Controlli Automatici - T

Progetto Tipologia B- Traccia 1
Controllo trattamento farmacologico contro il cancro
Gruppo AI

Gregorio Cavulla, Alessio Benenati, Luca Capelli, Pietro Garotti

Il progetto riguarda l'utilizzo di tecniche di controlli automatici per il trattamento farmacologico di cellule cancerogene in ambiente di laboratorio, la cui dinamica viene descritta dalle seguenti equazioni differenziali.

$$\dot{n}_s = -r_s ln(\frac{n_s + n_r}{K})n_s - m_s c_f n_s - \beta n_s + \gamma n_r - \alpha c_f n_s \tag{1a}$$

$$\dot{n}_r = -r_r ln(\frac{n_s + n_r}{K})n_r - m_r c_f n_r + \beta n_s - \gamma n_r + \alpha c_f n_s, \tag{1b}$$

I parametri $r_s, r_r \in \mathbb{R}$ rappresentano i tassi di riproduzione delle due tipologie di cellule. Il parametro $K \in \mathbb{R}$ indica la capacità massima dell'ambiente di sostenere le cellule. La concentrazione del farmaco è rappresentata dalla variabile $c_f(t)$, che può variare nel tempo. I parametri $m_s, m_r \in \mathbb{R}$ determinano rispettivamente la mortalità delle cellule suscettibili e resistenti, con $m_s > m_r$. Nel sistema, le cellule possono mutare da una tipologia all'altra. Le cellule suscettibili possono diventare resistenti attraverso un processo influenzato dal parametro $\beta \in \mathbb{R}$. Questa mutazione è rappresentata dal termine $-\beta n_s$ nella prima equazione e βn_s nella seconda equazione. Analogamente, le cellule resistenti possono tornare alla tipologia suscettibile attraverso il termine γn_s, con $\gamma \in \mathbb{R}$. Infine, il termine $\alpha c_f n_r$ tiene conto delle cellule suscettibili che mutano in resistenti a causa del trattamento farmacologico. Questo termine tiene conto dell'interazione tra il farmaco presente nel sistema e le cellule suscettibili che mutano in resistenti.

1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2a}$$

$$y = h(x, u). \tag{2b}$$

Pertanto, andiamo individuare lo stato x, l'ingresso u e l'uscita y del sistema come segue

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} n_s \\ n_r \end{bmatrix}, \quad u := c_f, \quad y := n_r.$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni f ed h

$$f(x, u) := \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -r_s ln(\frac{x_1+x_2}{K}) - m_s u x_1 - \beta x_1 + \gamma x_2 - \alpha u x_1 \\ -r_r ln(\frac{x_1+x_2}{K}) - m_s u x_2 - \beta x_1 - \gamma x_2 + \alpha u x_1 \end{bmatrix}$$

$$h(x, u) := x_2.$$

Una volta calcolate f ed h esprimiamo (1) nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_s ln(\frac{x_1+x_2}{K}) - m_s u x_1 - \beta x_1 + \gamma x_2 - \alpha u x_1 \\ -r_r ln(\frac{x_1+x_2}{K}) - m_s u x_2 - \beta x_1 - \gamma x_2 + \alpha u x_1 \end{bmatrix} \tag{3a}$$

$$y = x_2. \tag{3b}$$

Da specifiche ci viene dato il valore di equilibrio $x_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{s,e} \\ n_{r,e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}$

A partire dal quale troviamo la coppia di equilibrio (x_e, u_e) di (3), risolvendo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7u100 - 0.2u100 \\ -0.15u100 + 0.2u100 \end{bmatrix} \tag{4}$$

dal quale otteniamo

$$x_e := \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad u_e = 0 \tag{5}$$

Definiamo le variabili alle variazioni δx, δu e δy come

$$\delta x = x - x_e, \quad \delta u = u - u_e, \quad \delta y = y - y_e.$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \tag{6a}$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u, \tag{6b}$$

dove le matrici A, B, C e D vengono calcolate come

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} -1.05 & -0.45 \\ -0.35 & -0.95 \end{bmatrix} \tag{7a}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} -90 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{7b}$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7c}$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \tag{7d}$$

2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'ingresso δu all'uscita δy mediante la seguente formula

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{5(s + 7.35)}{(s + 1.4)(s + 0.6)}. \tag{8}$$

Dunque il sistema linearizzato (6) è caratterizzato dalla funzione di trasferimento (8) con 2 poli $p_1 = -1.4, p_2 = -0.6$ e uno zero $z_1 = -7.35$.
In Figura 1 mostriamo il corrispondente diagramma di Bode.

Figura 1

3 Mappatura specifiche del regolatore

Le specifiche da soddisfare sono

1) Errore a regime nullo con riferimeto a gradino

2) $M_f \geq 40°$ per garantire una certa robustezza del sistema

3) $S\% \geq 7\%$: specifica equivalente a $M_f \geq 64.61°$

4) $T_a, 5 = 1s$.

5) Il distubo sull'uscita $d(t)$, con una banda limitata nel range di pulsazioni $\begin{bmatrix}0, & 0.05\end{bmatrix}$, deve essere abbattuto di almeno $60dB$

6) Il rumore di misura $n(t)$, con unabanda limitata nel range di pulsazioni $\begin{bmatrix}10^4, & 10^6\end{bmatrix}$, deve essere abbattuto di almeno $90dB$

Andiamo ad effettuare la mappatura punto per punto le specifiche richieste.

1) Per soddisfare la prima richiesta abbiamo bisogno di un polo nell'origine

2) Per quanto riguarda le specifiche (2) e (3) dobbiamo soddisfare la più stringente delle 2, quindi abbiamo bisogno di $M_f \geq 64.61°$

3) La specifica (4) sul tempo di assestamento ci dà un limite inferiore per la pulsazione critica di attraversamento ω_c. Si ha $\omega_c \geq \frac{300}{M_f 1} \approx 4.64 rad/s$

4) nel range di pulsazioni $\begin{bmatrix}0, & 0.05\end{bmatrix}$ come da specifica (5), $|L(j\omega)|_d B \geq 60dB$.

5) nel range di pulsazioni $\begin{bmatrix}10^4, & 10^6\end{bmatrix}$ come da specifica (6), $|L(j\omega)|_d B \geq -90dB$.

Pertanto, in Figura 2, mostriamo il diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$ con le zone proibite emerse dalla mappatura delle specifiche.

Figura 2

4 Sintesi del regolatore statico

In questa sezione progettiamo il regolatore statico $R_s(s)$ partendo dalle analisi fatte in sezione 3. Per ottenere un errore a regime nullo, è necessario che il regolatore statico abbia un polo nell'origine. Pertanto questo sarà nella seguente forma.

$$R_s(s) = \frac{1}{s} \tag{9}$$

Dunque, definiamo la funzione estesa $G_e(s) = R_s(s)G(s)$ e, in Figura 3, mostriamo il suo diagramma di Bode per verificare se e quali zone proibite vengono attraversate.

Figura 3

Da Figura ..., emerge che non stiamo rispettando i vincoli sul disturbo di uscita A_d, margine di fase M_f e tempo di assestamento $\omega_{e,min}$

5 Sintesi del regolatore dinamico

In questa sezione, progettiamo il regolatore dinamico $R_d(s)$. Dalle analisi fatte in Sezione 4, notiamo di essere nello Scenario di tipo B. Dunque, progettiamo $R_d(s)$ riccorrendo ad una rete anticipatrice.I parametri α e τ del regolatore dinamico sono stati determinati mediante le formule di inversione, considerando in particolare $M_f^{=} M_{f,spec} + 12$ e $\omega_c^{=} 100$. Di conseguenza, si ottiene il seguente risultato.

$$R_s(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \tau \alpha s} \tag{10}$$

Al fine di rispettare il vincolo sul disturbo n_d, è stato aggiunto un polo ad alta frequenza. Di conseguenza, il regolatore dinamico assume la seguente forma finale.

$$R_s(s) = \frac{1 + \tau s}{(1 + \tau \alpha s)(1 + \tau_{hfreq})s} \quad \text{con } \tau_{\text{hfreq}} = \frac{1}{500} \tag{11}$$

In Figura 4, mostriamo il diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s) = R_d(s)G_e(s)$

Figura 4

6 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, dopo avere ottenuto le funzioni di sensibilità $F(s)$ relative a $L(s)$, valutiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema linearizzato considerando la presenza dei rumori $n(t)$ e $d(t)$, nonché la risposta al riferimento a gradino $\omega(t)$. Esse risultano.

$$-y_\omega = F(s)W(s) \tag{12a}$$

Figura 5

$$-y_d = S(s)D(s) \tag{13a}$$

Figura 6

$$-y_\omega = -F(s)N(s) \tag{14a}$$

Figura 7

Infine, otteniamo l'uscita complessiva applicando il principio di sovrapposizione degli effetti e sommando le diverse uscite.

$$-y_{\text{tot}} = y_\omega + y_d + y_n \tag{15a}$$

Figura 8

Possiamo osservare come l'uscita soddisfi i vincoli relativi alla sovraelongazione percentuale e al tempo di assestamento.

7 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, valutiamo l'efficacia del controllore progettato mediante la sostituzione del nostro sistema non lineare alla funzione di trasferimento $G(s)$ all'interno dello schema di controllo.

Dovremo inoltre apportare le seguenti modifiche:

1) Aggiungere u_e in ingresso al sistema come parte dell'ingresso totale u, quindi $u = \delta u + u_e$. L'uscita sarà semplicemente y anziché δy.

2) Sottrarre y_e in uscita al sistema, in modo da ottenere l'uscita corretta $\delta = y - y_e$. Questo consentirà di calcolare l'errore corretto e sottraendo il riferimento r da δ e utilizzarlo come ingresso per il regolatore.

In figura mostreremo l'uscita del sistema non lineare considerando la presenza dei rumori $n(t)$ e $d(t)$.

Figura 9

8 Conclusioni

Dalle sezioni precedenti si osserva come il sistema lineare a anello chiuso soddisfi le specifiche assegnate. Inoltre, esaurito il transitorio, l'uscita rispetta il riferimento. Allo stesso modo, anche il sistema non lineare rispetta il riferimento, sebbene possano verificarsi piccole oscillazioni a causa della sua natura non lineare.