



ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Inferenza e First Order Logic

Federico Chesani

DISI

Department of Informatics – Science and Engineering

Disclaimer & Further Reading

- These slides are largely based on previous work by Prof. Paola Mello
- Russell Norvig, AI/MA, vol. 1 ed. italiana:
 - Cap. 7.4, 7.5



Dimostrazioni in logica dei predicati

La logica dei predicati è un linguaggio più potente per esprimere KB (variabili e quantificatori)

Vedremo la dimostrazione basata su

- **Risoluzione** (corretta e completa per clausole generali)
- **Forward chaining** (corretta e completa per clausole Horn) Usata nei Database deduttivi (DATALOG)
- **Backward chaining** (corretta e completa per clausole Horn) Usata nella Programmazione Logica (PROLOG).



TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (1)

Una qualunque fbf della logica dei predicati si può trasformare in un insieme di clausole generali.

Passi:

1) Trasformazione in fbf chiusa

Esempio, la formula:

$$- \forall X (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y (q(X,Y) \rightarrow p(Y)))) \quad (1)$$

è trasformata in:

$$- \forall X \forall Y (p(Y) \rightarrow \sim(\forall Y (q(X,Y) \rightarrow p(Y)))) \quad (2)$$

2) **Applicazione delle equivalenze per i connettivi logici** (ad esempio $A \rightarrow B$ è sostituito da $\sim A \vee B$) e la si riduce in forma and-or.

La formula (2) diventa:

$$- \forall X \forall Y (\sim p(Y) \vee \sim(\forall Y (\sim q(X,Y) \vee p(Y)))) \quad (3)$$



TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (2)

3) **Applicazione della negazione ad atomi e non a formule composte**, tenendo presente che:

$\forall X \sim A$ equivale a $\sim \exists X A$

$\exists X \sim A$ equivale a $\sim \forall X A$

$\sim(A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n)$ equivale a $\sim A_1 \wedge \sim A_2 \wedge \dots \wedge \sim A_n$

$\sim(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n)$ equivale a $\sim A_1 \vee \sim A_2 \vee \dots \vee \sim A_n$

(leggi di De Morgan).

Esempio: (3) $\forall X \forall Y (\sim p(Y) \vee \sim(\forall Y (\sim q(X,Y) \vee p(Y))))$ si modifica in:

$$\forall X \forall Y (\sim p(Y) \vee (\exists Y (q(X,Y) \wedge \sim p(Y)))) \quad (4)$$

4) **Cambiamento di nomi delle variabili**, nel caso di conflitti.

in (4) la seconda variabile Y viene rinominata Z:

$$\forall X \forall Y (\sim p(Y) \vee (\exists Z (q(X,Z) \wedge \sim p(Z)))) \quad (5)$$



TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (3)

5) **Spostamento dei quantificatori** in testa alla formula (forma prenessa).

$$\forall X \forall Y \exists Z (\sim p(Y) \vee (q(X,Z) \wedge \sim p(Z))) \quad (6)$$

6) **Forma normale congiuntiva** cioè come congiunzione di disgiunzioni, con quantificazione in testa.

$$\forall X \forall Y \exists Z ((\sim p(Y) \vee q(X,Z)) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(Z))) \quad (7)$$

7) **Skolemizzazione**: ogni variabile quantificata esistenzialmente viene sostituita da una funzione delle variabili quantificate universalmente che la precedono. Tale funzione è detta funzione di Skolem.

Ad esempio una formula del tipo: $\forall X \exists Y p(X,Y)$ può essere espressa in modo equivalente come: $\forall X p(X,g(X))$

In (7) Z è sostituita da $f(X,Y)$, perché Z si trova nel campo di azione delle quantificazioni $\forall X$ e $\forall Y$:

$$\forall X \forall Y ((\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y)))) \quad (8)$$



TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (3)

7) **Skolemizzazione**: ogni variabile quantificata esistenzialmente viene sostituita da una funzione delle variabili quantificate universalmente che la precedono. Tale funzione è detta funzione di Skolem.

Ad esempio una formula del tipo: $\forall X \exists Y p(X,Y)$ può essere espressa in modo equivalente come: $\forall X p(X,g(X))$

In (7) Z è sostituita da $f(X,Y)$, perché Z si trova nel campo di azione delle quantificazioni $\forall X$ e $\forall Y$:

$$\forall X \forall Y ((\sim p(Y) \vee q(X,f(X,Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X,Y)))) \quad (8)$$

- **Perdita in espressività**. Non è la stessa cosa asserire: $F: \exists X p(X)$ oppure $F': p(f)$.
- Vale comunque la proprietà che F è inconsistente se e solo se F' è inconsistente.



TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (4)

8) **Eliminazione dei quantificatori universali**: si ottiene è una formula detta universale (tutte le sue variabili sono quantificate universalmente) in forma normale congiuntiva.

$$((\sim p(Y) \vee q(X, f(X, Y))) \wedge (\sim p(Y) \vee \sim p(f(X, Y)))) \quad (9)$$

- Una formula di questo tipo rappresenta **un insieme di clausole** (ciascuna data da un congiunto nella formula). La forma normale a clausole che si ottiene:

$$\{ \sim p(Y) \vee q(X, f(X, Y)), \quad \sim p(Y) \vee \sim p(f(X, Y)) \} \quad (10)$$

- La seconda clausola può essere riscritta rinominando le variabili (sostituendo cioè la formula con una sua variante).

$$\{ \sim p(Y) \vee q(X, f(X, Y)), \quad \sim p(Z) \vee \sim p(f(W, Z)) \} \quad (11)$$



TRASFORMAZIONE IN CLAUSOLE (5)

- Qualunque teoria del primo ordine T può essere trasformata in una teoria T' in forma a clausole.
- Anche se T non è logicamente equivalente a T' (a causa dell'introduzione delle funzioni di Skolem), vale comunque la seguente proprietà (teorema:

Sia T una teoria del primo ordine e T' una sua trasformazione in clausole. Allora T è insoddisfacibile se e solo se T' è insoddisfacibile.

- Il principio di risoluzione è una procedura di dimostrazione che opera per contraddizione e si basa sul concetto di insoddisfacibilità.



UNIFICAZIONE

Per applicare il principio di risoluzione alle clausole non “ground” è necessario introdurre il concetto di **unificazione** [Robinson 65].

- **Unificazione**: procedimento di manipolazione formale utilizzato per stabilire quando due espressioni possono coincidere procedendo a opportune sostituzioni.
- **Sostituzione**: σ insieme di legami di termini T_i a simboli di variabili X_i ($i=1, \dots, n$).

$$\sigma = \{X_1/T_1, X_2/T_2, \dots, X_n/T_n\}$$

dove X_1, X_2, \dots, X_n sono distinte.

- La sostituzione corrispondente all'insieme vuoto è detta **sostituzione identità** (ϵ).



SOSTITUZIONI E RENAMING

- **Applicazione della sostituzione σ a un'espressione E** , $[E]\sigma$, produce una nuova espressione ottenuta sostituendo simultaneamente ciascuna variabile X_i dell'espressione con il corrispondente termine T_i . $[E]\sigma$ è detta **istanza** di E .
- **Renaming**: sostituzioni che cambiano semplicemente il nome ad alcune delle variabili di E . , $[E]\sigma$ è una **variante** di E .



SOSTITUZIONI ESEMPIO

- L'applicazione della sostituzione $\sigma = \{X/c, Y/a, Z/W\}$ all'espressione $p(X, f(Y), b, Z)$ produce l'istanza $p(c, f(a), b, W)$.

$$[c(Y, Z)]\{Y/T, Z/\text{bianchi}\} = c(T, \text{bianchi})$$

$$[c(T, \text{neri})]\{Y/T, Z/\text{bianchi}\} = c(T, \text{neri})$$

Analogamente:

$$[c(Y, Z)]\{Y/T, Z/\text{neri}\} = c(T, \text{neri})$$

$$[t(l(a), t(l(b), l(H)))]\{H/l(a), Y/l(b), Z/l(l(a))\} =$$

$$[c(T, \text{neri})]\{Y/T, Z/\text{neri}\} = c(T, \text{neri})$$

$$t(l(a), t(l(b), l(l(a))))$$

$$[c(Y, Z)]\{Y/\text{bianchi}, T/\text{bianchi}, Z/\text{neri}\} = c(\text{bianchi}, \text{neri})$$

$$[t(H, t(Y, Z))]\{H/T, Y/X, Z/W\} = t(T, t(X, W))$$

$$[c(T, \text{neri})]_{\varepsilon} = c(T, \text{neri})$$

$$[c(T, \text{neri})]\{Y/\text{bianchi}, T/\text{bianchi}, Z/\text{neri}\} = c(\text{bianchi}, \text{neri})$$

$$[p(X, Y)]\{X/a, Y/X\} = p(a, X)$$



COMBINAZIONE DI SOSTITUZIONI

- **Combinazioni di sostituzioni:**

$$\sigma_1 = \{X_1/T_1, X_2/T_2, \dots, X_n/T_n\} \quad \sigma_2 = \{Y_1/Q_1, Y_2/Q_2, \dots, Y_m/Q_m\}$$

- **composizione** $\sigma_1\sigma_2$ di σ_1 e σ_2 è la sostituzione

$$\{X_1/[T_1]\sigma_2, \dots, X_n/[T_n]\sigma_2, Y_1/Q_1, Y_2/Q_2, \dots, Y_m/Q_m\}$$

cancellando le coppie $X_i/[T_i]\sigma_2$ per le quali si ha $X_i = [T_i]\sigma_2$ e le coppie Y_j/Q_j per le quali Y_j appartiene all'insieme $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

Esempio : $\sigma_1 = \{X/f(Z), W/R, S/c\}$ $\sigma_2 = \{Y/X, R/W, Z/b\}$

produce: $\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 = \{X/f(b), S/c, Y/X, R/W, Z/b\}$.



SOSTITUZIONI PIU' GENERALI

- **Sostituzioni più generali:** Una sostituzione θ è più generale di una sostituzione σ se esiste una sostituzione λ tale che $\sigma = \theta\lambda$.

Esempio : La sostituzione $\theta = \{Y/T, Z/neri\}$ è più generale della sostituzione $\sigma = \{Y/bianchi, T/bianchi, Z/neri\}$ in quanto σ si può ottenere attraverso la composizione $\{Y/T, Z/neri\}\{T/bianchi\}$ ($\sigma = \theta\lambda$, e $\lambda = \{T/bianchi\}$).



SOSTITUZIONE UNIFICATRICE

- L'**unificazione** rende identici due o più atomi (o termini) (o meglio le loro **istanze**) attraverso un' opportuna sostituzione.
- Se si considerano solo due atomi (o termini), uno dei quali senza alcuna variabile, si ricade in un caso particolare di unificazione, detto **pattern-matching**.
- Un insieme di atomi (o termini) A_1, A_2, \dots, A_n è **unificabile** se esiste una sostituzione σ tale che:

$$[A_1]\sigma = [A_2]\sigma = \dots = [A_n]\sigma.$$

- La sostituzione σ è detta **sostituzione unificatrice** (o unificatore)



ESEMPIO DI SOSTITUZIONI UNIFICATRICI (1)

Esempio Se si considerano gli atomi:

$$A1=c(Y,Z)$$

$$A2=c(T,neri)$$

- possibili sostituzioni unificatrici sono:

$$\theta = \{Y/T, Z/neri\}$$

$$\sigma = \{Y/bianchi, T/bianchi, Z/neri\}$$

- la loro applicazione produce la stessa istanza:

$$[c(Y,Z)]\theta = [c(T,neri)]\theta = c(T,neri)$$

$$[c(Y,Z)]\sigma = [c(T,neri)]\sigma = c(bianchi,neri)$$

- La sostituzione:

$\lambda=\{Y/T, Z/bianchi\}$ non è un unificatore per $A1$ e $A2$ perchè produce istanze diverse.



ESEMPIO DI SOSTITUZIONI UNIFICATRICI (2)

Per gli atomi:

A3: $p(X, X, f(a, Z))$

A4: $p(Y, W, f(Y, J))$

possibili sostituzioni unificatrici sono:

$$\mu = \{X/a, Y/a, W/a, J/Z\}$$

$$\varphi = \{X/a, Y/a, W/a, J/c, Z/c\}$$

- la loro applicazione ad A3 e A4 produce la stessa istanza:

$p(a, a, f(a, Z))$ nel caso della sostituzione μ

$p(a, a, f(a, c))$ nel caso della sostituzione φ .

- Possono esistere più sostituzioni unificatrici, si vuole individuare quella più generale (mgu, **most general unifier**).

μ mgu: φ si ottiene da μ componendola con: $\alpha = \{Z/c\}$.



ESEMPI DI MGU

θ indica la sostituzione unificatrice più generale:

$$1) \quad p(X, f(a)) \quad p(b, Y)$$

$$\theta = \{X/b, Y/f(a)\}$$

$$2) \quad t(l(a), t(l(b), l(c))) \quad t(l(X), Z)$$

$$\theta = \{X/a, Z/t(l(b), l(c))\}$$

I termini $t(l(a), t(l(b), l(c)))$ e $t(l(X), Z)$ rappresentano alberi binari.

$$3) \quad t(l(a), t(l(b), l(H))) \quad t(H, t(Y, Z))$$

$$\theta = \{H/l(a), Y/l(b), Z/l(l(a))\}$$

$$4) \quad f(X, g(Y), T) \quad f(c(a, b), g(g(a, c)), Z).$$

$$\theta = \{X/c(a, b), Y/g(a, c), T/Z\}$$

$$5) \quad .(a, .(b, .(c, .(d, [])))) \quad .(X, Y)$$

$$\theta = \{X/a, Y/.(b, .(c, .(d, [])))\}$$

rappresentano liste

$$6) \quad .(a, .(b, .(c, .(d, [])))) \quad .(X, .(Y, Z))$$

$$\theta = \{X/a, Y/b, Z/.(c, .(d, []))\}$$

$$7) \quad .(a, .(b, .(c, .(d, [])))) \quad .(c, Y)$$

Non sono unificabili.

$$8) \quad t(t(t(X, Y), l(c)), Y) \quad t(t(t(Y, Y), l(c)), l(X))$$

Non sono unificabili



ALGORITMO DI UNIFICAZIONE

- Algoritmo in grado di **determinare se due atomi (o termini) sono unificabili o meno e restituire, nel primo caso, la sostituzione unificatrice più generale.**
- Esistono vari algoritmi di unificazione di differente complessità.
- Regole alla base dell'algoritmo di unificazione fra due termini T1 e T2.

T1 \ T2	<costante> C2	<variabile> X2	<termine composto> S2
<costante> C1	ok se $C1 = C2$	ok $\{X2/C1\}$	NO
<variabile> X1	ok $\{X1/C2\}$	ok $\{X1/X2\}$	ok $\{X1/S2\}$
<termine composto> S1	NO	ok $\{X2/S1\}$	ok se S1 e S2 hanno stesso funtore e arietà e gli argomenti UNIFICANO



ALGORITMO DI UNIFICAZIONE

- Funzione Unify che ha come parametri di ingresso due atomi o termini da unificare A e B e la sostituzione eventualmente già applicata.
- La funzione termina sempre ed è in grado di fornire o la sostituzione più generale per unificare A e B o un fallimento (FALSE).
- Un termine composto (cioè diverso da costante o variabile) è rappresentato da un operatore OP (il simbolo funzionale del termine) e come altri elementi gli argomenti del termine ARGS (lista).
- Es: $f(a, g(b, c), X)$ rappresentato come: $[f, a, [g, b, c], X]$.
- La funzione FIRST applicata a una lista L, restituisce il primo elemento di L, mentre la funzione REST il resto della lista L.



L'algoritmo di unificazione

```
function UNIFY( $x, y, \theta$ ) returns a substitution to make  $x$  and  $y$  identical
  inputs:  $x$ , a variable, constant, list, or compound
          $y$ , a variable, constant, list, or compound
          $\theta$ , the substitution built up so far

  if  $\theta = \text{failure}$  then return failure
  else if  $x = y$  then return  $\theta$ 
  else if VARIABLE?( $x$ ) then return UNIFY-VAR( $x, y, \theta$ )
  else if VARIABLE?( $y$ ) then return UNIFY-VAR( $y, x, \theta$ )
  else if COMPOUND?( $x$ ) and COMPOUND?( $y$ ) then
    return UNIFY(ARGS[ $x$ ], ARGS[ $y$ ], UNIFY(OP[ $x$ ], OP[ $y$ ],  $\theta$ ))
  else if LIST?( $x$ ) and LIST?( $y$ ) then
    return UNIFY(REST[ $x$ ], REST[ $y$ ], UNIFY(FIRST[ $x$ ], FIRST[ $y$ ],  $\theta$ ))
  else return failure
```

L'algoritmo di unificazione

```
function UNIFY-VAR( $var, x, \theta$ ) returns a substitution
  inputs:  $var$ , a variable
           $x$ , any expression
           $\theta$ , the substitution built up so far

  if  $\{var/val\} \in \theta$  then return UNIFY( $val, x, \theta$ )
  else if  $\{x/val\} \in \theta$  then return UNIFY( $var, val, \theta$ )
  else if OCCUR-CHECK?( $var, x$ ) then return failure
  else return add  $\{var/x\}$  to  $\theta$ 
```

OCCUR CHECK

- È il controllo che un termine variabile da unificare con un secondo termine non compaia in quest'ultimo. Necessario per assicurare la terminazione dell'algoritmo e la correttezza del procedimento di unificazione.
- I due termini "X" e "f(X)" non sono unificabili: non esiste una sostituzione per X che renda uguali i due termini.
- Se un termine t ha una struttura complessa, la verifica se X compare in t può essere anche molto inefficiente.
- Prolog NON utilizza l' occur-check: non corretto !!



OCCUR CHECK: ESEMPIO

- Esempio: Si considerino i termini:
 - $p(X, f(X))$.
 - $p(Y, Y)$.
 - Senza occur check unificano e viene prodotta la sostituzione (contenente un termine infinito): $Y = f(f(f(\dots)))$
- Quindi se p rappresentasse il predicato maggiore ed f la funzione successore deriverebbe che esiste un numero maggiore di sé stesso!
- Dimostrazione non corretta!!



IL PRINCIPIO DI RISOLUZIONE PER LE CLAUSOLE GENERALI

Clausole generali: clausole nelle quali possono comparire variabili.

- Siano C_1 e C_2 due clausole del tipo:

$$C_1 = A_1 \vee \dots \vee A_n$$

$$C_2 = B_1 \vee \dots \vee B_m$$

- dove A_i ($i=1..n$) e B_j ($j=1..m$) sono letterali positivi o negativi in cui possono comparire variabili.
- Se esiste A_i e B_j tali che $[A_i]\theta = [\sim B_j]\theta$, dove θ è la sostituzione unificatrice più generale, allora si può derivare una nuova clausola C_3 (il risolvente):

$$[A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_{j-1} \vee B_{j+1} \vee \dots \vee B_m]\theta$$

- Date due clausole C_1 e C_2 , il loro risolvente C_3 è conseguenza logica di $C_1 \cup C_2$.



MGU PER RICAVARE IL RISOLVENTE

Regola di inferenza

$$\frac{A_1 \vee \dots \vee A_n B_1 \vee \dots \vee B_m \exists \theta : [A_i]\theta = [\sim B_j]\theta}{[A_1 \vee \dots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee \dots \vee A_n \vee B_1 \vee \dots \vee B_{j-1} \vee B_{j+1} \vee \dots \vee B_m]\theta}$$

dove θ è la sostituzione più generale per A_i e $\sim B_j$.

Esempio: si considerino le seguenti clausole:

$$p(X, m(a)) \vee q(S, a) \vee c(X) \quad (C1)$$

$$\sim p(r, Z) \vee c(Z) \vee \sim b(W, U) \quad (C2)$$

I letterali $p(X, m(a))$ e $p(r, Z)$ sono unificabili attraverso la mgu $\theta = \{X/r, Z/m(a)\}$.

Risolvente:

$$q(S, a) \vee c(r) \vee c(m(a)) \vee \sim b(W, U) \quad (C3)$$



MGU PER RICAVARE IL RISOLVENTE

Regola di inferenza

Esempio: dalle seguenti clausole:

$$p(a,b) \vee q(X,a) \vee c(X) \quad (C1)$$

$$\sim p(a,Y) \vee \sim c(f(Y)) \quad (C2)$$

si ottengono i seguenti risolventi:

$$q(X,a) \vee c(X) \vee \sim c(f(b)) \quad (C3)$$

$$p(a,b) \vee q(f(Y),a) \vee \sim p(a,Y) \quad (C4)$$

C3: ottenuto selezionando $p(a,b)$ da C1 e $\sim p(a,Y)$ da C2 e applicando la mgu $\theta = \{Y/b\}$.

C4: ottenuto selezionando $c(X)$ da C1 e $\sim c(f(Y))$ da C2 e applicando la mgu $\theta = \{X/f(Y)\}$.



ESEMPIO

Si considerino gli insiemi:

$$H = \{\forall X (\text{uomo}(X) \rightarrow \text{mortale}(X)), \text{uomo}(\text{socrate})\}$$

$$F = \{\exists X \text{mortale}(X)\}$$

La trasformazione in clausole di H e $\sim F$ produce:

$$H^C = \{\sim \text{uomo}(X) \vee \text{mortale}(X), \text{uomo}(\text{socrate})\}$$

$$F^C = \{\sim \text{mortale}(X)\}$$

L'insieme $H^C \cup F^C$ è il seguente:

$$\{ \sim \text{uomo}(X) \vee \text{mortale}(X), (1)$$

$$\text{uomo}(\text{socrate}), (2)$$

$$\sim \text{mortale}(Y) \} (3)$$

La variabile X di F^C rinominata con Y che non appare in nessuna altra clausola dell'insieme. Questa operazione viene eseguita ogni volta che si aggiungono nuovi risolventi all'insieme delle clausole.



ESEMPIO

$\{\sim\text{uomo}(X) \vee \text{mortale}(X), \quad (1)$

$\text{uomo}(\text{socrate}), \quad (2)$

$\sim\text{mortale}(Y)\}$ (3)

- Al passo 1, tutti i possibili risolventi, e le sostituzioni unificatrici più generali applicate per derivarli, sono:

$\{\text{mortale}(\text{socrate}), \quad (4) \quad \theta=\{X/\text{socrate}\}$

$\sim\text{uomo}(Z)\}$ $(5) \quad \theta=\{X/Y\}$

- Al passo 2, da (2) e (5) viene derivata la clausola vuota, applicando la sostituzione $\{Z/\text{socrate}\}$. La clausola vuota è anche derivabile dalle clausole (3) e (4) applicando la sostituzione $\{Y/\text{socrate}\}$.



ESEMPIO

1. cane(fido).
 2. \sim abbaia(fido).
 3. scodinzola(fido).
 4. miagola(geo).
 5. scodinzola(X) and cane(X) \rightarrow amichevole(X).
 6. amichevole(X1) and \sim abbaia(X1) $\rightarrow \sim$ spaventato(Y1,X1).
 7. cane(X2) \rightarrow animale(X2).
 8. miagola(X3) \rightarrow gatto(X3).
- Goal : 9. esiste X4, Y cane(X4) and gatto(Y) and \sim spaventato(Y,X4).

TRADUZIONE IN CLAUSOLE

1. cane(fido).
 2. \sim abbaia(fido).
 3. scodinzola(fido).
 4. miagola(geo).
 5. \sim scodinzola(X) or \sim cane(X) or amichevole(X).
 6. \sim amichevole(X1) or abbaia(X1) or \sim spaventato(Y1,X1).
 7. \sim cane(X2) or animale(X2).
 8. \sim miagola(X3) or gatto(X3).
- Goal negato: 9. \sim cane(X4) or \sim gatto(Y) or spaventato(Y,X4).



Esempio

1. cane(fido).
2. \sim abbaia(fido).
3. scodinzola(fido).
4. miagola(geo).
5. \sim scodinzola(X) or \sim cane(X) or amichevole(X).
6. \sim amichevole(X1) or abbaia(X1) or \sim spaventato(Y1,X1).
7. \sim cane(X2) or animale(X2).
8. \sim miagola(X3) or gatto(X3).
- Goal negato: 9. \sim cane(X4) or \sim gatto(Y) or spaventato(Y,X4).
- Da 9 e 1: 10. \sim gatto(Y) or spaventato(Y,fido).
- Da 10. e 6: 11. \sim amichevole(fido) or abbaia(fido) or \sim gatto(Y).
- Da 11. e 2: 12. \sim amichevole(fido) or \sim gatto(Y).
- Da 8. e 12: 13. \sim amichevole(fido) or \sim miagola(Y).
- Da 13. e 4: 14. \sim amichevole(fido).
- Da 5. e 14: 15. \sim scodinzola(fido) or \sim cane(fido).
- Da 3. e 15: 16. \sim cane(fido)
- Da 1. e 16. CONTRADDIZIONE !!



CORRETTEZZA e COMPLETEZZA

Si può dimostrare che sotto opportune strategie, la risoluzione è **corretta e completa**.

- Se viene generata la clausola vuota la teoria $H^C \cup F^C$ è insoddisfacibile e se la teoria $H^C \cup F^C$ è insoddisfacibile la derivazione genera la clausola vuota **in un numero finito** di passi.

Teorema : (Correttezza e completezza della risoluzione)

Un insieme di clausole è insoddisfacibile se e solo se l'algoritmo di risoluzione termina con successo in un numero finito di passi, generando la clausola vuota.

- Il metodo di risoluzione procede esaustivamente generando tutti i possibili risolventi ad ogni passo.



STRATEGIE

- Si definiscono strategie che scelgono opportunamente le clausole da cui derivare un risolvente.
- I metodi di prova che si ottengono risultano più efficienti anche se in alcuni casi possono introdurre incompletezza.
- La dimostrazione attraverso il principio di risoluzione può essere rappresentata con un grafo, detto **grafo di refutazione**.
- Le clausole dell'insieme base $H^C \cup F^C$ sono nodi del grafo dai quali possono solo uscire archi.
- Un risolvente corrisponde a un nodo nel quale entrano almeno due archi (ciascuno da una delle due clausole “parent”).
- **Strategia in ampiezza (“breadth-first”)**. Al passo i ($i \geq 0$), genera tutti i possibili risolventi a livello $i+1$ -esimo utilizzando come clausole “parent” una clausola di C_i (cioè una clausola a livello i) e una di C_j ($j \leq i$), cioè una clausola appartenente a un livello uguale o minore di i .



ESEMPIO DI STRATEGIA IN AMPIEZZA E GRAFO DI REFUTAZIONE (1)

$$H = H^C = \{on(b1,tavola), \quad (1)$$

$$on(b2,tavola), \quad (2)$$

$$colore(b1,rosso) \vee colore(b2,rosso) \quad (3)$$

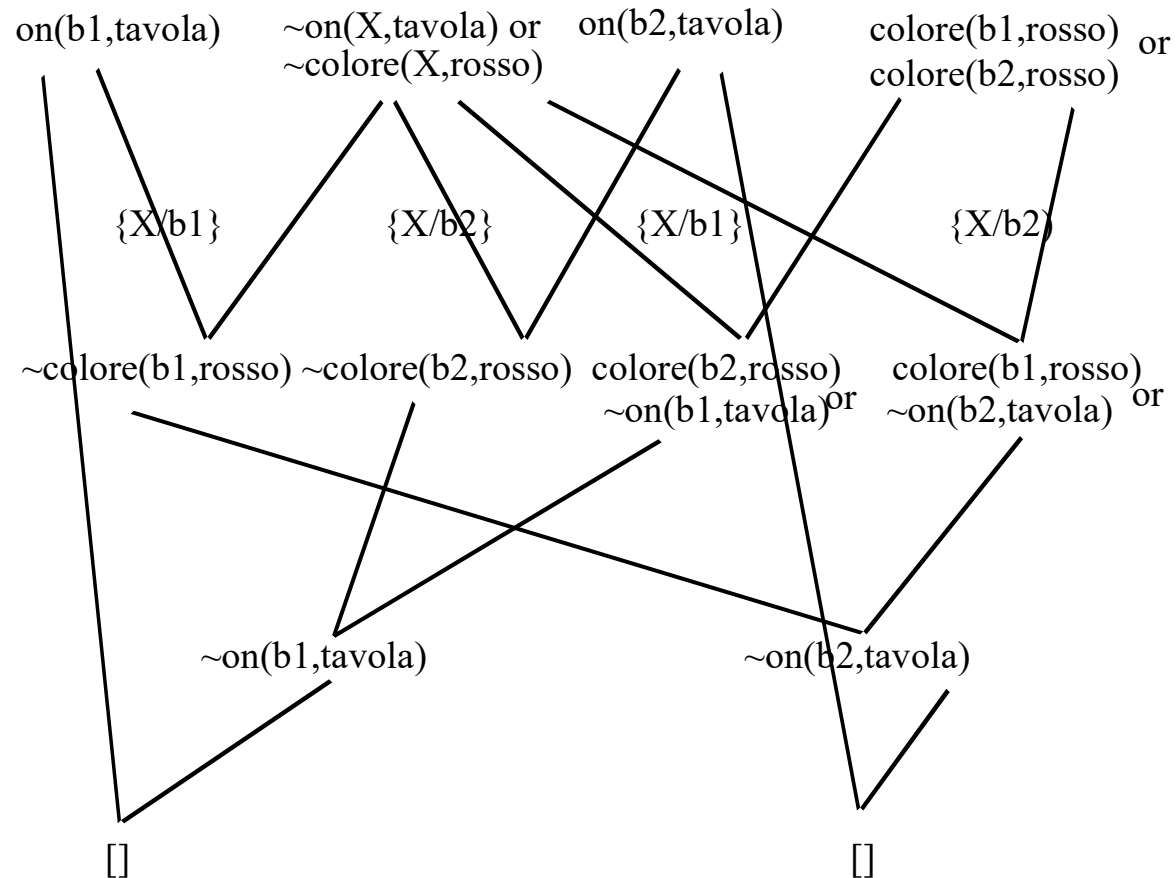
$$F = \{\exists X (on(X,tavola) \wedge colore(X,rosso))\}$$

$$F^C = \{\sim on(X,tavola) \vee \sim colore(X,rosso)\}$$

- L'applicazione della strategia in ampiezza produce il **grafo di refutazione** riportato nel seguito:



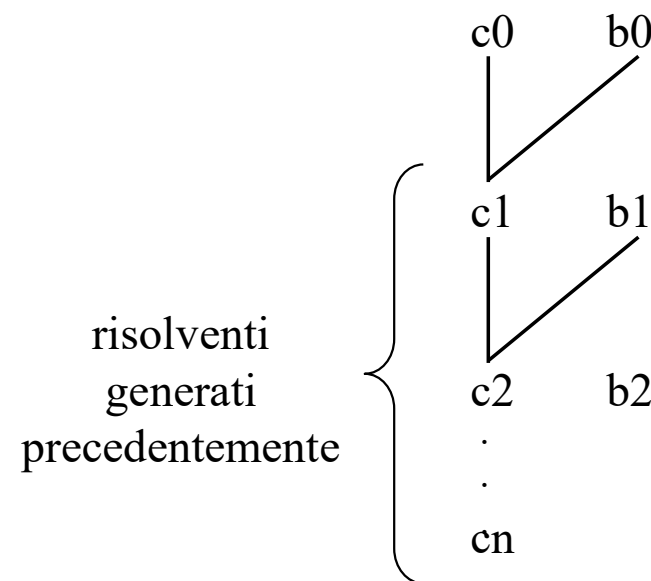
ESEMPIO DI STRATEGIA IN AMPIEZZA E GRAFO DI REFUTAZIONE (2)



STRATEGIA LINEARE

- Strategia **lineare** (completa) sceglie almeno una clausola “parent” dall'insieme base C_0 oppure tra i risolventi generati precedentemente. La seconda clausola parent è sempre il risolvente ottenuto al passo precedente.
- Nel caso di risoluzione lineare, il grafo di refutazione diventa un albero, detto albero di refutazione.

Albero **lineare** : c_0 appartiene a C_0 (cioè all'insieme base) e b_i appartiene a C_0 oppure è uguale a c_j con $j < i$.

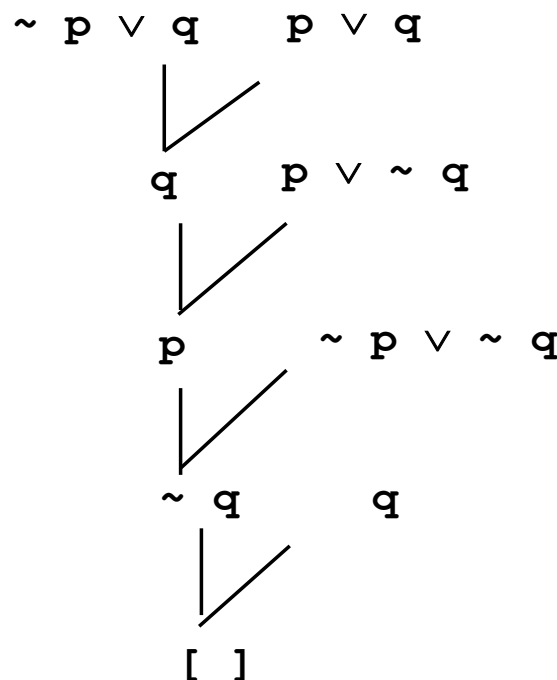


ESEMPIO DI STRATEGIA LINEARE (1)

- $C0 = \{p \vee q, \sim p \vee q, p \vee \sim q, \sim p \vee \sim q\}$, ottenuto da:

$H = \{q \rightarrow p, \sim q \rightarrow p, p \rightarrow q\}$; $F = q \wedge p$ negando $\sim (q \wedge p)$ cioè'
 $\sim p \vee \sim q$

- Le clausole "parent" rappresentate sulla destra dell'albero sono formule di $C0$ (le prime tre) e un risolvente generato in precedenza (la formula "q").



ESEMPIO DI STRATEGIA LINEARE (2)

$$H^C = \{\text{sum}(0, X1, X1), \text{sum}(s(X), Y, s(Z)) \vee \sim \text{sum}(X, Y, Z)\}$$

$$F^C = \{\sim \text{sum}(s(0), s(s(0)), Y1)\}$$

- dove F^C è stato ottenuto negando la formula:

$$F = \exists Y \text{sum}(s(0), s(s(0)), Y)$$

- L'insieme base $C_0 = H^C \cup F^C$ risulta:

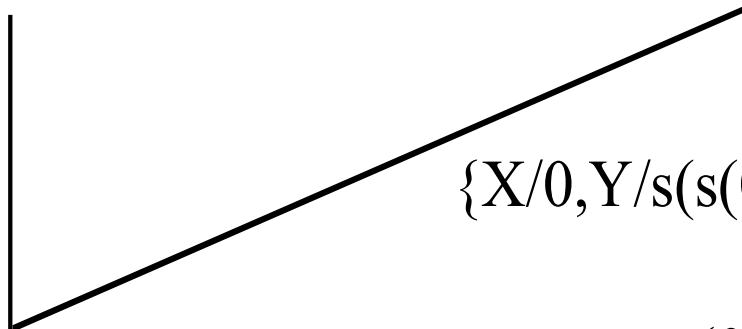
$$C_0 = \{\text{sum}(0, X1, X1), \text{sum}(s(X), Y, s(Z)) \vee \sim \text{sum}(X, Y, Z), \\ \sim \text{sum}(s(0), s(s(0)), Y1)\}$$



ESEMPIO DI ALBERO LINEARE

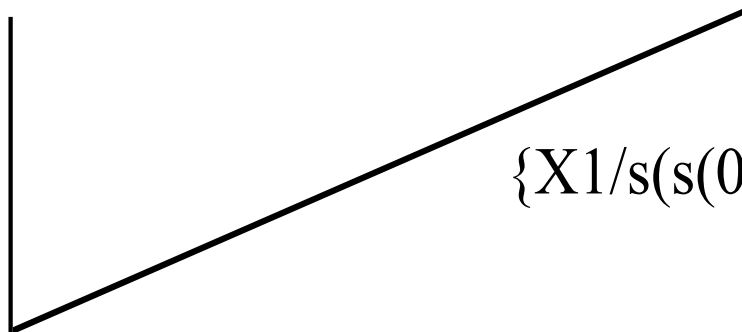
$\sim \text{sum}(s(0), s(s(0)), Y1)$

$\text{sum}(s(X), Y, s(Z))$ or $\sim \text{sum}(X, Y, Z)$



$\sim \text{sum}(0, s(s(0)), Z)$

$\text{sum}(0, X1, X1)$



\square



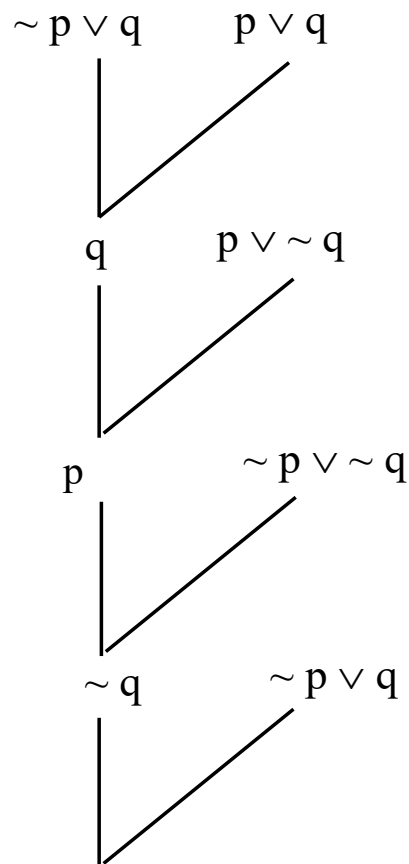
STRATEGIE NON COMPLETE

Strategie complete producono comunque grafi di refutazione **molto grandi** → **inefficienti** → strategie non complete.

- Strategia **linear-input** non completa sceglie che ha sempre una clausola “parent” nell'insieme base C_0 , mentre la seconda clausola “parent” è il risolvente derivato al passo precedente.
- Caso particolare della risoluzione lineare:
 - vantaggio: memorizzare solo l'ultimo risolvente
 - svantaggio: non completa



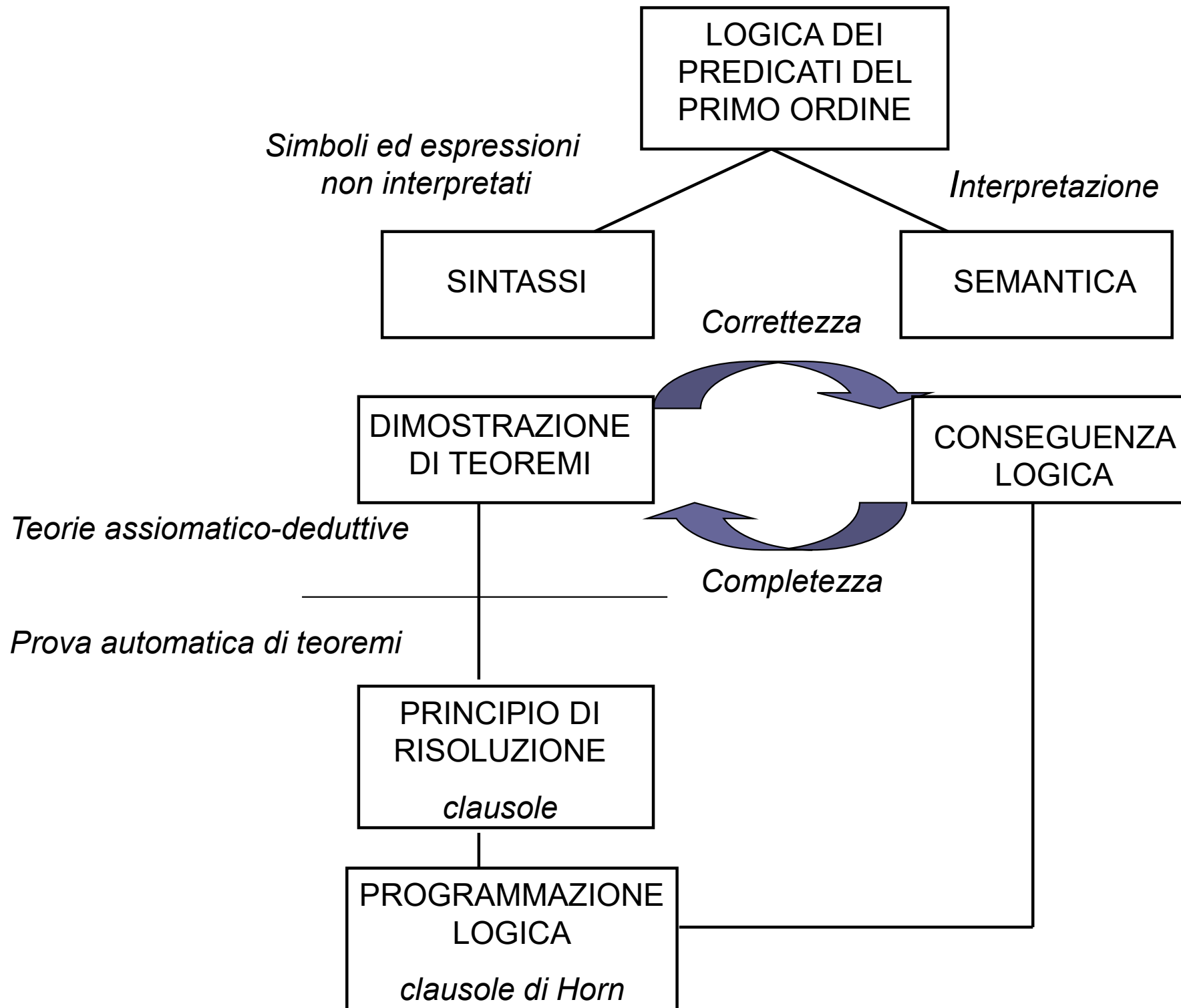
ESEMPIO STRATEGIA LINEAR-INPUT



$C0 = \{p \vee q, \sim p \vee q, p \vee \sim q, \sim p \vee \sim q\}$
insoddisfacibile, ma la risoluzione con
strategia “linear-input” produce sempre
clausole che hanno almeno un letterale,
e quindi non è in grado di derivare la
clausola vuota.

Se ci si limita, però, a un
sottoinsieme delle clausole, in
particolare alle clausole di Horn,
allora la strategia **“linear-input”**
è completa.





LE CLAUSOLE DI HORN

La logica a clausole di Horn è un sottoinsieme della logica a clausole

Le clausole di Horn hanno al più un letterale positivo.

- Le clausole possono essere scritte in una forma equivalente sostituendo al simbolo di disgiunzione \vee e negazione \sim il simbolo di implicazione logica (\rightarrow) ricordando che:

$\sim B \vee A$ equivale a $B \rightarrow A$

- Nel seguito si indicherà l'implicazione logica $B \rightarrow A$ con:

$A \leftarrow B$ (“B implica A”, oppure “A se B”).

- La clausola: $A_1 \vee \dots \vee A_n \vee \sim B_1 \vee \dots \vee \sim B_m$
- può essere riscritta come: $A_1, \dots, A_n \leftarrow B_1, \dots, B_m$
- dove i simboli “,” che separano gli atomi A_i sono da interpretare come disgiunzioni, mentre quelli che separano gli atomi B_j sono congiunzioni.
- Clausole di Horn: $A \leftarrow B_1, \dots, B_m \quad \leftarrow B_1, \dots, B_m \text{ Goal}$



Potere Espressivo delle Clausole di Horn

Molte formule della logica dei predicati possono essere scritte come clausole di Horn.

Esempi:

$$\forall x \text{ cat}(x) \vee \text{dog}(x) \rightarrow \text{pet}(x)$$



$$\begin{aligned} \text{pet}(x) &\leftarrow \text{cat}(x) \\ \text{pet}(x) &\leftarrow \text{dog}(x) \end{aligned}$$

$$\forall x \text{ poodle}(x) \rightarrow \text{dog}(x) \wedge \text{small}(x)$$



$$\begin{aligned} \text{dog}(x) &\leftarrow \text{poodle}(x) \\ \text{small}(x) &\leftarrow \text{poodle}(x) \end{aligned}$$

Ma:

$$\forall x \text{ human}(x) \rightarrow \text{male}(x) \vee \text{female}(x)$$



????

$$\forall x \text{ dog}(x) \wedge \sim \text{abnormal}(x) \rightarrow \text{has_4_legs}(x)$$



????



ESEMPIO NON ESPRIMIBILE IN CLUSOLE DI HORN

$H = \{on(b1, tavolo) \wedge on(b2, tavolo) \wedge ((colore(b1, rosso) \vee colore(b2, rosso)))\}$

è esprimibile in clausole, ma non in clausole di Horn.

- La sua trasformazione in clausole risulterà infatti:

$H^C = \{on(b1, tavolo), on(b2, tavolo), colore(b1, rosso) \vee colore(b2, rosso)\}$

dove la clausola: $colore(b1, rosso) \vee colore(b2, rosso)$
non è una clausola di Horn.

- Risoluzione per le clausole di Horn: **risoluzione SLD** *resolution with Selection rule, Linear input strategy for Definite clauses*
- Risoluzione SLD opera per contraddizione e quindi si procede negando la formula F da dimostrare.
- Poiché F è una congiunzione di formule atomiche quantificate esistenzialmente, la sua negazione produrrà una disgiunzione di formule atomiche negate quantificata universalmente, cioè una clausola di Horn goal.



ALTRO ESEMPIO DI APPLICAZIONE DELLA RISOLUZIONE LINEAR INPUT CON CLAUSOLE DI HORN (1)

The law says that it is a crime for an American to sell weapons to hostile nations. The country Nono, an enemy of America, has some missiles, and all of its missiles were sold to it by Colonel West, who is American.

- Dimostra che “Col. West is a criminal”
- Nella traduzione useremo una diversa (inversa) notazione (presa da Russel-Norvig): Variabili x,y,z ecc; Costanti iniziano con una maiuscola.

ESEMPIO DI APPLICAZIONE DELLA RISOLUZIONE: KB (2)

... it is a crime for an American to sell weapons to hostile nations:

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x,y,z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

Nono ... has some missiles, i.e., $\exists x Owns(Nono,x) \wedge Missile(x)$:

$Owns(Nono,M_1)$ and $Missile(M_1)$

... all of its missiles were sold to it by Colonel West

$Missile(x) \wedge Owns(Nono,x) \Rightarrow Sells(West,x,Nono)$

Missiles are weapons:

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

An enemy of America counts as "hostile":

$Enemy(x,America) \Rightarrow Hostile(x)$

West, who is American ...

$American(West)$

The country Nono, an enemy of America ...

$Enemy(Nono,America)$

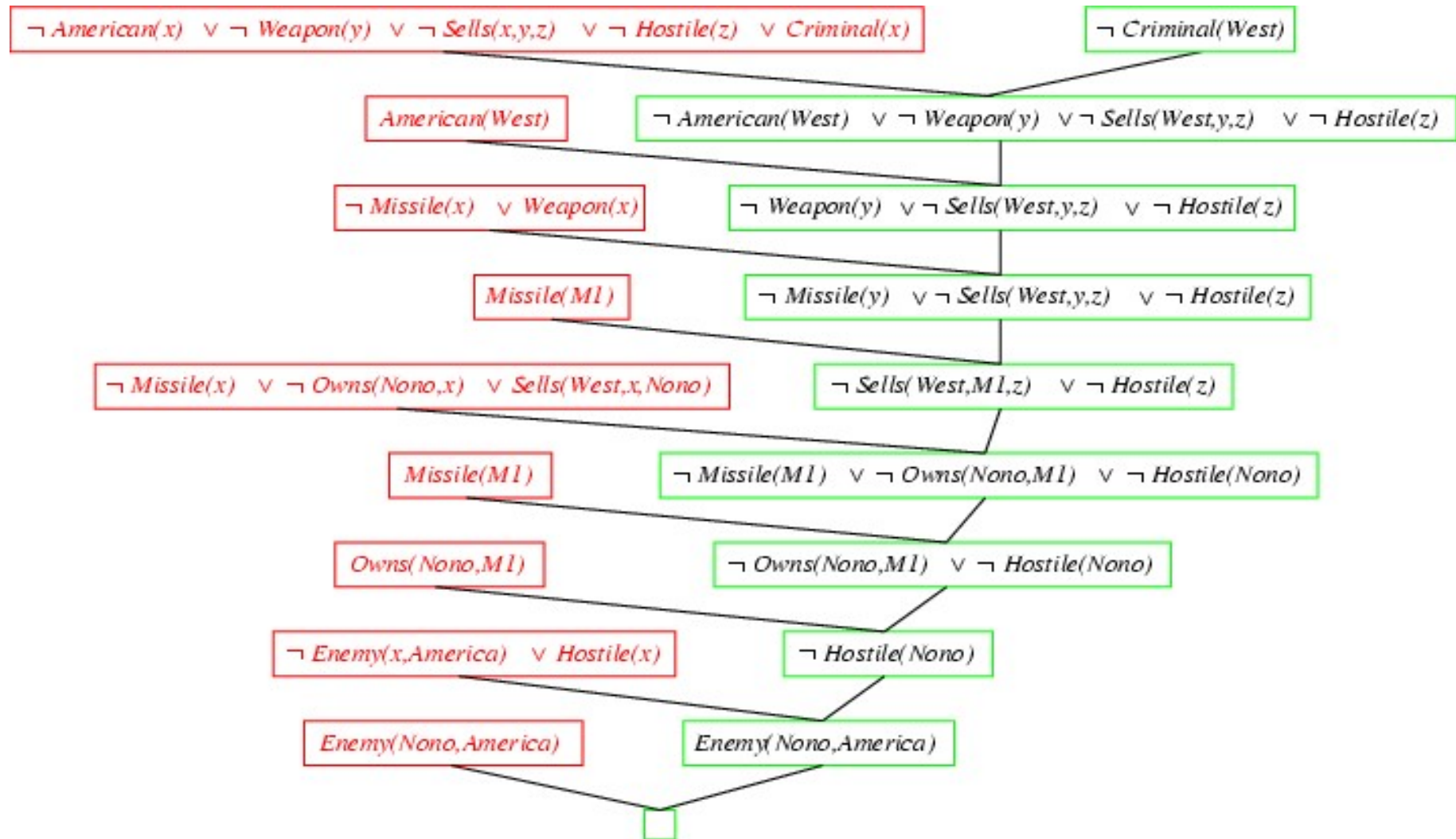
Devo dimostrare : $Criminal(West)$

Nota: in arancione sono segnate frasi non scritte esplicitamente nel testo originale ma che fanno parte di conoscenza implicita.

Da: S. Russell & P. Norvig:
"Intelligenza Artificiale: un
approccio moderno", Pearson ed.



ESEMPIO DI ALBERO CON STRATEGIA LINEAR-INPUT



Da: S. Russell & P. Norvig: "Intelligenza Artificiale: un approccio moderno", Pearson ed.



CASI PARTICOLARI DI RISOLUZIONE: Forward e backward chaining

$$\frac{p_1', p_2', \dots, p_n', (p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n \Rightarrow q)}{q\theta} \quad \text{dove } p_i'\theta = p_i \theta \text{ per ogni } i$$

- Una sorta di Modus Ponens Generalizzato (MPG) con l'applicazione dell'unificazione.
- Utilizzato con KB di clausole **definite** (esattamente un letterale positivo)
- Tutte le variabili sono universalmente quantificate.
- Corrisponde alla risoluzione con strategia linear-input



Forward chaining

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x,y,z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

$Owns(Nono, M_1)$ and $Missile(M_1)$

$Missile(x) \wedge Owns(Nono, x) \Rightarrow Sells(West, x, Nono)$

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

$Enemy(x, America) \Rightarrow Hostile(x)$

$American(West)$

$Enemy(Nono, America)$

$American(West)$

$Missile(M1)$

$Owns(Nono, M1)$

$Enemy(Nono, America)$

Forward chaining

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x,y,z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

$Owns(Nono,M_1)$ and $Missile(M_1)$

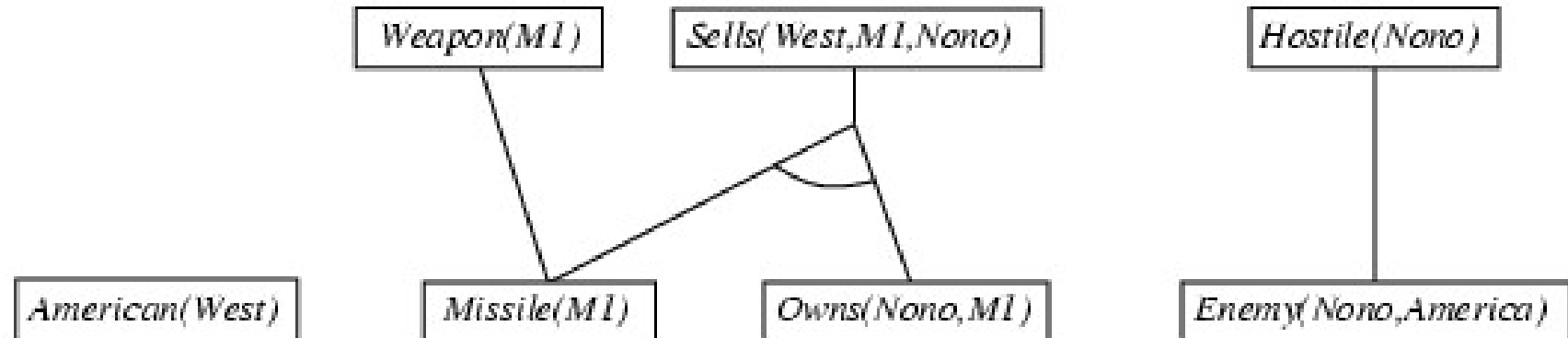
$Missile(x) \wedge Owns(Nono,x) \Rightarrow Sells(West,x,Nono)$

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

$Enemy(x,America) \Rightarrow Hostile(x)$

$American(West)$

$Enemy(Nono,America)$



Forward chaining

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x,y,z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

$Owens(Nono,M_1)$ and $Missile(M_1)$

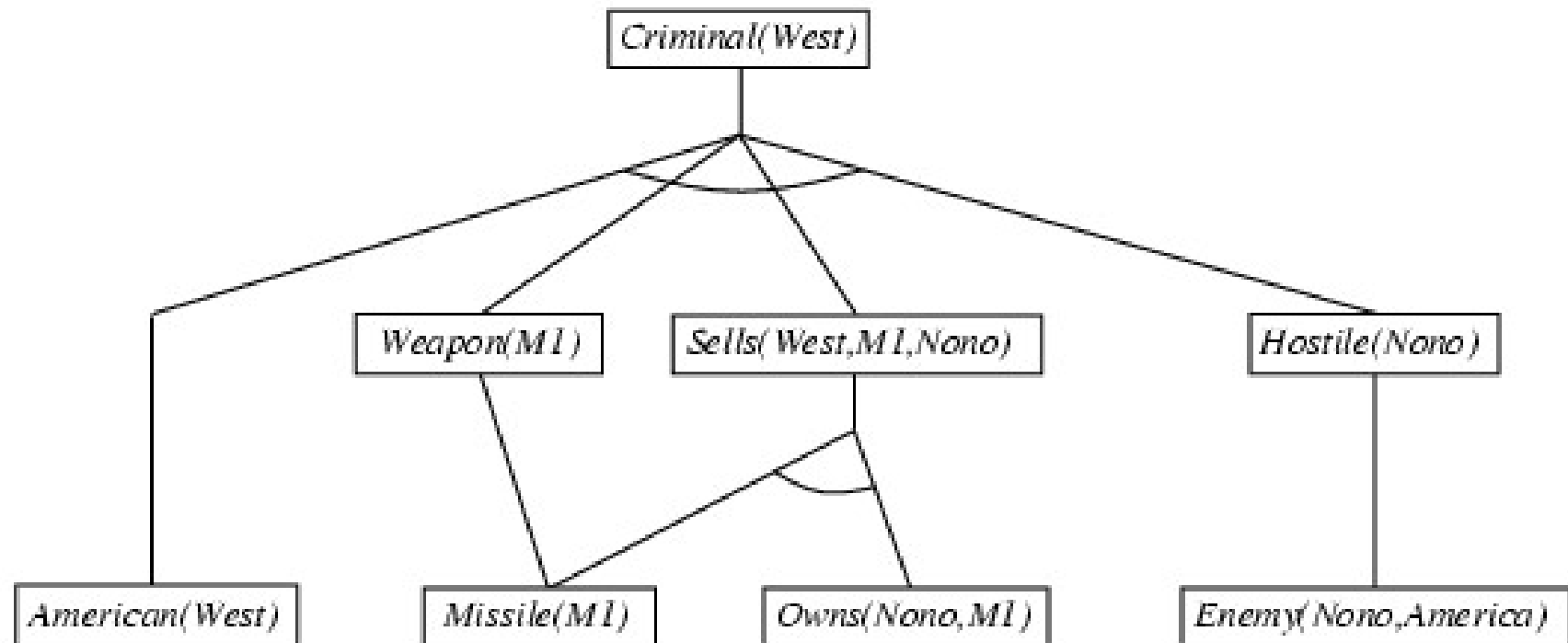
$Missile(x) \wedge Owens(Nono,x) \Rightarrow Sells(West,x,Nono)$

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

$Enemy(x,America) \Rightarrow Hostile(x)$

$American(West)$

$Enemy(Nono,America)$



Backward chaining

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x,y,z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

$Owns(Nono, M_1)$ and $Missile(M_1)$

$Missile(x) \wedge Owns(Nono, x) \Rightarrow Sells(West, x, Nono)$

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

$Enemy(x, America) \Rightarrow Hostile(x)$

$American(West)$

$Enemy(Nono, America)$

$Criminal(West)$

Backward chaining

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x,y,z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

$Owns(Nono, M_1)$ and $Missile(M_1)$

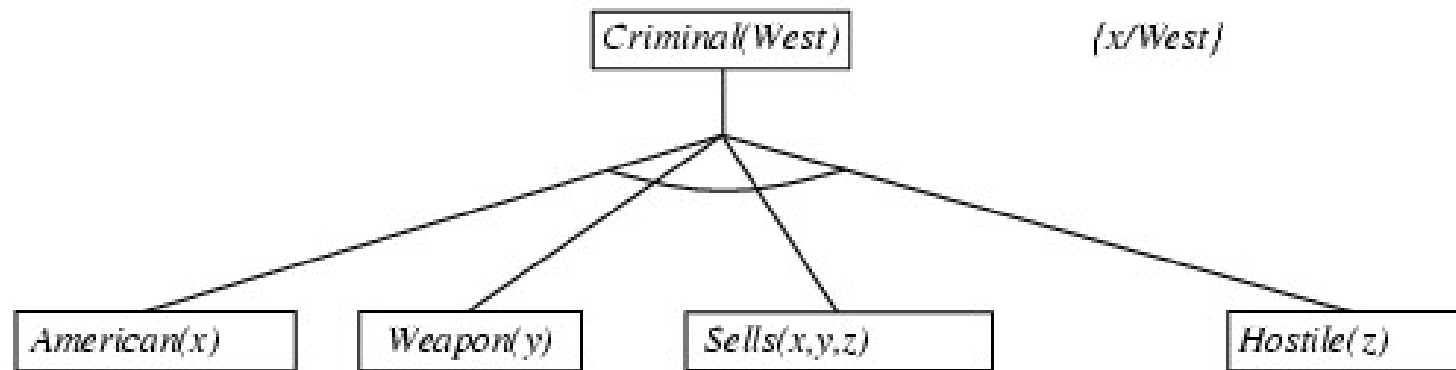
$Missile(x) \wedge Owns(Nono, x) \Rightarrow Sells(West, x, Nono)$

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

$Enemy(x, America) \Rightarrow Hostile(x)$

$American(West)$

$Enemy(Nono, America)$



Backward chaining

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x,y,z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

$Owns(Nono, M_1) \text{ and } Missile(M_1)$

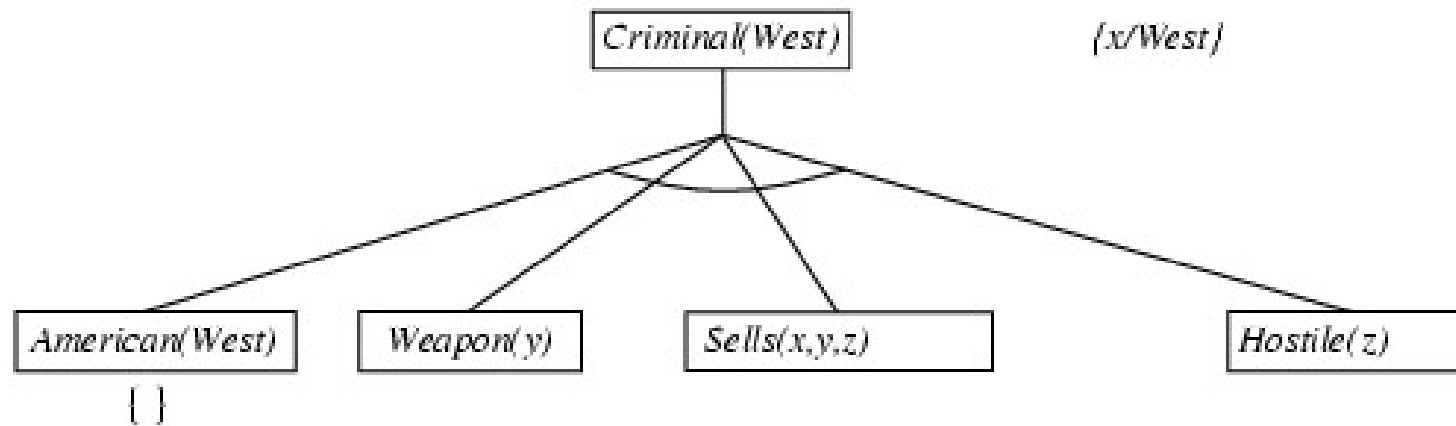
$Missile(x) \wedge Owns(Nono, x) \Rightarrow Sells(West, x, Nono)$

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

$Enemy(x, America) \Rightarrow Hostile(x)$

$American(West)$

$Enemy(Nono, America)$



Backward chaining

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x,y,z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

$Owns(Nono, M_1)$ and $Missile(M_1)$

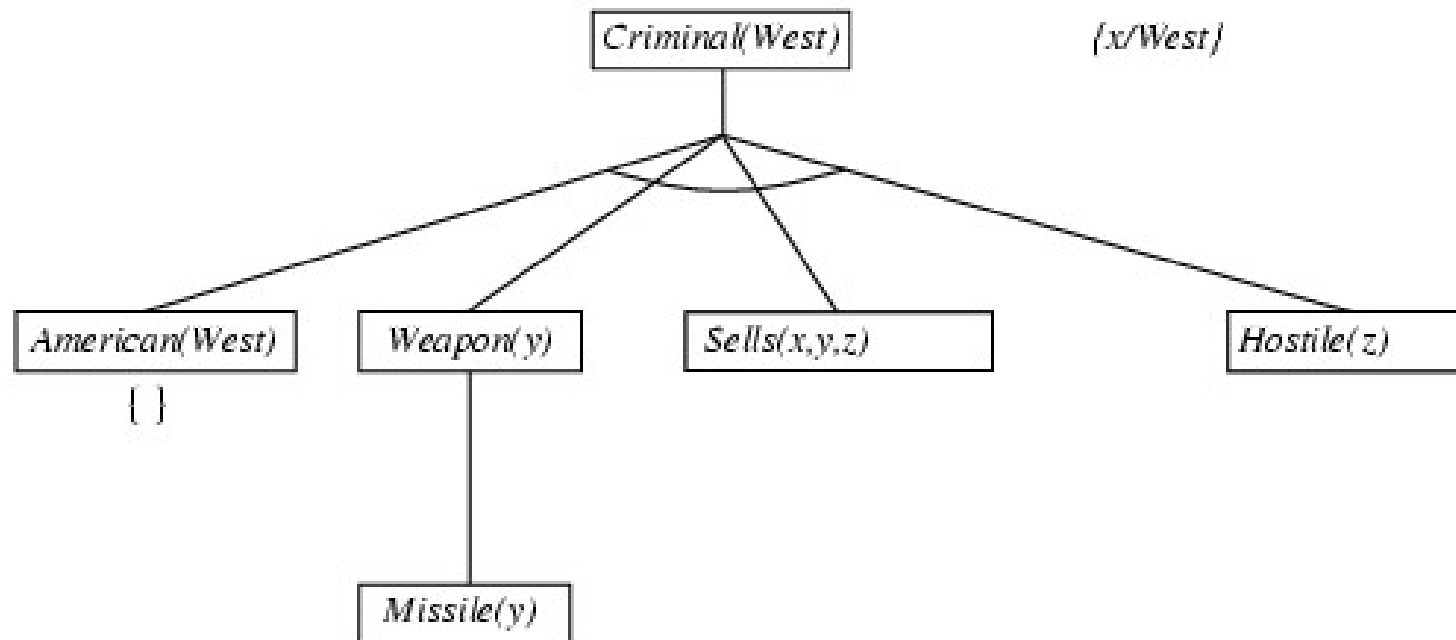
$Missile(x) \wedge Owns(Nono, x) \Rightarrow Sells(West, x, Nono)$

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

$Enemy(x, America) \Rightarrow Hostile(x)$

$American(West)$

$Enemy(Nono, America)$



Backward chaining

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x,y,z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

$Owns(Nono, M_1)$ and $Missile(M_1)$

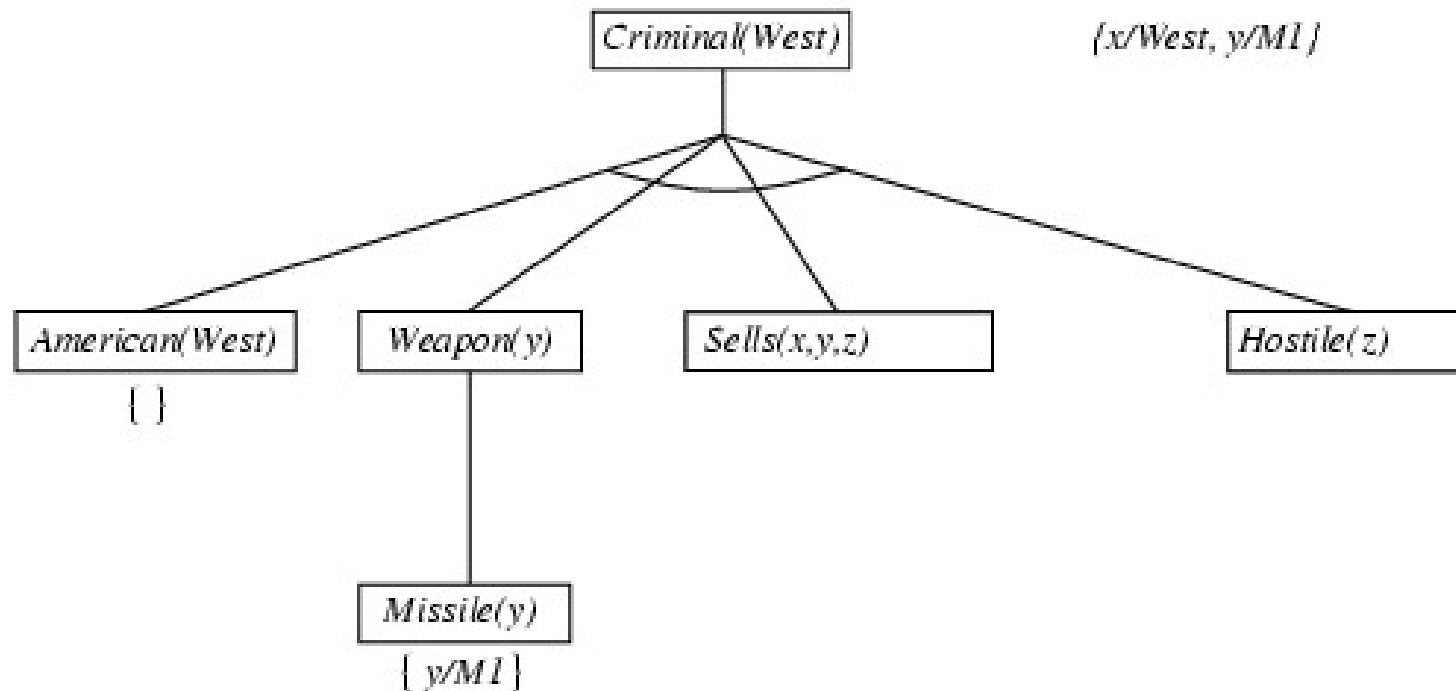
$Missile(x) \wedge Owns(Nono, x) \Rightarrow Sells(West, x, Nono)$

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

$Enemy(x, America) \Rightarrow Hostile(x)$

$American(West)$

$Enemy(Nono, America)$



Backward chaining

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x,y,z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

$Owns(Nono,M_1)$ and $Missile(M_1)$

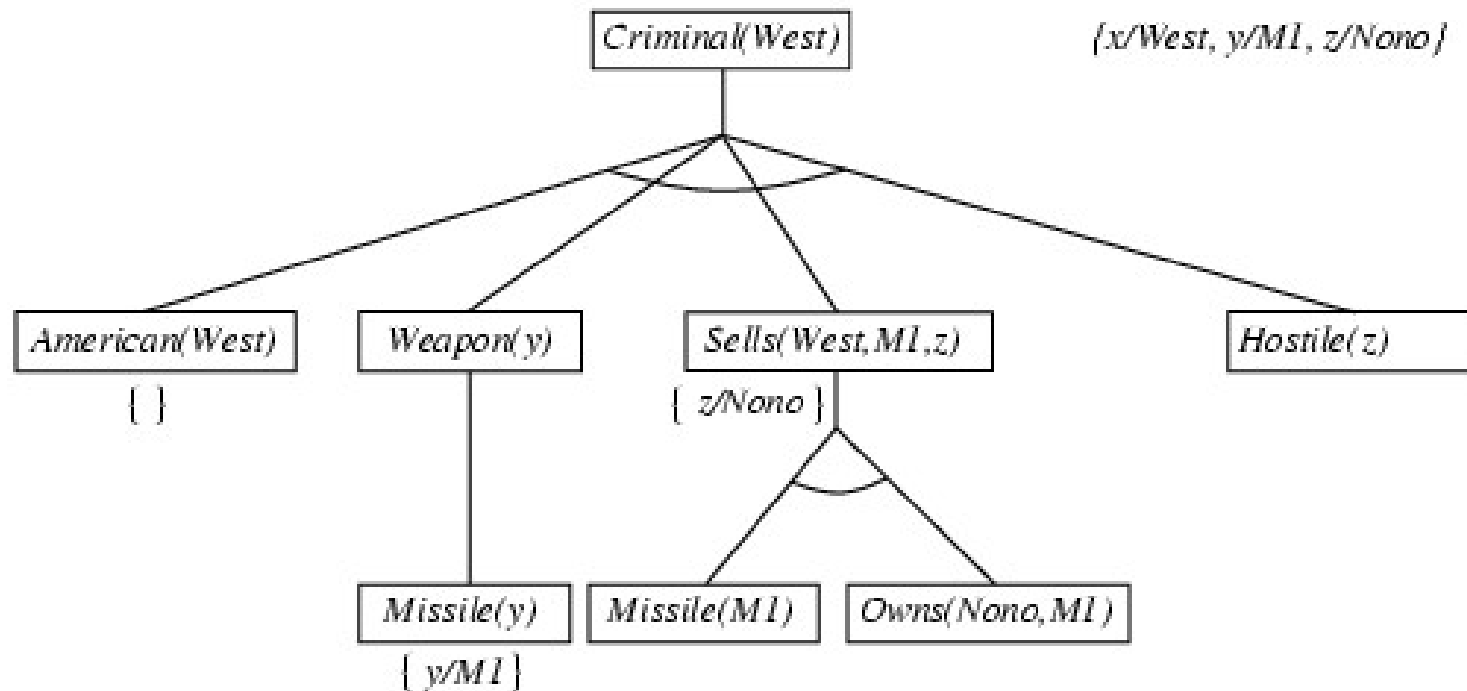
$Missile(x) \wedge Owns(Nono,x) \Rightarrow Sells(West,x,Nono)$

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

$Enemy(x,America) \Rightarrow Hostile(x)$

$American(West)$

$Enemy(Nono,America)$



Backward chaining

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x,y,z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

$Owns(Nono,M_1)$ and $Missile(M_1)$

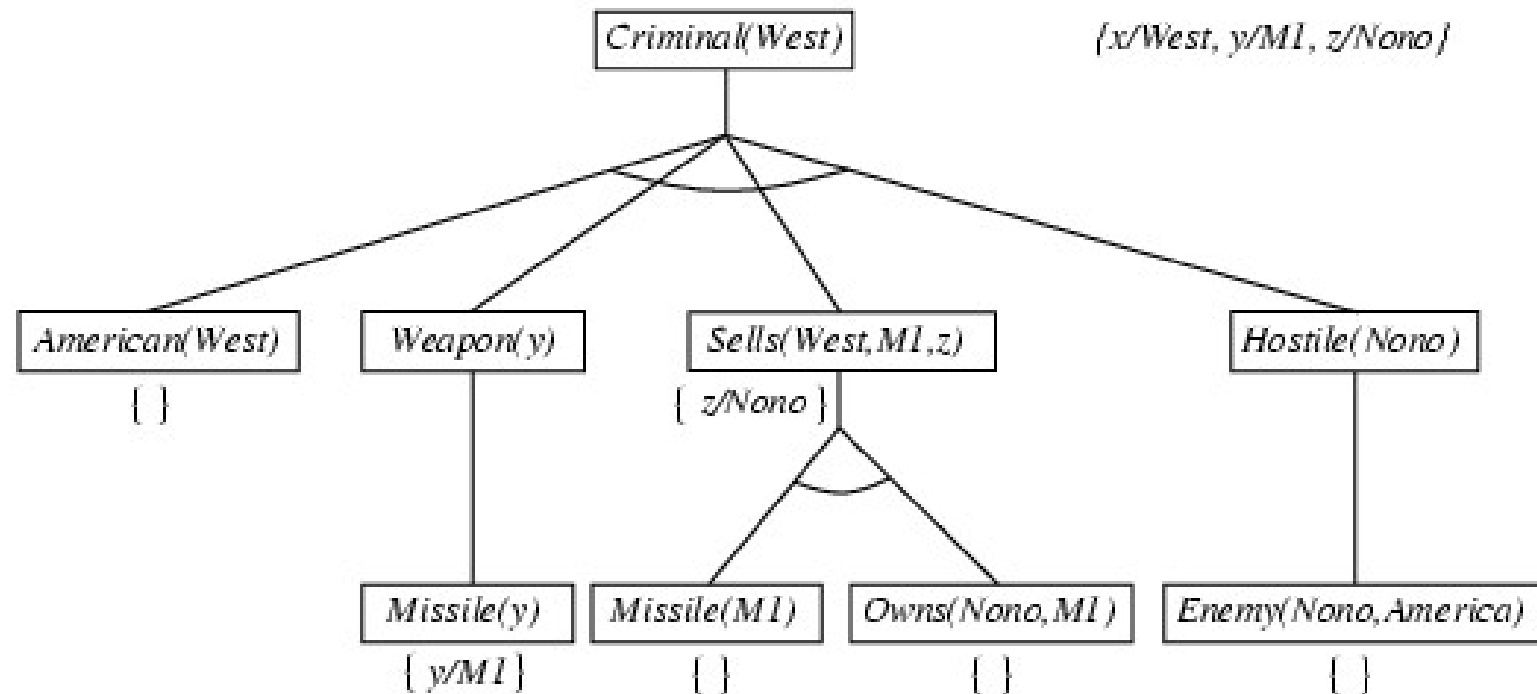
$Missile(x) \wedge Owns(Nono,x) \Rightarrow Sells(West,x,Nono)$

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

$Enemy(x,America) \Rightarrow Hostile(x)$

$American(West)$

$Enemy(Nono,America)$



Backward chaining

$American(x) \wedge Weapon(y) \wedge Sells(x,y,z) \wedge Hostile(z) \Rightarrow Criminal(x)$

$Owns(Nono,M_1)$ and $Missile(M_1)$

$Missile(x) \wedge Owns(Nono,x) \Rightarrow Sells(West,x,Nono)$

$Missile(x) \Rightarrow Weapon(x)$

$Enemy(x,America) \Rightarrow Hostile(x)$

$American(West)$

$Enemy(Nono,America)$

