound. Si numerino i nodi in ordine di esplorazione e si sottolineino gli upper bound U solo se è necessario calcolarli.
3. Si risolva il problema KP01 tramite la programmazione dinamica.

Soluzione

Si ha:
$p' = (49, 100, 36, 15, 18)$, $w' = (12, 15, 9, 4, 5)$ e $c = 30$.
Occorre ordinare gli elementi secondo valori non crescenti del profitto per unità di peso ($\frac{p_1}{w_1} \geq \frac{p_2}{w_2} \geq \cdots \geq \frac{p_n}{w_n}$).
Essendo:

$$\frac{49}{12} = 4.08, \frac{100}{15} = 6.67, \frac{36}{9} = 4, \frac{15}{4} = 3.75, \frac{18}{5} = 3.6$$

si ottiene:
$p' = (100, 49, 36, 15, 18)$, $w' = (15, 12, 9, 4, 5)$

Ora per calcolare l'upper bound U si inseriscano uno dopo l'altro gli elementi migliori, frazionando il primo che non può essere inserito interamente.

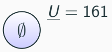
Formalmente:

$$s = \min\{i : \sum_{j=1}^{i} w_j > c\}; \qquad \overline{c} := c - \sum_{j=1}^{s-1} w_j$$

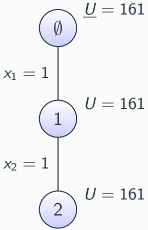
$$U := \left\lfloor \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \overline{c}\,\frac{p_s}{w_s} \right\rfloor$$

Essendo $p' = (100, 49, 36, 15, 18)$, $w' = (15, 12, 9, 4, 5)$ e $c = 30$, l'upper bound iniziale risulta:

$$\underline{U} = \left\lfloor 100 + 49 + (30 - 15 - 12) \cdot \frac{36}{9} \right\rfloor = 100 + 49 + \left\lfloor 3 \cdot \frac{36}{9} \right\rfloor = 161$$

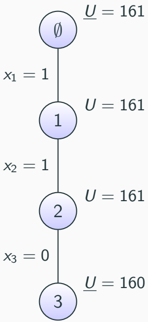


Si generano i nodi 1 e 2 aventi lo stesso upper bound del nodo radice.



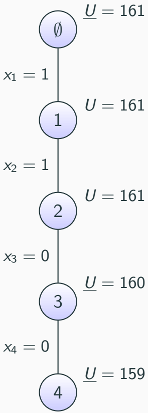
La capacità residua non è sufficiente per inserire il terzo elemento.
Si pone dunque $x_3 = 0$ e si calcola l'upper bound relativo al nodo 3:

$$\underline{U} = \left\lfloor 100 + 49 + (30 - 15 - 12) \cdot \frac{15}{4} \right\rfloor = 100 + 49 + \left\lfloor 3 \cdot \frac{15}{4} \right\rfloor = 160$$

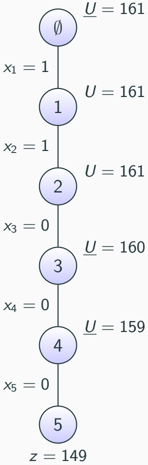


La capacità residua non è sufficiente per inserire il quarto elemento.
Si pone $x_4 = 0$ e si calcola l'upper bound relativo al nodo 4:

$$\underline{U} = \left\lfloor 100 + 49 + (30 - 15 - 12) \cdot \frac{18}{5} \right\rfloor = 100 + 49 + \left\lfloor 3 \cdot \frac{18}{5} \right\rfloor = 160$$



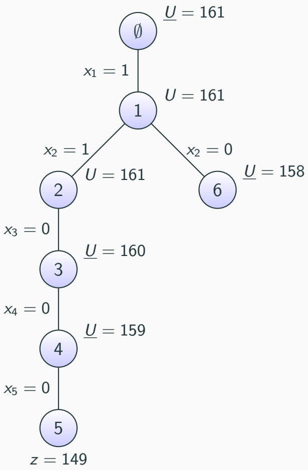
La capacità residua non è sufficiente per inserire il quinto elemento.
Si pone $x_5 = 0$ e si ottiene la soluzione $x' = (1, 1, 0, 0, 0)$ di valore
$z = 100 + 49 = 149$



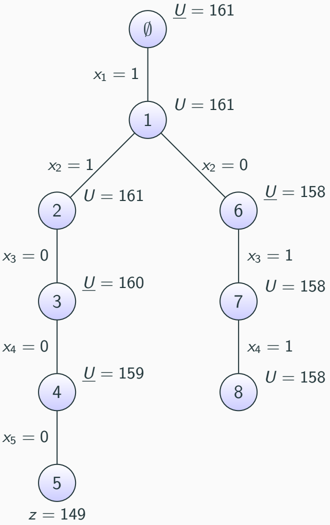
Si aggiorna il valore $z = 149$

Si effettuano quattro backtracking fino a trovare il primo nodo (1) da cui si può ramificare e si riprende la discesa depth-first. Si pone $x_2 = 0$ e calcola l'upper bound del nodo 6:

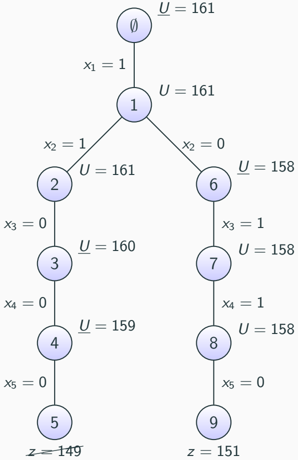
$$\underline{U} = \left\lfloor 100 + 36 + 15 + (30 - 15 - 9 - 4) \cdot \frac{18}{5} \right\rfloor = 100+36+15+\left\lfloor 2 \cdot \frac{18}{5} \right\rfloor = 158$$



Si generano i nodi 7 e 8 aventi lo stesso upper bound del nodo 6.



La capacità residua non è sufficiente per inserire il quinto elemento.
Si pone $x_5 = 0$ e si ottiene la soluzione $x' = (1, 0, 1, 1, 0)$ di valore $z = 100 + 36 + 15 = 151$

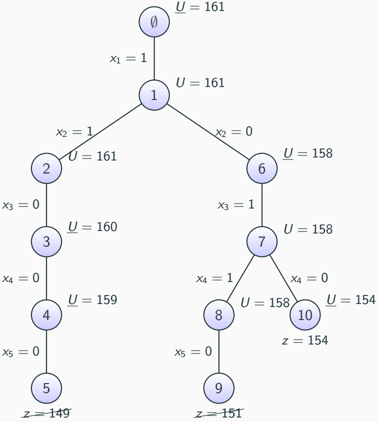


Si aggiorna il valore $z = 151$

Si effettuano due backtracking fino a trovare il primo nodo (7) da cui si può ramificare e si riprende la discesa depth-first. Si pone $x_4 = 0$ e calcola l'upper bound del nodo 10:

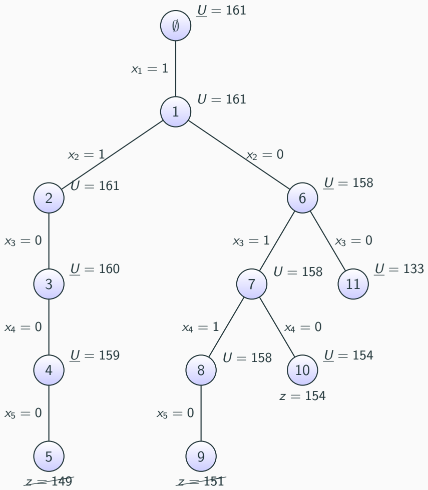
$$\underline{U} = 100 + 36 + 18 = 154$$

Si ottiene la soluzione intera $x' = (1, 0, 1, 0, 1)$ di valore $z = 100 + 36 + 18 = 154$. Si aggiorna dunque il valore di z.

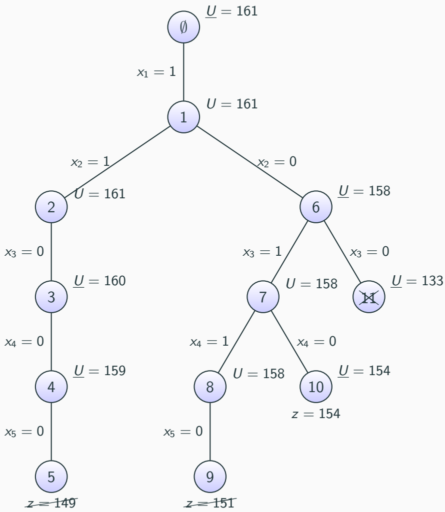


Si effettuano due backtracking fino a trovare il primo nodo (6) da cui si può ramificare e si riprende la discesa depth-first. Si pone $x_3 = 0$ e calcola l'upper bound del nodo 11:

$$\underline{U} = 100 + 15 + 18 = 133$$

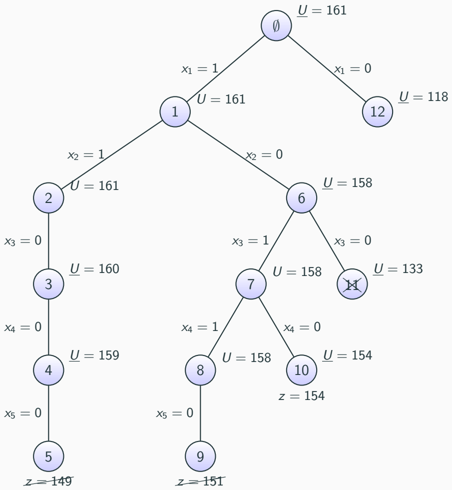


Si osserva che $\underline{U} = 133 \leq 154$

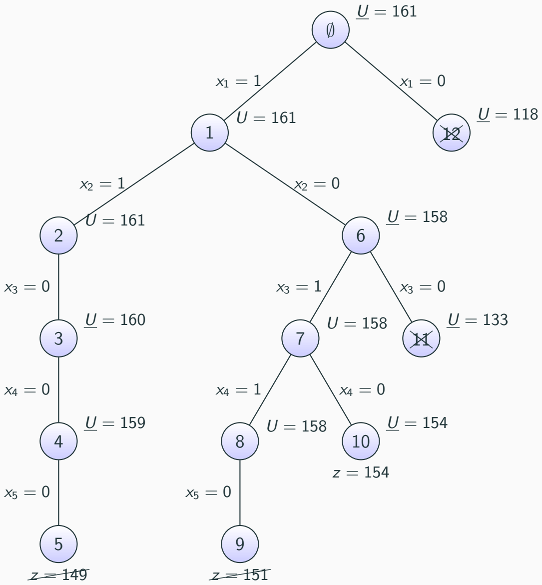


Si effettuano tre backtracking fino a trovare il primo nodo (0) da cui si può ramificare e si riprende la discesa depth-first. Si pone $x_1 = 0$ e calcola l'upper bound del nodo 12:

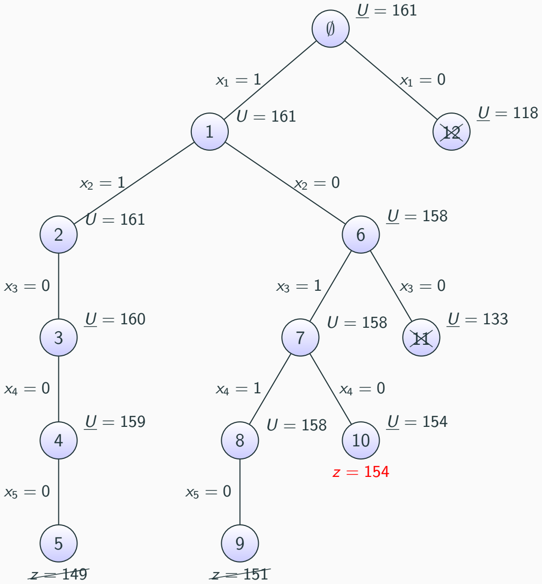
$$\underline{U} = 49 + 36 + 15 + 18 = 118$$



Si osserva che $\underline{U} = 118 \leq 154$



L'esecuzione termina con la soluzione ottima intera $x' = (1, 0, 1, 0, 1)$ di valore 154.



Programmazione dinamica

Si consideri il problema KP01:
$p' = (100, 49, 36, 15, 18)$, $w' = (15, 12, 9, 4, 5)$ e $c = 30$.
Sia $S \subseteq \{1, \ldots, j\}$.
M_j contiene le coppie $(\sum_{k \in S} p_k, \sum_{k \in S} w_k)$ tali che $\sum_{k \in S} w_k \leq c$.
Siano $S', S'' \subseteq \{1, \ldots, j\}$. Si dice che S' domina S''se vale:

$$\sum_{k \in S'} w_k \leq \sum_{k \in S''} w_k \text{ e } \sum_{k \in S'} p_k \geq \sum_{k \in S''} p_k$$

Ovvero qualunque soluzione ottenibile aggiungendo elementi ad S'' è non migliore di quella ottenibile aggiungendo gli stessi elementi ad S'.
Quindi conviene memorizzare in M_j solo la coppia prodotta da S'.

L'algoritmo genera gli insiemi:

$M_0 = \{(0, 0)\};$

$M_1 = \{(0, 0), (100, 15)\};$

$M_2 = \{(0, 0), (100, 15), (49, 12), (149, 27)\};$

$M_3 = \{(0, 0), (100, 15), (49, 12), (149, 27), (36, 9), (136, 24), \cancel{(85, 21)}\};$

$M_4 = \{(0, 0), (100, 15), (49, 12), (149, 27), (36, 9), (136, 24), (15, 4),$
$(115, 19), \cancel{(64, 16)}(51, 13), (151, 28)\};$

$M_5 = \{(0, 0), (100, 15), (49, 12), (149, 27), (36, 9), (136, 24), (15, 4),$
$(115, 19), (51, 13), (151, 28), (18, 5), (118, 20), \cancel{(67, 17)}, (54, 14), (154, 29),$
$, \cancel{(33, 9)}, \cancel{(133, 24)}, \cancel{(69, 18)}\}.$

Il miglior stato in M_5 è:

$M_5 = \{(0,0),(100,15),(49,12),(149,27),(36,9),(136,24),(15,4),$
$(115,19),(51,13),(151,28),(18,5),(118,20),(54,14),(154,29)\}$

Lo stato $(154,29)$ fornisce la soluzione $x = (1,0,1,0,1)$.

Esercizio 8

Esercizio 8

Sia dato un problema KP01 con $n = 5$, $p' = (35, 21, 16, 10, 3)$, $w' = (18, 10, 8, 9, 5)$ e $c = 20$.

1. Si risolva il problema KP01 con l'algoritmo branch-and-bound. Si utilizzi la strategia di esplorazione depth-first.
2. Si disegni l'albero decisionale generato dall'algoritmo branch-and-bound. Si numerino i nodi in ordine di esplorazione e si sottolineino gli upper bound U solo se è necessario calcolarli.
3. Si risolva il problema KP01 tramite la programmazione dinamica.

Soluzione

Si ha:
$p' = (35, 21, 16, 10, 3)$, $w' = (18, 10, 8, 9, 5)$ e $c = 20$.
È conveniente ordinare gli elementi secondo valori non crescenti del profitto per unità di peso ($\frac{p_1}{w_1} \geq \frac{p_2}{w_2} \geq \cdots \geq \frac{p_n}{w_n}$).
Essendo:

$$\frac{35}{18} = 1.64, \frac{21}{10} = 2.1, \frac{16}{8} = 2, \frac{10}{9} = 1.1, \frac{3}{5} = 0.6$$

si ottiene:
$p' = (21, 16, 35, 10, 3)$, $w' = (10, 8, 18, 9, 5)$

Ora per calcolare l'upper bound U si inseriscano uno dopo l'altro gli elementi migliori, frazionando il primo che non può essere inserito interamente.

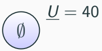
Formalmente:

$$s = \min\{i : \sum_{j=1}^{i} w_j > c\}; \qquad \overline{c} := c - \sum_{j=1}^{s-1} w_j$$

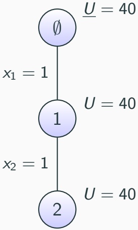
$$U := \left\lfloor \sum_{j=1}^{s-1} p_j + \overline{c}\frac{p_s}{w_s} \right\rfloor$$

Essendo $p' = (21, 16, 35, 10, 3)$, $w' = (10, 8, 18, 9, 5)$ e $c = 20$, l'upper bound iniziale risulta:

$$\underline{U} = \left\lfloor 21 + 16 + (20 - 10 - 8) \cdot \frac{35}{18} \right\rfloor = \left\lfloor 21 + 16 + 2 \cdot \frac{35}{18} \right\rfloor = 40$$

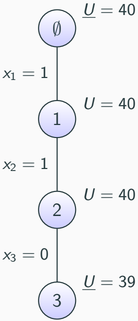


Si generano i nodi 1 e 2 aventi lo stesso upper bound del nodo radice.



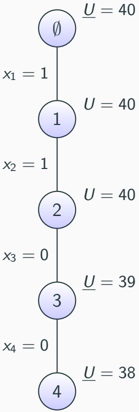
La capacità residua non è sufficiente per inserire il terzo elemento.
Si pone dunque $x_3 = 0$ e si calcola l'upper bound relativo al nodo 3:

$$\underline{U} = \left\lfloor 21 + 16 + (20 - 10 - 8) \cdot \frac{10}{9} \right\rfloor = 21 + 16 + \left\lfloor 2 \cdot \frac{10}{9} \right\rfloor = 39$$

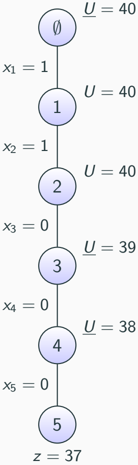


La capacità residua non è sufficiente per inserire il quarto elemento.
Si pone $x_4 = 0$ e si calcola l'upper bound relativo al nodo 4:

$$\underline{U} = \left\lfloor 21 + 16 + (20 - 10 - 8) \cdot \frac{3}{5} \right\rfloor = 21 + 16 + \left\lfloor 2 \cdot \frac{3}{5} \right\rfloor = 38$$



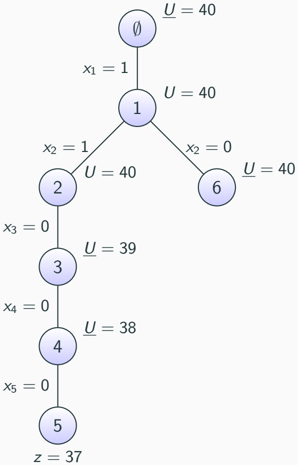
La capacità residua non è sufficiente per inserire il quinto elemento.
Si pone $x_5 = 0$ e si ottiene la soluzione $x' = (1, 1, 0, 0, 0)$ di valore $z = 21 + 16 = 37$



Si aggiorna il valore $z = 37$.

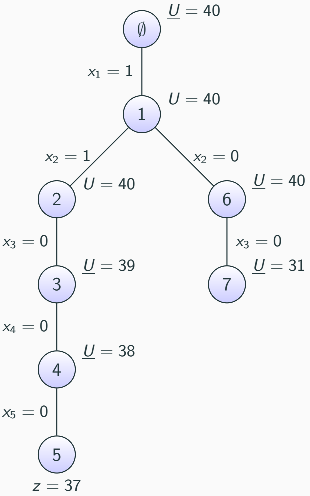
Si effettuano quattro backtracking fino a trovare il primo nodo (1) da cui si può ramificare e si riprende la discesa depth-first. Si pone $x_2 = 0$ e calcola l'upper bound del nodo 6:

$$\underline{U} = \left\lfloor 21 + (20 - 10) \cdot \frac{35}{18} \right\rfloor = 21 + \left\lfloor 10 \cdot \frac{35}{18} \right\rfloor = 40$$

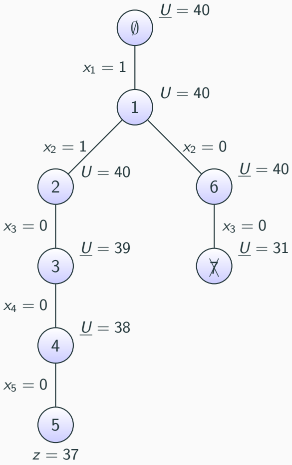


La capacità residua non è sufficiente per inserire il terzo elemento.
Si pone $x_3 = 0$ e si calcola l'upper bound relativo al nodo 7:

$$\underline{U} = \left\lfloor 21 + 10 + (20 - 10 - 9) \cdot \frac{3}{5} \right\rfloor = 21 + 10 + \left\lfloor \frac{3}{5} \right\rfloor = 31$$

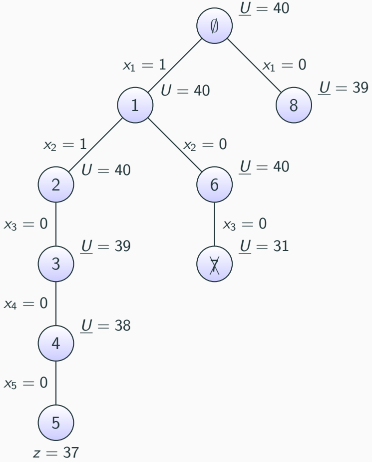


Si osserva che $\underline{U} = 31 \leq 37$

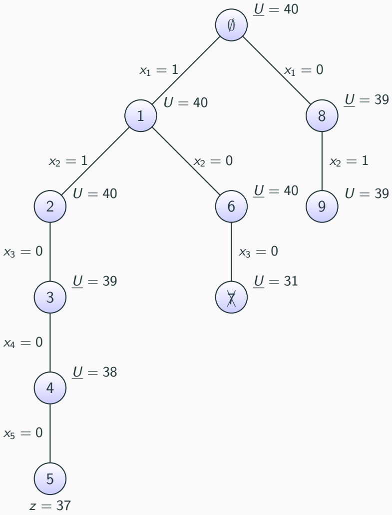


Si effettuano tre backtracking fino a trovare il primo nodo (0) da cui si può ramificare e si riprende la discesa depth-first. Si pone $x_1 = 0$ e si calcola l'upper bound del nodo 8:

$$\underline{U} = \left\lfloor 16 + (20 - 8) \cdot \frac{35}{18} \right\rfloor = 16 + \left\lfloor 12 \cdot \frac{35}{18} \right\rfloor = 39$$

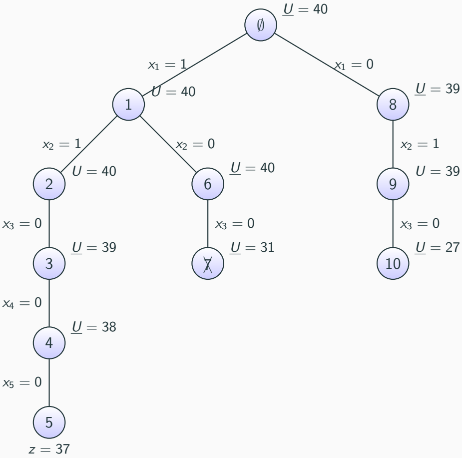


Si generano il nodo 9 avente lo stesso upper bound del nodo 8.

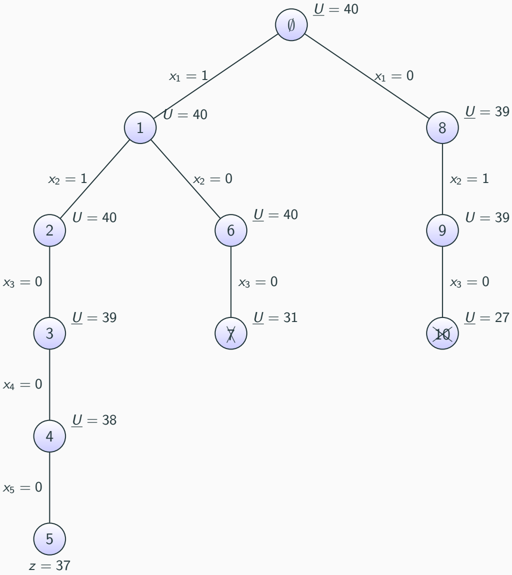


La capacità residua non è sufficiente per inserire il terzo elemento.
Si pone $x_3 = 0$ e si calcola l'upper bound relativo al nodo 10:

$$\underline{U} = \left\lfloor 16 + 10 + (20 - 8 - 9) \cdot \frac{3}{5} \right\rfloor = 16 + 10 + \left\lfloor 3 \cdot \frac{3}{5} \right\rfloor = 27$$

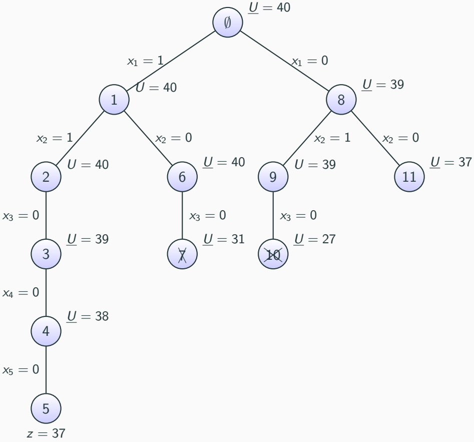


Si osserva che $\underline{U} = 27 \leq 37$

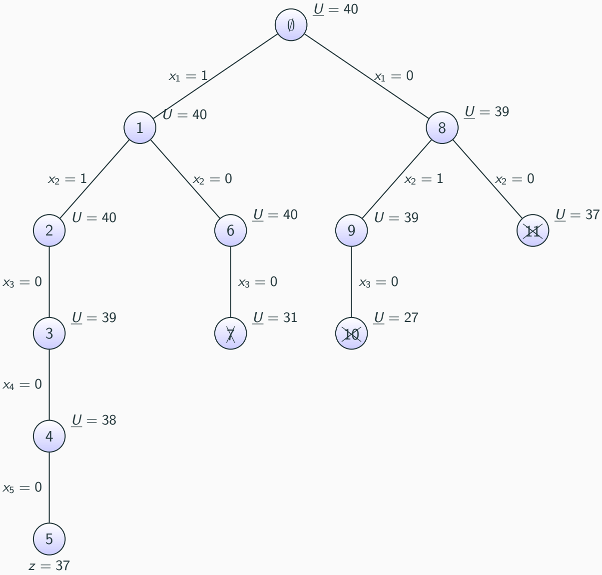


Si effettuano due backtracking fino a trovare il primo nodo (8) da cui si può ramificare e si riprende la discesa depth-first. Si pone $x_2 = 0$ e si calcola l'upper bound del nodo 11:

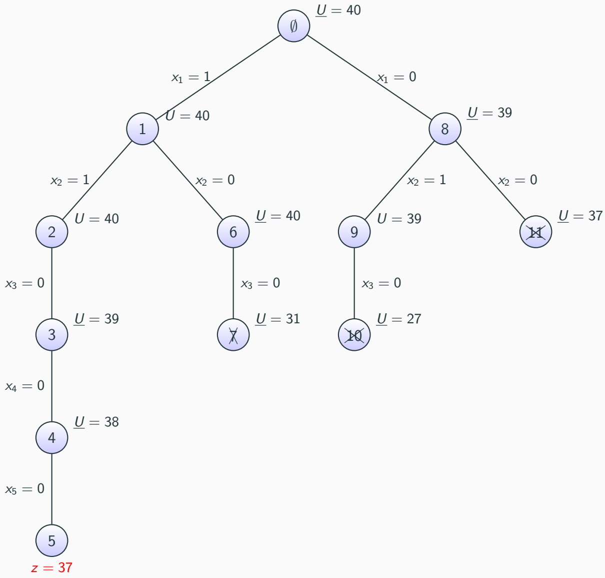
$$\underline{U} = \left\lfloor 35 + (20 - 18) \cdot \frac{10}{9} \right\rfloor = 35 + \left\lfloor 2 \cdot \frac{10}{9} \right\rfloor = 37$$



Si osserva che $\underline{U} = 37 \leq 37$



L'esecuzione termina con la soluzione ottima di valore 37 relativa alla soluzione intera $x' = (1, 1, 0, 0, 0)$



Programmazione dinamica

Si consideri il problema KP01:
$p' = (21, 16, 35, 10, 3)$, $w' = (10, 8, 18, 9, 5)$ e $c = 20$.
Sia $S \subseteq \{1, \dots, j\}$.
M_j contiene le coppie $(\sum_{k \in S} p_k, \sum_{k \in S} w_k)$ tali che $\sum_{k \in S} w_k \leq c$.
Siano $S', S'' \subseteq \{1, \dots, j\}$. Si dice che S' domina S''se vale:

$$\sum_{k \in S'} w_k \leq \sum_{k \in S''} w_k \text{ e } \sum_{k \in S'} p_k \geq \sum_{k \in S''} p_k$$

Ovvero qualunque soluzione ottenibile aggiungendo elementi ad S'' è non migliore di quella ottenibile aggiungendo gli stessi elementi ad S'.
Quindi conviene memorizzare in M_j solo la coppia prodotta da S'.

Essendo $p' = (21, 16, 35, 10, 3)$, $w' = (10, 8, 18, 9, 5)$ e $c = 20$, l'algoritmo genera gli insiemi:

$M_0 = \{(0, 0)\}$;

$M_1 = \{(0, 0), (21, 10)\}$;

$M_2 = \{(0, 0), (21, 10), (16, 8), (37, 18)\}$;

$M_3 = \{(0, 0), (21, 10), (16, 8), (37, 18), \cancel{(35, 18)}\}$;

$M_4 = \{(0, 0), (21, 10), (16, 8), (37, 18), \cancel{(10, 9)}, \cancel{(31, 19)}, (26, 17)\}$;

$M_5 = \{(0, 0), (21, 10), (16, 8), (37, 18), (26, 17), (3, 5), (24, 15), \cancel{(19, 13)}\}$.

Il miglior stato in M_5 è:

$M_5 = \{(0,0), (21,10), (16,8), (37,18), (26,17), (3,5), (24,15)\}$

Lo stato $(37,18)$ fornisce la soluzione $x = (1,1,0,0,0)$.

Esercizio 9

Esercizio 9

Problema:
Un'azienda chimica produce due tipi di composto X e Y. Ogni quintale di X dà un profitto di 1 000 € e ogni quintale di Y dà un profitto di 2 000 €. Per la produzione di un quintale di X o di Y si utilizza 1 kg di sostanza base, della quale sono disponibili 6 kg.
Il numero di quintali del composto Y prodotti non può superare il numero di quintali del composto X prodotti di più di uno. Infine si deve produrre almeno un quintale del composto X.

Esercizio 9

1. Definire il modello LP che determina la produzione di massimo profitto esprimendo i profitti in migliaia di euro.
2. Porre il modello in forma standard e risolverlo con l'algoritmo del simplesso e la regola di Bland (inserendo il minimo numero di variabili artificiali). Dire esplicitamente qual'è la soluzione trovata.
3. Disegnare con cura la regione ammissibile, evidenziando il politopo e indicando le soluzioni corrispondenti a ciascun tableau.
4. Definire il duale del problema ottenuto al punto 2. e darne la soluzione, dicendo esplicitamente come è stata ottenuta.
5. Si introduca l'ulteriore vincolo che debba essere prodotto un numero intero di quintali e si risolva con il branch-and-bound. Si scelga per il branching la variabile frazionaria di indice minimo e si esplori per primo il figlio corrispondente alla condizione $x_i \geq \lceil a_i \rceil$. Infine, si disegni l'albero decisionale.
6. Si evidenzino nella figura i tagli generati e le soluzioni ottime intere.

Soluzione

Variabili decisionali:

- x_1: quantità di composto X da produrre (espresso in quintali)
- x_2: quantità di composto Y da produrre (espresso in quintali)

Vincoli:

- Per la produzione di un quintale di X o di Y si utilizza 1 kg di sostanza base, della quale sono disponibili 6 kg:

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

- Il numero di quintali del composto Y prodotti non può superare il numero di quintali del composto X prodotti di più di uno:

$$x_2 \leq x_1 + 1$$

- Si deve produrre almeno un quintale del composto X:

$$x_1 \geq 1$$

- Variabili non negative:

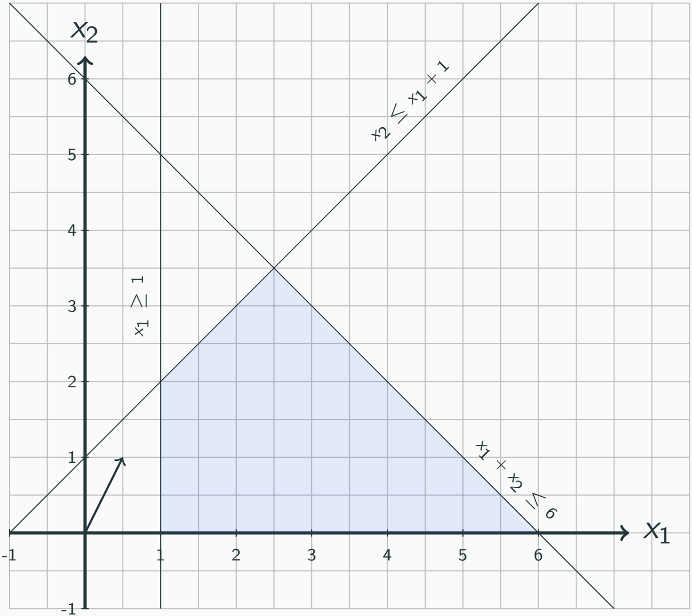
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Modello:

Ogni quintale di X dà un profitto di 1 000 € e ogni quintale di Y dà un profitto di 2 000€. Inoltre, nel modello, i profitti devono essere espressi in migliaia di euro.

$$\begin{aligned} \max z = \ & x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_2 \leq x_1 + 1 \\ & x_1 \geq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Regione amissibile



Forma standard

$$
\begin{aligned}
\max z = \; & x_1 + 2x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_2 \leq x_1 + 1 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\min z = & -x_1 - 2x_2 & & & & & \\
& x_1 + & x_2 + x_3 & & & & = 6 \\
& -x_1 + & x_2 & + x_4 & & & = 1 \\
& x_1 & & & & - x_5 & = 1 \\
& x_1 \;\;, & x_2 \;\;, & x_3 \;\;, & x_4 \;\;, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

Tableau

$$\begin{aligned} \min z = \quad & -x_1 - 2x_2 \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ & x_1 - x_5 = 1 \\ & x_1 , \; x_2 , \; x_3 , \; x_4 , \; x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

Tableau corrispondente:

0	−1	−2	0	0	0
6	1	1	1	0	0
1	−1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	−1

Non ha la forma desiderata.

Fase 1

0	-1	-2	0	0	0
6	1	1	1	0	0
1	-1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	-1

Aggiungiamo la variabile artificiale x_1^a avente costo 1.
Minimizziamo, con il metodo del simplesso, la nuova funzione obiettivo:

$$\min \zeta = \sum_{i=1}^{m} x_i^a = x_1^a$$

0	0	0	0	0	0	1
6	1	1	1	0	0	0
1	-1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	-1	1

Fase 1

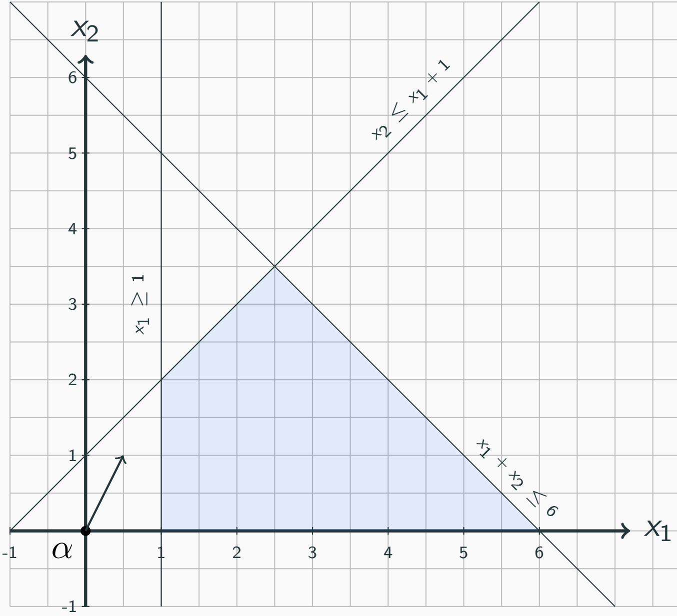
0	0	0	0	0	0	1
6	1	1	1	0	0	0
1	-1	1	0	1	0	0
1	1	0	0	0	-1	1

Si ottiene:

	-1	-1	0	0	0	1	0
$x_3 =$	6	1	1	1	0	0	0
$x_4 =$	1	-1	1	0	1	0	0
$x_1^a =$	1	1	0	0	0	-1	1

La base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_6\}$ induce la soluzione di partenza $x = (0, 0, 6, 1, 0, 1)$, corrispondente al punto $\alpha = (0, 0)$.

Soluzione iniziale: $\alpha = (0, 0)$



Regola di Bland:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\cline{2-8}
 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\cline{2-8}
x_3 = & 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 = & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_1^a = & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\cline{2-8}
\end{array}
$$

Entra in base la colonna di indice $j = 1$ essendo quella di indice minimo fra quelle con costo relativo negativo.
Calcoliamo l'indice della colonna che esce dalla base:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i1}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \min\{\frac{6}{1}, \frac{1}{1}\} = \min\{6, 1\} = 1$$

da cui si ottiene $i = 3$.

La colonna A_1 entra in base e A_6 esce dalla base. La nuova base è $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_1\}$ e con pivot l'elemento $y_{31} = 1$.

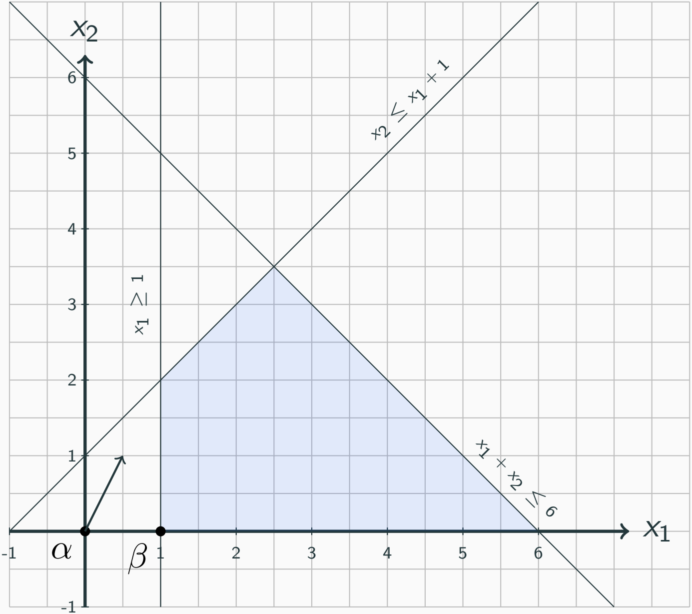
$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\hline
 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
x_3 = & 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 = & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_1^a = & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Si ottiene:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
x_3 = & 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
x_4 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
x_1 = & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

La nuova base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_1\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (1, 0, 5, 2, 0, 0)$, corrispondente al punto $\beta = (1, 0)$.

Soluzione corrente: $\beta = (1, 0)$



Fase 2

Le variabili artificiali sono fuori dalla base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_1\}$. Vettore dei costi: $c = (-1, -2, 0, 0, 0, 0)$.

0	-1	-2	0	0	0	0
5	0	1	1	0	1	-1
2	0	1	0	1	-1	1
1	1	0	0	0	-1	1

Si ottiene:

	1	0	-2	0	0	-1	1
$x_3 =$	5	0	1	1	0	1	-1
$x_4 =$	2	0	1	0	1	-1	1
$x_1 =$	1	1	0	0	0	-1	1

La base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_1\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (1, 0, 5, 2, 0, 0)$.

Regola di Bland:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\cline{2-8}
 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\cline{2-8}
x_3 = & 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
x_4 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
x_1 = & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\cline{2-8}
\end{array}
$$

Entra in base la colonna di indice $j = 2$ essendo quella di indice minimo fra quelle con costo relativo negativo.
Calcoliamo l'indice della colonna che esce dalla base:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i : y_{i1} > 0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \min \left\{ \frac{5}{1}, \frac{2}{1} \right\} = \min\{5, 2\} = 2$$

da cui si ottiene $i = 2$.

La colonna A_2 entra in base e A_4 esce dalla base. La nuova base è $\mathcal{B} = \{A_3, A_2, A_1\}$ e con pivot l'elemento $y_{22} = 1$.

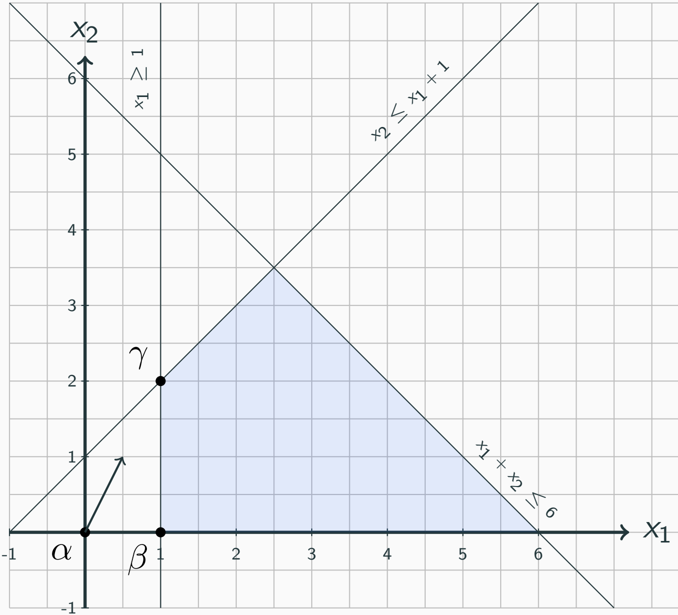
$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\cline{2-8}
 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\cline{2-8}
x_3 = & 5 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\
x_4 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
x_1 = & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\cline{2-8}
\end{array}
$$

Si ottiene:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\cline{2-8}
 & 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 3 \\
\cline{2-8}
x_3 = & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\
x_2 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
x_1 = & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\cline{2-8}
\end{array}
$$

La nuova base $\mathcal{B} = \{A_3, A_2, A_1\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (1, 2, 3, 0, 0, 0)$, corrispondente al punto $\gamma = (1, 2)$.

Soluzione corrente: $\gamma = (1, 2)$.



Regola di Bland:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\cline{2-8}
 & 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 3 \\
\cline{2-8}
x_3 = & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\
x_2 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
x_1 = & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\cline{2-8}
\end{array}
$$

Entra in base la colonna di indice $j = 5$ essendo quella di indice minimo fra quelle con costo relativo negativo.
Calcoliamo l'indice della colonna che esce dalla base:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i: y_{i1} > 0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \min \left\{ \frac{3}{2} \right\} = \frac{3}{2}$$

da cui si ottiene $i = 1$.

La colonna A_5 entra in base e A_3 esce dalla base. La nuova base è $\mathcal{B} = \{A_5, A_1, A_2\}$ e con pivot l'elemento $y_{15} = 2$.

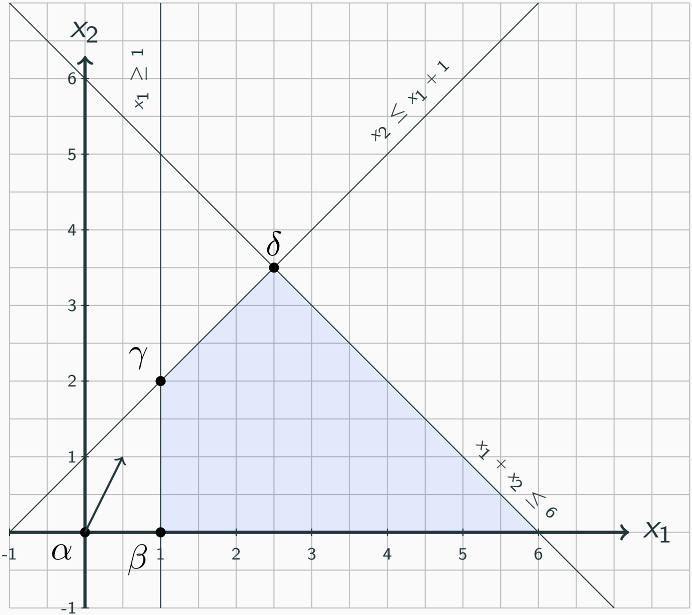
$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\hline
 & 5 & 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & 3 \\
\hline
x_3 = & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\
x_2 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
x_1 = & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Si ottiene:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\hline
 & \frac{19}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\hline
x_5 = & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\
x_2 = & \frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
x_1 = & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

La nuova base $\mathcal{B} = \{A_5, A_2, A_1\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}, 0)$, corrispondente al punto $\delta = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$.

Soluzione corrente: $\delta = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$



Soluzione ottima

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\hline
 & \frac{19}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\hline
x_5 = & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\
x_2 = & \frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
x_1 = & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Per il Teorema 4.2 (Criterio di ottimalità), essendo $\overline{c}_j \geq 0 \ \forall j$ allora la soluzione di base ammissibile $x = (\frac{5}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}, 0)$ è ottima.
La soluzione ottima consiste dunque nel produrre:

- 2,5 quintali di composto X;
- 3,5 quintali del composto Y;

ottenendo un profitto pari a $\dfrac{19}{2} \cdot 1\,000$ €$= 9\,500$ €.

Duale

$$
\begin{array}{rl}
\min z = & -x_1 - 2x_2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
& -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\
& x_1 - x_5 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{array}
$$

Il duale del problema in forma standard è:

$$
\begin{array}{rl}
\max & 6\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \\
& \pi_1 - \pi_2 + \pi_3 \leq -1 \\
& \pi_1 + \pi_2 \leq -2 \\
& \pi_1 \leq 0 \\
& + \pi_2 \leq 0 \\
& - \pi_3 \leq 0 \\
& \pi_1, \pi_2, \pi_3 \gtreqless 0
\end{array}
$$

Tableau iniziale:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\cline{2-8}
 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{2-8}
x_3 = & 6 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 = & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_1^a = & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\cline{2-8}
\end{array}
$$

Tableau finale:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\cline{2-8}
 & \frac{19}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\cline{2-8}
x_5 = & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -1 \\
x_2 = & \frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
x_1 = & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\cline{2-8}
\end{array}
$$

La base iniziale è $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_6\}$, i cui costi relativi finali sono rispettivamente $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$ e 0 mentre i costi relativi iniziali sono tutti e tre nulli. La soluzione ottima duale ha valore: $\pi_j = c_j - \overline{c}_j$, calcolati in corrispondenza della base iniziale $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_6\}$.

Dunque:

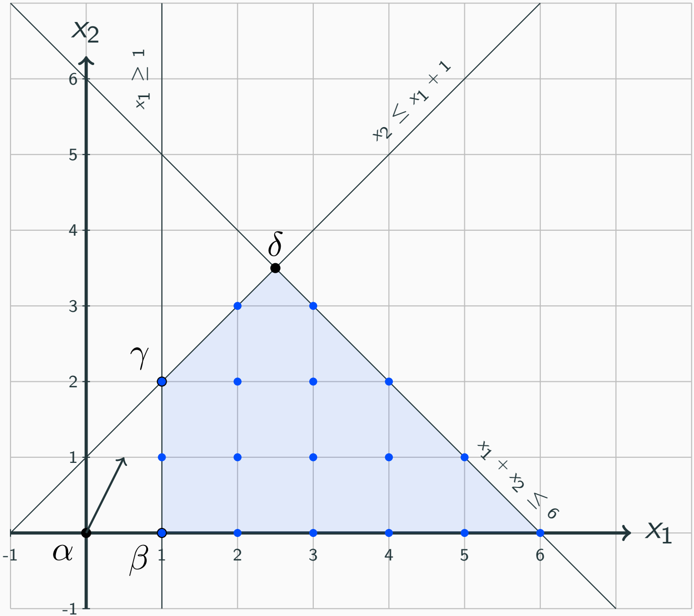
$$\pi_1 = 0 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}, \qquad \pi_2 = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \qquad \pi_3 = 0 - 0 = 0$$

Modello ILP

Introduciamo nel modello l'ulteriore vincolo che debba essere prodotto un numero intero di quintali:

$$
\begin{aligned}
\max z = \ & x_1 + 2x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_2 \leq x_1 + 1 \\
& x_1 \geq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0 \\
& x_1, x_2 \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Regione ammissibile

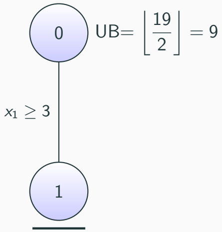


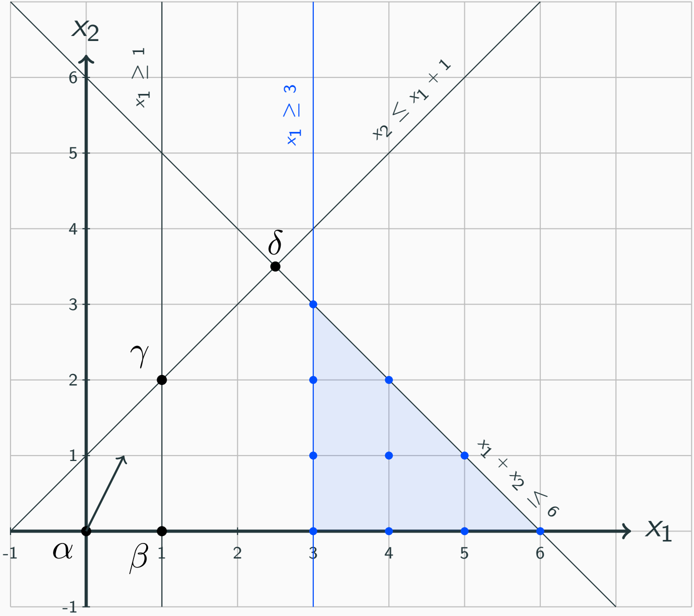
Per il branching si sceglie la variabile frazionaria di indice minimo.

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\hline
 & \frac{19}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
\hline
x_5 = & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\
x_2 = & \frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
x_1 = & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

Per primo si esplora il figlio corrispondente alla condizione:

$$x_1 \geq \left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$$





x_2
x_1
$x_1 \geq 1$
$x_1 \geq 3$
$x_2 \leq x_1 + 1$
$x_1 + x_2 \leq 6$
α
β
γ
δ
-1
1
2
3
4
5
6

Ponendo $x_1 \geq 3$ in forma standard, si ottiene:

$$-x_1 + x_6 = -3$$

e la si aggiunge al tableau:

$$\begin{array}{|c|ccccc|c|}
\hline
\frac{19}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\hline
\frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
\frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\hline
-3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\cline{2-8}
 & \frac{19}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\cline{2-8}
x_5 = & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
x_2 = & \frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
x_1 = & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\cline{2-8}
x_6 = & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\
\cline{2-8}
\end{array}$$

La base $\mathcal{B} = \{A_5, A_2, A_1, A_6\}$ è una base ammissibile per il duale, ma non ammissibile per il primale. Si applica dunque il simplesso duale.

Simplesso duale

$$
\begin{array}{r|c|cccccc|c|}
\hline
 & \frac{19}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\hline
x_5 = & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
x_2 = & \frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
x_1 = & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\hline
x_6 = & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Essendo $y_{40} < 0$, sia $i = 4$. Il pivot viene scelto come:

$$\max_{j: y_{ij} < 0} \frac{y_{0j}}{y_{ij}} = \frac{y_{0s}}{y_{is}}$$

Dunque:

$$\max \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} \right\} = -1$$

Entra in base la colonna A_4 ed esce la colonna A_6.

Simplesso duale

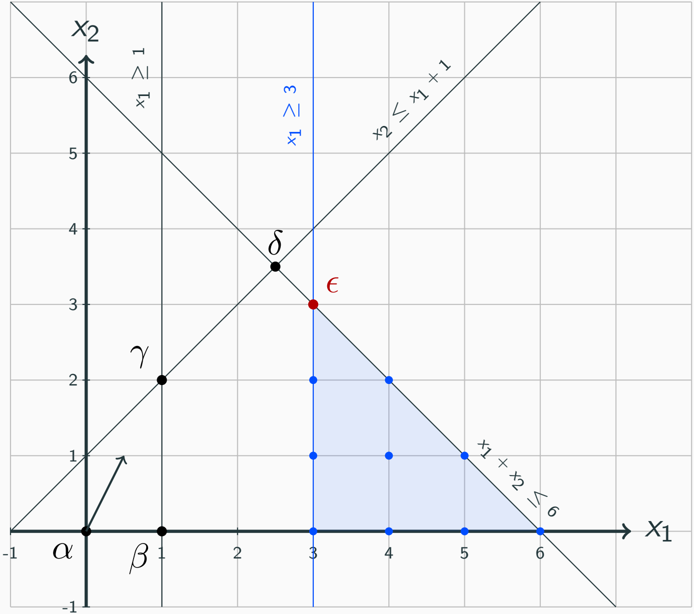
$$
\begin{array}{r|c|cccccc|c|}
\cline{2-9}
 & \frac{19}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\cline{2-9}
x_5 = & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\
x_2 = & \frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
x_1 = & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\cline{2-9}
x_6 = & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\
\cline{2-9}
\end{array}
$$

Si ottiene:

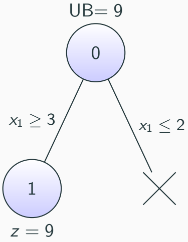
$$
\begin{array}{r|c|cccccc|c|}
\cline{2-9}
 & 9 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{2-9}
x_5 = & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
x_2 = & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
x_1 = & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
\cline{2-9}
x_4 = & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 \\
\cline{2-9}
\end{array}
$$

La base $\mathcal{B} = \{A_5, A_2, A_1, A_4\}$ è ammissibile per il primale e induce la soluzione di base ammissibile $x = (3, 3, 0, 1, 2, 0)$, corrispondente al punto $\epsilon = (3, 3)$. La soluzione x è soluzione ottima e intera del sotto-problema 1 e vale $z = 9$.

Soluzione ottima sotto-problema 1: $\epsilon = (3, 3)$.



Soluzione ottima intera



La soluzione ottima del sotto-problema 1 è intera e vale $z = 9$, quanto l'upper bound del nodo radice. La soluzione $x = (3, 3, 0, 1, 2, 0)$ è dunque ottima. Non è necessario esplorare il figlio corrispondente alla condizione: $x_1 \leq 2$.

La soluzione ottima intera consiste dunque nel produrre:

- 3 quintali di composto X;
- 3 quintali del composto Y;

con profitto pari a 9·1 000 €= 9 000 €.