



# 自动控制原理

(Principle of Automatic Control)

• 河北工程大学机械与装备工程学院

• 任课教师：白小帆

• 2024-1-15



# 第二章 控制系统的数学模型

- ◆ 2-0 基本概念：数学模型及常见的系统
- ◆ 2-1 时域模型-微分方程：使用微分方程的建立模型
- ◆ 2-2 复域模型-传递函数：借助拉氏变换，给出系统传递函数模型
- ◆ 2-3 控制系统方块图：掌握方框图的建立及化简
- ◆ 2-4 状态空间模型：现代控制理论分析、设计系统的基础。



## 2-0 相关概念

◆ 数学模型定义：是描述系统内部与外部物理量（或变量）之间关系的数学表达式。

◆ 建立数学模型的目的：

- ① 是分析和设计控制系统的基础
- ② 系统的组成可以是电气的、机械的、液  
压或气动的等等，然而描述不同系统的  
数学模型却可以是相同的。通过数学模  
型来研究自控系统，可以摆脱各种不同  
类型系统的外部特征，研究其内在的共  
性运动规律（抛去外表看本质）。



抽象的数学模型



## 2-0 相关概念

◆ 建立数学模型的**方法**:

①**解析法（机理模型）**: 依据系统及元件各变量之间所遵循的物理、化学定律，列出各变量之间的数学关系式

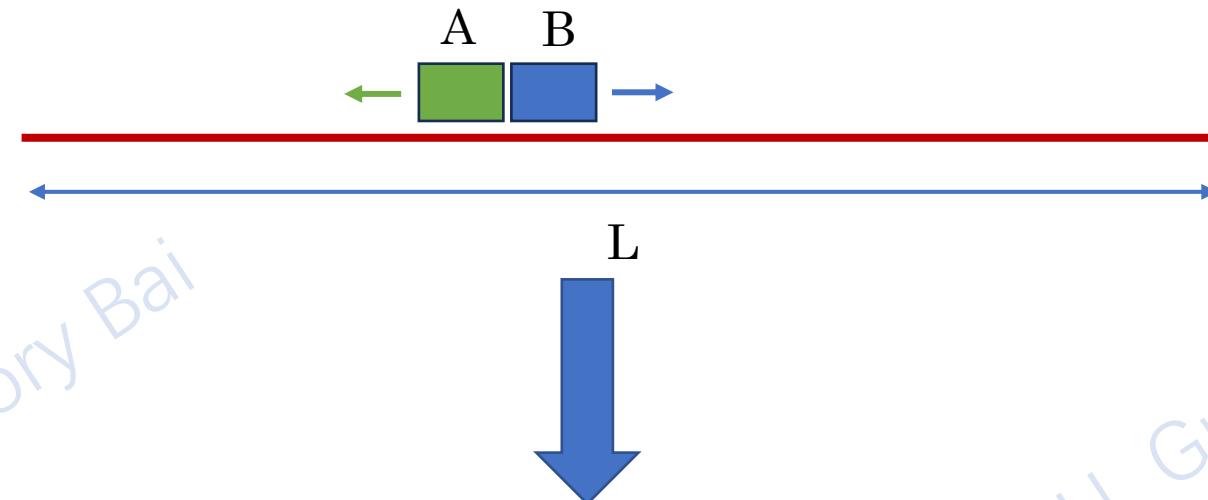
②**实验法（实验建模）**: 对系统施加**典型测试信号**（脉冲、阶跃或正弦信号），记录系统的**时间响应曲线**或**频率响应曲线**，从而获得系统的**传递函数**或**频率特性**。



## 2-0 相关概念

- ◆ **数学模型定义**: 是描述系统内部与外部物理量（或变量）之间关系的数学表达式。

**例2.0:** 有A和B两物体匀速运动，速度分别为 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$ ，分别运行 $m$ 和 $n$ 小时后停止，求距离 $L$ 。



数学模型

$$m\dot{x} + n\dot{y} = L$$



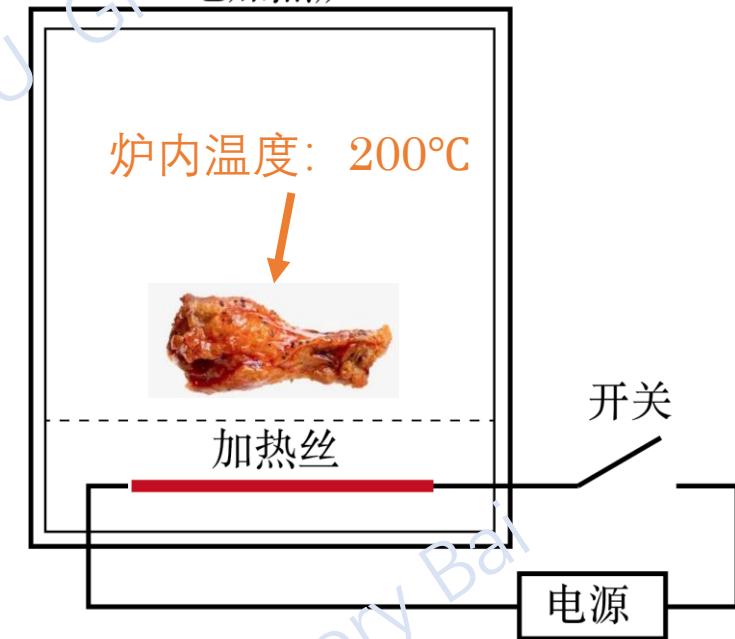
## 2-0 相关概念

### Q2-1：什么是合理的数学模型？

- 建立的数学模型既有准确性，又有简化性。
- 一般应根据系统的实际结构参数及要求的控制精度，略去次要因素，突出主要问题，使模型既能准确反映系统的根本动态本质，又能简化分析计算的工作。
- 除非系统含有强非线性或参数随时间变化较大，一般尽可能采用线性定常数学模型描述自动控制系统。即对弱非线性参数进行线性化处理。

环境温度:  $30^{\circ}\text{C}/-10^{\circ}\text{C}$

电加热炉



在对电加热炉建模过程中，核心控制参数是什么？环境因素是主要因素还是次要因素？升温过程中的非线性是否可以忽略？



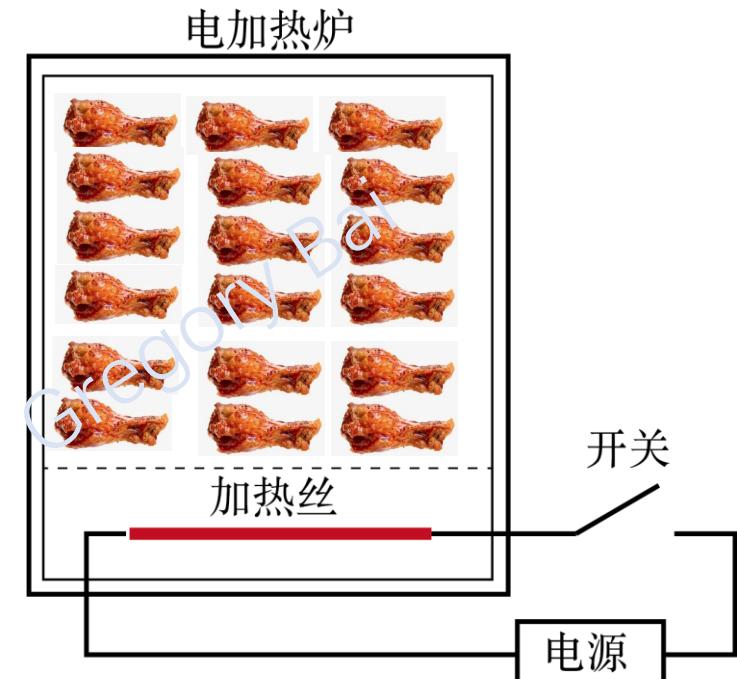


## 2-0 相关概念

Q2-2: 什么是集中参数系统和分布参数系统?

- ◆ **集中参数系统**: 变量仅仅是时间 $t$ 的函数。这类系统建立的动态数学模型通常是微分方程。
- ◆ **分布参数系统**: 变量不仅是时间 $t$ 的函数，而且还是空间的函数。这类系统建立的动态数学模型通常是偏微分方程。例如：很大的加热炉，温度随空间位置不同是有梯度变化的。

注意：在实际系统中，大多数系统都是分布式参数系统，但由于偏微分方程求解比较困难，因此在一定误差允许范围内。对系统作一个近似，近似为集中参数系统，这样就可以用微分方程进行分析。)





## 2-0 相关概念

### Q2-3：什么是线性定常系统？

- ◆ **线性系统**：能够用**线性数学模型**(线性的代数方程、微分方程、差分方程等)描述的系统，称为线性系统。这类系统的基本特性，即输出响应特性、状态响应特性、状态转移特性等均满足**线性关系**。
- ◆ 对于控制系统而言，由**线性元件**构成的系统为**线性系统**，其运动方程一般为**线性微分方程**。若其各项系数为常数，则称为**线性定常系统**。

判断方法：在动态研究中，如果系统在**多个输入作用下的输出等于各输入单独作用下的输出和**（可加性），并且**当输入增大倍数时，输出相应增大同样的倍数**（均匀性），就满足**叠加原理**，因而系统可以看成线性系统。

$$f(x_1) + f(x_2) = f(x_1 + x_2)$$



## 2-0 相关概念

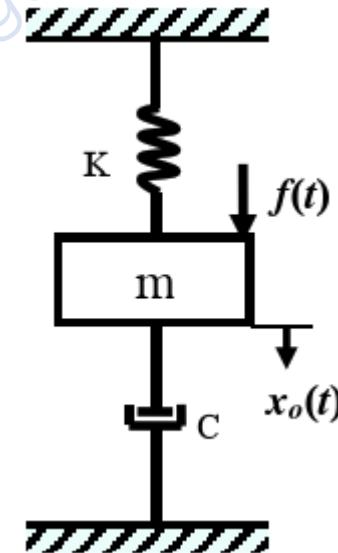
Q2-4：线性定常系统与线性时变系统的区别？

◆ 线性定常系统：

- 如果描述一个线性系统的微分方程系数为常数，那么称系统为线性定常系统。
- 如  $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$

◆ 线性时变系统：

- 如果描述一个线性系统的微分方程系数为时间的函数，那么称系统为线性时变系统。
- 如  $\frac{(100-t)}{100}m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$



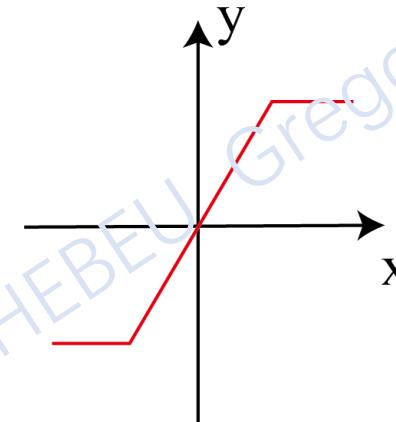


## 2-0 相关概念

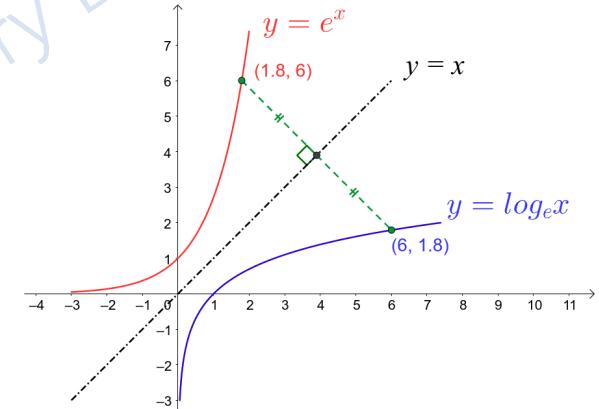
### Q2-5：什么是非线性系统？

- ◆ **非线性系统：**不满足叠加原理的系统，就是非线性系统。因此非线性系统对两个输入量的响应不能合并进行计算，因此系统分析将比较困难，很难找到一般通用方法。但在实际系统中，绝对线性的系统是不存在的，通常所谓的线性系统也是在一定工作范围内才保证线性的。如放大器，在小信号时可能出现“死区”，在大信号时，又可能出现**饱和现象**。
- ◆ 非线性微分方程：

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + y = A \sin(\omega t)$$



饱和现象



非线性函数



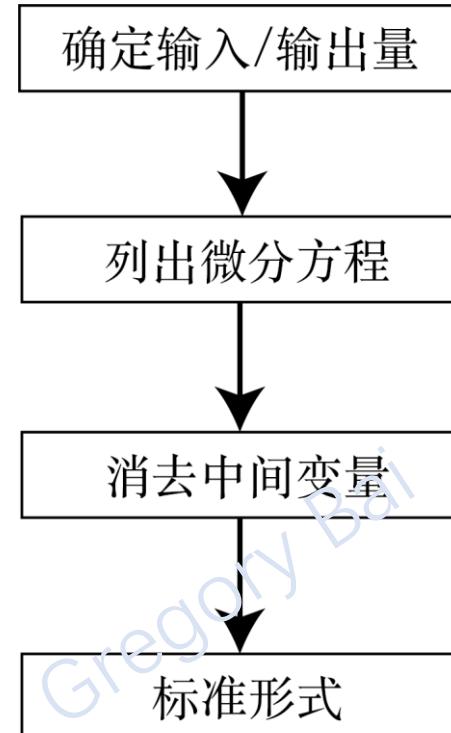
奶茶中冰块融化速度



# 2-1 时域数学模型

## ◆ 2-1-1 建立系统时域数学模型（微分方程）的步骤：

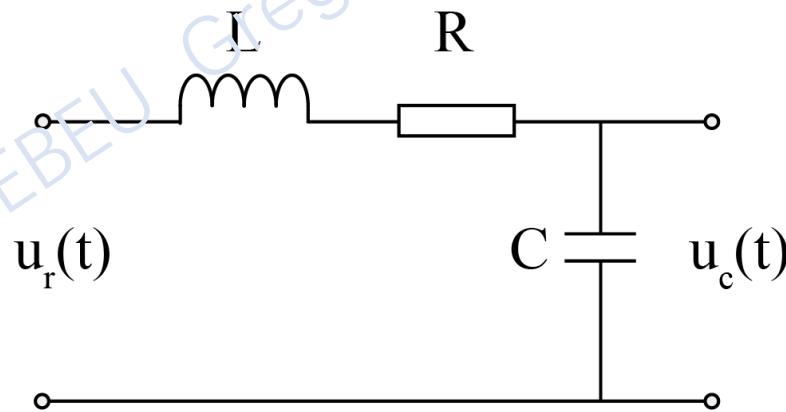
- ① 确定系统/元件输入量和输出量；
- ② 根据物理或化学定律，列出元件的原始方程；
- ③ 在可能条件下，对各元件的原始方程进行适当简化，略去一些次要因素或进行线性化处理；
- ④ 消去中间变量，得到描述元件输入和输出关系的微分方程；
- ⑤ 对微分方程进行标准化处理：
  - 1) 与输出量相关的各项置于等号左侧，
  - 2) 与输入量相关的置于等号右边；
  - 3) 等号左右各项均按降幂排列；
  - 4) 将各项系数归化为具有一定物理意义的形式。





## 2-1-1 建立系统时域数学模型（微分方程）的步骤

### 例2.1: LRC电路建模



建立模型的过程:

① 确定元件的输入量和输出量:

Input:  $u_r(t)$

Output:  $u_c(t)$

② 列出元件的原始方程:

设回路电流为  $i(t)$ , 由基尔霍夫定律写出  
回路方程为:

$$\left\{ \begin{array}{l} L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt + Ri(t) = u_r(t) \\ u_c(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \end{array} \right.$$

③ 消去中间变量并化为标准形式:

消去中间变量  $i(t)$ , 得到描述网络输入  
输出关系的 **微分方程** 为:

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

时域数学模型



## 2-1-2 拉普拉斯变换法求解线性定常微分方程

时域数学模型求解：

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

线性定常微分方程形式

系统线性定常微分方程

+  
给定初始条件 (initial  
condition)

-  
输入量(input)

定量研究控制系统的工作特性  
(例如在  $t = 0$  时  $u_r$  为 10 V, 求  $u_c$  的波形?)



求解方法：经典法、拉氏变换法



## 2-1-2 线性定常微分方程的求解

线性定常微分方程形式

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

### ◆ 拉氏变换法求解步骤：

- ①考虑初始条件，对微分方程中的每一项分别进行拉氏变换，得到变量s的代数方程；
- ②求出输出量表达式的拉氏变换函数；
- ③对输出量进行拉氏反变换，得到输出量的时域表达式，即为所求微分方程的解。



## 2-1-2 线性定常微分方程的求解

### ◆ 拉氏 (Laplace) 变换**定义**:

设函数 $f(t)$ 当 $t \geq 0$ 时有定义，而且积分

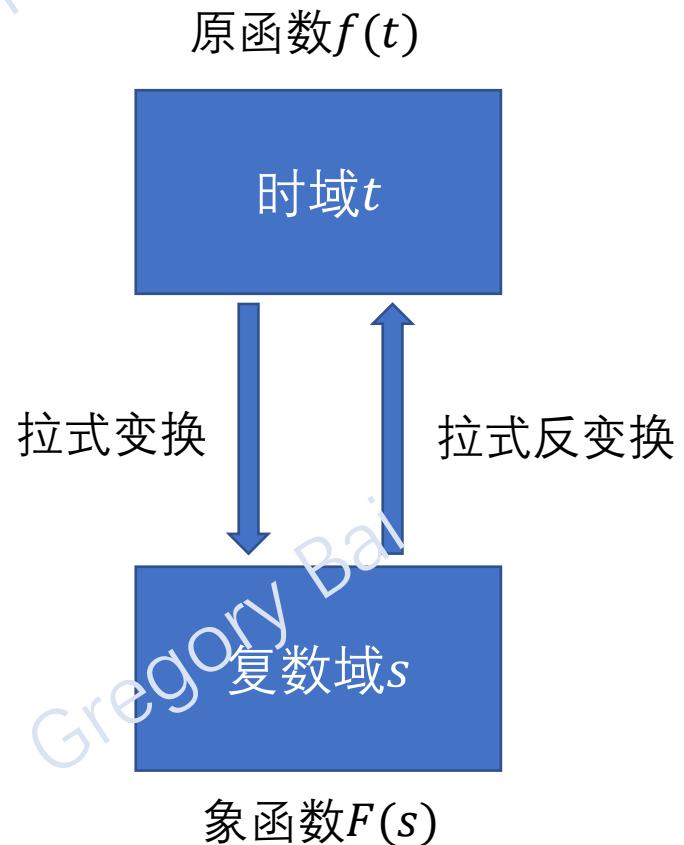
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

存在，其中 $s$ 是复数，则称 $F(s)$ 是 $f(t)$ 的**象函数**，即 $f(t)$ 的拉氏变换，记为 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ 。

### ◆ 拉氏反变换**定义**:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

$f(t)$ 称为 $F(s)$ 的**原函数**。





## Q2-6: $e$ 是什么?

在数学中 $e$ 被称为**自然常数**(又叫欧拉数)的常数。之所以把这个数称之为自然常数，是因为自然界中的不少规律与该数有关。不过，这个数最初不是在自然界中发现的，而是与**银行复利**有关。

如果把钱存在年利率为100%的银行中，一年之后的钱将会增加为原来的 $(1 + 1)^1 = 2$ 倍。假如银行换成6个月结算一次，但利率降为之前年利率的一半，也就是50%，那么，一年后的钱将会增加为原来的 $(1 + 0.5)^2 = 2.25$ 倍。同样的道理，如果换成每日结算，日利率为 $1/365$ ，则一年后的钱将会增加为原来的 $\left(1 + \frac{1}{365}\right)^{365} \approx 2.71$ 倍。

随着结算时间的缩短，最终收益会越来越多。倘若结算时间无限短，那么，最终的收益会变成无穷多吗？这个问题等同于求解极限：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = ?$$

经由严格的数学证明可知，上述极限是存在的，它不是无限的，而是一个常数，这个常数就是现在所说的**自然常数** $e$ ：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.71828 \dots$$



## 2-1-2 线性定常微分方程的求解

### ◆ 拉氏变换的基本性质：

① **线性性质**：原函数之和的拉氏变换等于各原函数的拉氏变换之和。

设  $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$  和  $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = a\mathcal{L}[f_1(t)] + b\mathcal{L}[f_2(t)] = aF_1(s) + bF_2(s)$$

② **微分性质**：

若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ，则有  $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$ 。  $f(0)$  为原函数  $f(t)$

在  $t = 0$  时的初始值。

③ **积分性质**：

$$\frac{d}{dt} f(t) \rightarrow sF(s) - f(0) \quad \frac{d^2}{dt^2} f(t) \rightarrow s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

若  $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ，则  $\mathcal{L}\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{F(0)}{s}$ 。式中  $F(0)$  为积分  $\int f(t)dt$  在  $t = 0$  时的值。

$$\int f(t)dt \rightarrow \frac{F(s)}{s} + \frac{F(0)}{s}$$



## 2-1-2 线性定常微分方程的求解

### ④ 初值定理:

若函数 $f(t)$ 及其一阶导数都是可拉氏变换的，则函数 $f(t)$ 的初值为

$$f(0_+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

即原函数 $f(t)$ 在自变量趋于零时的极值，取决于其象函数 $F(s)$ 在自变量趋于无穷大时的极限值。

### ⑤ 终值定理:

若函数 $f(t)$ 及其一阶导数都是可拉氏变换的，则函数 $f(t)$ 的终值为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

即原函数 $f(t)$ 在自变量趋于无穷大时的极值，取决于其象函数 $F(s)$ 在自变量趋于零时的极限值。



## 2-1-2 线性定常微分方程的求解

### ⑥ 位移定理:

设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ , 则有在实域和复域中的位移定理分别为

$$\mathcal{L}[f(t - \tau_0)] = e^{\tau_0 s} F(s)$$

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a)$$

### ⑦ 相似定理:

设 $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ , 则有 $\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$ , 其中 $a$ 为实常数。

### ⑧ 卷积定理: 设 $F_1(s) = \mathcal{L}[f_1(t)]$ , $F_2(s) = \mathcal{L}[f_2(t)]$ , 则有

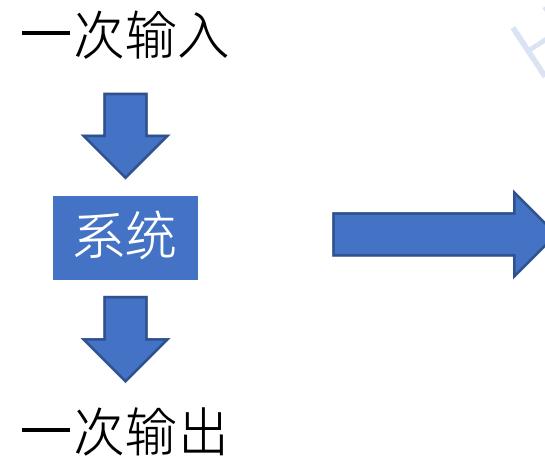
$$F_1(s)F_2(s) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau)d\tau\right] = \mathcal{L}[f_1(t) * f_2(t)]$$

式中,  $\int_0^t f_1(t - \tau)f_2(\tau)d\tau$ 叫做 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积, 可写为 $f_1(t) * f_2(t)$ 。



## Q2-6:什么是卷积?

对于线性时不变系统，其输入和输出之间是**卷积**（Convolution）关系。



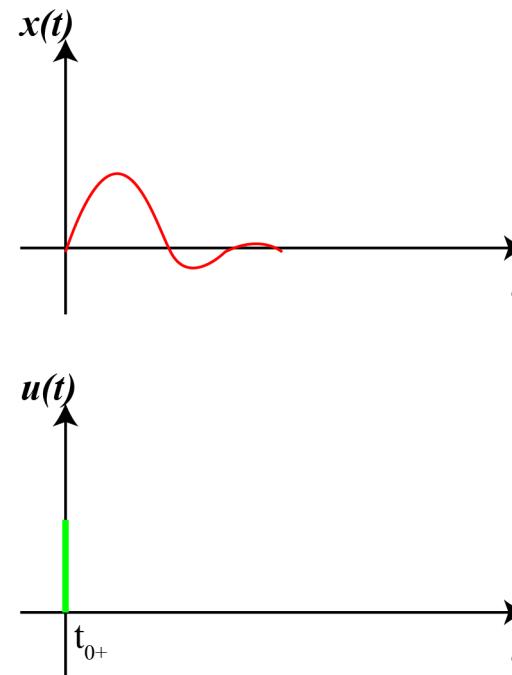
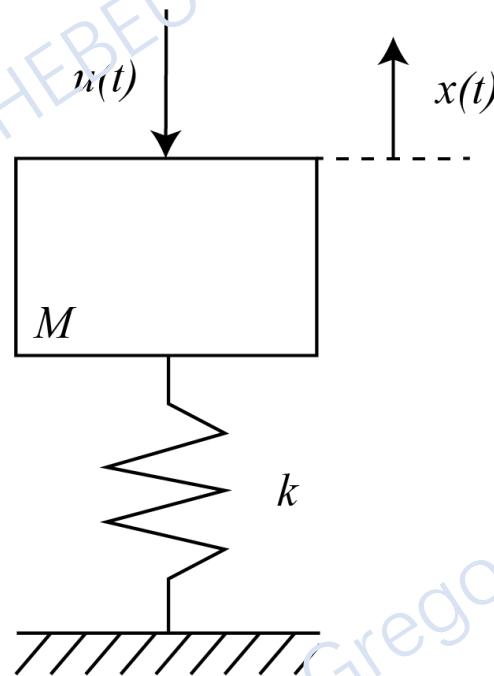
卷积的物理意义可以理解为：

系统某一时刻的输出是由多个输入共同作用（**叠加**）的结果。

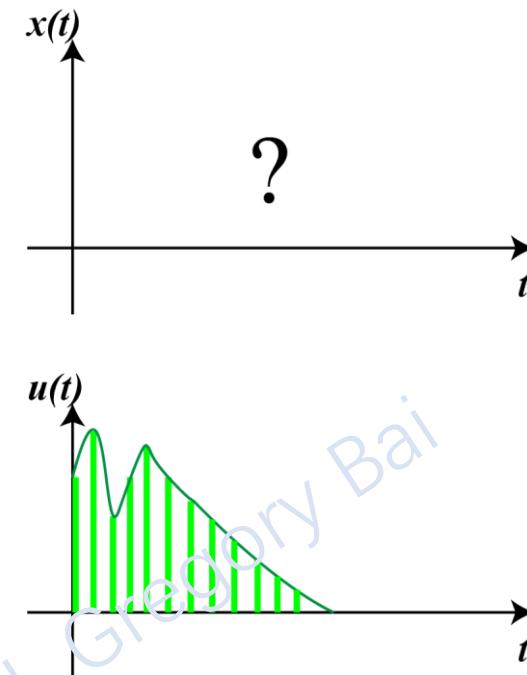


## Q2-6:什么是卷积?

当作用力 $u(t)$ 施加到质量块 $M$ 上时, 系统输出 $x(t)$ 的响应如何?



一次脉冲输入产生的系统响应

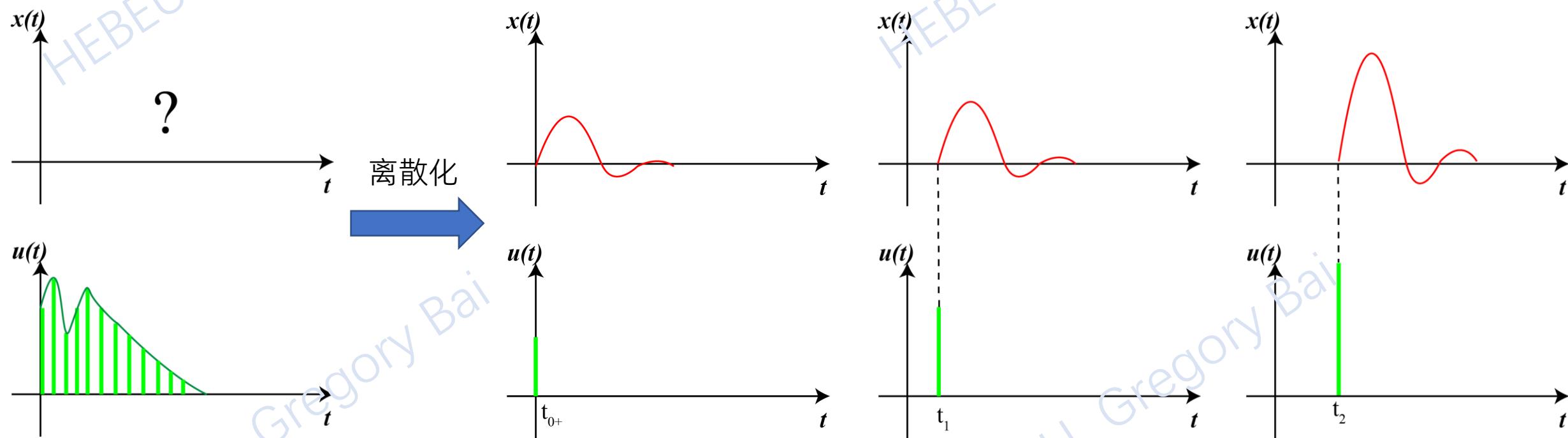


连续输入产生的系统响应?



## Q2-6:什么是卷积?

1. 将作用力 $u(t)$ 离散化为 $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ 和 $u_3(t)$ 。
2. 将三个离散的输入量输入系统, 得到对应的输出量 $x_0(t)$ ,  $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 。

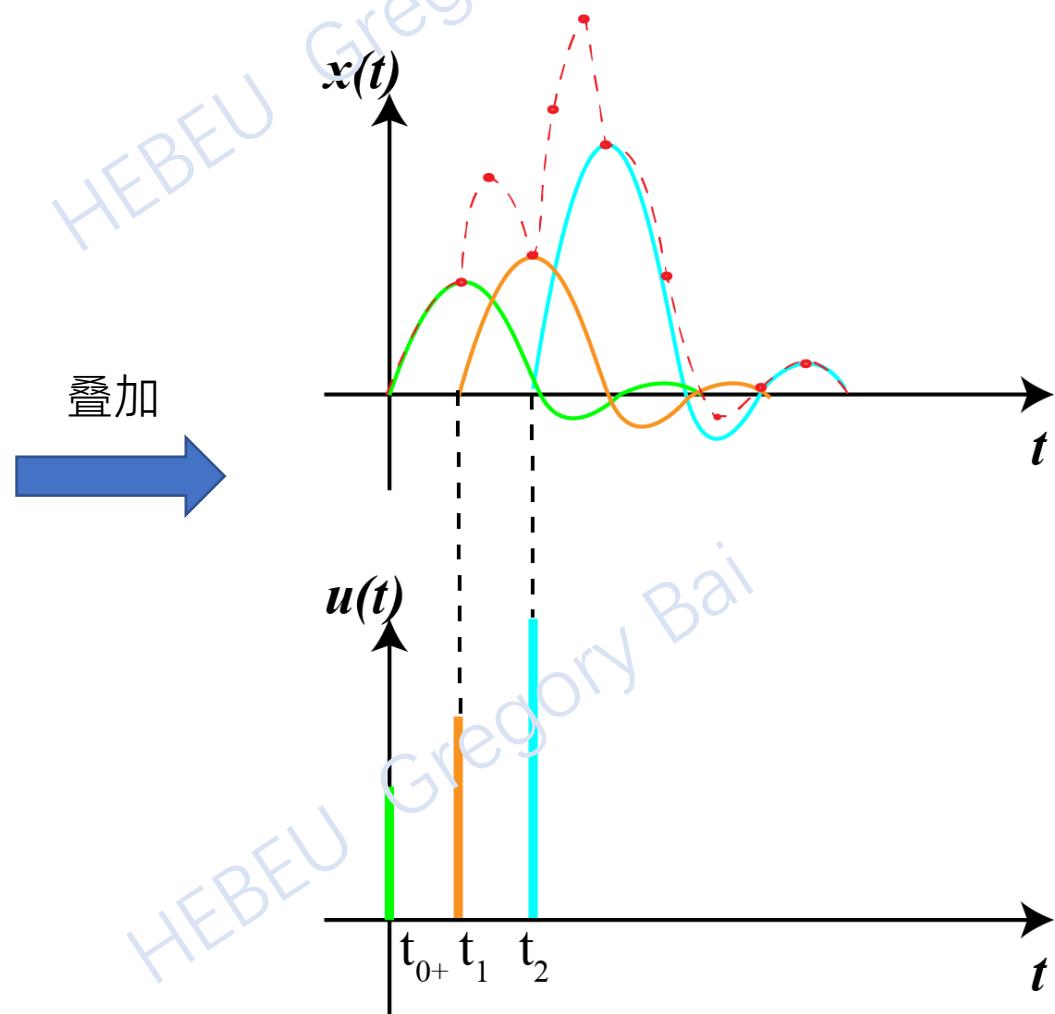


因为是同一个线性时不变系统, 因此输出响应的形状相同, 仅有时间和幅度上的区别。



## Q2-6:什么是卷积?

对于线性时不变系统，其输出遵守叠加原理。



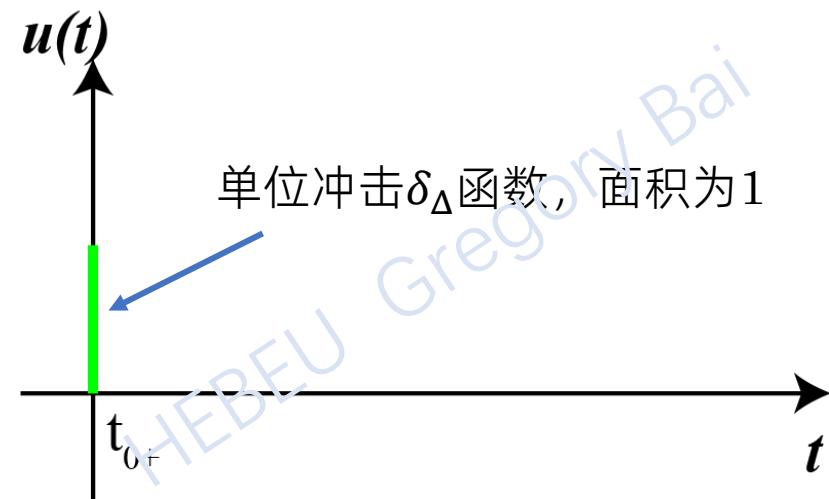
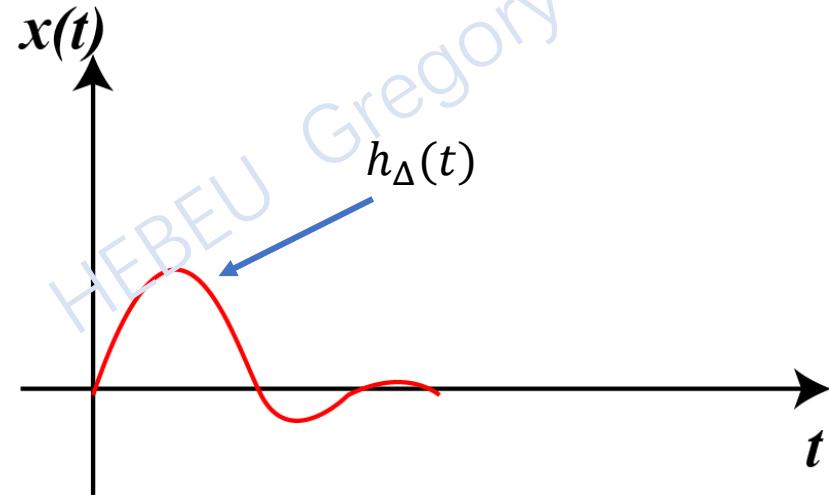
当这三个离散信号连续作用输入在这个系统上时，  
系统的输出为：

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t) + x_2(t)$$

离散系统叠加输出



## Q2-6:什么是卷积?



振幅(面积)变化  
作用时间变化

当  $\delta_{\Delta}$  冲击作用到系统中时系统对其响应定义为  $h_{\Delta}(t)$ 。

依据线性时不变系统的性质, 如果作用在系统的输入是  $A\delta_{\Delta}(t - T)$ , 则系统的输出为  $Ah_{\Delta}(t - T)$ 。

假设连续函数  $u(t)$  离散化后在  $2\Delta T$  时刻的值为  $u(2\Delta T)$ , 脉冲宽度为  $\Delta T$ , 可得  $A_2 = u(2\Delta T)\Delta T$ 。

同时, 由于  $u_2(t)$  的作用时间比 0 时刻延迟了  $2\Delta T$ , 因此输入量  $u_2(t)$  为

$$u_2(t) = u(2\Delta T)\Delta T \delta_{\Delta}(t - 2\Delta T)$$



## Q2-6:什么是卷积?

$$u_2(t) = u(2\Delta T)\Delta T \delta_\Delta(t - 2\Delta T)$$

系统响应

$$x_2(t) = u(2\Delta T)\Delta T h_\delta(t - 2\Delta T)$$



离散表达式:  $x(t) = \sum_{i=0}^2 u(i\Delta T)\Delta T h_\delta(t - i\Delta T)$

连续表达式:  $x(t) = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \sum_{i=0}^2 u(i\Delta T)\Delta T h_\delta(t - i\Delta T) = \int_0^t u(\tau)h(t - \tau) d\tau = u(t) * h(t)$

- $x_2(t)$  在振幅上增大了  $u(2\Delta T)\Delta T$  倍  
 $x_2(t)$  在响应时间上延迟了  $2\Delta T$





## 2-1-3 典型外作用函数及其拉氏变换

工程实际中，有些系统的输入信号是已知的（如恒值系统），但对有些控制系统来说，常常不能准确地知道其输入量是如何变化的（如随动系统）。

因此，为了方便系统的分析和设计，使各种控制系统有一个进行比较的统一的基础，需要选择一些**典型试验信号**作为系统的输入，然后比较各种系统对这些输入信号的响应。

常用的试验信号有**阶跃信号**、**斜坡信号**、**抛物线信号**、**脉冲信号**及**正弦信号**。这些信号都是简单的时间函数，并且易于通过实验产生，便于数学分析和试验研究。

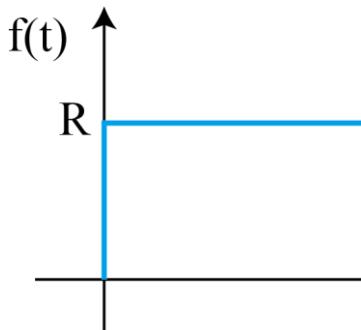


## 2-1-3 典型外作用函数及其拉氏变换

### 1. 阶跃函数:

$$1(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ R, t > 0 \end{cases}$$

当R=1时，称为单位阶跃函数。



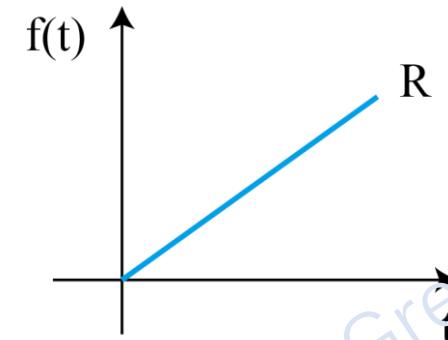
◆ 单位阶跃函数的拉氏变换为

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$$

### 2. 斜坡函数：也称等速度函数。

$$f(t) = \begin{cases} 0, t \leq 0 \\ Rt, t > 0 \end{cases}$$

输入斜坡函数相当于对系统输入一个随时间作等速变化的信号，其图形如图所示。



斜坡函数等于阶跃函数对时间的积分。斜坡函数的拉氏变换为：

$$F(s) = \int_0^{\infty} Rte^{-st} dt = \frac{R}{s^2}$$



## 2-1-3 典型外作用函数及其拉氏变换

3. 抛物线函数: 抛物线函数也称加速度函数。

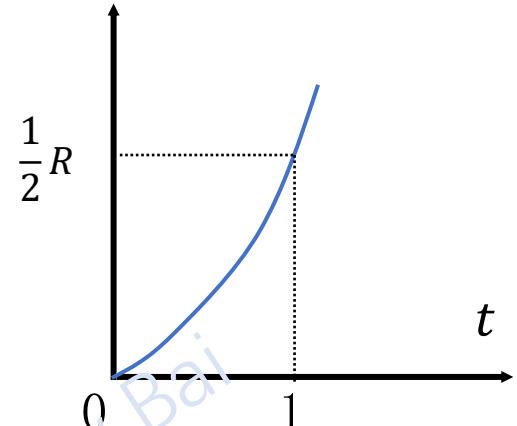
$$r(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{1}{2}Rt^2, & t > 0 \end{cases}$$

输入抛物线函数相当于对于系统输入一个随时间做等加速变化的信号，其图形如图所示。若  $R = 1$ , 称为单位抛物线函数。

抛物线函数等于斜坡函数对时间的积分。抛物线函数的拉氏变换为：

$$F(s) = \int_0^\infty \frac{1}{2}Rt^2 e^{-st} dt = \frac{R}{s^3}$$

单位抛物线函数的拉氏变换为  $R(s) = 1/s^3$



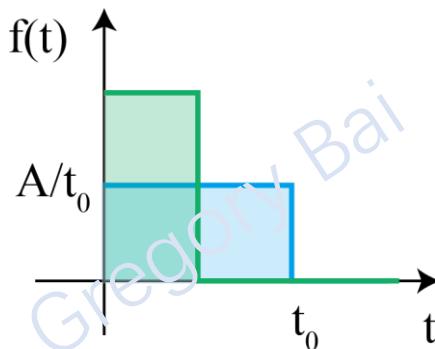


## 2-1-3 典型外作用函数及其拉氏变换

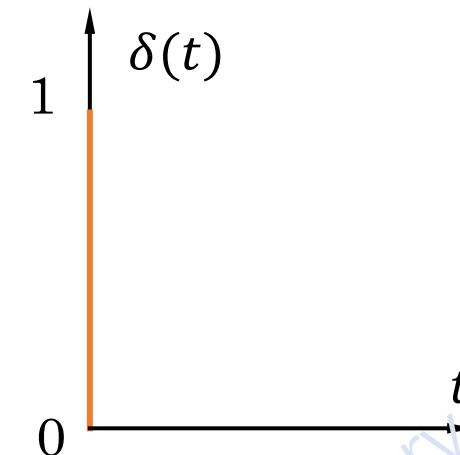
### 4. 脉冲函数：

- ◆ 脉冲函数脉冲函数在理论上（数学上的假设）是一个脉宽无穷小，幅值无穷大的脉冲。在实际中，只要脉冲宽度 $\varepsilon$ 极短即可近似认为是脉冲函数。如图所示。

$$\delta(t) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \frac{A}{t_0} [l(t) - l(t - t_0)]$$



当 $A = 1$ 时，即面积为1的脉冲函数称为**单位脉冲函数**或 **$\delta$ 函数**，记为 $\delta(t)$ ，图形如下图所示。



$\delta(t)$ 函数的脉冲函数的积分就是阶跃函数。脉冲函数的**拉氏变换**为

$$F(s) = \int_0^\infty A\delta(t)e^{-st}dt = A$$

单位脉冲函数的拉氏变换为 $R(s) = 1$ 。

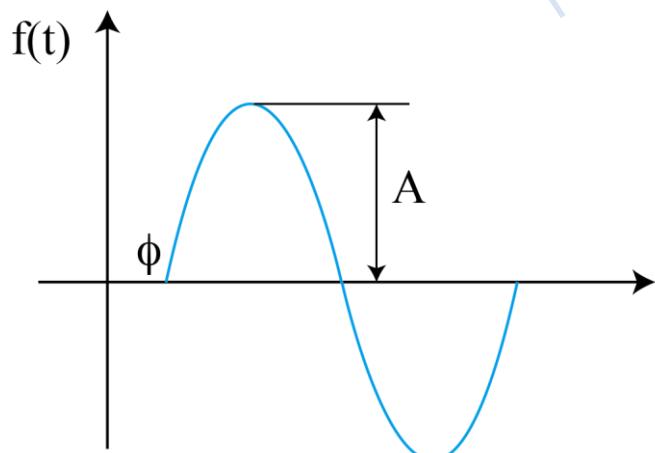


## 2-1-3 典型外作用函数及其拉氏变换

### 5. 正弦函数: 也称谐波函数

$$f(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

其中  $A$  为振幅,  $\omega = 2\pi f$  为角频率,  $\phi$  为初始角。



正弦输入的拉氏变换为

$$F(s) = \int_0^{\infty} A \sin(\omega t) e^{-st} dt = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$



## 2-1-3 典型外作用函数及其拉氏变换

常用拉普拉斯变化表

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\sin(wt)$	$\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\cos(wt)$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s + a}$	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$



## 2-1-3 典型外作用函数及其拉氏变换

Q2-7: MATLAB求解Laplace变换与反变换

```
% 1. Laplace 变换  
% example-1  
syms t  
f = t;  
F1 = laplace(f)  
% example-2  
syms omega,t  
f = sin(omega*t);  
F2 = laplace(f)  
% example-3  
syms a,t  
f = exp(-a*t);  
F3 = laplace(f)
```

```
% 2. Laplace 反变换  
% example-1  
syms s  
F = 1/s^2;  
f1 = ilaplace(F)  
% example-2  
syms omega,t  
F = s/(omega^2+s^2);  
f2 = ilaplace(F)
```



## 2-1-3 典型外作用函数及其拉氏变换

Q2-8: 如何选择测试输入信号?

依据系统的工作特性进行选择:

- 如果控制系统的实际输入大部分是随时间逐渐增加的信号, 则选用斜坡函数较合适;
- 如果作用到系统的输入信号大多具有突变性质时, 则选用阶跃函数较合适。
- 需要注意的是, 不管采用何种典型输入型号, 对同一系统来说, 其过渡过程所反应出的系统特性应是统一的。这样, 便有可能在同一基础上去比较各种控制系统的性能。
- 在选取试验信号时, 除应尽可能简单, 以便于分析处理外, 还应选择那些能使系统工作在最不利的情况下的输入信号作为典型实验信号。



## 2-1-4 线性定常微分方程求解（例题）

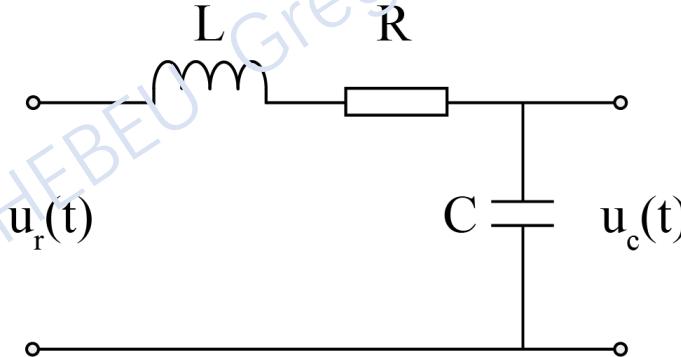
### ◆ 拉氏变换法求解步骤：

- ① 考虑初始条件，对微分方程中的每一项分别进行拉氏变换，得到变量s的代数方程；
- ② 求出输出量表达式的拉氏变换函数；
- ③ 对输出量进行拉氏反变换，得到输出量的时域表达式，即为所求微分方程的解。



## 2-1-4 线性定常微分方程求解（例题）

**例2.2 (P30例2-6)**: 用拉氏变换解微分方程



① 已知初始条件:

$$\begin{cases} L = 1 \text{ H} \\ C = 1 \text{ F} \\ R = 1 \Omega \\ u_c(0) = 0.1 \text{ V} \\ i(0) = 0.1 \text{ A} \\ u_r(0) = 1 \text{ V} \end{cases}$$

② 对微分方程中的每一项分别进行拉氏变换:

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t) \rightarrow s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$$

$$\frac{d}{dt} f(t) \rightarrow sF(s) - f(0)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left[\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2}\right] = s^2 U_c(s) - su_c(0) - u_c'(0) \\ = s^2 U_c(s) - 0.1s - 0.1 \\ \mathcal{L}\left[\frac{du_c(t)}{dt}\right] = sU_c(s) - u_c(0) \\ \mathcal{L}[u_c(t)] = U_c(s) \end{cases}$$

$$\left. \frac{du_c}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i(0)}{C} = 0.1 \rightarrow u_c'(0) = 0.1$$



## 2-1-4 线性定常微分方程求解（例题）

③求出的表达式输出量拉氏变换函数：

$$s^2 U_c(s) - 0.1s - 0.1 + sU_c(s) - 0.1 + U_c(s) = U_r(s)$$



$$(s^2 + s + 1)U_c(s) = U_r(s) + 0.1s + 0.2$$



$$U_c(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} U_r(s) + \frac{0.1s + 0.2}{s^2 + s + 1}$$



$$U_c(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{1}{s} + \frac{0.1s + 0.2}{s^2 + s + 1}$$



## 2-1-4 线性定常微分方程求解（例题）

④ 对输出量进行拉氏反变换：

$$U_c(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{1}{s} + \frac{0.1s + 0.2}{s^2 + s + 1}$$

$$\left[ \frac{1}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s + 0.5}{(s + 0.5)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - \frac{0.5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{(s + 0.5)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{1}{s}\right] &= 1 - e^{-0.5t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{2 \times 0.5}{\sqrt{3}} e^{-0.5t} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ &= 1 + 1.15 e^{-0.5t} \sin\left(0.866t - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\left[ \frac{0.1s + 0.2}{s^2 + s + 1} = \frac{0.1(s + 0.5)}{(s + 0.5)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \frac{0.15}{(s + 0.5)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2} \right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0.1s + 0.2}{s^2 + s + 1}\right] = 0.2 e^{-0.5t} \sin\left(0.866t + \frac{\pi}{6}\right)$$

常用拉普拉斯变化表

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\sin(wt)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\cos(wt)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s + a}$	$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$

$$u_c(t) = 1 + 1.15 e^{-0.5t} \sin\left(0.866t - \frac{2\pi}{3}\right) + 0.2 e^{-0.5t} \sin\left(0.866t + \frac{\pi}{6}\right)$$



## 2-1-4 线性定常微分方程求解（例题）

Q2-9: 如何进行拉式反变换?  $\rightarrow$  采用部分分式展开法

$$U_c(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \cdot \frac{1}{s} + \frac{0.1s + 0.2}{s^2 + s + 1}$$



一般形式

$$\text{拉氏变换函数 } Y(s) = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n} \quad (m < n)$$

情况1:  $Y(s)$ 有不同实极点  $p_i$ , 总能展开成如下简单的部分分式之和

$$Y(s) = \frac{c_1}{s - p_1} + \frac{c_2}{s - p_2} + \dots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

其中,  $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是  $D(s) = 0$  的根

$c_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是系数,  $c_i = [Y(s)(s - p_i)]|_{s=p_i}$



## 2-1-4 线性定常微分方程求解（例题）

**例2.3:** 求 $Y(s)$ 的拉氏反变换。

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)}$$

解:  $Y(s) = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s-2} + \frac{c_n}{s+3}$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \left[ \frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)} \cdot (s+1) \right]_{s=-1} = -\frac{1}{6} \\ c_2 = \left[ \frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)} \cdot (s-2) \right]_{s=2} = \frac{1}{15} \\ c_3 = \left[ \frac{1}{(s+1)(s-2)(s+3)} \cdot (s+3) \right]_{s=-3} = \frac{1}{10} \end{array} \right.$$

$$Y(s) = -\frac{1}{6} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{15} \frac{1}{s-2} + \frac{1}{10} \frac{1}{s+3}$$

$$y(t) = -\frac{1}{6} e^{-t} + \frac{1}{15} e^{2t} + \frac{1}{10} e^{-3t}$$



## 2-1-4 线性定常微分方程求解（例题）

情况2:  $Y(s)$ 有共轭复极点

**例2.4:** 求如下微分方程的解

非零初始条件!

$$y''(t) + 3y'(t) + 6y(t) = 0, \text{ 初始条件为 } y(0^-) = 0, y'(0^-) = 3$$

解:  $s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 3sY(s) - 3y(0^-) + 6Y(s) = 0$



$$s^2Y(s) - 3 + 3sY(s) + 6Y(s) = 0$$



$$Y(s) = \frac{3}{s^2+3s+6} = \frac{6}{\sqrt{15}} \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{(s+1.5)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2}$$



$$y(t) = \frac{6}{\sqrt{15}} e^{-1.5t} \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)$$



## 2-1-4 线性定常微分方程求解（例题）

情况3:  $Y(s)$ 有重复实极点

假设 $Y(s)$ 有 $l$ 重实极点 $p_l$ ，而其余极点均不相同，则

$$Y(s) = \frac{b_l}{(s - p_1)^l} + \frac{b_{l-1}}{(s - p_1)^{l-1}} + \cdots + \frac{b_1}{s - p_1} + \frac{c_{l+1}}{s - p_{l+1}} + \cdots + \frac{c_n}{s - p_n}$$

其中  $b_l = [Y(s) \cdot (s - p_l)^l]_{s=p_l}$

$$c_k = [Y(s)(s - p_k)]|_{s=p_k}$$

$$b_{l-1} = \left\{ \frac{d}{ds} [Y(s) \cdot (s - p_l)^l] \right\}_{s=p_l}$$

$$k = l + 1, l + 2, \dots, n$$

.....

$$b_{l-i} = \frac{1}{i!} \left\{ \frac{d^i}{ds^i} [Y(s) \cdot (s - p_l)^l] \right\}_{s=p_l}$$

$$b_1 = \frac{1}{(l-1)!} \left\{ \frac{d^{l-1}}{ds^{l-1}} [Y(s) \cdot (s - p_l)^l] \right\}_{s=p_l}$$



## 2-1-4 线性定常微分方程求解（例题）

例2.5：某系统的微分方程模型为

非零初始条件！

$$y'''(t) + 3y''(t) + 3y'(t) + y(t) = x(t)$$

若已知  $x(t) = u(t)$ ，且初始条件为  $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 0$ ，求系统的输出。

解：对微分方程两边同时进行拉氏变换，得：

$$s^3Y(s) - s^2 - 2s + 3[s^2Y(s) - s - 2] + 3[sY(s) - 1] + Y(s) = X(s)$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} + \frac{s^2 + 5s + 9}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

零状态响应

零输入响应

$$\Rightarrow y(t) = \dots + \dots$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(t) &\rightarrow sF(s) - f(0) \\ \frac{d^2}{dt^2}f(t) &\rightarrow s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \\ \frac{d^3}{dt^3}f(t) &\rightarrow s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)\end{aligned}$$



## 2-1-4 线性定常微分方程求解（例题）

Q2-10: 什么是零状态响应？什么是零输入响应？

零输入响应就是系统初始状态不为零，而输入为零时的响应。

比如一个RC电路，当电容电荷不为零时，这个电路不输入信号，但也发生响应。

零状态响应就是系统初始状态为零，有输入时的响应。比如一个RC电路，当电容电荷为零时，输入信号，系统发生的响应。



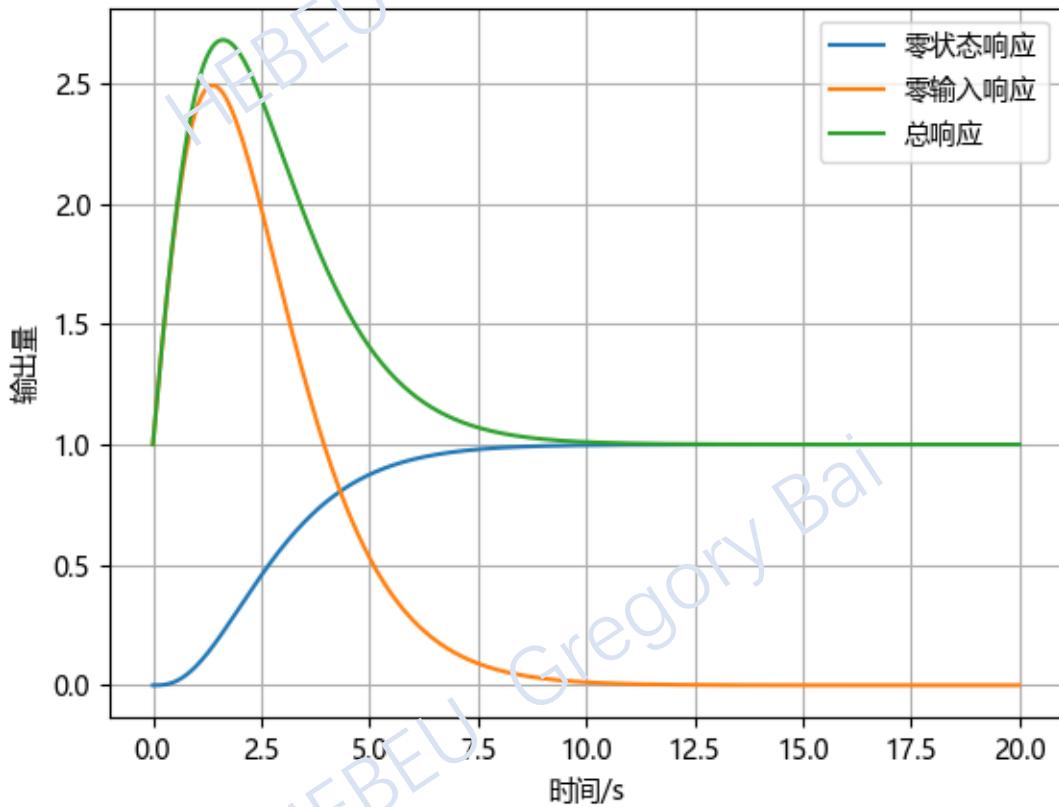
## 2-1-4 线性定常微分方程求解（例题）

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} + \frac{s^2 + 5s + 9}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

零状态响应                   零输入响应



$$\begin{aligned}y(t) &= \left(1 - \frac{1}{2}t^2e^{-t} - te^{-t} - e^{-t}\right) \\&\quad + \left(\frac{5}{2}t^2e^{-t} + 3te^{-t} + e^{-t}\right) \\&= 1 + 2t^2e^{-t} + 2te^{-t}\end{aligned}$$





## 2-2 控制系统的复数域数学模型

### ◆ 2.2.1 传递函数的定义和性质

**定义：**线性定常系统的传递函数为零初始条件（！！）下，  
系统输出量的拉氏变换与系统输入量的拉氏变换之比。

**零初始条件：**

- 1) 输入量在  $t > 0$  时才作用在系统上，即在  $t = 0^-$  时系统输入及各项导数均为零；
- 2) 输入量在加于系统之前，系统为稳态，即在  $t = 0^-$  时系统输出及其所有导数项为零。



## 2-2-1 传递函数的定义和性质

- ◆ 设线性定常系统由下述 **n** 阶线性常微分方程描述：

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} c(t) + a_0 c(t) = b_m \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} r(t) + b_0 r(t)$$

- ◆ 式中  $c(t)$  为系统输出量， $r(t)$  为系统输入量， $a_i (i = 1, 2, 3 \dots n)$  和  $b_j (j = 1, 2, 3 \dots m)$  是与系统结构和参数有关的 **常系数**

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

- ◆ 设  $r(t)$  和  $c(t)$  及其各阶导数在  $t = 0$  时的值为 0，即 **零初始条件**，则对上式中各项分别求拉氏变换，可得  $s$  的代数方程为：

$$\begin{aligned} & a_n s^n C(s) + a_{n-1} s^{n-1} C(s) + \cdots + a_1 s C(s) + a_0 C(s) \\ & = b_m s^m R(s) + b_{m-1} s^{m-1} R(s) + \cdots + b_1 s R(s) + b_0 R(s) \end{aligned}$$

↓

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) C(s) \\ & = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) R(s) \end{aligned}$$

- ◆ 由定义得系统得 **传递函数** 为

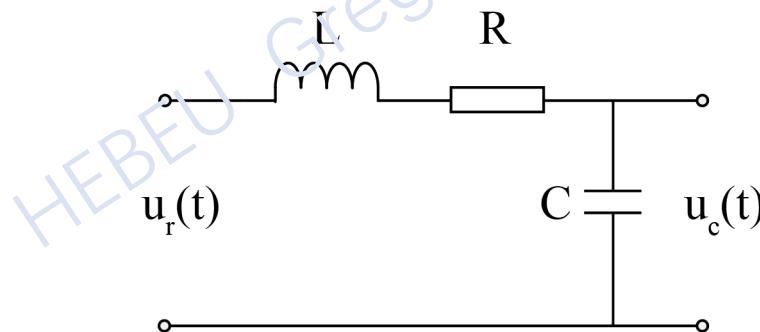
$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

分母中  $s$  的最高阶次  $n$  即为系统的 **阶次**，该系统称为 **n 阶系统**。



## 2-2-1 传递函数的定义和性质

**例2.6:** 如图RLC电路，试列写网络传递函数 $G(s)$



解：

① 系统的微分方程为：

$$LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = u_r(t)$$

② 零初始条件下取拉氏变换：

$$LCs^2 U_c(s) + RCs U_c(s) + U_c(s) = U_r(s)$$



$$(LCs^2 + RCs + 1)U_c(s) = U_r(s)$$

③ 传递函数：

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$



## 2-2-1 传递函数的定义和性质

### ◆ 传递函数的性质：

- ① 传递函数是复变量s的**有理真分式函数**，分子多项式的次数 $m$ 低于或等于分母多项的次数 $n$ ，所有系数均为实数；
- ② 传递函数与微分方程有**相通性**，可经简单置换而转换；
- ③ 传递函数表征了系统本身的**动态特性**。  
(传递函数**只取决于系统本身的结构参数**，而与输入和初始条件等外部因素无关，可见传递函数有效地描述了系统的**固有特性**)
- ④ 只能描述**线性定常系统与单输入单输出系统**，不能表征**内部状态**的特征；
- ⑤ 只能反映**零初始条件下**输入信号引起的输出，不能反映非零初始条件引起的输出；
- ⑥ 服从**不同动力学规律**的系统可能有**同样的传递函数**；
- ⑦ 传递函数有一定的零、极点分布图与之对应，因此**传递函数的零、极点分布图**也表征了系统的动态性能。



## 2-2-1 传递函数的定义和性质

### ◆ 传递函数的物理意义：

在零初始条件下，若线性定常系统的输入的拉氏变换为  $R(s) = C(s)/G(s)$ ，则系统的输出的拉氏变换为：

$$C(s) = G(s)R(s)$$

系统的输出为

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)R(s)]$$

由于单位脉冲输入信号的拉氏变换为  $R(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ 。所以，单位脉冲输入信号作用下系统的输出的拉氏变换为：

$$C(s) = G(s)$$

设单位脉冲输入信号下系统的输出为  $g(t)$ ，则

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

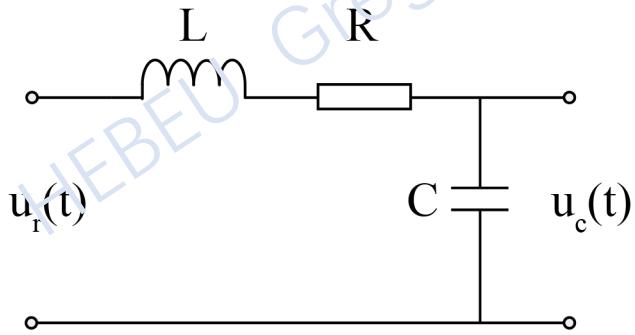
可见，系统传递函数的拉氏反变换即为单位脉冲输入信号下系统的输出。

因此，系统的单位脉冲输入信号下系统的输出完全描述了系统动态特性，所以也是系统的数学模型，通常称为脉冲响应函数。



## 2-2-1 传递函数的定义和性质

Q2-8: MATLAB依据传递函数求解系统响应



传递函数

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$



$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

% 2-1. 输入系统传递函数

```
num = [1];
```

```
den = [1,1,1];
```

```
sys = tf(num, den);
```

```
t = 0:0.1:15;
```

% 2-2. 阶跃信号响应

```
figure
```

```
t0 = 0;
```

```
ur = stepfun(t,t0);
```

```
y = step(sys,t);
```

```
plot(t,y,t,ur,'--','Linewidth',2);
```

```
grid on;
```

```
xlabel('time');
```

```
ylabel('output');
```

```
title('step response');
```

```
legend('Output','Input');
```

% 2-3. 脉冲信号响应

```
figure
```

```
y = impulse(sys, t);
```

```
plot(t,y,'Linewidth',2);
```

```
grid on;
```

```
xlabel('time');
```

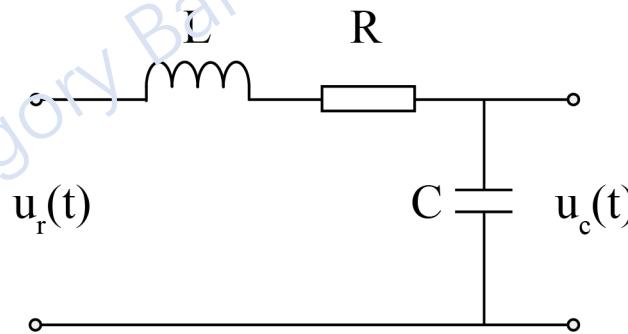
```
ylabel('output');
```

```
title('impulse response');
```

```
legend('Output');
```

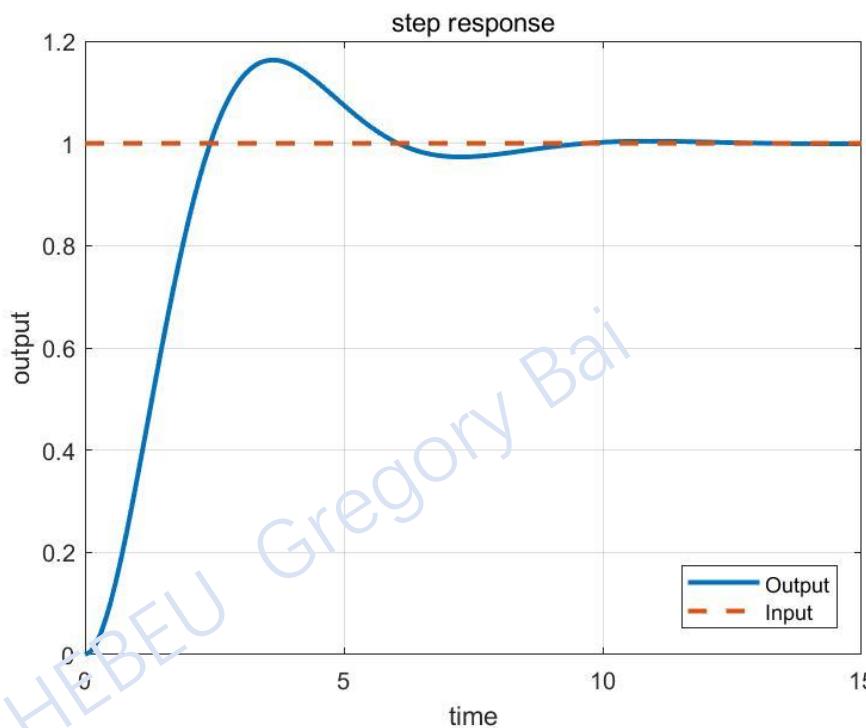


## 2-2-1 传递函数的定义和性质

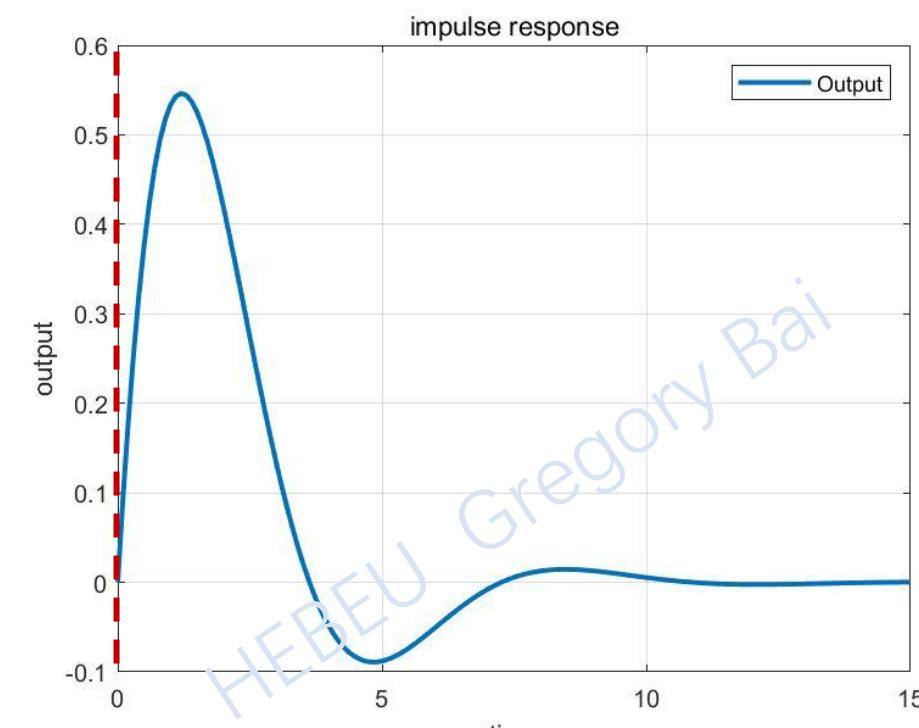


传递函数：

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$



阶跃响应



脉冲响应



## 2-2-2 传递函数的表示方式

### 1. 有理分式形式

传递函数最常用的形式是下列有理分式形式

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

传递函数的分母多项式  $D(s)$  称为系统的**特征多项式**,  $D(s) = 0$  称为系统的**特征方程**,  $D(s) = 0$  的根称为系统的**特征根或极点**。

分母多项式的阶次定义为**系统的阶次**。对于实际的物理系统, 多项式  $D(s)$ 、 $N(s)$  的所有**系数为实数**, 且分母多项式的阶次  $n$  高于或等于分子多项式的阶次  $m$ , 即  $n \geq m$ 。



## 2-2-2 传递函数的表示方式

### 2. 零极点形式

将传递函数的分子、分母多项式变为首一多项式，然后在复数范围内因式分解，得

$$G(s) = \frac{k \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad n \geq m$$

式中， $z_i (i = 1, 2, \dots, m)$  称为系统的零点；

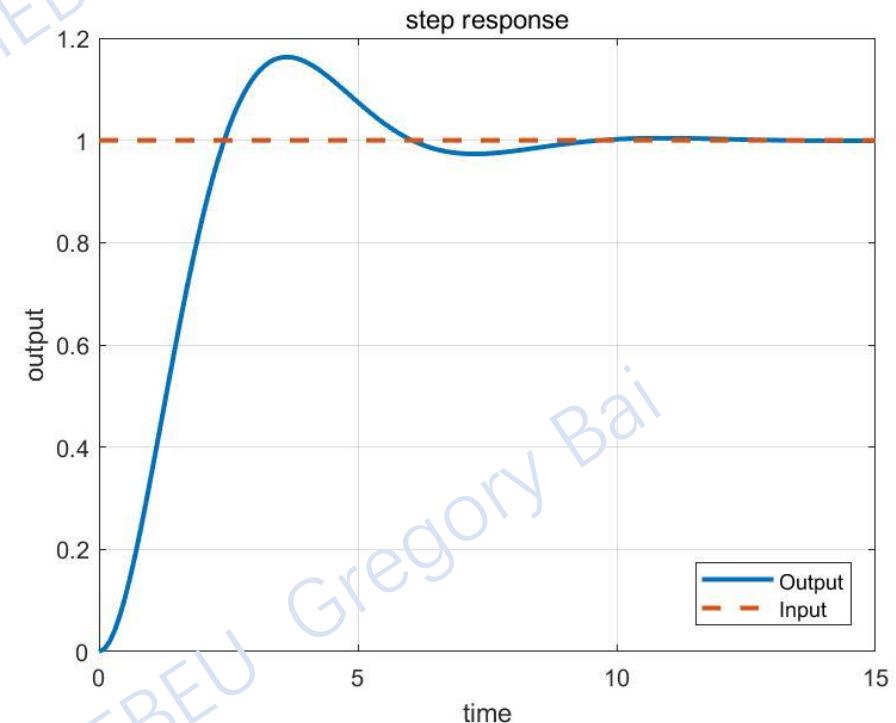
$p_i (i = 1, 2, \dots, n)$  为系统的极点；

$k = b_m/a_m$  为系统的根轨迹增益。

系统零点、极点的分布决定了系统的特性。

可以画出传递函数的零极点图，直接分析系统特性。

在零极点图上，用“ $\times$ ”表示极点位置，用“ $\circ$ ”表示零点。



系统零极点分布决定了系统的阶跃响应

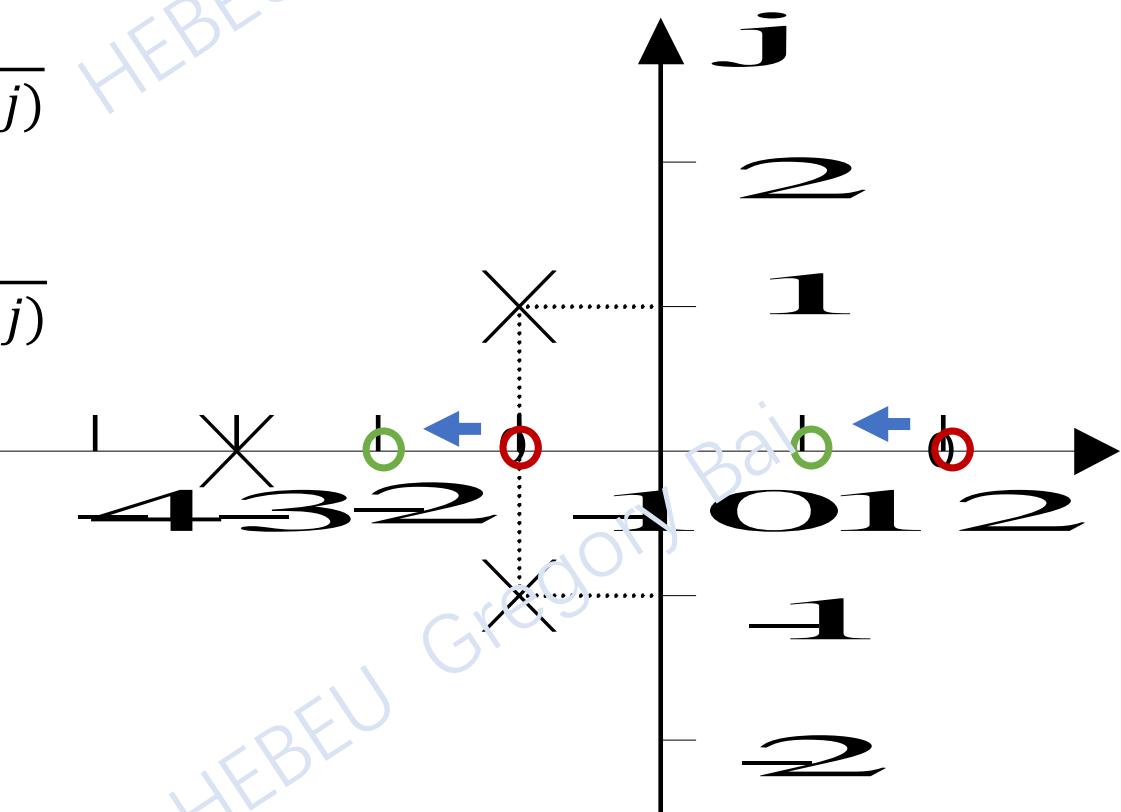


## 2-2-2 传递函数的表示方式

**例2.7：** 传递函数 $G_1$ 和 $G_2$ 的零极点图如下图所示。

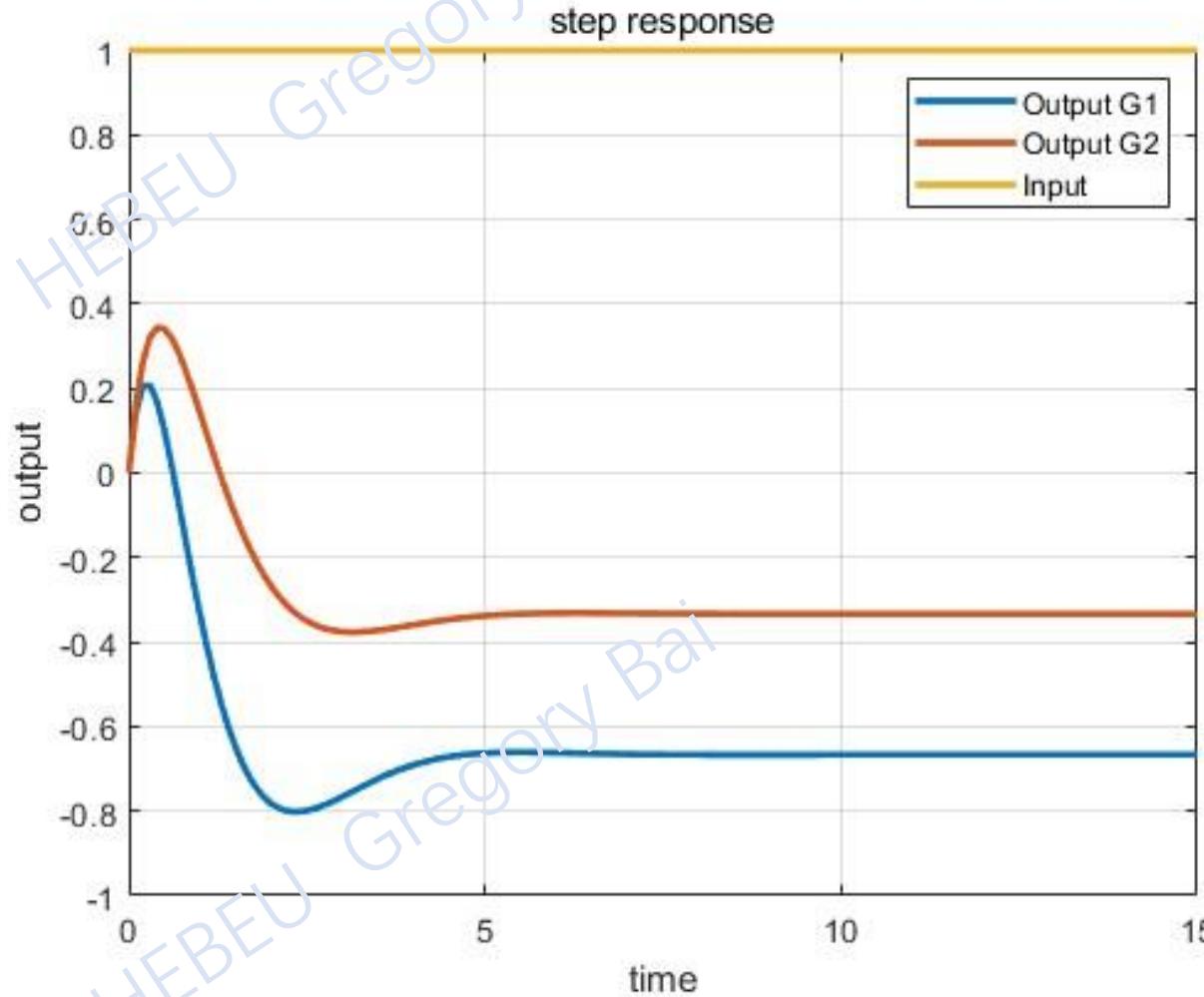
$$G_1(s) = \frac{2s^2 - 2s - 4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6} = \frac{2(s+1)(s-2)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

$$G_2(s) = \frac{2s^2 + 2s - 2}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6} = \frac{2(s+2)(s-1)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$





## 2-2-2 传递函数的表示方式



```
% 2-1. 输入系统传递函数  
num1 = [2, -2, -4];  
num2 = [2, 2, -2];  
den = [1, 5, 8, 6];  
sys1 = tf(num1, den);  
sys2 = tf(num2, den);  
t = 0:0.1:15;  
% 2-2. 阶跃信号响应  
figure  
t0 = 0;  
ur = stepfun(t, t0);  
y1 = step(sys1, t);  
y2 = step(sys2, t);  
plot(t,y1,t,y2,t,ur,'Linewidth',2);  
grid on;  
xlabel('time');  
ylabel('output');  
title('step response');  
legend('Output G1','Output G2', 'Input');
```



## 2-2-2 传递函数的表示方式

### 3. 时间常数形式

将传递函数的分子、分母多项式变为尾一多项式，然后在复数范围内因式分解，得

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^m (\tau_i s + 1)}{s^n \prod_{i=1}^{n'} (T_i s + 1)} \quad (n' + n = n)$$

式中， $K = G(0) = b_0/a_0$  为传递系数，通常也为系统的放大系数； $\tau_i, T_i$  为系统的时间常数。

$$K = k \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{j=1}^n (-p_j)}$$

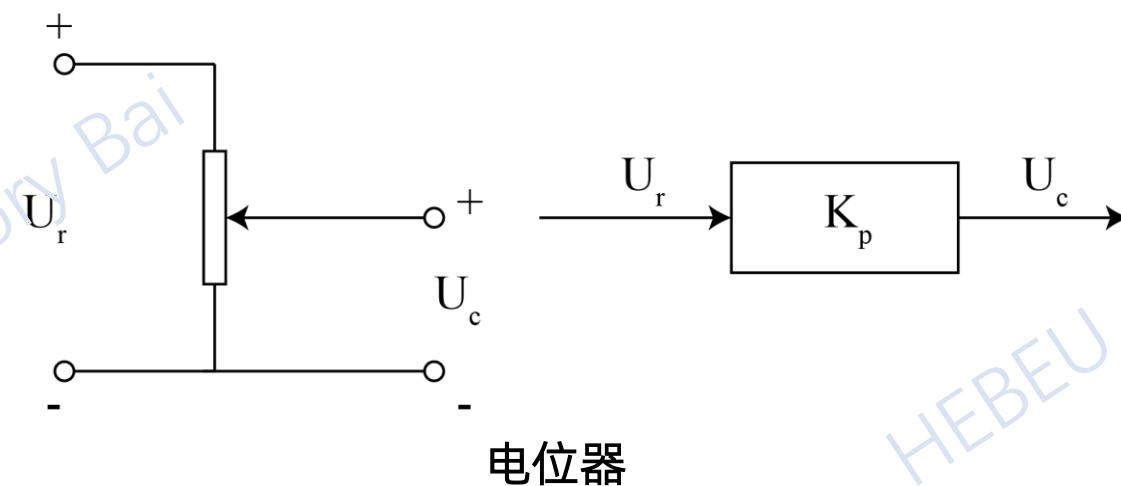


## 2-2-3 典型环节的传递函数

- ◆ 1. 比例环节: 输出量无滞后, 按比例复现输入量, 不失真也不滞后。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = K_p$$

$K_p$  称为 **比例增益**, 比例控制器实际上是一个增益可调的放大器。比例环节既**无零点**, 也**没有极点**。





## 2-2-3 典型环节的传递函数

### ◆ 2. 积分环节：

在具有积分控制作用的环节中，控制器输出量  $U_o(t)$  的值与输入量  $U_i(t)$  的积分成比例变化，动力学方程为：

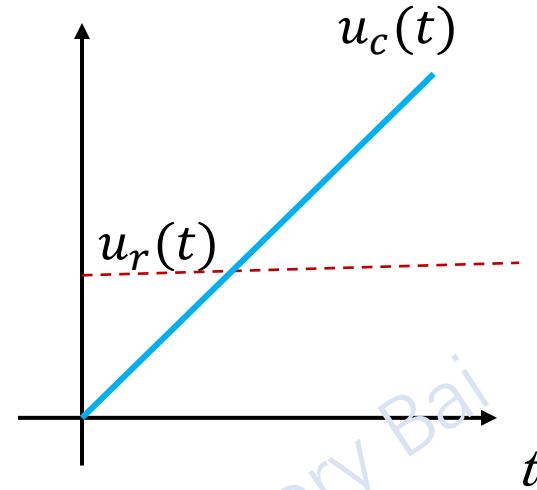
$$U_o(t) = \frac{1}{T} \int_0^t U_i(t) dt$$

其中  $T$  为可调常数。

$$T \frac{dU_o(t)}{dt} = U_i(t)$$

输出量与输入量对时间的积分成正比，以固定斜率  $1/T$  单调上升。

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts}$$





## 2-2-3 典型环节的传递函数

### ◆ 3. 微分环节：

在具有微分控制作用的环节中，控制器输出量 $U_o(t)$ 的值与输入量 $U_i(t)$ 的微分成比例变化，动力学方程为：

$$U_o(t) = T \frac{dU_i(t)}{dt}$$

传递函数为：

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = Ts$$

输出与输入的一阶导数成正比，因此微分环节能预示输入信号的变化趋势，常用来改善控制系统的动态性能。



## 2-2-3 典型环节的传递函数

### ◆ 4. 惯性环节(一阶积分环节)：

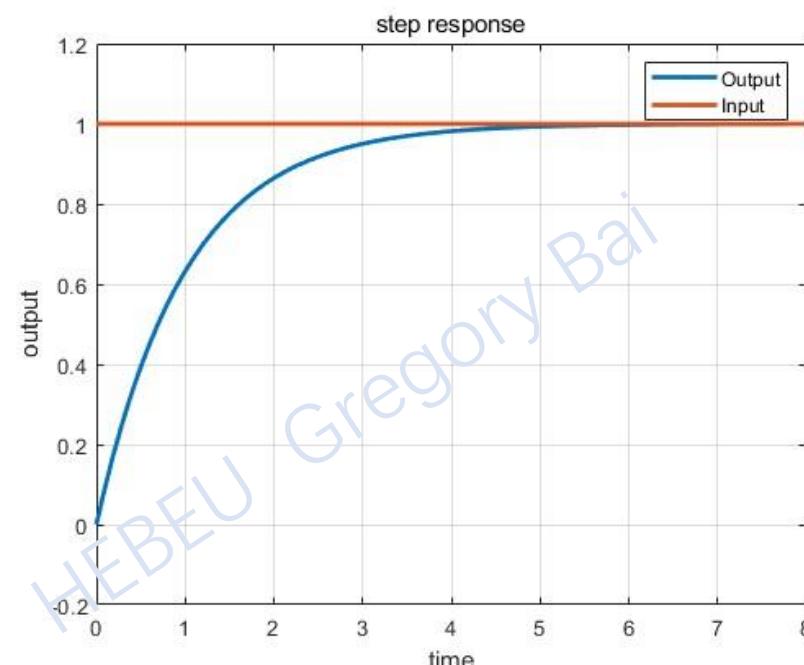
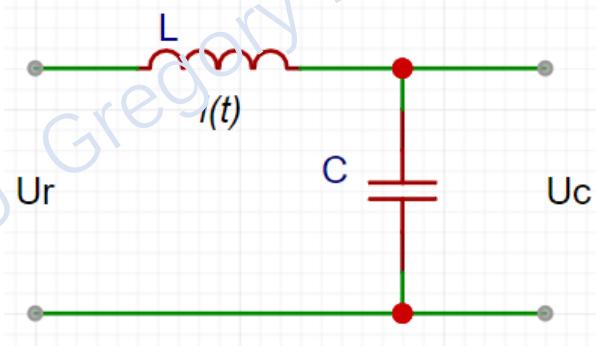
微分方程:  $T \frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t) = kU_r(t)$

拉普拉斯变换:  $TsC(s) + C(s) = kR(s)$

传递函数:  $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{Ts + 1}$

是一个相位滞后环节,  $k$ 为放大系数, 无零点。

该环节存在储能元件, 典型惯性环节的微分方程为一阶常微分方程, 其特点是当系统输入有阶跃变化时, 系统输出按单调指数规律上升, 如右图所示。





## 2-2-3 典型环节的传递函数

### ◆ 5. 导前环节（一阶微分环节）：

$$\text{微分方程: } U_c(t) = T \frac{dU_r(t)}{dt} + kU_r(t)$$

$$\text{拉普拉斯变换: } C(s) = TsR(s) + kR(s)$$

$$\text{传递函数: } G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = Ts + k$$

### ◆ 6. 延滞环节：

$$\text{微分方程: } c(t) = r(t - \tau)$$

$$\text{传递函数: } G(s) = e^{-\tau s}$$

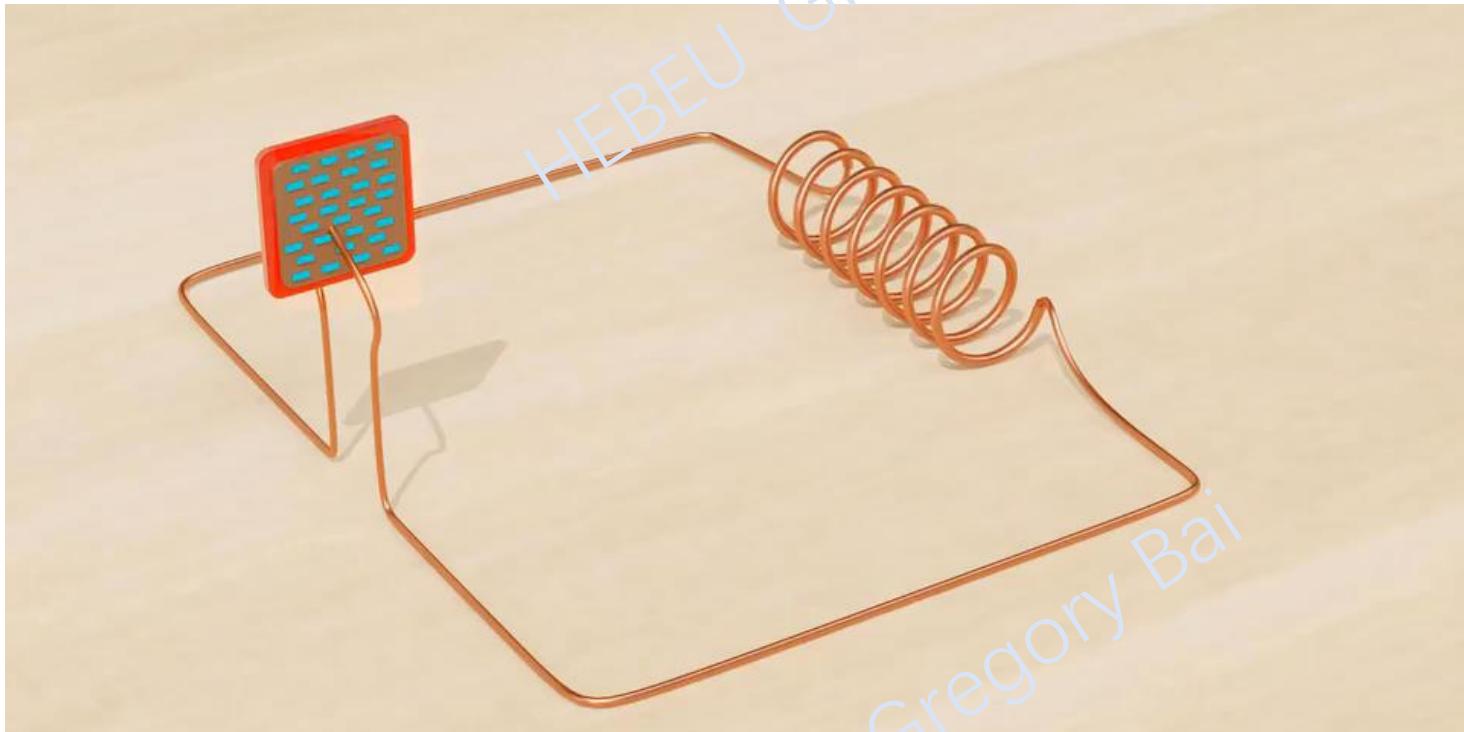
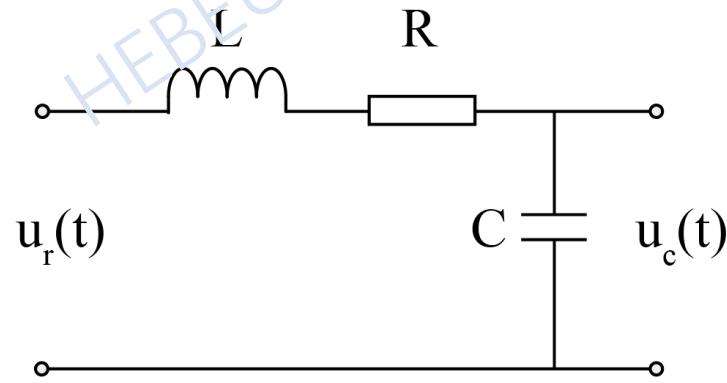
延滞时间（死区时间）

输出量相对于输入量滞后一个恒定时间



## Q2-9: LRC电路是什么振荡的?

- ◆ 7. 振荡环节（二阶积分环节）：

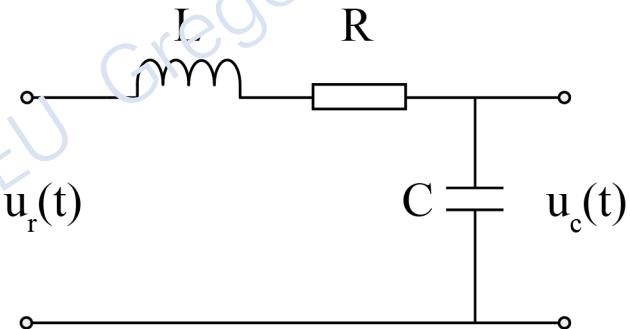


该环节存在两个储能元件，且所储两种能量可以互相转换，故动态过程表现出振荡特性。



## 2-2-3 典型环节的传递函数

### ◆ 7. 振荡环节（二阶积分环节）：



微分方程:  $LC \frac{d^2 U_c(t)}{dt^2} + RC \frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t) = U_r(t)$

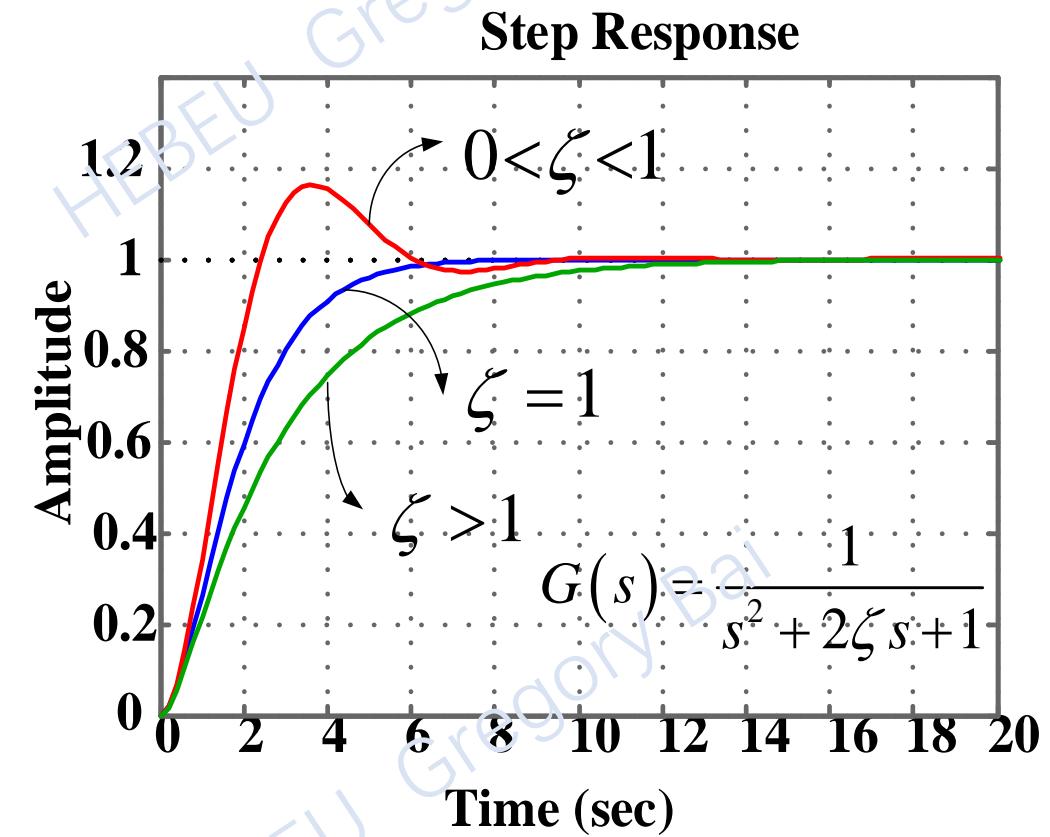
$\downarrow$

$$T^2 \frac{d^2 U_c(t)}{dt^2} + 2T\xi \frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t) = U_r(t)$$

$\downarrow$

$$G(s) = \frac{U_c(s)}{U_{r(s)}} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\omega_n\xi s + \omega_n^2}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \omega_n: \text{无阻尼自然振荡频率} \\ \xi: \text{阻尼比} \end{array} \right.$

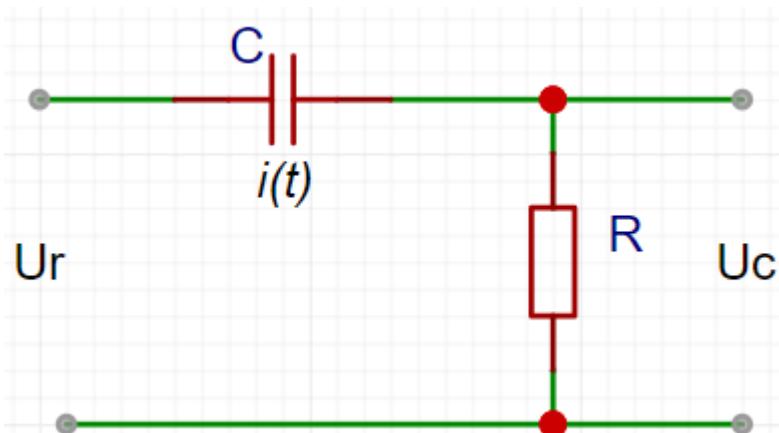




## 2-2-3 典型环节的传递函数

**注意：**一个装置或元件可能含有若干典型环节。

- 例如：无源网络



同一元部件，若选择不同的输入量和输出量，将由不同的典型环节组成

$$G(s) = \frac{Ts}{Ts+1}, \text{ 其中 } T = RC$$

- ① 含有  $K_i = T$  的比例环节
- ② 时间常数为  $T$  的惯性环节
- ③ 微分环节  $s$

动态性能是系统中所含有全部典型环节共同的结果。



## 2-3 控制系统的结构图

微分方程、传递函数等数学模型的缺点，都是用纯数学表达式来描述系统特性，不能反映系统中各元部件对整个系统性能的影响。

$$\left\{ \begin{array}{l} LC \frac{d^2 U_c(t)}{dt^2} + RC \frac{dU_c(t)}{dt} + U_c(t) = U_r(t) \\ G(s) = \frac{2s^2 - 2s - 4}{s^3 + 5s^2 + 8s + 6} \end{array} \right.$$

结构图的定义：

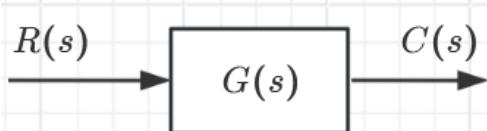
由具有一定函数关系的环节组成的，并标明信号流向的系统的方框图，称为系统结构图。结构图又称为方框图、方块图等，既能描述系统中各变量间的定量关系，又能明显地表示系统各部件对系统性能的影响。



## 2-3-1 结构图的基本组成

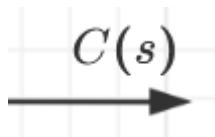
### ◆ 方框（环节）

方框表示对信号进行数学变换。方框中写入元部件或系统的传递函数。系统输出的象函数等于输入的象函数乘以方框中的传递函数或者频率特性。



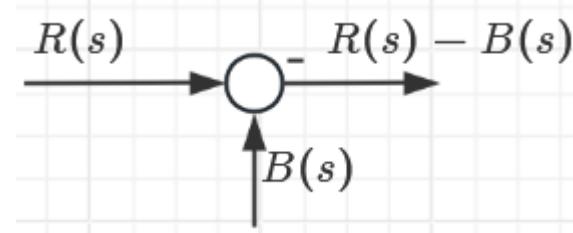
### ◆ 信号线

信号线是带有箭头的直线，箭头表示信号的流向，在直线旁边标记信号的时间函数或象函数。这里的信号引出与测量信号一样，不影响原信号，所以也称为测量点。



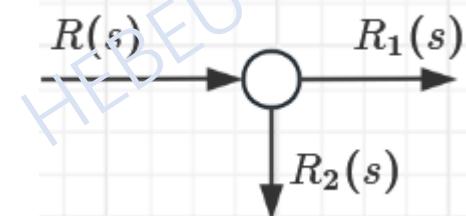
### ◆ 综合点（比较点）

比较点表示对两个以上的信号进行加减运算，“+”表示相加，“-”表示相减。进行相加或相减的量应具有相同的量纲单位。



### ◆ 分支点（引出点）

引出点表示信号引出或测量的位置。从同一位位置引出的信号在数值和性质方面完全相同。





## 2-3-2 结构图的特点

结构图的特点：

- ◆ 结构图是方块图与微分方程（传函）的结合。一方面它直观反映了整个系统的原理结构（方块图优点），另一方面对系统进行了精确的定量描述（每个信号线上的信号函数均可确定地计算出来）
- ◆ 能描述整个系统各元部件之间的内在联系和零初始条件下的动态性能，但不能反映非零条件下的动态性能
- ◆ 结构图最重要的作用：计算整个系统的传函
- ◆ 对同一系统，其结构图具有非唯一性；简化也具有非唯一性。但得到的系统传函是确定唯一的
- ◆ 结构图中方块≠实际元部件，因为方框可代表多个元件的组合，甚至整个系统



## 2-3-3 结构图的绘制步骤

结构图的绘制步骤：

- ① 建立控制系统各元部件的微分方程
- ② 对各元件的微分方程进行拉氏变换，并作出各元件的方框图和比较点
- ③ 置系统输入量于左端，输出量于右端，以便得到系统结构图
- ④ 从与系统输入量有关的比较点开始，依据信号流向，把各元部件的结构图连接起来



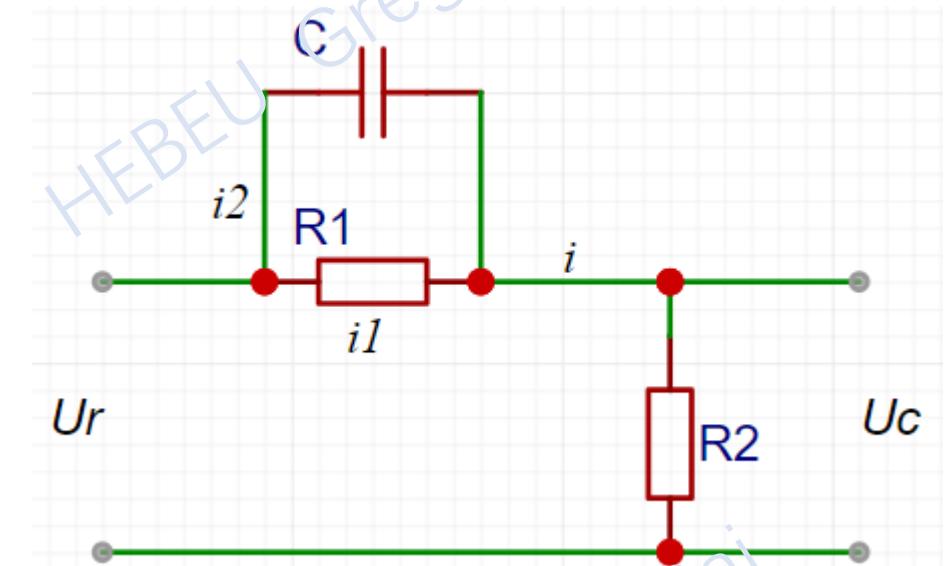
## 2-3-3 结构图的绘制步骤

**例2.8**: 绘制如图所示RC网络的结构图。

中间变量:  $i, i_1, i_2$ ; 信号量:  $u_r, u_c$

解: 根据电路定律, 得到以下方程

$$\begin{cases} U_c(s) = R_2 I(s) \\ U_r(s) = R_1 I_1(s) + U_c(s) \\ \frac{1}{C_s} I_2(s) = R_1 I_1(s) \\ I_1(s) + I_2(s) = I(s) \end{cases}$$

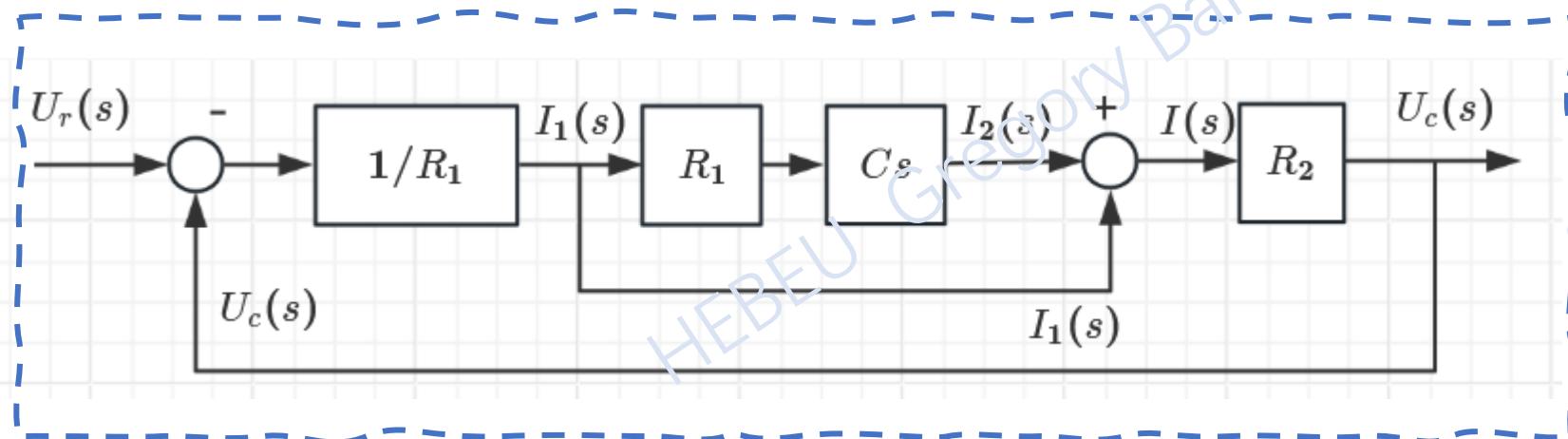
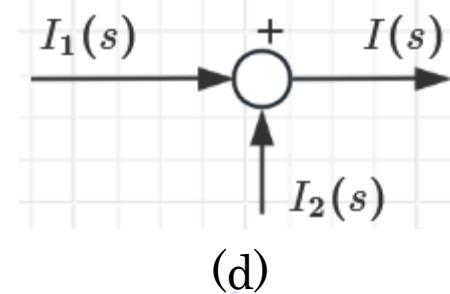
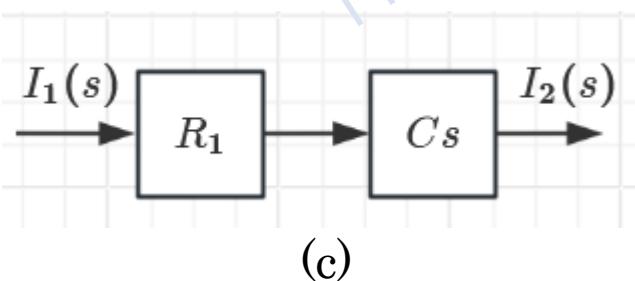
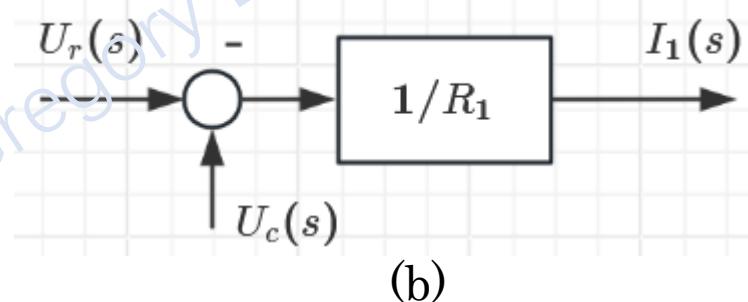
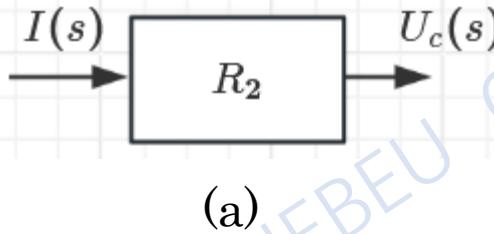
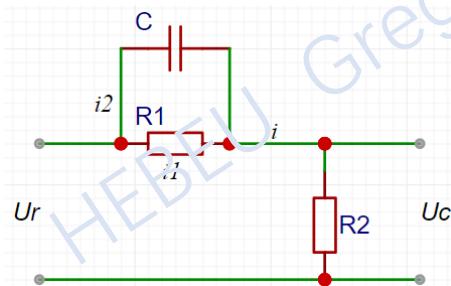




## 2-3-3 结构图的绘制步骤

按照上述方程，可以分别绘制相应元件的结构图，如图 (a)~(d)所示。然后，根据相互关系将这些结构图在相同信号处连接起来，就得到整个系统的结构图。

$$\left\{ \begin{array}{l} U_c(s) = R_2 I(s) \\ U_r(s) = R_1 I_1(s) + U_c(s) \\ \frac{1}{C_s} I_2(s) = R_1 I_1(s) \\ I_1(s) + I_2(s) = I(s) \end{array} \right.$$





## 2-3-4 控制系统结构图的简化

为了便于系统分析和设计，常常需要对系统的复杂的结构图作等价**变换**，或者通过变换使系统结构图**简化**，**求取系统的总传递函数**。因此，结构图变换是控制理论的基本内容。

**等效变换的原则：**结构图的变换应按等效原则进行。所谓等效，即对结构图的任一部分进行变换时，**变换前后输入输出的数学关系保持不变。**

**结构图的基本组成形式：**

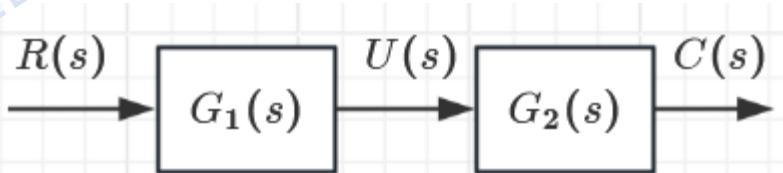
- ◆ 串联连接
- ◆ 并联连接
- ◆ 反馈连接



## 2-3-4 控制系统结构图的简化

等效变换法则

- **串联连接的等效变换：**传递函数的串联连接，其等效传递函数为这些传递函数的积。

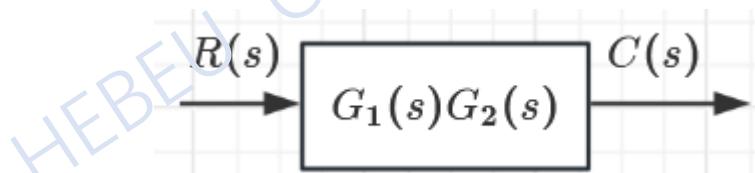


$$U(s) = G_1(s)R(s)$$

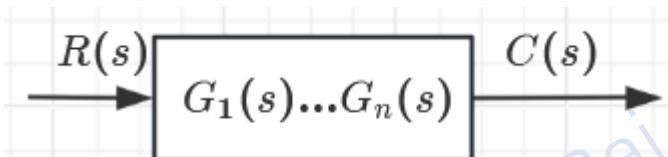
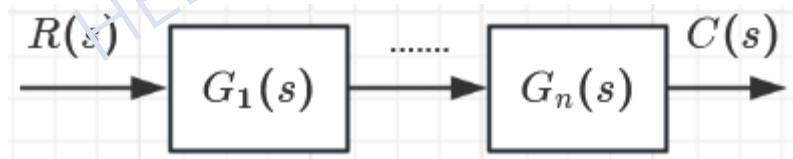
$$C(s) = G_2(s)U(s)$$

$$C(s) = G_1(s)G_2(s)R(s) = G(s)R(s)$$

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$



上述结论可以推广到多个传递函数的串联，即  $n$  个传递函数依次串联的等效传递函数，等于  $n$  个传递函数的乘积。



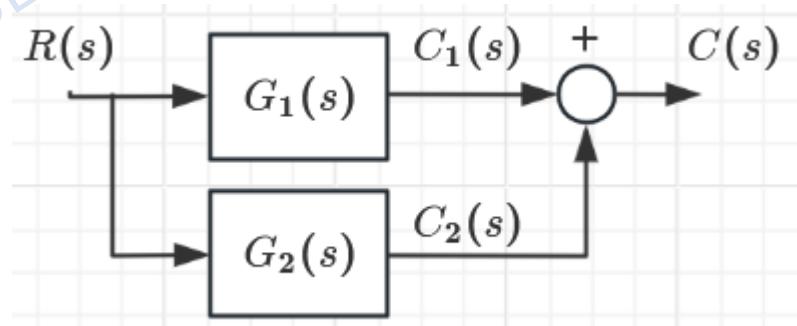
% 串联

```
[num, den] =  
series(num1,den1,num2,den2)
```



## 2-3-4 控制系统结构图的简化

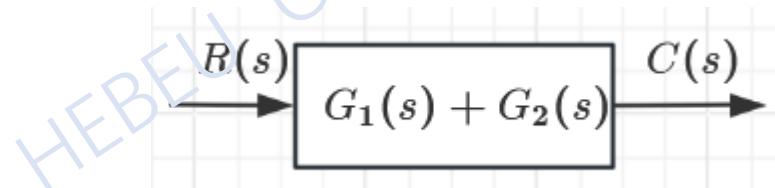
- **并联连接的等效变换：**传递函数的并联连接，其等效传递函数为这些传递函数的和。



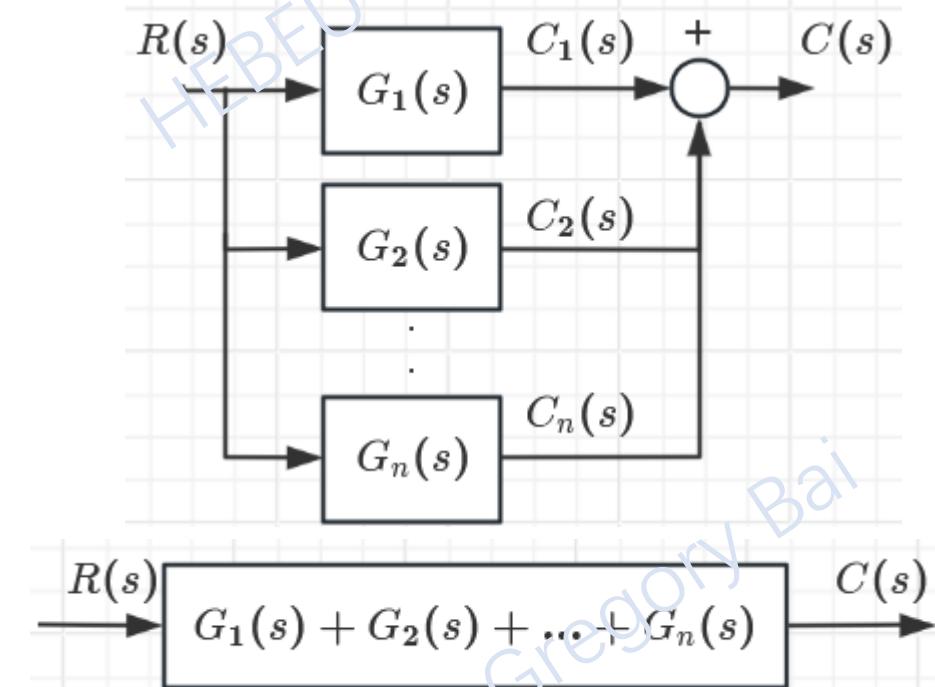
$$C_1(s) = G_1(s)R(s), C_2(s) = G_2(s)R(s)$$

$$G(s) = C_1(s) + C_2(s) = [G_1(s) + G_2(s)]R(s)$$

$$G(s) = G_1(s) + G_2(s)$$



上述结论可以推广到多个传递函数的并联，即 $n$ 个传递函数并联的等效传递函数，等于 $n$ 个传递函数的和。

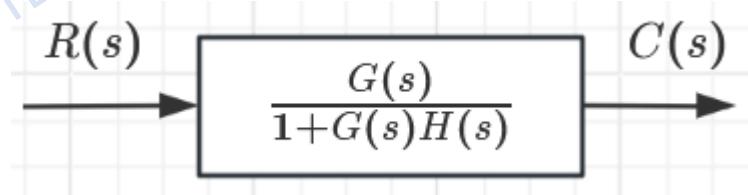
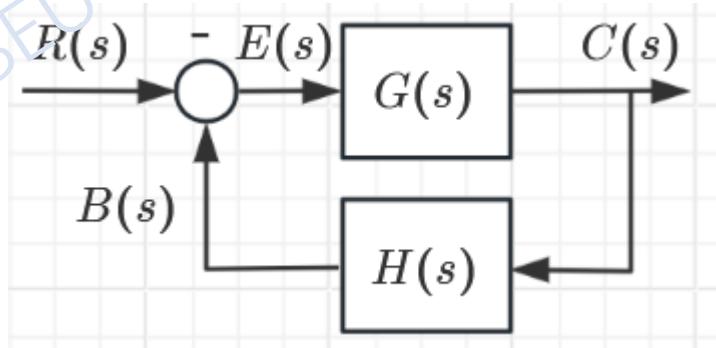


```
% 并联  
[num, den] =  
parallel(num1,den1,num2,den2)
```



## 2-3-4 控制系统结构图的简化

- 反馈连接的等效变换：



$$C(s) = G(s)E(s), B(s) = H(s)C(s), E(s) = R(s) - B(s)$$

$$C(s) = G(s)[R(s) \pm H(s)C(s)]$$

$$[1 + G(s)H(s)]C(s) = G(s)R(s)$$

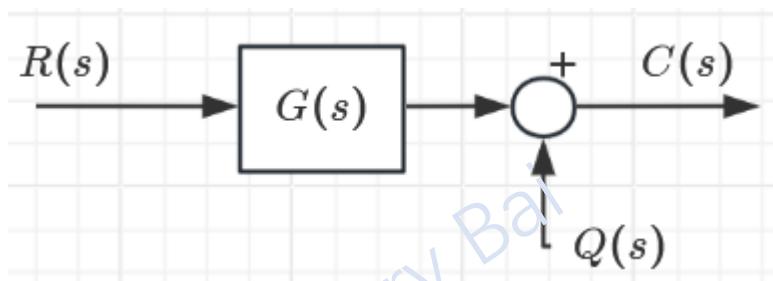
$$G_B(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

```
% 反馈  
[num, den] =  
feedback(num1, den1, num2, den2)
```



## 2-3-4 控制系统结构图的简化

- 比较点（综合点）和引出点的移动：在系统结构图简化的过程中，有时为了便于进行方框的串联、并联或者反馈连接的计算，需要移动比较点或引出点的位置。
- 比较点前后移动：

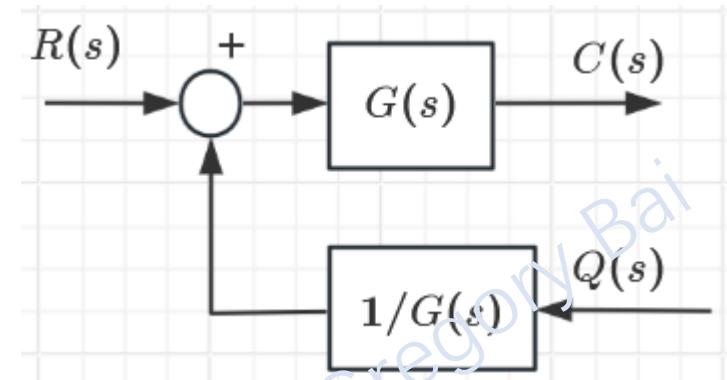


前移  
后移?



$$C = G(s)R + Q$$

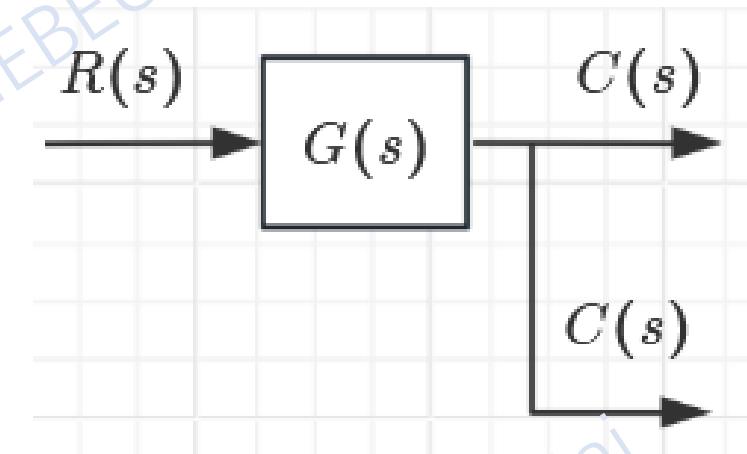
$$C = G(s)[R + 1/G(s) \cdot Q] = G(s)R + Q$$



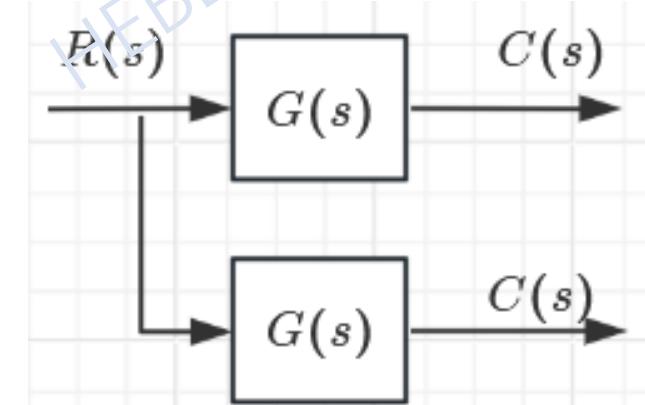


## 2-3-4 控制系统结构图的简化

- 引出点前后移动:



$$C(s) = R(s)G(s)$$





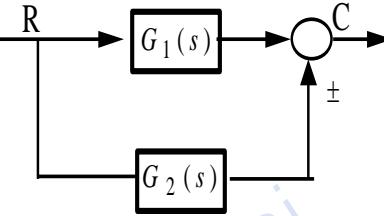
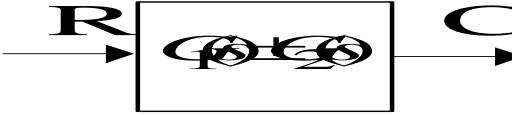
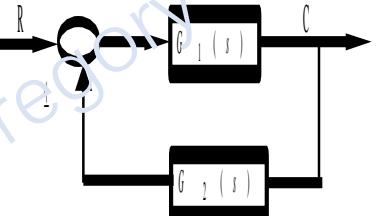
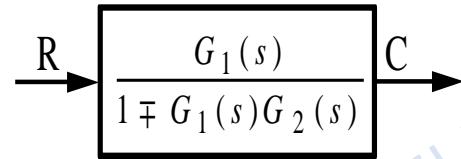
## 2-3-4 控制系统结构图的简化

**注意：**对综合点和分支点进行移动位置，消除交叉回路。但在移动中一定要注意以下几点：

- ① 必须保持移动前后信号的**等效性**；
- ② 相邻**综合点**可以互相**换位**和**合并**；
- ③ 相邻**分支点**可以互相**换位**；
- ④ 综合点和分支点之间一般**不宜**交换位置。

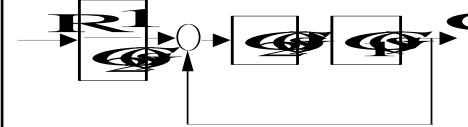
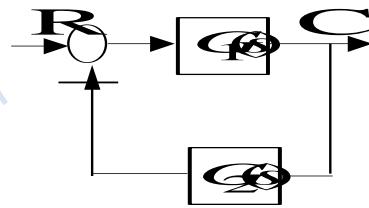


## 2-3-4 控制系统结构图的简化

序号	原结构图	等效原结构图	等效法则
1			串联等效 $C(s) = G_1(s)G_2(s)R(s)$
2			并联等效 $C(s) = [G_1(s) \pm G_2(s)] \cdot R(s)$
3			反馈等效 $C(s) = \frac{G_1(s)R(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}$



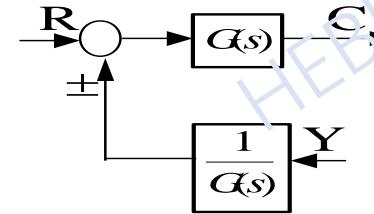
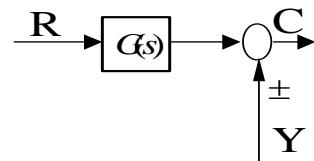
4



等效单位反馈

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{G_2(s)} \cdot \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}$$

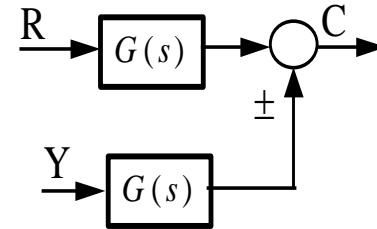
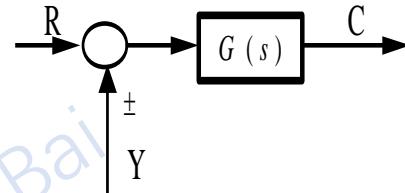
5



比较点前移

$$\begin{aligned} C(s) &= R(s)G(s) \pm Y(s) \\ &= [R(s) \pm \frac{Y(s)}{G(s)}] \cdot G(s) \end{aligned}$$

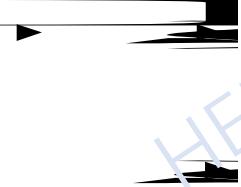
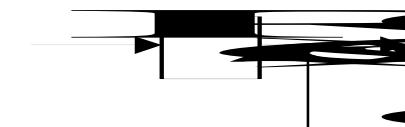
6



比较点后移

$$\begin{aligned} C(s) &= [R(s) \pm Y(s)] \cdot G(s) \\ &= R(s)G(s) \pm Y(s)G(s) \end{aligned}$$

7

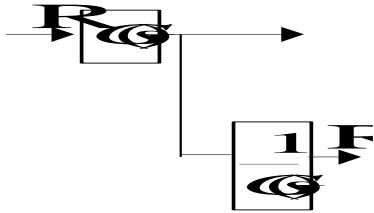
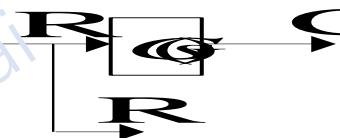


引出点前移

$$C(s) = R(s)G(s)$$



8

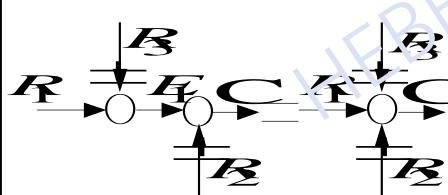
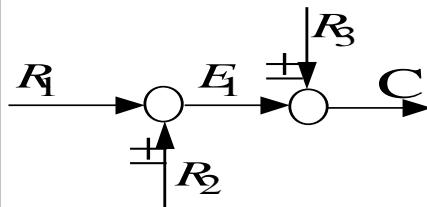


引出点后移

$$R(s) = R(s)G(s) \frac{1}{G(s)}$$

$$C(s) = R(s)G(s)$$

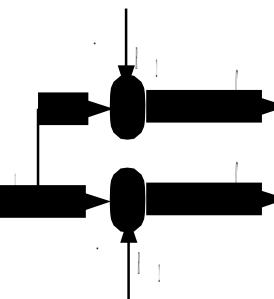
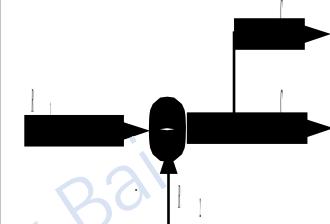
9



交换和合并比较点

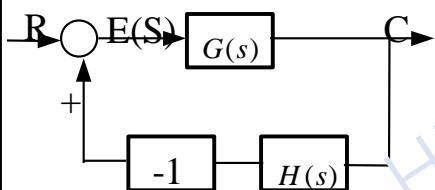
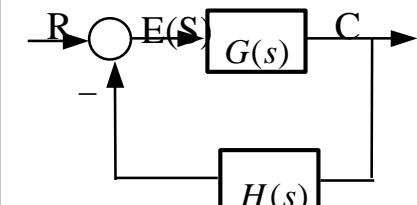
$$C(s) = R_1(s) \pm R_2(s) \pm R_3(s)$$

10

交换比较点和引出点  
(一般不采用)

$$C(s) = R_1(s) - R_2(s)$$

11



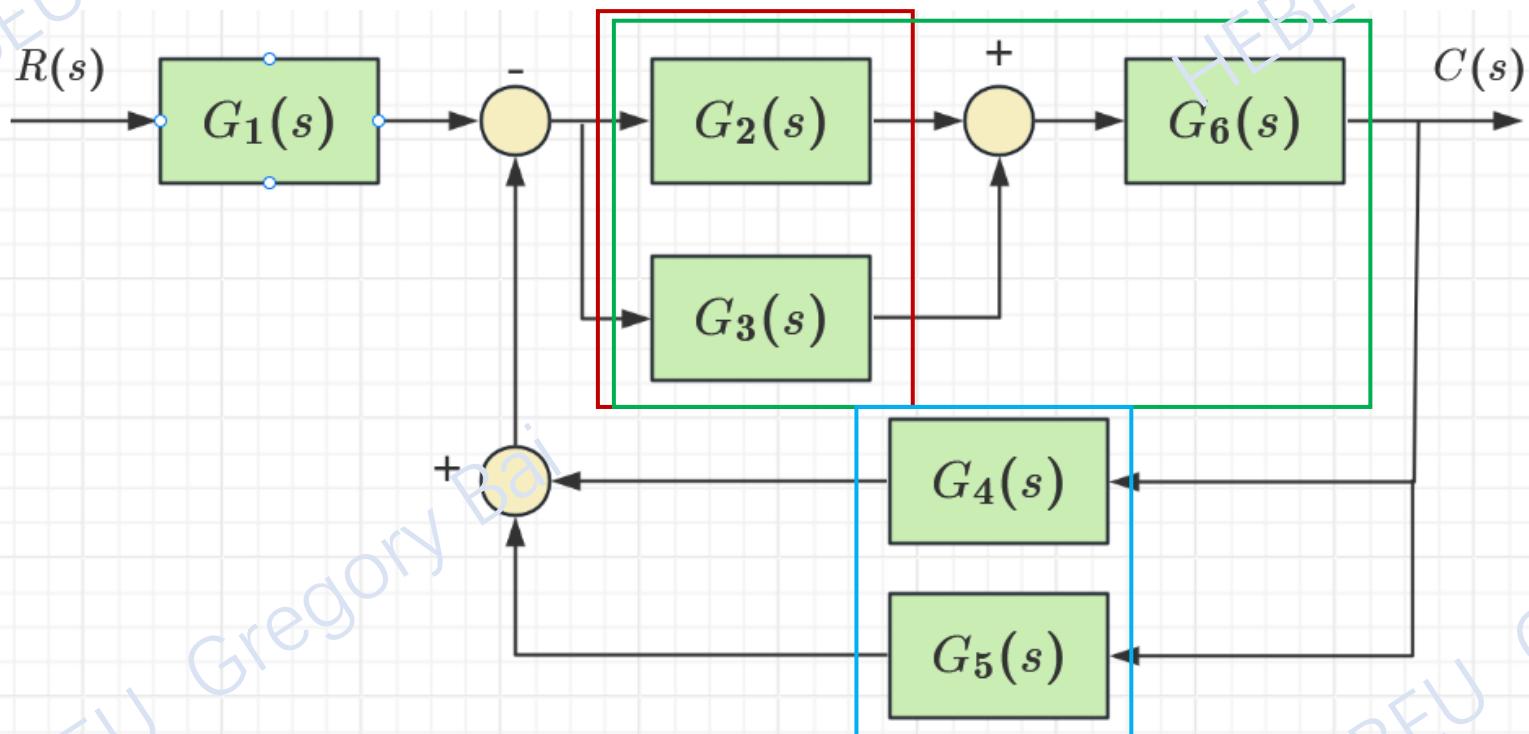
负号在支路上移动

$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - H(s)C(s) \\ &= R(s) + H(s) \times (-1)C(s) \end{aligned}$$



## 2-3-4 控制系统结构图的简化

例2.9：化简



$$G_{236} = (G_2 + G_3)G_6$$

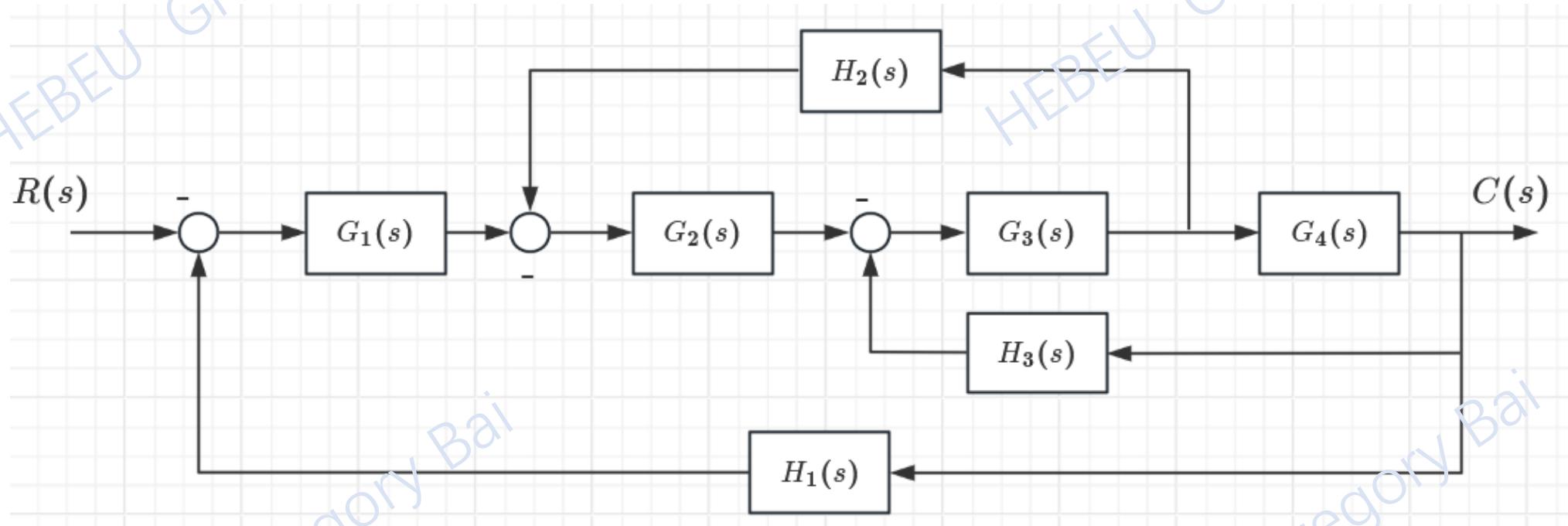
$$G_{54} = G_5 + G_4$$

$$G = \frac{G_{236}}{1 + G_{236}G_{54}} G_1$$



## 2-3-4 控制系统结构图的简化

**例2.10**: 试化简下述系统结构图，并求传递函数 $C(s)/R(s)$ 。

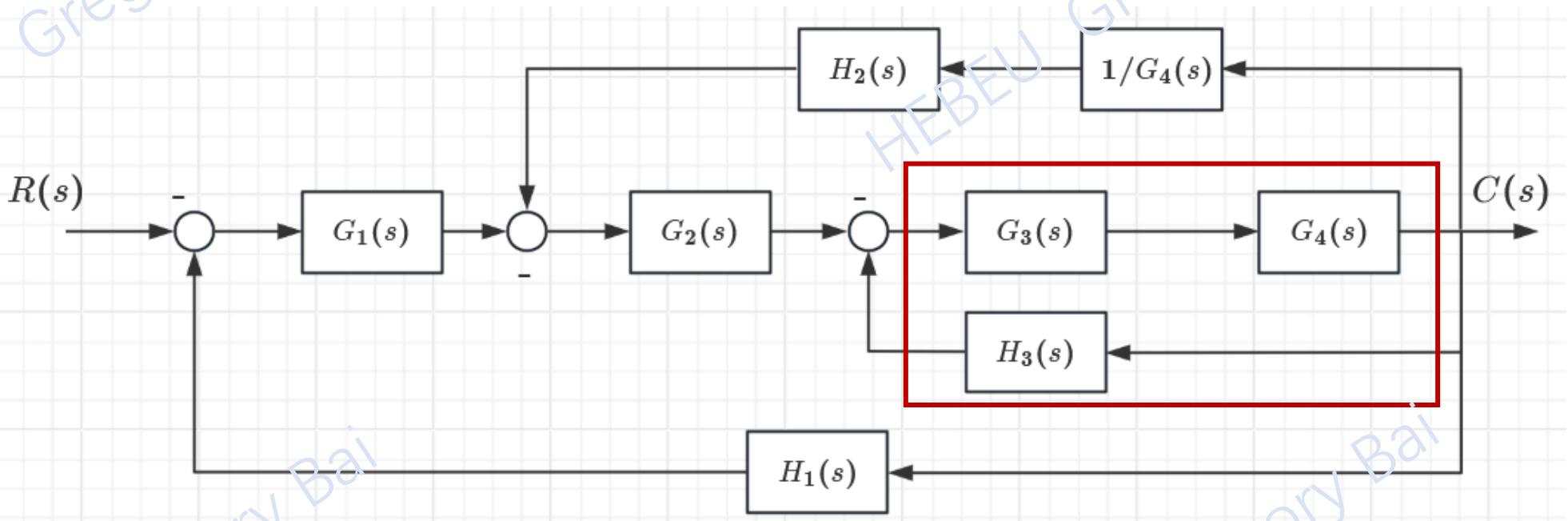


● 显然若不移动比较点或引出点的位置就无法化简。



## 2-3-4 控制系统结构图的简化

- 首先将  $G_3(s)$  和  $G_4(s)$  间的引出点后移到方框的输出端



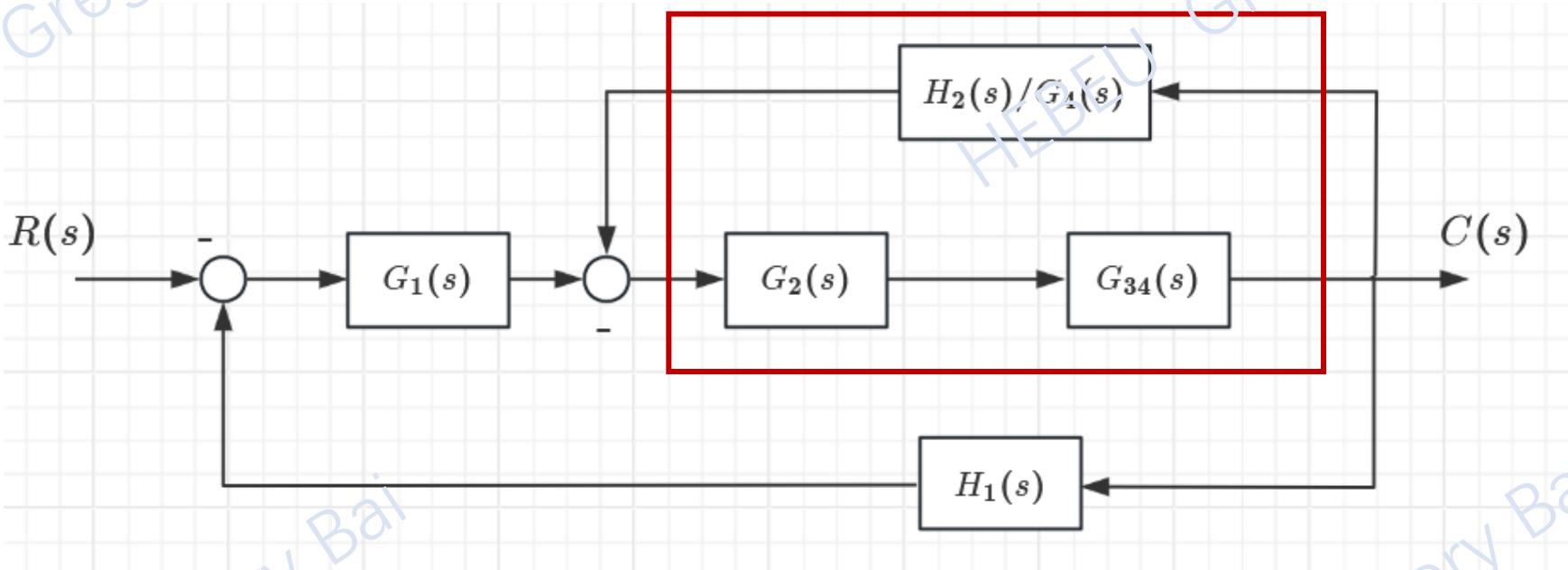
- 接着将  $G_3(s)$ 、 $G_4(s)$  和  $H_3(s)$  组成的内反馈网络简化，其等效传递函数为

$$G_{34}(s) = \frac{G_3(s)G_4(s)}{1 + G_3(s)G_4(s)H_3(s)}$$



## 2-3-4 控制系统结构图的简化

得到图为



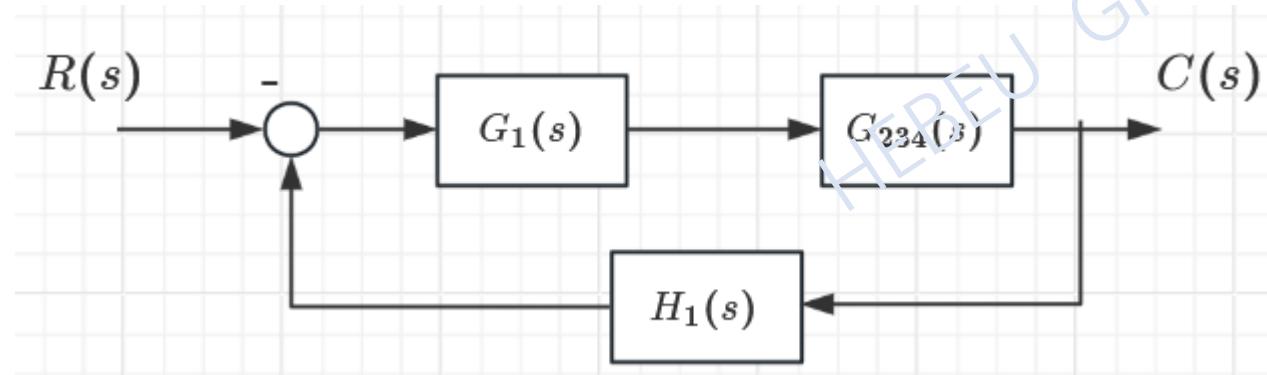
然后将  $G_2(s), G_{34}(s), H_2(s)/G_4(s)$  组成的内反馈网络简化，其等效传递函数为：

$$G_{234}(s) = \frac{G_2(s)G_{34}(s)G_4(s)}{G_4(s) + G_2(s)G_3(s)H_2(s)}$$



## 2-3-4 控制系统结构图的简化

- 得到图为



- 最后将求得其传递函数为：

$$G(s) = \frac{G_1(s)G_{234}(s)}{1 + G_1(s)G_{234}(s)H_1(s)}$$

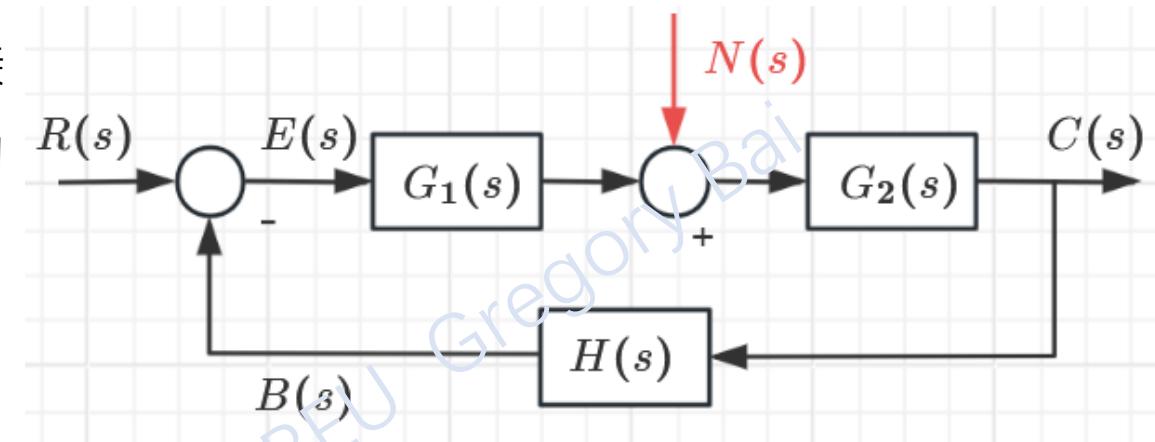


## 2-3-5 闭环控制系统的结构图和传递函数

- ◆ 通常控制系统会受到两类外作用信号的影响：
  - 一类是有~~吊~~信号，或称为输入信号、给定值、参考输入等，常用 $r(t)$ 表示；
  - 另一类则是~~扰~~动，或称为干扰、噪声等，常用 $n(t)$ 表示。

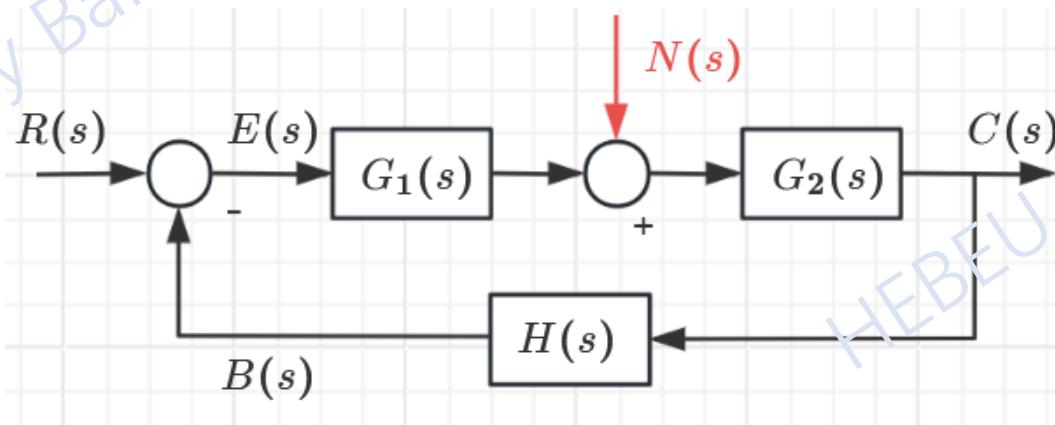
如何求含有扰动信号的闭环控制系统的结构图？

- ◆ 方法一：通过对反馈控制系统建立微分方程模型，直接在零初始条件下进行拉氏变换，可求取反馈控制系统的传函。
- ◆ 方法二：通过对反馈控制系统结构图简化也能求传函。





## 2-3-5 闭环控制系统的结构图和传递函数



### ◆ 前向通道传递函数

前向通道是指从输入端到输出端的通道。

对输入而言（不考虑扰动信号）：

$$P_r(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = G_1(s)G_2(s)$$

对扰动而言（不考虑输入信号）：

$$F_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = G_2(s)$$

### ◆ 反馈通道传递函数

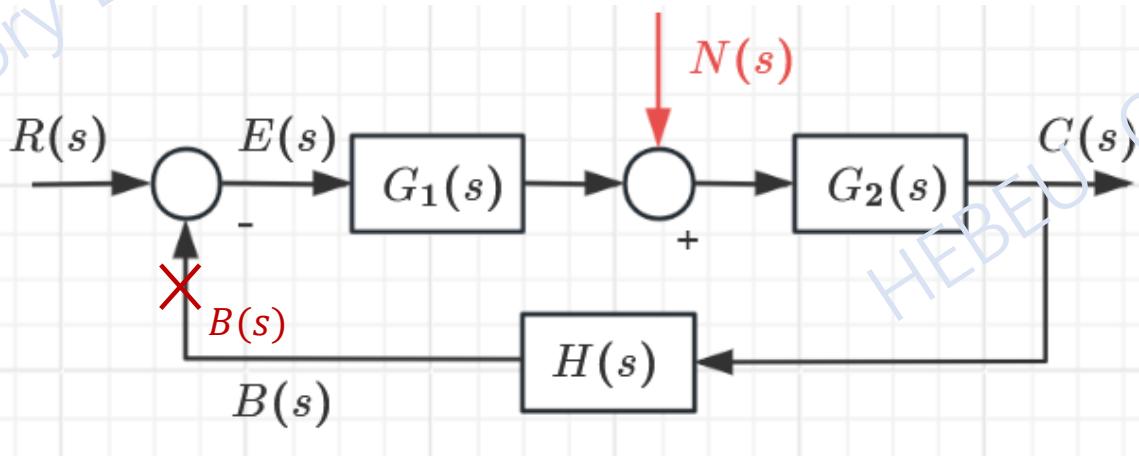
从输出端反送到参考输入端的信号通道，称为反馈通道。

对输入而言：

$$\Delta_r(s) = \frac{B(s)}{C(s)} = H(s)$$



## 2-3-5 闭环控制系统的结构图和传递函数



### ◆ 开环传递函数

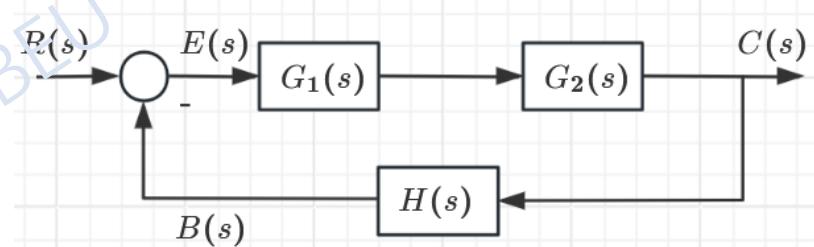
上图中将反馈的输出通路断开，**反馈信号** $B(s)$ 对于**误差信号** $E(s)$ 的传递函数称为**开环传递函数**。这时**前向通路传递函数**与**反馈通路传递函数**的乘积为该系统的开环传递函数。

$$G(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = G_1(s)G_2(s)H(s)$$



## 2-3-5 闭环控制系统的结构图和传递函数

### ◆ $r(t)$ 作用下系统的闭环传递函数



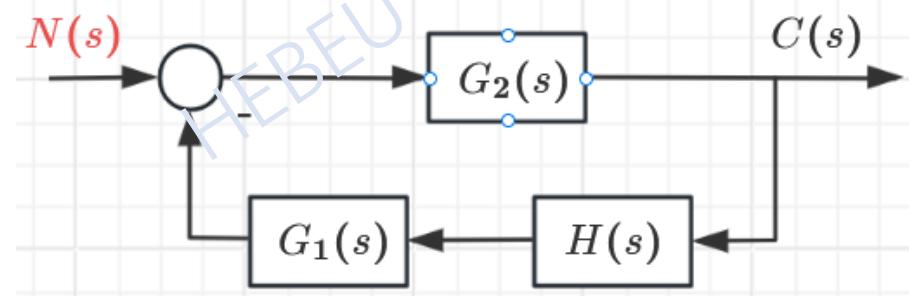
- 令 $n(t) = 0$ , 这时系统结构图如上图, 系统传递函数为:

$$\Phi_r(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- 系统输出为:

$$C(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s)$$

### ◆ $n(t)$ 作用下系统的闭环传递函数



- 令 $t(t) = 0$ , 这时系统结构图如上图, 系统传递函数为:

$$\Phi_n(s) = \frac{C(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- 系统输出为:

$$C(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$



## 2-3-5 闭环控制系统的结构图和传递函数

### ◆ 系统总输出

根据线性系统的叠加原理，系统的总输出应为各外作用引起输出的综合因而得到系统总输出为：

$$C(s) = \Phi_r(s)R(s) + \Phi_n(s)N(s)$$

$$= \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

$$= \boxed{\frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}} [G_1(s)G_2(s)R(s) + G_2(s)N(s)]$$



## 2-3-5 闭环控制系统的结构图和传递函数

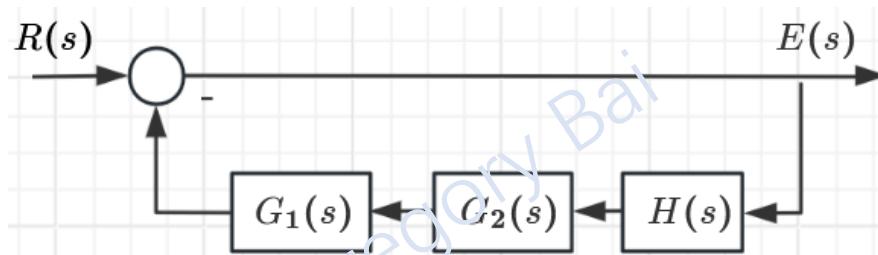
### ◆ 误差传递函数

误差定义为被控量的测量输出 $b(t)$ 和给定输入 $r(t)$ 之差，或

$$e(t) = r(t) - b(t)$$

$$E(s) = R(s) - B(s)$$

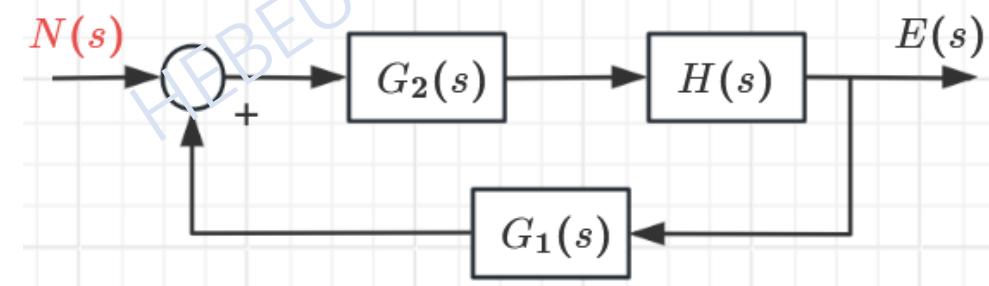
- $r(t)$ 作用下的误差，输入结构图



- 误差传递函数

$$\Phi_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- $n(t)$ 作用下系统的误差传递函数，输入结构图



- 误差传递函数

$$\Phi_{en}(s) = \frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

- 总误差

$$E(s) = \Phi_e(s)R(s) + \Phi_{en}(s)N(s)$$



## 2-3-5 闭环控制系统的结构图和传递函数

### 闭环系统的特征方程

上面导出闭环传递函数及误差传递函数虽然各不相同，但是他们的分母却是一样的。

均为： $1 + G_1(s)G_2(s)H(s)$

这是闭环控制系统各种传递函数都具有的规律性，称其为**特征多项式**。

令 $D(s) = 1 + G_1(s)G_2(s)H(s) = 0$  并称其为**闭环特征方程**。将其改写为如下形式：

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 = 0 \quad \longrightarrow \quad (s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n) = 0$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ 可以是实数或共轭复数，称为**特征方程的根**，或称为闭环系统的**极点**。

- ◆ 对给定的系统而言，特征多项式是**唯一的**，即闭环极点的分布是**唯一的**。
- ◆ 闭环系统的**极点**与控制系统的**瞬态响应**和系统的**稳定性**密切相关。
- ◆ 特征多项式与开环传函相关，因此其**动态特性**可用开环传函分析。



## 2-4 状态空间模型

**定义：**在**状态空间**中以**状态向量**或**状态变量**描述系统的方法称为系统的**状态空间模型**。

**优点：**

- 能完全表达出系统的全部**状态**和**性能**（内部和外部）
- 能了解系统内部状态的**变化特性**
- 容易考虑**初始条件**
- 适用范围广：时变系统，非线性系统，多输入多输出
- 便于设计



## 2-4-1 状态变量表达式概念

### 基本名词概念：

- **状态**：系统过去、现在和将来的状况。
- **状态变量**：状态变量指能确定系统运动状态的**最少数目**的一组变量。
- **状态向量**：若以 $n$ 个状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 做为向量 $X(t)$ 的分量，则称 $X(t)$ 为状态向量。
- **状态空间**：以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为基构成的 $n$ 维空间。
- **状态方程**：描述系统状态变量和输入变量之间关系的一阶微分方程组称为状态方程。

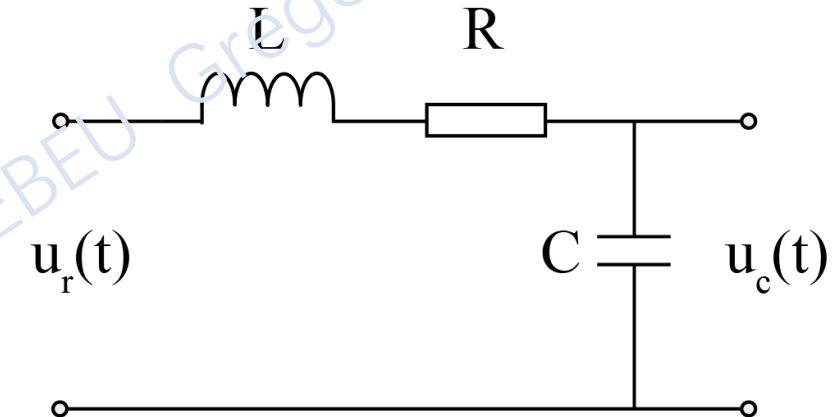


## 2-4-1 状态变量表达式概念

如图所示的LRC电路，其输入电压为 $u_r(t)$ ，该电路中的四个物理量 $i(t)$ 、 $u_R(t)$ 、 $u_L(t)$ 、 $u_C(t)$ 反映着系统的特征。根据线性电路知识，这个电路有两个储能元件，即电感L和电容C，有两个物理量是**独立**的，而其余的物理量必能用这两个独立的物理量来表示。

当选 $i(t)$ 、 $U_c(t)$ 为独立变量时，则其它变量可表示为：

$$\left\{ \begin{array}{l} u_R(t) = Ri(t) \\ C \frac{du_C(t)}{dt} = i(t) \\ L \frac{di(t)}{dt} = u_i(t) - u_c(t) - u_R(t) \end{array} \right.$$



由解微分方程可知，如果已知**初始条件**  $i(0)$ 、 $u_c(0)$  以及  $t > 0$  的  $u_r(t)$ ，那么的  $u_c(t)$  在  $t > 0$  后的任一时刻的解就完全被确定了。



## 2-4-1 状态变量表达式概念

如方程组采用状态向量表示时  $x_1 = i(t)$ ,  $x_2 = u_c(t)$ , 令  $u_r(t)$  为系统输入

$$\begin{cases} L \frac{di(t)}{dt} = u_r(t) - u_c(t) - Ri(t) \\ C \frac{du_c(t)}{dt} = i(t) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u_r(t) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \end{cases}$$

(状态方程)

如果以  $u_c(t)$  为系统输出, 用  $y$  表示, 则有

$$y = x_2(t) \quad (\text{输出方程})$$

- 系统输出也可能并不一定是状态变量。
- 其它的量如  $u_R(t)$  或  $u_L(t)$  等一定能用状态变量来表示。
- 即输出可以写成状态变量的线性组合, 因此输出方程一定是代数方程。



## 2-4-1 状态变量表达式概念

状态空间模型

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & \text{(状态方程)} \\ y = Cx + Du & \text{(输出方程)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{R}{L}x_1(t) - \frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u_r(t) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 \\ y = x_2(t) \end{cases}$$

矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u_r(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} & A &= \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} & C &= [0 \quad 1] \end{aligned}$$



# 2-4-1 状态变量表达式概念

## ➤ 状态方程的一般形式

单输入线性定常连续系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t) \end{cases}$$

只有一个输入  $u(t)$

式中常系数  $a_{11}, \dots, a_{nn}; b_1, \dots, b_n$ ; 与系统特性有关。

上式可以写成向量矩阵形式  $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$

其中

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$b$  为  $n \times 1$  矩阵



# 2-4-1 状态变量表达式概念

- 多输入线性定常连续系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \cdots + b_{1p}u_p \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \cdots + b_{2p}u_p \\ \vdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \cdots + b_{np}u_p \end{cases}$$

p个输入  $u(t)$

向量矩阵形式为  $\dot{x} = Ax + Bu$ , 其中

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix}$$

$B$  为  $n \times p$  矩阵



## 2-4-1 状态变量表达式概念

### ➤ 状态空间表达式：

状态方程与输出方程的组合称为状态空间表达式，又称动态方程。

- 单输入-单输出系统状态空间表达式的一般形式为
- 多输入 - 多输出系统状态空间表达式的一般形式为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx + du \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$A(t)$ : 系统矩阵（状态矩阵）

$B(t)$ : 控制矩阵（输入矩阵）

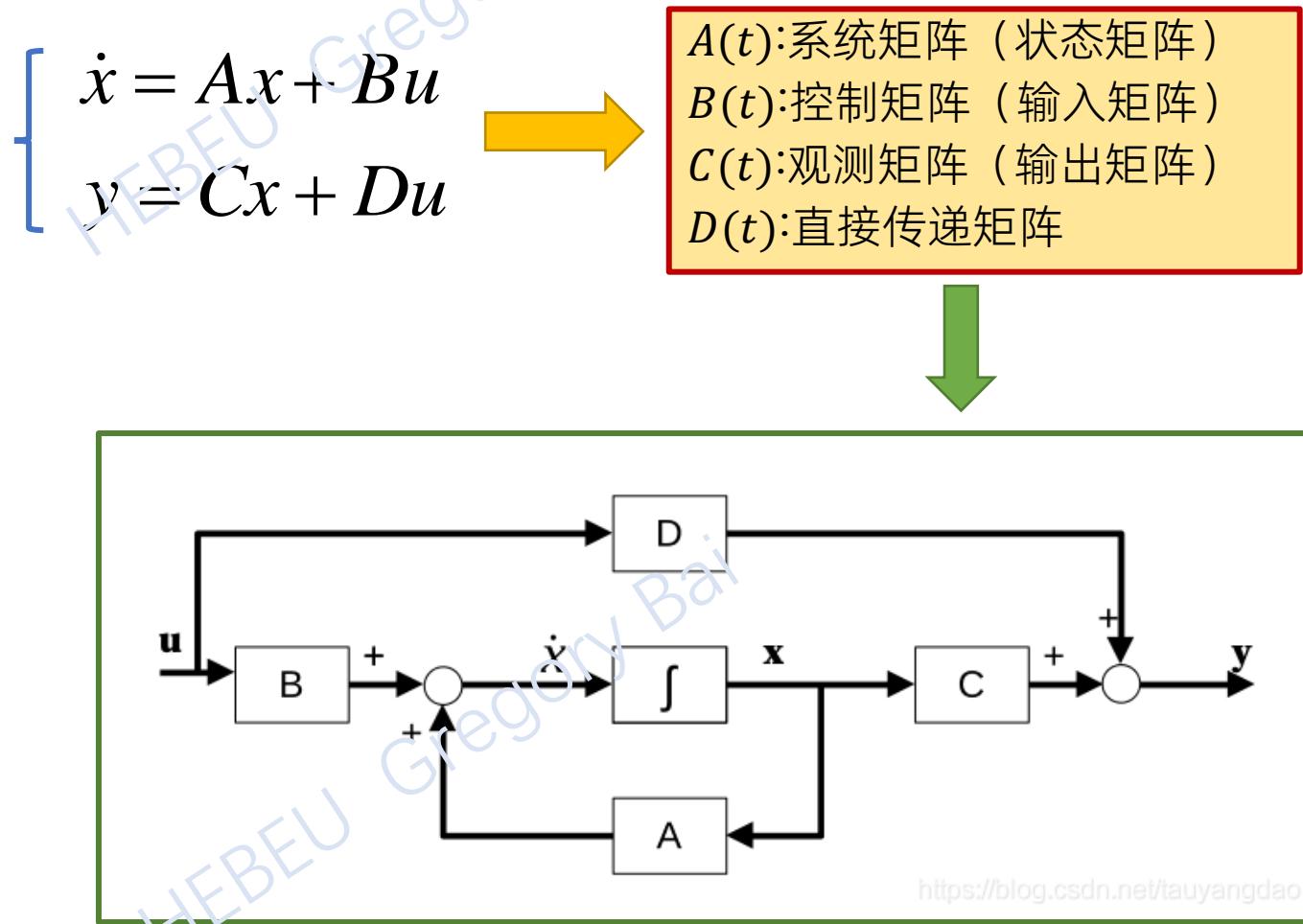
$C(t)$ : 观测矩阵（输出矩阵）

$D(t)$ : 直接传递矩阵

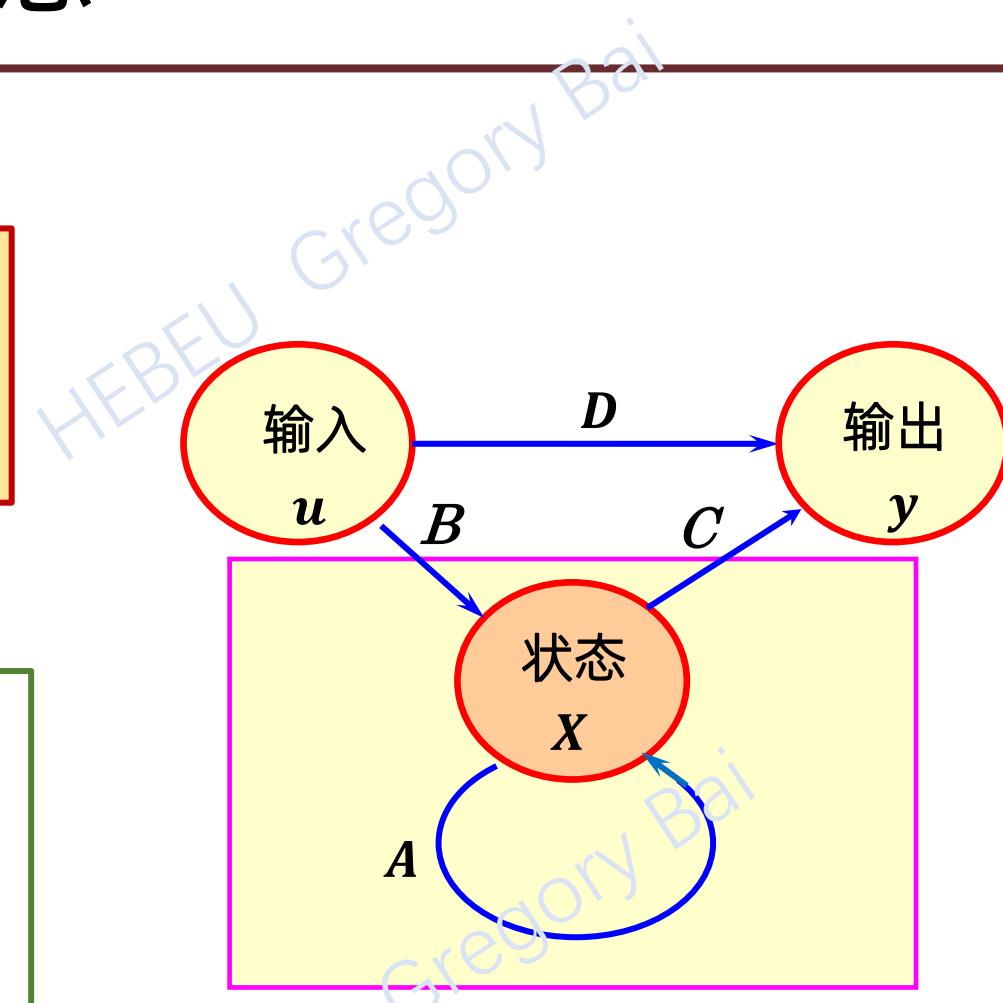


## 2-4-1 状态变量表达式概念

状态空间模型的标准形式

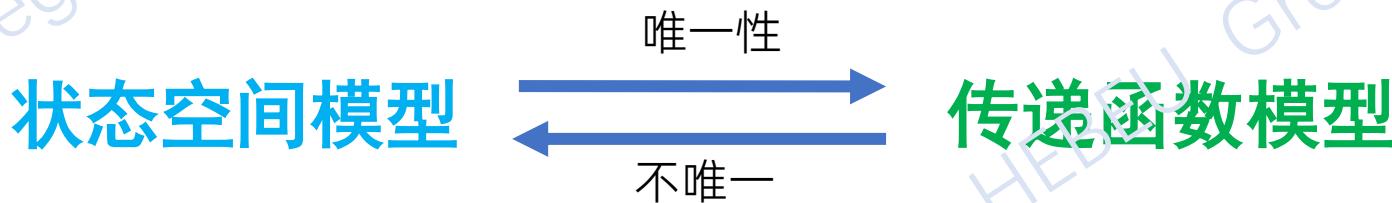


线性系统的状态空间表达式动态结构图





## 2-4-2 状态空间模型与传递函数模型之间的转化



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

$\xrightleftharpoons[\text{可观规范型}]{\text{可控规范型}}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$|sI - A| = 0$  是系统的特征方程



## 2-4-2 状态空间模型与传递函数模型之间的转化

**例2.11:** 将下列状态空间模型转化为传递函数模型。

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}u \\ y = [1 \ 0]x \end{cases}$$

解：由状态空间模型转化为传递函数模型公式

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D$$

% 状态空间模型→传递函数

```
A = [0 1; -2 -3];  
B = [0; 2];  
C = [1 0];  
D = [0];  
[num, den] = ss2tf(A,B,C,D)
```

**例2.12:** 将下列传递函数模型转化为状态空间模型。

$$G(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^3 + 5s^2 - 10s + 2}$$

% 传递函数→状态空间模型

```
num = [1 2 3];  
den = [1 5 -10 2];  
[A, B, C, D] = tf2ss(num, den)
```



## 2-4-3 控制系统的能控性与能观性

### 1. 能控性

定义：如果在一个**有限的时间间隔**内施加一个容许的控制向量，使得系统可以由**任意初始状态** $x(t_0)$ 转移到**其它任意状态**，则称该系统在 $t_0$ 时刻是状态能控的。

如果对于**任意状态均能控**，则称系统是状态完全能控的。

判据：若 $[B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$ 的秩为 $n$ ，则状态完全能控。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -5x_2 + 2u \end{aligned}$$

能控！



## 2-4-3 控制系统的能控性与能观性

### 2. 能观性

**定义：**如果系统的初始状态 $x(t_0)$ 可以通过**有限时间间隔内输出的观测值确定**，则称该系统在 $t_0$ 时刻是状态能观的。如果对于**任意状态均可观测**，则称系统是状态完全能观的。

**判据：**若 $[C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T \quad \dots \quad (A^T)^{n-1} C^T]$ 的秩为 $n$ ，则状态完全能观。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}x \\ y &= [1 \quad -1]x\end{aligned}$$



$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -4x_1 + 5x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ y = x_1 - x_2 \end{cases}$$

不能观！

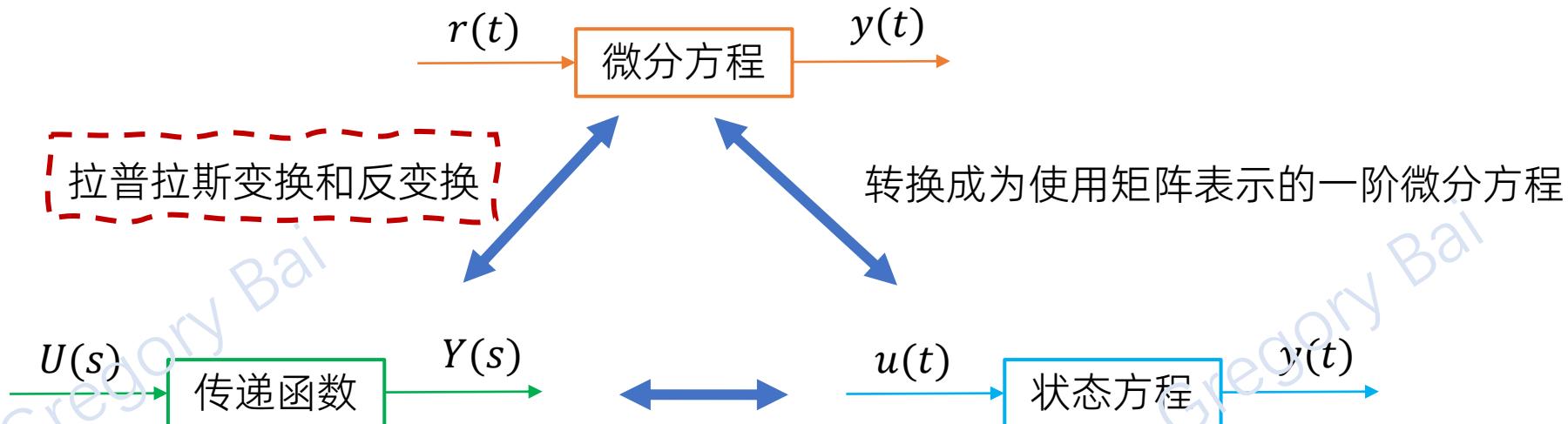


## 2-4-4 系统的表示方法

三种系统表达方式之间的转换

常微分方程

$$\begin{aligned} & a_n \frac{d^n}{dt^n} c(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} c(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} c(t) + a_0 c(t) \\ &= b_m \frac{d^m}{dt^m} r(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} r(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} r(t) + b_0 r(t) \end{aligned}$$



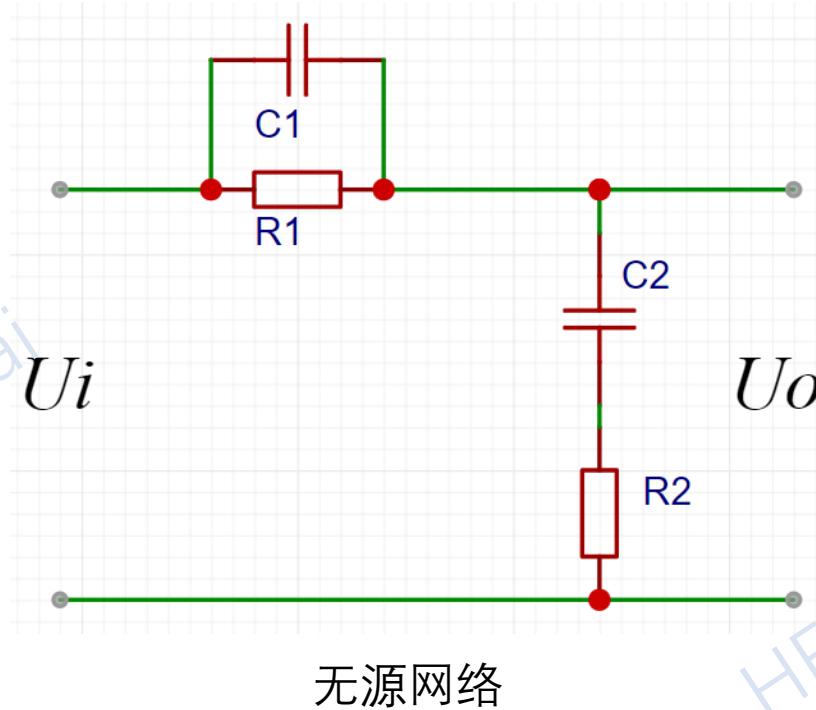
$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = Cx + du \end{cases}$$



# 作业1

1. 试写出无源网络对应的时域数学模型和传递函数数学模型，要求写出推导过程。

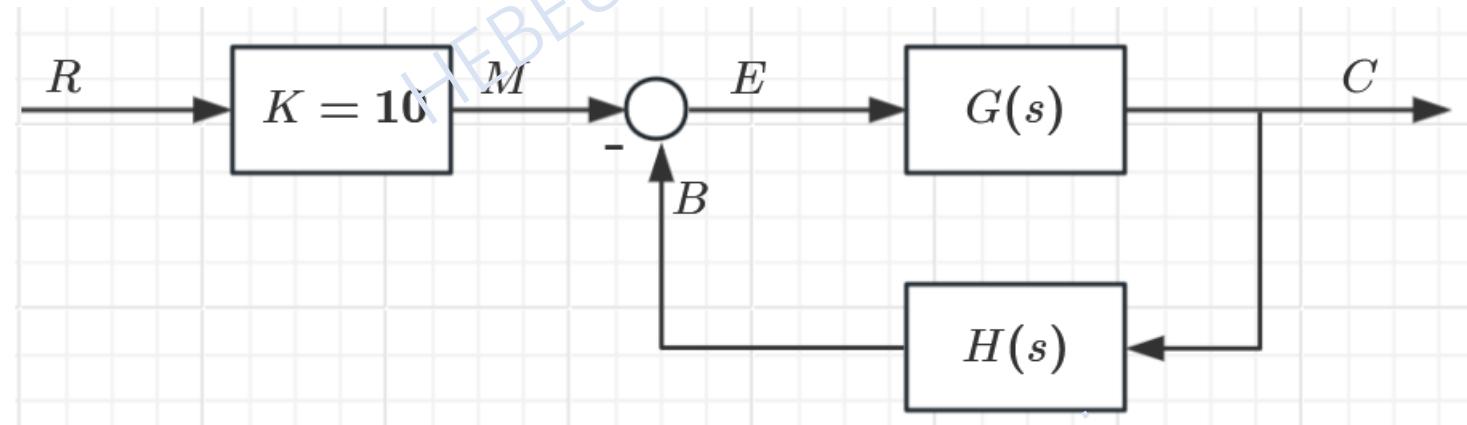




# 作业1

2. 已知 $G(s)$ 和 $H(s)$ 两方框对应的微分方程分别为

$$\left\{ \begin{array}{l} 6 \frac{dc(t)}{dt} + 10c(t) = 20e(t) \\ 20 \frac{db(t)}{dt} + 5b(t) = 10c(t) \end{array} \right.$$



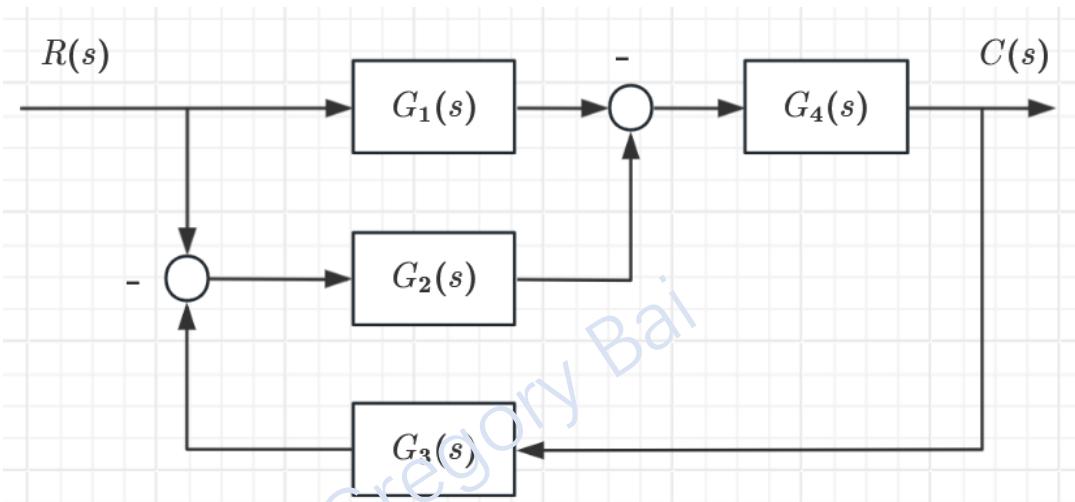
且为零初始条件,

试求传递函数 $G_1(s) = C(s)/R(s)$ 和 $G_2(s) = E(s)/R(s)$ 。

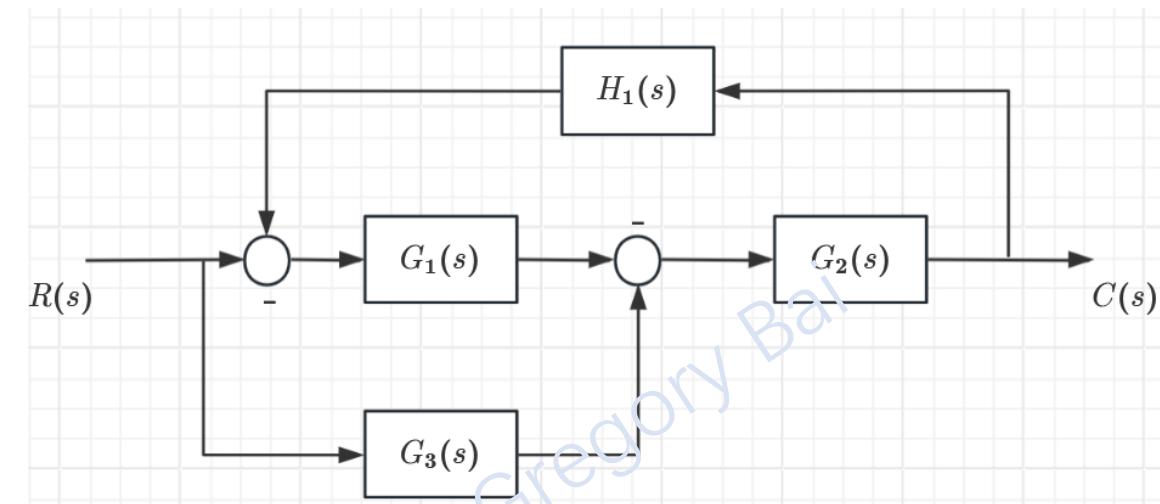


# 作业1

3. 已知控制系统结构图分别如下图所示，试通过结构图等效变换和化简求出系统传递函数（要求写出框图变换和化简过程）。



框图1



框图2