Теорема Ферма'. Если дифференцируемая на $(a;b)$ функция $f(x)$ принимает в точке $x_0 \epsilon (a;b)$ наибольшее или наименьшее значение, то $f'(x_0) = 0$.
Доказательство. Пусть $f(x_0)$ — наибольшее значение. Тогда при всех $x \epsilon (a;b)$ выполняется

$$f(x) \le f(x_0) \qquad (1)$$

Пусть $x < x_0$. Имеем $\Delta x = x - x_0 < 0$ и из (1) $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \le 0$. Тогда

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \ge 0 \qquad (2)$$

Переходим в (2) к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$f'(x_0) \ge 0 \qquad (3)$$

Пусть теперь $x > x_0$. Тогда $\Delta x > 0$ и вместо (3) получим

$$f'(x_0) \le 0 \qquad (4)$$

(3) и (4) могут быть одновременно верными только при $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ролля. Если $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$, непрерывна на $[a;b]$ и

$$f(a) = f(b) \qquad (*)$$

то существует точка $x_0 \epsilon (a;b)$, в которой производная равна 0.
Доказательство. Пусть m и M наименьшее и наибольшее значение функции $f(x)$ на $[a;b]$. Если и m и M достигаются на концах отрезка, то было бы $m = M$, (см. $(*)$) , а это означает, что $f(x) \equiv const$. Тогда при всех $x \epsilon (a;b)$ выполняется

$$f'(x) \equiv 0.$$

Если же одно из значений m или M достигается в точке $x_0 \epsilon (a;b)$, то по теореме Ферма имеем $f'(x_0) = 0$.
Теорема Лагранжа. Если $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ и непрерывна на $[a;b]$, то существует точка $x_0 \epsilon (a;b)$, для которой выполняется

$$f'(x_0) = (f(b) - f(a))/(b - a). \qquad (5)$$

Доказательство. Определим вспомогательную функцию

$$g(x) = f(x) - [f(a) + k(x - a)].$$

Очевидно, $g(a) = 0$ при любом значении k. Подберем коэффициент k так, чтобы $g(b) = 0$. Имеем

$$g(b) = f(b) - [f(a) + k(b - a)] = 0.$$

Отсюда $k = (f(b) - f(a))/(b - a)$. При этом значении k функция $g(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Значит, существует точка $x_0 \epsilon [a;b]$, для которой выполняется $g'(x_0) = 0$. Отсюда следует (5) (объясните).
Следующую теорему приведем без доказательства.
Теорема Коши. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на $(a;b)$, непрерывны на $[a;b]$, и $g'(x) \neq 0$, то существует точка $x_0 \epsilon (a;b)$, для которой выполняется

$$f'(x_0)/g'(x_0) = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)).$$

Правило Лопиталя

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности точки c, кроме, может быть самой точки c, и $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Следующее правило полезно при раскрытии неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.
Теорема. Если $f(x)$ и $g(x) \to 0$ или $f(x)$ и $g(x) \to \infty$ и существует $a = \lim_{x \to c} f'(x)/g'(x)$, то $\lim_{x \to c} f(x)/g(x)$ тоже равен a.

Доказательство. Рассмотрим только один частный случай: $f(x)$ и $g(x) \to 0$ при $x \to c$ и, кроме того, $f(c) = g(c) = 0$. По теореме Коши в окрестности точки c найдется точка x_0 в которой выполняется равенство

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}, \quad x < x_0 < c \qquad (6)$$

Пусть $x \to c$. Тогда $x_0 \to c$ и из (6) следует

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x_0 \to c} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Замечания.

1) Правило остается верным и при $c = \infty$.

Пример. Докажем $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^m}{a^x} = 0$, $a > 1$. Применим правило Лопиталя.

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^m}{a^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{m x^{m-1}}{a^x \ln a}$. Если $m < 1$, то предел равен 0 (почему?). Если $m > 1$, то применяя правило Лопиталя несколько раз, получим в числителе x в отрицательной степени .

2) Иногда предел проще вычислить без правила Лопиталя.

Пример. $\lim_{x \to 0} \left(\sqrt[5]{1 - \sin^3 2x} - 1\right) / \ln(1 + 2x^3)$. Используя замечательные пределы, получим $\sqrt[5]{1 - \sin^3 2x} - 1 \sim \frac{1}{5}(-\sin^3 2x) \sim -\frac{8}{5}x^3$; $\ln(1 + 2x^3) \sim 2x^3$. Тогда

$\lim_{x \to 0} \left(\sqrt[5]{1 - \sin^3 2x} - 1\right) / \ln(1 + 2x^3) = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{8}{5}x^3\right) / 2x^3 = -0{,}8$

Вопросы для самоконтроля

1) Каков геометрический смысл коэффициента k в теореме Лагранжа?
2) Каков геометрический смысл теоремы Лагранжа?
3) Можно ли рассматривать теорему Ролля как частный случай теоремы Лагранжа?
4) Правило Лопиталя можно применять и для раскрытия неопределенности типа $0 \cdot \infty$. Приведите пример.
5) Сравните две бесконечно большие $u(x) = x^{100}$, $v(x) = 1{,}01^x$, $x \to +\infty$. Найдите такое число a, что $u(a) < 0{,}01 v(a)$.