Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0**, если
1) $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , включая саму точку;
2) $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0$.

Равносильное определение непрерывности на языке бесконечно малых.
Обозначим $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$ (приращение функции и приращение аргумента).
Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0**, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Теоремы о функциях, непрерывных в точке

1) Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 , то функции $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ тоже непрерывны в точке x_0 , а если $g(x_0) \neq 0$, то $f(x)/g(x)$ тоже непрерывны в точке x_0.
Эти утверждения следуют из основных теорем о пределах.
2) Пусть функция $g(x)$ определена на (a, b), а множество ее значений принадлежит области определения функции $f(x)$. Тогда можно определить новую функцию $h(x)$ формулой

$$h(x) = f(g(x))$$

В этом случае говорят, что $h(x)$ – результат **суперпозиции** функций f и g.

Теорема 1. Суперпозиция непрерывных функций также является непрерывной

Доказательство. Обозначим $\Delta g(x_0) = g(x) - g(x_0) \implies g(x) = g(x_0) + \Delta g(x_0)$.
Тогда

$$\Delta h(x_0) = f\big(g(x)\big) - f\big(g(x_0)\big) = f\big(g(x_0) + \Delta g(x_0)\big) - f\big(g(x_0)\big) \qquad (1)$$

В силу непрерывности $g(x)$ имеем $\Delta g(x_0) \to 0$ при $\Delta x = x - x_0 \to 0$, а в силу непрерывности f имеем $f\big(g(x_0) + \Delta g(x_0)\big) \to f(g(x_0)$. Из формулы (1) получаем
$\Delta h(x_0) \to f\big(g(x_0)\big) - f(g(x_0)) = 0$ при $\Delta x \to 0$, что и требовалось.
Примем без доказательства, что **основные элементарные** функции непрерывны. Тогда из теоремы следует непрерывность **всех элементарных** функций.

Дополним понятие непрерывности.
Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке x_0 слева (справа)** если

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \qquad (f(x_0 + 0) = f(x_0))$$

Пример. $f(x) = x/|x|$,$x \neq 0$ и $f(0) = 1$. Пусть $x_0 = 0$. Очевидно, здесь $f(x_0 - 0) = -1$, $f(x_0 + 0) = 1$. Значит, $f(x)$ непрерывна в 0 справа, но не является непрерывной слева.

Необходимое и достаточное условие непрерывности

Теорема 2. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда односторонние пределы в точке x_0 равны друг другу и равны значению функции в этой точке.

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \qquad (1)$$

(доказать самостоятельно)

Непрерывность на интервале и на отрезке

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на (a, b)** , если она непрерывна при всех $x \epsilon (a, b)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной на $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$**, если выполнены два условия:
1) она непрерывна на (a,b);
2) на левом конце отрезка она непрерывна справа, а на правом – непрерывна слева .

Теоремы о функциях, непрерывных на отрезке

Теорема 3. Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ имеет на $[a,b]$ наибольшее и наименьшее значения.

Это означает, что найдутся такие $\alpha,\beta \epsilon [a,b]$, что $\forall x \epsilon [a,b]$ выполняется неравенство

$$f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta) \quad .$$

Доказательство. Пусть $E -$ множество всех значений функции $f(x)$. Доказательство разделим на два этапа.
1) Сначала докажем, что E ограниченное множество. Пусть не так. Тогда найдется последовательность $x_n \epsilon [a,b]$, для которой

$$|f(x_n)| \to +\infty \qquad (2)$$

По теореме Вейерштрасса из последовательности x_n можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Для простоты будем обозначать ее тоже через x_n, а ее предел через c. В силу непрерывности $f(x)$ имеем $f(x_n) \to f(c)$, а это противоречит (2). Итак, ограниченность E доказана.
2) Обозначим $m = infE$, $M = supE$. Докажем, например, что $m \epsilon E$. Иначе говоря, что существует такая точка $c \epsilon [a,b]$, что $m = f(c)$. Из определения инфимума следует, что существует последовательность $x_n \epsilon [a,b]$, для которой $f(x_n) \to m$. Как и в пункте 1) выберем сходящуюся подпоследовательность $x_n \to \alpha$. В силу непрерывности $f(x)$ получаем $m = f(\alpha)$. Значит, $m \epsilon E$.

Теорема 4. Если непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ принимает на концах отрезка значения противоположных знаков, то найдется такая точка $c \epsilon (a,b)$, что $f(c) = 0$.
Доказательство. Пусть, например, $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Обозначим $c = (a+b)/2$.
Если $f(c) = 0$, то теорема доказана. Пусть $f(c) \neq 0$, например, $f(c) > 0$.
Обозначим $a_2 = a_1$, $b_2 = c$, $c_1 = (a_1 + b_1)/2$.
Повторяя этот процесс, получим последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ и чисел $c_n \epsilon [a_n, b_n]$, причем длина следующего отрезка в два раза меньше длины предыдущего. По лемме о вложенных отрезках существует точка $c \epsilon [a_n, b_n]$, $n = 1,2,\dots$. Учитывая, что $b_n - a_n \to 0$ при $n \to +\infty$, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = c.$$

По условию имеем $f(a_n) \le 0$, $f(b_n) \ge 0$. В силу непрерывности функции $f(x)$ получаем $f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \le 0$ и $f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \ge 0$. Значит, $f(c) = 0$.
Замечание. Процесс, описанный в доказательстве этой теоремы, можно применить для решения уравнения вида $f(x) = 0$. Этот метод называется **методом половинного деления**. Этот метод легко реализуется на компьютере.
Упражнение. Примените описанный выше процесс для приближенного решения уравнения $e^{-x} + x = 0$ с точностью до $0{,}001$.

Теорема 5. Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ принимает любое промежуточное значение между любыми двумя своими значениями.
Доказательство. Рассмотрим любые два значения функции:
$y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Пусть, например, $y_1 < y_2$, а $y_0 -$ любое число между y_1, y_2.

Требуется доказать, что y_0 принадлежит множеству значений функции $f(x)$. Определим вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - y_0$. Имеем,

$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 = y_1 - y_0 < 0,$$
$$g(x_2) = f(x_2) - y_0 = y_2 - y_0 > 0.$$

Тогда по **теореме 4** между x_1, x_2 найдется точка c, для которой $g(c) = 0$. Отсюда $f(c) = y_0$.

Изолированные точки разрыва

Если $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0 , то x_0 называется **точкой разрыва**.

Точка x_0 называется **изолированной** точкой разрыва, если $f(x)$ в некоторой окрестности этой точки непрерывна всюду, кроме самой точки x_0.

Рассмотрим виды таких точек разрыва.

1. Устранимый разрыв.

$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = b$, но $f(x_0)$ не определена или не равна b. Положим по определению $f(x_0) = b$. После этого функция становится непрерывной.

Пример. $f(x) = (x^2 - 1)/(x^3 - 1)$. Здесь $f(x)$ не определена при $x = 1$. Дополним определение, положив $f(1) = 2/3$. После этого функция становится непрерывной. Докажите!

2. Конечный разрыв.

Пусть $b_1 = f(x_0 - 0)$, $b_2 = f(x_0 + 0)$, $b_1 \neq b_2$.

В этом случае x_0 называется **точкой конечного разрыва**, а $b_2 - b_1$ называется **скачком** функции в точке x_0.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$$

Здесь $f(1 - 0) = 1$, $f(1 + 0) = 2$. Односторонние пределы существуют, но не равны друг другу.

3. Бесконечный разрыв.

Точка x_0 называется **точкой бесконечного разрыва**, если в ней хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности.

Пример. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x > 1 \\ x, & x \leq 1 \end{cases}$. Здесь $f(1 - 0) = 1$, $f(1 + 0) = +\infty$.

4. Возможен случай, при котором хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 не существует (ни конечный ни бесконечный).

Пример. $f(x) = \sin(1/x)$. (объяснить, почему нет предела)

Дополнительные сведения о функциях

Определение. $f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на (a, b), если бо'льшим значениям аргумента соответствуют бо'льшие (меньшие) значения функции.

В краткой записи это означает: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Если неравенства $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ заменить на нестрогие, то слово **возрастающая** заменится на **неубывающая**, а убывающая – на **невозрастающая**.

Определение. $f(x)$ называется **монотонной** на (a, b), если она возрастающая или убывающая на (a, b).

Примеры.

1. $\sin x$ — возрастающая на $(-\pi/2\,,\pi/2)$, убывающая на $(\pi/2\,,3\,\pi/2)$ и ни та ни другая на $(-\pi/2\,,3\pi/2)$.
2. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \le 1 \\ 1, & 1 < x \le 2 \\ x-1 & 2 < x < 3 \end{cases}$

   эта функция неубывающая, но и не возрастающая.
3. Пусть $h(x) = f(g(x))$, где $f,\ g$ — монотонные функции.

   Возможны 4 варианта :

   а)обе возрастающие, б) обе убывающие, в)f возрастающая, g убывающая,

   г) f убывающая, g возрастающая

   Какой будет функция $h(x)$ в каждом из этих вариантов?

Обратная функция

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке D, а E — множество ее значений.
Зададим $y\epsilon E$ и рассмотрим уравнение .

$$y = f(x) \qquad (1)$$

Пусть для каждого $y\epsilon E$ уравнение (1) однозначно разрешимо относительно x. Тем самым определена некоторая функция, у которой независимой переменной является y, а значением функции - x.
Обозначим эту функцию $g(y)$.

Определение. Описанная выше функция $g(y)$ называется **обратной** к функции $f(x)$.

Очевидно, функция $f(x)$ является обратной к $g(y)$. Поэтому их называют **взаимно обратными**.

Примеры.

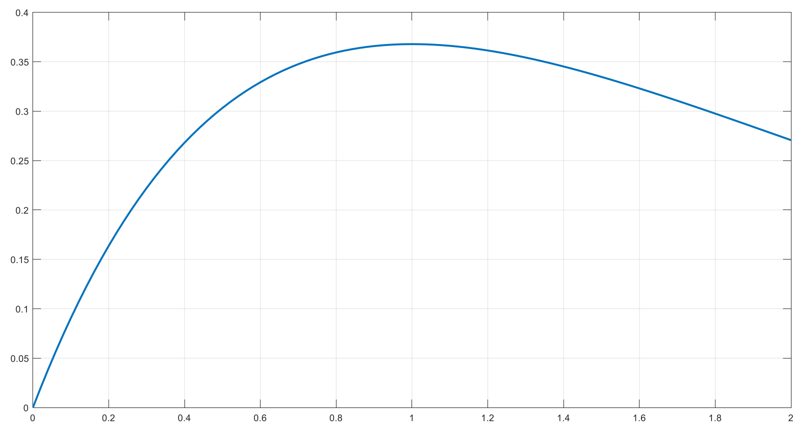
1. $y = 2x + 3 \iff x = (y-3)/2$
2. $y = x^2,\ \ 0 \le x < +\infty \iff x = \sqrt{y}$
3. $y = x^2,\ -\infty < x < +\infty$, эта функция не имеет обратной, так как уравнение имеет два решения $x = \pm\sqrt{y}$ при $y > 0$.
4. $y = \sin x,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2$, обратная функция существует и обозначается $\arcsin y$.
5. $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$, эта функция не имеет обратной, так как уравнение имеет два решения $x = \arcsin y$ и $x = \pi - \arcsin y$ при $0 \le y < 1$.

Теорема 6. Непрерывная функция $f(x)$ имеет обратную функцию тогда и только тогда, когда $f(x)$ монотонна.

Доказательство.

А) Дано: $f(x)$ монотонна на $[a;b]$, например, возрастающая, и E — множество ее. Докажем, что существует обратная функция. Для этого нужно доказать, что уравнение $y = f(x)$ однозначно разрешимо относительно x для $\forall y\epsilon E$. Пусть это не так, т.е. для некоторого y это уравнение имеет два решения $x_1 < x_2$. Тогда
$f(x_1) = f(x_2)$, но это противоречит возрастанию функции.
Б) Дано: $f(x)$ имеет обратную функцию. Докажем, что $f(x)$ монотонна. Пусть это не так, т.е. найдутся такие точки $x_1 < x_0 < x_2$, что $f(x_1) < f(x_0) > f(x_2)$ или $f(x_1) > f(x_0) < f(x_2)$.
Точка x_0 разделяет участки возрастания и убывания функции. Пусть, например, $f(x_1) < f(x_0)$, но $f(x_1) > f(x_2)$. Это означает,

что число $f(x_1)$ расположено между двумя значениями $f(x_2)$ и $f(x_0)$.
По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции найдется такая точка $x_3 \epsilon (x_0;\ x_2)$, что $f(x_3) = f(x_1)$, а это противоречит существованию обратной функции.
Пункт Б) и тем самым теорема доказаны.
<u>Иллюстрация к теореме</u>.
На рисунке изображен график функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[0; 2]$, причем функция возрастает при $x \leq 1$ и убывает при $x \geq 1$. Очевидно, любому значению $y \geq 0.3$ соответствуют два решения уравнения $y = f(x)$, а это противоречит существованию обратной функции.



<u>Вопросы для самоконтроля</u>.
1) Докажите теорему 1.
2) Пусть E – множество значений непрерывной на $[a, b]$ функции, $S = supE$, M – набольшее значение функции на $[a, b]$. Какой из вариантов верен: $S < M$, $S = M$, $S > M$?
3) $f(x) = p(x)/q(x)$, где $p(x)$, $q(x)$ – многочлены. От чего зависит наличие или отсутствие точек
разрыва у функции $f(x)$?
4) $f(x) = p(x)/q(x)$, где $p(x)$, $q(x)$ – многочлены, $q(x_0) = 0$.
Может ли $f(x)$ иметь конечный предел в точке x_0 ?
5) $f(x) = \begin{cases} ax, & -\infty < x \leq 2 \\ x^2, & 2 < x < +\infty \end{cases}$. При каком значении параметра a функция f будет непрерывной на всей оси?
6) $f(x) = \begin{cases} -x - 1, & -\infty < x \leq 0 \\ x + 1, & 0 < x < +\infty \end{cases}$. Является ли $f(x)$ непрерывной функцией? Тот же вопрос для $f^2(x)$?
7) Приведите пример функции, имеющей бесконечно много точек разрыва.
8) Функция $f(x)$ непрерывна на $(-\infty,\ x_0]$ и на $[x_0, +\infty)$. Следует ли отсюда, что она непрерывна на $(-\infty,\ +\infty)$?
9) Пусть $g(x) = f(x) + h(x)$, где $f(x)$ описана в пункте 8), а $h(x) = \begin{cases} c, & x \leq x_0 \\ 0, & x > x_0 \end{cases}$. Кроме того, известны
величины $f(x_0 - 0) = 1{,}3$, $f(x_0 + 0) = -1{,}4$. Найдите значение c , при котором функция $g(x)$ непрерывна на всей оси.
10) Найдите точки разрыва функции $(x^3 + 2x^2 - 1)/(x^3 + x)$ и определите их тип.
11) Бильярдный шар катится по столу вдоль некоторой прямой. Пусть $(x(t); y(t))$ – координаты

шара в момент t , а $v(t)$ — его скорость. В какой-то момент шар столкнулся с другим шаром и изменил направление движения. Будут ли функции $x(t), y(t), v(t)$ непрерывны?