Формула Тейлора

Пусть $f(x)$ имеет непрерывные производные до порядка n включительно. Требуется изучить свойства этой функции в окрестности точки x_0.

Основная идея – подобрать функцию, которая более проста для исследования, чем $f(x)$, но обладает теми же основными свойствами. В качестве такой функции выберем многочлен. Из алгебры известно, что всякий многочлен степени не выше n можно представить в виде

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n \qquad (1)$$

Требуется, чтобы этот многочлен был в каком-то смысле «близок» к $f(x)$. Понятие "близости" может иметь разный смысл.

Например, критерием близости двух векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ является $|\bar{a} - \bar{b}|$. Аналогично, для функций ту же роль играет

$\max_{a \le x \le b}|u(x) - v(x)|$.

Здесь мы рассмотрим другой критерий близости данной функции и многочлена.

<u>Определение</u>.

Многочлен $T_n(x)$ степени не выше n, удовлетворяющий условию

$$T_n^{(i)}(x_0) = f^{(i)}(x_0), \;\; i = 0,1,2, \dots, n \qquad (2)$$

называется **многочленом Тейлора порядка *n* функции $f(x)$ в точке x_0**.

Условие (2) означает, что в точке x_0 совпадают значения функции и многочлена Тейлора, а также их производных до порядка n включительно. Естественно ожидать, что некоторые свойства функции и ее многочлена Тейлора совпадают и поэтому многочлен Тейлора можно использовать вместо самой функции.

Выразим коэффициенты многочлена Тейлора через функцию $f(x)$ и ее производные. Имеем

$T_n^{(0)}(x_0) = a_0;$

$T_n^{(1)}(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1}; \;\; T_n^{(1)}(x_0) = a_1;$

$T_n^{(2)}(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2}; \;\; T_n^{(2)}(x_0) = 2a_2;$

……………………………..

$T_n^{(i)}(x_0) = i(i-1)(i-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot a_i = i!\, a_i$

……………………………..

$T_n^{(n)}(x_0) = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot a_i = n!\, a_n$

Из формулы (2) следует

$$i!\, a_i = f^{(i)}(x_0) \Longrightarrow a_i = f^{(i)}(x_0)/i! \;, \; i = 0,1,2, \dots, n. \qquad (3)$$

Итак, коэффициенты многочлена Тейлора удовлетворяют формулам (3).

Верно и обратное утверждение :

любой многочлен степени не выше n, коэффициенты которого удовлетворяют условию (3), является многочленом Тейлора порядка n для функции $f(x)$.

<u>Пример</u>. Пусть некоторая функция $f(x)$ имеет в окрестности точки $x_0 = 1$ вторую производную, причем

$f(1) = 4$, $f'(1) = 2$ и $f''(1) = 6$. Тогда многочлен Тейлора 2-го порядка в точке 1 равен

$$T_2(x) = 4 + 2(x - 1) + 3(x - 1)^2$$

Такие свойства функции $f(x)$, как возрастание, убывание, экстремум, выпуклость, зависят только от значений первой и второй производных. Многочлен $T_2(x)$ имеет те же значения производных, значит, и те же свойства. Графиком $T_2(x)$ является парабола.

Графики $f(x)$ и $T_2(x)$ имеют одинаковую кривизну в точке $x_0 = 1$.

Перейдем теперь к самой формуле Тейлора. Предположим дополнительно, что $f^{(n+1)}(x)$ непрерывна в окрестности x_0.
Обозначим $g(x) = f(x) - T_n(x)$. Очевидно, $g(x) \to 0$ при $x \to x_0$, т.е. $g(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$. Сравним ее с бесконечно малой $(x - x_0)^{n+1}$.
В силу (1) имеем

$$g^{(i)}(x_0) = 0, \; i = 0,1, \dots, n. \qquad (4)$$

Поэтому верно равенство $g^{(i)}(x) = g^{(i)}(x) - g^{(i)}(x_0)$.
Кроме того, при любом x и $i > n$

$$g^{(i)}(x) = f^{(i)}(x) \qquad (5)$$ (почему?)

Рассмотрим теперь отношение двух бесконечно малых при $x \to x_0$.

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)^{n+1}}$$

По теореме Коши найдется такая точка $x_0 < c_1 < x$, что

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g'(c_1)}{(n+1)(c_1 - x_0)^n}$$

Учитывая (4), имеем

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g'(c_1) - g'(x_0)}{(n+1)(c_1 - x_0)^n}$$

Применив снова теорему Коши, получим

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g''(c_2)}{(n+1)n(c_2 - x_0)^{n-1}}$$

Повторяя эти действия n раз, приходим к формуле

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g^{(n)}(c_n)}{(n+1)n \cdots 2(c_n - x_0)^1}, \qquad x_0 < c_n < c_{n-1}$$

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g''(c_2)}{(n+1)n(c_2 - x_0)^{n-1}}$$

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g^{(n)}(c_n) - g^{(n)}(x_0)}{(n+1)!\,(c_n - x_0)}, \qquad c_{n-1} < c_n < x_0$$

Применим теорему Коши в $(n+1)$ – й раз

$$\frac{g(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{g^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}, \qquad x_0 < c_{n+1} < c_n$$

Учитывая, что $T_n^{(n+1)}(x) \equiv 0$, (см. (5)) получаем

$$\frac{g^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{(f - T_n)^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!} \Longrightarrow \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

Отсюда

$$f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Обозначим $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ и получим формулу Тейлора порядка n

$$f(x) = T_n(x) + r_n(x), \tag{6}$$

где $T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ — многочлен Тейлора, а $r_n(x)$ — остаточный член.

Заметим, что $f^{(i)}(x_0)(x-x_0)^i = d^i f(x_0)$. Тогда формула (4) примет вид

$$f(x) = f(x_0) + df(x_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0) + \frac{1}{3!}d^3 f(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0) + r_n(x) \tag{7}$$

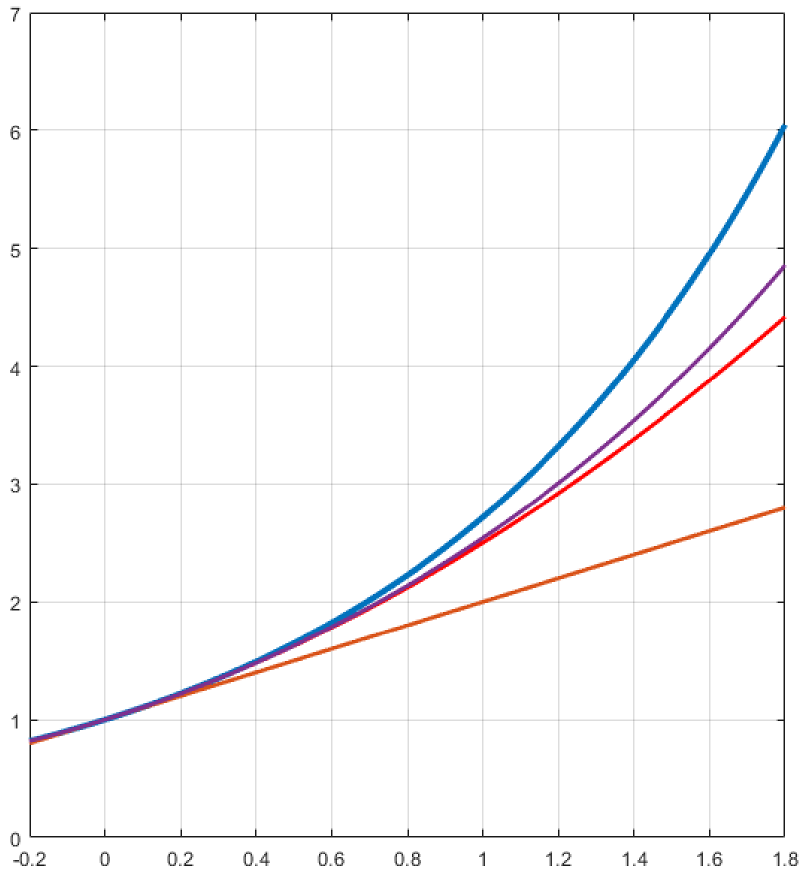
В (6) и (7) все слагаемые, кроме $f(x_0)$, являются бесконечно малыми при $x \to x_0$. При этом каждое следующее слагаемое имеет более высокий порядок по сравнению с предыдущим (конечно, если $f^{(i)}(x_0) \neq 0$). Поэтому в малой окрестности точки x_0 многочлен Тейлора можно использовать как приближение к функции $f(x)$. Ошибка такого приближения равна $r_n(x)$.

Пример.

Пусть $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. Выпишем первые три многочлена Тейлора.

$T_1(x) = 1 + x$; $T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$; $T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$. Их на рис. 1 изображены их графики :

синий -$f(x)$, фиолетовый - $T_3(x)$, красный - $T_2(x)$, коричневый - $T_1(x)$.



Из рис.1 видно, что вблизи нуля графики почти сливаются, а по мере удаления от нуля – расходятся. Например,

$e^{0,5} = 1,6487$, $T_3(0,5) = 1,6458$. Ошибка равна 0,0029.

$e^1 = 2,7183$, $T_3(1) = 2,6667$. Ошибка равна 0,0516.

Кроме того, график $T_3(x)$ заметно ближе к графику e^x, чем графики многочленов $T_1(x), T_2(x)$.

Применение формулы Тейлора

1) Разложение основных элементарных функций

Применим формулу (5) функциям e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\mu$ при $x_0 = 0$.

$$e^x = 1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \cdots + x^n/n! + r_n(x), \quad r_n(x) = e^c x^{n+1}/(n+1)!$$

$$\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \cdots + (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)! + r_n(x)$$

$$\cos x = 1 - x^2/2! + x^4/4! - \cdots + (-1)^n x^{2n}/2n! + r_n(x)$$

$$\ln(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \cdots + (-1)^n x^n/n + r_n(x)$$

$$(1+x)^\mu$$

$$= 1 + \mu x + \mu(\mu-1)\, x^2/2! + \mu(\mu-1)\, x^2/2! + \cdots$$

$$+ \mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)\, x^n/n! + r_n(x)$$

2) Неявные функции

Во многих задачах используются функции, которые невозможно выразить через элементарные функции. Поэтому бывает трудно исследовать такую функцию. Если нас интересуют значения функции не во всей ее области определения, а только в некоторой окрестности точки x_0 , то формула Тейлора позволяет приближенно решить эту задачу.

Рассмотрим уравнение

$$f(x, y) = 0. \qquad (8)$$

Зададим x, тогда (8) превращается в уравнение с одним неизвестным y. Предположим, что для всех x из некоторой окрестности точки x_0 это уравнение имеет единственное решение. Тем самым в этой окрестности определена функция $y(x)$.

Такой способ задания функции называется **неявным**.

Рассмотрим пример.

Пример. $e^{xy} + x + y - 2 = 0$. Ищем функцию $y(x)$ в окрестности точки 0. Подставим в уравнение $x = 0$.

$$e^{0\cdot y(0)} + 0 + y(0) - 2 = 0 \Longrightarrow y(0) = 1$$

Продифференцируем исходное уравнение и подставим $x = 0$, $y = 1$

$$e^{xy}(y + xy') + 1 + y' = 0 \Longrightarrow 1 + 1 + y'(0) = 0 \Longrightarrow y'(0) = -2$$

Продифференцируем еще раз и подставим $x = 0$, $y = 1, y' = -2$

$$e^{xy}(y + xy')^2 + e^{xy}(y' + y' + xy'') + y'' = 0 \Longrightarrow 1 - 2 - 2 + y''(0) = 0 \Longrightarrow y''(0) = 3$$

Повторяя эти действия, можно найти производные любого порядка при $x = 0$. Имеем в малой окрестности 0

$$y(x) \cong 1 - 2x + 1,5x^2$$

Здесь остался открытым вопрос о точности этого приближения.

Вопросы для самоконтроля

1) Функция $f(x)$ имеет производные до 4-го порядка. Пусть $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$. Может x_0 быть точкой экстремума для $f(x)$?

2) Тот же вопрос при $f'(x_0) = f''(x_0) = 0,\ f'''(x_0) \neq 0$.
3) Вычислите $\ln(1{,}5)$ с помощью формулы Тейлора с точностью до 0,01.
4) Вычислите $\cos 27^{o}$ с помощью формулы Тейлора с точностью до 0,001.
5) Вычислите $\ln(1 + tg10^{o})$ с помощью формулы Тейлора с точностью до 0,01.