

Controlli Automatici - T

Progetto Tipologia B - Traccia 1

Controllo trattamento farmacologico contro il cancro

Gruppo AI

Alessio Benenati, Luca Capelli, Pietro Garotti, Gregorio Cavulla

Il progetto riguarda l'utilizzo di tecniche di controlli automatici per il trattamento farmacologico di cellule cancerogene in ambiente di laboratorio, la cui dinamica viene descritta dalle seguenti equazioni differenziali

$$\dot{n}_s = -r_s \ln\left(\frac{n_s + n_r}{K}\right)n_s - m_s c_f n_s - \beta n_s + \gamma n_r - \alpha c_f n_s \quad (1a)$$

$$\dot{n}_r = -r_r \ln\left(\frac{n_s + n_r}{K}\right)n_r - m_r c_f n_r + \beta n_s - \gamma n_r + \alpha c_f n_s \quad (1b)$$

Nel contesto delle equazioni descrittive, la notazione $\ln(\cdot)$ indica il logaritmo naturale. I parametri $r_s \in \mathbb{R}$ e $r_r \in \mathbb{R}$ e rappresentano i tassi di riproduzione delle due tipologie di cellule, mentre il parametro $K \in \mathbb{R}$ rappresenta il numero massimo di cellule che l'ambiente può contenere. La variabile $c_f(t)$ indica la concentrazione del farmaco. I parametri $m_s \in \mathbb{R}$ e $m_r \in \mathbb{R}$ determinano la mortalità delle cellule suscettibili e resistenti, rispettivamente, con $m_s > m_r$.

Le cellule possono mutare da una tipologia all'altra: le cellule suscettibili possono diventare resistenti attraverso il termine $-\beta n_s$ (prima equazione) e βn_s (seconda equazione), con $\beta \in \mathbb{R}$. Allo stesso modo, le cellule resistenti possono mutare attraverso il termine γn_r , con $\gamma \in \mathbb{R}$. Infine, il termine $\alpha c_f n_s$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ tiene conto delle cellule suscettibili che mutano in cellule resistenti a causa del trattamento farmacologico.

Nel contesto dell'analisi, si suppone che sia possibile misurare solo il numero di cellule resistenti $n_r(t)$.

1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u). \quad (2b)$$

Pertanto, andiamo individuare lo stato x , l'ingresso u e l'uscita y del sistema come segue

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} n_s \\ n_r \end{bmatrix}, \quad u := c_f, \quad y := n_r.$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni f ed h

$$f(x, u) := \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -r_s \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{K}\right) - m_s u x_1 - \beta x_1 + \gamma x_2 - \alpha u x_1 \\ -r_r \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{K}\right) - m_r u x_2 - \beta x_1 - \gamma x_2 + \alpha u x_1 \end{bmatrix}$$
$$h(x, u) := x_2.$$

Una volta calcolate f ed h esprimiamo (1) nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_s \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{K}\right) - m_s u x_1 - \beta x_1 + \gamma x_2 - \alpha u x_1 \\ -r_r \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{K}\right) - m_r u x_2 - \beta x_1 - \gamma x_2 + \alpha u x_1 \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$y = x_2. \quad (3b)$$

Nella consegna ci viene fornito il valore di equilibrio $x_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}$

,a partire da questa informazione, troviamo l'intera coppia di equilibrio (x_e, u_e) di (3) ponendo a 0 il primo membro di (3a), andiamo a risolvere il seguente sistema di equazioni.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7u100 - 0.2u100 \\ -0.15u100 + 0.2u100 \end{bmatrix} \quad (4)$$

dal quale otteniamo

$$x_e := \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad u_e = 0 \dots \quad (5)$$

Definiamo le variabili alle variazioni δx , δu e δy come

$$\delta x = x - x_e, \quad \delta u = u - u_e, \quad \delta y = y - y_e.$$

Dove x_e ed u_e sono date e $y_e = x_e = 100$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \quad (6a)$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u, \quad (6b)$$

dove le matrici A , B , C e D vengono calcolate come

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} -1.05 & -0.45 \\ -0.35 & -0.95 \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} -90 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7c)$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (7d)$$

2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'ingresso δu all'uscita δy mediante la seguente formula

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{5(s + 7.35)}{(s + 1.4)(s + 0.6)}. \quad (8)$$

Dunque il sistema linearizzato (6) è caratterizzato dalla funzione di trasferimento (8) con 2 poli $p_1 = -1.4$, $p_2 = -0.6$ e uno zero $z_1 = -7.35$. In Figura 1 mostriamo il corrispondente diagramma di Bode.

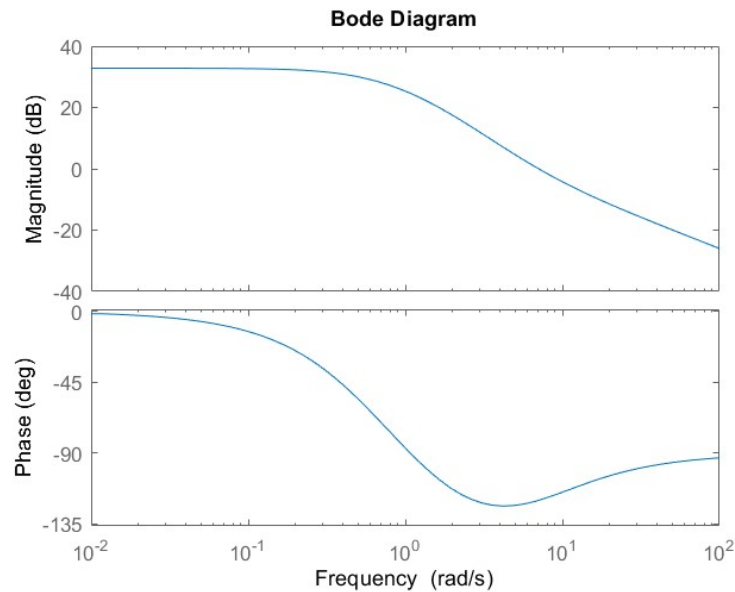


Figura 1

3 Mappatura specifiche del regolatore

Le specifiche da soddisfare sono

- 1) Errore a regime nullo con riferimento a gradino
- 2) $M_f \geq 40^\circ$ per garantire una certa robustezza del sistema
- 3) $S\% \geq 7\%$: specifica equivalente a $M_f \geq 64.61^\circ$
- 4) $T_a, 5 = 1s$.
- 5) Il disturbo sull'uscita $d(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[0, 0.05]$, deve essere abbattuto di almeno $60dB$
- 6) Il rumore di misura $n(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $[10^4, 10^6]$, deve essere abbattuto di almeno $90dB$

Andiamo ad effettuare la mappatura punto per punto le specifiche richieste.

- 1) Per soddisfare la prima richiesta abbiamo bisogno di un polo nell'origine
- 2) Per quanto riguarda le specifiche (2) e (3) dobbiamo soddisfare la più stringente delle 2, quindi abbiamo bisogno di $M_f \geq 64.61^\circ$
- 3) La specifica (4) sul tempo di assestamento ci dà un limite inferiore per la pulsazione critica di attraversamento ω_c . Si ha $\omega_c \geq \frac{300}{M_f 1} \approx 4.64 rad/s$

4) nel range di pulsazioni $[0, 0.05]$ come da specifica (5), $|L(j\omega)|_dB \geq 60dB$.

5) nel range di pulsazioni $[10^4, 10^6]$ come da specifica (6), $|L(j\omega)|_dB \geq -90dB$.

Pertanto, in Figura 2, mostriamo il diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$ con le zone proibite emerse dalla mappatura delle specifiche.

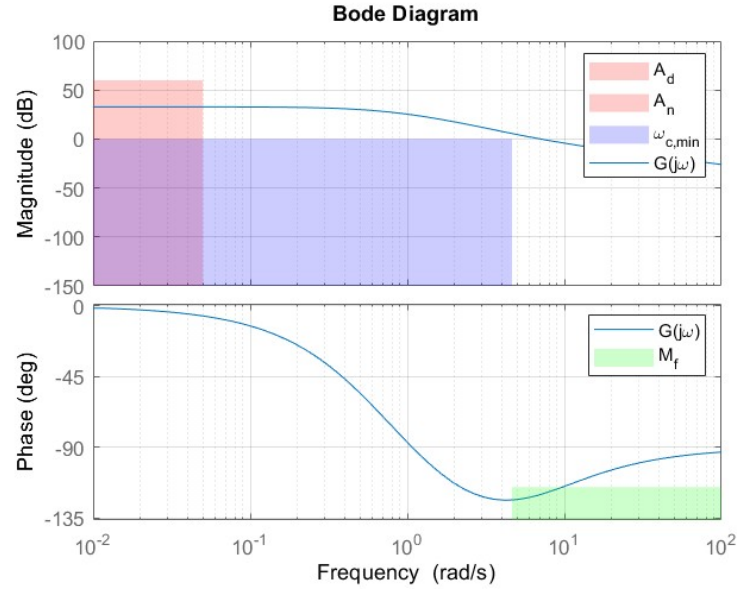


Figura 2

4 Sintesi del regolatore statico

In questa sezione progettiamo il regolatore statico $R_s(s)$ partendo dalle analisi fatte in sezione 3. Per raggiungere l'errore a regime nullo abbiamo bisogno di un polo nell'origine, come ci dice il principio del modello interno. Poichè la $G(s)$ non presenta poli, ne aggiungiamo uno nel regolatore statico che avrà quindi la forma seguente.

$$R_s(s) = \frac{1}{s} \quad (9a)$$

Dunque, definiamo la funzione estesa $G_e(s) = R_s(s)G(s)$ e, in Figura 3, mostriamo il suo diagramma di Bode per verificare se e quali zone proibite vengono attraversate.

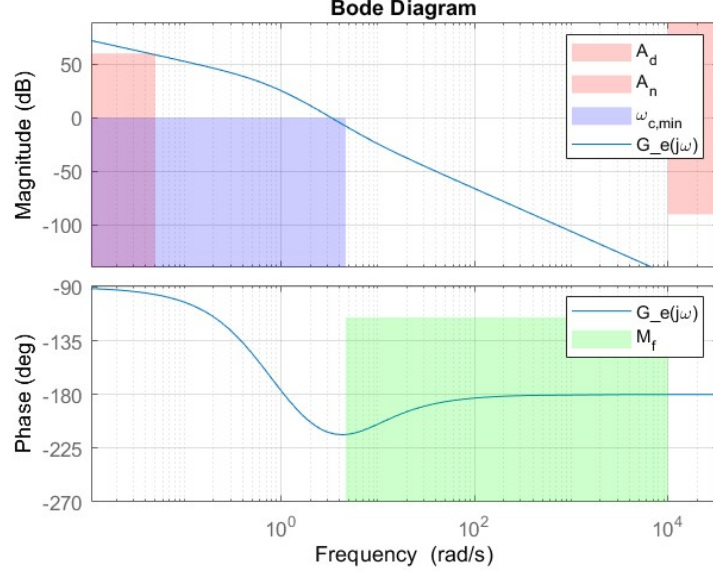


Figura 3

Da Figura 3, emerge che non stiamo rispettando i vincoli sul disturbo di uscita A_d , margine di fase M_f e tempo di assestamento $\omega_{c,min}$

5 Sintesi del regolatore dinamico

In questa sezione, progettiamo il regolatore dinamico $R_d(s)$. Dalle analisi fatte in Sezione 4, notiamo di essere nello Scenario di tipo B. Dunque, progettiamo $R_d(s)$ ricorrendo ad una rete anticipatrice. I parametri del regolatore dinamico α e τ sono stati calcolati tramite le formule di inversione (in particolare scegliendo $M_f^* = M_f, spec + 12$ e $\omega_c^* = 100$). Si ottiene quindi:

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \tau \alpha s} \quad (10a)$$

Inoltre è stato aggiunto un polo in alta frequenza per rispettare il vincolo sul disturbo n_d . Il regolatore dinamico risulta quindi avere la seguente forma finale:

$$R_d(s) = \frac{1 + \tau s}{(1 + \tau \alpha s)(1 + \tau_{hf} s)} \quad (11a)$$

Dove $\tau_{hf} = \frac{1}{500}$

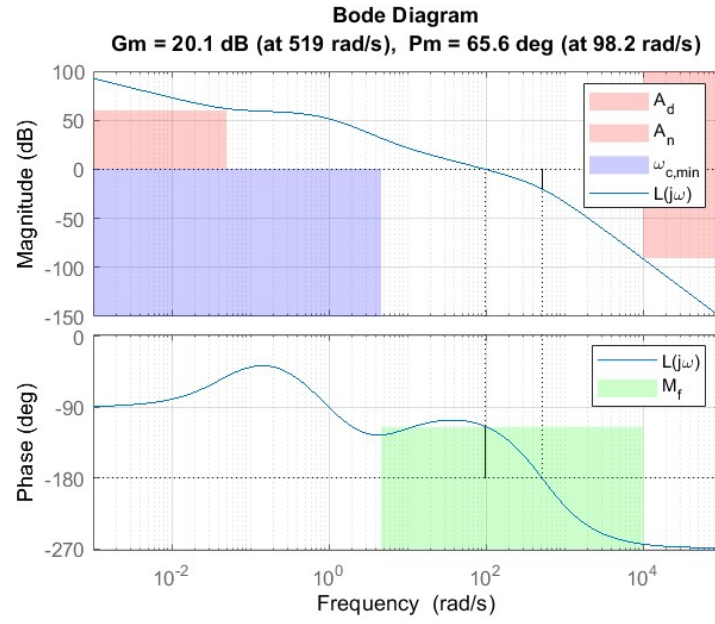


Figura 4

In Figura 4, mostriamo il diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s) = R_d(s)G_e(s)$

6 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema linearizzato, analizzando le risposte ai rumori $n(t)$ e $d(t)$ e la risposta al riferimento a gradino $w(t)$. Dopo aver ricavato le funzioni di sensitività relative dalla $L(s)$. Risultano:

$$-y_\omega = F(s)W(s) \quad (12a)$$

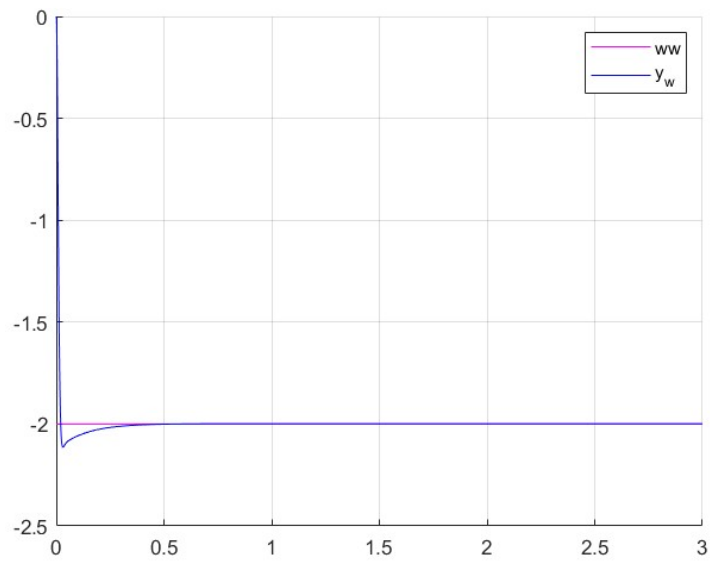


Figura 5

$$-y_d = S(s)D(s) \quad (13a)$$

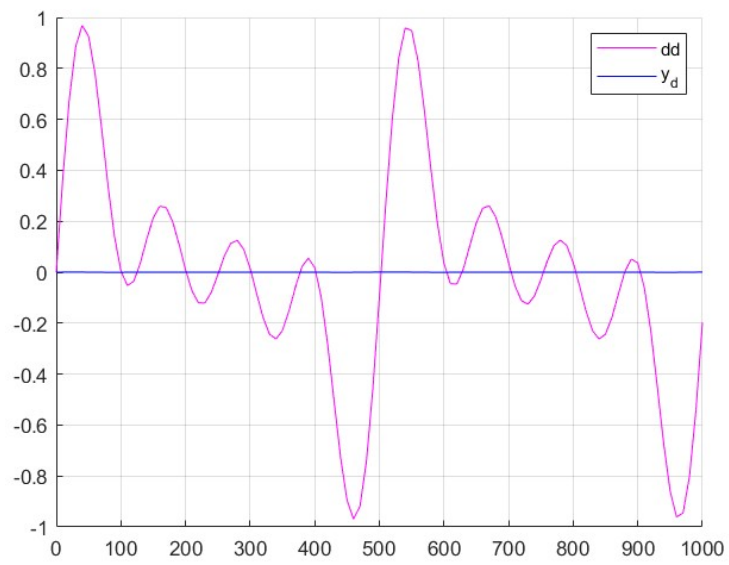


Figura 6

$$-y_n = -F(s)N(s) \quad (14a)$$

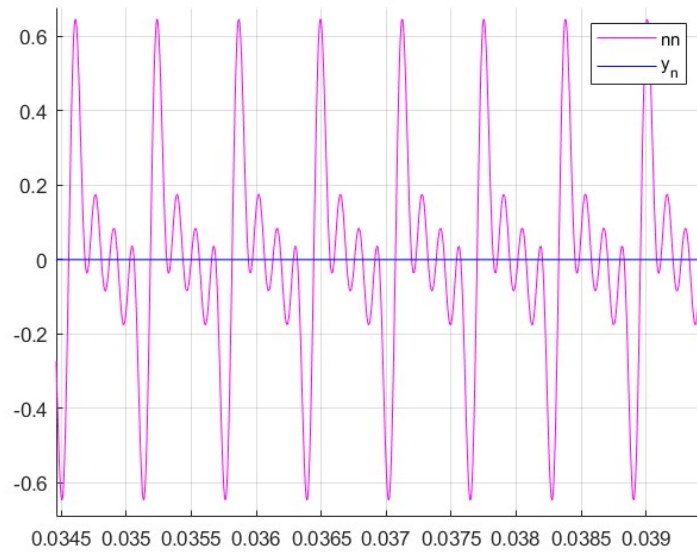


Figura 7

Otteniamo infine l'uscita complessiva sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, sommando quindi le diverse uscite:

$$y_{\text{tot}} = y_{\omega} + y_d + y_n \quad (15a)$$

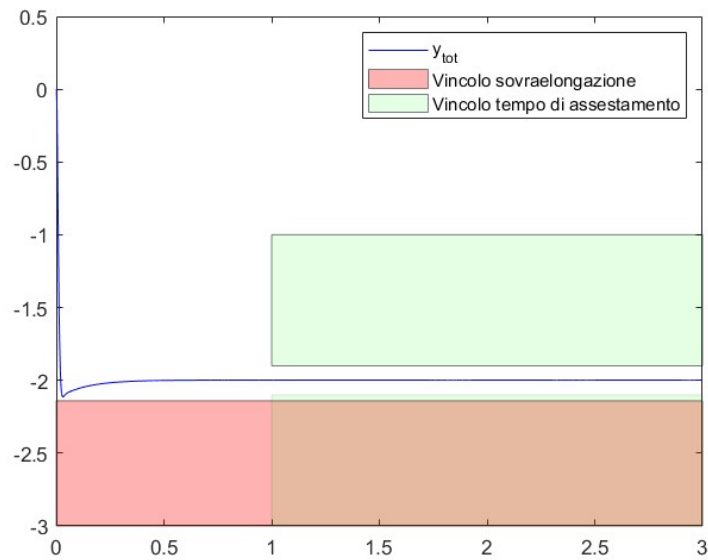
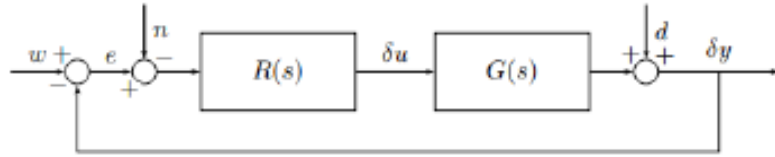


Figura 8

Notiamo come l'uscita rispetti i vincoli sulla sovraelongazione percentuale e sul tempo di assestamento

7 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul modello non lineare sostituendo nello schema di controllo, il nostro sistema non lineare (3) alla funzione di trasferimento $G(s)$.



Dovremo, inoltre:

- 1) aggiungere u_e in ingresso al sistema in modo da avere in input $u = \delta u + u_e$, cioè l'ingresso del sistema non lineare. In uscita avremo quindi y (e non δy)
- 2) sottrarre y_e in uscita al sistema, in modo da avere in output $\delta = y - y_e$ cioè l'uscita corretta da sottrarre al riferimento per produrre l'errore e corretto, in ingresso al regolatore

In Figura 9 uscita del sistema non lineare in presenza dei rumori $n(t)d(t)$

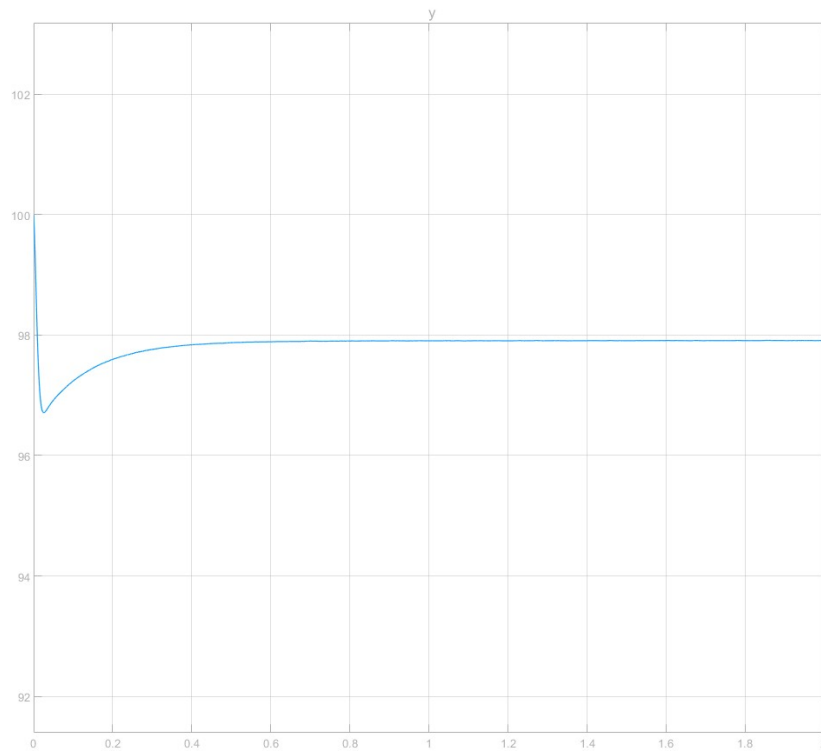


Figura 9

8 Conclusioni

Dalle precedenti sezioni si vede come il sistema in anello chiuso lineare rispetti le specifiche assegnate. Inoltre, l'uscita, esaurito il transitorio, rispetta il riferimento. Allo stesso modo anche il sistema non lineare rispetta il riferimento a meno di piccole oscillazioni dovute alla sua natura non lineare.