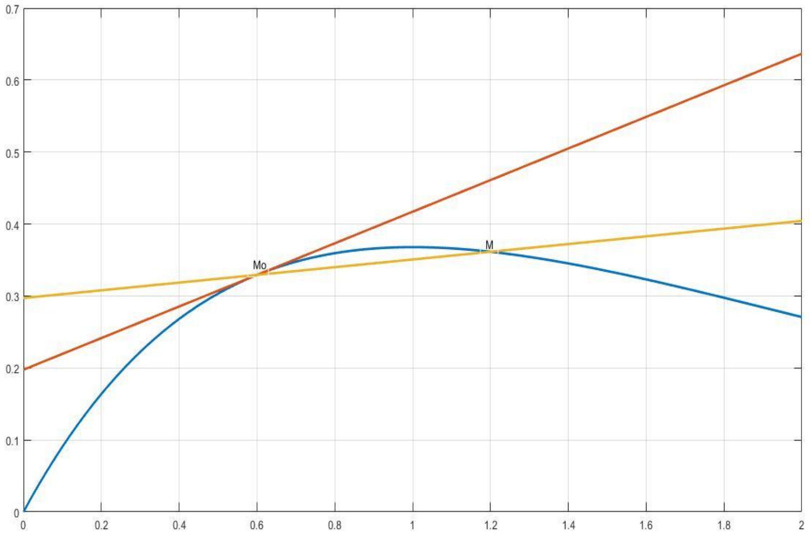
Задачи, приводящие к понятию производной

1) Касательная к графику



Рассмотрим точки $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ на графике функции : $y_0 = f(x_0)$, $y = f(x)$.
Прямая, проходящая через $M_0(x_0, y_0)$, $M(x, y)$ называется секущей.
Угловой коэффициент в уравнении секущей, т.е. тангенс угла φ между секущей и положительным направлением оси OX равен

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\Delta f(\,x_0)}{\Delta x} \qquad (1)$$

Пусть точка M_0 фиксирована, а M перемещается по графику так, что $|M_0\,M| \to 0$, т.е. $\Delta x \to 0$. При этом секущая, поворачиваясь вокруг точки M_0 , стремится к некоторому предельному положению.
Определение. Предельное положение секущей $M_0\,M$ при $|M_0\,M| \to 0$ называется **касательной** к графику функции в точке M_0.

Из определения касательной следует, что $\varphi \to \varphi_0 \implies \mathrm{tg}\varphi \to \mathrm{tg}\varphi_0$ (почему?), где φ_0 – угол наклона касательной (предполагается, $\varphi_0 \neq \pi/2$). Учитывая (1), получаем

$$\frac{\Delta f(\,x_0)}{\Delta x} \to \mathrm{tg}\varphi_0 \qquad (2)$$

Итак, угловой коэффициент касательной равен

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(\,x_0)}{\Delta x}$$

2) Мгновенная скорость

Пусть $l(t)$ – расстояние, пройденное за время от 0 до t. Тогда
$\Delta l(t) = l(t + \Delta t) - l(t)$ это расстояние, пройденное от момента t до $t + \Delta t$. Средняя

скорость на отрезке времени $[t, t+\Delta t]$ равна $V_{\text{ср}} = \Delta l(t)/\Delta t$. При $\Delta t \to 0$ получаем $V_{\text{ср}} \to V(t)$, т.е. $V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \Delta l(t)/\Delta t$..

Определение производной

Пусть $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 (включая и саму точку x_0). Обозначим, как и раньше, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$.

Определение. **Производной функции $f(x)$ в точке x_0** называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлению к нулю приращения независимой переменной.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \qquad (3)$$

Вычисление производной называется **дифференцированием** , а функция, имеющая производную в некоторой точке, называется **дифференцируемой** в этой точке.
Для обозначения производной, кроме $f'(x)$, используется также $\frac{df}{dx}$.

Из рассмотренных выше задач следует:
1) *производная функции в некоторой точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке;*
2) *скорость – производная пути по времени*.

Связь между непрерывностью и дифференцируемостью

Теорема. А) Из дифференцируемости следует непрерывность.
Б) Из непрерывности не следует дифференцируемость.

Доказательство.
А) Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Докажем непрерывность. Из определения производной следует, что при $\Delta x \to 0$ выполняется

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \to 0$$

т.е.

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

где $\alpha -$ бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Тогда

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x. \qquad (4)$$

Итак, бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции. Непрерывность доказана.
Б) Приведем пример непрерывной, но не дифференцируемой функции.
Пусть $f(x) = |x|$. Докажем, что $f'(0)$ не существует. Здесь $x_0 = 0$, $\Delta x = x - x_0 = x$. $\Delta f(0) = f(x) - f(0) = |x|$. Тогда

$$\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Очевидно, $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$ не имеет предела при $\Delta x \to 0$. (Объясните, почему). Значит, $f'(0)$ не существует.

Основные правила вычисления производной

Все рассматриваемые далее функции будем считать дифференцируемыми.

1. Производная постоянной равна нулю
2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной .
3. Производная суммы равна сумме производных.
   $(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$
4. $(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
5. $(u(x)/v(x))' = [u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)]/v^2$

Докажем формулы 4 и 5.

4. Имеем $u(x) = u(x_0) + \Delta u(x_0)$, $v(x) = v(x_0) + \Delta v(x_0)$. Тогда
$\Delta[u(x_0) \cdot v(x_0)] = u(x) \cdot v(x) - u(x_0) \cdot v(x_0) =$

$= [u(x_0) + \Delta u(x_0)] \cdot [v(x_0) + \Delta v(x_0)] - u(x_0) \cdot v(x_0) =$
$= \Delta u(x_0) \cdot v(x_0) + u(x_0) \cdot \Delta v(x_0) + \Delta u(x_0) \cdot \Delta v(x_0)$. Отсюда

$$\frac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \Delta v \qquad (5)$$

Переходим в (5) к пределу при $\Delta x \to 0$ и получим (докажите)

$$(u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

5. Обозначим $w = u/v$. Тогда

$$wv = u.$$

Доказательство проведем в предположении, что w' существует. Продифференцируем обе части равенства.

$w' \cdot v + w \cdot v' = u' \Longrightarrow w' \cdot v = u' - w \cdot v'$; $w' = \frac{u'}{v} - \frac{u}{v^2} \cdot v'$. Отсюда

$$w' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$$

Производные основных элементарных функций

1. $(\sin x)' = \cos x$

$$\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{2\cos(x + \Delta x/2) \cdot \sin(\Delta x/2)}{\Delta x}$$

Отметим, что $\cos(x + \Delta x/2) \to \cos x$, и $\cdot \sin(\Delta x/2) \sim \Delta x/2$. Поэтому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = 2 \lim_{\Delta x \to 0} \cos x \cdot \frac{\Delta x/2}{\Delta x} = \cos x$$

2. $(\cos x)' = -\sin x$ (аналогично предыдущему)

3. $(\ln x)' = 1/x$

$$\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \frac{\ln(1+\Delta x/x)}{\Delta x}$$

Учитывая, что $\ln(1+\Delta x/x) \sim \Delta x/x$, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x/x}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$. Следует из $\log_a x = \ln x/\ln a$
5. $(e^x)' = e^x$

$$e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x}-1) \sim e^x\Delta x$$

6. $(a^x)' = a^x \ln a$. Использовать $a^x = e^{x\ln a}$
7. $(x^m)' = mx^{m-1}$.

$$(x+\Delta x)^m - x^m = x^m[(1+\Delta x/x)^m - 1]$$

Учитывая, что $(1+\Delta x/x)^m - 1 \sim m\,\Delta x/x$, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^m - x^m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} m\frac{x^m\,\Delta x/x}{\Delta x} = mx^{m-1}$$

8. $\big(\mathrm{tg}(x)\big)' = 1/\cos^2 x$. Использовать $\mathrm{tg}(x) = \sin x/\cos x$
9. $\big(\mathrm{ctg}(x)\big)' = -1/\sin^2 x$. Аналогично предыдущему.
10. $(\arcsin(x))' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $(\arccos(x))' = -1/\sqrt{1-x^2}$
11. $(\mathrm{arctg}(x))' = 1/(1+x^2)$, $(\mathrm{arcctg}(x))' = -1/(1+x^2)$

Формулы 10 и 11 докажем немного позже.

Дифференциал

Вернемся к формуле (4) $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha\Delta x$.

Пусть $f'(x_0) \neq 0$. Тогда $f'(x_0)\Delta x$ – бесконечно малая одного порядка с Δx, а $\alpha\Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx, т.е. $\alpha\Delta x = \mathrm{o}(\Delta x)$ (Почему?).

Определение. **Дифференциалом** функции $f(x)$ в точке x_0 называется произведение производной в точке x_0 на приращение независимой переменной.

Обозначение: $$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x. \quad (6)$$

Теперь формулу (4) можно записать так

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \mathrm{o}(\Delta x) \quad (7)$$

Из (7) следует утверждение

Если $f'(x_0) \neq 0$, то дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 есть главная линейная часть приращения функции.

Учитывая, что $\Delta x = x - x_0$, $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$, формулу (7) можно записать в виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \mathrm{o}(x-x_0) \quad (8)$$

Все вышеизложенное можно коротко описать так:

дифференцируемую функцию в малой окрестности фиксированной точки можно приближенно считать линейной.

На геометрическом языке это означает, что **малый отрезок графика функции в первом приближении можно заменить отрезком касательной**.

Действительно, удалив из (8) слагаемое $\mathrm{o}(x-x_0)$, получим уравнение касательной

$$y = f(\,x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (9)$$

Свойства дифференциала

Следуют непосредственно из соответствующих свойств производной.

1. $d(c) = 0$
2. $d\big(cf(x)\big) = cdf(x)$
3. $d[f(x) + g(x)] = df(x) + dg(x)$
4. $d[f(x) \cdot g(x)] = df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot dg(x)$
5. $d[f(x)/g(x)] = \dfrac{df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot dg(x)}{g^2(x)}$

Инвариантная форма дифференциала

Согласно определению

$$df(x) = f'(x)\Delta x, \qquad (10)$$

где Δx — приращение независимой переменной.

В (10) нельзя подставлять вместо независимой переменной какую-либо функцию, т.е. формула **не инвариантна** относительно замены переменной.

Действительно, подставим в $f(x)$ вместо x функцию $u(t)$. Получим сложную функцию $h(t) = f\big(u(t)\big)$. Ее дифференциал равен

$$df(u(t)) = f'\big(u(t)\big)u'(t)\Delta t = f'\big(u(t)\big)du(t) \quad (11)$$

Если же подставить $u(t)$ прямо в (10), то получим

$$df(u(t)) = f'\big(u(t)\big)\Delta u(t), \qquad (12)$$

что неверно, так как $\Delta u(t) \neq u'(t)\Delta t$.

Заметим, что для независимой переменной $\Delta x = dx$. Поэтому формулу (10) можно записать в виде $\quad df(x) = f'(x)dx \qquad (13)$

Формула (13) остается верной при подстановке в нее вместо x функции $u(t)$ (см. (11)). Другими словами, она **инвариантна** относительно замены переменной.

<u>Примеры</u>.

1. Вычислить приближенно с помощью дифференциала $\sqrt[5]{40}$.
   Рассмотрим функцию $f(x) = x^{1/5}$. Требуется вычислить $f(40)$. Пусть $x_0 = 32$.
   Имеем $f(x) \cong f(\,x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
   Заметим, что $f(32) = 2$, $\;f'(32) = \frac{1}{5}(32)^{-4/5} = \frac{1}{5}2^{-4} = \frac{1}{80}$.
   Примем $x_0 = 32$, $\;x = 40$. Тогда
   $f(40) \cong f(32) + f'(32)(40 - 32) = 2 + \frac{1}{80} \cdot 8 = 2{,}1$
   Компьютер дает значение 2,0913, значит, у нас ошибка меньше 0,01.
2. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = \ln x$, в точке $x_0 = 1$.

(см. (9)).

Односторонняя производная

Пусть функция $f(x)$ определена на (a,b) . Внесем в определение (1) производной дополнительное условие $\Delta x > 0$, т.е. будем рассматривать функцию только при $x > x_0$ Получим

$$f'(x_0+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Аналогично при $\Delta x < 0$ получим

$$f'(x_0-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

Такие производные называются **односторонними**.

Примеры. Найти односторонние производные (если они есть) в точке $x_0 = 0$.

1. $f(x) = |x|$.
2. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$.
3. $f(x) = \sqrt{|x|}$.

Теорема. Непрерывная функция дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда совпадают ее односторонние производные. (Почему?)

Производные и дифференциалы высших порядков

Производная функции $f(x)$ является функцией, она тоже может иметь производную.

Определение. Производная от производной называется **производной второго порядка** (коротко – второй производной).

Обозначение: $f''(x)$ или $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Итак, по определению имеем

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Аналогично определяются производные любого порядка

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)', \quad n = 1,2,3, \dots, \qquad (14)$$

Примеры.

1) $(a^x)' = a^x \ln a;\quad (a^x)'' = (a^x \ln a)' = a^x \ln^2 a;\quad (a^x \ln a)^{(n)} = a^x \ln^n a;$

2) $(x^m)' = m\, x^{m-1};\quad (x^m)'' = m(m-1)x^{m-2};$ и т.д.

Получить готовую формулу для производной любого порядка удается только для небольшого числа функций типа тех, что рассмотрены в примерах. В большинстве случаев, чтобы вычислить производную, например, 10-го порядка, придется сначала вычислить все производные вплоть до 9-го порядка.

Определение. Дифференциал от дифференциала называется **дифференциалом второго порядка** (коротко – второй дифференциа)л.

Обозначение: $d^2f(x) = d(df(x))$. (15)

Аналогично $d^{n+1}f(x) = d(d^n f(x)),\ \ n = 1,2,3, \ldots.$

Выведем формулу для второго дифференциала.

$$d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)\Delta x) = (f'(x)\Delta x)'\Delta x = f''(x)(\Delta x)^2$$

Повторяя эти вычисления, получим

$d^n f(x) = f^{(n)}(x)(\Delta x)^n,\ \ n = 1,2,3, \ldots$ (16)

Обобщение правила дифференцирования произведения

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^k v^{n-k},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Производные и дифференциалы высших порядков будут использованы в последующих разделах курса.

Пример. $(uv)^{(4)} = u^{(4)}v + C_4^1 u^{(3)}v^{(1)} + C_4^2 u^{(2)}v^{(2)} + C_4^{(3)} u^{(1)}v^{(3)} + uv^{(4)} =$
$=u^{(4)}v + 4u^{(3)}v^{(1)} + 6u^{(2)}v^{(2)} + 4u^{(1)}v^{(3)} + uv^{(4)}$.

Пусть $u = x^2,\ \ v = e^x$. Учитывая, что $u' = 2x,\ u'' = 2,\ u^{(3)} = u^{(4)} = 0$

$(x^2e^x)^{(4)} = 12e^x + 8xe^x + x^2e^x$

Вопросы для самоконтроля

1) Пусть $f(x) = \sin|x|$. Найдите $f'(0+0),\ \ f'(0-0)$. Дифференцируема ли функция $f(x)$?

2) Известно, что график некоторой функции имеет касательную при $x = x_0$. Следует ли отсюда, что функция дифференцируема при $x = x_0$?

3) Дано: $f(x) < g(x),\ \forall x \epsilon (a; b)$. Следует ли отсюда, что $f'(x) < g'(x)$?

4) Дано: $f'(x) < g'(x),\ \forall x \epsilon (a; b)$. Следует ли отсюда, что $f(x) < g(x)$?

5) Пусть $f'(x_0) = 0$. Сравните две бесконечно малые $\Delta x = x - x_0$ и
$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$.

6) Вычислите первый и второй дифференциалы от $f(x) = \ln x$,
при $x_0 = 1,\ \Delta x = 0{,}02$.

7) Пусть $f(x)$ четная функция. Будет ли четной или нечетной $f'(x)$?

8) Пусть $f'(x)$ периодическая функция. Может ли $f(x)$ быть непериодической?

9) Приведите пример функции , для которой $f(x) \to \infty,\ \ f'(x) \to 0,\ \ x \to +\infty$.

10) Приведите пример функции , для которой $f(x) \to 0,\ \ f'(x) \to \infty,\ \ x \to 0$.