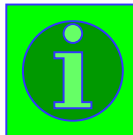


# Scheduling di processi "hard real-time"

Eugenio Faldella

Dipartimento di Informatica - Scienza e Ingegneria  
Scuola di Ingegneria e Architettura, Università di Bologna



[eugenio.faldella@unibo.it](mailto:eugenio.faldella@unibo.it)  
<http://www.ing.unibo.it>

# UN PRIMO MODELLO DI RIFERIMENTO PER LA SCHEDULAZIONE DI PROCESSI PERIODICI

- $N$  processi  $P_1, P_2, \dots, P_N$  indipendenti
  - senza vincoli di precedenza
  - senza risorse condivise
- ogni processo  $P_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ )
  - è periodico, con periodo  $T_j$  prefissato
  - è caratterizzato da un tempo massimo di esecuzione  $C_j$  prefissato, con  $C_j < T_j$
  - è caratterizzato da una deadline  $D_j = T_j$
- l'esecuzione dei processi è affidata ad un sistema di elaborazione monoprocesore
- il tempo impiegato dal processore per operare una commutazione di contesto tra processi è trascurabile

# UN TEOREMA SULLA SCHEDULABILITÀ

I requisiti temporali sono coerenti e consistenti ?

Condizione necessaria (ma in generale non sufficiente)  
affinché un insieme di N processi periodici sia schedulabile  
è che il risultante fattore di utilizzazione del processore  
sia non superiore a 1:

$$U = \sum_{j=1}^N U_j = \sum_{j=1}^N \frac{C_j}{T_j} \leq 1$$

Il  $j^{\text{mo}}$  termine della sommatoria  $C_j / T_j = (C_j (H / T_j)) / H$   
rappresenta la frazione dell'iperperiodo  $H = \text{mcm}(T_1, T_2, \dots, T_N)$   
richiesta per l'esecuzione di  $P_j$ .

# SCHEDULAZIONE "CLOCK-DRIVEN" ...

- **Schedulazione di tipo**

- **off-line,**
- **guaranteed,**
- **non-preemptive,**

**semplice da realizzare ed efficiente (l'overhead associato al cambio di contesto e alla comunicazione tra processi è trascurabile), ma non idonea in contesti che implicano dinamicità e flessibilità.**

- **I parametri temporali dei processi si intendono noti a priori e non soggetti a variazioni significative a run-time.**
- **Tutti i vincoli temporali vengono soddisfatti a priori in sede di costruzione di un "feasible schedule".**

## **Problema NP-hard**

- **Allo scopo possono essere usati algoritmi anche molto complessi, senza incorrere in una penalizzazione delle prestazioni conseguibili a run-time.**

## ... SCHEDULAZIONE "CLOCK-DRIVEN"

- Lo schedule viene costruito con riferimento al generico iperperiodo, assumendo che qualunque decisione riguardante la schedulazione dei processi venga presa in corrispondenza di predefiniti "istanti decisionali". Tali istanti possono essere o meno equidistanziati.
- Lo schedule risultante è di norma esplicitato in termini di una tabella, la cui generica k-esima entry è del tipo:  
 $(\Delta t_k, P(t_k))$  nel caso di istanti decisionali non equidistanziati, con  $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ ,  
 $(\underline{P}(t_k))$  nel caso di istanti decisionali equidistanziati,  
dove  $P(t_k)$  e  $\underline{P}(t_k)$  identificano rispettivamente il processo o l'insieme di processi da schedulare all'istante  $t_k$ .
- Lo scheduler a run-time, avvalendosi di un timer hardware che, opportunamente programmato, genera un interrupt in corrispondenza di ogni istante decisionale, ciclicamente si limita a interpretare il contenuto di tale tabella, procedendo a riprogrammare il timer se necessario (ovvero nel caso di istanti decisionali non equidistanziati), a selezionare il processo o i processi da schedulare, a porsi quindi in attesa del successivo interrupt.

**Ipotesi per un corretto funzionamento: "no job overrun"**

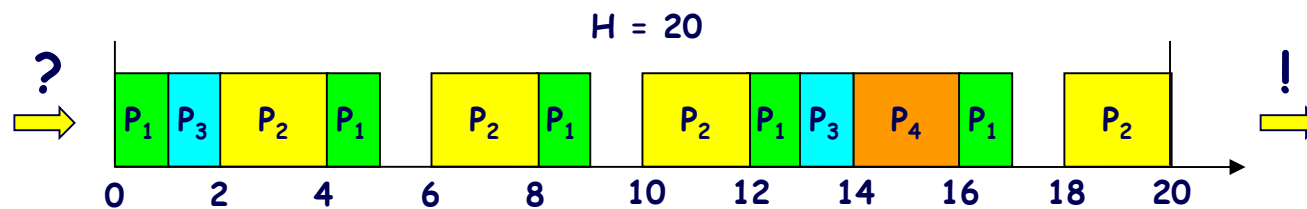
# TIMER-DRIVEN SCHEDULER

1° esempio

	C	T
P <sub>1</sub>	1	4
P <sub>2</sub>	2	5
P <sub>3</sub>	1	10
P <sub>4</sub>	2	20

$$U = 0.85$$

Istanti decisionali non equidistanziati



$\Delta t_k, P(t_k)$

1, P <sub>1</sub>
1, P <sub>3</sub>
2, P <sub>2</sub>
2, P <sub>1</sub>
2, P <sub>2</sub>
2, P <sub>1</sub>
2, P <sub>2</sub>
1, P <sub>1</sub>
1, P <sub>3</sub>
2, P <sub>4</sub>
2, P <sub>1</sub>
2, P <sub>2</sub>

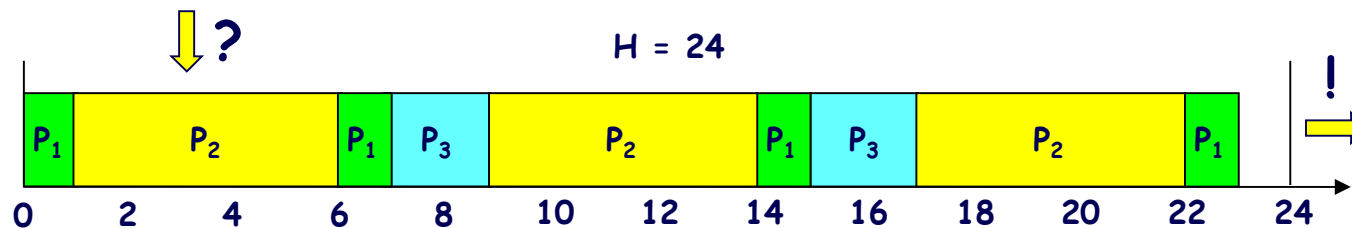
2° esempio

	C	T
P <sub>1</sub>	1	6
P <sub>2</sub>	5	8
P <sub>3</sub>	2	12

$$U = 0.96$$



1, P <sub>1</sub>
5, P <sub>2</sub>
1, P <sub>1</sub>
2, P <sub>3</sub>
5, P <sub>2</sub>
1, P <sub>1</sub>
2, P <sub>3</sub>
5, P <sub>2</sub>
2, P <sub>1</sub>



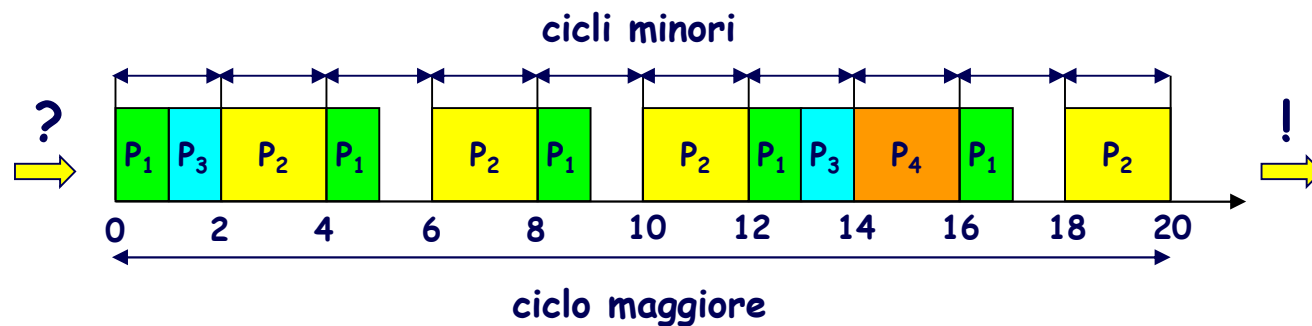
# CYCLIC EXECUTIVE

Istanti decisionali equidistanziati



1° esempio

	C	T
P <sub>1</sub>	1	4
P <sub>2</sub>	2	5
P <sub>3</sub>	1	10
P <sub>4</sub>	2	20



$\underline{P}(t_k)$

P <sub>1</sub> , P <sub>3</sub>
P <sub>2</sub>
P <sub>1</sub>
P <sub>2</sub>
P <sub>1</sub>
P <sub>2</sub>
P <sub>1</sub> , P <sub>3</sub>
P <sub>4</sub>
P <sub>1</sub>
P <sub>2</sub>

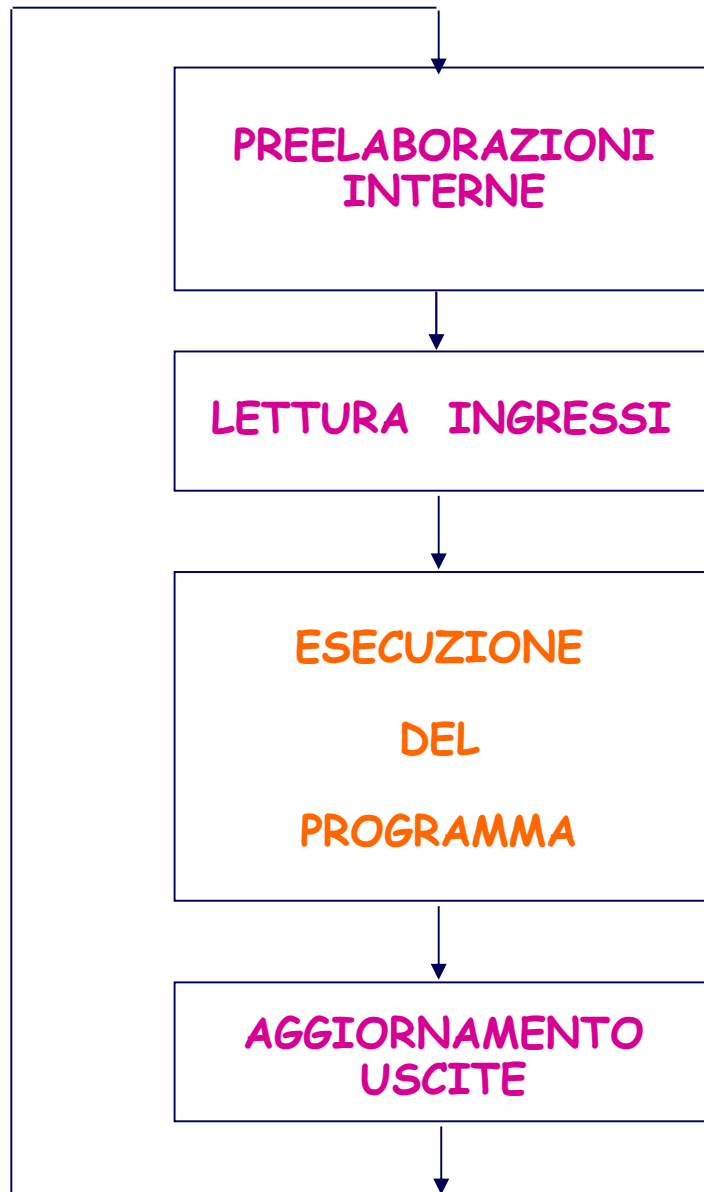
2° esempio

	C	T
P <sub>1</sub>	1	6
P <sub>2</sub>	5	8
P <sub>3</sub>	2	12



non esiste un feasible schedule, a meno che ...

# UN TIPOICO AMBIENTE DI ESECUZIONE

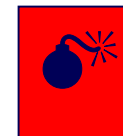


## Programmable Logic Controller (PLC)

una differenza sostanziale rispetto ad altre  
piattaforme computazionali:  
il sistema operativo

programmazione molto semplice  
non esiste a run-time  
la nozione esplicita di processo  
(non si pongono problemi di concorrenza  
e quindi di condivisione di risorse)  
a meno che ...

il tempo necessario per eseguire un'intera  
scansione del programma risulti incompatibile  
con i vincoli real-time imposti dall'applicazione





# AMBIENTI DI ESECUZIONE SEQUENZIALE ...



un approccio empirico alquanto diffuso

gestione:  
allarmi  
motorizzazioni  
"user interface"

$A_1$	$C[\text{ms}]$	$T[\text{ms}]$	$C/T$
$P_1$	15	25	.6
$P_2$	5	50	.1
$P_3$	7.5	100	.075

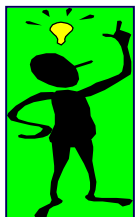
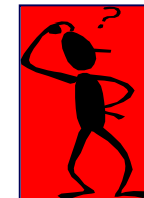
$$U(A_1) = 0.775$$

$P_1 P_2 P_3$



$P_1$

$$T_{\text{ciclo}} = C_1 + C_2 + C_3 = 27.5 > T_1 = 25$$



$P_1 P_2 P_1 P_3$



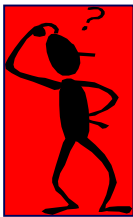
+ "I/O refresh"

# ... AMBIENTI DI ESECUZIONE SEQUENZIALE

gestione:  
allarmi  
motorizzazioni  
"user interface"  
termoregolatori

$A_1'$	C[ms]	T[ms]	C/T
$P_1$	15	25	.6
$P_2$	5	50	.1
$P_3$	7.5	100	.075
$P_4$	10	100	.1

$$U(A_1') = 0.875$$



$P_1 P_2 P_1 P_3 P_1 P_4$



$P_1$



$P_2$



$$T_{\text{ciclo}} = 3 * C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 67.5 > T_2 = 50$$



$P_1 P_2 P_1 P_3 P_1 P_2 P_1 P_4$



gestione:  
allarmi  
motorizzazioni  
"user interface"

$A_1''$	C[ms]	T[ms]	C/T
$P_1$	15	25	.6
$P_2$	5	50	.1
$P_3$	17.5	100	.175

$$U(A_1'') = 0.875$$



# L'APPROCCIO CYCLIC EXECUTIVE

Scenario più elementare:

costruzione di un feasible schedule per un insieme di N processi  
"semplicemente periodici" (ovvero con periodi in relazione armonica).

$A_1$	C	T	C/T
$P_1$	15	25	.6
$P_2$	5	50	.1
$P_3$	7.5	100	.075

$$U(A_1) = 0.775$$

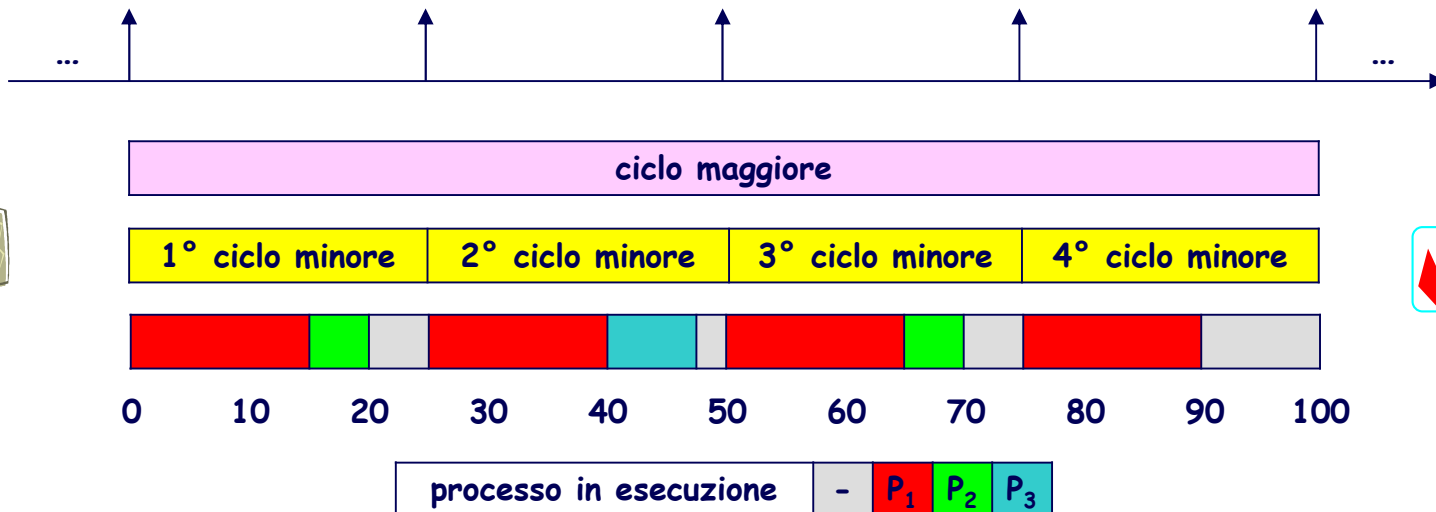
estensione del ciclo maggiore:

$$M = \max (T_1, T_2, \dots, T_N) = 100$$

estensione del ciclo minore:

$$m = \min (T_1, T_2, \dots, T_N) = 25$$

$\Delta t = 25$  t.u.



# CONSIDERAZIONI REALIZZATIVE

Linguaggio standard per PLC: IEC 61131-3 "structured text"

```
(* loop *)
  if (next_minor_cycle_start_time) (* from rtc interrupt *)
  then
    next_minor_cycle_start_time := false;
    case (minor_cycle) of
      1: call P1_handler; call P2_handler;
      2: call P1_handler; call P3_handler;
      3: call P1_handler; call P2_handler;
      4: call P1_handler;
    end_case;
    if (minor_cycle < last_minor_cycle)
    then minor_cycle := minor_cycle + 1; (* next minor cycle *)
    else minor_cycle := first_minor_cycle; (* repeat major cycle *)
    end_if;
    if (next_minor_cycle_start_time)
    then ... ; (* job overrun *)
    end_if;
  end_if;
(* end_loop *)
```

# PECULIARITÀ DELL'APPROCCIO ...

## □ **semplice realizzabilità** 😊

- non esiste a run time la nozione esplicita di processo
- non si pongono problemi di concorrenza e quindi di condivisione di risorse

## □ **macchinosità** 😐

- il procedimento può risultare laborioso, specialmente se  $\exists P_k$  per cui  $T_k \gg T_j$ ,  $\forall j \neq k$  (ad es., con riferimento a  $A_1$ , se  $T_3$  fosse di 10.000 anziché 100 t.u.)

## □ **limitata diretta applicabilità** ☹️

- esistono dei vincoli per quanto riguarda i valori dei parametri  $T_j$  e  $C_j$  (sempre nel rispetto della condizione  $U \leq 1$ ). Ad es., con riferimento a  $A_1$ , se  $C_3$  fosse di 17.5 anziché 7.5 t.u., l'insieme dei processi risulterebbe non schedabile pur risultando  $U = 0.875$ , a meno di ...

## ... e LIMITI

... a meno di ricorrere alla tecnica del "job slicing", ovvero ad un partizionamento del (la procedura corrispondente al) processo  $P_3$

$A_2$	C	T	C/T
$P_1$	15	25	.6
$P_2$	5	50	.1
$P_3$	17.5	100	.175

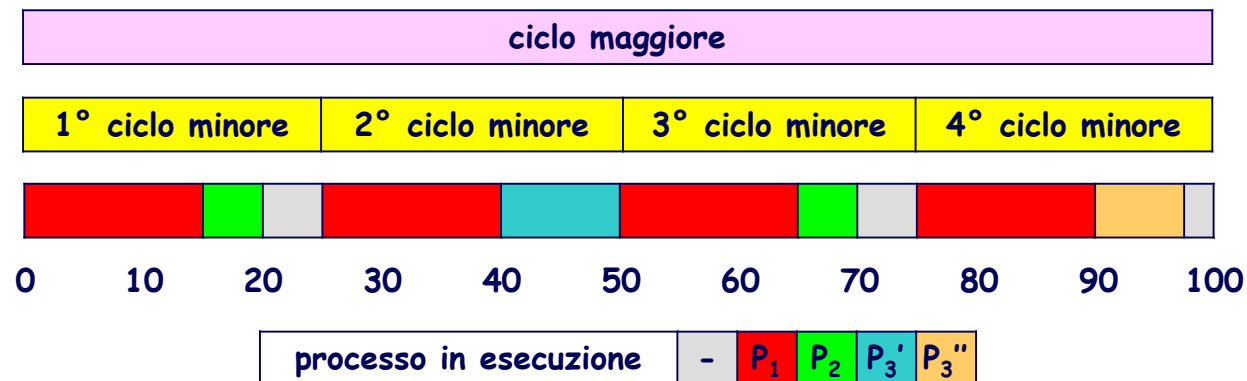
$$U(A_2) = 0.875$$



$P_3'$	10	100	.1
$P_3''$	7.5	100	.075

con il vincolo di precedenza

$$P_3' < P_3''$$



# STRUTTURA GENERALE [BAKER-SHAW (88)]...

Dimensionamento del ciclo maggiore:

$$(1) M = \text{iperperiodo} = \text{mcm}(T_1, \dots, T_N)$$

Dimensionamento del ciclo minore (o "frame"):

vincolo

motivazione

$$(2) M \bmod m = 0$$

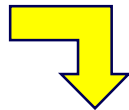
onde garantire che un ciclo maggiore consista di un numero intero di cicli minori:  $n_{cm} = M / m$

$$(3) m \geq C_i, \forall i$$

onde garantire che ogni job di qualunque processo possa iniziare e completare la propria esecuzione all'interno di un ciclo minore ("no job preemption")

$$(4) m \leq T_i, \forall i$$

onde garantire l'esecuzione in ogni ciclo maggiore del numero di job associati a ciascun processo:  $n_{ji} = M / T_i, \forall i$



in generale il vincolo è più restrittivo

# ... STRUTTURA GENERALE

Dimensionamento del ciclo minore (o "frame"):

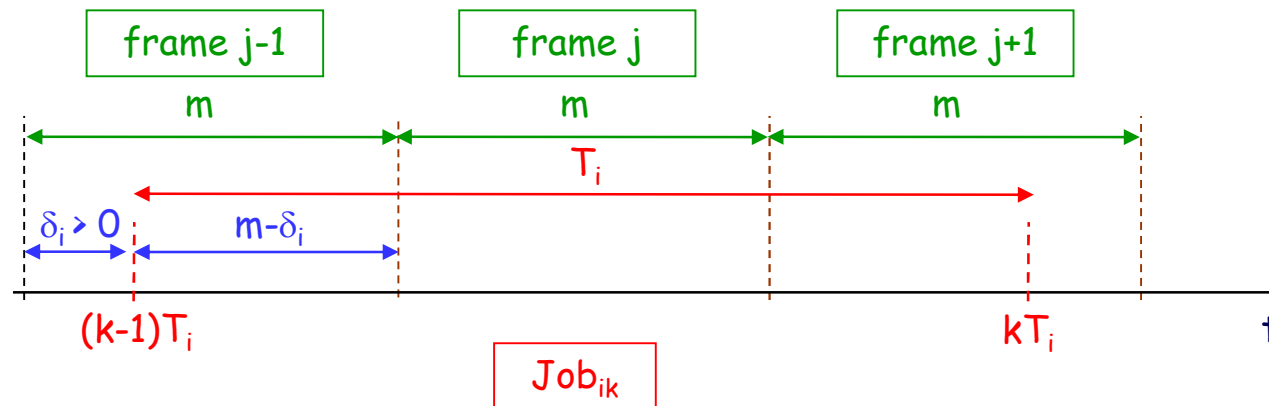
vincolo

$$(5) \quad 2m - \text{mcd}(m, T_i) \leq T_i, \quad \forall i \mid (T_i \bmod m) > 0$$

N.B.: (5)  $\equiv$  (4) se  $(T_i \bmod m) = 0$

motivazione

onde garantire che tra release time e deadline di un qualunque job sia comunque compreso un ciclo minore completo, nell'ambito del quale il job possa essere interamente eseguito ("no job early execution") ed al termine del quale sia verificabile la condizione "no job overrun"



$$\max (m - \delta_i) + m = m - \min (\delta_i) + m = m - \text{mcd}(m, T_i) + m \leq T_i, \quad \forall i$$

ipotesi:  $\phi_i = n * m, \quad \forall i, n = 0 (, 1, 2, \dots)$



# IDENTIFICAZIONE DEL "FRAME-SIZE"

1° esempio

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	1	4	0.25
P <sub>2</sub>	2	5	0.40
P <sub>3</sub>	1	10	0.10
P <sub>4</sub>	2	20	0.10

(1)  $M = \text{mcm}(T_1, \dots, T_4)$



$M = 20$

(3)  $m \geq C_i, \forall i$



$m = 2 \dots 4$

(4)  $m \leq T_i, \forall i$



(2)  $M \bmod m = 0$



$m = 2, 4$

(5)  $2m - \text{mcd}(m, T_i) \leq T_i$

$\forall i \mid (T_i \bmod m) > 0$

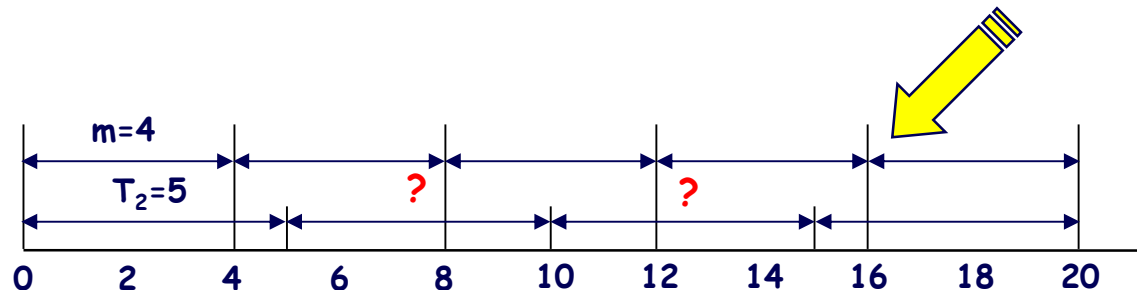
m	i	mcd(m, T <sub>i</sub> )	2m - mcd(m, T <sub>i</sub> )	T <sub>i</sub>
4	2	1	7	5
	3	2	6	10
2	2	1	3	5

NO

OK



$m = 2$



# PIANIFICAZIONE

## Procedimento iterativo basato su criteri euristici

L'esecuzione del k-esimo ( $k=1, \dots, n_{ji}$ ) job  $J_{ik}$  del processo  $P_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) può essere pianificata nel j-esimo ( $j=1, \dots, n_{cm}$ ) ciclo minore  $c_j$  se e soltanto se:

$$(k-1) T_i \leq (j-1) m,$$

$$j m \leq k T_i,$$

$$C_i \leq m - \sum_s C_s, \quad \forall s \mid P_s \in S_j,$$

dove  $S_j$  denota l'insieme dei processi la cui esecuzione è già stata pianificata in  $c_j$ .

Criteri di allocazione "job - ciclo minore" (in caso di più alternative ammissibili):

1. precedenza ai job di processi con frequenza di esecuzione più elevata;
2. precedenza ai job con tempo di esecuzione più elevato;
3. precedenza ai cicli minori con minor tempo residuo libero.

# COSTRUZIONE DI UN FEASIBLE SCHEDULE ...

	C	T
P <sub>1</sub>	1	4
P <sub>2</sub>	2	5
P <sub>3</sub>	1	10
P <sub>4</sub>	2	20

$$M = 20, m = 2 \Rightarrow n_{cm} = 10 \quad n_{J1} = 5 \quad n_{J2} = 4 \quad n_{J3} = 2 \quad n_{J4} = 1$$

identificazione del ciclo minore (o dei cicli minori) in cui ciascun job può essere eseguito:

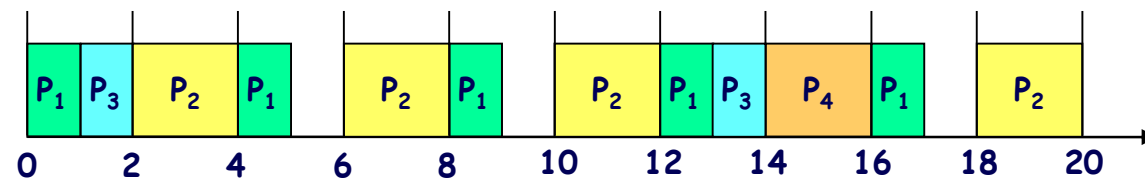
	J <sub>11</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>15</sub>	J <sub>21</sub>	J <sub>22</sub>	J <sub>23</sub>	J <sub>24</sub>	J <sub>31</sub>	J <sub>32</sub>	J <sub>41</sub>	
c <sub>1</sub>	x					x				x		x	0
c <sub>2</sub>	x					x				x		x	2
c <sub>3</sub>		x								x		x	4
c <sub>4</sub>		x					x			x		x	6
c <sub>5</sub>			x				x			x		x	8
c <sub>6</sub>			x					x			x	x	10
c <sub>7</sub>				x				x			x	x	12
c <sub>8</sub>				x							x	x	14
c <sub>9</sub>					x				x		x	x	16
c <sub>10</sub>					x				x		x	x	18
													20
													t

# ... COSTRUZIONE DI UN FEASIBLE SCHEDULE

pianificazione dell'esecuzione di ciascun job:

criteri:

	1	1	1,3	1
c <sub>1</sub>	J <sub>11</sub>	J <sub>11</sub>	J <sub>11</sub> J <sub>31</sub>	J <sub>11</sub> J <sub>31</sub>
c <sub>2</sub>		J <sub>21</sub>	J <sub>21</sub>	J <sub>21</sub>
c <sub>3</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>12</sub>
c <sub>4</sub>		J <sub>22</sub>	J <sub>22</sub>	J <sub>22</sub>
c <sub>5</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>13</sub>
c <sub>6</sub>		J <sub>23</sub>	J <sub>23</sub>	J <sub>23</sub>
c <sub>7</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>14</sub> J <sub>32</sub>	J <sub>14</sub> J <sub>32</sub>
c <sub>8</sub>				J <sub>41</sub>
c <sub>9</sub>	J <sub>15</sub>	J <sub>15</sub>	J <sub>15</sub>	J <sub>15</sub>
c <sub>10</sub>		J <sub>24</sub>	J <sub>24</sub>	J <sub>24</sub>



# PARTIZIONAMENTO DEI PROCESSI ...

Non sempre esiste un feasible schedule

2° esempio

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	2	5	0.40
P <sub>2</sub>	2	8	0.25
P <sub>3</sub>	5	20	0.25

$$(1) M = \text{mcm}(T_1, \dots, T_3) \Rightarrow M = 40$$

$$(3) m \geq C_i, \forall i \Rightarrow m = 5$$

$$(4) m \leq T_i, \forall i$$

$$(2) M \bmod m = 0 \Rightarrow m = 5$$

$$(5) 2m - \text{mcd}(m, T_i) \leq T_i$$

$$\forall i \mid (T_i \bmod m) > 0$$

m	i	mcd(m, T <sub>i</sub> )	2m - mcd(m, T <sub>i</sub> )	T <sub>i</sub>
5	2	1	9	8

NO

In tali casi occorre partizionare il processo (o i processi) con maggiore tempo di esecuzione in sottoprocessi ("job slicing"), rilassando così il vincolo (3):

$$P_i(C_i, T_i) \Rightarrow P_i'(C_i', T_i), P_i''(C_i'', T_i), \dots$$

con  $C_i' + C_i'' + \dots = C_i$  ed i vincoli di precedenza  $P_i' \prec P_i'' \prec \dots$

# ... PARTIZIONAMENTO DEI PROCESSI ...

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	2	5	0.40
P <sub>2</sub>	2	8	0.25
P <sub>3</sub>	5	20	0.25

$P_3 (5,20) \Rightarrow P_{3'} (3,20), P_{3''} (2,20)$

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	2	5	0.40
P <sub>2</sub>	2	8	0.25
P <sub>3'</sub>	3	20	0.15
P <sub>3''</sub>	2	20	0.10

$P_{3'} \prec P_{3''}$

(1)  $M = \text{mcm} (T_1, \dots, T_3)$



$M = 40$

(3)  $m \geq C_i, \forall i$



$m = 3 \dots 5$

(4)  $m \leq T_i, \forall i$



$m = 4, 5$

(2)  $M \bmod m = 0$



NO

(5)  $2m - \text{mcd}(m, T_i) \leq T_i$



$\forall i \mid (T_i \bmod m) > 0$

m	i	mcd (m, T <sub>i</sub> )	2 m - mcd (m, T <sub>i</sub> )	T <sub>i</sub>
4	1	1	7	5

NO

Ulteriore rilassamento del vincolo (3):

$P_{3'} (3,20) \Rightarrow P_{3A} (2,20), P_{3B} (1,20)$  con  $P_{3A} \prec P_{3B}$

# ... PARTIZIONAMENTO DEI PROCESSI ...

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	2	5	0.40
P <sub>2</sub>	2	8	0.25
P <sub>3'</sub>	3	20	0.15
P <sub>3''</sub>	2	20	0.10

$P_{3'} (3,20) \Rightarrow P_{3A} (2,20), P_{3B} (1,20)$

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	2	5	0.40
P <sub>2</sub>	2	8	0.25
P <sub>3A</sub>	2	20	0.10
P <sub>3B</sub>	1	20	0.05
P <sub>3''</sub>	2	20	0.10

$P_{3A} < P_{3B} < P_{3''}$

$$(1) M = \text{mcm} (T_1, \dots, T_3)$$



$$M = 40$$

$$(3) m \geq C_i, \forall i$$



$$m = 2 \dots 5$$

$$(4) m \leq T_i, \forall i$$



$$m = 2, 4, 5$$



NO

$$(5) 2m - \text{mcd}(m, T_i) \leq T_i$$

$$\forall i \mid (T_i \bmod m) > 0$$



m	i	mcd (m, T <sub>i</sub> )	2 m - mcd (m, T <sub>i</sub> )	T <sub>i</sub>
2	1	1	3	5

OK

# ... PARTIZIONAMENTO DEI PROCESSI ...

	C	T
P <sub>1</sub>	2	5
P <sub>2</sub>	2	8
P <sub>3A</sub>	2	20
P <sub>3B</sub>	1	20
P <sub>3''</sub>	2	20

$P_{3A} \triangleleft P_{3B} \triangleleft P_{3''}$

$M = 40, m = 2$



$n_{cm} = 20$

$n_{J1} = 8$

$n_{J2} = 5$

$n_{J3A} = n_{J3B} = n_{J3''} = 2$

	J <sub>11</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>15</sub>	J <sub>16</sub>	J <sub>17</sub>	J <sub>18</sub>	J <sub>21</sub>	J <sub>22</sub>	J <sub>23</sub>	J <sub>24</sub>	J <sub>25</sub>	J <sub>3.1</sub>	J <sub>3.2</sub>
c <sub>1</sub>	x								x					x	
c <sub>2</sub>	x								x					x	
c <sub>3</sub>									x					x	
c <sub>4</sub>		x							x					x	
c <sub>5</sub>		x								x				x	
c <sub>6</sub>			x							x				x	
c <sub>7</sub>			x							x				x	
c <sub>8</sub>										x				x	
c <sub>9</sub>				x							x			x	
c <sub>10</sub>				x							x			x	
c <sub>11</sub>					x						x				x
c <sub>12</sub>					x						x				x
c <sub>13</sub>												x			x
c <sub>14</sub>						x						x			x
c <sub>15</sub>						x						x			x
c <sub>16</sub>							x					x			x
c <sub>17</sub>							x						x		x
c <sub>18</sub>													x		x
c <sub>19</sub>								x					x		x
c <sub>20</sub>								x					x		x

0  
2  
4  
6  
8  
10  
12  
14  
16  
18  
20  
22  
24  
26  
28  
30  
32  
34  
36  
38  
40  
↑  
24

Scheduling di processi HRT



# ... PARTIZIONAMENTO DEI PROCESSI

	C	T
P <sub>1</sub>	2	5
P <sub>2</sub>	2	8
P <sub>3A</sub>	2	20
P <sub>3B</sub>	1	20
P <sub>3''</sub>	2	20

$$P_{3A} < P_{3B} < P_{3''}$$

$$M = 40, m = 2$$



$$n_{cm} = 20$$

$$n_{J1} = 8$$

$$n_{J2} = 5$$

$$n_{J3A} = n_{J3B} = n_{J3''} = 2$$

c <sub>1</sub>	J <sub>11</sub>	J <sub>11</sub>	J <sub>11</sub>	J <sub>11</sub>	J <sub>11</sub>
c <sub>2</sub>		J <sub>21</sub>	J <sub>21</sub>	J <sub>21</sub>	J <sub>21</sub>
c <sub>3</sub>			J <sub>3A1</sub>	J <sub>3A1</sub>	J <sub>3A1</sub>
c <sub>4</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>12</sub>
c <sub>5</sub>		J <sub>22</sub>	J <sub>22</sub>	J <sub>22</sub>	J <sub>22</sub>
c <sub>6</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>13</sub>
c <sub>7</sub>				J <sub>3B1</sub>	J <sub>3B1</sub>
c <sub>8</sub>					J <sub>3''1</sub>
c <sub>9</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>14</sub>
c <sub>10</sub>		J <sub>23</sub>	J <sub>23</sub>	J <sub>23</sub>	J <sub>23</sub>
c <sub>11</sub>	J <sub>15</sub>	J <sub>15</sub>	J <sub>15</sub>	J <sub>15</sub>	J <sub>15</sub>
c <sub>12</sub>			J <sub>3A2</sub>	J <sub>3A2</sub>	J <sub>3A2</sub>
c <sub>13</sub>		J <sub>24</sub>	J <sub>24</sub>	J <sub>24</sub>	J <sub>24</sub>
c <sub>14</sub>	J <sub>16</sub>	J <sub>16</sub>	J <sub>16</sub>	J <sub>16</sub>	J <sub>16</sub>
c <sub>15</sub>				J <sub>3B2</sub>	J <sub>3B2</sub>
c <sub>16</sub>	J <sub>17</sub>	J <sub>17</sub>	J <sub>17</sub>	J <sub>17</sub>	J <sub>17</sub>
c <sub>17</sub>		J <sub>25</sub>	J <sub>25</sub>	J <sub>25</sub>	J <sub>25</sub>
c <sub>18</sub>					J <sub>3''2</sub>
c <sub>19</sub>	J <sub>18</sub>	J <sub>18</sub>	J <sub>18</sub>	J <sub>18</sub>	J <sub>18</sub>
c <sub>20</sub>					

# CRITERI EURISTICI A SUPPORTO DELLA PIANIFICAZIONE ...

3° esempio

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	2	8	0.250
P <sub>2</sub>	1	9	0.111
P <sub>3</sub>	4	12	0.333
P <sub>4</sub>	4	36	0.111
P <sub>5</sub>	4	72	0.056

$$(1) M = \text{mcm} (T_1, \dots, T_5)$$



$$M = 72$$

$$(3) m \geq C_i, \forall i$$



$$(4) m \leq T_i, \forall i$$



$$m = 4 \dots 8$$

$$(2) M \bmod m = 0$$



$$m = 4, 6, 8$$

$$(5) 2m - \text{mcd}(m, T_i) \leq T_i$$

$$\forall i \mid (T_i \bmod m) > 0$$

m	i	mcd (m, T <sub>i</sub> )	2 m - mcd (m, T <sub>i</sub> )	T <sub>i</sub>
8	2	1	15	9
	3	4	12	12
	4	4	12	36
6	1	2	10	8
	2	3	9	9
4	2	1	7	9

NO

NO

OK



$$m = 4$$

# ... CRITERI EURISTICI ...

	J <sub>11</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>15</sub>	J <sub>16</sub>	J <sub>17</sub>	J <sub>18</sub>	J <sub>19</sub>	J <sub>21</sub>	J <sub>22</sub>	J <sub>23</sub>	J <sub>24</sub>	J <sub>25</sub>	J <sub>26</sub>	J <sub>27</sub>	J <sub>28</sub>	J <sub>31</sub>	J <sub>32</sub>	J <sub>33</sub>	J <sub>34</sub>	J <sub>35</sub>	J <sub>36</sub>	J <sub>41</sub>	J <sub>42</sub>	J <sub>51</sub>	
C <sub>1</sub>	x									x								x						x		x	0
C <sub>2</sub>	x									x								x						x		x	4
C <sub>3</sub>		x																x						x		x	8
C <sub>4</sub>		x									x								x					x		x	12
C <sub>5</sub>			x																x					x		x	16
C <sub>6</sub>			x									x							x					x		x	20
C <sub>7</sub>				x																x				x		x	24
C <sub>8</sub>				x									x							x				x		x	28
C <sub>9</sub>					x								x							x				x		x	32
C <sub>10</sub>					x									x							x				x	x	36
C <sub>11</sub>						x								x							x				x	x	40
C <sub>12</sub>						x															x				x	x	44
C <sub>13</sub>							x								x							x			x	x	48
C <sub>14</sub>							x															x			x	x	52
C <sub>15</sub>								x								x						x			x	x	56
C <sub>16</sub>								x															x		x	x	60
C <sub>17</sub>									x								x						x		x	x	64
C <sub>18</sub>									x								x						x		x	x	68
																							x		x	x	72

M = 72, m = 4

→

n<sub>cm</sub> = 18

T<sub>1</sub> = 8

n<sub>J1</sub> = 9

T<sub>2</sub> = 9

n<sub>J2</sub> = 8

T<sub>3</sub> = 12

n<sub>J3</sub> = 6

T<sub>4</sub> = 36

n<sub>J4</sub> = 2

T<sub>5</sub> = 72

n<sub>J5</sub> = 1

## ... CRITERI EURISTICI ...

c <sub>1</sub>	J <sub>11</sub>			J <sub>11</sub>	J <sub>21</sub>		J <sub>11</sub>	J <sub>21</sub>		J <sub>11</sub>	J <sub>21</sub>		J <sub>11</sub>	J <sub>21</sub>	
c <sub>2</sub>							J <sub>31</sub>			J <sub>31</sub>			J <sub>31</sub>		
c <sub>3</sub>	J <sub>12</sub>			J <sub>12</sub>			J <sub>12</sub>			J <sub>12</sub>			J <sub>12</sub>		
c <sub>4</sub>				J <sub>22</sub>			J <sub>22</sub>			J <sub>22</sub>			J <sub>22</sub>		
c <sub>5</sub>	J <sub>13</sub>			J <sub>13</sub>			J <sub>13</sub>	J <sub>32</sub> ?		J <sub>13</sub>	J <sub>41</sub> ?		J <sub>13</sub>		
c <sub>6</sub>				J <sub>23</sub>			J <sub>23</sub>			J <sub>23</sub>			J <sub>23</sub>		
c <sub>7</sub>	J <sub>14</sub>			J <sub>14</sub>			J <sub>14</sub>			J <sub>14</sub>			J <sub>14</sub>		
c <sub>8</sub>							J <sub>33</sub>			J <sub>33</sub>			J <sub>33</sub>		
c <sub>9</sub>	J <sub>15</sub>			J <sub>15</sub>	J <sub>24</sub>		J <sub>15</sub>	J <sub>24</sub>		J <sub>15</sub>	J <sub>24</sub>		J <sub>15</sub>	J <sub>24</sub>	
c <sub>10</sub>							J <sub>34</sub>			J <sub>34</sub>			J <sub>34</sub>		
c <sub>11</sub>	J <sub>16</sub>			J <sub>16</sub>	J <sub>25</sub>		J <sub>16</sub>	J <sub>25</sub>		J <sub>16</sub>	J <sub>25</sub>		J <sub>16</sub>	J <sub>25</sub>	
c <sub>12</sub>										J <sub>42</sub>			J <sub>42</sub>		
c <sub>13</sub>	J <sub>17</sub>			J <sub>17</sub>	J <sub>26</sub>		J <sub>17</sub>	J <sub>26</sub>		J <sub>17</sub>	J <sub>26</sub>		J <sub>17</sub>	J <sub>26</sub>	
c <sub>14</sub>							J <sub>35</sub>			J <sub>35</sub>			J <sub>35</sub>		
c <sub>15</sub>	J <sub>18</sub>			J <sub>18</sub>	J <sub>27</sub>		J <sub>18</sub>	J <sub>27</sub>		J <sub>18</sub>	J <sub>27</sub>		J <sub>18</sub>	J <sub>27</sub>	
c <sub>16</sub>							J <sub>36</sub>			J <sub>36</sub>			J <sub>36</sub>		
c <sub>17</sub>	J <sub>19</sub>			J <sub>19</sub>	J <sub>28</sub>		J <sub>19</sub>	J <sub>28</sub>		J <sub>19</sub>	J <sub>28</sub>		J <sub>19</sub>	J <sub>28</sub>	
c <sub>18</sub>													J <sub>51</sub>		

E' possibile identificare un feasible schedule ricorrendo alla tecnica del job slicing:

$P_3 (4,12) \Rightarrow P_{3'} (2,12), P_{3''} (2,12)$  con  $P_{3'} \prec P_{3''} \Rightarrow J_{32'}$  in  $c_4, J_{32''}$  in  $c_5$

$P_4 (4,36) \Rightarrow P_{4'} (2,36), P_{4''} (2,36)$  con  $P_{4'} \prec P_{4''} \Rightarrow J_{41'}$  in  $c_6, J_{41''}$  in  $c_7$

## ... CRITERI EURISTICI ...

E' possibile identificare un feasible schedule senza ricorrere alla tecnica del job slicing privilegiando l'allocazione dei job che non ammettono alternative.

c <sub>1</sub>										J <sub>31</sub>	J <sub>31</sub>
c <sub>2</sub>					J <sub>11</sub>			J <sub>11</sub>	J <sub>21</sub>	J <sub>11</sub>	J <sub>21</sub>
c <sub>3</sub>											J <sub>51</sub>
c <sub>4</sub>	J <sub>22</sub>				J <sub>22</sub>	J <sub>12</sub>		J <sub>22</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>22</sub>	J <sub>12</sub>
c <sub>5</sub>										J <sub>32</sub>	J <sub>32</sub>
c <sub>6</sub>	J <sub>23</sub>				J <sub>23</sub>	J <sub>13</sub>		J <sub>23</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>23</sub>	J <sub>13</sub>
c <sub>7</sub>										J <sub>33</sub>	J <sub>33</sub>
c <sub>8</sub>					J <sub>14</sub>			J <sub>14</sub>	J <sub>24</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>24</sub>
c <sub>9</sub>											J <sub>41</sub>
c <sub>10</sub>					J <sub>15</sub>			J <sub>15</sub>		J <sub>15</sub>	
c <sub>11</sub>					J <sub>16</sub>			J <sub>16</sub>	J <sub>25</sub>	J <sub>16</sub>	J <sub>25</sub>
c <sub>12</sub>										J <sub>34</sub>	J <sub>34</sub>
c <sub>13</sub>	J <sub>26</sub>				J <sub>26</sub>	J <sub>17</sub>		J <sub>26</sub>	J <sub>17</sub>	J <sub>26</sub>	J <sub>17</sub>
c <sub>14</sub>										J <sub>35</sub>	J <sub>35</sub>
c <sub>15</sub>	J <sub>27</sub>				J <sub>27</sub>	J <sub>18</sub>		J <sub>27</sub>	J <sub>18</sub>	J <sub>27</sub>	J <sub>18</sub>
c <sub>16</sub>										J <sub>36</sub>	J <sub>36</sub>
c <sub>17</sub>					J <sub>19</sub>			J <sub>19</sub>	J <sub>28</sub>	J <sub>19</sub>	J <sub>28</sub>
c <sub>18</sub>											J <sub>42</sub>

## ... CRITERI EURISTICI ...

4° esempio

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	1	6	0.167
P <sub>2</sub>	5	8	0.625
P <sub>3</sub>	2	12	0.167

(1)  $M = \text{mcm}(T_1, \dots, T_3)$



$M = 24$

(3)  $m \geq C_i, \forall i$



(4)  $m \leq T_i, \forall i$



$m = 5, 6$

(2)  $M \bmod m = 0$



$m = 6$

(5)  $2m - \text{mcd}(m, T_i) \leq T_i$

$\forall i \mid (T_i \bmod m) > 0$

m	i	mcd(m, T <sub>i</sub> )	2m - mcd(m, T <sub>i</sub> )	T <sub>i</sub>
6	2	2	10	8

NO

Rilassamento del vincolo (3):

$P_2(5,8) \Rightarrow P_{2'}(3,8), P_{2''}(2,8)$

con  $P_{2'} \prec P_{2''}$

## ... CRITERI EURISTICI ...

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	1	6	0.167
P <sub>2</sub>	5	8	0.625
P <sub>3</sub>	2	12	0.167

$P_2 (5,8) \Rightarrow P_{2'} (3,8), P_{2''} (2,8)$

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	1	6	0.167
P <sub>2'</sub>	3	8	0.375
P <sub>2''</sub>	2	8	0.250
P <sub>3</sub>	2	12	0.167

$P_{2'} < P_{2''}$

(1)  $M = \text{mcm} (T_1, \dots, T_3)$



$M = 24$

(3)  $m \geq C_i, \forall i$



$m = 3 \dots 6$

(4)  $m \leq T_i, \forall i$



$m = 3, 4, 6$

(2)  $M \bmod m = 0$



NO

m	i	mcd (m, T <sub>i</sub> )	2 m - mcd (m, T <sub>i</sub> )	T <sub>i</sub>
4	1	2	6	6
3	2	1	5	8

OK

OK

(5)  $2m - \text{mcd}(m, T_i) \leq T_i, \forall i \mid (T_i \bmod m) > 0 \Rightarrow m = 3, 4$

# ... CRITERI EURISTICI ...

	C	T
P <sub>1</sub>	1	6
P <sub>2'</sub>	3	8
P <sub>2''</sub>	2	8
P <sub>3</sub>	2	12

$P_{2'} < P_{2''}$

$m = 4$     $M = 24$     $\Rightarrow$     $n_{cm} = 6$     $n_{J1} = 4$     $n_{J2'} = n_{J2''} = 3$     $n_{J3} = 2$

	J <sub>11</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>2.1</sub>	J <sub>2.2</sub>	J <sub>2.3</sub>	J <sub>31</sub>	J <sub>32</sub>
c <sub>1</sub>	x				x			x	
c <sub>2</sub>					x			x	
c <sub>3</sub>		x				x		x	
c <sub>4</sub>			x			x			x
c <sub>5</sub>							x		x
c <sub>6</sub>				x			x		x

0  
4  
8  
12  
16  
20  
24  
↓  
†

c <sub>1</sub>	J <sub>11</sub>				J <sub>11</sub>	J <sub>2'1</sub>	J <sub>11</sub>	J <sub>2'1</sub>	J <sub>11</sub>	J <sub>2'1</sub>
c <sub>2</sub>					J <sub>2''1</sub>		J <sub>2''1</sub>	J <sub>31</sub>	J <sub>2''1</sub>	J <sub>3'1</sub> J <sub>3''1</sub>
c <sub>3</sub>	J <sub>12</sub>				J <sub>12</sub>	J <sub>2'2</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>2'2</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>2'2</sub>
c <sub>4</sub>	J <sub>13</sub>				J <sub>13</sub>	J <sub>2''2</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>2''2</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>2'2</sub> J <sub>3'2</sub>
c <sub>5</sub>					J <sub>2'3</sub>		J <sub>2'3</sub>		J <sub>2'3</sub>	J <sub>3''2</sub>
c <sub>6</sub>	J <sub>14</sub>				J <sub>14</sub>	J <sub>2''3</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>2''3</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>2'3</sub>

J<sub>32</sub> ?

E' possibile identificare un feasible schedule solo ricorrendo nuovamente alla tecnica del job slicing.

$P_3 (2,12) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow P_{3'} (1,12), P_{3''} (1,12)$   
 $P_{3'} < P_{3''}$



## ... CRITERI EURISTICI

	C	T
P <sub>1</sub>	1	6
P <sub>2'</sub>	3	8
P <sub>2''</sub>	2	8
P <sub>3</sub>	2	12

$$P_{2'} \prec P_{2''}$$

Anche in questo caso, applicando nell'ordine i criteri euristici delineati, è possibile identificare un feasible schedule solo ricorrendo nuovamente alla tecnica del job slicing.

E' possibile in alternativa identificare direttamente un feasible schedule privilegiando l'allocazione dei job contraddistinti da vincoli di precedenza.

$$m = 3 \quad M = 24 \quad \Rightarrow \quad n_{cm} = 8 \quad n_{J_1} = 4 \quad n_{J_{2'}} = n_{J_{2''}} = 3 \quad n_{J_3} = 2$$

	J <sub>11</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>13</sub>	J <sub>14</sub>	J <sub>2.1</sub>	J <sub>2.2</sub>	J <sub>2.3</sub>	J <sub>31</sub>	J <sub>32</sub>	
c <sub>1</sub>	x				x			x		0
c <sub>2</sub>	x				x			x		3
c <sub>3</sub>		x						x		6
c <sub>4</sub>		x				x		x		9
c <sub>5</sub>			x			x			x	12
c <sub>6</sub>			x						x	15
c <sub>7</sub>				x			x		x	18
c <sub>8</sub>				x			x		x	21
										24
										t

c <sub>1</sub>	J <sub>2'1</sub>		
c <sub>2</sub>	J <sub>2''1</sub>		
c <sub>3</sub>			
c <sub>4</sub>	J <sub>2'2</sub>		
c <sub>5</sub>	J <sub>2''2</sub>		
c <sub>6</sub>			
c <sub>7</sub>	J <sub>2'3</sub>		
c <sub>8</sub>	J <sub>2''3</sub>		

c <sub>1</sub>	J <sub>2'1</sub>		
c <sub>2</sub>	J <sub>2''1</sub>	J <sub>11</sub>	
c <sub>3</sub>	J <sub>12</sub>		
c <sub>4</sub>	J <sub>2'2</sub>		
c <sub>5</sub>	J <sub>2''2</sub>	J <sub>13</sub>	
c <sub>6</sub>			
c <sub>7</sub>	J <sub>2'3</sub>		
c <sub>8</sub>	J <sub>2''3</sub>	J <sub>14</sub>	

c <sub>1</sub>	J <sub>2'1</sub>		
c <sub>2</sub>	J <sub>2''1</sub>	J <sub>11</sub>	
c <sub>3</sub>	J <sub>12</sub>	J <sub>31</sub>	
c <sub>4</sub>	J <sub>2'2</sub>		
c <sub>5</sub>	J <sub>2''2</sub>	J <sub>13</sub>	
c <sub>6</sub>	J <sub>32</sub>		
c <sub>7</sub>	J <sub>2'3</sub>		
c <sub>8</sub>	J <sub>2''3</sub>	J <sub>14</sub>	

# SCHEDULAZIONE "PRIORITY-DRIVEN"

- Ad ogni processo è staticamente o dinamicamente associata una priorità in dipendenza dei corrispondenti requisiti temporali.
- Ad ogni processo è dinamicamente associata una informazione che ne identifica lo stato ai fini della esecuzione:
  - processo IDLE
  - processo READY
  - processo RUNNING
- L'esecuzione di un processo è sospesa se un altro processo di priorità superiore è pronto per l'esecuzione (PREEMPTION).

# L'ALGORITMO RATE MONOTONIC PRIORITY ORDERING (RMPO)

Ad ogni processo è staticamente associata una priorità direttamente proporzionale alla corrispondente frequenza di esecuzione:

$$p(P_j) = p_j \propto 1 / T_j = 1 / D_j \quad (j = 1, 2, \dots, N)$$

## OTTIMALITÀ DELL'ALGORITMO

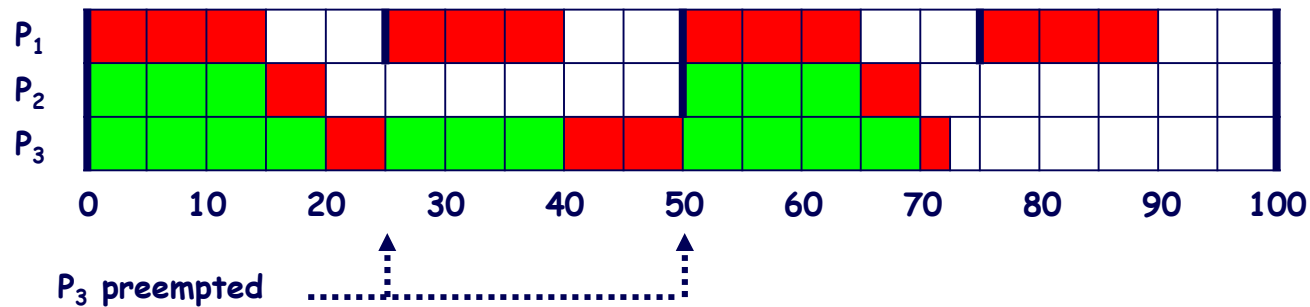
Se un insieme di processi periodici è schedabile con un qualche algoritmo che prevede un'attribuzione statica di priorità, allora tale insieme è schedabile anche con RMPO.

Se un insieme di processi periodici non è schedabile con RMPO, allora tale insieme non è schedabile con alcun altro algoritmo che preveda un'attribuzione statica di priorità.

# IL MECCANISMO DELLA PREEMPTION

$A_2$	C	T	C/T	p
$P_1$	15	25	.6	max
$P_2$	5	50	.1	
$P_3$	17.5	100	.175	min

$$U(A_2) = 0.875$$



# ANALISI DI SCHEDULABILITÀ

- costruzione di diagrammi temporali che evidenziano l'evoluzione dei processi dal punto di vista dell'esecuzione
- applicazione di criteri basati sul fattore di utilizzazione del processore da parte dei (singoli) processi
- calcolo dei tempi di risposta dei singoli processi

Esito sempre conclusivo?

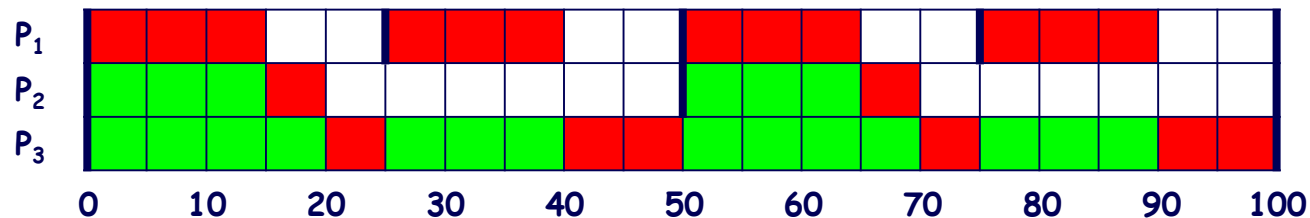
sì

no

# ANALISI DI SCHEDULABILITÀ ATTRAVERSO DIAGRAMMI TEMPORALI ...

$A_3$	C	T	C/T	p
$P_1$	15	25	0.6	max
$P_2$	5	50	0.1	
$P_3$	30	100	0.3	min

$$U(A_3) = 1$$

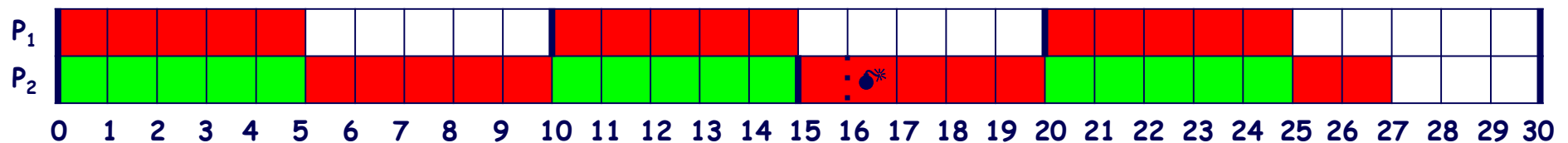


$U \leq 1$  è condizione sufficiente per la schedulabilità di un insieme di processi "semplicemente periodici" (con periodi in relazione armonica).

# ... ANALISI DI SCHEDULABILITÀ ATTRAVERSO DIAGRAMMI TEMPORALI ...

$A_4$	$C$	$T$	$C/T$	$p$
$P_1$	5	10	0.5	max
$P_2$	6	15	0.4	min

$$U(A_4) = 0.9$$



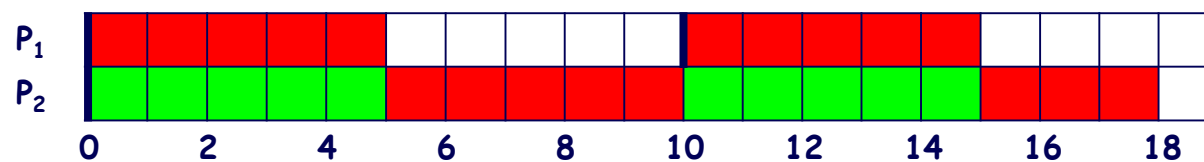
missed deadline (●\*): insieme di processi non schedulabile

Quando non sussiste una relazione armonica tra i periodi dei processi, la condizione  $U \leq 1$  non è sufficiente per garantire la schedulabilità.

# ...ANALISI DI SCHEDULABILITÀ ATTRAVERSO DIAGRAMMI TEMPORALI

$A_5$	C	T	C/T	p
$P_1$	5	10	0.50	max
$P_2$	8	19	0.42	min

$$U(A_5) = 0.92$$



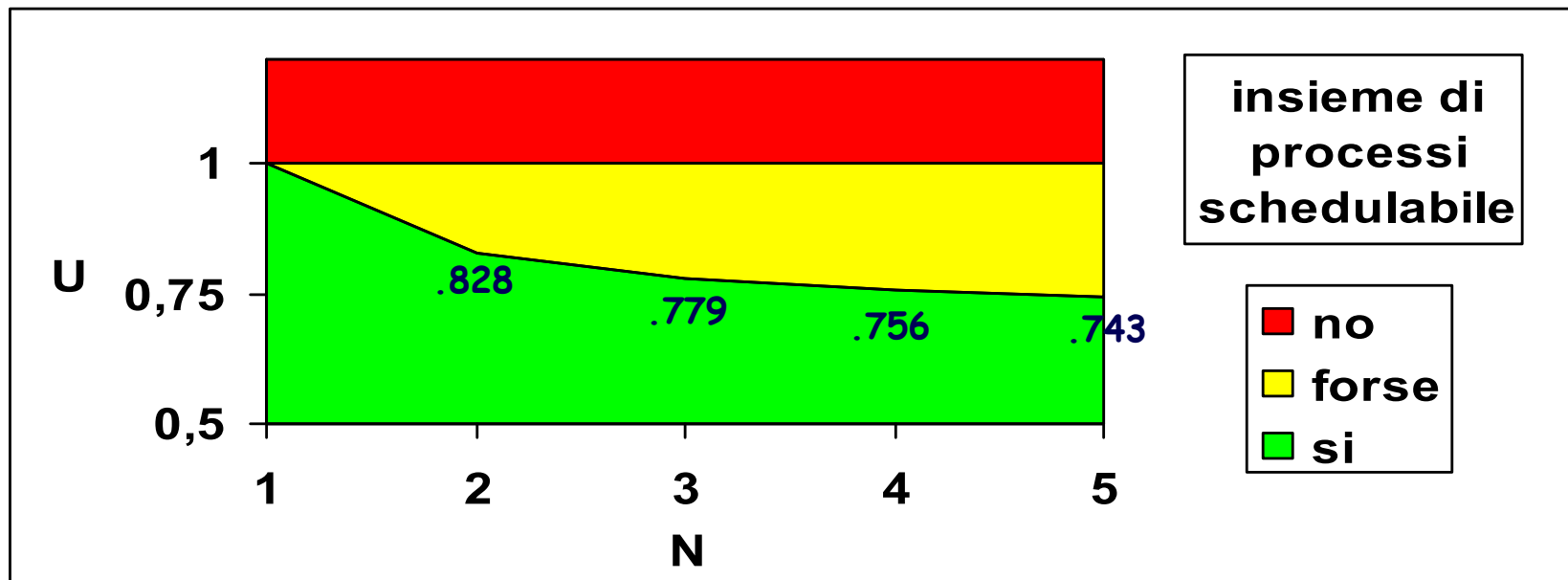
La schedulabilità è garantita se per ogni processo è rispettata la prima deadline a partire dalla condizione più sfavorevole di contemporanea attivazione del processo stesso e di tutti i processi di priorità superiore (istante critico).



# TEST DI SCHEDULABILITÀ BASATO SUL FATTORE DI UTILIZZAZIONE DEL PROCESSORE [LIU-LAYLAND (73)]

Condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché un insieme di N processi sia schedulabile con l'algoritmo RMPO è che:

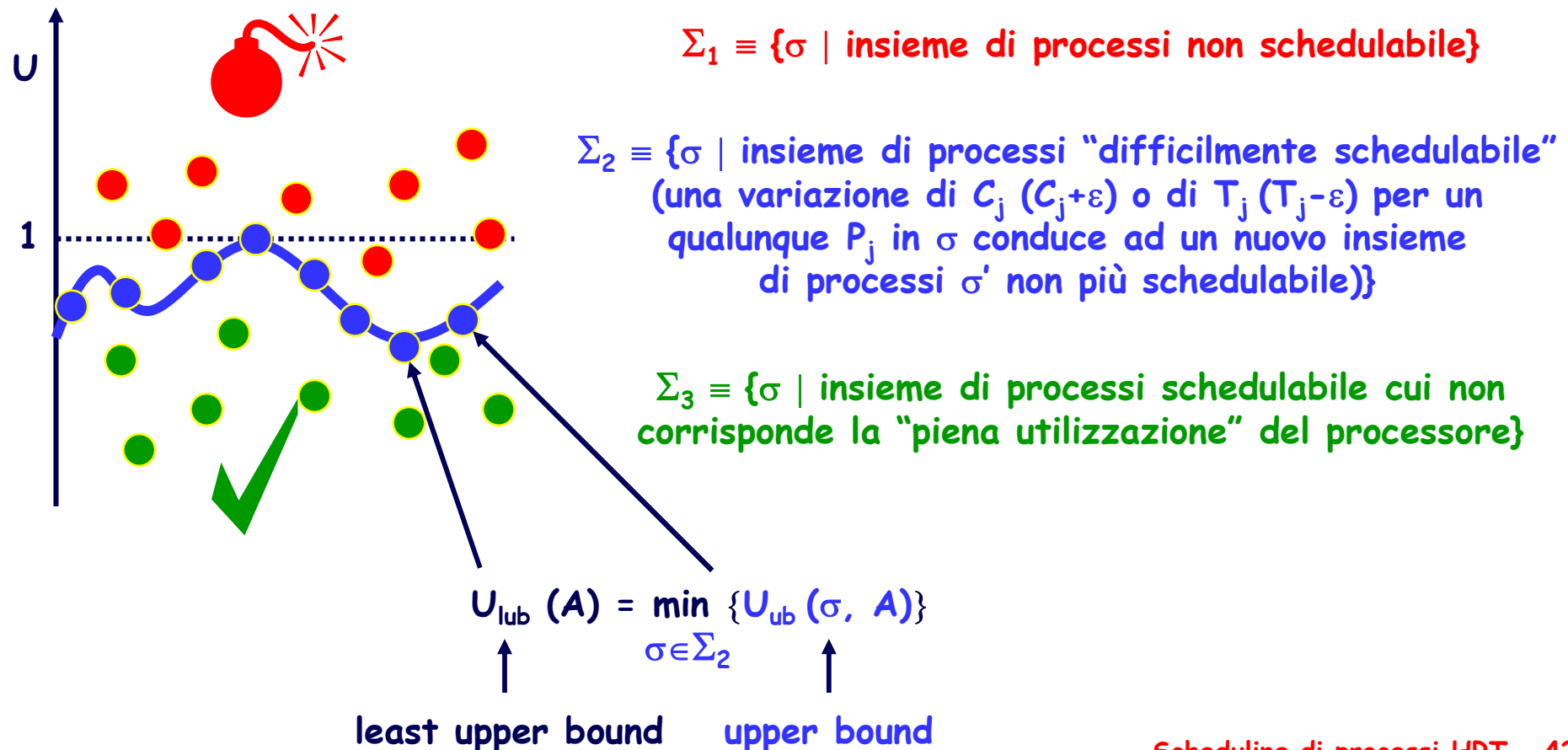
$$U \leq U_{\text{RMPO}}(N) = N(2^{1/N} - 1)$$



$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_{\text{RMPO}}(N) = \ln 2 = 0.693$$

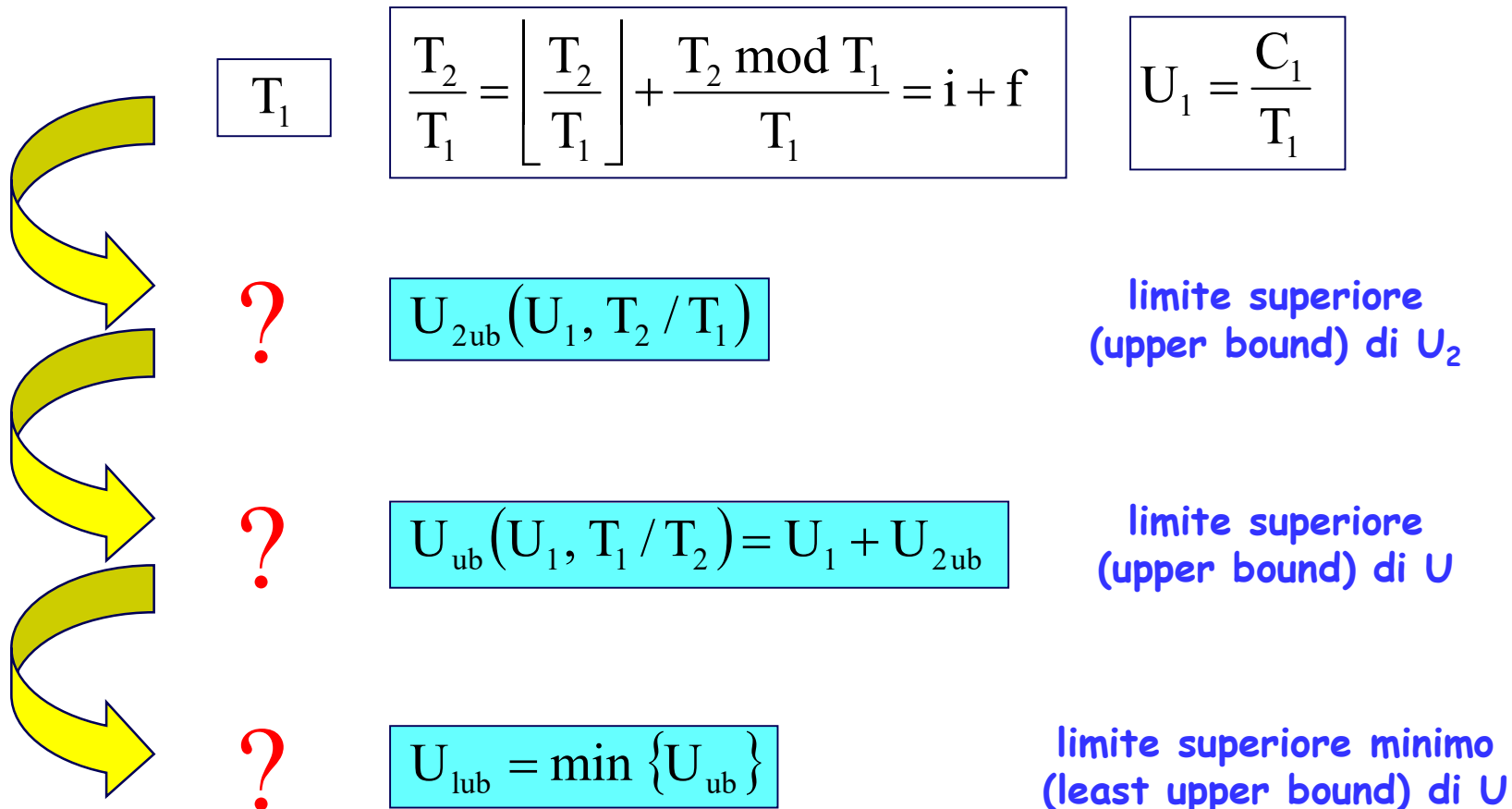
# IL LIMITE SUPERIORE MINIMO (LEAST UPPER BOUND) DEL FATTORE DI UTILIZZAZIONE

L'applicazione di un algoritmo di scheduling (A) induce nello spazio dei possibili insiemi di processi  $\Sigma \equiv \{\sigma (N, T_1, \dots, T_N, C_1, \dots, C_N)\}$  una partizione in tre sottospazi disgiunti  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$



# CALCOLO DI $U_{lub}$ per RMPO

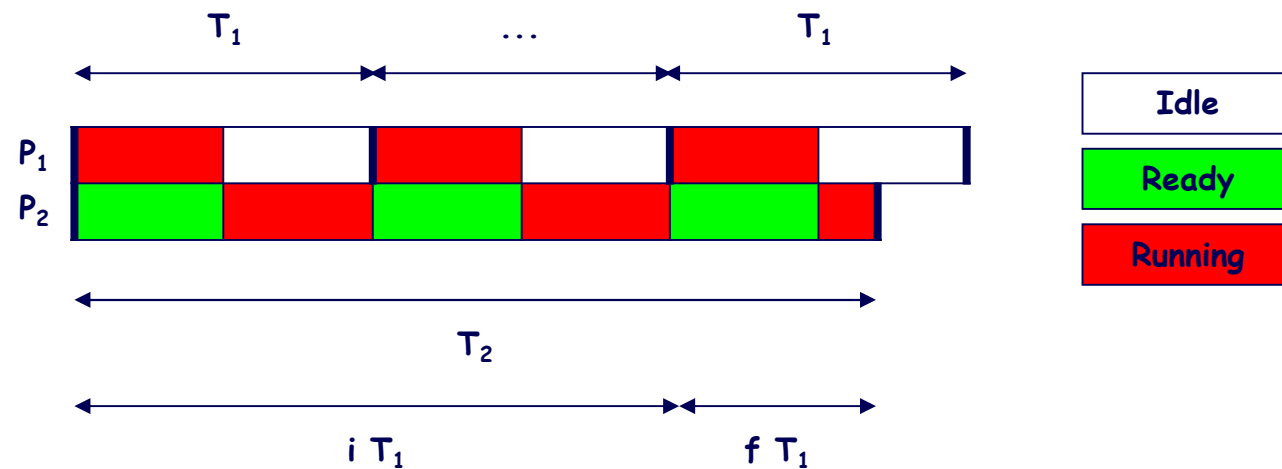
## 1) Analisi del caso elementare corrispondente a $N = 2$ processi



## 2) Generalizzazione dei risultati nel caso di $N > 2$ processi

## CALCOLO DI $U_{ub}$ (N=2) ...

1° caso :  $f > U_1$ , ovvero  $f T_1 > C_1$

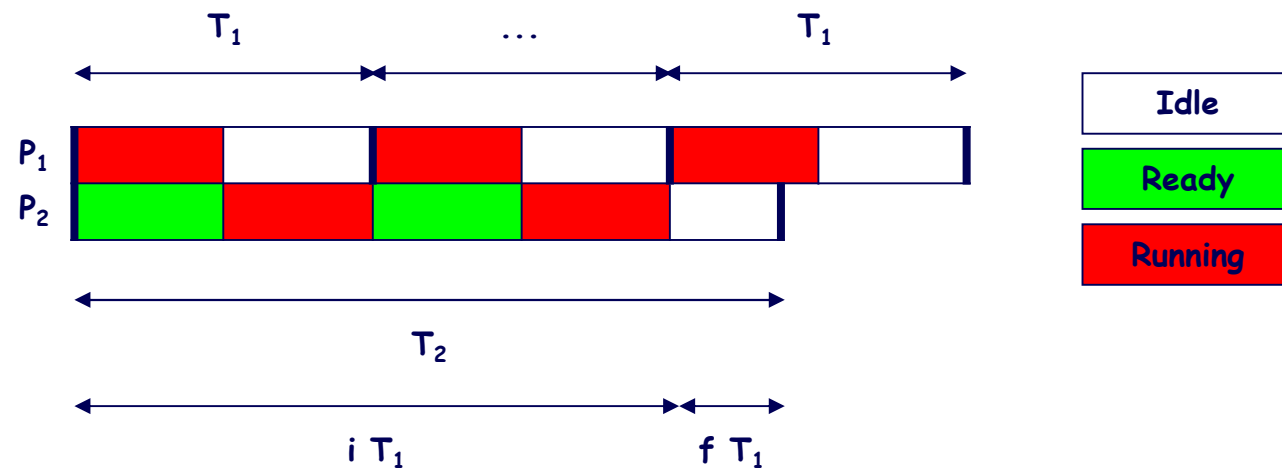


$$C_2 \leq i(T_1 - C_1) + f T_1 - C_1 = [i(1 - U_1) + f - U_1] T_1 = C_{2ub}$$

$$U_2 = \frac{C_2}{T_2} \leq \frac{i(1 - U_1) + f - U_1}{i + f} = U_{2ub}$$

## ... CALCOLO DI $U_{ub}$ (N=2) ...

2° caso :  $f \leq U_1$ , ovvero  $f T_1 \leq C_1$

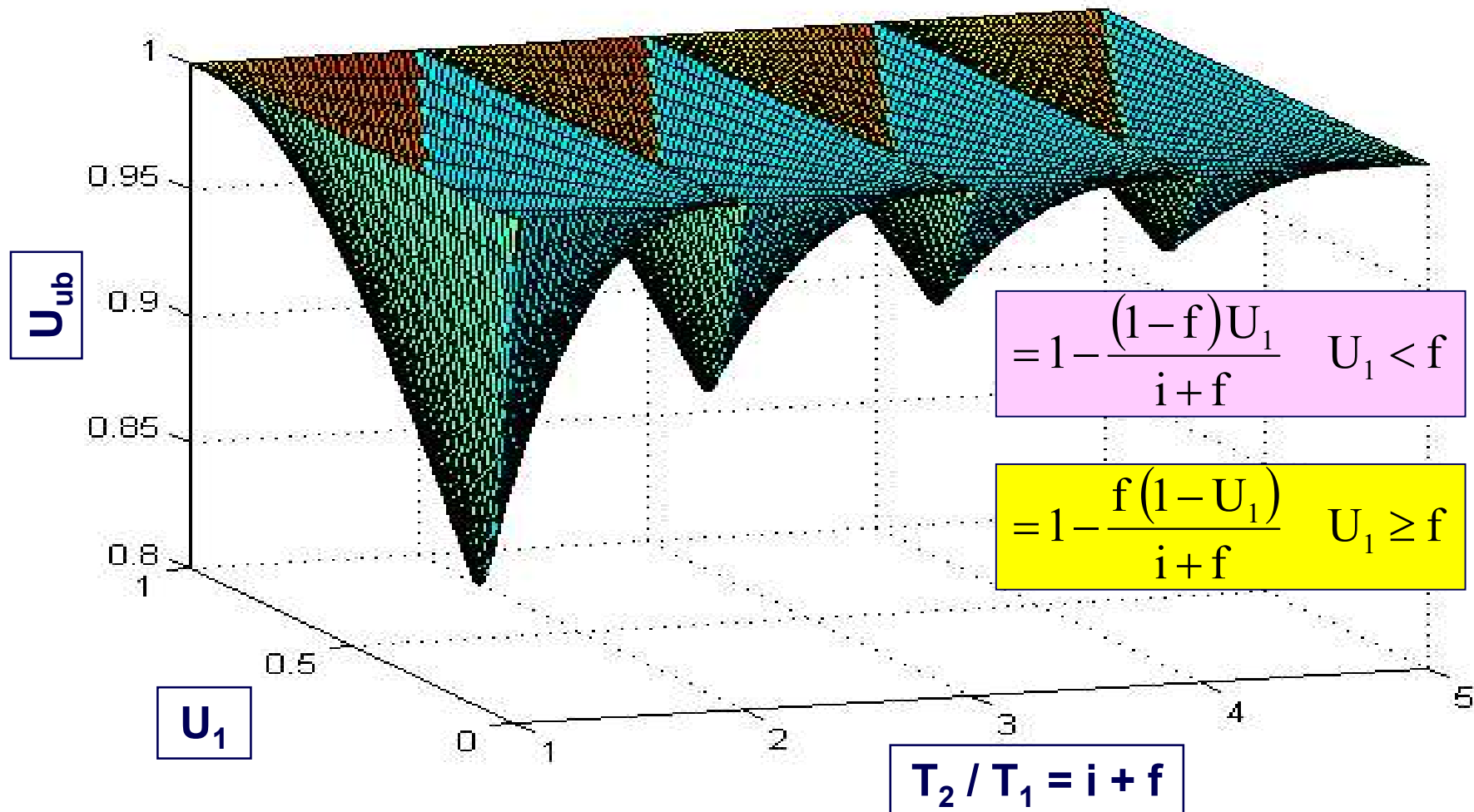


$$C_2 \leq i(T_1 - C_1) = i(1 - U_1)T_1 = C_{2ub}$$

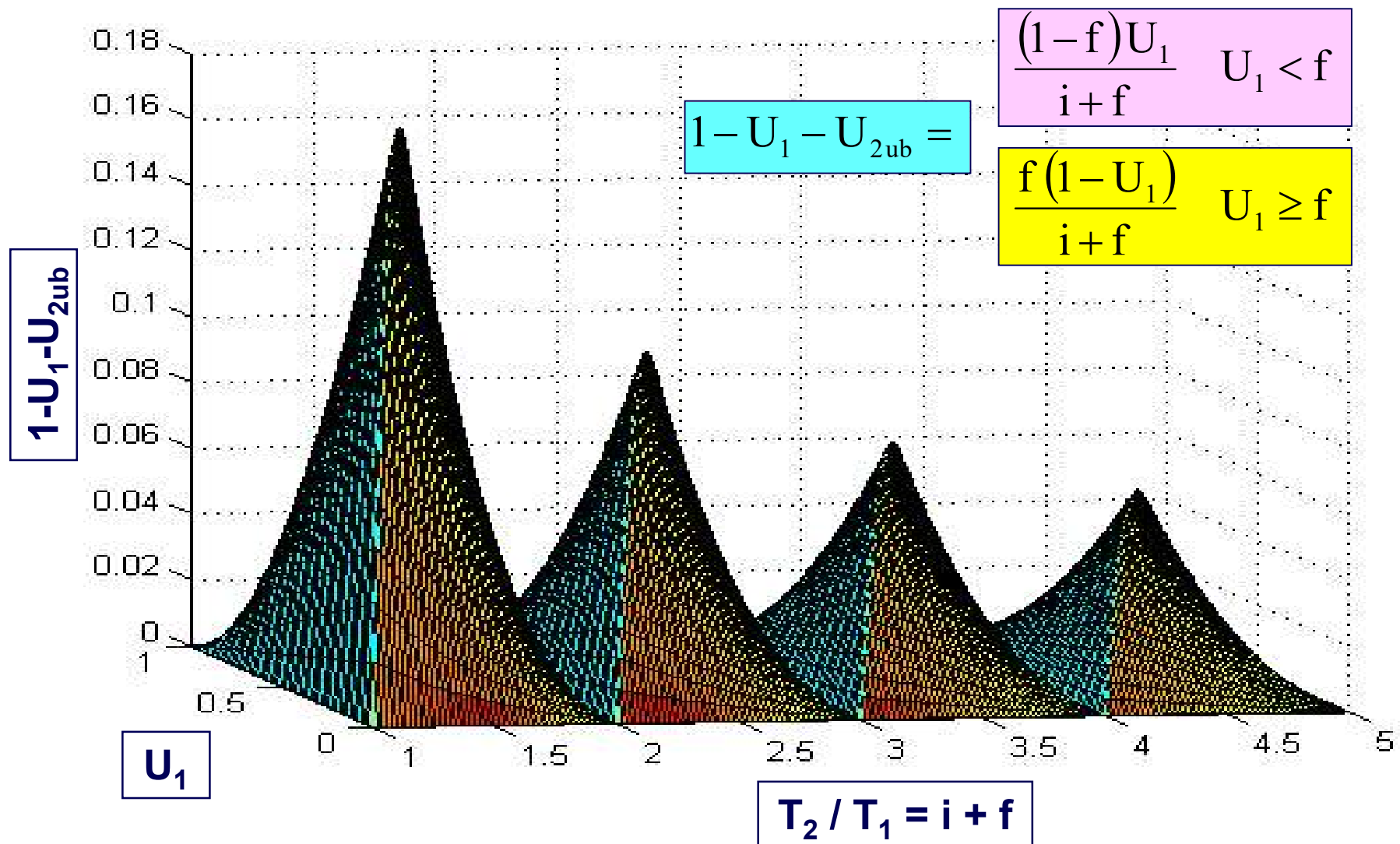
$$U_2 = \frac{C_2}{T_2} \leq \frac{i(1 - U_1)}{i + f} = U_{2ub}$$

## ... CALCOLO DI $U_{ub}$ (N=2) ...

$$U_{ub}(U_1, i, f) = U_1 + U_{2ub}$$



## ... CALCOLO DI $U_{ub}$ (N=2)



# CALCOLO DI $U_{lub}$ (N=2) ...

$$U_{ub}(U_1, i, f) =$$

$$1 - \frac{(1-f)U_1}{i+f} \quad U_1 < f$$

$$\uparrow U_1$$

$$U_{ub}(U_1, i, f) \downarrow$$

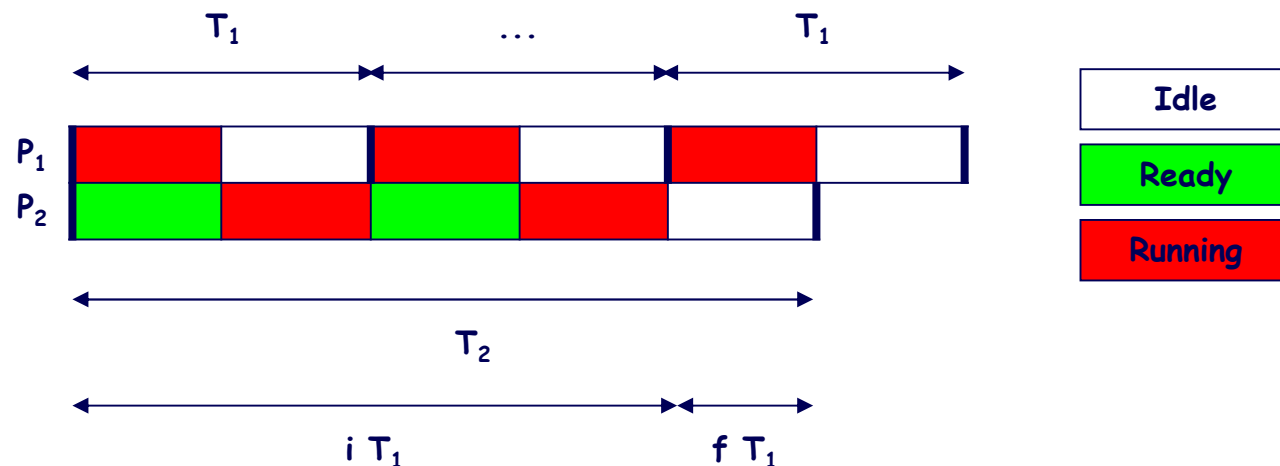
$$1 - \frac{f(1-U_1)}{i+f} \quad U_1 \geq f$$

$$\downarrow U_1$$

$$U_{ub}(U_1, i, f) \downarrow$$

$$U_1 = f$$

$$U_{lub}(i, f) = 1 - \frac{f(1-f)}{i+f}$$





## ... CALCOLO DI $U_{\text{lub}}$ (N=2) ...

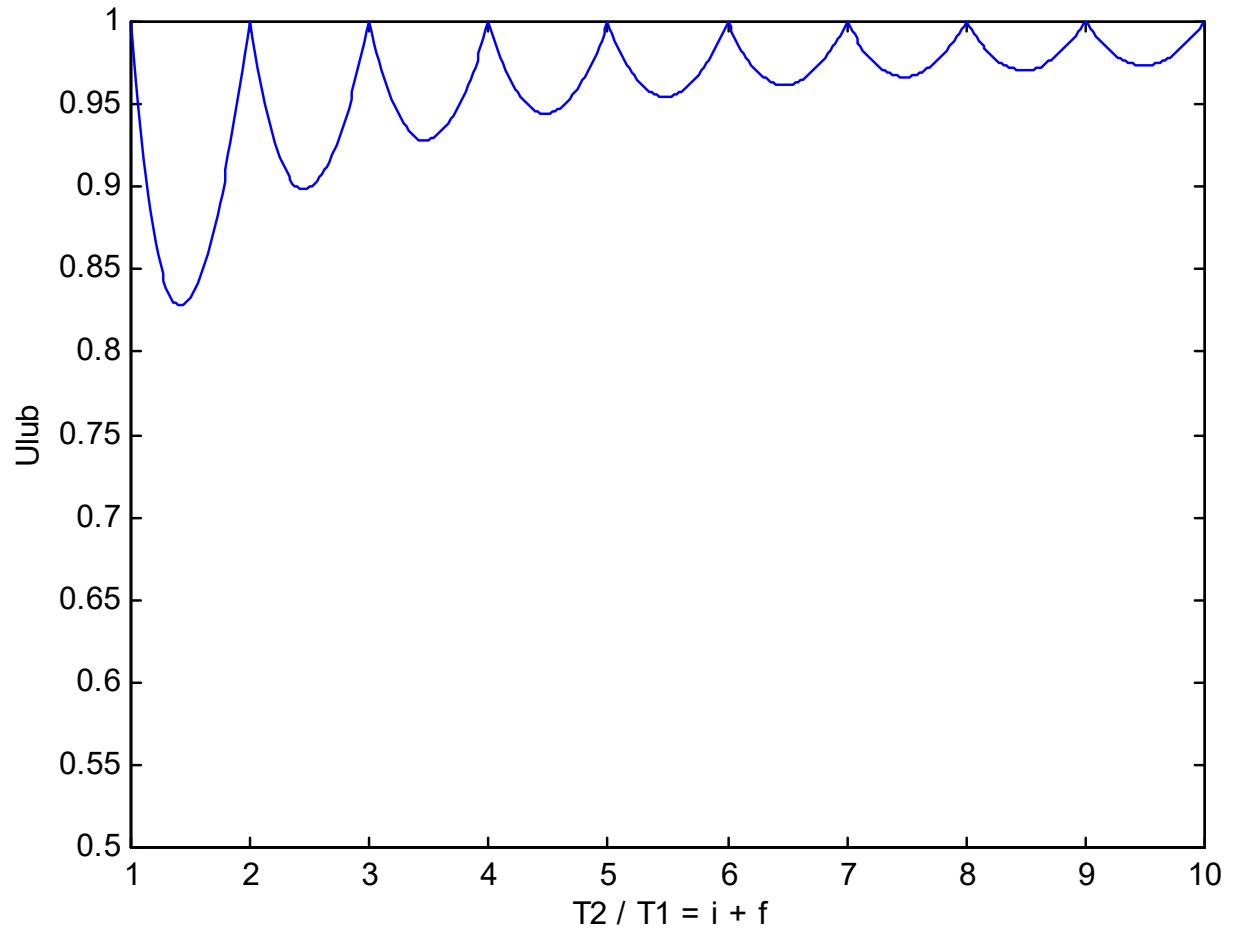
$$U_{\text{lub}}(i, f) = 1 - \frac{f(1-f)}{i+f}$$

↓ i

$$U_{\text{lub}}(i, f) \downarrow$$

i = 1

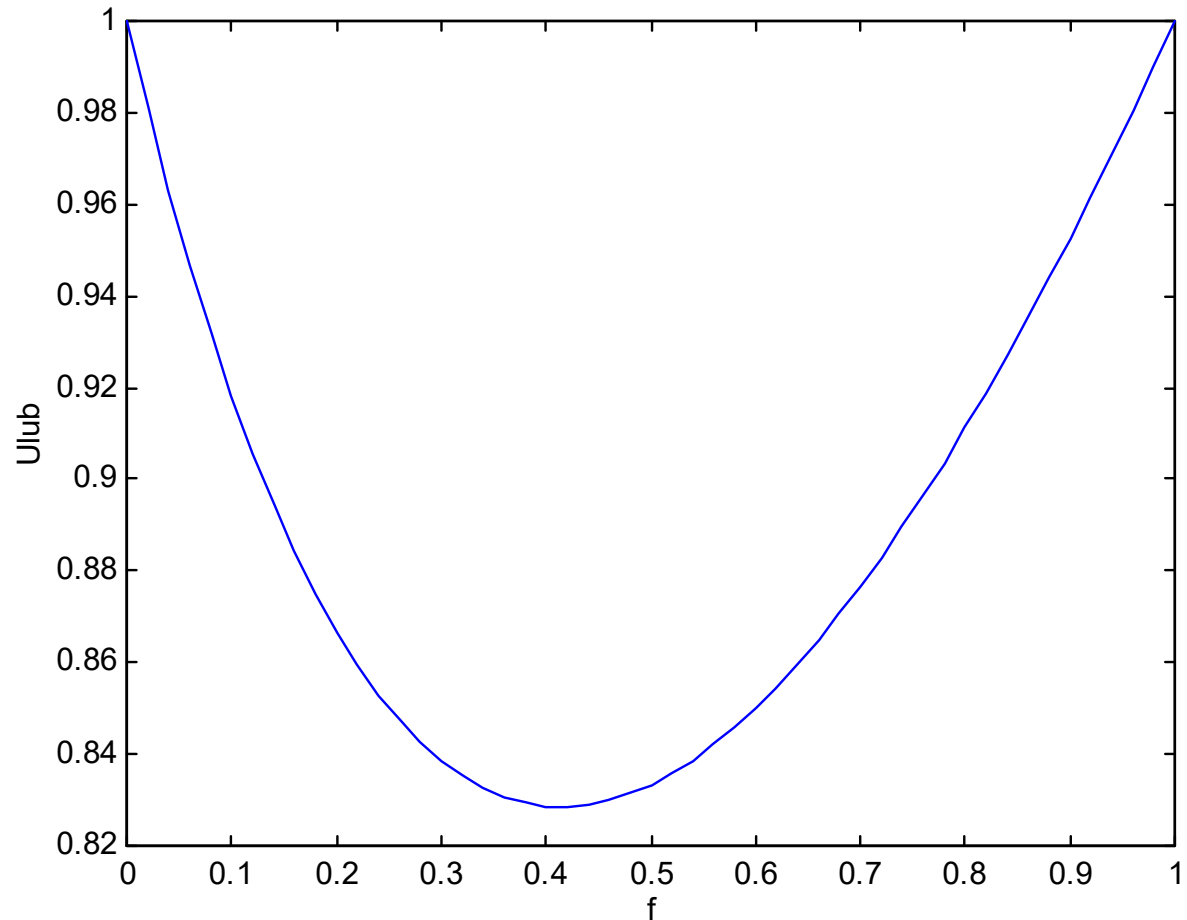
$$U_{\text{lub}}(f) = \frac{1+f^2}{1+f}$$



## ... CALCOLO DI $U_{\text{lub}}$ (N=2) ...

$$U_{\text{lub}}(f) = \frac{1+f^2}{1+f}$$

$$\frac{dU_{\text{lub}}(f)}{df} = \frac{f^2 + 2f - 1}{(1+f)^2} = 0$$



$$f = \sqrt{2} - 1$$

$$U_{\text{lub}} = 2(\sqrt{2} - 1)$$

## ... CALCOLO DI $U_{lub}$ (N=2)

$$i=1$$

$$T_1 < T_2 < 2T_1$$

$$U_1 = f$$

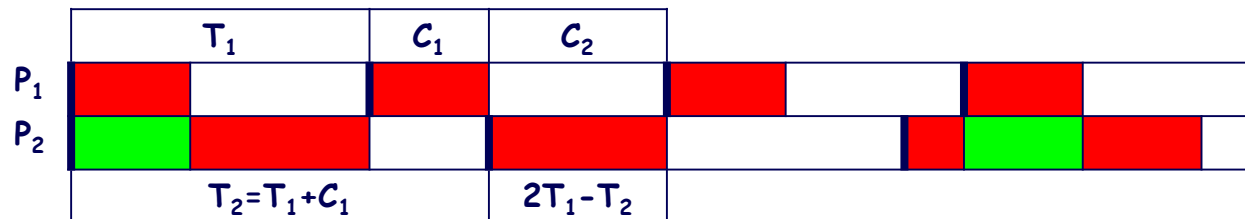
$$T_2 = T_1 + C_1 \quad C_1 = T_2 - T_1 \quad C_2 = T_1 - C_1 = 2T_1 - T_2$$

$$f = \sqrt{2} - 1$$

$$T_2 = T_1 2^{1/2} \quad C_1 = T_1 (2^{1/2} - 1) \quad C_2 = T_2 (2^{1/2} - 1) = C_1 2^{1/2}$$

$$U_1 = U_2 = 2^{1/2} - 1$$

i 2 processi concorrono uniformemente  
al fattore di utilizzazione del processore



# CALCOLO DI $U_{lub}$ ( $N > 2$ ) ...

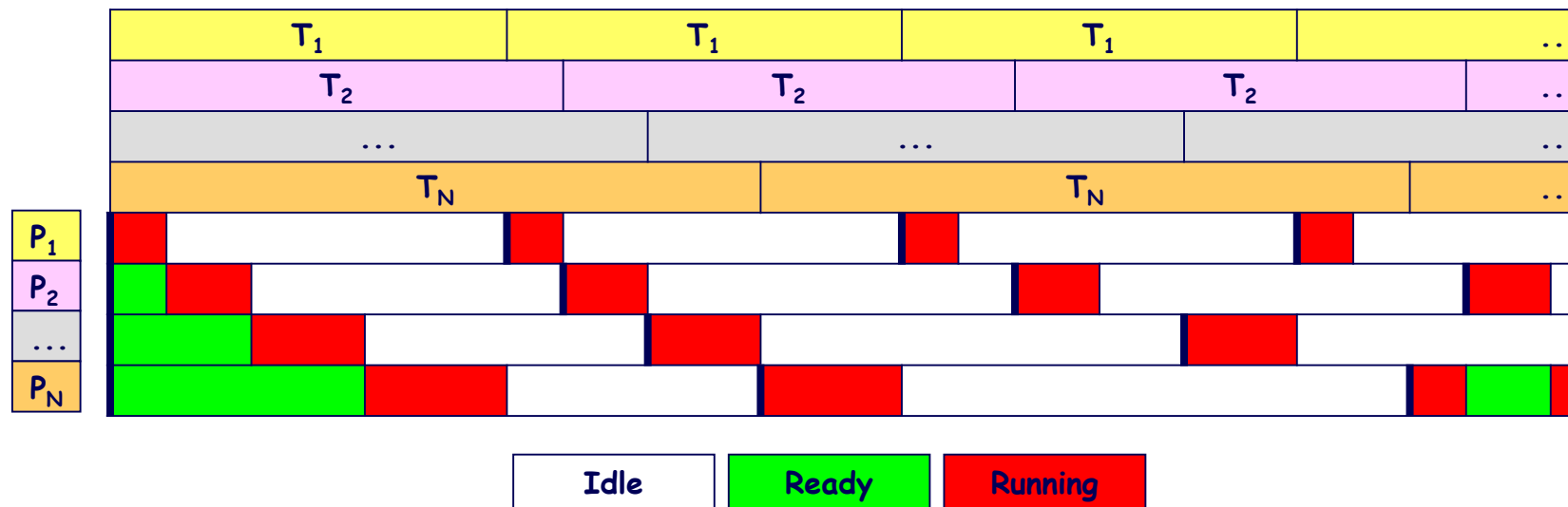
$$C_1 = T_2 - T_1$$

$$C_2 = T_3 - T_2$$

$$\vdots$$

$$C_{N-1} = T_N - T_{N-1}$$

$$C_N \leq T_1 - \sum_{j=1}^{N-1} C_j = 2T_1 - T_N = C_{Nub}$$



## ... CALCOLO DI $U_{\text{lub}}$ ( $N > 2$ ) ...

$$C_1 = T_2 - T_1 \quad U_1 = \frac{T_2}{T_1} - 1$$

$$C_2 = T_3 - T_2 \quad U_2 = \frac{T_3}{T_2} - 1$$

$\vdots$

$\vdots$

$$C_{N-1} = T_N - T_{N-1} \quad U_{N-1} = \frac{T_N}{T_{N-1}} - 1$$

$$C_{\text{Nub}} = 2T_1 - T_N \quad U_{\text{Nub}} = \frac{2T_1}{T_N} - 1$$

$$U_j = \frac{T_{j+1}}{T_j} - 1 = R_j - 1 \quad \forall j \neq N$$

$$U_{\text{Nub}} = \frac{2}{R_{N-1} R_{N-2} \cdots R_2 R_1} - 1$$

$$U_{\text{ub}} = \sum_{j=1}^{N-1} U_j + U_{\text{Nub}} = \sum_{j=1}^{N-1} R_j + \frac{K}{\prod_{j=1}^{N-1} R_j} - N$$

$$K = 2$$

## ... CALCOLO DI $U_{lub}$ ( $N > 2$ ) ...

$$U_{ub} = \sum_{j=1}^{N-1} R_j + \frac{K}{\prod_{j=1}^{N-1} R_j} - N$$

$$\frac{\partial U_{ub}}{\partial R_j} = 1 - \frac{K}{\prod_{i \neq j} R_i R_j^2} = 1 - \frac{K}{R_j \prod_{i=1}^{N-1} R_i} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, N-1$$

$$R_1 = R_2 = \dots = R_{N-1} = K^{1/N}$$

$$U_{lub} = (N-1) K^{1/N} + \frac{K}{K^{\frac{N-1}{N}}} - N = N (K^{1/N} - 1)$$

## ... CALCOLO DI $U_{\text{lub}}$ ( $N > 2$ )

$$U_{\text{lub}} = N(2^{1/N} - 1)$$

$$U_j = 2^{1/N} - 1 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

i processi  
concorrono  
uniformemente  
al fattore  
di utilizzazione  
del processore

$$T_j = T_{j-1} 2^{1/N} = T_1 2^{(j-1)/N} \quad j = 2, \dots, N$$

$$C_1 = T_1(2^{1/N} - 1) \quad C_j = C_{j-1} 2^{1/N} = C_1 2^{(j-1)/N} \quad j = 2, \dots, N$$

# UN COROLLARIO DEL TEOREMA DI LIU-LAYLAND ...

Esplicitando l' "utilizzazione schedulabile dell'algoritmo RMPO"  
in funzione dei singoli fattori di utilizzazione dei processi  
(non semplicemente del numero di processi, come nel teorema),  
si perviene ad un test di schedulabilità meno conservativo.

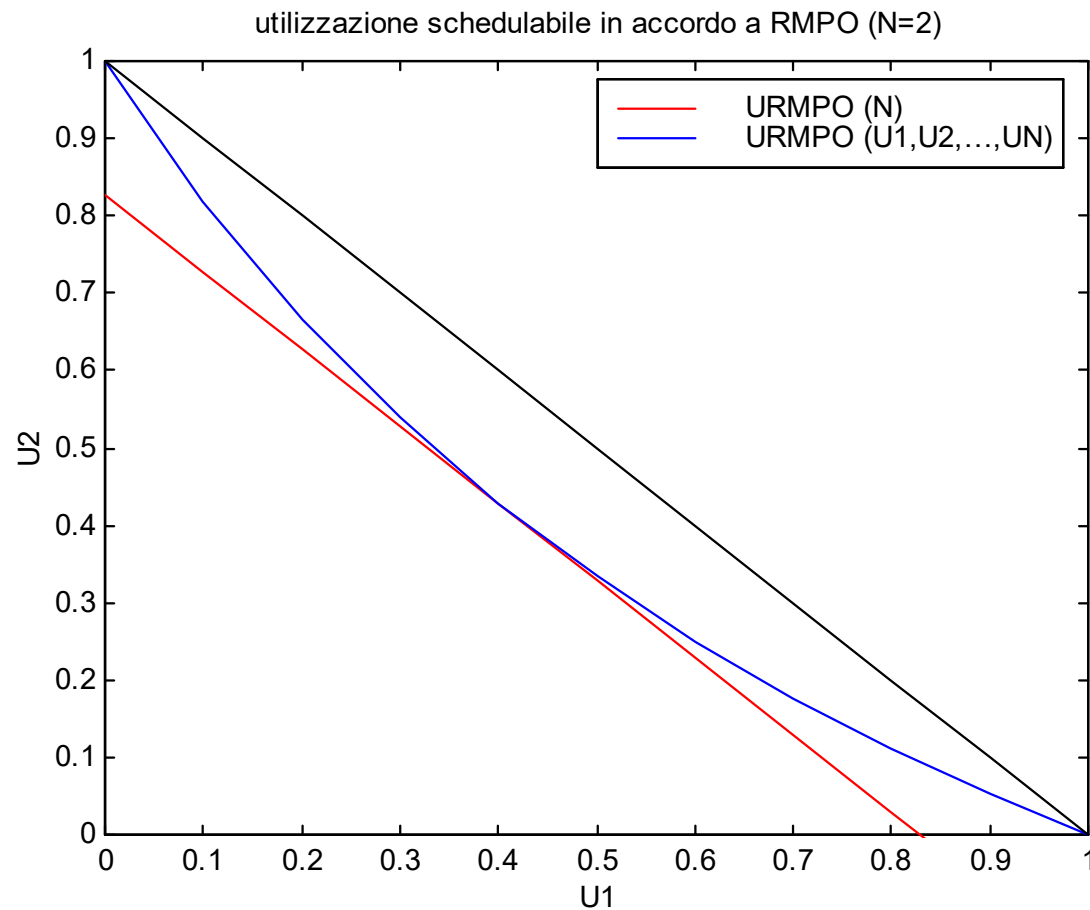
$$\begin{array}{ll} C_1 = T_2 - T_1 & \\ C_2 = T_3 - T_2 & \\ \dots & \\ C_{N-1} = T_N - T_{N-1} & \\ C_N \leq 2T_1 - T_N & \end{array} \quad \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ \\ \longrightarrow \end{array} \quad \begin{array}{c} T_{j+1} = T_j (1 + U_j) \quad j = 1, 2, \dots, N-1 \\ \\ \frac{T_N}{T_1} (1 + U_N) \leq 2 \end{array}$$

$$U_{\text{RMPO}} (U_1, U_2, \dots, U_N) = \prod_{j=1}^N (1 + U_j) \leq 2$$



# ... UN COROLLARIO DEL TEOREMA DI LIU-LAYLAND ...

se  $U_1 = U_2 = \dots = U_N$   $\Rightarrow$   $U_{\text{RMPO}}(U_1, U_2, \dots, U_N) = U_{\text{RMPO}}(N)$



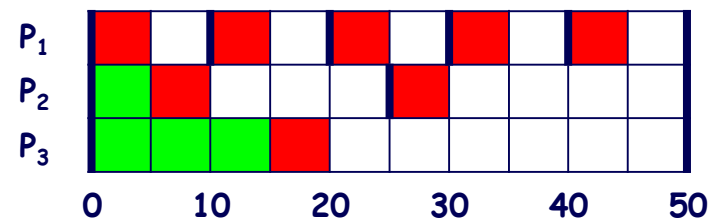
# ... UN COROLLARIO DEL TEOREMA DI LIU-LAYLAND

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	5	10	0.5
P <sub>2</sub>	5	25	0.2
P <sub>3</sub>	5	50	0.1

$$\sum_{j=1}^3 U_j = 0.8 > U_{\text{RMPO}} (N=3) = 0.78$$



$$U_{\text{RMPO}} (U_1 = 0.5, U_2 = 0.2, U_3 = 0.1) = \prod_{j=1}^3 (1 + U_j) = 1.98 \leq 2$$



# ALTRI TEST DI SCHEDULABILITÀ DIPENDENTI DAI PARAMETRI DEI PROCESSI: IL TEST DI KUO-MOK (91) ...

Un insieme  $S$  di  $N$  processi  $P_1, P_2, \dots, P_N$  contraddistinto da un fattore di utilizzazione del processore  $U$  è schedulabile con RMPO se (condizione solo sufficiente)  $U \leq U_{\text{RMPO}}(K)$ , essendo  $K$  il numero di sottoinsiemi disgiunti di processi semplicemente periodici in  $S$ .

La schedulabilità dell'insieme  $S$  è garantita se è schedulabile l'insieme  $S'$  di  $K < N$  processi  $P_1', P_2', \dots, P_K'$  ad esso equivalente. Al processo  $P_j'$  ( $j = 1, 2, \dots, K$ ) in  $S'$ , corrispondente al sottoinsieme di processi semplicemente periodici  $P_x, P_y, \dots, P_z$  in  $S$ , compete un fattore di utilizzazione del processore  $U_j' = U_x + U_y + \dots + U_z$ , un periodo  $T_j' = \min(T_x, T_y, \dots, T_z)$  e un tempo di esecuzione  $C_j' = U_j' T_j'$ .

$S$	$C$	$T$	$C/T$
$P_1$	5	10	0.5
$P_2$	5	25	0.2
$P_3$	5	50	0.1



$P_1' \equiv P_1$   
 $P_2' \equiv \{P_2, P_3\}$

$S'$	$C'$	$T'$	$C'/T'$
$P_1'$	5	10	0.5
$P_2'$	7.5	25	0.3

$$\sum_{j=1}^3 U_j = 0.8 > U_{\text{RMPO}}(N=3) = 0.78$$



$$\sum_{j=1}^2 U_j' = 0.8 \leq U_{\text{RMPO}}(N=2) = 0.828$$

## ... IL TEST DI KUO-MOK ...

S	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	4	10	0.40
P <sub>2</sub>	4	20	0.20
P <sub>3</sub>	8	40	0.20
P <sub>4</sub>	3.6	45	0.08
P <sub>5</sub>	1.8	90	0.02



$$P_1' \equiv \{P_1, P_2, P_3\}$$

$$P_2' \equiv \{P_4, P_5\}$$

S'	C'	T'	C'/T'
P <sub>1</sub> '	8	10	0.8
P <sub>2</sub> '	4.5	45	0.1

$$\sum_{j=1}^5 U_j = 0.9 > U_{\text{RMPO}} (N=5) = 0.743$$



$$\sum_{j=1}^2 U_j' = 0.9 > U_{\text{RMPO}} (N=2) = 0.828$$



**corollario**

$$U_{\text{RMPO}} (U_1 = 0.4, \dots, U_5 = 0.02) =$$

$$= \prod_{j=1}^5 (1 + U_j) = 2.221 > 2$$



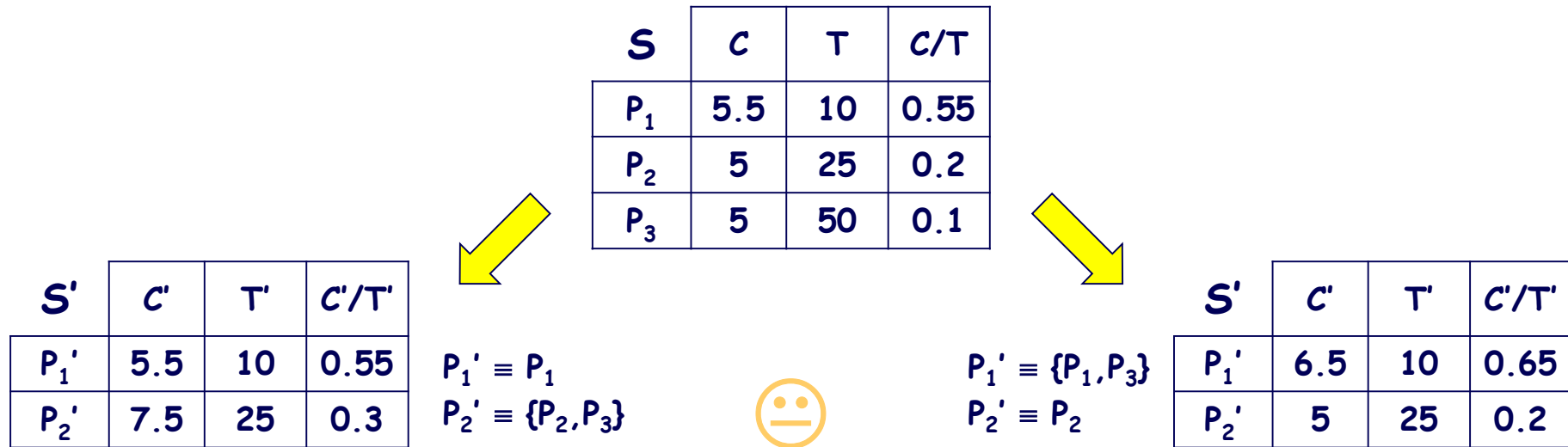
$$U_{\text{RMPO}} (U_1' = 0.8, U_2' = 0.1) =$$

$$= \prod_{j=1}^2 (1 + U_j') = 1.98 \leq 2$$



## ... IL TEST DI KUO-MOK

Nei casi in cui il partizionamento non sia univoco, conviene optare per quello che induce una distribuzione del fattore di utilizzazione del processore quanto più disuniforme possibile.



$$\sum_{j=1}^2 U_j' = 0.85 > U_{RMPO}(N=2) = 0.828$$

$$U_{RMPO}(U_1' = 0.55, U_2' = 0.3) =$$



$$= \prod_{j=1}^2 (1 + U_j') = 2.015 > 2$$

**corollario**

$$U_{RMPO}(U_1' = 0.65, U_2' = 0.2) =$$

$$= \prod_{j=1}^2 (1 + U_j') = 1.98 \leq 2$$

## IL TEST DI BURCHARD et al. (96) ...

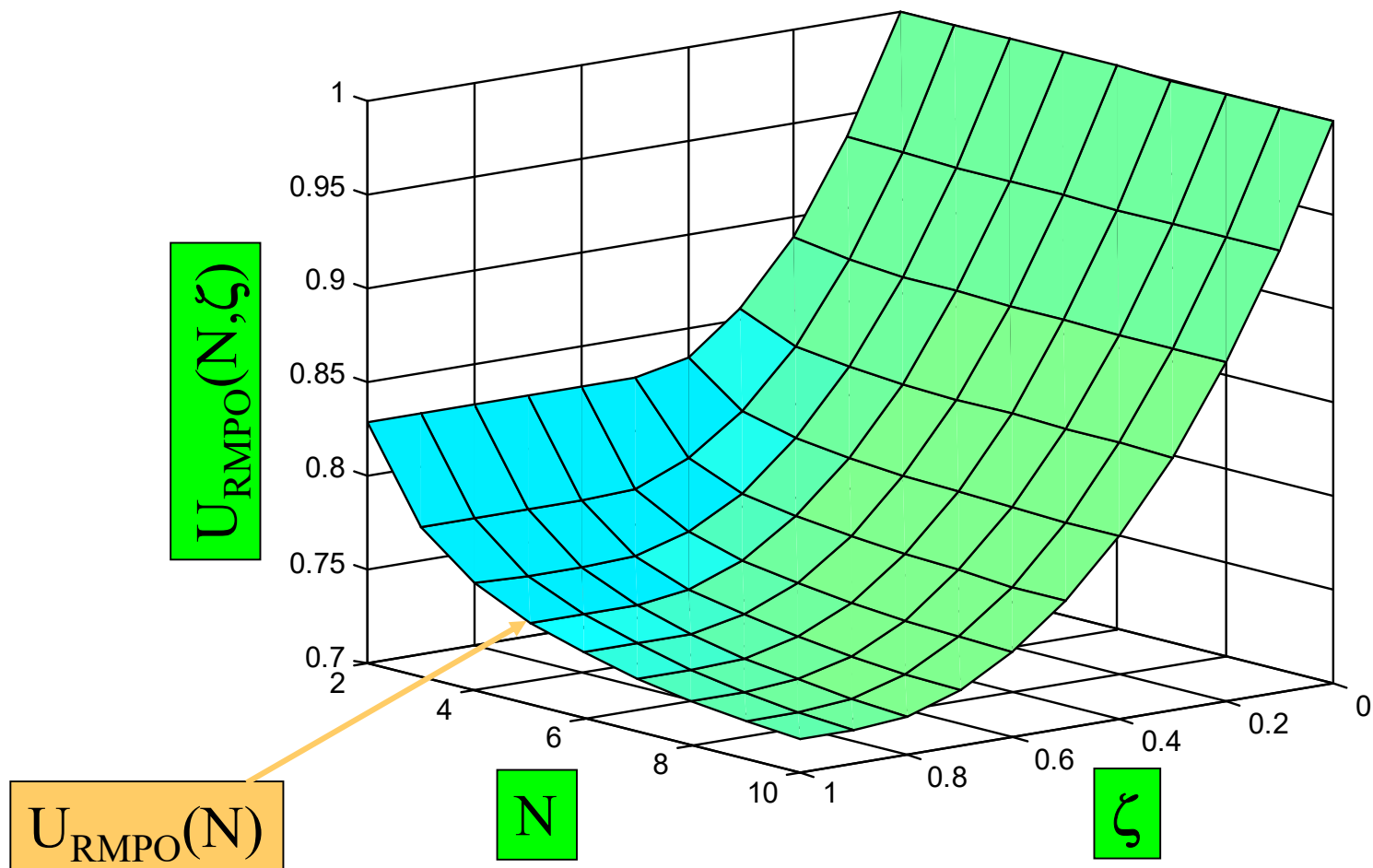
L'“utilizzo schedulabile dell'algoritmo RMPO” è tanto maggiore (tendendo al valore limite 1 nel caso di processi semplicemente periodici) quanto meno i periodi dei processi si discostano dalla relazione armonica.

$$X_j = \log_2 T_j - \lfloor \log_2 T_j \rfloor \quad \forall j$$

$$\zeta = \max_{1 \leq j \leq N} X_j - \min_{1 \leq j \leq N} X_j$$

$$U_{\text{RMPO}}(N, \zeta) = \begin{cases} (N-1)(2^{\zeta/(N-1)} - 1) + 2^{1-\zeta} - 1 & \zeta < 1 - 1/N \\ N(2^{1/N} - 1) & \zeta \geq 1 - 1/N \end{cases}$$

## ... IL TEST DI BURCHARD ...



## ... IL TEST DI BURCHARD

$A_5$	$C$	$T$	$C/T$
$P_1$	5	10	0.50
$P_2$	8	19	0.42

$$\sum_{j=1}^2 U_j = 0.92 > U_{\text{RMPO}} (N=2) = 0.828$$



$$\prod_{j=1}^2 (1 + U_j) = 2.13 = U_{\text{RMPO}} (U_1 = 0.5, U_2 = 0.42) > 2$$



$$X_1 = 0.322$$

$$X_2 = 0.248$$

$$\zeta = 0.074$$

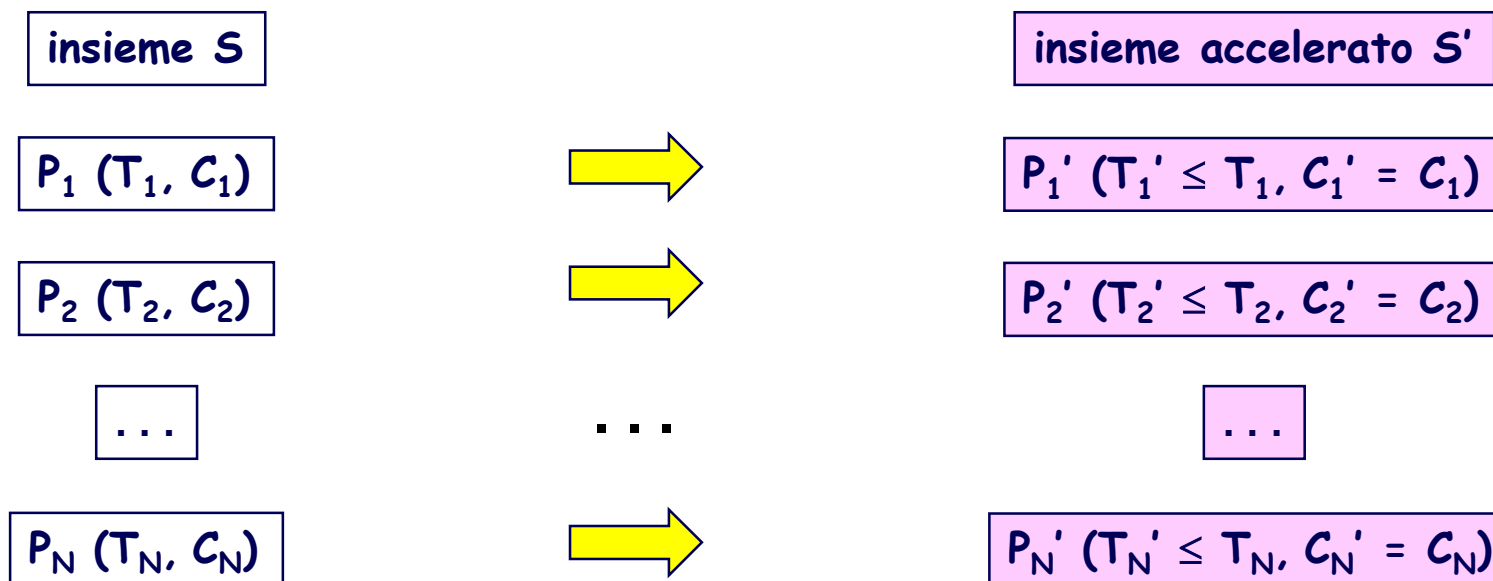
$$\sum_{j=1}^2 U_j = 0.92 < U_{\text{RMPO}} (N=2, \zeta=0.074) = 0.952$$





## IL TEST DI HAN (97) ...

Un insieme  $S$  di  $N$  processi  $P_1, P_2, \dots, P_N$  è schedulabile con RMPO se (condizione solo sufficiente) ad esso corrisponde un "insieme accelerato"  $S'$  di  $N$  processi  $P_1', P_2', \dots, P_N'$  semplicemente periodici e con fattore di utilizzazione del processore  $U' = U_1' + U_2' + \dots + U_N' \leq 1$ .



## ... IL TEST DI HAN ...

S	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	5	10	.500
P <sub>2</sub>	6	16	.375

$$\sum_{j=1}^2 U_j = 0.875 > U_{\text{RMPO}} (N=2) = 0.828$$



$$\prod_{j=1}^2 (1 + U_j) = 2.0625 = U_{\text{RMPO}} (U_1 = 0.5, U_2 = 0.375) > 2$$



$$X_1 = 0.322, X_2 = 0$$

$$\zeta = 0.322$$

$$\sum_{j=1}^2 U_j = 0.875 > U_{\text{RMPO}} (N=2, \zeta = 0.322) = 0.85$$



insieme  
accelerato

S'	C'	T'	C'/T'
P' <sub>1</sub>	5	8	.625
P' <sub>2</sub>	6	16	.375

$$U_1' + U_2' \leq 1$$



## ... IL TEST DI HAN ...

---

```
/* Input:  $\mathcal{T} = \{\tau_i = (C_i, T_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ , where  $\mathcal{T}$  is a
periodic task set and  $T_i \leq T_j, \forall i < j$ . */
/* Output:  $\mathcal{T}' = \{\tau'_i = (C_i, T'_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ , where
 $T'_i \leq T_i, \forall i$  and  $T'_i \mid T'_j, \forall i < j$  */
min_f := -1; min_utilization :=  $\infty$ ;
for f := 1 to n do {
    Z_f := T_f;
    for i := f + 1 to n do Z_i := Z_{i-1} ·  $\lfloor T_i / Z_{i-1} \rfloor$ ;
    for i := f - 1 downto 1 do Z_i :=  $\frac{Z_{i+1}}{\lceil Z_{i+1} / T_i \rceil}$ ;
    utilization :=  $\sum_{i=1}^n C_i / Z_i$ ;
    if utilization < min_utilization then
        min_utilization := utilization;
        min_f := f;
        for i := 1 to n do T'_i := Z_i;
    endif
}
```

---

# ... IL TEST DI HAN ...

Complessità computazionale dell'algoritmo:  $O(N^2)$

iterazione

1

$P_1$	$T_1$	$T_1' = T_1$
...	...	↓ ...
$P_k$	$T_k$	↓ $T_k'$
...	...	↓ ...
$P_N$	$T_N$	↓ $T_N'$



$$T_i' = T_{i-1}' * \lfloor T_i / T_{i-1}' \rfloor$$

$$i = 2, \dots, N$$

$2 \leq k \leq N-1$

$P_1$	$T_1$	↑ $T_1'$
...	...	↑ ...
$P_k$	$T_k$	$T_k' = T_k$
...	...	↓ ...
$P_N$	$T_N$	↓ $T_N'$



$$T_i' = T_{i+1}' / \lceil T_{i+1}' / T_i \rceil$$

$$i = k-1, \dots, 1$$



$$T_i' = T_{i-1}' * \lfloor T_i / T_{i-1}' \rfloor$$

$$i = k+1, \dots, N$$

N

$P_1$	$T_1$	↑ $T_1'$
...	...	↑ ...
$P_k$	$T_k$	↑ $T_k'$
...	...	↑ ...
$P_N$	$T_N$	$T_N' = T_N$



$$T_i' = T_{i+1}' / \lceil T_{i+1}' / T_i \rceil$$

$$i = N-1, \dots, 1$$

# ... IL TEST DI HAN

## Limiti dell'algoritmo

S	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	8	20	0.4
P <sub>2</sub>	6	60	0.1
P <sub>3</sub>	27	90	0.3
P <sub>4</sub>	18	180	0.1

U = 0.9



S'	C	T'	C/T'
P <sub>1</sub>	8	20	0.40
P <sub>2</sub>	6	40	0.15
P <sub>3</sub>	27	80	0.34
P <sub>4</sub>	18	160	0.11

U = 1.0



I iterazione

U = 1.05



II iterazione

U = 1.05



III iterazione

U = 1.067



IV iterazione

U = 1.067



P <sub>1</sub>	T <sub>1</sub> =20	T <sub>1</sub> '=20
P <sub>2</sub>	T <sub>2</sub> =60	T <sub>2</sub> '=60
P <sub>3</sub>	T <sub>3</sub> =90	T <sub>3</sub> '=60
P <sub>4</sub>	T <sub>4</sub> =180	T <sub>4</sub> '=180

$$= T_1' * \lfloor T_2 / T_1' \rfloor = 20 * \lfloor 60 / 20 \rfloor$$

$$= T_2' * \lfloor T_3 / T_2' \rfloor = 60 * \lfloor 90 / 60 \rfloor$$

$$= T_3' * \lfloor T_4 / T_3' \rfloor = 60 * \lfloor 180 / 60 \rfloor$$

P <sub>1</sub>	T <sub>1</sub> =20	T <sub>1</sub> '=20
P <sub>2</sub>	T <sub>2</sub> =60	T <sub>2</sub> '=60
P <sub>3</sub>	T <sub>3</sub> =90	T <sub>3</sub> '=60
P <sub>4</sub>	T <sub>4</sub> =180	T <sub>4</sub> '=180

$$= T_2' / \lceil T_2' / T_1 \rceil = 60 / \lceil 60 / 20 \rceil$$

$$= T_2' * \lfloor T_3 / T_2' \rfloor = 60 * \lfloor 90 / 60 \rfloor$$

$$= T_3' * \lfloor T_4 / T_3' \rfloor = 60 * \lfloor 180 / 60 \rfloor$$

P <sub>1</sub>	T <sub>1</sub> =20	T <sub>1</sub> '=15
P <sub>2</sub>	T <sub>2</sub> =60	T <sub>2</sub> '=45
P <sub>3</sub>	T <sub>3</sub> =90	T <sub>3</sub> '=90
P <sub>4</sub>	T <sub>4</sub> =180	T <sub>4</sub> '=180

$$= T_2' / \lceil T_2' / T_1 \rceil = 45 / \lceil 45 / 20 \rceil$$

$$= T_3' / \lceil T_3' / T_2 \rceil = 90 / \lceil 90 / 60 \rceil$$

$$= T_3' * \lfloor T_4 / T_3' \rfloor = 90 * \lfloor 180 / 90 \rfloor$$

P <sub>1</sub>	T <sub>1</sub> =20	T <sub>1</sub> '=15
P <sub>2</sub>	T <sub>2</sub> =60	T <sub>2</sub> '=45
P <sub>3</sub>	T <sub>3</sub> =90	T <sub>3</sub> '=90
P <sub>4</sub>	T <sub>4</sub> =180	T <sub>4</sub> '=180

$$= T_2' / \lceil T_2' / T_1 \rceil = 45 / \lceil 45 / 20 \rceil$$

$$= T_3' / \lceil T_3' / T_2 \rceil = 90 / \lceil 90 / 60 \rceil$$

$$= T_4' / \lceil T_4' / T_3 \rceil = 180 / \lceil 180 / 90 \rceil$$

# O PIÙ TEST CONGIUNTAMENTE ...

S	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	2	10	.20
P <sub>2</sub>	3	15	.20
P <sub>3</sub>	5	20	.25
P <sub>4</sub>	9	45	.20

$$\sum_{j=1}^4 U_j = 0.85 > U_{RMPO} (N=4) = 0.756$$



$$\prod_{j=1}^4 (1+U_j) = 2.16 > 2$$



**Kuo-Mok**

P<sub>1</sub>' ≡ {P<sub>1</sub>, P<sub>3</sub>}

P<sub>2</sub>' ≡ {P<sub>2</sub>, P<sub>4</sub>}

S'	C'	T'	C'/T'
P <sub>1</sub> '	4.5	10	0.45
P <sub>2</sub> '	6	15	0.40

$$\sum_{j=1}^2 U_j' = 0.85 > U_{RMPO} (N=2) = 0.828$$



$$\prod_{j=1}^2 (1+U_j') = 2.03 > 2$$



**Han**

S''	C''	T''	C''/T''
P <sub>1</sub> ''	4.5	7.5	0.6
P <sub>2</sub> ''	6	15	0.4

$$\sum_{j=1}^2 U_j'' = 1$$



# ... O PIÙ TEST CONGIUNTAMENTE ...

$$U = 0.903$$

S	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	3	12	.250
P <sub>2</sub>	3	18	.167
P <sub>3</sub>	5	24	.208
P <sub>4</sub>	10	36	.278

**Kuo-Mok**

$$P_1' \equiv \{P_1, P_3\}$$

$$P_2' \equiv \{P_2, P_4\}$$

S'	C'	T'	C'/T'
P <sub>1</sub> '	5.5	12	.458
P <sub>2</sub> '	8	18	.445

**Han**

S''	C''	T''	C''/T''
P <sub>1</sub> ''	5.5	12	.458
P <sub>2</sub> ''	8	12	.667

S''	C''	T''	C''/T''
P <sub>1</sub> ''	5.5	9	.611
P <sub>2</sub> ''	8	18	.445

$$N(2^{1/N} - 1)$$

$$0.756$$



$$\prod_{j=1}^N (1 + U_j)$$

$$2.16$$



$$N(2^{1/N} - 1)$$

$$0.828$$



$$\prod_{j=1}^N (1 + U_j)$$

$$2.11$$



$$U = 1.125$$



$$U = 1.056$$

# ... O PIÙ TEST CONGIUNTAMENTE

$$U = 0.903$$

S	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	3	12	.250
P <sub>2</sub>	3	18	.167
P <sub>3</sub>	5	24	.208
P <sub>4</sub>	10	36	.278

**Kuo-Mok**

$$P_1' \equiv \{P_1, P_4\}$$

$$P_2' \equiv P_2$$

$$P_3' \equiv P_3$$

S'	C'	T'	C'/T'
P <sub>1</sub> '	6.33	12	.528
P <sub>2</sub> '	3	18	.167
P <sub>3</sub> '	5	24	.208

**Kuo-Mok**

$$P_1'' \equiv \{P_1', P_3'\}$$

$$P_2'' \equiv P_2'$$

S''	C''	T''	C''/T''
P <sub>1</sub> ''	8.83	12	.736
P <sub>2</sub> ''	3	18	.167

**Han**

S'''	C'''	T'''	C'''/T'''
P <sub>1</sub> '''	8.83	12	.736
P <sub>2</sub> '''	3	12	.250

$$N(2^{1/N} - 1)$$

$$0.756$$



$$\prod_{j=1}^N (1 + U_j)$$

$$2.16$$



$$N(2^{1/N} - 1)$$

$$0.780$$



$$\prod_{j=1}^N (1 + U_j)$$

$$2.15$$



$$N(2^{1/N} - 1)$$

$$0.828$$



$$\prod_{j=1}^N (1 + U_j)$$

$$2.02$$



$$U = 0.986$$





# ANALISI DI SCHEDULABILITÀ BASATA SUL CALCOLO DEI TEMPI DI RISPOSTA [AUDSLEY et al. (93)]

La schedulabilità è garantita se il tempo di risposta di ogni processo nelle condizioni più sfavorevoli (cioè a partire da un istante critico) non eccede la corrispondente deadline:

$$R_i = C_i + I_i(R_i) \leq T_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$I_i$  rappresenta l'interferenza sul tempo di risposta  $R_i$  del processo  $P_i$  derivante dall'esecuzione di processi di priorità superiore.

$$I_i(R_i) = \sum_{j \mid p_j > p_i} \left\lceil \frac{R_i}{T_j} \right\rceil C_j$$

$R_i$  può essere calcolato nel seguente modo:

$$R_i^0 = C_i, \quad R_i^n = C_i + I_i(R_i^{n-1}) \quad n = 1, 2, \dots$$

# L'ALGORITMO DI AUDSLEY ...

$A_5$	$C$	$T$	$C/T$
$P_1$	5	10	0.50
$P_2$	8	19	0.42

$$U(A_5) = 0.92$$

il processo  
a priorità massima  
non è soggetto  
a interferenza

processo  $P_1$ :  $R_1^1 = R_1^0 = C_1 = 5 < T_1 = 10$

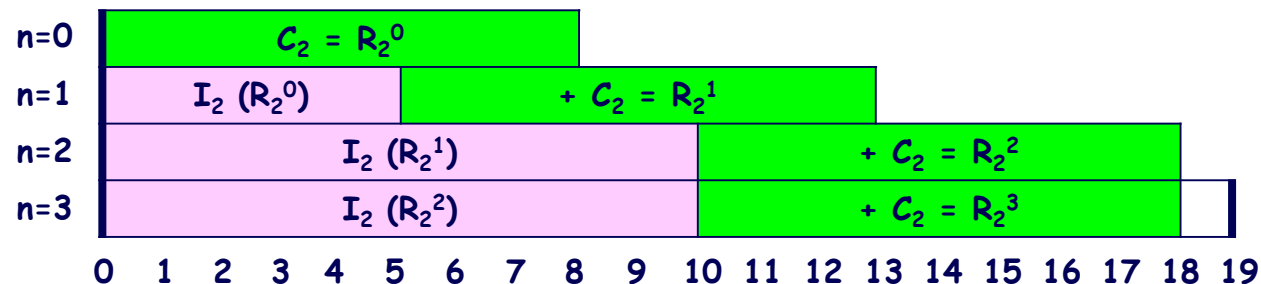
processo  $P_2$ :  $R_2^0 = C_2 = 8$

$$R_2^1 = C_2 + \lceil R_2^0 / T_1 \rceil * C_1 = 8 + \lceil 8/10 \rceil * 5 = 13$$

$$R_2^2 = C_2 + \lceil R_2^1 / T_1 \rceil * C_1 = 8 + \lceil 13/10 \rceil * 5 = 18$$

$$R_2^3 = C_2 + \lceil R_2^2 / T_1 \rceil * C_1 = 8 + \lceil 18/10 \rceil * 5 = 18$$

$$R_2^3 = R_2^2 = 18 < T_2 = 19$$



## ... L'ALGORITMO DI AUDSLEY ...

$A_4$	$C$	$T$	$C/T$
$P_1$	5	10	0.5
$P_2$	6	15	0.4

$$U(A_4) = 0.9$$

processo  $P_1$ :  $R_1^1 = R_1^0 = C_1 = 5 < T_1 = 10$

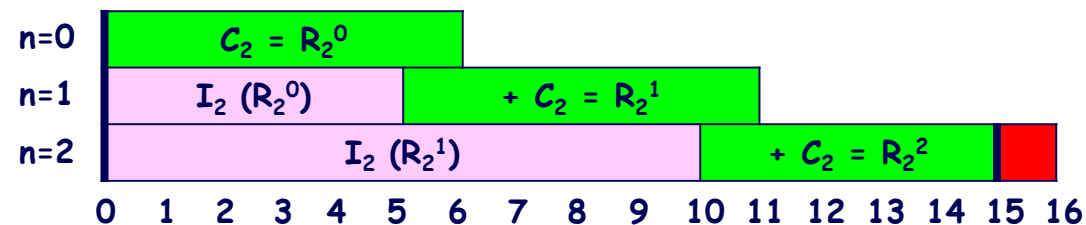


processo  $P_2$ :  $R_2^0 = C_2 = 6$

$$R_2^1 = C_2 + \lceil R_2^0 / T_1 \rceil * C_1 = 6 + \lceil 6/10 \rceil * 5 = 11$$

$$R_2^2 = C_2 + \lceil R_2^1 / T_1 \rceil * C_1 = 6 + \lceil 11/10 \rceil * 5 = 16$$

$$R_2^2 = 16 > T_2 = 15$$



## ... L'ALGORITMO DI AUDSLEY

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	6	15	0.400
P <sub>2</sub>	5	25	0.200
P <sub>3</sub>	7	32	0.219
P <sub>4</sub>	3	45	0.067

$$U = 0.885$$

	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>
$R_i^0 = C_i$	6	5	7	3
$R_i^1 = C_i + I_i (R_i^0)$	$6 + 0 = 6 \leq 15$	$5 + 6 = 11$	$7 + 6 + 5 = 18$	$3 + 6 + 5 + 7 = 21$
$R_i^2 = C_i + I_i (R_i^1)$		$5 + 6 = 11 \leq 25$	$7 + 12 + 5 = 24$	$3 + 12 + 5 + 7 = 27$
$R_i^3 = C_i + I_i (R_i^2)$			$7 + 12 + 5 = 24 \leq 32$	$3 + 12 + 10 + 7 = 32$
$R_i^4 = C_i + I_i (R_i^3)$				$3 + 18 + 10 + 7 = 38$
$R_i^5 = C_i + I_i (R_i^4)$				$3 + 18 + 10 + 14 = 45$
$R_i^6 = C_i + I_i (R_i^5)$				$3 + 18 + 10 + 14 = 45 \leq 45$



## UN TEST PIÙ EFFICIENTE, MA ...

Ai fini della schedulabilità, è sufficiente verificare se per ogni processo, nelle condizioni più sfavorevoli (cioè a partire da un istante critico), risulta:

$$C_i + I_i(T_i) = C_i + \sum_{j \mid p_j > p_i} \left\lceil \frac{T_i}{T_j} \right\rceil C_j \leq T_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$A_5$	$C$	$T$	$C/T$
$P_1$	5	10	0.50
$P_2$	8	19	0.42

$$U(A_5) = 0.92$$

processo  $P_1$ :  $C_1 + I_1(T_1) = 5 < T_1 = 10$



processo  $P_2$ :  $C_2 + \lceil T_2/T_1 \rceil * C_1 = 8 + \lceil 19/10 \rceil * 5 = 18 < T_2 = 19$



## ... MENO EFFICACE

Il test identifica un insieme di condizioni solo sufficienti:

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	5	20	.250
P <sub>2</sub>	10	30	.333
P <sub>3</sub>	20	65	.308

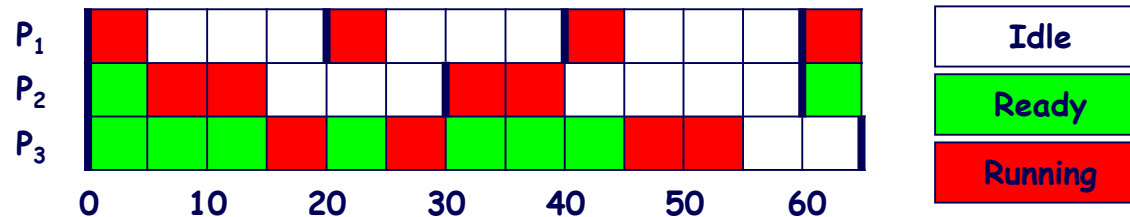
$$U = 0.891$$

$$P_1: C_1 + I_1(T_1) = 5 < T_1 = 20$$

$$P_2: C_2 + \lceil T_2/T_1 \rceil * C_1 = 10 + \lceil 30/20 \rceil * 5 = 20 < T_2 = 30$$



$$P_3: C_3 + \lceil T_3/T_1 \rceil * C_1 + \lceil T_3/T_2 \rceil * C_2 = 20 + \lceil 65/20 \rceil * 5 + \lceil 65/30 \rceil * 10 = 70 > T_3 = 65$$



$$P_3: R_3^0 = C_3 = 20$$

$$R_3^1 = C_3 + \lceil R_3^0/T_1 \rceil * C_1 + \lceil R_3^0/T_2 \rceil * C_2 = 20 + \lceil 20/20 \rceil * 5 + \lceil 20/30 \rceil * 10 = 35$$

$$R_3^2 = C_3 + \lceil R_3^1/T_1 \rceil * C_1 + \lceil R_3^1/T_2 \rceil * C_2 = 20 + \lceil 35/20 \rceil * 5 + \lceil 35/30 \rceil * 10 = 50$$

$$R_3^3 = C_3 + \lceil R_3^2/T_1 \rceil * C_1 + \lceil R_3^2/T_2 \rceil * C_2 = 20 + \lceil 50/20 \rceil * 5 + \lceil 50/30 \rceil * 10 = 55$$

$$R_3^4 = C_3 + \lceil R_3^3/T_1 \rceil * C_1 + \lceil R_3^3/T_2 \rceil * C_2 = 20 + \lceil 55/20 \rceil * 5 + \lceil 55/30 \rceil * 10 = 55$$

$$R_3^4 = R_3^3 = 55 < T_3 = 65$$

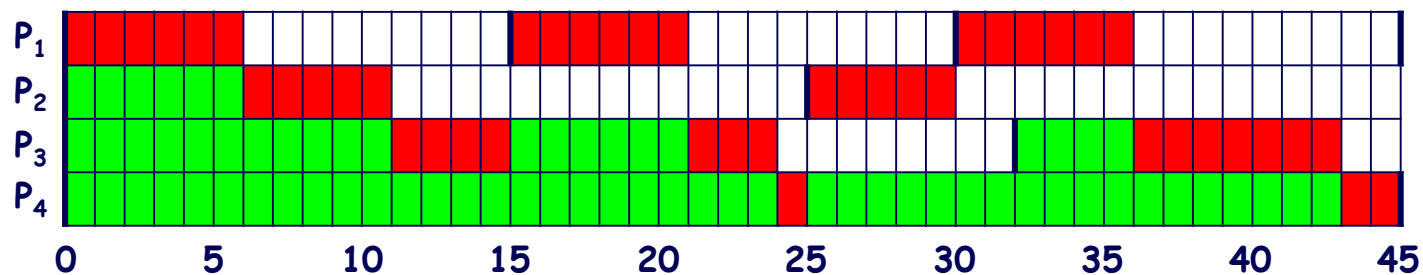


# UN TEST PIÙ EFFICIENTE MA MENO EFFICACE

	C	T	C/T
P <sub>1</sub>	6	15	0.400
P <sub>2</sub>	5	25	0.200
P <sub>3</sub>	7	32	0.219
P <sub>4</sub>	3	45	0.067

$$U = 0.885$$

	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>
$C_i + I_i (T_i) \leq T_i$	6 + 0 = 6 6 ≤ 15 ok ✓	5 + 12 = 17 17 ≤ 25 ok ✓	7 + 18 + 10 = 35 35 ≤ 32 ko 💣	3 + 18 + 10 + 14 = 45 45 ≤ 45 ok ✓
$R_i^0 = C_i$			7	
$R_i^1 = C_i + I_i (R_i^0)$			7 + 6 + 5 = 18	
$R_i^2 = C_i + I_i (R_i^1)$			7 + 12 + 5 = 24	
$R_i^3 = C_i + I_i (R_i^2)$			7 + 12 + 5 = 24 ✓	



Idle
Ready
Running

# UN'ESTENSIONE DEL MODELLO PER LA SCHEDULAZIONE DI PROCESSI SIA PERIODICI CHE SPORADICI

I processi sporadici, pur essendo tipicamente caratterizzati da una bassa frequenza di esecuzione, impongono vincoli più stringenti per quanto concerne il tempo di completamento della loro esecuzione (processi urgenti):

$$\exists j \ D_j < T_j$$

Ai fini della schedulazione è sufficiente estendere il precedente modello, prevedendo che ogni processo  $P_j$  sia esplicitamente caratterizzato da tre parametri:  
 $T_j$  (MIT nel caso di processi sporadici, periodo nel caso di processi periodici),  
 $D_j \leq T_j$  (< nel caso di processi sporadici, = nel caso di processi periodici)  
e  $C_j < D_j$ .



# L'ALGORITMO DEADLINE MONOTONIC PRIORITY ORDERING (DMPO) [LEUNG-WHITEHEAD (82)]

Ad ogni processo  $P_j$  ( $\forall j$ ) è staticamente associata una priorità inversamente proporzionale alla corrispondente deadline relativa:

$$p_j \propto 1 / D_j.$$

## OTTIMALITÀ DELL'ALGORITMO

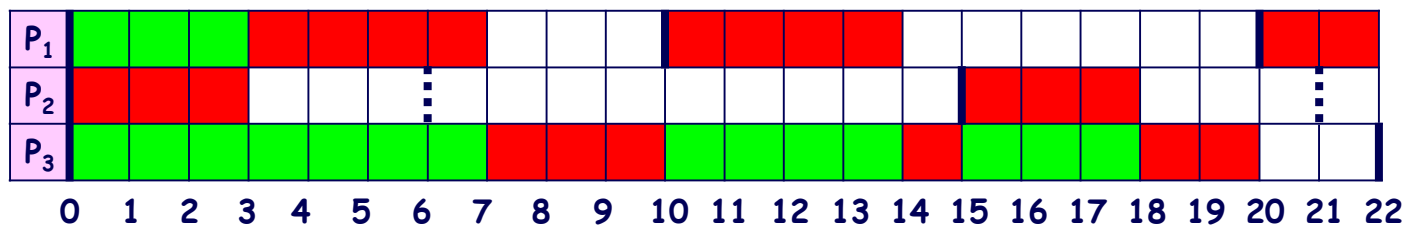
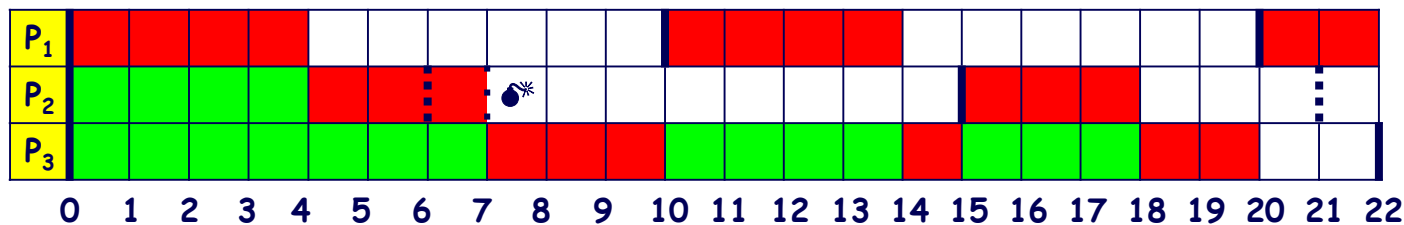
Se un insieme di processi periodici e/o sporadici è schedulabile con un qualche algoritmo che prevede un'attribuzione statica di priorità, allora tale insieme è schedulabile anche con DMPO.

Se un insieme di processi periodici e/o sporadici non è schedulabile con DMPO, allora tale insieme non è schedulabile con alcun altro algoritmo che preveda un'attribuzione statica di priorità.

# ANALISI DI SCHEDULABILITÀ ATTRAVERSO DIAGRAMMI TEMPORALI ...

$A_6$	C	T	D	C/T	p(RMPO)	p(DMPO)
$P_1$	4	10	10	0.40	max	
$P_2$	3	15	6	0.20		max
$P_3$	6	22	22	0.27	min	min

$$U(A_6) = 0.87$$



RMPO: missed deadline

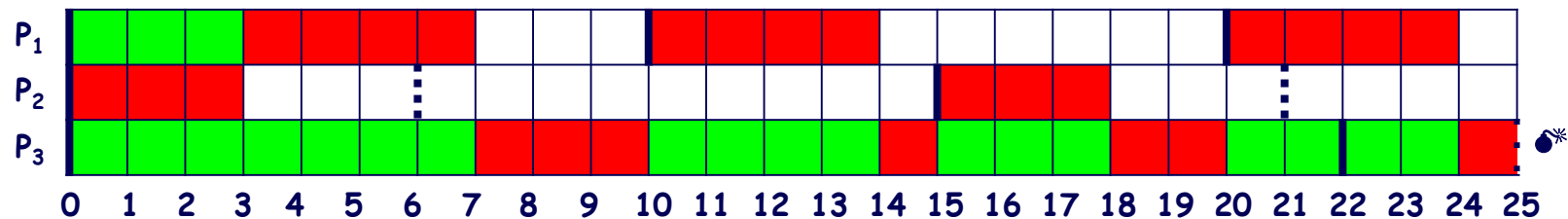
DMPO: no missed deadline



# ... ANALISI DI SCHEDULABILITÀ ATTRAVERSO DIAGRAMMI TEMPORALI

$A_7$	C	T	D	C/T	p
$P_1$	4	10	10	0.40	
$P_2$	3	15	6	0.20	max
$P_3$	7	22	22	0.32	min

$$U(A_7) = 0.92$$



Idle

Ready

Running

missed deadline (●\*): insieme di processi non schedulabile

Per poter schedulare applicazioni con un elevato fattore di utilizzazione del processore (come  $A_7$  o  $A_4$ ), occorre utilizzare un algoritmo che attribuisca le priorità ai processi non staticamente, bensì dinamicamente.

# ANALISI DI SCHEDULABILITÀ: CALCOLO DEI TEMPI DI RISPOSTA

Algoritmo di Audsley: condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme di N processi periodici e sporadici sia schedulabile con l'algoritmo DMPO è che:

$$R_i = C_i + I_i(R_i) = C_i + \sum_{j | p_j > p_i} \left\lceil \frac{R_i}{T_j} \right\rceil C_j \leq D_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$A_6$	C	T	D	C/T
$P_1$	4	10	10	0.40
$P_2$	3	15	6	0.20
$P_3$	6	22	22	0.27

$$U(A_6) = 0.87$$

$$P_2: R_2^1 = R_2^0 = C_2 = 3 < D_2 = 6$$



$$P_1: R_1^0 = C_1 = 4$$

$$R_1^1 = C_1 + \lceil R_1^0 / T_2 \rceil * C_2 = 4 + \lceil 4/15 \rceil * 3 = 7$$

$$R_1^2 = C_1 + \lceil R_1^1 / T_2 \rceil * C_2 = 4 + \lceil 7/15 \rceil * 3 = 7$$

$$R_1^2 = R_1^1 = 7 < D_1 = 10$$



$$P_3: R_3^0 = C_3 = 6$$

$$R_3^1 = C_3 + \lceil R_3^0 / T_2 \rceil * C_2 + \lceil R_3^0 / T_1 \rceil * C_1 = 6 + \lceil 6/15 \rceil * 3 + \lceil 6/10 \rceil * 4 = 13$$

$$R_3^2 = C_3 + \lceil R_3^1 / T_2 \rceil * C_2 + \lceil R_3^1 / T_1 \rceil * C_1 = 6 + \lceil 13/15 \rceil * 3 + \lceil 13/10 \rceil * 4 = 17$$

$$R_3^3 = C_3 + \lceil R_3^2 / T_2 \rceil * C_2 + \lceil R_3^2 / T_1 \rceil * C_1 = 6 + \lceil 17/15 \rceil * 3 + \lceil 17/10 \rceil * 4 = 20$$

$$R_3^4 = C_3 + \lceil R_3^3 / T_2 \rceil * C_2 + \lceil R_3^3 / T_1 \rceil * C_1 = 6 + \lceil 20/15 \rceil * 3 + \lceil 20/10 \rceil * 4 = 20$$

$$R_3^4 = R_3^3 = 20 < D_3 = 22$$



# TEST DI SCHEDULABILITÀ ...

Condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché un insieme di N processi periodici e sporadici sia schedulabile con l'algoritmo DMPO è che:

$$C_i + I_i(D_i) = C_i + \sum_{j | p_j > p_i} \left\lceil \frac{D_i}{T_j} \right\rceil C_j \leq D_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$A_6$	C	T	D	C/T
$P_1$	4	10	10	0.40
$P_2$	3	15	6	0.20
$P_3$	6	22	22	0.27

$$U(A_6) = 0.87$$

$$P_2: C_2 + I_2(D_2) = 3 < D_2 = 6$$



$$P_1: C_1 + \lceil D_1/T_2 \rceil * C_2 = 4 + \lceil 10/15 \rceil * 3 = 7 < D_1 = 10$$



$$P_3: C_3 + \lceil D_3/T_2 \rceil * C_2 + \lceil D_3/T_1 \rceil * C_1 = 6 + \lceil 22/15 \rceil * 3 + \lceil 22/10 \rceil * 4 = 24 > D_3 = 22$$

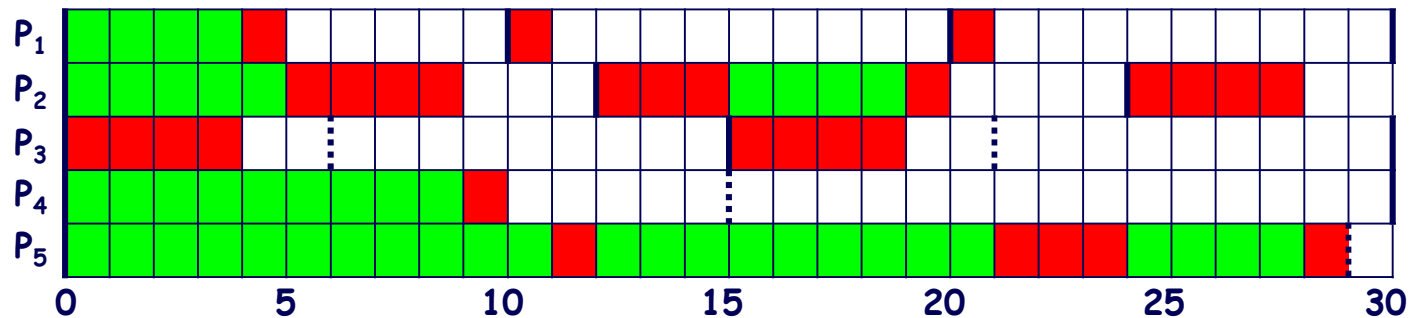


# ... TEST DI SCHEDULABILITÀ ...

	C	T	D	C/T
P <sub>1</sub>	1	10	10	0.100
P <sub>2</sub>	4	12	12	0.333
P <sub>3</sub>	4	15	6	0.267
P <sub>4</sub>	1	30	15	0.033
P <sub>5</sub>	5	60	29	0.083

$$U = 0.817$$

	P <sub>3</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>
$C_i + I_i(D_i) \leq D_i$	4+0 = 4 4 ≤ 6 ok	1+4 = 5 5 ≤ 10 ok	4+4+2 = 10 10 ≤ 12 ok	1+4+2+8 = 15 15 ≤ 15 ok	5+8+3+12+1 = 29 29 ≤ 29 ok
$R_i^0 = C_i$	✓	✓	✓	✓	✓
$R_i^1 = C_i + I_i(R_i^0)$					
$R_i^2 = C_i + I_i(R_i^1)$					
$R_i^3 = C_i + I_i(R_i^2)$					
$R_i^4 = C_i + I_i(R_i^3)$					
$R_i^5 = C_i + I_i(R_i^4)$					
$R_i^6 = C_i + I_i(R_i^5)$					



## ... TEST DI SCHEDULABILITÀ ...

Test basato sulla “densità di utilizzazione” del processore

Condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché un insieme di  $N$  processi periodici e sporadici sia schedulabile con l'algoritmo DMPO è che:

$$\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{C_j}{D_j} \leq U_{\text{RMPO}}(N) = N(2^{1/N} - 1)$$

Condizione fortemente conservativa se esistono uno o più processi con deadline relativa  $\ll$  periodo.

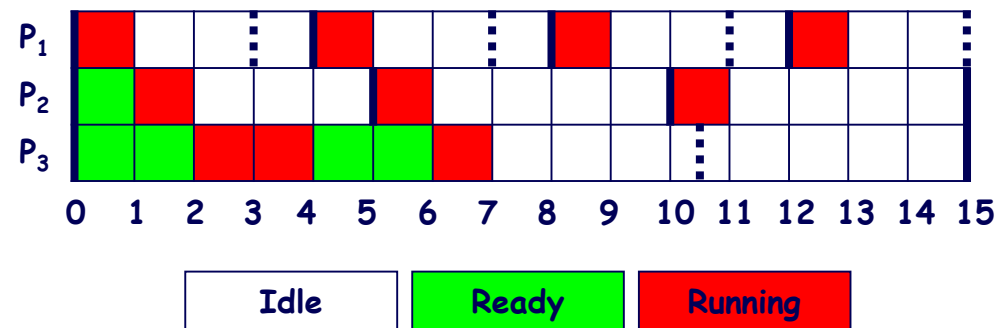
## ... TEST DI SCHEDULABILITÀ

	C	T	D	C/D
P <sub>1</sub>	1	4	3	0.33
P <sub>2</sub>	1	5	5	0.20
P <sub>3</sub>	3	15	10.5	0.29

$$\sum_{j=1}^3 \frac{C_j}{D_j} = 0.82 > U_{\text{RMPO}}(N=3) = 0.78$$



Il test fallisce nonostante l'insieme dei processi sia schedulabile con l'algoritmo DMPO:





## IL TEST DI LEHOCZKY (90) ...

Condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché un insieme di  $N$  processi periodici e sporadici, ciascuno contraddistinto da una deadline relativa  $D_j = \delta_j * T_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , sia schedulabile con l'algoritmo DMPO è che:

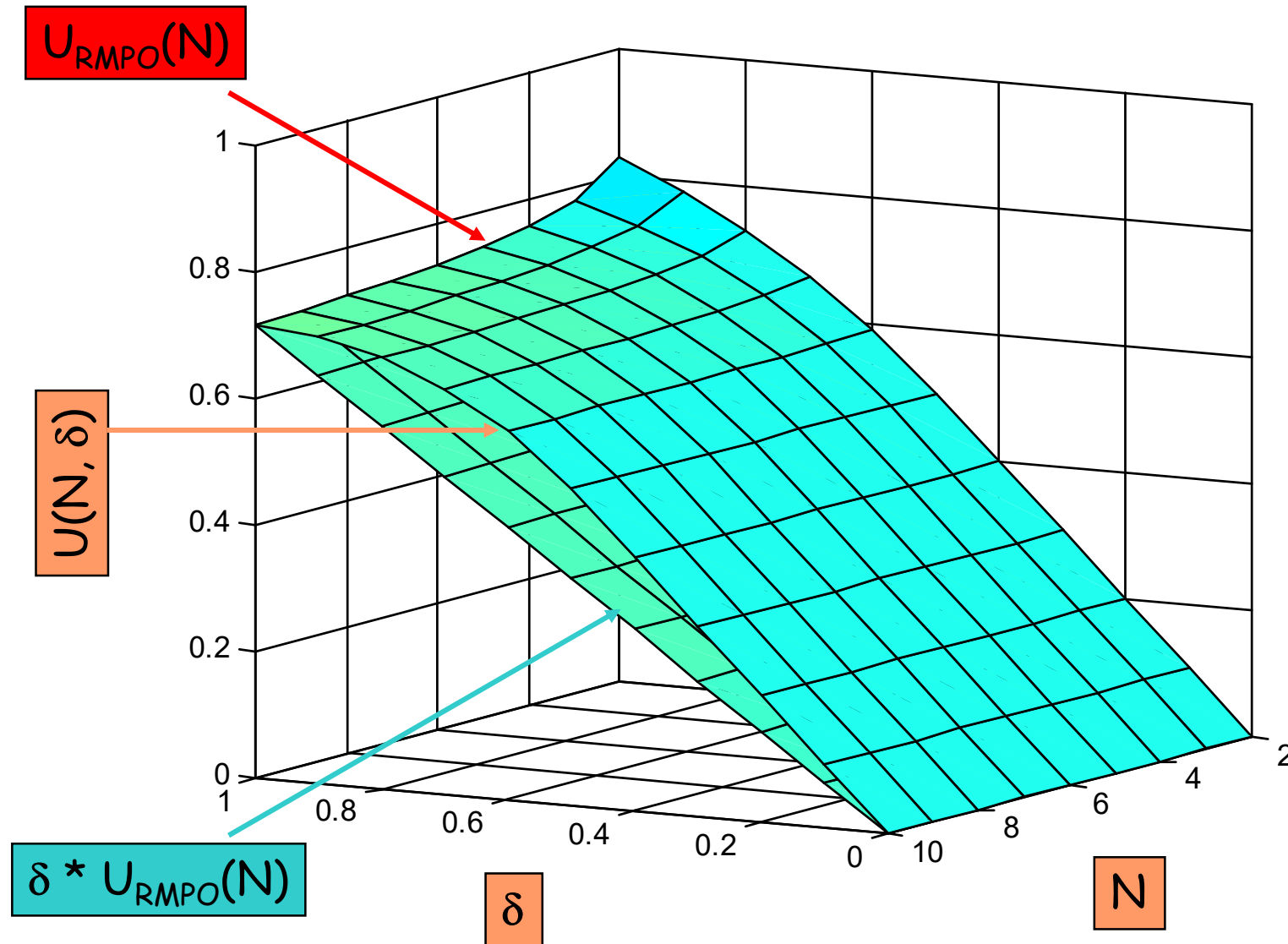
$$\sum_{j=1}^N \frac{C_j}{T_j} \leq U(N, \delta) = \begin{cases} N((2\delta)^{1/N} - 1) + 1 - \delta & 0.5 \leq \delta \leq 1 \\ \delta & 0 \leq \delta \leq 0.5 \end{cases} \quad \delta = \min_j \{\delta_j\}$$

	C	T	D	C/T	D/T
P <sub>1</sub>	1	4	3	0.25	0.75
P <sub>2</sub>	1	5	5	0.20	1
P <sub>3</sub>	3	15	10.5	0.20	0.7

$$\sum_{j=1}^3 \frac{C_j}{T_j} = 0.65 \leq U(N=3, \delta=0.7) = 0.656$$



## ... IL TEST DI LEHOCZKY



# IL TEST BASATO SUL FATTORE DI UTILIZZAZIONE EFFICACE DEI PROCESSI ...

Il test di Lehoczky nella formulazione precedente risulta ancora decisamente conservativo se i  $\delta_j$  sono alquanto diversi fra loro.

In tal caso è conveniente applicare il test calcolando individualmente per ogni processo  $P_j$ , in ordine di priorità decrescente, il "fattore di utilizzazione efficace"  $f_j$ , definito da:

$$f_j = \left( \sum_{i \in H_n} \frac{C_i}{T_i} \right) + \frac{1}{T_j} \left( C_j + \sum_{k \in H_1} C_k \right)$$

essendo  $H_1$  e  $H_n$  i due sottoinsiemi di processi di priorità  $\geq p(P_j)$  con periodo, rispettivamente,  $\geq D_j$  e  $< D_j$ ,

e verificando se risulta:

$$f_j \leq U \left( N = |H_n| + 1, \delta = \delta_j \right)$$

L'insieme di processi è schedabile se tale condizione (sufficiente, non necessaria) è soddisfatta per  $\forall P_j, j = 1, 2, \dots, N$ .

# ... IL TEST BASATO SUL FATTORE DI UTILIZZAZIONE EFFICACE DEI PROCESSI ...

	C	T	D	C/T	C/D	D/T
P <sub>1</sub>	1	10	10	0.100	0.100	1
P <sub>2</sub>	4	12	12	0.333	0.333	1
P <sub>3</sub>	4	15	6	0.267	0.667	0.400
P <sub>4</sub>	1	30	15	0.033	0.067	0.500
P <sub>5</sub>	5	60	29	0.083	0.172	0.483

$$\Delta = 1.339 > U_{\text{RMPO}}(N=5) = 0.743$$

$$U = 0.817 > U(N=5, \delta=0.4) = 0.4$$



	H <sub>n</sub>	H <sub>1</sub>	f	U(N, δ)	
P <sub>3</sub>	{ }	{ }	4/15=0.267	U(1, 0.4)=0.4	👍
P <sub>1</sub>	{ }	{P <sub>3</sub> }	(1+4)/10=0.5	U(1, 1)=1	👍
P <sub>2</sub>	{P <sub>1</sub> }	{P <sub>3</sub> }	1/10+(4+4)/12=0.767	U(2, 1)=0.828	👍
P <sub>4</sub>	{P <sub>1</sub> , P <sub>2</sub> }	{P <sub>3</sub> }	1/10+4/12+(1+4)/30=0.6	U(3, 0.5)=0.5	👎
P <sub>5</sub>	{P <sub>3</sub> , P <sub>1</sub> , P <sub>2</sub> }	{P <sub>4</sub> }	4/15+1/10+4/12+(5+1)/60=0.8	U(4, 0.483)=0.483	👎



# ... IL TEST BASATO SUL FATTORE DI UTILIZZAZIONE EFFICACE DEI PROCESSI

	C	T	D	C/T	C/D	D/T
P <sub>1</sub>	1	4	4	0.250	0.250	1
P <sub>2</sub>	1	6	5	0.167	0.200	0.833
P <sub>3</sub>	1	12	7	0.083	0.143	0.583
P <sub>4</sub>	2	9	9	0.222	0.222	1

$$\sum_{j=1}^4 \frac{C_j}{D_j} = 0.815 > U_{\text{RMPO}}(N=4) = 0.757$$



$$\sum_{j=1}^4 \frac{C_j}{T_j} = 0.722 > U(N=4, \delta=0.583) = 0.574$$



	H <sub>n</sub>	H <sub>1</sub>	f	U(N, δ)	
P <sub>1</sub>	{ }	{ }	1/4 = 0.25	U(1, 1) = 1	👍
P <sub>2</sub>	{P <sub>1</sub> }	{ }	1/4 + 1/6 = 0.417	U(2, 5/6) = 0.749	👍
P <sub>3</sub>	{P <sub>1</sub> , P <sub>2</sub> }	{ }	1/4 + 1/6 + 1/12 = 0.5	U(3, 7/12) = 0.575	👍
P <sub>4</sub>	{P <sub>1</sub> , P <sub>2</sub> }	{P <sub>3</sub> }	1/4 + 1/6 + (2+1)/9 = 0.75	U(3, 1) = 0.78	👍



# SCHEDULABILITA' IN PRESENZA DI INTERRUPT SERVICE ROUTINES ...

Il test basato sul fattore di utilizzazione efficace può essere convenientemente applicato per verificare la schedulabilità di un insieme di processi periodici (e/o sporadici) gestiti in accordo alla strategia RMPO (o DMPO) in presenza di interrupt service routines (ISR).

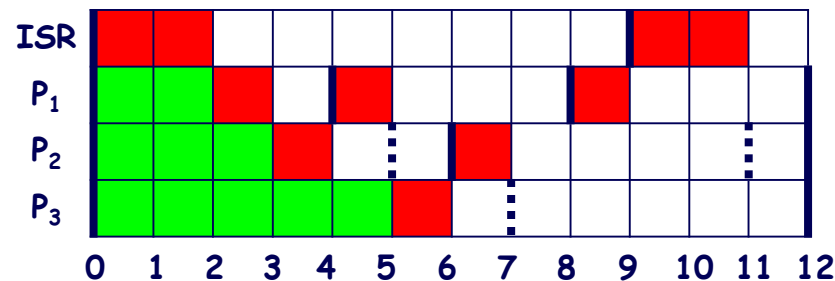
E' sufficiente a tale scopo procedere al calcolo del fattore di utilizzazione efficace di ogni ISR e di ogni processo, tenendo conto che le ISR vengono eseguite ad una priorità in generale più elevata di quella che loro deriverebbe dalla corrispondente frequenza di esecuzione.

Esempio: la precedente applicazione risulterebbe ancora schedabile se, al posto di  $P_4$ , considerassimo una ISR di pari frequenza e tempo di esecuzione ?

# ... SCHEDULABILITA' IN PRESENZA DI INTERRUPT SERVICE ROUTINES

	C	T	D	C/T	C/D	D/T
P <sub>1</sub>	1	4	4	0.250	0.250	1
P <sub>2</sub>	1	6	5	0.167	0.200	0.833
P <sub>3</sub>	1	12	7	0.083	0.143	0.583
ISR	2	9	9	0.222	0.222	1

	H <sub>n</sub>	H <sub>1</sub>	f	U(N,δ)
ISR	{ }	{ }	$2/9 = 0.222$	$U(1,1) = 1$
P <sub>1</sub>	{ }	{ISR}	$(1+2)/4 = 0.75$	$U(1,1) = 1$
P <sub>2</sub>	{P <sub>1</sub> }	{ISR}	$1/4 + (1+2)/6 = 0.75$	$U(2,5/6) = 0.749$
P <sub>3</sub>	{P <sub>1</sub> , P <sub>2</sub> }	{ISR}	$1/4 + 1/6 + (1+2)/12 = 0.667$	$U(3,7/12) = 0.575$



condizione  
sufficiente,  
non necessaria

# L'ALGORITMO EARLIEST DEADLINE FIRST (EDF)

Ad ogni processo è dinamicamente associata una priorità tanto maggiore quanto più imminente è la corrispondente deadline assoluta.

$A_4$	C	T	D	C/T
$P_1$	5	10	10	0.5
$P_2$	6	15	15	0.4

$U(A_4) = 0.9$



“task-level dynamic-priority algorithm”  
“job-level fixed-priority algorithm”



# JOB-LEVEL FIXED vs. DYNAMIC PRIORITY

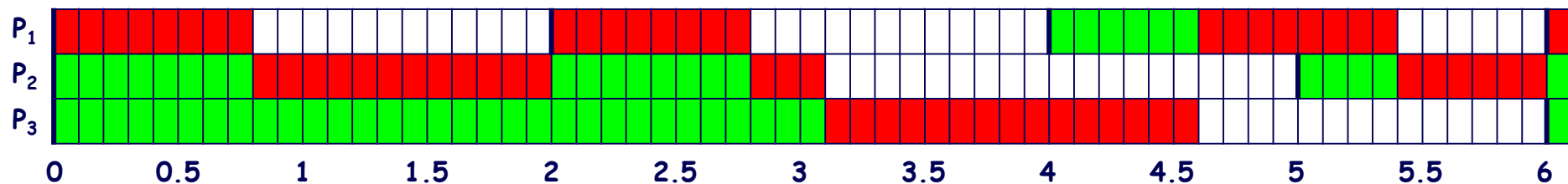
	C	T	D	C/T
P <sub>1</sub>	0.8	2	2	0.40
P <sub>2</sub>	1.5	5	5	0.30
P <sub>3</sub>	1.5	6	6	0.25

U = 0.95

Idle
Ready
Running

EDF

$p(J_{21}) > p(J_{31})$



(nonstrict) Least Slack Time First: "task-level and job-level dynamic-priority algorithm"

istanti decisionali:  
job release time

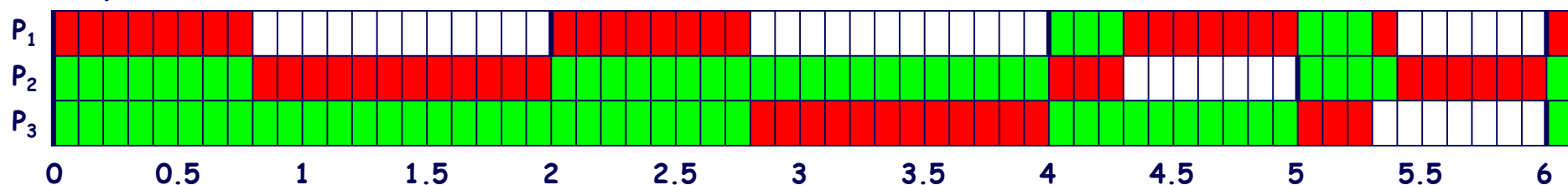
	t = 0		t = 2		t = 4		t = 5		t = 6	
	slack	priority	slack	priority	slack	priority	slack	priority	slack	priority
P <sub>1</sub>	1.2	p <sub>H</sub>	1.2	p <sub>H</sub>	1.2	p <sub>M</sub>	0.9	p <sub>M</sub>	1.2	p <sub>H</sub>
P <sub>2</sub>	3.5	p <sub>M</sub>	2.7	p <sub>L</sub>	0.7	p <sub>H</sub>	3.5	p <sub>L</sub>	3.1	p <sub>M</sub>
P <sub>3</sub>	4.5	p <sub>L</sub>	2.5	p <sub>M</sub>	1.7	p <sub>L</sub>	0.7	p <sub>H</sub>	4.5	p <sub>L</sub>

LST

$p(J_{21}) > p(J_{31})$

$p(J_{21}) < p(J_{31})$

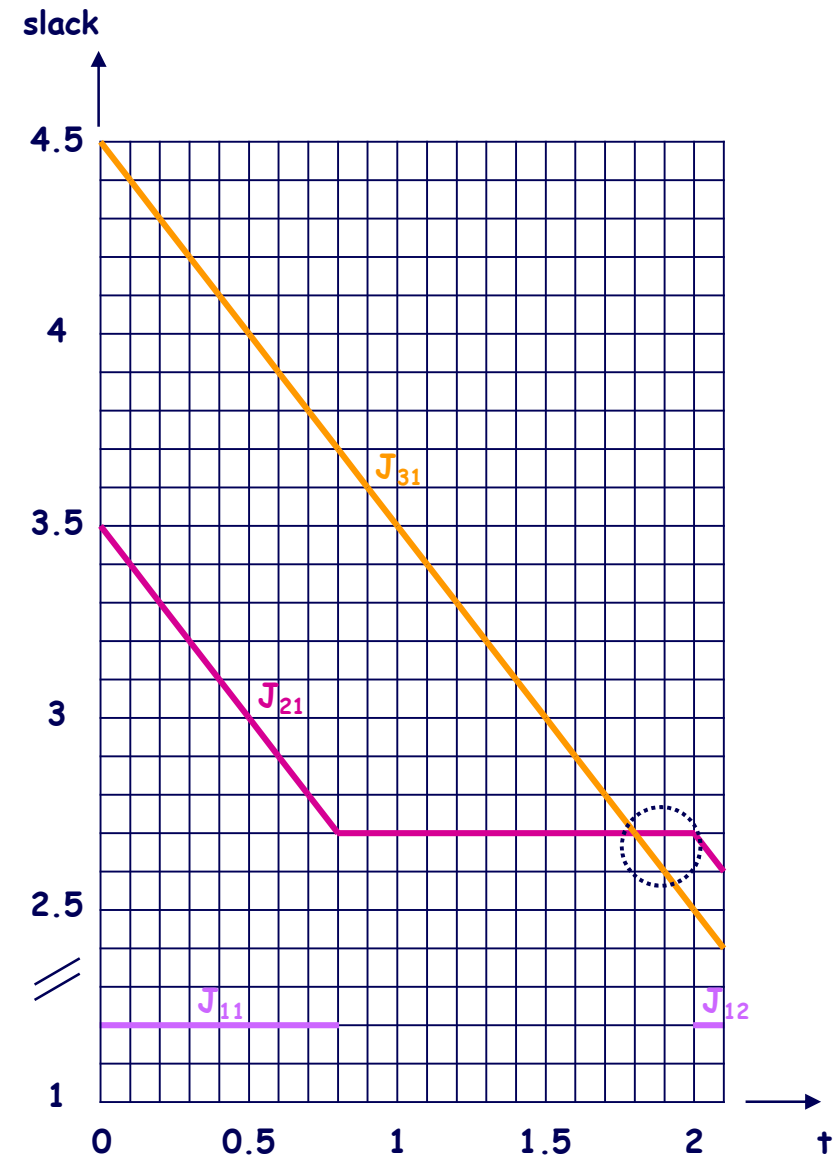
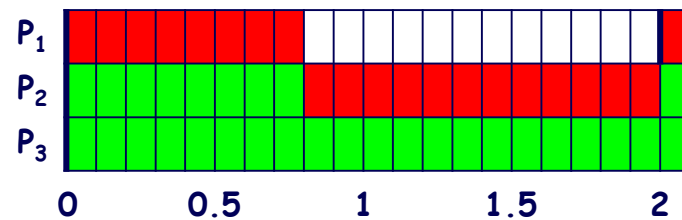
$p(J_{21}) > p(J_{31})$



# NONSTRICT LST

	C	T	D	C/T
P <sub>1</sub>	0.8	2	2	0.40
P <sub>2</sub>	1.5	5	5	0.30
P <sub>3</sub>	1.5	6	6	0.25

	t = 0		t = 2	
	slack	priority	slack	priority
P <sub>1</sub>	1.2	p <sub>H</sub>	1.2	p <sub>H</sub>
P <sub>2</sub>	3.5	p <sub>M</sub>	2.7	p <sub>L</sub>
P <sub>3</sub>	4.5	p <sub>L</sub>	2.5	p <sub>M</sub>

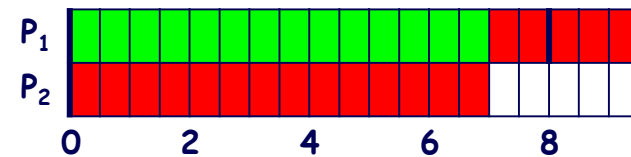


# STRICT vs. NONSTRICT LST

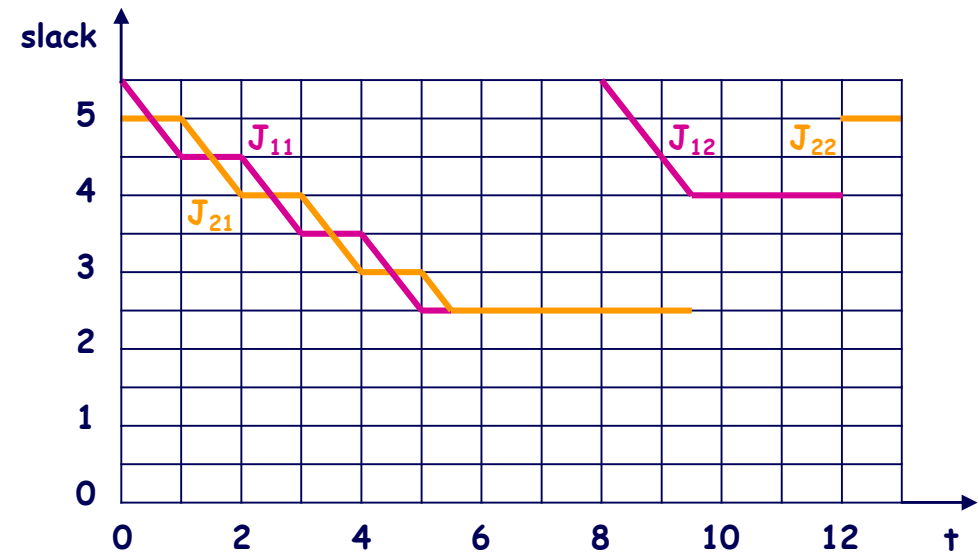
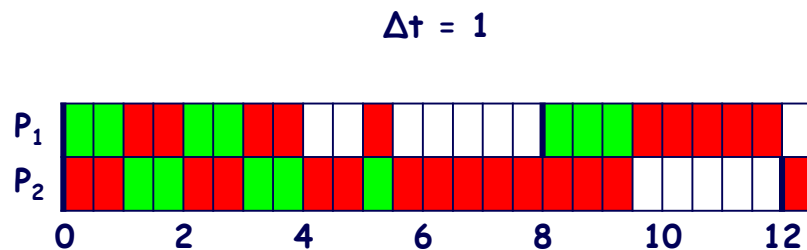
	C	T	D	C/T
P <sub>1</sub>	2.5	8	8	0.31
P <sub>2</sub>	7	12	12	0.58

nonstrict LST

	t = 0	t = 7
P <sub>1</sub>	5.5	-1.5
P <sub>2</sub>	5	



strict LST



# EDF: CONDIZIONI DI SCHEDULABILITÀ

Condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme di N processi periodici sia schedulabile con l'algoritmo EDF è che:

$$U = \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{T_i} \leq U_{\text{EDF}} = 1$$

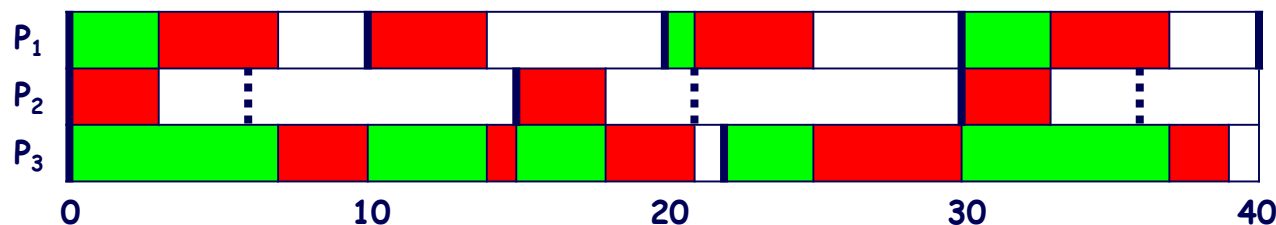
Condizione sufficiente (ma non necessaria) affinché un insieme di N processi periodici e sporadici sia schedulabile con l'algoritmo EDF è che:

$$\Delta = \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{D_i} \leq 1$$

$A_7$	C	T	D	C/T	C/D
$P_1$	4	10	10	0.40	0.40
$P_2$	3	15	6	0.20	0.50
$P_3$	7	22	22	0.32	0.32

$$U(A_7) = 0.92$$

$$\Delta(A_7) = 1.22$$



Scheduling di processi HRT 100

# ANALISI DI SCHEDULABILITÀ: L'APPROCCIO "PROCESSOR DEMAND" [BARUAH et al. (90)] ...

La schedulabilità di un insieme di  $N$  processi periodici e sporadici, contraddistinti da un fattore di utilizzazione del processore  $U \leq 1$  ed attivati contemporaneamente all'istante 0, è garantita se in ogni intervallo  $[0, t]$  il tempo di elaborazione cumulativamente richiesto per completare l'esecuzione di tutti i job aventi deadline  $\leq t$  non eccede il tempo disponibile  $t$ :

$$C_p(0, t) = \sum_{i=1}^N C_i(0, t) = \sum_{i=1}^N \left( \left\lfloor \frac{t - D_i}{T_i} \right\rfloor + 1 \right) C_i \leq t$$

Ai fini della schedulabilità, è sufficiente verificare se tale condizione è soddisfatta per  $\forall t \in \mathcal{D} \equiv \{d_{ik} \mid d_{ik} = (k-1)T_i + D_i, d_{ik} < BI, 1 \leq i \leq N, k \geq 1\}$ , essendo  $[0, BI]$  ("busy interval") il più piccolo intervallo entro il quale termina l'esecuzione di tutti i job attivati in esso (ovvero all'istante  $BI$  il processore risulta idle).  $BI$  può essere calcolato iterativamente nel seguente modo:

$$BI^0 = \sum_{i=1}^N C_i \quad BI^n = \sum_{i=1}^N \left\lceil \frac{BI^{n-1}}{T_i} \right\rceil C_i \quad n = 1, 2, \dots$$

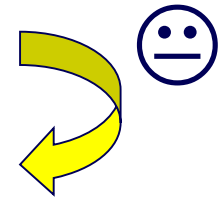
(se  $U \leq 1$ ,  $\exists n \mid BI^n = BI^{n-1} \leq H$  (iperperiodo); solo in caso contrario  $BI \rightarrow \infty$ )

## ... L'APPROCCIO "PROCESSOR DEMAND" ...

$A_7$	$C$	$T$	$D$	$C/T$	$C/D$
$P_1$	4	10	10	0.40	0.40
$P_2$	3	15	6	0.20	0.50
$P_3$	7	22	22	0.32	0.32

$$U(A_7) = 0.92$$

$$\Delta(A_7) = 1.22$$



$$BI^0 = C_1 + C_2 + C_3 = 14$$

$$BI^1 = \lceil BI^0/T_1 \rceil C_1 + \lceil BI^0/T_2 \rceil C_2 + \lceil BI^0/T_3 \rceil C_3 = \lceil 14/10 \rceil 4 + \lceil 14/15 \rceil 3 + \lceil 14/22 \rceil 7 = 18$$

$$BI^2 = \lceil BI^1/T_1 \rceil C_1 + \lceil BI^1/T_2 \rceil C_2 + \lceil BI^1/T_3 \rceil C_3 = \lceil 18/10 \rceil 4 + \lceil 18/15 \rceil 3 + \lceil 18/22 \rceil 7 = 21$$

$$BI^3 = \lceil BI^2/T_1 \rceil C_1 + \lceil BI^2/T_2 \rceil C_2 + \lceil BI^2/T_3 \rceil C_3 = \lceil 21/10 \rceil 4 + \lceil 21/15 \rceil 3 + \lceil 21/22 \rceil 7 = 25$$

$$BI^4 = \lceil BI^3/T_1 \rceil C_1 + \lceil BI^3/T_2 \rceil C_2 + \lceil BI^3/T_3 \rceil C_3 = \lceil 25/10 \rceil 4 + \lceil 25/15 \rceil 3 + \lceil 25/22 \rceil 7 = 32$$

$$BI^5 = \lceil BI^4/T_1 \rceil C_1 + \lceil BI^4/T_2 \rceil C_2 + \lceil BI^4/T_3 \rceil C_3 = \lceil 32/10 \rceil 4 + \lceil 32/15 \rceil 3 + \lceil 32/22 \rceil 7 = 39$$

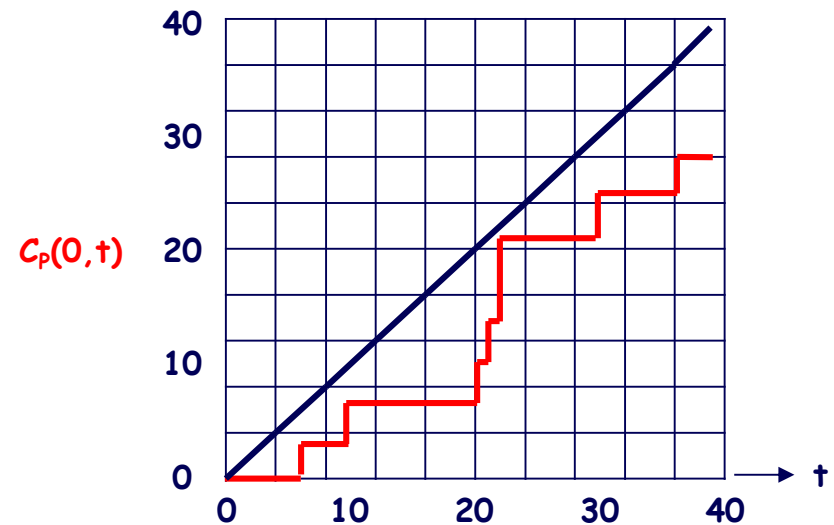
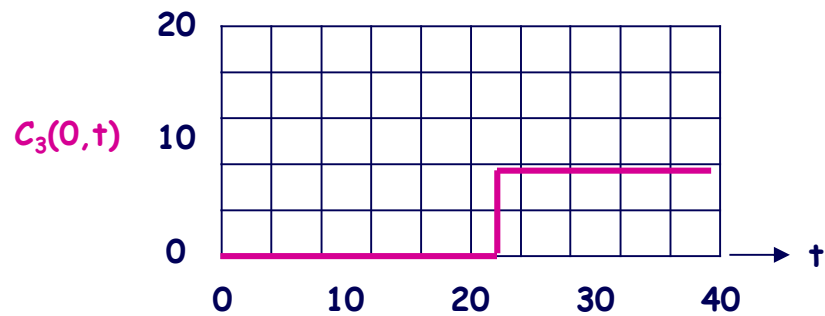
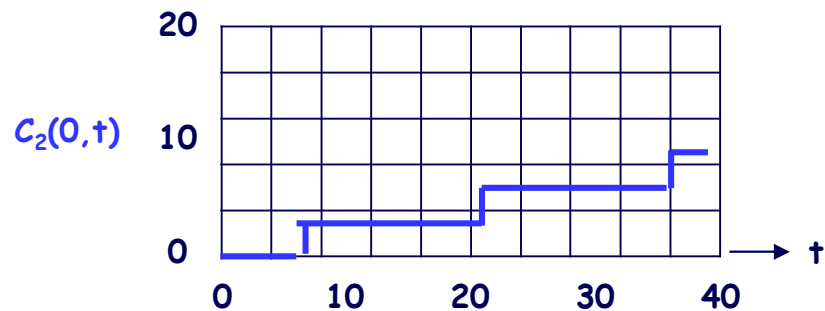
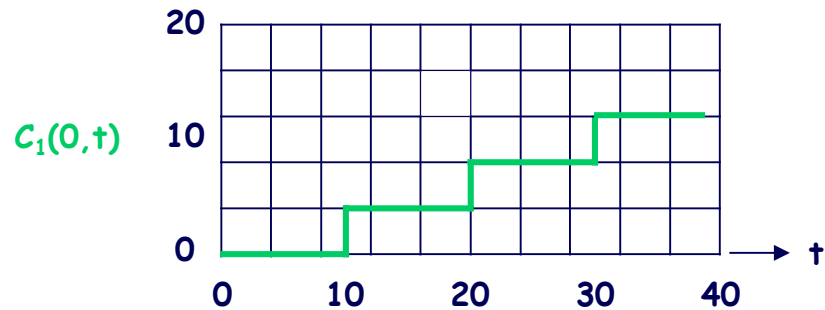
$$BI^6 = \lceil BI^5/T_1 \rceil C_1 + \lceil BI^5/T_2 \rceil C_2 + \lceil BI^5/T_3 \rceil C_3 = \lceil 39/10 \rceil 4 + \lceil 39/15 \rceil 3 + \lceil 39/22 \rceil 7 = 39 = BI^5$$

$$BI = 39 < H = \text{lcm}(10, 15, 22) = 330$$

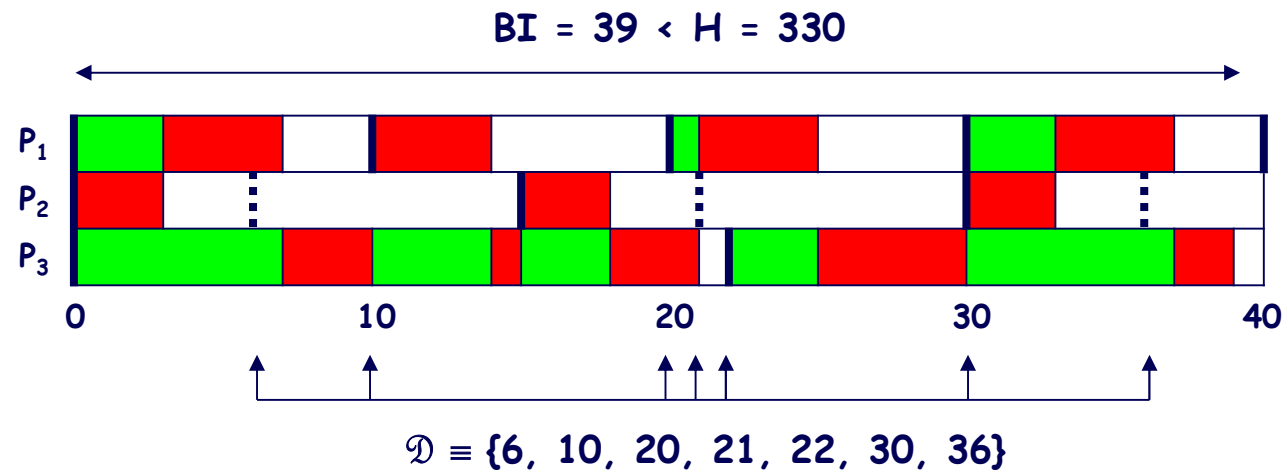
$$\mathcal{D} \equiv \{6, 10, 20, 21, 22, 30, 36\}$$



## ... L'APPROCCIO "PROCESSOR DEMAND" ...



# ... L'APPROCCIO "PROCESSOR DEMAND" ...



$t$	$C_1(0, t)$	$C_2(0, t)$	$C_3(0, t)$	$C_p(0, t)$	$\leq t$
6	0	3	0	3	👍
10	4	3	0	7	👍
20	8	3	0	11	👍
21	8	6	0	14	👍
22	8	6	7	21	👍
30	12	6	7	25	👍
36	12	9	7	28	👍





# ... L'APPROCCIO "PROCESSOR DEMAND" ...

$A_8$	C	T	D	C/T	C/D
$P_1$	4	10	10	0.40	0.40
$P_2$	3	15	6.5	0.20	0.46
$P_3$	8	21	21	0.38	0.38

$$U(A_8) = 0.98$$

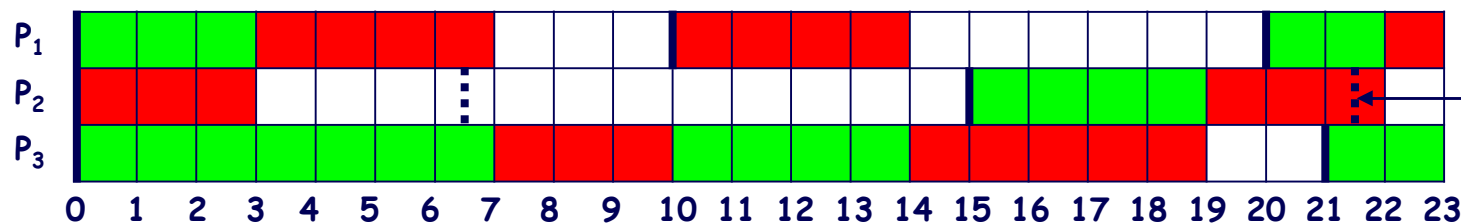
$$\Delta(A_8) = 1.24$$



n	$BI^n$
0	15
1	19
2	22
...	...

$$(BI^8 = BI^7 = 60)$$

t	$C_1(0,t)$	$C_2(0,t)$	$C_3(0,t)$	$C_p(0,t)$	$\leq t$
6.5	0	3	0	3	👍
10	4	3	0	7	👍
20	8	3	0	11	👍
21	8	3	8	19	👍
21.5	8	6	8	22	👎



Idle	Ready	Running
------	-------	---------

## ... L'APPROCCIO "PROCESSOR DEMAND" ...

Indicato con:

$$t^* = \frac{\sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{D_i}{T_i}\right) C_i}{1 - U}$$

è possibile, qualora risulti  $t^* < BI$ , migliorare l'efficienza dell'approccio limitandosi a verificare se è soddisfatta la condizione  $C_p(0,t) \leq t$  solo per il seguente insieme  $\mathcal{D}^*$  di istanti  $t$ :

$$\mathcal{D}^* \equiv \{d_{ik} \mid d_{ik} = (k-1) T_i + D_i, d_{ik} < t^*, 1 \leq i \leq N, k \geq 1\}.$$

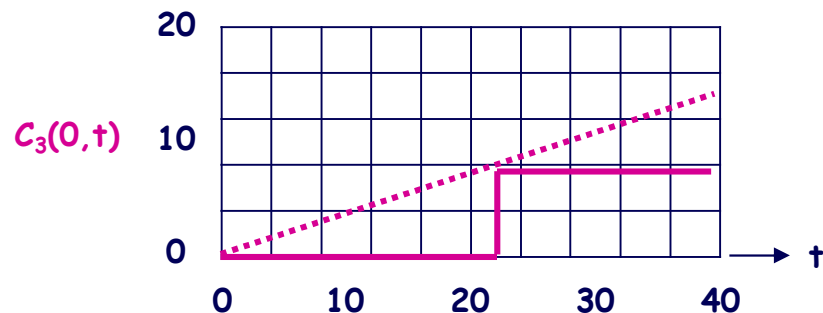
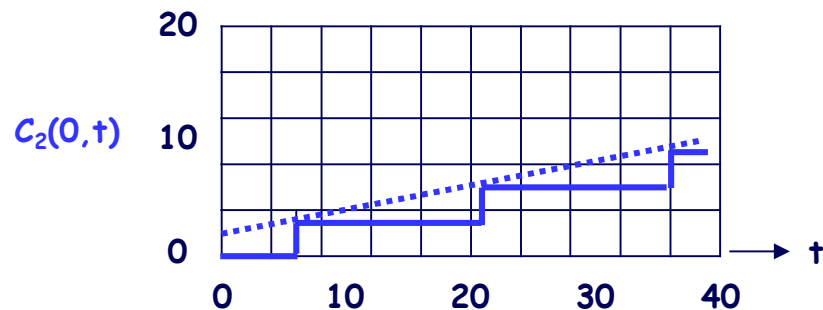
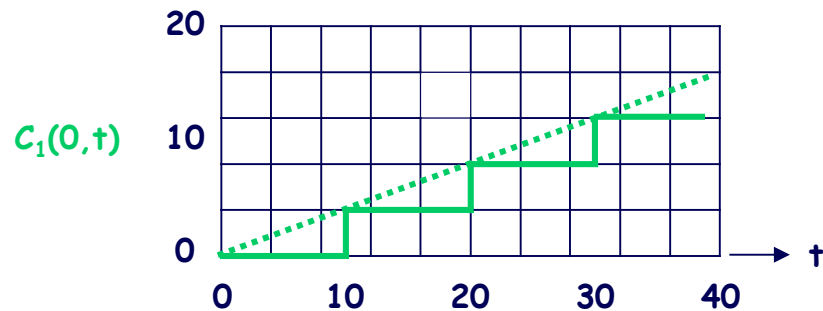
Ciò deriva dalla constatazione che:

$$C_p(0,t) \leq C^*(0,t) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{t - D_i}{T_i} + 1 \right) C_i = U t + \sum_{i=1}^N \left( 1 - \frac{D_i}{T_i} \right) C_i, \forall t$$

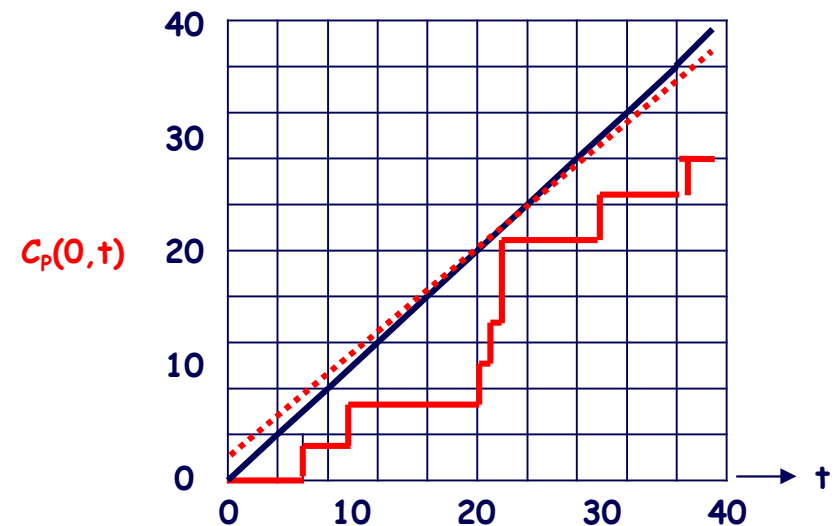
e quindi che  $C_p(0,t) \leq t$  per  $\forall t \geq t^*$ .

# ... L'APPROCCIO "PROCESSOR DEMAND" ...

La diversa modellazione del tempo di elaborazione complessivamente richiesto in  $[0, t]$ :



$A_7$	$C$	$T$	$D$	$C/T$	$C/D$
$P_1$	4	10	10	0.40	0.40
$P_2$	3	15	6	0.20	0.50
$P_3$	7	22	22	0.32	0.32



$$BI = 39 \rightarrow \mathcal{D} \equiv \{6, 10, 20, 21, 22, 30, 36\}$$

$$t^* = 22 \rightarrow \mathcal{D}^* \equiv \{6, 10, 20, 21\}$$

$$t^* < BI \rightarrow \mathcal{D}^* \subset \mathcal{D}$$

# ... L'APPROCCIO "PROCESSOR DEMAND"

$A_9$	C	T	D
$P_1$	4	10	5
$P_2$	3.5	15	8
$P_3$	5	22	21

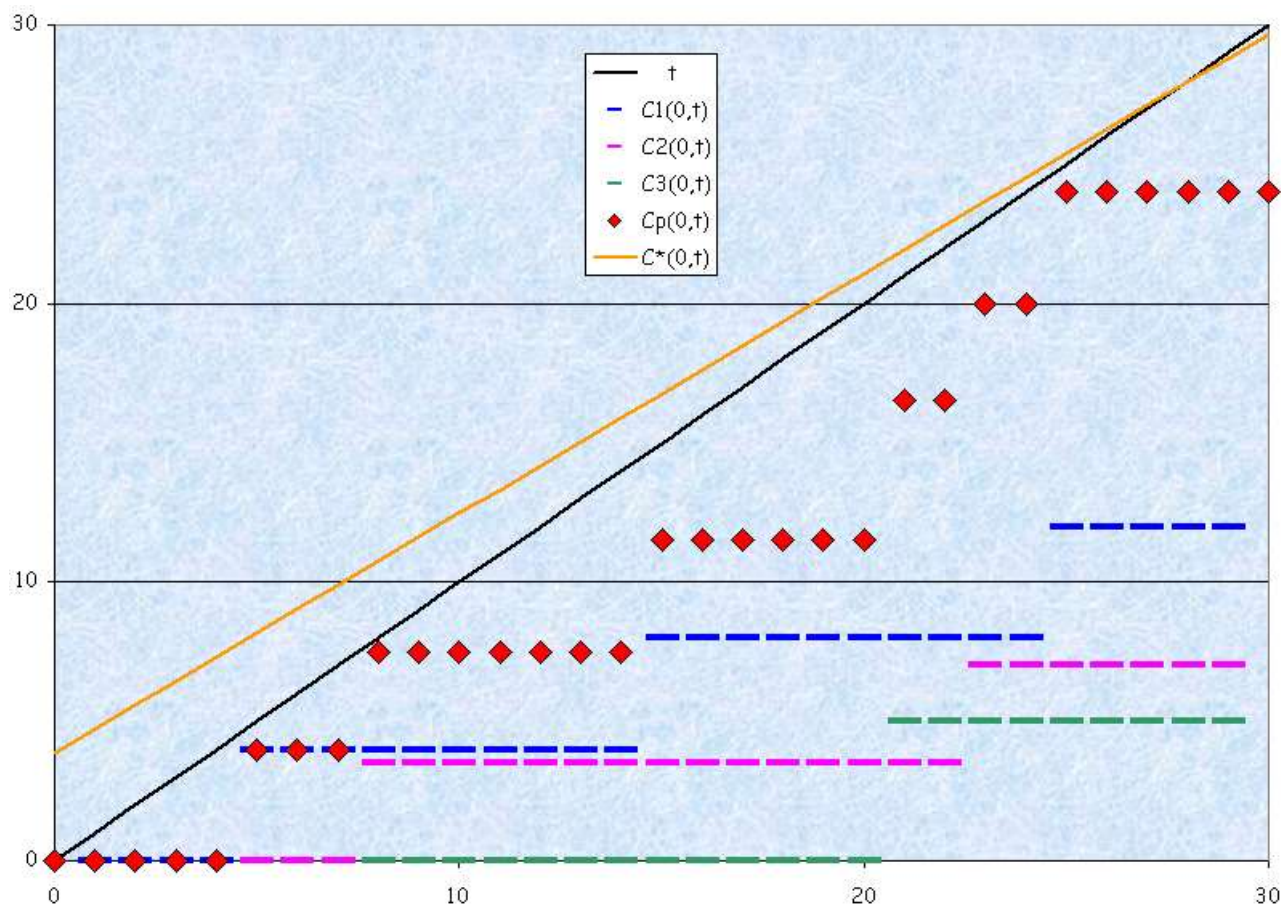
$$BI = 20$$

$$\mathcal{D} \equiv \{5, 8, 15\}$$

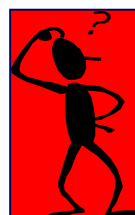
$$t^* = 27.7$$

$$\mathcal{D}^* \equiv \{5, 8, 15, 21, 23, 25\}$$

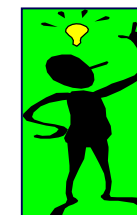
$$t^* > BI \rightarrow \mathcal{D}^* \supset \mathcal{D}$$



$t$	$C_1(0,t)$	$C_2(0,t)$	$C_3(0,t)$	$C_p(0,t)$	$\leq t$
5	4	0	0	4	👍
8	4	3.5	0	7.5	👍
15	8	3.5	0	11.5	👍



In generale:  
 $t^*$  o  $BI$  ?



$BI^n$   
 $\min(t^*, BI)$

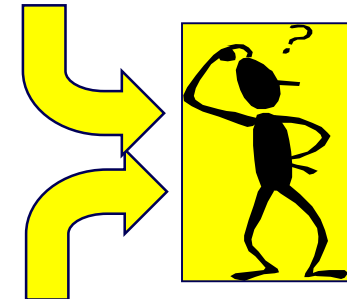
# RMPO, DMPO, EDF: ASPETTI REALIZZATIVI

Separazione tra aspetti funzionali e temporali

Name	$P_1$	...	$P_N$
Period	$P_1$ Period	...	$P_N$ Period
Relative Deadline	$P_1$ Deadline	...	$P_N$ Deadline
InitializationEntryPoint	$P_1$ ResetHandler	...	$P_N$ ResetHandler
JobEntryPoint	$P_1$ Handler	...	$P_N$ Handler
MissedDeadlineEntryPoint	$P_1$ MissedDeadlineHandler	...	$P_N$ MissedDeadlineHandler

Specifiche a livello di "application design"

Primitive del Sistema Operativo (VxWorks)



`SystemTickRate ( ) /* real-time clock frequency */`

`SystemTickConnect (EntryPoint) /* hook to real-time clock interrupt handler */`

`TaskSpawn (Name, Priority, Options, StackSize, EntryPoint, Arg1, ..., Arg10) /* creation & activation */`

`SetTaskPriority (TaskId, Priority) /* TaskId = 0: calling task */`

`TaskSuspend (TaskId) /* TaskId = 0: calling task */`

`TaskResume (TaskId)`

`TaskIsSuspended (TaskId)`

...

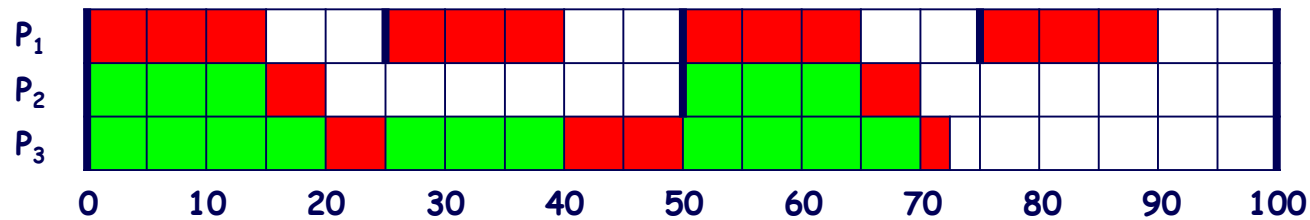
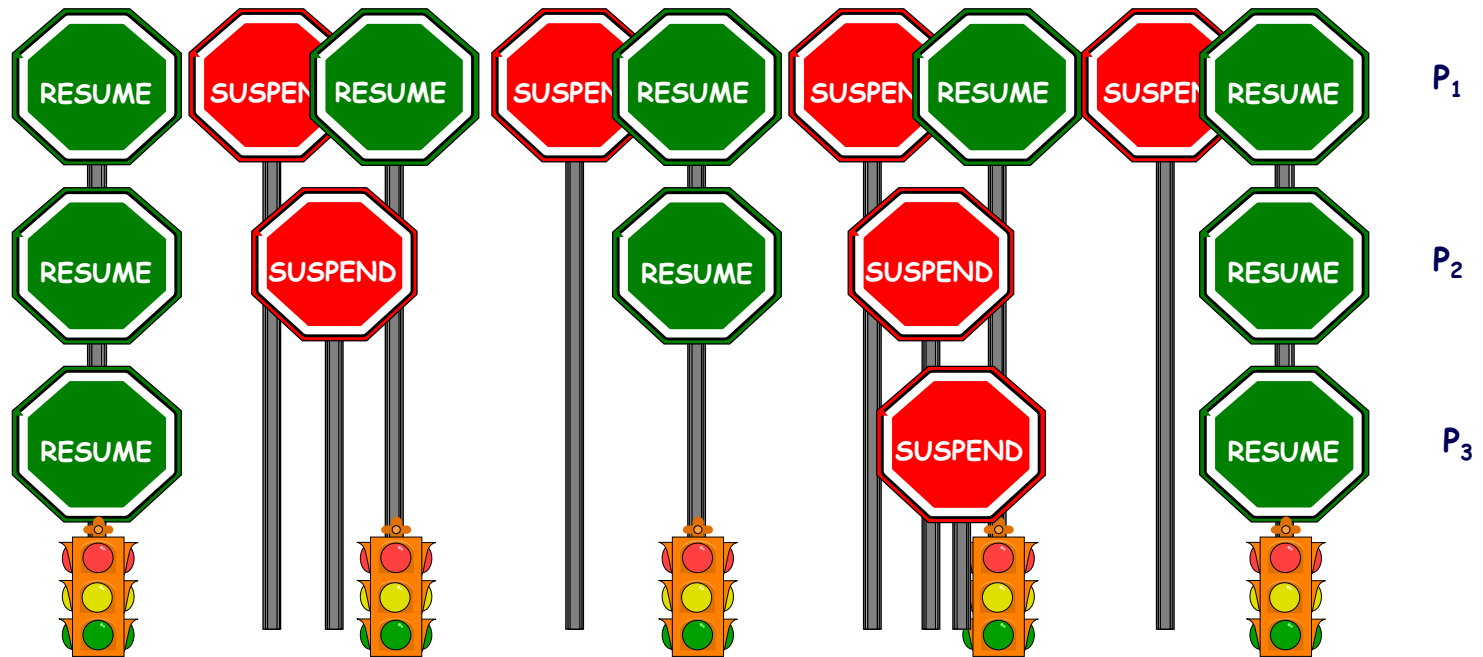
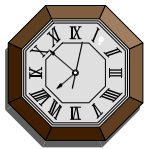
Distinzione tra politiche e meccanismi

# RMPO, DMPO: IL RUOLO DEL METASCHEDULER

$A_2$	C	T
$P_1$	15	25
$P_2$	5	50
$P_3$	17.5	100

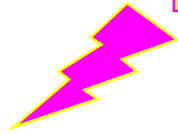
Ad ogni processo è attribuita una priorità (statica)  
in base alla corrispondente deadline relativa

Metascheduler



# ESECUZIONE PERIODICA DEL METASCHEDULER

Real-Time Clock  
Interrupt



```
void SystemTickInterruptHandler (void)
```

```
{
```

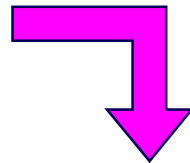
```
...
```

```
SystemTickHandler ( );
```

```
...
```

```
}
```

```
SystemTickConnect (SystemTickHandler);
```



```
private void SystemTickHandler (void)
```

```
{
```

```
if ((--MetaschedulerReleaseTimer) == 0)
```

```
{
```

```
TaskResume (MetaschedulerId);
```

```
MetaschedulerReleaseTimer = MetaschedulerReleaseTime; /* = 50 se
```

```
}
```

```
}
```

$T_{RTC} = 500 \mu s$

$T_{METASCHEDULER} = \text{mcd} (25 (P_1), 50 (P_2), 100 (P_3)) = 25 \text{ ms } */$

# ESECUZIONE PERIODICA DEI PROCESSI ...

```
MetaschedulerId = TaskSpawn ('Metascheduler', HighPriority,  
                              DefaultOptions, DefaultStackSize,  
                              MetaschedulerShell, 0);
```



```
private void MetaschedulerShell (void)  
{  
    while (true)  
    {  
        TaskSuspend (0);  
        Metascheduler ( );  
    }  
}
```



```
private void Metascheduler (void)  
{  
    repeat for each Pj  
    {  
        if ((--PjReleaseTimer) == 0)  
        {  
            TaskResume (PjId);  
            PjReleaseTimer = PjReleaseTime; /* = 1 (P1), 2 (P2), 4 (P3) */  
        }  
    }  
}
```



# ... ESECUZIONE PERIODICA DEI PROCESSI

/\* for each Pj \*/

PjId = TaskSpawn ('Pj', PjPriority, DefaultOptions, DefaultStackSize, TaskShell, PjHandler);

```
private void TaskShell (void (* PjHandler) (void))  
{  
    while (true)  
    {  
        TaskSuspend (0);  
        PjHandler ( );  
    }  
}
```



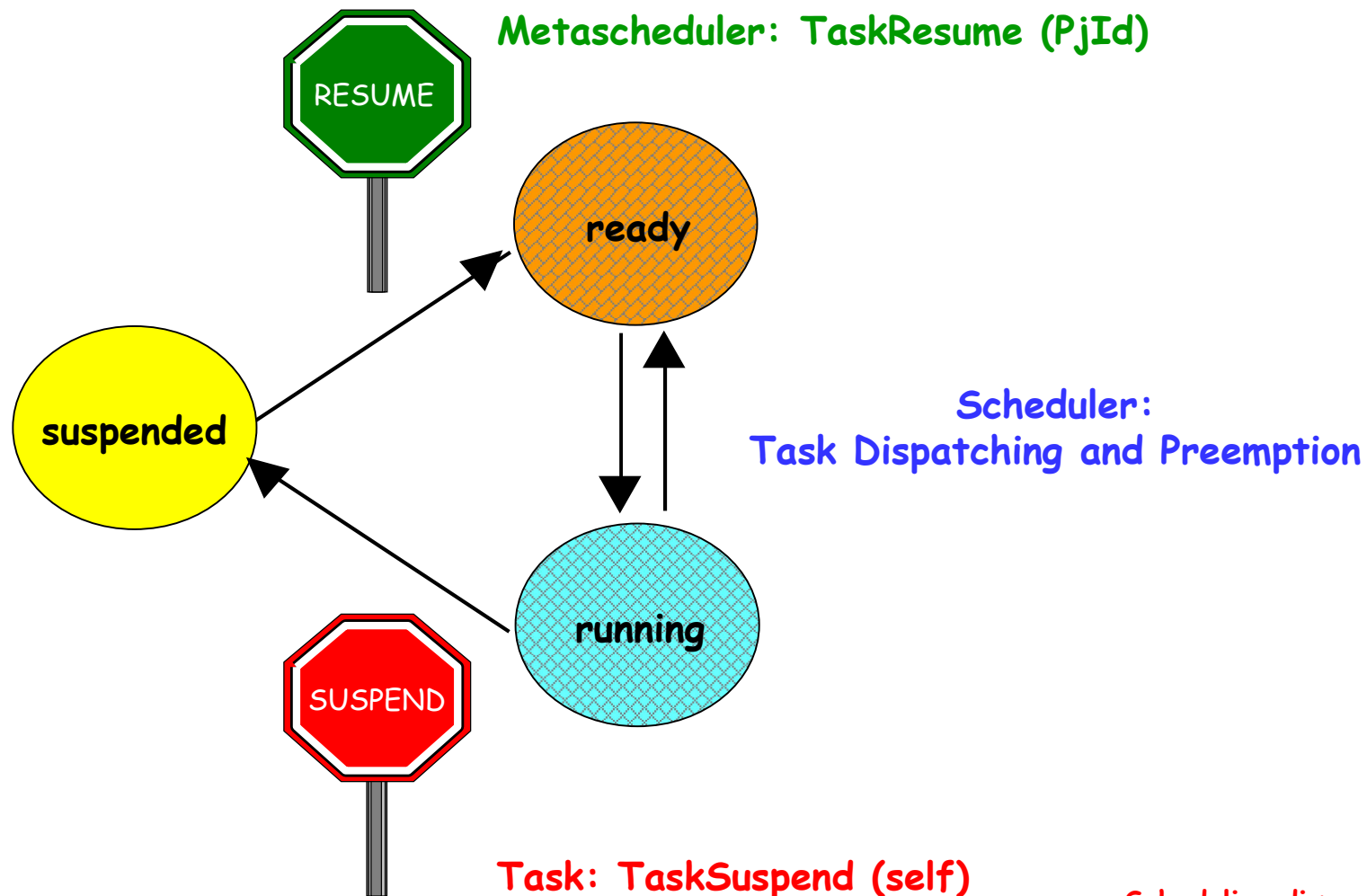
missed deadline



# GESTIONE DEI SOVRACCARICHI ...

Gli stati di un processo  
a livello di:

metascheduler	scheduler
idle	suspended
not_idle	ready / running



## ... GESTIONE DEI SOVRACCARICHI ...

```
private void Metascheduler (void)
{
    repeat for each Pj
    {
        if (PjState != idle)
        {
            PjExecutionTimer++;
            if (TaskIsSuspended (PjId))
            {
                ExecutionTimeLogHandler (Pj, PjExecutionTimer) /* min, max, average, ... */
                PjState = idle;
            }
        }
        else
        {
            if (PjExecutionTimer == PjCompletionTime) /* 💣 missed deadline */
            {
                PjMissedDeadlineCounter++;
                PjMissedDeadlineHandler; /* application dependent */
            }
        }
    }
}
...
```

# ... GESTIONE DEI SOVRACCARICHI ...


```

...
if ((--PjReleaseTimer) == 0)
{
    if (PjState == idle)
    {
        TaskResume (PjId);
        PjReleaseTimer = PjReleaseTime;
        PjExecutionTimer = 0;
        PjState = not_idle;
    }
    else /* 💣 overrun */
    {
        PjOverrunCounter++;
        if (PjOverrunHandlingPolicy == ASAP)
            PjReleaseTimer = 1; /* release next job As Soon As Possible */
        else PjReleaseTimer = PjReleaseTime; /* skip next job execution */
    }
}
}
}


```

MetaSchedulerReleaseTime	PjReleaseTime		
1	50	100	200
2	25	50	100
	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>

↑



risoluzione



## ... GESTIONE DEI SOVRACCARICHI

```
private void SystemTickHandler (void)
{
    if (--MetaschedulerReleaseTimer == 0)
    {
        if (TaskIsSuspended (MetaschedulerId))
            TaskResume (MetaschedulerId);
        else MetaschedulerOverrunCounter++;
        MetaschedulerReleaseTimer = MetaschedulerReleaseTime;
    }
}
```

# RMPO, DMPO: INIZIALIZZAZIONE

```
void MetaschedulerAndTasksInitialization (void)
{
    MetaschedulerReleaseTime /* [SystemTicks] */ = SystemTickRate /* [SystemTicks/s] */
                                                * MetaschedulerPeriod /* [μs] */
                                                / 1000000;

    repeat for each Pj
    {
        PjResetHandler ( );
        PjReleaseTime /* [MetaschedulerTicks] */ = PjPeriod /* [μs] */ / MetaschedulerPeriod;
        PjCompletionTime /* idem */ = PjDeadline /* [μs] */ / MetaschedulerPeriod;
        PjPriority = PriorityHandler (PjCompletionTime);
        PjId = TaskSpawn ('Pj', PjPriority, DefaultOptions, DefaultStackSize,
                          TaskShell, PjHandler);
        PjReleaseTimer = 1; PjState = idle; PjMissedDeadlineCounter = 0; PjOverrunCounter = 0;
        ExecutionTimeLogResetHandler (Pj); /* min, max, average, ... */
    }

    MetaschedulerId = TaskSpawn ('MetaScheduler', HighPriority, DefaultOptions,
                                DefaultStackSize, MetaschedulerShell, 0);
    MetaschedulerReleaseTimer = 1; MetaschedulerOverrunCounter = 0;

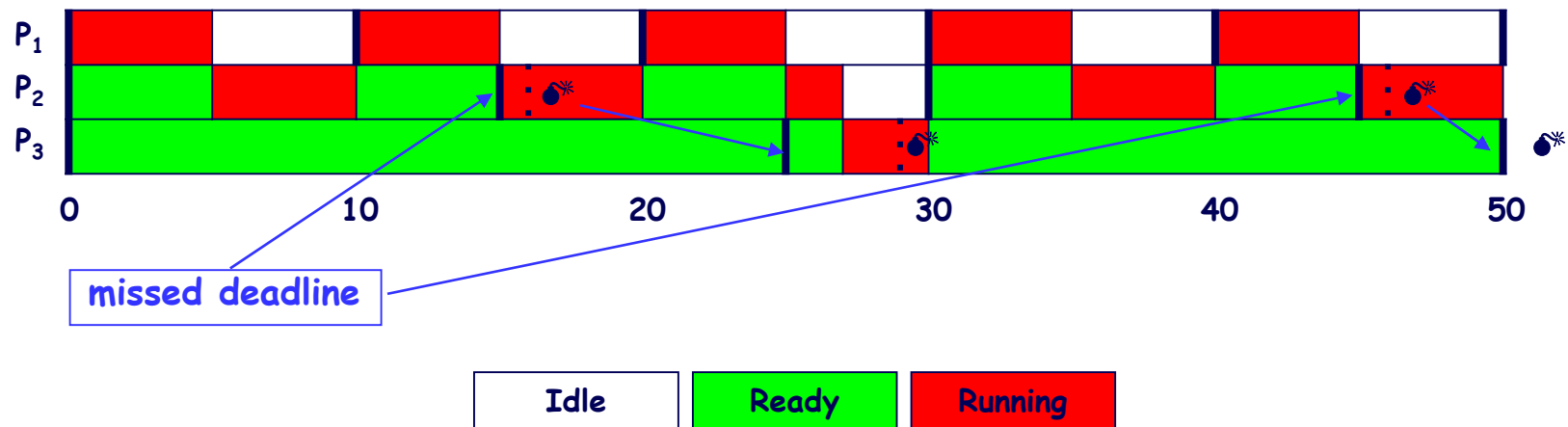
    SystemTickConnect (SystemTickHandler);
}
```

# RMPO: RISULTATI SPERIMENTALI ...

	C	T	C/T	p
P <sub>1</sub>	5	10	0.50	max
P <sub>2</sub>	6	15	0.40	
P <sub>3</sub>	2	25	0.08	min

$$U = 0.98$$

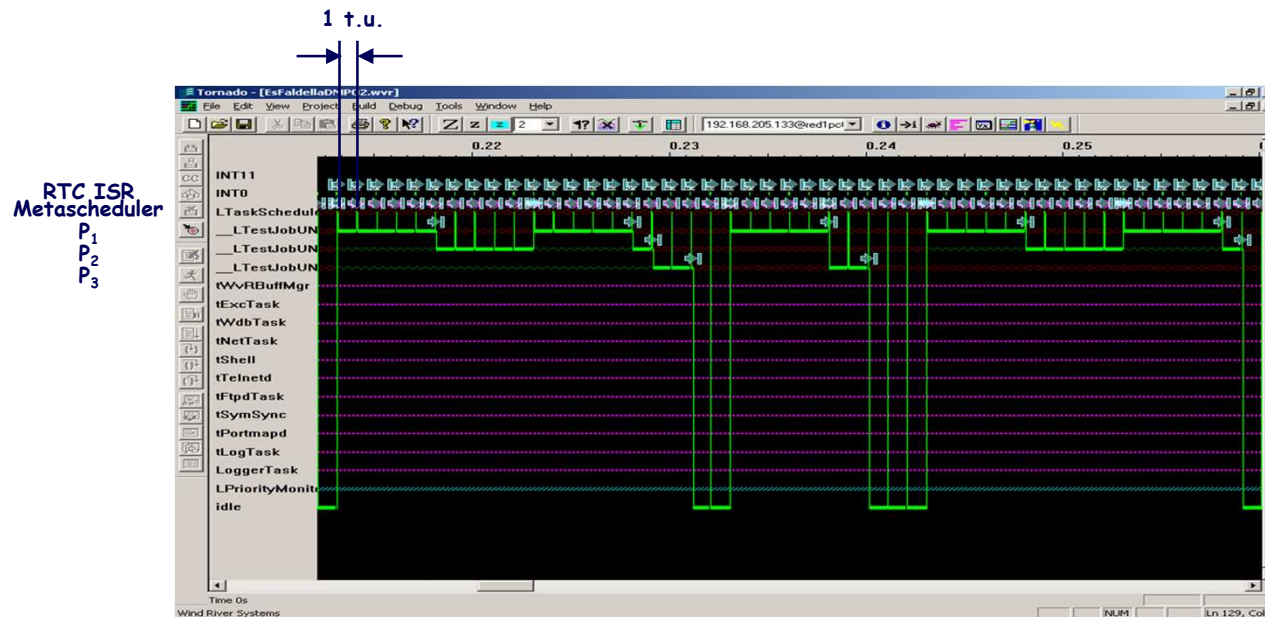
overrun handling policy: ASAP



"effetto domino" sui processi di priorità inferiore

# ... RMPO: RISULTATI SPERIMENTALI

overflow handling policy: SKIP



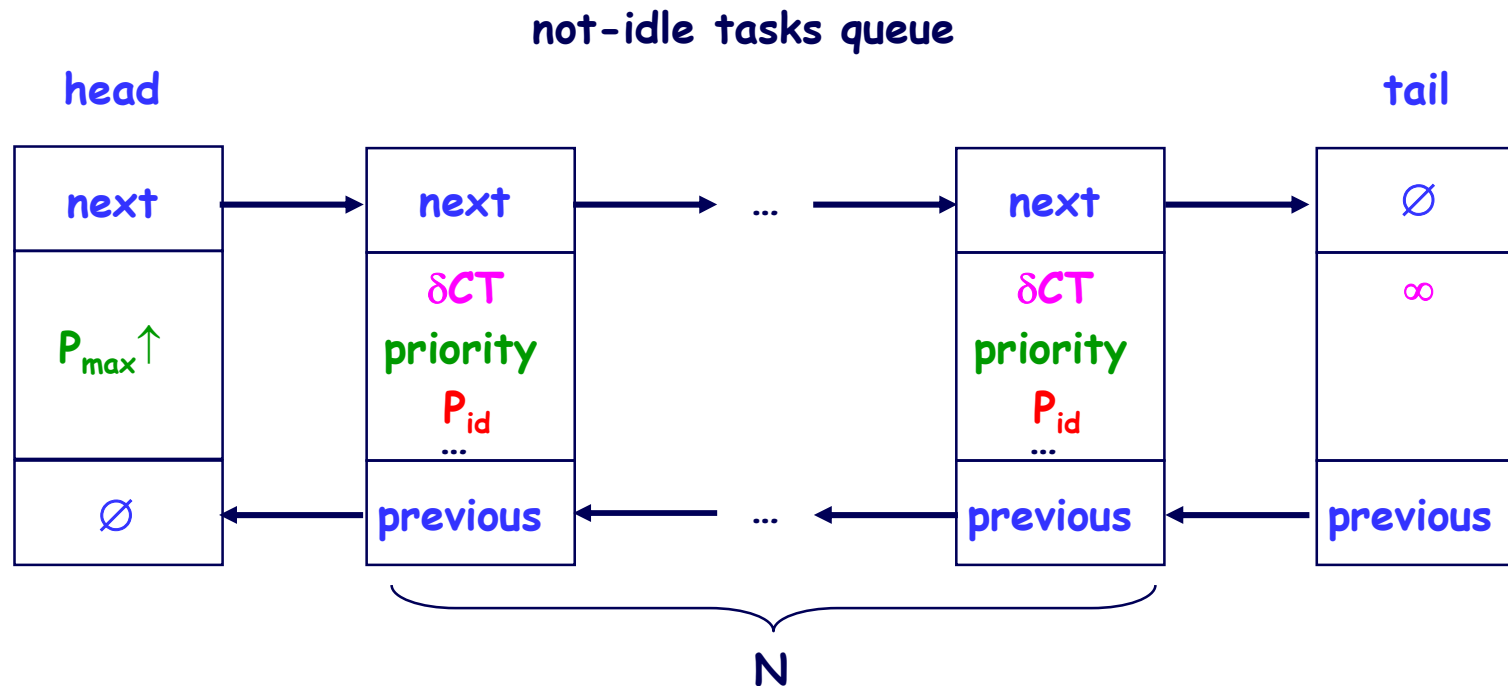
S.O.: VxWorks

Tool: WindView



# EDF: ASPETTI REALIZZATIVI

Gestione dinamica della priorità di ciascun processo  
in base alla corrispondente deadline assoluta



CT: Completion Time

$\delta$ CT: delta Completion Time

$$\delta CT(\text{next}(\text{head})) = CT(\text{next}(\text{head}))$$

$$\delta CT(j) = CT(j) - CT(\text{previous}(j)), j = \text{next}(\dots \text{next}(\text{head}))$$

inizializzazione:  $\text{next}(\text{head}) = \text{tail}$ ,  $\text{previous}(\text{tail}) = \text{head}$

# GESTIONE DINAMICA DELLE PRIORITA' ...

## Enqueue (j, CT(j))

```
 $\delta CT(j) = CT(j);$   
 $c = next(head);$   
while ( $\delta CT(j) \geq \delta CT(c)$ )  
{  
     $\delta CT(j) -= \delta CT(c);$   
     $c = next(c);$   
}  
if ( $c \neq tail$ )  $\delta CT(c) -= \delta CT(j);$   
 $p = previous(c);$   
 $next(p) = j;$   
 $next(j) = c;$   
 $previous(j) = p;$   
 $previous(c) = j;$   
UpdatePriorities (j);
```

## Dequeue (j)

```
 $p = previous(j);$   
 $c = next(j);$   
if ( $c \neq tail$ )  $\delta CT(c) += \delta CT(j);$   
 $next(p) = c;$   
 $previous(c) = p;$   
UpdatePriorities (c);
```

## UpdatePriorities (i)

```
while ( $i \neq tail$ )  
{  
     $priority(i) = \downarrow(priority(previous(i)));$   
    SetTaskPriority ( $P_{id}(i)$ ,  $priority(i)$ );  
     $i = next(i);$   
}
```

## ... GESTIONE DINAMICA DELLE PRIORITA'

```
private void Metascheduler (void)
{
    UpdateCompletionTimes ( );
    repeat for each Pj
    {
        idem
        Enqueue (Pj, PjCompletionTime);
        TaskResume (PjId);
        idem
    }
}
```



```
UpdateCompletionTimes ( )
c = next(head);
while ( $\delta CT(c) == 0$ )    c = next(c);
if (c != tail)  $\delta CT(c) --$ ;
```

```
private void TaskShell (void (* PjHandler) (void))
{
    while (true)
    {
        TaskSuspend (0);
        PjHandler ( );
        SetTaskPriority (0, MetaSchedulerPriority);
        Dequeue (Pj);
    }
}
```

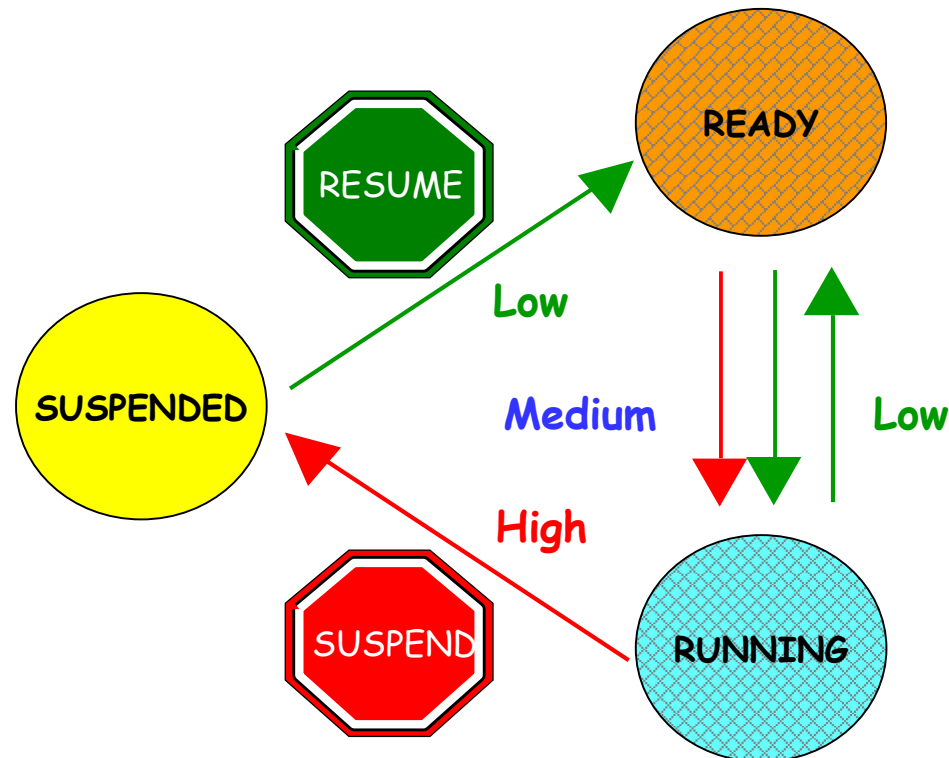
# UNA EFFICIENTE GESTIONE ALTERNATIVA ...

3 livelli di priorità (Low, Medium, High), condivisi da tutti i processi.

Medium: priorità di un processo allorché running, ovvero con deadline più imminente.

Low: priorità di un processo allorché pronto, ovvero con deadline meno imminente.

High: priorità (coincidente con quella del metascheduler) di un processo allorché, al termine di un job e prima di autosospendersi, promuove l'esecuzione del processo con deadline ora più imminente, modificandone la priorità da Low a Medium.

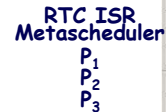


## ... UNA EFFICIENTE GESTIONE ALTERNATIVA

```
private void Metascheduler (void)
{
    UpdateCompletionTimes ( );
    r = next(head);
    repeat for each Pj
    {
        idem
        EnqueueOnly (Pj, PjCompletionTime);
        SetTaskPriority (PjId, Low);
        TaskResume (PjId);
        idem
    }
    if (next(head) != r)
    {
        if (r != tail) SetTaskPriority (Pid(r), Low);
        SetTaskPriority (Pid(next(head)), Medium);
    }
}
```

```
private void TaskShell (void (* PjHandler) (void))
{
    while (true)
    {
        TaskSuspend (0);
        PjHandler ( );
        SetTaskPriority (0, High);
        DequeueOnly (Pj);
        if (next(head) != tail)
            SetTaskPriority (Pid(next(head)), Medium);
    }
}
```

## EDF: RISULTATI SPERIMENTALI

$$U = 0.98$$


## Tool: WindView

## Scheduling di processi HRT 126