ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Inferenza proposizionale

Federico Chesani

DISI

Department of Informatics – Science and Engineering

Disclaimer & Further Reading

- These slides are largely based on previous work by Prof. Paola Mello

- Russell Norvig, AIMA, vol. 1 ed. italiana:
  - Cap. 7.4, 7.5

Riassunto

Gli agenti logici applicano inferenze a una base di conoscenza per derivare nuove informazioni.

Concetti base della logica:

- sintassi: struttura formale delle sentenze
- semantica: verità di sentenze rispetto ad interpretazioni/modelli
- conseguenza logica (entailment): sentenza necessariamente vera data un'altra sentenza
- inferenza: derivare (sintatticamente) sentenze da altre sentenze
- correttezza (soundness): la derivazione produce solo sentenze che sono conseguenza logica.
- completezza (completeness): la derivazione può produrre tutte le conseguenze logiche.

Logica Proposizionale

E' la logica:

- più semplice;
- non molto espressiva;
- non possiamo esprimere variabili (solo enumerazione di tutti gli elementi);
- povera per rappresentare basi di conoscenza.

Se S, S_1, S_2 sono sentenze allora sono anche sentenze:

- $\neg S$ (negazione)
- $S_1 \wedge S_2$ (congiunzione)
- $S_1 \vee S_2$ (disgiunzione)
- $S_1 \Rightarrow S_2$ (implicazione)
- $S_1 \Leftrightarrow S_2$ (bicondizionale)

Dimostrazioni in logica proposizionale

Vedremo la dimostrazione basata su

- **Risoluzione** (corretta e completa per clausole generali)

Casi Particolari:

- Forward chaining (corretta e completa per clausole Horn)
- Backward chaining (corretta e completa per clausole Horn)

Nota: una qualunque FBF della logica proposizionale si può trasformare in un equivalente insieme di clausole generali (formule SP - somme (OR) di prodotti (AND) o PS – prodotti (AND) di somme (OR) vedi reti logiche ed algebra di Boole).

IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE

- Sistema di deduzione per la logica a clausole per il quale valgono interessanti proprietà.

- Regola di inferenza: Principio di Risoluzione che si applica a teorie del primo ordine in forma a clausole.
- Robinson , J. Alan (1965): **A Machine-Oriented Logic Based on the Resolution Principle**, Journal of ACM, 12 (1): 23–41.

- Il principio di risoluzione si applica a formule della logica in forma a clausole, ed è utilizzato dalla maggior parte dei risolutori automatici di teoremi.
- È la regola di inferenza base utilizzata nella programmazione logica.

Clausole

- Una **clausola** è una disgiunzione di letterali (cioè formule atomiche negate e non negate), in cui tutte le variabili sono quantificate universalmente in modo implicito.
- Una clausola generica può essere rappresentata come la disgiunzione:

  $A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \vee \sim B_1 \vee \ldots \vee \sim B_m$

  dove A_i (i=1,..,n) e B_j (j=1,..,m) sono atomi.
- Una clausola nella quale non compare alcun letterale, sia positivo sia negativo, è detta clausola vuota e verrà indicata con □ , interpretato come contraddizione: disgiunzione falso $\vee$ ~vero
- Un sottoinsieme delle clausole è costituito dalle **clausole definite**, nelle quali si ha sempre un solo letterale positivo:

  $A_1 \vee \sim B_1 \vee \ldots \vee \sim B_m$

IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE

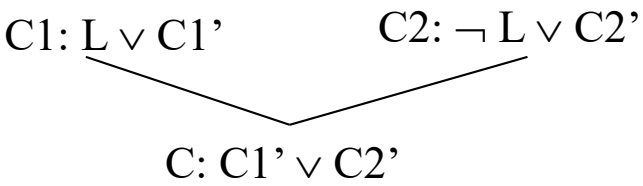
- **Logica Proposizionale**: clausole prive di variabili.
- Siano C_1 e C_2 due clausole prive di variabili:

  $C_1 = A_1 \vee \ldots \vee A_n$ $\qquad$ $C_2 = B_1 \vee \ldots \vee B_m$

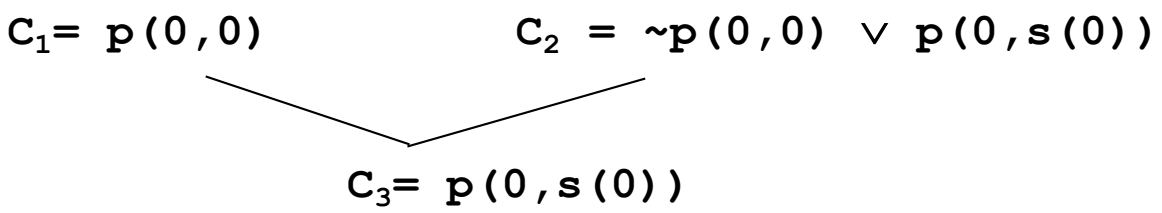
- Se esistono in C_1 e C_2 due letterali **opposti**, A_i e B_j, ossia tali che $A_i = \sim B_j$, allora da C_1 e C_2, (clausole **parent**) si può derivare una nuova clausola C_3, denominata **risolvente**, della forma:

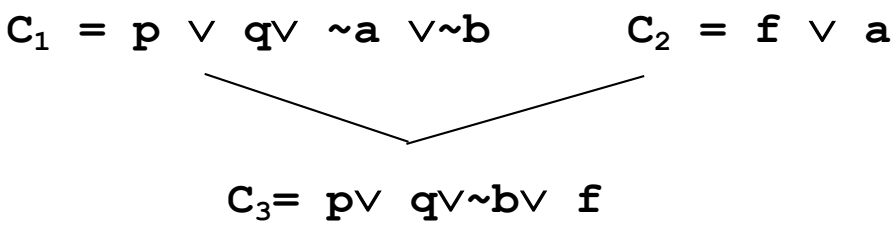
  $C_3 = A_1 \vee .. \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee .. \vee A_n \vee B_1 \vee .. \vee B_{j-1} \vee B_{j+1} \vee \ldots \vee B_m$

- **C_3 è conseguenza logica di $C_1 \cup C_2$.**



ESEMPI DI APPLICAZIONE DELLA RISOLUZIONE





DIMOSTRAZIONE PER CONTRADDIZIONE ATTRAVERSO LA RISOLUZIONE (1)

Dati gli assiomi propri H di una teoria e una formula F, derivando da $H \cup \{\sim F\}$ la contraddizione logica si dimostra che F è un teorema della teoria.

1) Ridurre H e il teorema negato ~F in forma a clausole.

   H trasformato nell'insieme di clausole H^C: $H \rightarrow H^C$

   F negata e trasformata nell'insieme di clausole F^C: $\sim F \rightarrow F^C$

2) **All'insieme $H^C \cup F^C$ si applica la risoluzione**

   Se F è un teorema della teoria, allora la risoluzione deriva la contraddizione logica (clausola vuota) in un numero finito di passi.

- **Contraddizione:** Nella derivazione compariranno due clausole del tipo A e ~B con A e B formule atomiche unificabili.

DIMOSTRAZIONE PER CONTRADDIZIONE ATTRAVERSO LA RISOLUZIONE (2)

Per dimostrare F, il metodo originario (Robinson) procede generando i risolventi per **tutte le coppie** di clausole dell'insieme di partenza $C_0 = H^C \cup F^C$ che sono aggiunti a C_0. Procedimento iterato, fino a derivare, se è possibile, la clausola vuota.

1. $C_{i+1} = C_i \cup$ {risolventi delle clausole di C_i}

2. Se C_{i+1} contiene la clausola vuota, termina.

Altrimenti ripeti il passo 1.

Nota

Ricordiamoci questa semplice trasformazione da regole a clausole:

- $a \rightarrow b$. Diventa in modo equivalente $\sim a \vee b$
- $a \wedge c \rightarrow b$. Diventa in modo equivalente $\sim (a \wedge c) \vee b$
  e applicando de Morgan $\sim a \vee \sim c \vee b$

ESEMPIO DI DIMOSTRAZIONE

BASE DI CONOSCENZA:

$H = \{ (a \rightarrow c \vee d) \wedge (a \vee d \vee e) \wedge (a \rightarrow \sim c) \}$

$F = \{ d \vee e \}$

- La trasformazione in clausole di H e ~F produce:

$H^C = \{\sim a \vee c \vee d, a \vee d \vee e, \sim a \vee \sim c\}$

$F^C = \{\sim d, \sim e\}$ (cioe' $\sim(d \vee e)$)

- Si vuole dimostrare che $H^C \cup F^C$:

$\sim a \vee c \vee d$, (1)

$a \vee d \vee e$, (2)

$\sim a \vee \sim c$, (3)

$\sim d$, (4)

$\sim e$ (5)

è contraddittorio.

ESEMPIO DI DIMOSTRAZIONE (cont.)

~a ∨ c ∨ d, (1)

a ∨ d ∨ e, (2)

~a ∨ ~c, (3)

~d, (4)

~e (5)

- **Tutti i possibili risolventi al passo 1 sono:**

c ∨ d ∨ e,	(6)	da (1) e (2)
d ∨ e ∨ ~c,	(7)	da (2) e (3)
~a ∨ c,	(8)	da (1) e (4)
a ∨ e,	(9)	da (2) e (4)
a ∨ d,	(10)	da (2) e (5)
~a ∨ d	(11)	da (1) e (3)

- **Al passo 2, da (10) e (11) viene derivato il risolvente:**

d (12)

- **al passo 3, da (4) e (12) viene derivata anche la clausola vuota.**

Algoritmo di Risoluzione per la Logica Proposizionale

- Per contraddizione, i.e., $KB \wedge \neg a$ e' insoddisfacibile

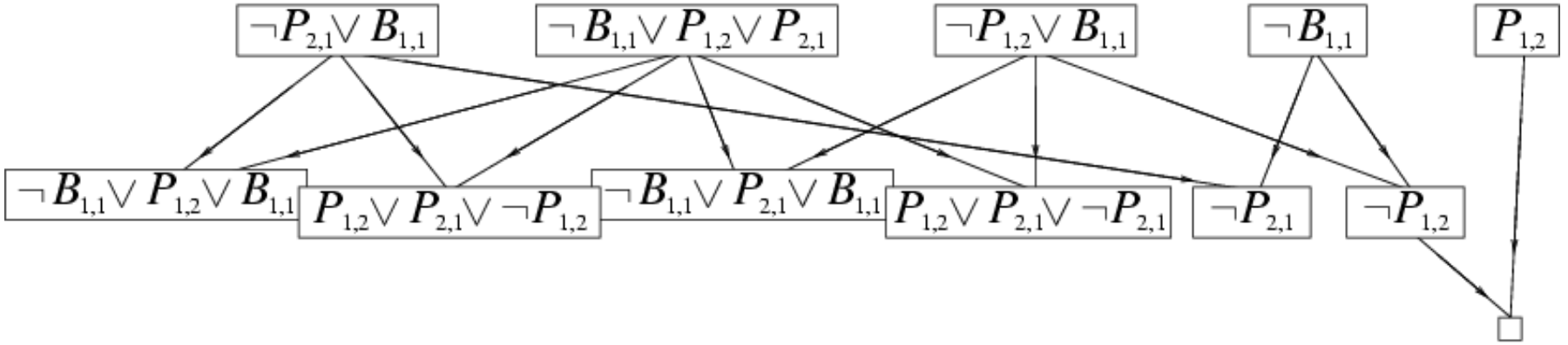
function PL-RESOLUTION(KB, α) **returns** *true* or *false*

clauses $\leftarrow$ the set of clauses in the CNF representation of $KB \wedge \neg\alpha$
new $\leftarrow \{\}$
loop do
  for each C_i, C_j **in** *clauses* **do**
    resolvents $\leftarrow$ PL-RESOLVE(C_i, C_j)
    if *resolvents* contains the empty clause **then return** *true*
    new $\leftarrow$ *new* $\cup$ *resolvents*
  if *new* $\subseteq$ *clauses* **then return** *false*
  clauses $\leftarrow$ *clauses* $\cup$ *new*

Da: S. Russell & P. Norvig: "Intelligenza Artificiale: un approccio moderno", Pearson ed.

Esempio di Risoluzione

- $KB = (B_{1,1} \Leftrightarrow (P_{1,2} \vee P_{2,1})) \wedge \neg B_{1,1}$
- $\alpha = \neg P_{1,2}$



Da: S. Russell & P. Norvig: "Intelligenza Artificiale: un approccio moderno", Pearson ed.

CASI PARTICOLARI: Forward e backward chaining

- **Horn Form** (sottinsieme della logica proposizionale)
  KB = congiunzione di clausole di Horn
  - Clausole di Horn =
    - Proposizioni atomiche; o
    - (congiunzione di proposizioni atomiche) $\Rightarrow$ proposizione atomica (una!)
  - E.g. KB = $C \wedge (B \Rightarrow A) \wedge (C \wedge D \Rightarrow B)$

- Modus Ponens (per Horn): completo per Horn KB

$$\frac{a_1, \ldots, a_n, \qquad a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \Rightarrow \beta}{\beta}$$

- Può essere usato sia per forward chaining o backward chaining.
  Algoritmi molto naturali e con compessità lineare in tempo.

  Nota: in letteratura è più preciso il termine clausole definite per questo caso piuttosto che clausole di Horn.

Sommario

- La risoluzione è completa per la logica proposizionale
- Forward, backward chaining sono complete per le clausole di Horn

- La logica proposizionale è povera dal punto di vista espressivo.