Controlli Automatici – T

Progetto Tipologia b – Traccia 1

Controllo trattamento farmacologico contro il cancro

Gruppo AI

Alessio Benenati, Luca Capelli, Pietro Garotti, Gregorio Cavulla

Il progetto riguarda l'utilizzo di tecniche di controlli automatici per il trattamento farmacologico di cellule cancerogene in ambiente di laboratorio, la cui dinamica viene descritta dalle seguenti equazioni differenziali

$$\dot{n}_s = -r_s \ln\left(\frac{n_s + n_r}{K}\right) n_s - m_s c_f n_s - \beta n_s + \gamma n_r - \alpha c_f n_s$$

(1A)

$$\dot{n}_r = -r_r \ln\left(\frac{n_s + n_r}{K}\right) n_r - m_r c_f n_r + \beta n_s - \gamma n_r + \alpha c_f n_s$$

(2B)

1. Espressione del Sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema nella seguente forma di stato:

$$\dot{x} = f(x,u)$$

(2A)

$$y = h(x,u)$$

(2B)

Pertanto, andiamo ad individuare lo stato x, l'ingresso u e l'uscita y del sistema come segue

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} n_s \\ n_r \end{bmatrix}$$

$$u := c_f$$

$$y := n_r$$

Coerentemente a questa scelta, ricaviamo dal sistema (1):

$$f(x,u) = -r_s \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{K}\right) x_1 - m_s u x_1 - \beta x_1 + \gamma x_2 - \alpha u x_1$$

$$h(x,u) = -r_r \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{K}\right) x_2 - m_r u x_2 + \beta x_1 - \gamma x_2 + \alpha u x_1$$

Sostituendo a (3) i valori di $r_s, r_r, K, m_s, m_r, \alpha, \beta$ otteniamo:

$$f(x,u) = -1.5 \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{200}\right) x_1 - 0.7 u x_1 - 0.3 x_1 + 0.3 x_2 - 0.2 u x_1$$

$$h(x,u) = -1.3 \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{K}\right) x_2 - 0.15 u x_2 + 0.3 x_1 - 0.3 x_2 + 0.2 u x_1$$

Una volta calcolate f ed h esprimiamo (1) nella seguente forma di stato:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{200}\right) x_1 - 0.7 u x_1 - 0.3 x_1 + 0.3 x_2 - 0.2 u x_1 \\ -1.3 \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{K}\right) x_2 - 0.15 u x_2 + 0.3 x_1 - 0.3 x_2 + 0.2 u x_1 \end{bmatrix}$$

(3A)

$$y = x_2$$

(3A)

Per trovare la coppia di equilibrio (x_e, u_e) andiamo a risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} -1.5 \ln\left(\frac{x_{e1} + x_{e2}}{200}\right) x_{e1} - 0.7 u_e x_{e1} - 0.3 x_{e1} + 0.3 x_{e2} - 0.2 u_e x_{e1} = 0 \\ -1.5 \ln\left(\frac{x_{e1} + x_{e2}}{200}\right) x_1 - 0.7 u_e x_{e1} - 0.3 x_{e1} + 0.3 x_{e2} - 0.2 u_e x_{e1} = 0 \\ x_{e1} = 100 \\ x_{e2} = 100 \end{cases}$$

(4)

Dal quale otteniamo:

$$\begin{bmatrix} x_{e1} \\ x_{e2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}, \qquad u_e = 0$$

(5)

Definiamo le variabili alle variazioni $\delta x, \delta u, \delta y$ come:

$$\delta x = x - x_e, \qquad \delta u = u - u_e, \qquad \delta y = y - y_e$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può approssimativamente essere descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\dot{\delta x} = A \delta x + B \delta u$$

(6A)

$$\delta y = C \delta x + D \delta u$$

(6B)

dove le matrici A, B, C e D vengono calcolate come:

$$A = \left.\frac{df(x,u)}{dx}\right|_{x_e,u_e} = \begin{bmatrix} \left.\frac{df_1(x,u)}{dx_1}\right|_{x_e,u_e} & \left.\frac{df_1(x,u)}{dx_2}\right|_{x_e,u_e} \\ \left.\frac{df_2(x,u)}{dx_1}\right|_{x_e,u_e} & \left.\frac{df_2(x,u)}{dx_2}\right|_{x_e,u_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.05 & -0.45 \\ -0.35 & -0.95 \end{bmatrix} \tag{7A}$$

$$B = \left.\frac{df(x,u)}{du}\right|_{x_e,u_e} = \begin{bmatrix} \left.\frac{df_1(x,u)}{du}\right|_{x_e,u_e} \\ \left.\frac{df_2(x,u)}{du}\right|_{x_e,u_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90 \\ +5 \end{bmatrix} \tag{7B}$$

$$C = \left.\frac{dh(x,u)}{dx}\right|_{x_e,u_e} = \begin{bmatrix} \left.\frac{dh(x,u)}{dx_1}\right|_{x_e,u_e} & \left.\frac{dh(x,u)}{dx_2}\right|_{x_e,u_e} \end{bmatrix} = [0,1] \tag{7C}$$

$$D = \left.\frac{dh(x,u)}{du}\right|_{x_e,u_e} = 0 \tag{7D}$$

2. Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'ingresso δu mediante la seguente formula

$$\begin{aligned} G(s) = (C(sI - A)^{-1}B + D) &= [0,1]\left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1.05 & -0.45 \\ -0.35 & -0.95 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -90 \\ +5 \end{bmatrix} \\ &= [0,1] \begin{bmatrix} \frac{s+0.95}{(s+1.05)(s+0.95)-0.1575} & \frac{-0.3-0.455}{(s+1.05)(s+0.95)-0.1575} \\ \frac{-0.35}{(s+1.05)(s+0.95)-0.1575} & \frac{s+1.05}{(s+1.05)(s+0.95)-0.1575} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -90 \\ +5 \end{bmatrix} \\ &= 5\frac{s+7.35}{(s+0.6)(s+1.4)} \end{aligned} \tag{8}$$

Dunque il sistema linearizzato (6) è caratterizzato dalla funzione di trasferimento (8) con 2 poli $p_1 = -0.6$, $p2 = -1.4$ ed 1 zero $z_1 = -7.35$, in Figura 1 mostriamo il corrispondente diagramma di Bode

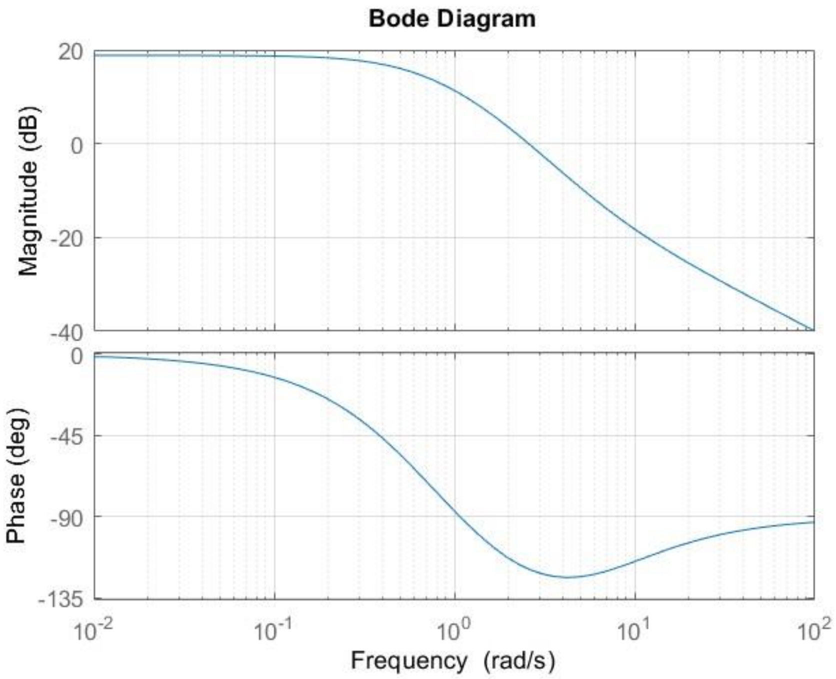

FIGURA 1

3. Mappatura specifiche del regolatore
4. Sintesi del regolatore statico
5. Sintesi del regolatore dinamico
6. Test su sistema linearizzato
7. Test sul sistema non lineare