

Controlli Automatici - T

Progetto Tipologia B- Traccia 1

Controllo trattamento farmacologico contro il cancro

Gruppo AI

Alessio Benenati, Gregorio Cavulla, Luca Capelli, Pietro Garotti

Il progetto si concentra sull'applicazione di tecniche di controllo automatico per il trattamento farmacologico di cellule cancerose in un ambiente di laboratorio. La dinamica di queste cellule è descritta dalle seguenti equazioni differenziali.

$$\dot{n}_s = -r_s \ln\left(\frac{n_s + n_r}{K}\right)n_s - m_s c_f n_s - \beta n_s + \gamma n_r - \alpha c_f n_s \quad (1a)$$

$$\dot{n}_r = -r_r \ln\left(\frac{n_s + n_r}{K}\right)n_r - m_r c_f n_r + \beta n_s - \gamma n_r + \alpha c_f n_s, \quad (1b)$$

I parametri $r_s, r_r \in \mathbb{R}$ rappresentano i tassi di riproduzione delle due tipologie di cellule. Il parametro $K \in \mathbb{R}$ indica la capacità massima dell'ambiente di sostenere le cellule. La concentrazione del farmaco è rappresentata dalla variabile $c_f(t)$, che può variare nel tempo. I parametri $m_s, m_r \in \mathbb{R}$ determinano rispettivamente la mortalità delle cellule suscettibili e resistenti, con $m_s > m_r$. Nel sistema, le cellule possono mutare da una tipologia all'altra. Le cellule suscettibili possono diventare resistenti attraverso un processo influenzato dal parametro $\beta \in \mathbb{R}$. Questa mutazione è rappresentata dal termine $-\beta n_s$ nella prima equazione e βn_s nella seconda equazione. Analogamente, le cellule resistenti possono tornare alla tipologia suscettibile attraverso il termine γn_r , con $\gamma \in \mathbb{R}$. Infine, il termine $\alpha c_f n_r$ tiene conto delle cellule suscettibili che mutano in resistenti a causa del trattamento farmacologico. Questo termine tiene conto dell'interazione tra il farmaco presente nel sistema e le cellule suscettibili che mutano in resistenti.

1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (2a)$$

$$y = h(x, u). \quad (2b)$$

Pertanto, andiamo individuare lo stato x , l'ingresso u e l'uscita y del sistema come segue

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} n_s \\ n_r \end{bmatrix}, \quad u := c_f, \quad y := n_r.$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni f ed h

$$f(x, u) := \begin{bmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -r_s \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{K}\right) - m_s u x_1 - \beta x_1 + \gamma x_2 - \alpha u x_1 \\ -r_r \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{K}\right) - m_r u x_2 - \beta x_1 - \gamma x_2 + \alpha u x_1 \end{bmatrix}$$

$$h(x, u) := x_2.$$

Una volta calcolate f ed h esprimiamo (1) nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_s \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{K}\right) - m_s u x_1 - \beta x_1 + \gamma x_2 - \alpha u x_1 \\ -r_r \ln\left(\frac{x_1 + x_2}{K}\right) - m_r u x_2 - \beta x_1 - \gamma x_2 + \alpha u x_1 \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$y = x_2. \quad (3b)$$

Da specifiche ci viene dato il valore di equilibrio $x_e = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{s,e} \\ n_{r,e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}$

A partire dal quale troviamo la coppia di equilibrio (x_e, u_e) di (3), risolvendo il seguente sistema di equazioni

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.7u100 - 0.2u100 \\ -0.15u100 + 0.2u100 \end{bmatrix} \quad (4)$$

dal quale otteniamo

$$x_e := \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix}, \quad u_e = 0 \quad (5)$$

Definiamo le variabili alle variazioni δx , δu e δy come

$$\delta x = x - x_e, \quad \delta u = u - u_e, \quad \delta y = y - y_e.$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \quad (6a)$$

$$\delta y = C\delta x + D\delta u, \quad (6b)$$

dove le matrici A , B , C e D vengono calcolate come

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} -1.05 & -0.45 \\ -0.35 & -0.95 \end{bmatrix} \quad (7a)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} -90 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (7b)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_1} & \frac{\partial h(x,u)}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7c)$$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial h(x,u)}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \quad (7d)$$

2 Calcolo Funzione di Trasferimento

In questa sezione, andiamo a calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ dall'ingresso δu all'uscita δy mediante la seguente formula

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D = \frac{5(s + 7.35)}{(s + 1.4)(s + 0.6)}. \quad (8)$$

Dunque il sistema linearizzato (6) è caratterizzato dalla funzione di trasferimento (8) con 2 poli $p_1 = -1.4$, $p_2 = -0.6$ e uno zero $z_1 = -7.35$.

In Figura 1 mostriamo il corrispondente diagramma di Bode.

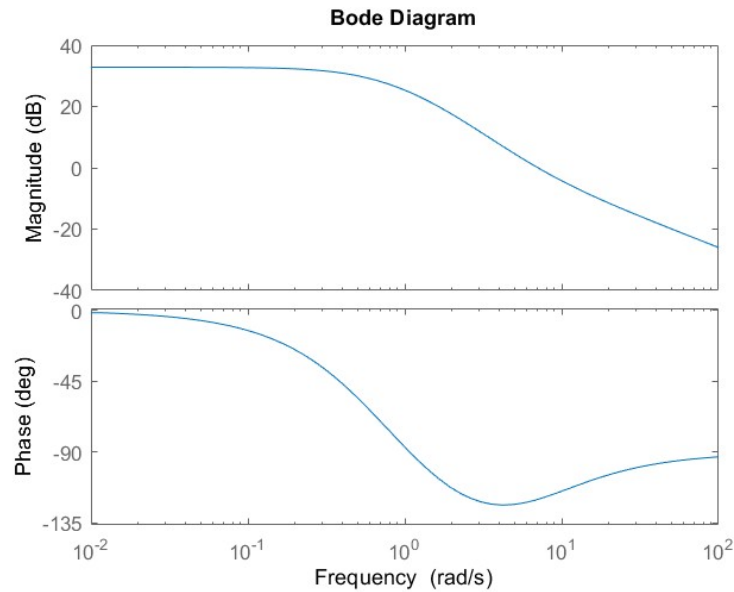


Figura 1

3 Mappatura specifiche del regolatore

Le specifiche da soddisfare sono

- 1) Errore a regime nullo con riferimeto a gradino
- 2) $M_f \geq 40^\circ$
- 3) $S\% \geq 7\%$: ovvero $M_f \geq 64.61^\circ$
- 4) $T_{a,5} = 1s$.

5) $d(t)$ attenuato di almeno $60dB$ in $[0, 0.05]$

6) $n(t)$ attenuato di almeno $90dB$ in $[10^4, 10^6]$

Andiamo ad effettuare la mappatura punto per punto le specifiche richieste.

- 1) L'errore a regime nullo si traduce nella necessità di un polo nell'origine.
- 2) Le specifiche 2 e 3 sono entrambe sul margine di fase, perciò andiamo a soddisfare la più stringente. Otteniamo quindi $M_f \geq 64.61^\circ$.
- 3) Dalla specifica 4, sul tempo di assestamento $T_{a,5}$, ricaviamo: $\omega_c \geq \frac{300}{M_f 1} \approx 4.64 rad/s$.

4) Dalla specifica 5 ricaviamo $|L(j\omega)|_{dB} \geq 60dB$ in $[0, 0.05]$.

5) Dalla specifica 6 ricaviamo $|L(j\omega)|_{dB} \leq -90dB$ in $[10^4, 10^6]$.

Pertanto, in Figura 2, mostriamo il diagramma di Bode della funzione di trasferimento $G(s)$ con le zone proibite emerse dalla mappatura delle specifiche.

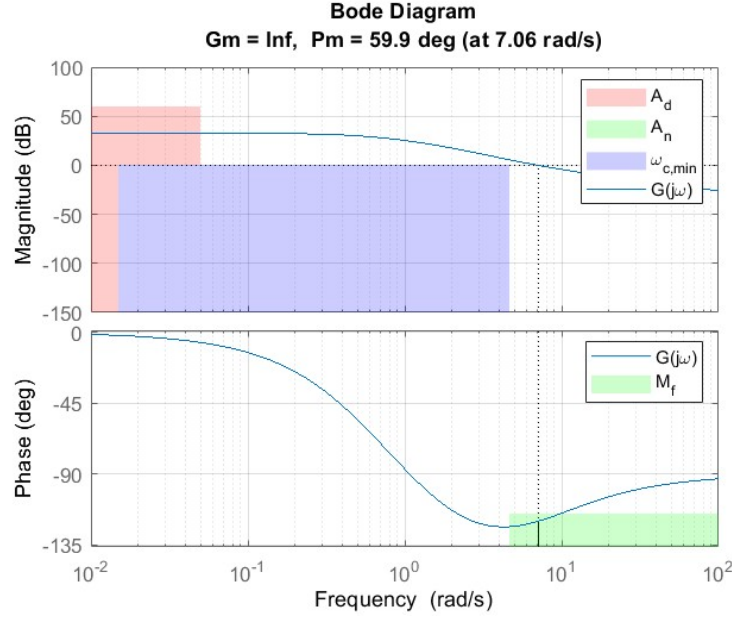


Figura 2

4 Sintesi del regolatore statico

In questa sezione progettiamo il regolatore statico $R_s(s)$ partendo dalle analisi fatte in sezione 3. Vista la specifica 1 sull'errore a regime nullo, il regolatore dovrà avere un polo nell'origine. Pertanto questo sarà nella seguente forma.

$$R_s(s) = \frac{1}{s} \quad (9)$$

Dunque, definiamo la funzione estesa $G_e(s) = R_s(s)G(s)$ e, in Figura 3, mostriamo il suo diagramma di Bode per verificare se e quali zone proibite vengono attraversate.

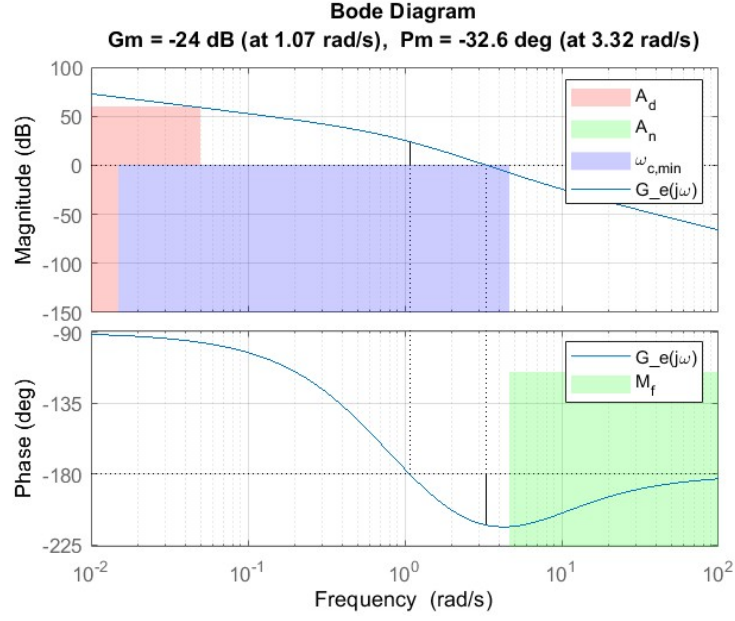


Figura 3

Da Figura 3, emerge che la $G_e(s)$ non rispetta i vincoli sul disturbo di uscita A_d , sul margine di fase M_f e sul tempo di assestamento $\omega_{c,min}$

5 Sintesi del regolatore dinamico

In questa sezione, progettiamo il regolatore dinamico $R_d(s)$. Dalle analisi fatte in Sezione 4, notiamo di essere nello Scenario di tipo B. Dunque, progettiamo $R_d(s)$ ricorrendo ad una rete anticipatrice. Utilizziamo le formule di inversione per calcolare α e τ di $R_d(s)$, prendendo $M_f^* = M_{f,spec} + 20$ e $\omega_c^- = 100$. Otteniamo quindi:

$$R_s(s) = \frac{1 + \tau s}{1 + \tau \alpha s} \quad (10)$$

Al fine di rispettare il vincolo sul disturbo n_d , è stato aggiunto un polo ad alta frequenza τ_{hfreq} . Di conseguenza, il regolatore dinamico assume la seguente forma finale.

$$R_s(s) = \frac{1 + \tau s}{(1 + \tau \alpha s)(1 + \tau_{hfreq} s)} \quad \text{con } \tau_{hfreq} = \frac{1}{500} \quad (11)$$

In Figura 4, mostriamo il diagramma di Bode della funzione d'anello $L(s) = R_d(s)G_e(s)$

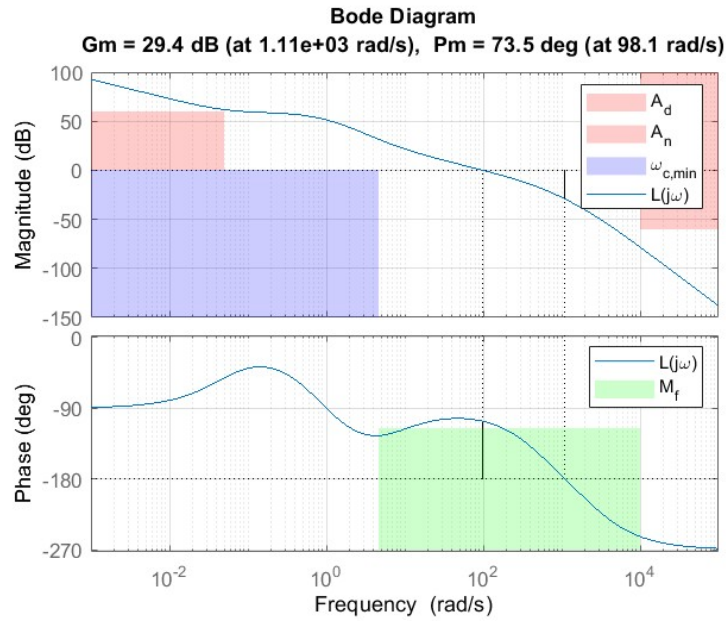


Figura 4

6 Test sul sistema linearizzato

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul sistema linearizzato considerando in primo luogo le risposte al riferimento a gradino $\omega(t)$ e ai rumori $n(t)$ e $d(t)$. Per poi ottenere l'uscita complessiva y_{tot} sommando le singole risposte per il principio di sovrapposizione degli effetti.

$$y_\omega = F(s)W(s) \quad (12a)$$

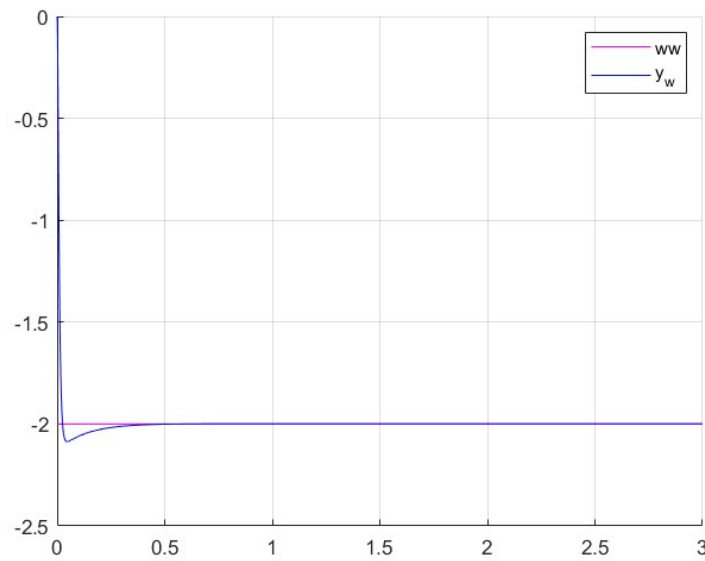


Figura 5

$$y_d = S(s)D(s) \quad (13a)$$

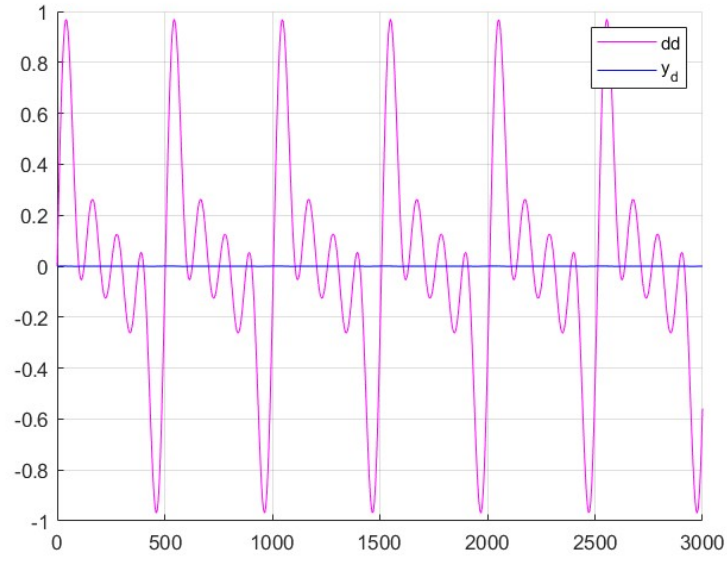


Figura 6

$$y_\omega = -F(s)N(s) \quad (14a)$$

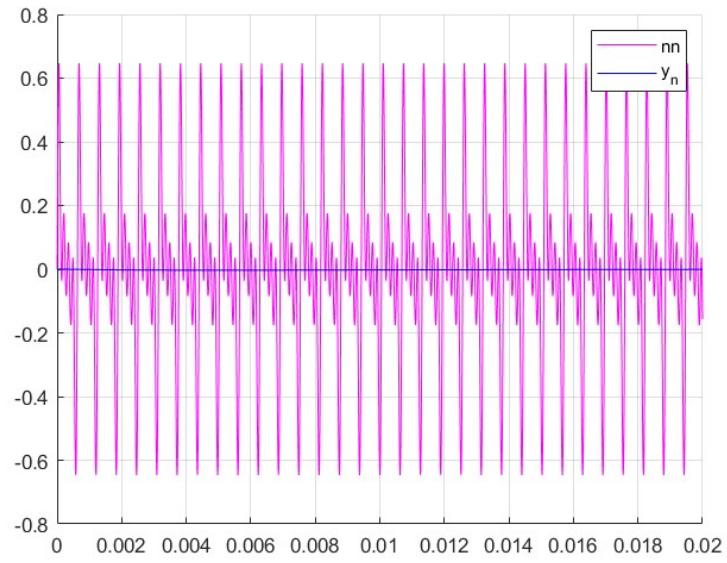


Figura 7

$$y_{\text{tot}} = y_{\omega} + y_d + y_n \quad (15a)$$

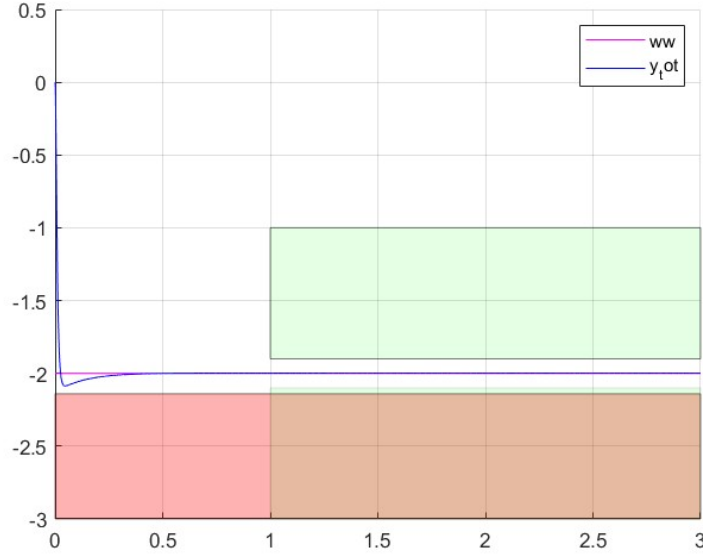


Figura 8

Da Figura 8 notiamo che l'uscita soddisfa i vincoli relativi alla sovraelongazione percentuale e al tempo di assestamento.

7 Test sul sistema non lineare

In questa sezione, testiamo l'efficacia del controllore progettato sul modello non lineare. Per fare ciò dovremo:

- 1) Aggiungere u_e in ingresso al sistema come parte dell'ingresso totale u , quindi $u = \delta u + u_e$. L'uscita sarà y anziché δy .
- 2) Sottrarre y_e in uscita al sistema, così da avere l'uscita $\delta y = y - y_e$. Questo consentirà di calcolare l'errore e sottraendo δy dal riferimento ω e utilizzarlo come ingresso per il regolatore.

In figura mostreremo l'uscita del sistema non lineare considerando i $n(t)$ e $d(t)$.

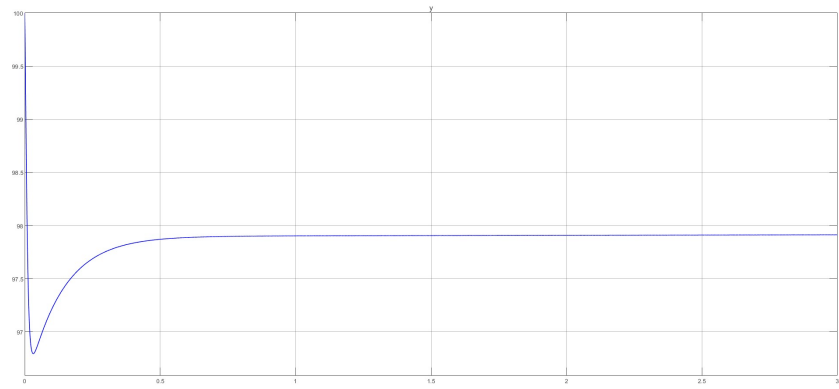


Figura 9

8 Conclusioni

In conclusione possiamo apprezzare come sia il sistema lineare in anello chiuso che quello non lineare rispettino le specifiche assegnate, e che, esaurito il transitorio, l'uscita tende a seguire il riferimento $\omega(t)$ assegnato.