Ricerca Operativa M

II Esercitazione

Tutor: Alberto Locatelli

Dipartimento di Informatica - Scienza e Ingegneria - Università di Bologna

Esercizio 1 Parte II

Esercizio 1 Parte II

4. Se l'azienda acquisisse e rendesse disponibile per la produzione un ulteriore quintale di sostanza base, la base calcolata nella Parte I sarebbe ancora ottima? Se lo fosse, quale sarebbe la nuova soluzione ottima e il nuovo profitto? A quale condizione questa scelta sarebbe globalmente conveniente per l'azienda?
5. Se l'azienda acquisisse e rendesse disponibile per la produzione un ulteriore quintale di sostanza chimica, la base calcolata nella Parte I sarebbe ancora ottima? Se lo fosse, quale sarebbe la nuova soluzione ottima e il nuovo profitto? A quale condizione questa scelta sarebbe globalmente conveniente per l'azienda?
6. Si supponga che, per cambiamenti del mercato, si possono produrre fino a 3 tonnellate di composto A. Stabilire se la base ottima calcolata (Parte I) rimane ottima ed eventualmente scrivere esplicitamente: la nuova soluzione, il relativo profitto e il prezzo ombra.

Tableau iniziale e finale calcolati (Parte I):

0	−2	−1	0	0	0
2	1	0	1	0	0
3	1	1	0	1	0
5	1	2	0	0	1

	5	0	0	1	1	0
$x_1 =$	2	1	0	1	0	0
$x_2 =$	1	0	1	−1	1	0
$x_5 =$	1	0	0	1	−2	1

Quindi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dove: } Y = B^{-1}A$$

Soluzione

Modello:

Per la produzione è disponibile un ulteriore quintale di sostanza base.

$$\begin{aligned} \max z = \quad & 2x_1 + x_2 \\ & x_1 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq \cancel{3}\ 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \widehat{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ricordando che la base ottima è $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_5\}$, i valori delle variabili base sono dati da:

$$x_\beta = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

I nuovi valori delle variabili base sono dati da:

$$\widehat{x}_\beta = B^{-1}\widehat{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \geq 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

La base ottima calcolata (Parte I) non è più ottima.

Soluzione

Modello:
Per la produzione è disponibile un ulteriore quintale di sostanza chimica.

$$
\begin{aligned}
\max z = \;& 2x_1 + x_2 \\
& x_1 \leq 2 \\
& x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_1 + 2x_2 \leq \cancel{5}\ 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \widehat{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}
$$

Ricordando che la base ottima è $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_5\}$, i nuovi valori delle variabili base sono dati da:

$$\widehat{x}_\beta = B^{-1}\widehat{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

La base ottima calcolata (Parte I) rimane ottima.
La nuova soluzione ottima è $\widehat{x} = (2, 1, 0, 0, 2)$.
La soluzione ottima consiste dunque nel produrre:

- 2 tonnellate di composto A;
- 1 tonnellata del composto B;

ottenendo un profitto pari a 5 volte il profitto di una tonnellata del composto B.
La nuova soluzione dà lo stesso profitto di quella calcolata in Parte I.
Già nella soluzione ottima calcolata in Parte I $x = (2, 1, 0, 0, 1)$, la risorsa relativa al terzo vincolo non veniva utilizzata interamente (la variabile di slack $x_5 = 1$).

Tableau iniziale e finale calcolati (Parte I):

0	-2	-1	0	0	0
2	1	0	1	0	0
3	1	1	0	1	0
5	1	2	0	0	1

	5	0	0	1	1	0
$x_1 =$	2	1	0	1	0	0
$x_2 =$	1	0	1	-1	1	0
$x_5 =$	1	0	0	1	-2	1

La soluzione ottima duale ha valore: $\pi_j = c_j - \bar{c}_j$, calcolati in corrispondenza della base iniziale $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\}$.
Dunque:

$$\pi_1 = 0 - 1 = -1, \qquad \pi_2 = 0 - 1 = -1, \qquad , \pi_3 = 0 - 0 = 0.$$

Per la Proprietà 5.2, il valore ottimo della variabile duale π_3 fornisce il prezzo ombra della risorsa associata al terzo vincolo.
Il prezzo ombra ha valore π_3 ovvero 0.
Il profitto complessivo risultante sarebbe di 5 volte il profitto di una tonnellata del composto B, come prevedibile visto che il prezzo ombra del terzo vincolo è 0.
La decisione non sarebbe globalmente conveniente.

Soluzione

Modello:
Si possono produrre fino a 3 tonnellate di composto A

$$
\begin{aligned}
\max z = \; & 2x_1 + x_2 \\
& x_1 \leq \cancel{2}\ 3 \\
& x_1 + x_2 \leq 3 \\
& x_1 + 2x_2 \leq 5 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \widehat{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

Ricordando che la base ottima è $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, A_5\}$, i nuovi valori delle variabili base sono dati da:

$$\widehat{x}_\beta = B^{-1}\widehat{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

La base ottima calcolata (Parte I) rimane ottima.
La nuova soluzione ottima è $\widehat{x} = (3, 0, 0, 0, 2)$.
La soluzione ottima consiste dunque nel produrre:

- 3 tonnellate di composto A;
- 0 tonnellata del composto B;

ottenendo un profitto pari a 6 volte il profitto di una tonnellata del composto B.
La soluzione ottima duale è:

$$\pi_1 = 0 - 1 = -1, \quad \pi_2 = 0 - 1 = -1, \quad , \pi_3 = 0 - 0 = 0.$$

Per la Proprietà 5.2, il valore ottimo della variabile duale π_1 fornisce il prezzo ombra della risorsa associata al primo vincolo.
Il prezzo ombra ha valore π_1 ovvero -1.
Il profitto complessivo risultante sarebbe di 6 volte il profitto di una tonnellata del composto B, come prevedibile visto che il prezzo ombra del primo vincolo è -1 ed il termine noto sarebbe aumentato di 1 unità.
Se la produzione di una tonnellata di composto A avesse un costo inferiore al profitto dato dalla vendita di una tonnellata del composto B la decisione sarebbe globalmente conveniente.

Esercizio 3 Parte II

Esercizio 3 Parte II

4. Se l'azienda acquisisse e rendesse disponibile per la produzione un ulteriore quintale di sostanza A, la base calcolata nella Parte I sarebbe ancora ottima? Se lo fosse, quale sarebbe la nuova soluzione ottima e il nuovo profitto? A quale condizione questa scelta sarebbe globalmente conveniente per l'azienda?
5. Se l'azienda riducesse di un quintale la disponibilità della sostanza B, la base calcolata nella Parte I sarebbe ancora ottima? Se lo fosse, quale sarebbe la nuova soluzione ottima e il nuovo profitto? A quale condizione questa scelta sarebbe globalmente conveniente per l'azienda?
6. Si supponga che, per cambiamenti del mercato, ogni lotto di 1 dia un profitto pari a 10 000 € invece che di 12 000 €. Stabilire se la base ottima calcolata (Parte I) rimane tale e, in tal caso, scrivere esplicitamente il nuovo profitto.

Tableau iniziale e finale calcolati (Parte I):

$$
\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
0 & -12 & -15 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
12 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\
9 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\cline{2-7}
 & 39 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\
\cline{2-7}
x_2 = & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\
x_1 = & 2 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\
x_5 = & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

Quindi:

$$
A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
B^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{dove: } Y = B^{-1}A
$$

Modello:

Per la produzione è disponibile un ulteriore quintale di sostanza A.

$$
\begin{aligned}
\max z = \ & 12x_1 + 15x_2 \\
& 3x_1 + 6x_2 \leq \cancel{12}\ 13 \\
& 3x_1 + 3x_2 \leq 9 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
b = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \widehat{b} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Ricordando che la base ottima è $\mathcal{B} = \{A_2, A_1, A_5\}$, i nuovi valori delle variabili base sono dati da:

$$\widehat{x}_\beta = B^{-1}\widehat{b} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

La base ottima calcolata (Parte I) rimane ottima.
La nuova soluzione ottima è $\widehat{x} = (\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0, \frac{4}{3})$.
La soluzione ottima consiste dunque nel produrre:

- $\dfrac{5}{3}$ lotti di composto 1;
- $\dfrac{4}{3}$ lotti di composto 1;

ottenendo un profitto pari a: $\dfrac{5}{3} \cdot 12\,000$ €$+ \dfrac{4}{3} \cdot 15\,000$ € $= 40\,000$ €

Tableau iniziale e finale calcolati (Parte I):

$$
\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
0 & -12 & -15 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
12 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\
9 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|c|ccccc|}
\cline{2-7}
 & 39 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\
\cline{2-7}
x_2 = & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\
x_1 = & 2 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\
x_5 = & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\
\cline{2-7}
\end{array}
$$

La soluzione ottima duale è: $\pi_j = c_j - \bar{c}_j$, calcolati in corrispondenza della base iniziale $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_5\}$.
Dunque:

$$\pi_1 = 0 - 1 = -1, \qquad \pi_2 = 0 - 3 = -3, \qquad , \pi_3 = 0 - 0 = 0.$$

$$\pi = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per la Proprietà 5.2, il valore ottimo della variabile duale π_1 fornisce il prezzo ombra della risorsa associata al primo vincolo.
Il prezzo ombra ha valore π_1 ovvero -1.
Il profitto complessivo risultante sarebbe di 40 000 €, come prevedibile visto che il prezzo ombra del primo vincolo è -1 ed il termine noto sarebbe aumentato di 1 unità.
Se un quintale di sostanza A costasse meno di 1 000€ la decisione sarebbe globalmente conveniente.

Soluzione

Modello:

Per la produzione è disponibile un quintale in meno di sostanza B.

$$
\begin{aligned}
\max z = \;& 12x_1 + 15x_2 \\
& 3x_1 + 6x_2 \leq 12 \\
& 3x_1 + 3x_2 \leq \cancel{9}\ 8 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
b = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \widehat{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}
$$

Ricordando che la base ottima è $\mathcal{B} = \{A_2, A_1, A_5\}$, i nuovi valori delle variabili base sono dati da:

$$\widehat{x}_\beta = B^{-1}\widehat{b} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \end{matrix}$$

La base ottima calcolata (Parte I) rimane ottima.
La nuova soluzione ottima è $\widehat{x} = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0, 0, \frac{5}{3})$.
La soluzione ottima consiste dunque nel produrre:

- $\frac{4}{3}$ lotti di composto 1;
- $\frac{4}{3}$ lotti di composto 2;

ottenendo un profitto pari a: $\frac{4}{3} \cdot 12\,000$ €$+ \frac{4}{3} \cdot 15\,000$ € $= 36\,000$ €.
La soluzione ottima duale ha valore: $\pi = (-1, -3, 0)$.

Per la Proprietà 5.2, il valore ottimo della variabile duale π_2 fornisce il prezzo ombra della risorsa associata al secondo vincolo.
Il prezzo ombra ha valore π_2 ovvero -3.
Il profitto complessivo risultante sarebbe di 36 000 €, come prevedibile visto che il prezzo ombra del secondo vincolo è -3 ed il termine noto sarebbe diminuito di 1 unità.
Se un quintale di sostanza B costasse più di 3 000€ la decisione sarebbe globalmente conveniente.

Soluzione

Modello:

Ogni lotto di 1 dà un profitto pari a 10 000 € invece che di 12 000 €.

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & 10\cancel{12}x_1 + 15x_2 \\
& 3x_1 + 6x_2 \le 12 \\
& 3x_1 + 3x_2 \le 9 \\
& x_1 \le 3 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
c = \begin{bmatrix} -12 \\ -15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \widehat{c} = \begin{bmatrix} -10 \\ -15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

La base ottima è $\mathcal{B} = \{A_2, A_1, A_5\}$. Dunque:

$$\widehat{c}_\beta = (-15, -10, 0)$$

I nuovi costi relativi sono dati da:

$$\widehat{c}' - \widehat{c}'_\beta \cdot B^{-1}A = \widehat{c}' - \widehat{c}'_\beta \cdot Y =$$

$$= \begin{bmatrix} -10 \\ -15 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} -15, -10, 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -10, -15, 0, 0, 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -10, -15, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0, 0, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, 0 \end{bmatrix} \geq 0$$

La base ottima calcolata (Parte I) rimane ottima.
La soluzione ottima continua ad essere $x = (2, 1, 0, 0, 1)$.
La soluzione ottima consiste dunque nel produrre:

- 2 lotti di composto 1;
- 1 lotto di composto 2;

ottenendo un profitto pari a: $2 \cdot 10\,000$ €$+ 1 \cdot 15\,000$ € $= 35\,000$ €.

Esercizio 4

Esercizio 4

Problema:

Un'azienda chimica produce due tipi di composto, A e B. Il profitto del composto A è il medesimo di quello del composto B. Ogni tonnellata di composto A o B contiene un quintale di sostanza base di cui sono disponibili 8 quintali. Il numero di tonnellate di composto A deve superare di almeno un'unità il numero di tonnellate di composto B. Per motivi di mercato non si possono produrre più di 6 tonnellate di composto A.

Esercizio 4

1. Definire il modello LP che determina la produzione di massimo profitto.
2. Porre il modello in forma standard e risolverlo con l'algoritmo del simplesso e la regola di Bland (inserendo il minimo numero di variabili artificiali). Dire esplicitamente qual'è la soluzione trovata.
3. Disegnare con cura la regione ammissibile.
4. Definire il duale del problema ottenuto al punto 2. e darne la soluzione, dicendo esplicitamente come è stata ottenuta.

Soluzione

Variabili decisionali:

- x_1: quantità di composto A da produrre (espresso in tonnellate)
- x_2: quantità di composto B da produrre (espresso in tonnellate)

Vincoli:

- Ogni tonnellata di composto A o B contiene un quintale di sostanza base di cui sono disponibili 8 quintali:

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

- Il numero di tonnellate di composto A deve superare di almeno un'unità il numero di tonnellate di composto B:

$$x_1 \geq x_2 + 1$$

- Non si possono produrre più di 6 tonnellate di composto A:

$$x_1 \leq 6$$

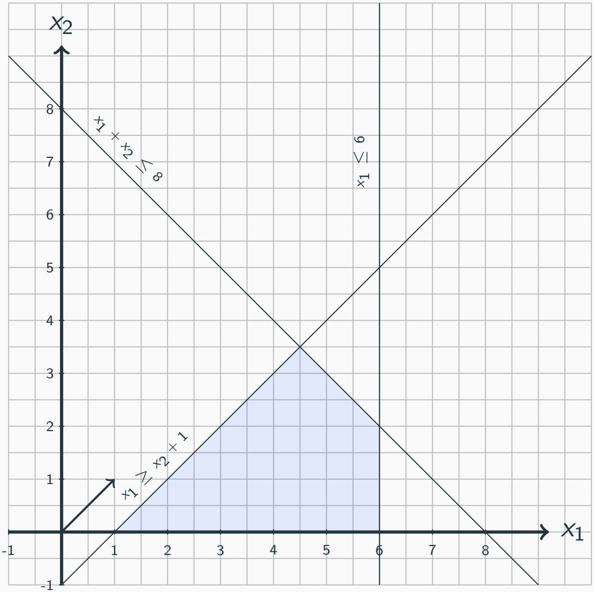
- Variabili non negative:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Modello:
Il profitto del composto A è il medesimo di quello del composto B.

$$
\begin{aligned}
\max z = \; & x_1 + x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 8 \\
& x_1 \geq x_2 + 1 \\
& x_1 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Regione amissibile



Forma standard

$$
\begin{aligned}
\max z = \; & x_1 + x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 8 \\
& x_1 \geq x_2 + 1 \\
& x_1 \leq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\min z = & -x_1 & - x_2 & & & & \\
& x_1 & + x_2 & + x_3 & & & = 8 \\
& x_1 & - x_2 & & - x_4 & & = 1 \\
& x_1 & & & & + x_5 & = 6 \\
& x_1 & , \; x_2 & , \; x_3 & , \; x_4 & , \; x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

Tableau

$$
\begin{aligned}
\min z = \quad & -x_1 - x_2 \\
& x_1 + x_2 + x_3 && = 8 \\
& x_1 - x_2 - x_4 && = 1 \\
& x_1 + x_5 && = 6 \\
& x_1 \ , \ x_2 \ , \ x_3 \ , \ x_4 \ , \ x_5 && \geq 0
\end{aligned}
$$

Tableau corrispondente:

$$
\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
8 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Non ha la forma desiderata.

Fase 1

0	-1	-1	0	0	0
8	1	1	1	0	0
1	1	-1	0	-1	0
6	1	0	0	0	1

Aggiungiamo la variabile artificiale x_1^a avente costo 1.
Minimizziamo, con il metodo del simplesso, la nuova funzione obiettivo:

$$\min \zeta = \sum_{i=1}^{m} x_i^a = x_1^a$$

0	0	0	0	0	0	1
8	1	1	1	0	0	0
1	1	-1	0	-1	0	1
6	1	0	0	0	1	0

Fase 1

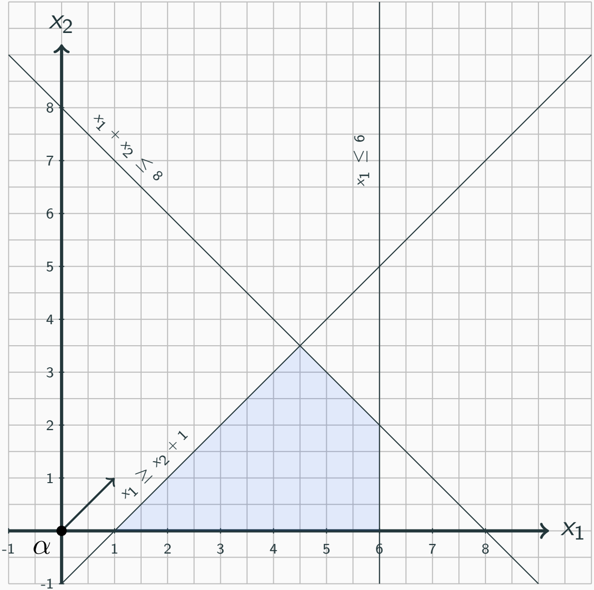
0	0	0	0	0	0	1
8	1	1	1	0	0	0
1	1	-1	0	-1	0	1
6	1	0	0	0	1	0

Si ottiene:

	-1	-1	1	0	1	0	0
$x_3 =$	8	1	1	1	0	0	0
$x_1^a =$	1	1	-1	0	-1	0	1
$x_5 =$	6	1	0	0	0	1	0

La base $\mathcal{B} = \{A_3, A_6, A_5\}$ induce la soluzione di partenza $x = (0, 0, 8, 0, 6, 1)$, corrispondente al punto $\alpha = (0, 0)$.

Soluzione iniziale: $\alpha = (0, 0)$



Fase 1

$$\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\hline
 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
x_3 = & 8 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_1^a = & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
x_5 = & 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

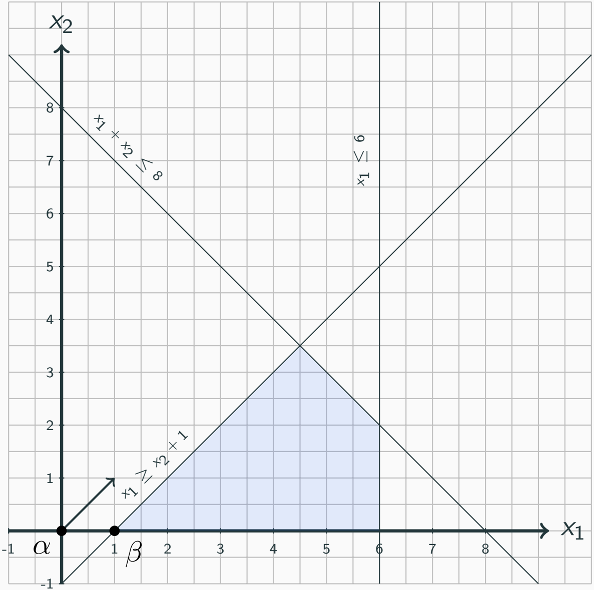
Si ottiene:

$$\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\hline
 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
x_3 = & 7 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
x_1 = & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
x_5 = & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
\hline
\end{array}$$

La base $\mathcal{B} = \{A_3, A_1, A_5\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (1, 0, 7, 0, 5, 0)$, corrispondente al punto $\beta = (1, 0)$.
Con:

$$\min \zeta = \sum_{i=1}^{m} x_i^a = x_1^a = 0$$

Soluzione corrente: $\beta = (1, 0)$



Fase 2

Le variabili artificiali sono fuori dalla base $\mathcal{B} = \{A_3, A_1, A_5\}$. Vettore dei costi: $c = (-1, -1, 0, 0, 0, 0)$.

$$
\begin{array}{|c|ccccc|c|}
\hline
0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
7 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

Si ottiene:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\cline{2-8}
 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
\cline{2-8}
x_3 = & 7 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
x_1 = & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
x_5 = & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
\cline{2-8}
\end{array}
$$

La nuova base $\mathcal{B} = \{A_3, A_1, A_5\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (1, 0, 7, 0, 5, 0)$.

Regola di Bland:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\hline
 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
x_3 = & 7 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
x_1 = & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
x_5 = & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

Entra in base la colonna di indice $j = 2$ essendo quella di indice minimo fra quelle con costo relativo negativo.
Calcoliamo l'indice della colonna che esce dalla base:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i1}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \min\{\frac{7}{2}, \frac{5}{1}\}$$

da cui si ottiene $i = 1$.

La colonna A_2 entra in base e A_3 esce dalla base. La nuova base è $\mathcal{B} = \{A_2, A_1, A_5\}$ e con pivot l'elemento $y_{12} = 2$.

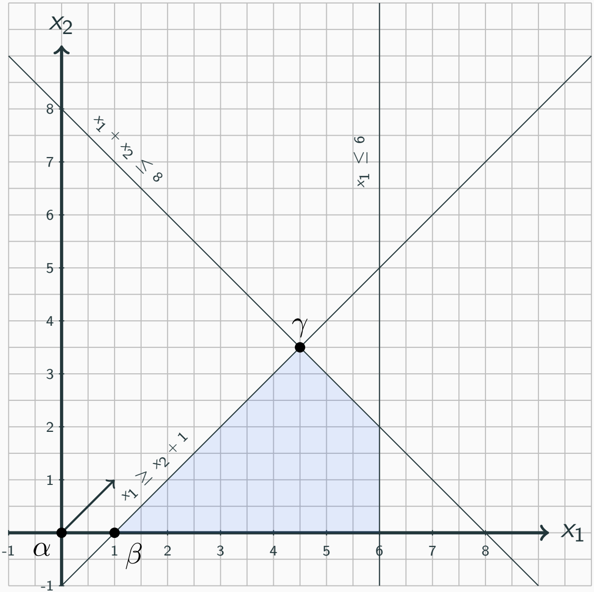
$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\hline
 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
\hline
x_3 = & 7 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
x_1 = & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
x_5 = & 5 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

Si ottiene:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\hline
 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
x_2 = & \frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\
x_1 = & \frac{9}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
x_5 = & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}
$$

La nuova base $\mathcal{B} = \{A_2, A_1, A_5\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (\frac{9}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}, 0)$.

Soluzione corrente: $\gamma = (\frac{9}{2}, \frac{7}{2})$



Soluzione ottima

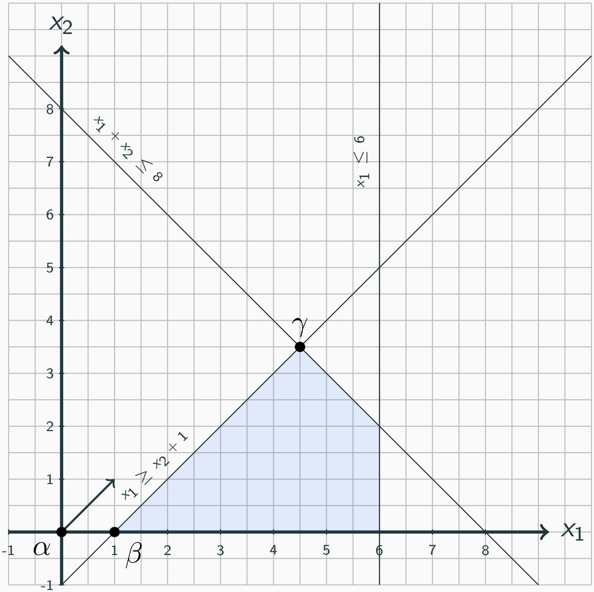
$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\hline
 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
x_2 = & \frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\
x_1 = & \frac{9}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
x_5 = & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\
\hline
\end{array}
$$

Per il Teorema 4.2 (Criterio di ottimalità), essendo $\overline{c}_j \geq 0 \ \forall j$ allora la soluzione di base ammissibile $x = (\frac{9}{2}, \frac{7}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}, 0)$ è ottima.
La soluzione ottima consiste dunque nel produrre:

- 4,5 tonnellate di composto A;
- 3,5 tonnellate del composto B;

ottenendo un profitto pari a 8 volte il profitto di una tonnellata del composto A o B.

Regione amissibile



Duale

$$
\begin{array}{llllllll}
\min z = & -x_1 & - x_2 & & & & & \\
& x_1 & + x_2 & + x_3 & & & = 8 \\
& x_1 & - x_2 & & - x_4 & & = 1 \\
& x_1 & & & & + x_5 & = 6 \\
& x_1 & , \; x_2 & , \; x_3 & , \; x_4 & , \; x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

Il duale del problema in forma standard è:

$$
\begin{array}{lllll}
\max & 8\pi_1 + \pi_2 + & 6\pi_3 & & \\
& \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 & & & \leq -1 \\
& \pi_1 - \pi_2 & & & \leq -1 \\
& \pi_1 & & & \leq 0 \\
& - \pi_2 & & & \leq 0 \\
& & \pi_3 & & \leq 0 \\
& \pi_1 \; , \; \pi_2 \; , \; \pi_3 & & \gtreqless 0 &
\end{array}
$$

Tableau finale:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\cline{2-8}
 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\cline{2-8}
x_2 = & \frac{7}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\
x_1 = & \frac{9}{2} & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\
x_5 = & \frac{3}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\
\cline{2-8}
\end{array}
$$

La base iniziale è $\mathcal{B} = \{A_3, A_6, A_5\}$, i cui costi relativi finali sono rispettivamente 1, 0 e 0, mentre i costi relativi iniziali sono tutti e tre nulli. La soluzione ottima duale ha valore: $\pi_j = c_j - \bar{c}_j$, calcolati in corrispondenza della base iniziale $\mathcal{B} = \{A_3, A_6, A_5\}$.
Dunque:

$$\pi_1 = -1, \qquad \pi_2 = 0, \qquad \pi_3 = 0.$$

Esercizio 5

Esercizio 5

Problema:
Un'azienda produce due tipi di panchine, tipo 1 e tipo 2. La vendita di ogni panchina di tipo 1 causa una perdita di 10 €. La vendita di ogni panchina di tipo 2 produce un ricavo di 30 €. Per ogni panchina venduta c'è un contributo pari a 40 € se di tipo 1 e pari a 30 € se di tipo 2. Per motivi di mercato non si possono produrre più di 300 panchine di tipo 1 e 300 panchine di tipo 2. Per politiche aziendali, si vogliono ricevere almeno 12 000 € di contributi

Esercizio 5

1. Definire il modello LP che determina la produzione di massimo profitto esprimendo le variabili in centinaia di panchine e i quantitativi monetari in migliaia di euro.
2. Porre il modello in forma standard e risolverlo con l'algoritmo del simplesso e la regola di Bland (inserendo il minimo numero di variabili artificiali). Dire esplicitamente qual'è la soluzione trovata.
3. Disegnare con cura la regione ammissibile.
4. Definire il duale del problema ottenuto al punto 2. e darne la soluzione, dicendo esplicitamente come è stata ottenuta.

Soluzione

Variabili decisionali:

- x_1: quantità di panchine di tipo 1 da produrre (espresso in centinaia di unità)
- x_2: quantità di panchine di tipo 1 da produrre (espresso in centinaia di unità)

Vincoli:

- Non si possono produrre più di 300 panchine di tipo 1:

$$x_1 \leq 3$$

- Non si possono produrre più di 300 panchine di tipo 2:

$$x_2 \leq 3$$

- Sapendo che per ogni panchina venduta c'è un contributo pari a 40€ se di tipo 1 e pari a 30€ se di tipo 2, si vogliono ricevere almeno 12 000€ di contributi:

$$4x_1 + 3x_2 \geq 12$$

- Variabili non negative:

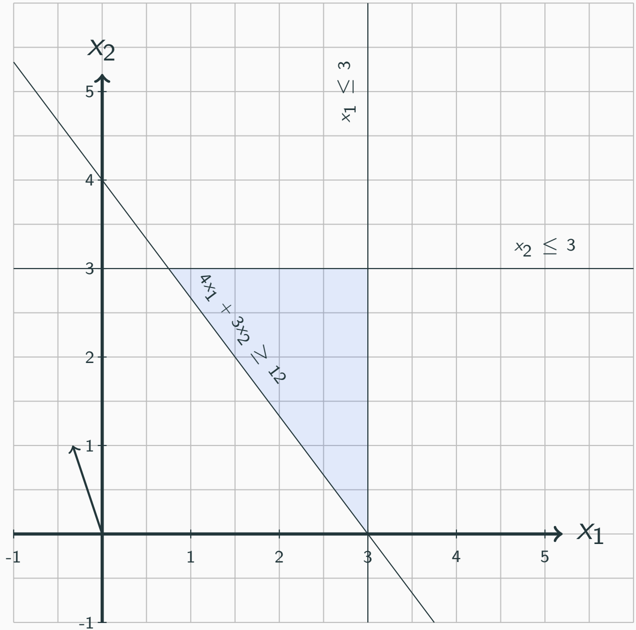
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Modello:

La vendita di ogni panchina di tipo 1 causa una perdita di 10 €. La vendita di ogni panchina di tipo 2 produce un ricavo di 30 €.

$$\begin{aligned} \max z = \quad & -x_1 + 3x_2 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_2 \leq 3 \\ & 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Regione amissibile



Forma standard

$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & -x_1 + 3x_2 \\
& x_1 \leq 3 \\
& x_2 \leq 3 \\
& 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\min z = & x_1 & - 3x_2 & & & & \\
& x_1 & & + x_3 & & & = \ \ 3 \\
& & x_2 & & + x_4 & & = \ \ 3 \\
& 4x_1 & + 3x_2 & & & - x_5 & = 12 \\
& x_1 \ , & x_2 \ , & x_3 \ , & x_4 \ , & x_5 & \geq \ \ 0
\end{array}
$$

Tableau

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
\min z = & & x_1 & - & 3x_2 & & & & & & \\
& & x_1 & & & + & x_3 & & & & = 3 \\
& & & & x_2 & & & + & x_4 & & = 3 \\
& & 4x_1 & + & 3x_2 & & & & & - x_5 & = 12 \\
& & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , x_5 & \geq 0
\end{array}$$

Tableau corrispondente:

$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
12 & 4 & 3 & 0 & 0 & -1 \\
\hline
\end{array}$$

Non ha la forma desiderata.

Fase 1

0	1	-3	0	0	0
3	1	0	1	0	0
3	0	1	0	1	0
12	4	3	0	0	-1

Aggiungiamo la variabile artificiale x_1^a avente costo 1.

Minimizziamo, con il metodo del simplesso, la nuova funzione obiettivo:

$$\min \zeta = \sum_{i=1}^{m} x_i^a = x_1^a$$

0	0	0	0	0	0	1
3	1	0	1	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0
12	4	3	0	0	-1	1

Fase 1

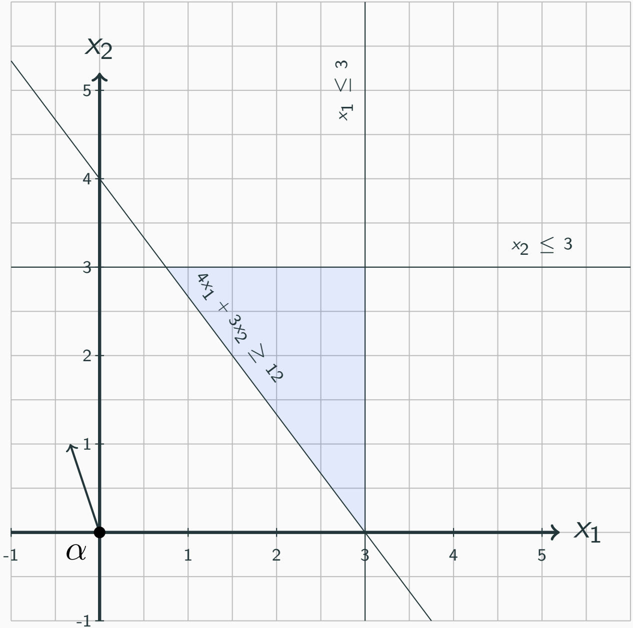
$$\begin{array}{|c|ccccc|c|}
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
12 & 4 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

Si ottiene:

$$\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\hline
 & -12 & -4 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
x_3 = & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
x_4 = & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_1^a = & 12 & 4 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
\end{array}$$

La base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_6\}$ induce la soluzione di partenza $x = (0, 0, 3, 3, 0, 12)$, corrispondente al punto $\alpha = (0, 0)$.

Soluzione iniziale: $\alpha = (0, 0)$



Fase 1

	-12	-4	-3	0	0	1	0
$x_3 =$	3	1	0	1	0	0	0
$x_4 =$	3	0	1	0	1	0	0
$x_1^a =$	12	4	3	0	0	-1	1

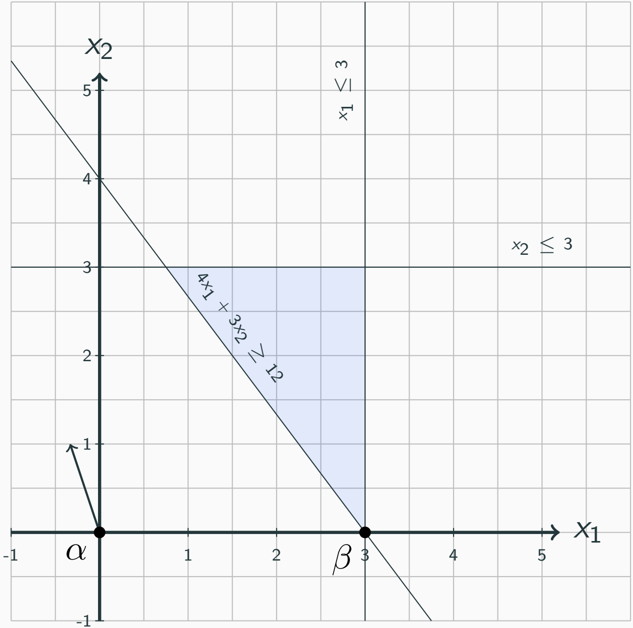
Infatti, in caso di parità, fare uscire dalla base una variabile artificiale.

	0	0	0	0	0	0	1
$x_3 =$	0	0	$-\frac{3}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
$x_4 =$	3	0	1	0	1	0	0
$x_1 =$	3	1	$\frac{3}{4}$	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

La base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_1\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (3, 0, 0, 3, 0, 0)$, corrispondente al punto $\beta = (1, 0)$. Con:

$$\min \zeta = \sum_{i=1}^{m} x_i^a = x_1^a = 0$$

Soluzione corrente: $\beta = (1, 0)$



Fase 2

Le variabili artificiali sono fuori dalla base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_1\}$. Vettore dei costi: $c = (1, -3, 0, 0, 0, 0)$.

$$\begin{array}{|c|ccccc|c|}
\hline
0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\hline
\end{array}$$

Si ottiene:

$$\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\hline
 & -3 & 0 & -\frac{15}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
\hline
x_3 = & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
x_4 = & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_1 = & 3 & 1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\hline
\end{array}$$

La nuova base $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_1\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (3, 0, 0, 3, 0, 0)$.

Regola di Bland:

$$
\begin{array}{r|c|cccccc|c|}
\cline{2-9}
 & -3 & 0 & -\frac{15}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} \\
\cline{2-9}
x_3 = & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} \\
x_4 = & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\
x_1 = & 3 & 1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & & \frac{1}{4} \\
\cline{2-9}
\end{array}
$$

Entra in base la colonna di indice $j = 2$ essendo quella di indice minimo fra quelle con costo relativo negativo.
Calcoliamo l'indice della colonna che esce dalla base:

$$\vartheta_{\max} = \min_{i:y_{i1}>0} \frac{y_{i0}}{y_{i1}} = \min\{\frac{3}{1}, 3 \cdot \frac{4}{3}\} = \min\{\frac{3}{1}, 4\}$$

da cui si ottiene $i = 2$.

La colonna A_2 entra in base e A_4 esce dalla base. La nuova base è $\mathcal{B} = \{A_3, A_2, A_4\}$ e con pivot l'elemento $y_{22} = 1$.

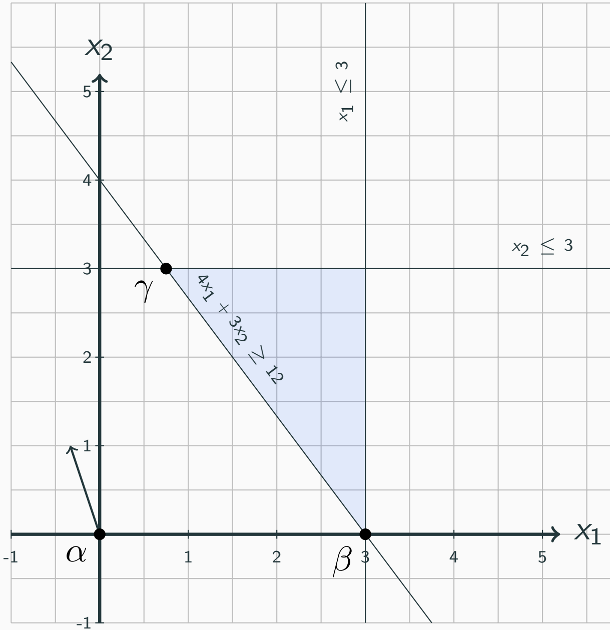
$$
\begin{array}{r|c|cccccc|c|}
\cline{2-9}
 & -3 & 0 & -\frac{15}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} \\
\cline{2-9}
x_3 = & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{4} \\
x_4 = & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\
x_1 = & 3 & 1 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & & \frac{1}{4} \\
\cline{2-9}
\end{array}
$$

Si ottiene:

$$
\begin{array}{r|c|ccccc|c|}
\cline{2-8}
 & \frac{33}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
\cline{2-8}
x_3 = & \frac{9}{4} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
x_2 = & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_1 = & \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\cline{2-8}
\end{array}
$$

La nuova base $\mathcal{B} = \{A_3, A_2, A_1\}$ induce la soluzione di base ammissibile $x = (\frac{3}{4}, 3, \frac{9}{4}, 0, 0, 0)$.

Soluzione corrente: $\gamma = (\frac{3}{4}, 3)$



Soluzione ottima

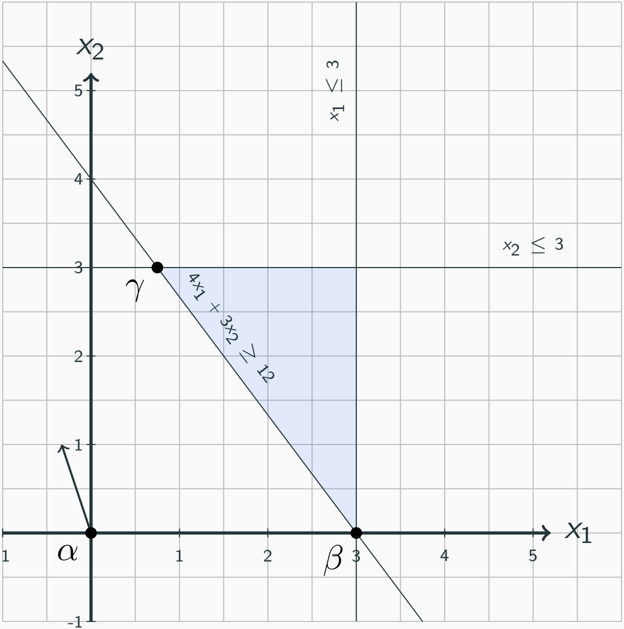
$$
\begin{array}{r|c|cccccc|c|}
\cline{2-9}
 & \frac{33}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{4} & \frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} \\
\cline{2-9}
x_3 = & \frac{9}{4} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & & -\frac{1}{4} \\
x_2 = & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & & 0 \\
x_1 = & \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & & \frac{1}{4} \\
\cline{2-9}
\end{array}
$$

Per il Teorema 4.2 (Criterio di ottimalità), essendo $\bar{c}_j \geq 0 \ \forall j$ allora la soluzione di base ammissibile $x = (\frac{3}{4}, 3, \frac{9}{4}, 0, 0, 0)$ è ottima.
La soluzione ottima consiste dunque nel produrre:

- 75 panchine di tipo 1;
- 300 panchine di tipo 2;

ottenendo un introito pari a $\frac{33}{4} \cdot 1\,000€ = 8\,250€$.

Regione amissibile



Duale

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
\min z = & x_1 & - 3x_2 & & & & \\
& x_1 & & + x_3 & & & = 3 \\
& & x_2 & & + x_4 & & = 3 \\
& 4x_1 & + 3x_2 & & & - x_5 & = 12 \\
& x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5 & \geq 0
\end{array}
$$

Il duale del problema in forma standard è:

$$
\begin{array}{rrrrl}
\max & 3\pi_1 & + 3\pi_2 & + 12\pi_3 & \\
& \pi_1 & & + 4\pi_3 & \leq 1 \\
& & \pi_2 & + 3\pi_3 & \leq -3 \\
& \pi_1 & & & \leq 0 \\
& & \pi_2 & & \leq 0 \\
& & & - \pi_3 & \leq 0 \\
& \pi_1, & \pi_2, & \pi_3 & \gtreqless 0
\end{array}
$$

Tableau finale:

$$
\begin{array}{r|c|cccccc|}
\hline
 & \frac{33}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{15}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
\hline
x_3 = & \frac{9}{4} & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\
x_2 = & 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_1 = & \frac{3}{4} & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\
\hline
\end{array}
$$

La base iniziale è $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_6\}$, i cui costi relativi finali sono rispettivamente 0, $\frac{15}{4}$ e $-\frac{1}{4}$, mentre i costi relativi iniziali sono tutti e tre nulli.

La soluzione ottima duale ha valore: $\pi_j = c_j - \bar{c}_j$, calcolati in corrispondenza della base iniziale $\mathcal{B} = \{A_3, A_4, A_6\}$.

Dunque:

$$\pi_1 = 0 - 0 = 0, \qquad \pi_2 = 0 - \frac{15}{4} = -\frac{15}{4} \qquad , \pi_3 = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$