Предел последовательности

В дальнейшем будем пользоваться символами $\exists$ и $\forall$.
$\exists$ означает **“существует ”**, $\forall$ означает **“для каждого”**.

Последовательность – это функция натурального аргумента.

Обозначение последовательности: $x_n, \; n = 1,2, \dots$.
Здесь $n -$ аргумент (независимая переменная). Вообще для функций принято обозначение, при котором аргумент ставится в круглые скобки, но для последовательностей по традиции ставят аргумент в виде индекса, т.е. вместо $x(n)$ обычно пишут x_n.

Определение. Число a называется **пределом** последовательности x_n ,
если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$, что $\forall n > N$ выполняется условие

$$|\, x_n - a| < \varepsilon \qquad (1)$$

Определение. **эпсилон-окрестностью** числа a называется интервал $(a - \varepsilon, \;\; a + \varepsilon)$, т.е. множество всех x, удовлетворяющих неравенству $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.
Для краткости будем говорить просто окрестность. Используя понятие окрестности, можно дать равносильное определение предела.

Определение. Число a называется **пределом** последовательности x_n ,
если для каждой ε-окрестности числа a найдется число N, что для всех $n > N$ члены последовательности x_n принадлежат этой окрестности.

Обозначения: $a = \lim_{n \to +\infty} x_n$ или $x_n \to a$ при $n \to +\infty$.

Пример. $x_n = \frac{n+1}{n}$.
Имеем $x_1 = 2$, $x_3 = \frac{4}{3} = 1{,}33 \dots$, $x_5 = 1{,}2$, $x_{10} = 1{,}1 \dots$.
Видим, что x_n приближается к 1 по мере увеличения номера. Можно предположить, что $x_n \to 1$ при $n \to +\infty$. Проверим это предположение, применив определение.
Задаем любое число $\varepsilon > 0$. Если наше предположение верно, то начиная с некоторого номера должно выполняться условие $|x_n - 1| < \varepsilon$, т.е.

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon \qquad (2)$$

Отсюда получаем $\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$.
Например, при $\varepsilon = 0{,}1$ получаем $n > 10$, т.е. начиная с $n = 11$, будет выполняться (2).
При $\varepsilon = 0{,}01$ получаем $n > 100$, т.е. начиная с $n = 101$, будет выполняться (2) и т.д. .
Итак, согласно определению предела получаем, что $x_n \to 1$ при $n \to +\infty$.

Определение. Последовательность x_n называется **ограниченной**, если существует такое число M, что справедливо неравенство $|x_n| \le M, \; n = 1,2,3, \dots$.
Если неравенство $|x_n| \le M$ заменить на $x_n \le M$ или на $x_n \ge M$, то последовательность называется **ограниченной сверху** или **ограниченной снизу.**
Определение. Последовательность x_n называется **возрастающей** (**убывающей**),
если $m > n \; \Rightarrow x_m > x_n$ ($m > n \; \Rightarrow x_m < x_n$).

<u>Определение</u>. Последовательность x_n называется **невозрастающей** (**неубывающей**), если $m > n \Rightarrow x_m \le x_n$ ($m > n \Rightarrow x_m \ge x_n$).

<u>Определение</u>. Последовательность называется **монотонной**, если она либо возрастающая либо убывающая.

<u>Примеры</u>.
1. $x_n = \sin(\pi n/6)/n$. Очевидно, $|x_n| < 1$, значит, последовательность ограниченная. Далее

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0,5	$\sqrt{3}/4$	1/3	$\sqrt{3}/8$	0,1

Может показаться, что последовательность убывающая, но это не так. Проверить самостоятельно.

2. $x_n = [n/3]$, т.е. целая часть от деления n на 3.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	0	1	1	1

Последовательность неограниченная и неубывающая. Проверить самостоятельно.

Основные теоремы о пределах

1. Последовательность не может иметь более одного предела.
   <u>Доказательство</u>. Предположим, что это не так, т.е. существуют два предела $a = \lim_{n\to+\infty} x_n$, $b = \lim_{n\to+\infty} x_n$, причем $a \ne b$. Рассмотрим непересекающиеся окрестности точек a и b. По определению предела, начиная с некоторого номера, точка x_n должна принадлежать обеим окрестностям, а это невозможно, так как они не пересекаются.
2. Последовательность, имеющая предел, ограничена.
   <u>Доказательство</u> . Пусть $x_n \to a$. Зададим число $\varepsilon > 0$. По определению предела имеем
   $$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \text{ при } n > N .$$
   Обозначим $M_1 = \max(|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|)$. Очевидно, что $|x_n| < M_1$ при $n > N$
   Пусть $M = \max(x_1, x_2, \dots, x_N, M_1)$. Тогда $|x_n| < M$ при всех n, что и требовалось доказать.

   Остальные теоремы без доказательства.
3. $\lim_{n\to+\infty}(cx_n) = c\lim_{n\to+\infty} x_n$
4. $\lim_{n\to+\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n + \lim_{n\to+\infty} y_n$
5. $\lim_{n\to+\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n \cdot \lim_{n\to+\infty} y_n$
6. $\lim_{n\to+\infty}(x_n/y_n) = \lim_{n\to+\infty} x_n / \lim_{n\to+\infty} y_n$, если $\lim_{n\to+\infty} y_n \ne 0$.
7. Если $x_n \le y_n, n = 1,2,3,\dots$, то $\lim_{n\to+\infty} x_n \le \lim_{n\to+\infty} y_n$.

Признаки существования предела

Теорема 1. (Больцано-Вейерштрасса)
Из любой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.
<u>Доказательство</u>. По условию $-M \le x_n \le M$. Обозначим $a_1 = -M$; $b_1 = M$; $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ и рассмотрим отрезки $[a_1; c]$, $[c; b_1]$. Хотя бы один из них содержит бесконечное число x_n , например, $[a_1; c]$. Обозначим $a_2 = a_1; b_2 = c_1; c_2 = (a_2 + b_2)/2$ и т.д. . Получаем

последовательность вложенных отрезков $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$, причем

каждый следующий в два раза короче предыдущего. По лемме о вложенных отрезках $\exists c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$.

В каждом отрезке выберем точку. Получим последовательность x_n и докажем, что $\lim_{n\to+\infty} x_n = c$. Зададим ε и найдем такое N, что при всех $n > N$ будет

$$|x_n - c| < \varepsilon \qquad (3)$$

Действительно, начиная с некоторого $N+1$, длина отрезка $[a_n,\ b_n]$ будет меньше ε. Но x_n и c принадлежат $[a_n,\ b_n]$ и, значит, удовлетворяют условию (3).

Теорема 2. Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.
Доказательство.

Пусть, например, $A = \{a_n, n = 1, 2, 3, \ldots\}$ – возрастающая ограниченная последовательность и $\alpha = \sup A$. Сравнивая определения предела и супремума, получаем

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha.$$

Теорема 3. О сжатой переменной.
Пусть последовательности x_n, y_n, z_n удовлетворяют условию

$$x_n \le y_n \le z_n \qquad (4)$$

Если $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = a$, то $\lim_{n\to+\infty} y_n$ существует и тоже равен a.
Доказательство. Задаем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим окрестность числа a. По определению предела найдется номер, начиная с которого члены последовательностей $x_n,\ z_n$ принадлежат этой окрестности. Тогда в силу условия (1) y_n тоже принадлежит этой ε-окрестности, что требовалось доказать.

Определение. Последовательность x_n называется **сходящейся в себе** (**фундаментальной**), если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N$, что для любых n_1, n_2 бо'льших, чем N, выполняется неравенство

$$\left|x_{n_1} - x_{n_2}\right| < \varepsilon$$

Теорема 4. Признак Коши.
Сходящаяся в себе последовательность имеет предел. (Без доказательства).

Бесконечно малые последовательности

Определение. Последовательность называется **бесконечно малой**, если ее предел равен нулю.

Лемма. Для того, чтобы число a было пределом последовательности x_n, необходимо и достаточно, чтобы x_n можно было представить в виде $x_n = a + \alpha_n$, где α_n –бесконечно малая.
Доказательство.
1) Необходимость.
Дано: $a = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Обозначим $\alpha_n = x_n - a$.
По условию $|x_n - a| < \varepsilon$ при $n > N$, т.е. $|\alpha_n| < \varepsilon$. Значит, $\alpha_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

2) Достаточность.
Те же рассуждения, что и в 1), только в обратном порядке.

В дальнейшем ради краткости будем писать вместо бесконечно малая просто б.м. .

Свойства бесконечно малых

1. x_n является б.м. тогда и только тогда, когда $|x_n|$ является б.м.
2. Произведение б.м. на ограниченную последовательность тоже б.м. .
3. Произведение двух б.м. тоже б.м.
4. Сумма двух б.м. тоже б.м.

   Эти свойства следуют из теорем о пределах. Например, докажем 2.
   Пусть x_n б.м., а y_n ограниченная. Тогда $0 \leq |x_n y_n| \leq |x_n|M$.
   Далее имеем $|x_n|M \to 0 \cdot M = 0$. По теореме о сжатой переменной получаем $|x_n y_n| \to 0$.

Замечание. Отношение двух б.м. не обязательно является б.м. . Например, пусть $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n^2}$. Тогда $x_n / y_n = n \to \infty$.

Сравнение бесконечно малых

Пусть x_n и y_n – б.м. и $\lim_{n\to+\infty}(x_n/y_n) = q$
Определение. x_n и y_n называются бесконечно малыми **одного порядка** , если $q \neq 0$.

Если к тому же $q = 1$, то x_n и y_n называются **эквивалентными** б.м. .
Обозначение $x_n \sim y_n$.

Определение. Если $q = 0$, то x_n называется б.м. **более высокого порядка**, чем y_n.
Обозначение $x_n = o(y_n)$.
Попросту это означает , что x_n стремится к 0 "быстрее", чем y_n. Пусть, например, $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = \frac{1}{n}$. Очевидно, $x_n / y_n = 1/n \to 0$, т.е. $x_n = o(y_n)$. Например, начиная с номера $n = 11$ будет $x_n < 0{,}01$, а $y_n < 0{,}01$ только начиная с номера $n = 101$.

Свойства эквивалентных бесконечно малых

Соотношение **эквивалентность** отчасти похоже на **равенство**, но имеются существенные отличия.

1. Если $x_n \sim y_n$ и $c \neq 0$, то $cx_n \sim cy_n$.
2. Если $x_n \sim y_n$ и $y_n \sim z_n$, то $x_n \sim z_n$.
3. Если $x_n \sim y_n$ и $u_n \sim v_n$, то $x_n u_n \sim y_n v_n$
4. Если $y_n = x_n + u_n$, где $u_n = o(x_n)$, то $y_n \sim x_n$
5. Если $x_n \sim y_n$ и $u_n \sim v_n$, то $x_n + u_n$ не обязательно $\sim y_n + v_n$.

Доказательства.
1. и 2. Самостоятельно.
3. Имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n u_n}{y_n v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

4. Самостоятельно.

5. Пусть $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3},\ u_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}, v_n = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}$

Имеем $x_n + u_n = \frac{1}{n^2},\ \ y_n + v_n = \frac{2}{n^3}$. Очевидно, $x_n + u_n$ не$\sim y_n + v_n$

Примеры.

1. $\lim_{n\to+\infty} (4n^2+1)/(3n^2+2) = \frac{4}{3}$
2. $\lim_{n\to+\infty} \left(10n^{2/3} + \sqrt{n} + 1\right)/\left(3n^{3/4} + 2\right) = 0$

Бесконечно большие последовательности

Определение. Последовательность x_n называется **бесконечно большой** (б.б.), если $\forall M > 0\ \exists N$, что при всех $n > N$ выполняется $|x_n| > M$.

Обозначение: $\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty$ или $x_n \to \infty$.

Если, начиная с некоторого номера, все члены последовательности имеют один и тот же знак, то соответственно $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ или $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.

Свойства бесконечно больших

1. Если x_n – б.б., то $1/x_n$ – б.м.
2. Если x_n – б.б., то cx_n –тоже б.б. (при $c \neq 0$).

   Отметим, что произведение б.б. на ограниченную последовательность не всегда является б.б.

   Например, $x_n = n\sin(\pi n/2)$ (объясните, почему).
3. Если x_n и y_n – б.б., то $x_n \cdot y_n$ тоже б.б.
4. Если x_n и y_n – б.б., то $z_n = x_n + y_n$ не всегда б.б.. Возможны также случаи:

   а) z_n – б.м.; б) z_n имеет конечный предел, не равный 0; в) z_n не имеет предела.

   Вот пример к случаю а), $x_n = n,\quad y_n = -n + \frac{1}{n} \Longrightarrow z_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

   К б) и в) приведите примеры самостоятельно.

Упражнение. Найти пределы при $n \to +\infty$ последовательностей

$$x_n = \sqrt{n^2 + n^{3/4}} - n,\ \ y_n = \sqrt{n^2+n} - n,\quad z_n = \sqrt{n^2+1} - n$$

Сравнение бесконечно больших

Похоже на сравнение бесконечно малых, но есть и отличия.

Пусть x_n и y_n – б.б. и $\lim_{n\to+\infty}(x_n/y_n) = q$

Определение. x_n и y_n называются бесконечно большими **одного порядка**, если $q \neq 0$.

Если к тому же $q = 1$, то x_n и y_n называются эквивалентными б.б..

Обозначение $x_n \sim y_n$.

Определение. Если $q = 0$, то y_n называется бесконечно большой **более высокого порядка**, чем x_n. (*сравните с соответствующим свойством бесконечно малых*)

Обозначение $x_n = o(y_n)$.
Попросту это означает , что y_n стремится к ∞ "быстрее", чем x_n. Пусть, например, $x_n = n$ и $y_n = n^2$. Очевидно, y_n − б.б. более высокого порядка, чем x_n.

Для бесконечно больших справедливо утверждение, аналогичное такому же для бесконечно малых.

Лемма. Если x_n и y_n − б.б. , причем x_n более высокого порядка, чем y_n , то

$$x_n \sim x_n + y_n$$

Доказать самостоятельно.
Эту лемму удобно использовать при вычислении пределов, используя правило
Правило. ***Предел отношения или произведения бесконечно малых или бесконечно больших не изменится при замене их эквивалентными величинами***.

Символы o и O

Символ "o" уже использовался для бесконечно малых и бесконечно больших (см. выше). Символ "O" имеет более широкий смысл, его можно применять к любым переменным величинам, хотя чаще всего она применяется к б.м. или б.б. .
Пусть u и v любые переменные величины.
Формула

$$v = O(u) \qquad (4)$$

это просто краткая запись того факта, что существует такая постоянная $c > 0$, при которой справедливо неравенство $|v| \le c|u|$.
Например, пусть $v_n = n\, sin(\pi n/2)$, $u_n = n\big(2 + sin(\pi n/2)\big)$. Очевидно, $|v_n| \le |u_n|$, т.е. $v_n = O(u_n)$. Заметим, что v_n не является б.б. , но формула (4) применима.
Если u и v бесконечно малые, то (4) означает, что v стремится к 0 по крайней мере не медленнее, чем u, а, может, и быстрее.
Если u и v бесконечно большие, то (4) означает, что v стремится к ∞ не быстрее, чем u, а, может, и медленнее.
Примеры.

1. Сравним две б.м. : $u_n = 1/n$, $v_n = \sin n/n$. Очевидно, $|v_n| \le |u_n|$, поэтому $v_n = O(u_n)$. Заметим, что при этом u_n и v_n не являются б.м. одного порядка.(Почему?)

2. Вычислим $\lim_{n\to+\infty} (3^n - 2^n)/(3^n + 4^n)$.
Имеем $3^n - 2^n \sim 3^n$, $3^n + 4^n \sim 4^n$. Отсюда $\lim_{n\to+\infty} 3^n/4^n = \lim_{n\to+\infty} 0,75^n = 0$.

3. Последовательность x_n задана уравнением.

$$x_{n+1} = 0{,}5x_n + 1, \; n = 1{,}2{,}3 \ldots \; , \; x_1 = 0 \;\; (5) .$$

Найдем $\lim_{n\to+\infty} x_n$. Имеем

$$x_n = 0{,}5x_{n-1} + 1 .$$

Вычтем это уравнение из (5)

$$x_{n+1} - x_n = 0{,}5(x_n - x_{n-1}), \;\; n = 2{,}3{,}4 \; \ldots$$

. Эти разности образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем 0,5. Очевидно, $x_{n+1} - x_n \to 0$ при $n \to +\infty$.
Далее вычтем x_n из обеих частей уравнения (5)

$$x_{n+1} - x_n = -0{,}5x_n + 1. \text{ Отсюда } x_n = 2 - 2(x_{n+1} - x_n) \to 2.$$

<u>Вопросы для самоконтроля</u>

1) Пусть $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. Обязательно ли, что $|x_{1000}| < |x_{10}|$?
2) Тот же вопрос, если дополнительно известно, что x_n монотонная последовательность.
3) Пусть $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0,\ \ y_n = x_n \sin n$. Является ли y_n бесконечно малой?
4) Пусть $\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty,\ \ y_n = x_n \sin n$. Является ли y_n бесконечно большой?(более сложно)
5) Пусть $\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty,\ \ |y_n| > 0{,}1$. Является ли $y_n x_n$ бесконечно большой?
6) Пусть $\lim_{n\to+\infty} x_n = \infty$. Может ли быть, что $\lim_{n\to+\infty} x_n/n = 0$? А $\lim_{n\to+\infty} x_n/n = \infty$?
7) $x_n = n/(n+1)$, $n = 1,2, \dots$. Найти $sup x_n, inf x_n$, а также наибольшее и наименьшее x_n.
8) Верно ли, что : $n \sim n + \sqrt{n},\ \ n \sim \sqrt{n^2 + \sqrt{n}}$?
9) Пусть $x_n = (-1)^n y_n$ и $\lim_{n\to+\infty} y_n = a$. При каком условии существует $\lim_{n\to+\infty} x_n$?
10) Маятник отклонили от положения равновесия на некоторый угол и отпустили. Каждую секунду отмечали его угловое отклонение от положения равновесия. Получили последовательность углов $\varphi_n, n = 1,2,3, \dots$. Что можно сказать о поведении последовательности φ_n при $n \to +\infty$ при наличии трения и без него?