Ricerca Operativa M

I Esercitazione

Tutor: Alberto Locatelli

- albero.locatelli@unimore.it
- albero.locatelli3@unibo.it

Dipartimento di Informatica - Scienza e Ingegneria - Università di Bologna

Esercizio 1

Esercizio 1

Problema:
Un'azienda chimica produce due tipi di composto, A e B. Il profitto del composto A è il doppio di quello del composto B. Per motivi di mercato non si possono produrre più di 2 tonnellate di composto A. Ogni tonnellata di composto A o B contiene un quintale di sostanza base di cui sono disponibili 3 quintali. Ogni tonnellata di composto A richiede un quintale di sostanza chimica e ogni tonnellata di composto B richiede 2 quintali. In tutto sono disponibili 5 quintali di sostanza chimica.

Esercizio 1

1. Definire il modello LP che determina la produzione di massimo profitto.
2. Porre il modello in forma standard e risolverlo con l'algoritmo del simplesso e la regola di Bland (inserendo il minimo numero di variabili artificiali). Dire esplicitamente qual'è la soluzione trovata.
3. Disegnare con cura la regione ammissibile.

Soluzione

Variabili decisionali:

- x_1: quantità di composto A da produrre (espresso in tonnellate)
- x_2: quantità di composto B da produrre (espresso in tonnellate)

Vincoli:

- Non si possono produrre più di 2 tonnellate di composto A:

$$x_1 \leq 2$$

- Ogni tonnellata di composto A o B contiene un quintale di sostanza base di cui sono disponibili 3 quintali:

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

- Ogni tonnellata di composto A richiede un quintale di sostanza chimica e ogni tonnellata di composto B richiede 2 quintali. In tutto sono disponibili 5 quintali di sostanza chimica:

$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$

- Variabili non negative:

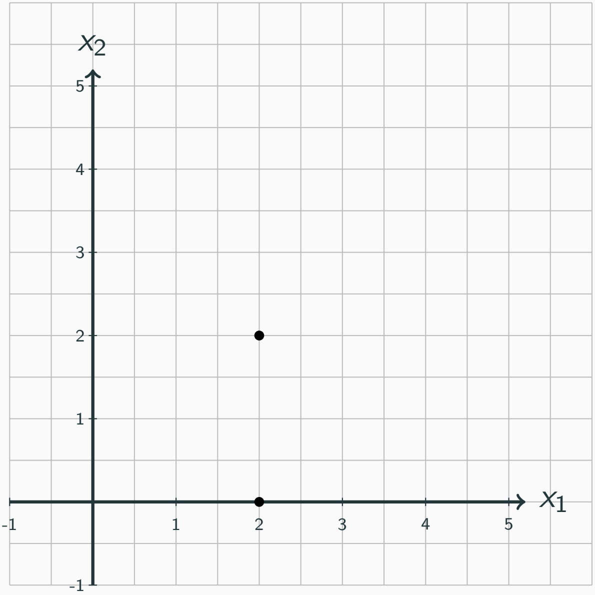
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Modello:

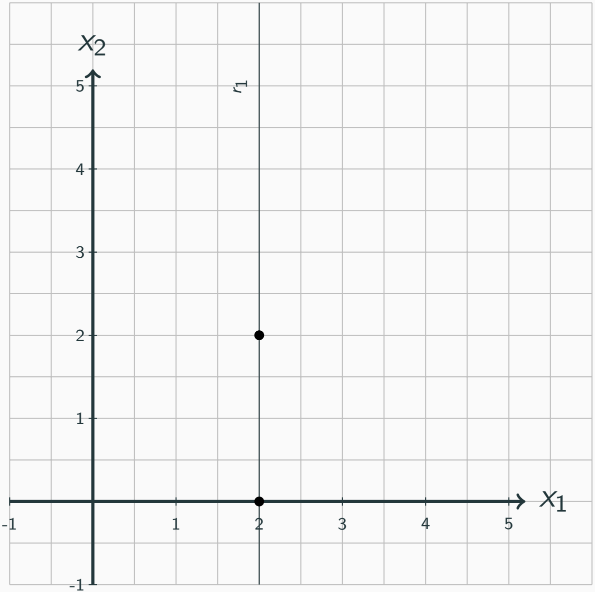
Il profitto del composto A è il doppio di quello del composto B.

$$\begin{aligned} \max z = \;& 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

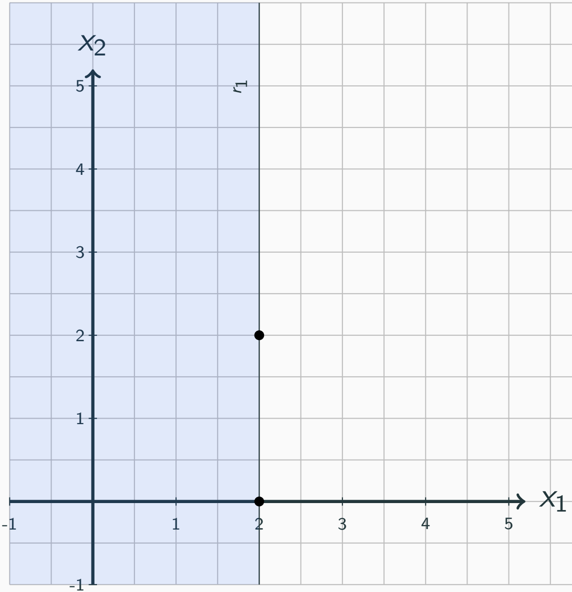
$r_1 : x_1 = 2;$



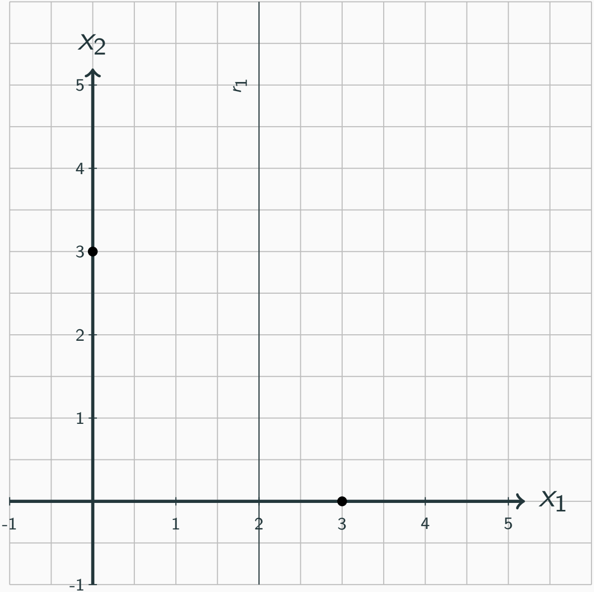
$r_1 : x_1 = 2;$



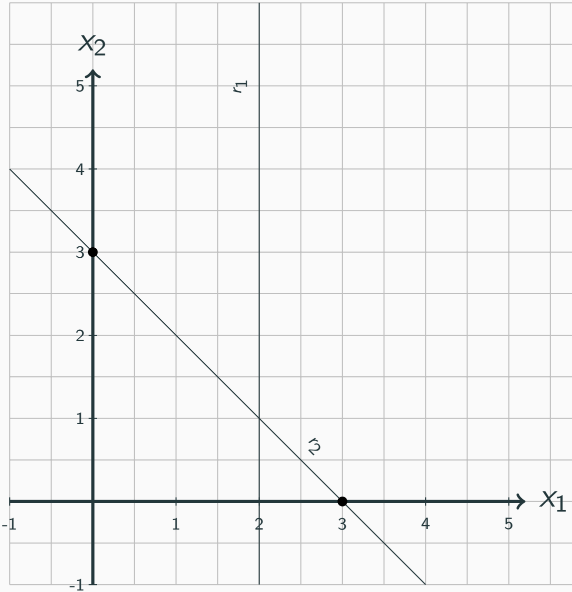
$x_1 \leq 2;$



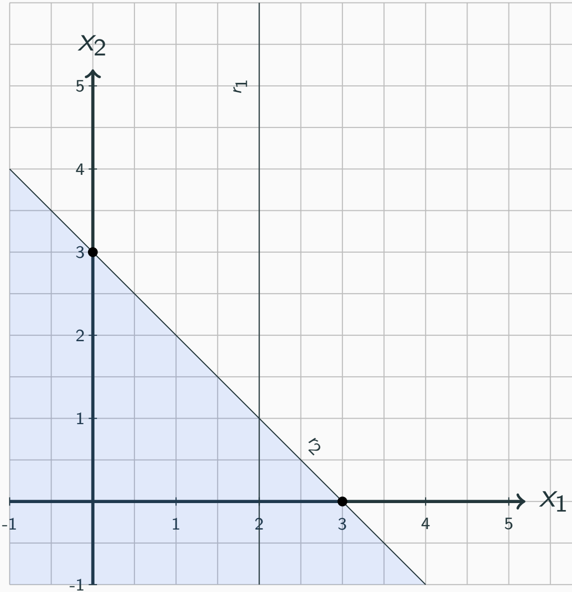
$r_2 : x_1 + x_2 = 3;$



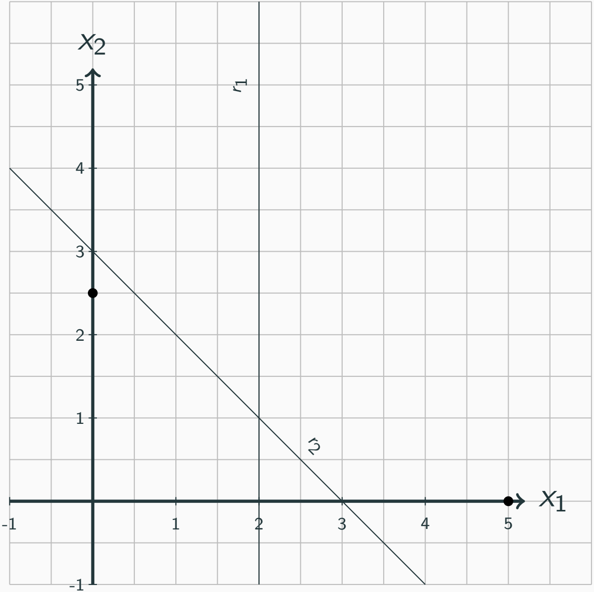
$r_2 : x_1 + x_2 = 3;$



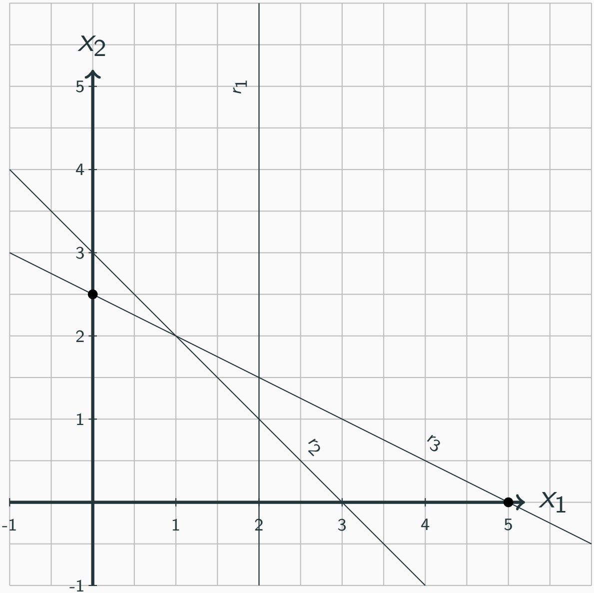
$x_1 + x_2 \leq 3;$



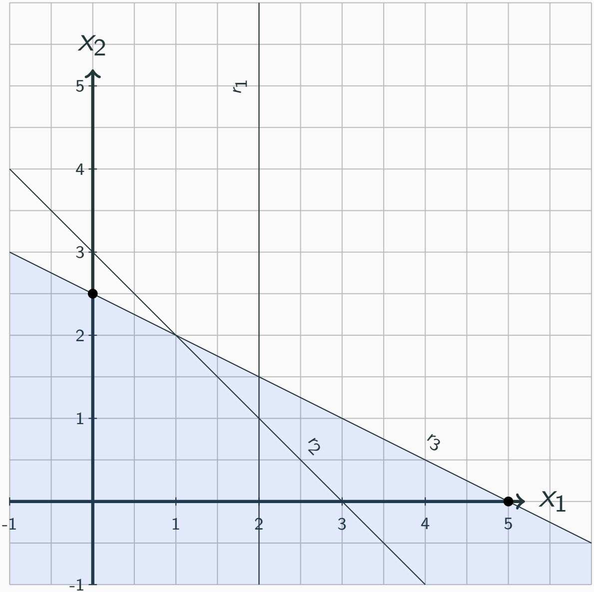
$r_3 : x_1 + 2x_2 = 5;$



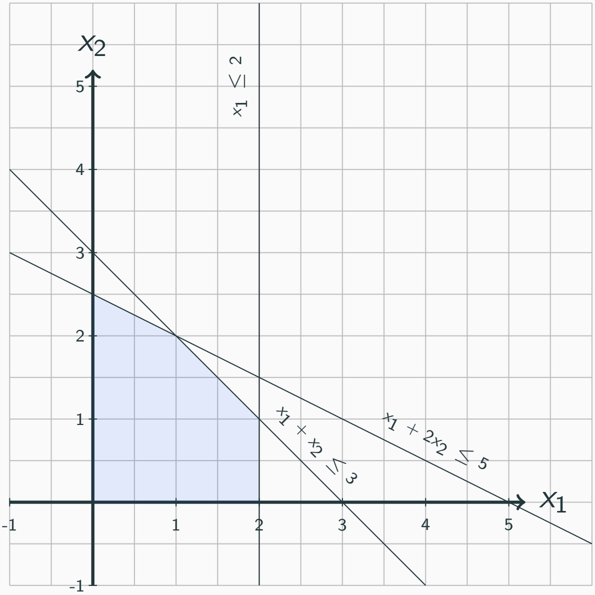
$r_3 : x_1 + 2x_2 = 5;$



$x_1 + 2x_2 \leq 5;$



Regione amissibile



Forma standard

$$
\begin{aligned}
\max z = \ & 2x_1 + x_2 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{lrrrrrrl}
\min z = & -2x_1 & - & x_2 & & & & \\
& x_1 & & & + x_3 & & & = 2 \\
& x_1 & + & x_2 & & + x_4 & & = 3 \\
& x_1 & + & 2x_2 & & & + x_5 & = 5 \\
& x_1 & , & x_2 & , x_3 & , x_4 & , x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

Tableau

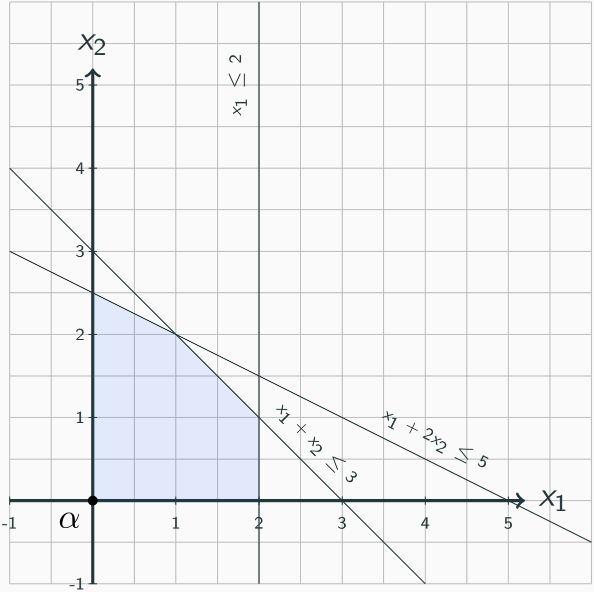
$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\min z = & -2x_1 - & x_2 & & & & \\
& x_1 & & + x_3 & & & = 2 \\
& x_1 + & x_2 & & + x_4 & & = 3 \\
& x_1 + & 2x_2 & & & + x_5 & = 5 \\
& x_1 \ , & x_2 \ , & x_3 \ , & x_4 \ , & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

Tableau corrispondente:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\hline
 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
x_3 = & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 = & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 = & 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

La base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\}$ induce immediatamente la soluzione di base ammissibile di partenza $x = (0, 0, 2, 3, 5)$.

Soluzione iniziale: $\alpha = (0, 0)$



Regola di Bland

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\cline{2-7}
 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{2-7}
x_3 = & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 = & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 = & 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

19 Entra in base la colonna di indice $j = 1$ essendo quella di indice minimo fra quelle con costo relativo negativo.
Calcoliamo l'indice della colonna che esce dalla base:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i1}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \min\{\frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{5}{1}\}$$

da cui si ottiene $i = 1$.

La colonna A_1 entra in base e A_3 esce dalla base. La nuova base è $\mathcal{B} = \{A_1, A_4, A_5\}$ con pivot l'elemento $y_{11} = 1$.

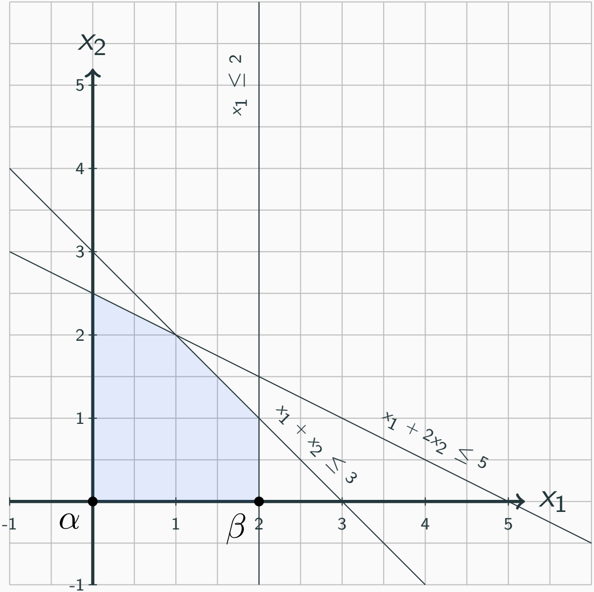
$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\cline{2-7}
 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{2-7}
x_3 = & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 = & 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 = & 5 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

Si ottiene:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\cline{2-7}
 & 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\
\cline{2-7}
x_1 = & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 = & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
x_5 = & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

La nuova base $\mathcal{B} = \{A_1, A_4, A_5\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (2, 0, 0, 1, 3)$.

Soluzione corrente: $\beta = (2, 0)$



Regola di Bland

$$\begin{array}{r|c|ccccc|}
\cline{2-7}
 & 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\
\cline{2-7}
x_1 = & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 = & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
x_5 = & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}$$

Il costo relativo $\bar{c}_2 = -1$ è l'unico costo relativo negativo e dunque la variabile che entrerà in base avrà indice $j = 2$.

Calcoliamo l'indice della colonna che esce dalla base:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i: y_{i2} > 0} \frac{y_{i0}}{y_{i2}} = \min\{\frac{1}{1}, \frac{3}{2}\}$$

da cui si ottiene $i = 2$.

La colonna A_2 entra in base e A_4 esce dalla base. La nuova base è $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_5\}$ e con pivot l'elemento $y_{22} = 1$.

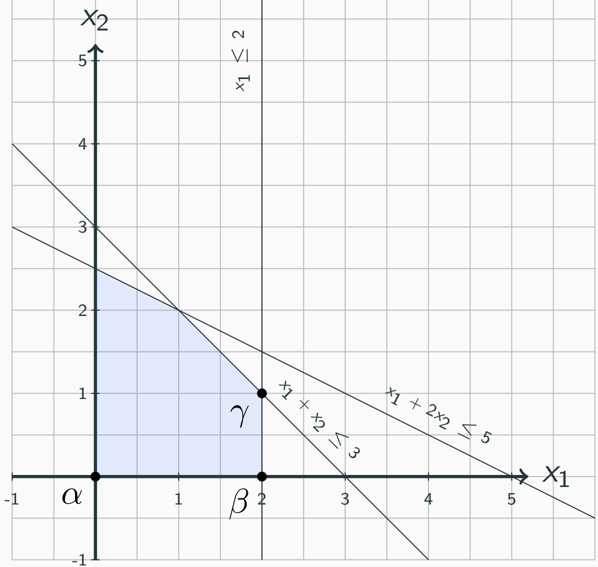
$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\hline
 & 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\
\hline
x_1 = & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 = & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
x_5 = & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Si ottiene:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\hline
 & 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
x_1 = & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_2 = & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
x_5 = & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

La nuova base $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_5\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (2, 1, 0, 0, 1)$.

Soluzione corrente: $\gamma = (2, 1)$



Soluzione ottima

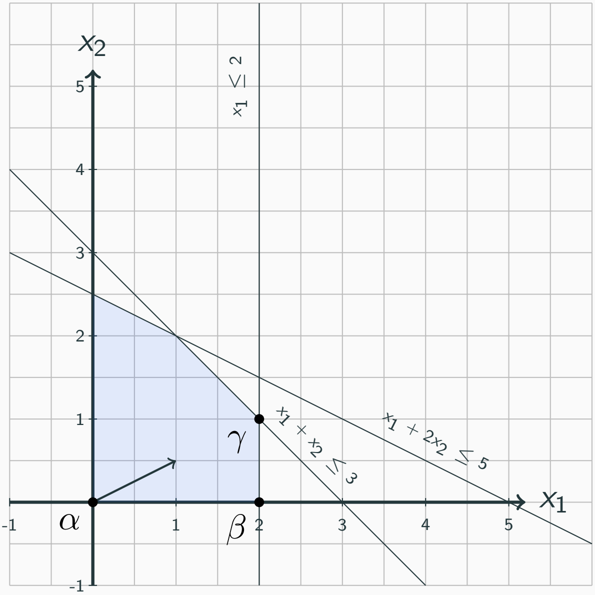
$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\hline
 & 5 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
x_1 = & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_2 = & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
x_5 = & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Per il Teorema 4.2 (Criterio di ottimalità), essendo $\bar{c}_j \geq 0 \ \forall j$ allora la soluzione di base ammissibile $x = (2, 1, 0, 0, 1)$ è ottima.
La soluzione ottima consiste dunque nel produrre:

- 2 tonnellate di composto A;
- 1 tonnellata del composto B;

ottenendo un profitto pari a 5 volte il profitto di una tonnellata del composto B.

Regione amissibile



Esercizio 2

Esercizio 2

Problema:
Un'azienda produce due tipi di prodotto, X e Y. Il profitto dato da una tonnellata del prodotto Y è il doppio di quello dato da una tonnellata del prodotto X. La produzione di una tonnellata di X o Y richiede 2 ore di utilizzo di un impianto che può essere utilizzato per un massimo di 9 ore al giorno. Per motivi di mercato non si possono produrre più di 2 tonnellate di composto Y al giorno. Infine, la produzione giornaliera del prodotto X non può superare quella del tipo Y di più di una tonnellata.

Esercizio 2

1. Definire il modello LP che determina la produzione di massimo profitto.
2. Risolvere il modello con l'algoritmo del simplesso facendo pivoting sulla variabile avente costo relativo minore. Dire esplicitamente qual'è la soluzione trovata.
3. Disegnare con cura la regione ammissibile.

Soluzione

Variabili decisionali:

- x_1: quantità di prodotto X da produrre (espresso in tonnellate)
- x_2: quantità di prodotto Y da produrre (espresso in tonnellate)

Vincoli:

- La produzione di una tonnellata di X o Y richiede 2 ore di utilizzo di un impianto che può essere utilizzato per un massimo di 9 ore al giorno:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 9$$

- Non si possono produrre più di 2 tonnellate di composto Y al giorno:

$$x_2 \leq 2$$

- La produzione giornaliera del prodotto X non può superare quella del tipo Y di più di una tonnellata:

$$x_1 \leq x_2 + 1$$

- Variabili non negative:

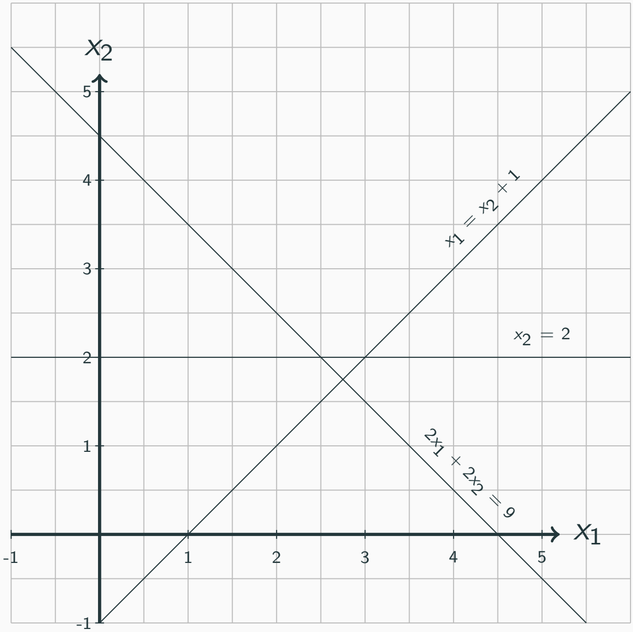
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Modello:

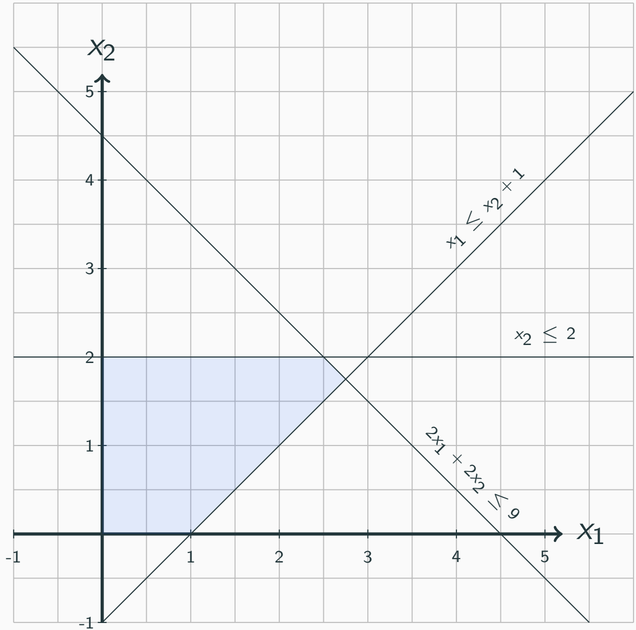
Il profitto dato da una tonnellata del prodotto Y è il doppio di quello dato da una tonnellata del prodotto X.

$$\begin{aligned} \max z = \ & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1 \leq x_2 + 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Regione Ammissibile



Regione Ammissibile



Forma standard

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & x_1 + 2x_2 \\
& 2x_1 + 2x_2 \leq 9 \\
& x_2 \leq 2 \\
& x_1 \leq x_2 + 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
\min z = & -x_1 & - & 2x_2 & & & & & & & & \\
& 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 9 \\
& & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 2 \\
& x_1 & - & x_2 & & & & & + & x_5 & = & 1 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Tableau

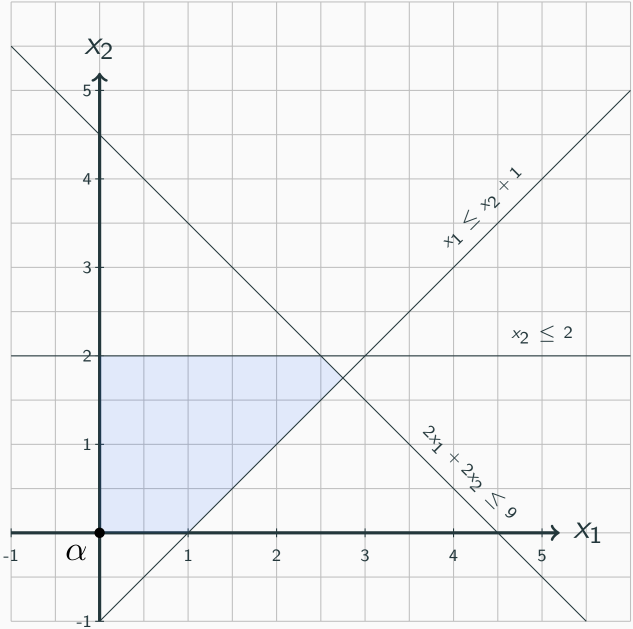
$$
\begin{aligned}
\min z = \quad & -x_1 - 2x_2 \\
& 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\
& x_2 + x_4 = 2 \\
& x_1 - x_2 + x_5 = 1 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}
$$

Tableau corrispondente:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\hline
 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
x_3 = & 9 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 = & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

La base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\}$ induce immediatamente la soluzione di base ammissibile di partenza $x = (0, 0, 9, 2, 1)$.

Soluzione iniziale: $\alpha = (0, 0)$



$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\hline
 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
x_3 = & 9 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 = & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Facciamo, come richiesto, pivoting sulla variabile avente costo relativo minore.

Entra in base la colonna di indice $j = 2$ essendo quella con costo relativo minore.

Calcoliamo l'indice della colonna che esce dalla base:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i2}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i2}} = \min\{\frac{9}{2}, \frac{2}{1}\}$$

da cui si ottiene $i = 2$.

La colonna A_2 entra in base e A_4 esce dalla base. La nuova base è $\mathcal{B} = \{A_3, A_2, A_5\}$ con pivot l'elemento $y_{22} = 1$.

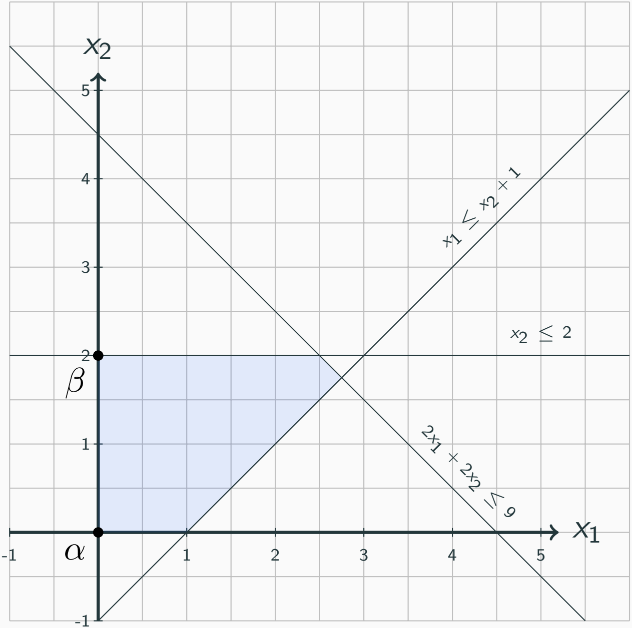
$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\hline
 & 0 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
x_3 = & 9 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 = & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Si ottiene:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\hline
 & 4 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
\hline
x_3 = & 5 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
x_2 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 = & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

La nuova base $\mathcal{B} = \{A_3, A_2, A_5\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (0, 2, 5, 0, 3)$.

Soluzione corrente: $\beta = (0, 2)$



$$
\begin{array}{r|c|cccccc|}
\hline
 & 4 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
\hline
x_3 = & 5 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
x_2 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 = & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Il costo relativo $\bar{c}_1 = -1$ è l'unico costo relativo negativo e dunque la variabile che entrerà in base avrà indice $j = 1$.

Calcoliamo l'indice della colonna che esce dalla base:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i: y_{i1} > 0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \min\{\frac{5}{2}, \frac{3}{1}\}$$

da cui si ottiene $i = 1$.

La colonna A_1 entra in base e A_3 esce dalla base. La nuova base è $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_5\}$ e con pivot l'elemento $y_{11} = 2$.

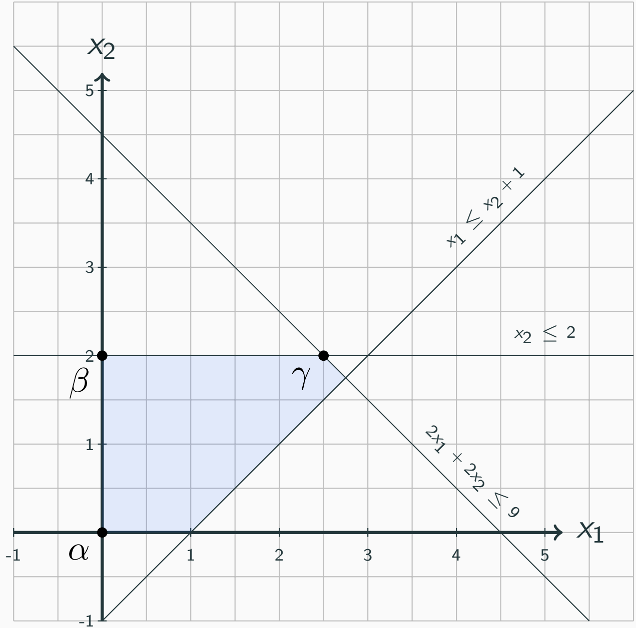
$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\cline{2-7}
 & 4 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
\cline{2-7}
x_3 = & 5 & 2 & 0 & 1 & -2 & 0 \\
x_2 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 = & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

Si ottiene:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\cline{2-7}
 & \frac{13}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\
\cline{2-7}
x_1 = & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\
x_2 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 = & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

La nuova base $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_5\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (\frac{5}{2}, 2, 0, 0, \frac{1}{2})$.

Soluzione corrente: $\gamma = (\frac{5}{2}, 2)$



Soluzione ottima

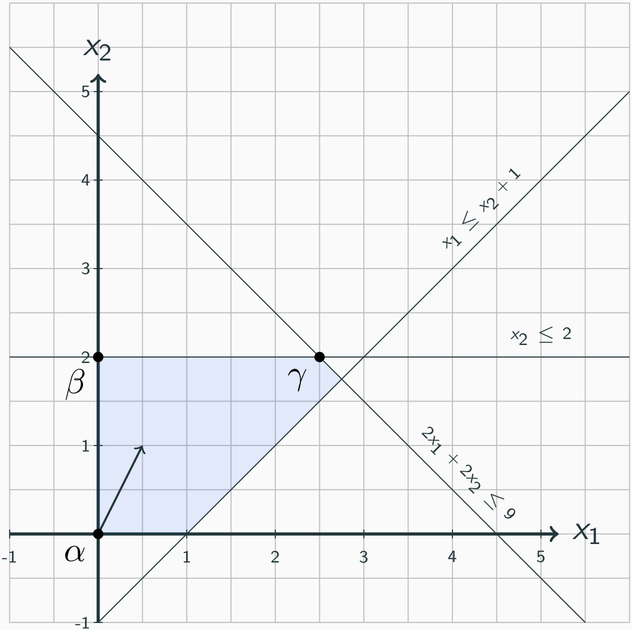
$$
\begin{array}{r|c|cccccc|}
\hline
 & \frac{13}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\
\hline
x_1 = & \frac{5}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 0 \\
x_2 = & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 = & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Per il Teorema 4.2 (Criterio di ottimalità), essendo $\bar{c}_j \geq 0 \ \forall j$ allora la soluzione attuale $x = (\frac{5}{2}, 2, 0, 0, \frac{1}{2})$ è ottima.
La soluzione ottima consiste dunque nel produrre:

- 2,5 tonnellate del prodotto X;
- 2 tonnellata del prodotto Y;

ottenendo un profitto pari a $\frac{13}{2}$ volte il profitto di una tonnellata del prodotto X.

Regione Ammissibile



Esercizio 3

Esercizio 3

Problema:
Un'azienda produce lotti di 2 composti 1 e 2 usando due tipi di sostanze chimiche, A e B. Ogni lotto di 1 richiede 3 tonnellate di A e 3 tonnellate di B. Ogni lotto di 2 richiede 6 tonnellate di A e 3 tonnellate di B. Per motivi di mercato non si possono produrre più di 3 lotti di 1. Non è possibile inoltre utilizzare più di 12 tonnellate della sostanza A e più di 9 tonnellate della sostanza B. Infine, ogni lotto di 1 dà un profitto pari a 12 000 € e ogni lotto di 2 dà un profitto pari a 15 000 €.

Esercizio 3

1. Definire il modello LP che determina la produzione di massimo profitto (espresso in migliaia di euro).
2. Porre il modello in forma standard e risolverlo con l'algoritmo del simplesso e la regola di Bland (inserendo il minimo numero di variabili artificiali). Dire esplicitamente qual'è la soluzione trovata.
3. Disegnare con cura la regione ammissibile.

Soluzione

Variabili decisionali:

- x_1: numero di lotti di 1 da produrre
- x_2: numero di lotti di 2 da produrre

Vincoli:

Ogni lotto di 1 richiede 3 tonnellate di A e 3 tonnellate di B. Ogni lotto di 2 richiede 6 tonnellate di A e 3 tonnellate di B.

- Non è possibile utilizzare più di 12 tonnellate della sostanza A:

$$3x_1 + 6x_2 \leq 12$$

- Non è possibile utilizzare più di 9 tonnellate della sostanza B:

$$3x_1 + 3x_2 \leq 9$$

- Non si possono produrre più di 3 lotti di 1:

$$x_1 \leq 3$$

- Variabili non negative:

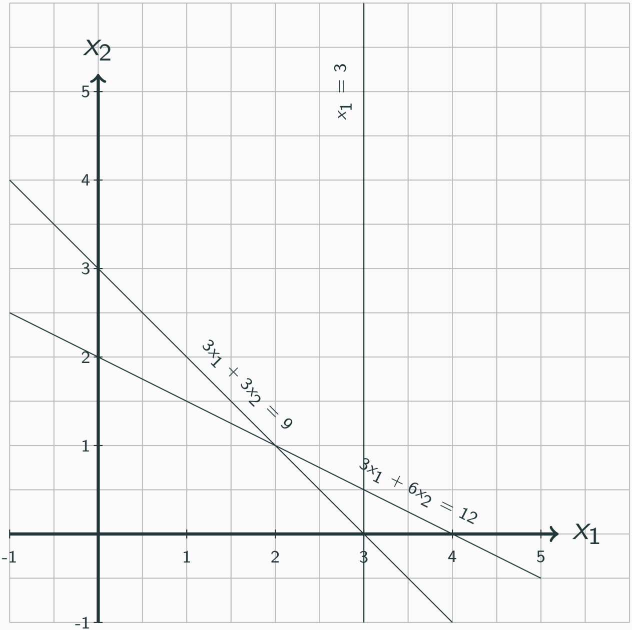
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Modello:

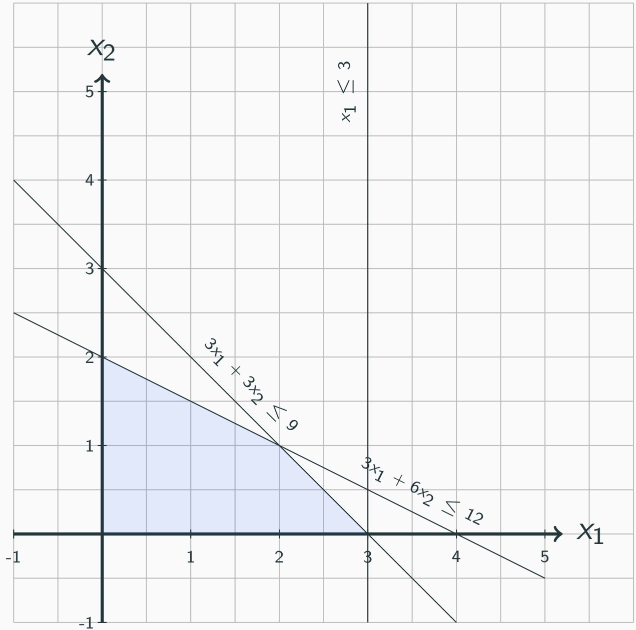
Ogni lotto di 1 dà un profitto pari a 12 000 €e ogni lotto di 2 dà un profitto pari a 15 000 €.

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 12x_1 + 15x_2 \\
& 3x_1 + 6x_2 \leq 12 \\
& 3x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Regione Ammissibile



Regione Ammissibile



Forma standard

$$
\begin{aligned}
\max z = \;& 12x_1 + 15x_2 \\
& 3x_1 + 6x_2 \leq 12 \\
& 3x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & -12x_1 - 15x_2 & & & & & & \\
& 3x_1 + & 6x_2 + & x_3 & & & = & 12 \\
& 3x_1 + & 3x_2 & & + x_4 & & = & 9 \\
& x_1 & & & & + x_5 & = & 3 \\
& x_1 \;, & x_2 \;, & x_3 \;, & x_4 \;, & x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Tableau

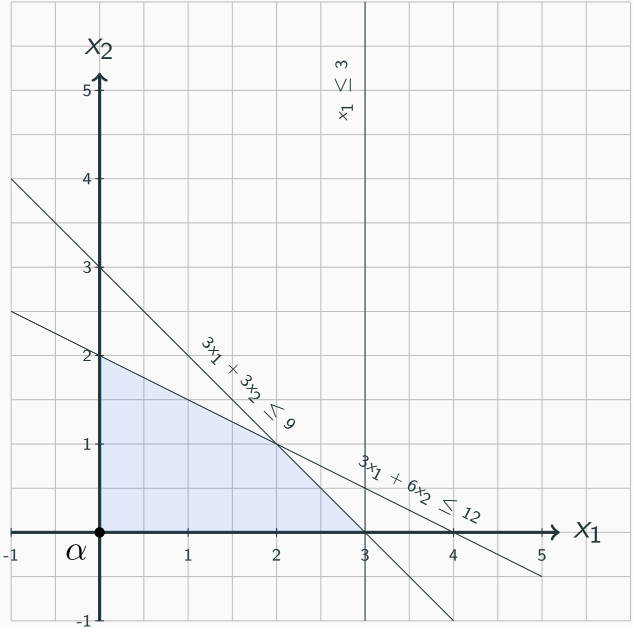
$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\min & -12x_1 & -\ 15x_2 & & & & \\
 & 3x_1\ + & 6x_2\ + & x_3 & & & = 12 \\
 & 3x_1\ + & 3x_2 & & +\ x_4 & & = \ \ 9 \\
 & x_1 & & & & +\ x_5 & = \ \ 3 \\
 & x_1\ \ , & x_2\ \ , & x_3\ \ , & x_4\ \ , & x_5 & \geq \ \ 0
\end{array}
$$

Tableau corrispondente:

	0	−12	−15	0	0	0
$x_3 =$	12	3	6	1	0	0
$x_4 =$	9	3	3	0	1	0
$x_5 =$	3	1	0	0	0	1

La base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\}$ induce immediatamente la soluzione di base ammissibile di partenza $x = (0, 0, 12, 9, 3)$.

Soluzione iniziale: $\alpha = (0, 0)$



Regola di Bland

$$
\begin{array}{r|c|cccccc|}
\cline{2-7}
 & 0 & -12 & -15 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{2-7}
x_3 = & 12 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 = & 9 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 = & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

Entra in base la colonna di indice $j = 1$ essendo quella di indice minimo fra quelle con costo relativo negativo.
Calcoliamo l'indice della colonna che esce dalla base:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i1}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \min\{\frac{12}{3}, \frac{9}{3}, \frac{3}{1}\}$$

da cui si ottiene $i = 2$.

La colonna A_1 entra in base e A_4 esce dalla base. La nuova base è $\mathcal{B} = \{A_3, A_1, A_5\}$ con pivot l'elemento $y_{21} = 3$.

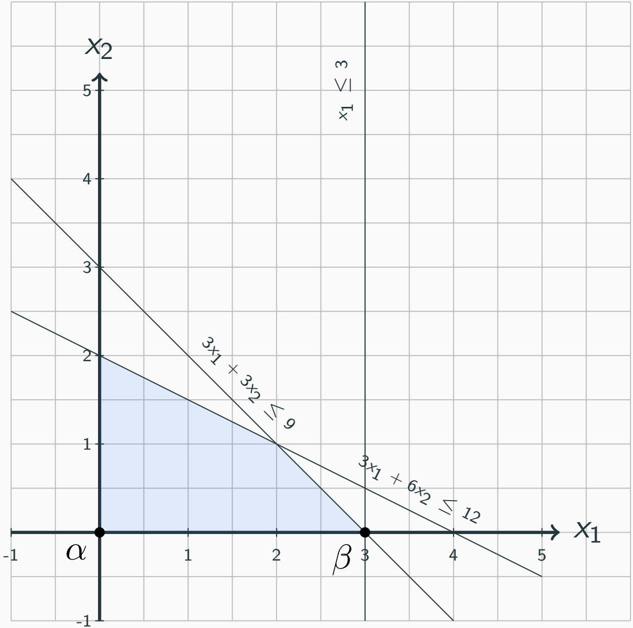
$$
\begin{array}{r|c|cccccc|}
\cline{2-7}
 & 0 & -12 & -15 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{2-7}
x_3 = & 12 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\
x_4 = & 9 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
x_5 = & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

Si ottiene:

$$
\begin{array}{r|c|cccccc|}
\cline{2-7}
 & 36 & 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\
\cline{2-7}
x_3 = & 3 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\
x_1 = & 3 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
x_5 = & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

La nuova base $\mathcal{B} = \{A_3, A_1, A_5\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (3, 0, 3, 0, 0)$.

Soluzione corrente: $\beta = (3, 0)$



Regola di Bland

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\hline
 & 36 & 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\
\hline
x_3 = & 3 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\
x_1 = & 3 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
x_5 = & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Il costo relativo $\bar{c}_2 = -3$ è l'unico costo relativo negativo e dunque la variabile che entrerà in base avrà indice $j = 2$.
Calcoliamo l'indice della colonna che esce dalla base:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i2}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i2}} = \min\{\frac{3}{3}, \frac{3}{1}\}$$

da cui si ottiene $i = 1$.

La colonna A_2 entra in base e A_3 esce dalla base. La nuova base è $\mathcal{B} = \{A_2, A_1, A_5\}$ e con pivot l'elemento $y_{12} = 3$.

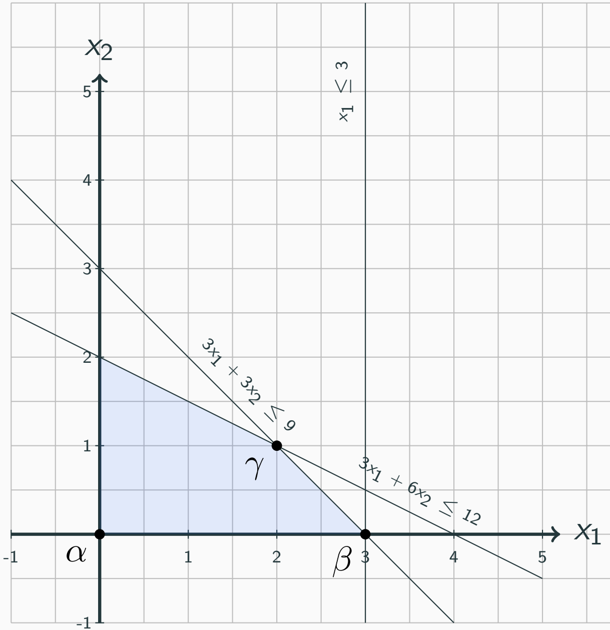
$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\hline
 & 36 & 0 & -3 & 0 & 4 & 0 \\
\hline
x_3 = & 3 & 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\
x_1 = & 3 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\
x_5 = & 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Si ottiene:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\hline
 & 39 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\
\hline
x_2 = & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\
x_1 = & 2 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\
x_5 = & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

La nuova base $\mathcal{B} = \{A_2, A_1, A_5\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (2, 1, 0, 0, 1)$.

Soluzione corrente: $\gamma = (2, 1)$



Soluzione ottima

$$
\begin{array}{r|c|cccccc|}
\hline
 & 39 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\
\hline
x_2 = & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\
x_1 = & 2 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\
x_5 = & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Per il Teorema 4.2 (Criterio di ottimalità), essendo $\bar{c}_j \geq 0 \ \forall j$ allora la soluzione di base ammissibile $x = (2, 1, 0, 0, 1)$ è ottima.
La soluzione ottima consiste dunque nel produrre:

- 2 lotti di composto 1;
- 1 lotto di composto 2;

ottenendo un profitto pari a 39 000 €.

Regione Ammissibile