Пусть $f(x)$ определена в $(a;b)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на $(a;b)$, если $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ выполняется

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)\ (f(x_1) > f(x_2))$$

Теорема 1. Признаки возрастания и убывания функции.

Если $f'(x) > 0, \forall x \in (a;b)$ то $f(x)$ возрастает на $(a;b)$;

Если $f'(x) < 0, \forall x \in (a;b)$ то $f(x)$ убывает на $(a;b)$.

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad x_1 < c < x_2 .$$

Очевидно, $f'(\mathrm{c}) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ и $f'(\mathrm{c}) < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, что и т.д. .

Следствие. Если $f'(x)$ имеет $\forall x \in (a;b)$ один и тот же знак, то $f(x)$ монотонна на $(a;b)$.

Определение. Точка x_0 называется точкой **локального максимума (минимума) ,** если для всех x , принадлежащих некоторой окрестности точки x_0 , выполняется неравенство

$$f(x) \le f(x_0)\ \ \big(f(x) \ge f(x_0)\big)$$

Общее название таких точек – точки **локального экстремума** . Обычно слово **локальный** ради краткости опускается.

Примеры.

1) $f(x) = \sin x$ имеет бесконечно много точек экстремума.

2) Любая монотонная функция не имеет точек экстремума (почему?).

3) $f(x) = |x|$ имеет единственную точку экстремума.

Теорема 2. (Необходимое условие экстремума).

а) Если x_0 – точка **локального экстремума** дифференцируемой функции $f(x)$, то

$$f'(x_0) = 0. \qquad (1)$$

б) Обратное утверждение неверно, т.е. (1) не является достаточным условием экстремума.

Доказательство.

а) Эта теорема – просто другая формулировка теоремы Ферма (объясните).

б) Например, функция $f(x) = x^3$ удовлетворяет условию (1) при $x_0 = 0$, но x_0 не является точкой экстремума (докажите).

Замечания.

В этой теореме предполагается, что функция $f(x)$ дифференцируема. Однако существуют функции ($f(x) = |x|$), которые не дифференцируемы в точке экстремума.

Пример. $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$. Найдем точки, в которых выполнено условие (1).

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 1 = 0. \qquad x_1 = -1, \quad x_2 = -1/3$.

Из необходимого условия (1) следует, что если $f(x)$ имеет точки экстремума, то это хотя бы одна из двух: -1; $-1/3$; (возможно, обе). Пока что неизвестно, действительно ли это точки экстремума. Чтобы это выяснить, нужны дополнительные условия.

Теорема 3. Достаточное условие экстремума (по первой производной).
Пусть $f(x)$ непрерывна в окрестности точки x_0, а ее производная меняет знак при увеличении x от значений, меньших x_0, до значений, больших x_0, то x_0 – точка экстремума.
При этом, если знак производной меняется с $+$ на $-$, то x_0 – точка максимума, если же с $-$ на $+$, то x_0 – точка минимума.
<u>Доказательство</u>. Пусть, например, $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. Тогда $f(x)$ возрастает слева от x_0 и убывает справа от x_0. Поэтому по обе стороны от x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$. Значит, x_0 – точка максимума.

<u>Замечание</u>. В этой теореме от функции $f(x)$ требуется только непрерывность в точке x_0, а производная в этой точке может и не существовать.

Теорема 4. Достаточное условие экстремума (по второй производной).
Если выполнены 2 условия:
1) $f'(x_0) = 0$;
2) $f''(x_0) \neq 0$,
то x_0 – точка экстремума.
При этом, если $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума, а если $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума.
<u>Доказательство</u>. По определению второй производной имеем

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

Пусть, например, $f''(x_0) > 0$. Тогда в малой окрестности точки x_0 выполняется неравенство (почему?)

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

Но $x - x_0$ меняет знак с минуса на плюс при переходе x через x_0. Значит, и $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. По теореме 3 получаем минимум.

Глобальный экстремум

Ранее была доказана теорема о существовании наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на $[a; b]$. Точки, в которых достигаются эти значения, называются точками **глобального экстремума**.
Если x_0 – точка глобального экстремума на $[a; b]$ и $x_0 \neq a$ и $x_0 \neq b$, то x_0 является и точкой локального экстремума. Отсюда получаем следующий алгоритм поиска глобального экстремума.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и дифференцируема всюду, кроме, может быть, конечного числа точек.
1) Ищем точки, подозрительные на локальный экстремум, т.е. все решения уравнения $f'(x) = 0$, а также точки разрыва производной (если таковые имеются).
В этой задаче не нужно проверять, действительно ли это точки экстремума.

2) Вычисляем значения $f(x)$ во всех найденных точках, а также на концах отрезка.
3) Находим наибольшее и наименьшее из полученных значений.
Пример. $f(x)$ задана на $[-2; 2]$. Требуется найти ее наибольшее и наименьшее значения

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x, & -2 \le x \le 0 \\ -0{,}5x\,, & 0 < x \le 2 \end{cases}$$

1) Заметим, что $f(0-0) = f(0+0) = f(0)$. Поэтому $f(x)$ непрерывна на $[-2; 2]$. Далее Очевидно (почему?), производная может иметь точку разрыва только при $x = 0$.
Имеем $f'(0-0) = -3$, $f'(0+0) = -0{,}5$. Значит, производная имеет разрыв при $x = 0$.
Решаем уравнение $f'(x) = 0$: $3x^2 - 3 = 0$, $x = -1$.
2) Вычисляем: $f(-2) = -2$; $f(-1) = 2$; $f(0) = 0$; $f(2) = -1$.
3) Отсюда наибольшее и наименьшее значения равны 2 и (-2) соответственно.

Выпуклость

Рассмотрим график функции $f(x)$, дифференцируемой на $(a; b)$. Пусть $M(x; y)$ — любая точка на графике и l — касательная к графику в точке $M(x; y)$.
Определение.
График называется **выпуклым вверх(вниз) в точке** $M(x; y)$, если в малой окрестности этой точки график расположен ниже(выше) касательной.

Определение.
График называется **выпуклым вверх(вниз) ,** если он выпуклый вверх(вниз) в каждой своей точке.

Термин **выпуклость** применяется не только к графику, но и к самой функции.

Заметим, что в этом определении выпуклости от функции требуется только наличия касательной к графику, а сама функция должна быть дифференцируемой.
Например, к функции $f(x) = e^{|x|}$ это определение неприменимо (почему?).

Приведем более общее определение выпуклости, в котором от функции требуется только непрерывность.
Определение.
График называется **выпуклым вверх(вниз),** если для любых точек A и Bграфика дуга ABграфика расположена выше(ниже) хорды AB.

Согласно этому определению $e^{|x|}$ выпукла (вверх/вниз?)

Приведем пример функции, у которой касательная существует во всех точках графика, а первая производная существует не во всех точках.
Пример. $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Очевидно, $f'(0)$ не существует, а касательная в точке $(0; 0)$ имеется. В этом случае касательная параллельна оси OX, поэтому в точке $(0; 0)$

понятие выпуклости не определено. При этом график выпуклый вниз на $(-\infty; 0)$ и выпуклый вверх на $(0; +\infty)$.

Определение. Точка на графике, разделяющая участки с противоположными направлениями выпуклости, называется **точкой перегиба**.
В рассмотренном выше примере точка перегиба $-(0; 0)$.

Теорема. Если $f''(x) < \ (> 0)\ \ \forall x \epsilon (a; b)$, то график функции $f(x)$ выпуклый вверх(вниз).

Доказательство. Уравнение касательной в точке $M_0(x_0; y_0)$: $\quad y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Рассмотрим разность ординат соответствующих точек на касательной и на графике

$$y - y_{\text{кас}} = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

Эта разность является бесконечно малой при $x \to x_0$. Сравним ее с $(x - x_0)^2$ с помощью правила Лопиталя.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(y - y_{\text{кас}})}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{(y - y_{\text{кас}})'}{2(x - x_0)} = \frac{1}{2} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{2} f''(x_0)$$

Это означает, что

$$\frac{(y - y_{\text{кас}})}{(x - x_0)^2} = \frac{1}{2} f''(x_0) + \alpha, \qquad \alpha - \text{беск. малая при } x \to x_0 \qquad (2)$$

Поэтому в малой окрестности точки x_0 при $x \neq x_0$ знак правой части совпадает со знаком $\frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$, т.е. со знаком $f''(x_0)$.
Если $f''(x_0) < 0$, то и $y - y_{\text{кас}} < 0 \implies y < y_{\text{кас}}$ при $x \neq x_0$. Это означает, что график в малой окрестности $M_0(x_0; y_0)$ расположен ниже касательной.

Теорема. Необходимое условие перегиба.
Пусть $f''(x)$ непрерывна в окрестности x_0, включая и точку x_0.
Если $M_0(x_0; y_0)$ точка перегиба, то $\quad f''(x_0) = 0. \qquad (3).$
Доказательство. Пусть M_0 — точка перегиба и $f''(x_0) \neq 0$, например, $f''(x_0) > 0$.
Тогда $f''(x) > 0$ во всей окрестности точки x_0. По доказанной выше теореме график в окрестности $M_0(x_0; y_0)$ выпуклый вниз, а это противоречит тому, что M_0 — точка перегиба.
Аналогично рассматривается случай $f''(x_0) < 0$.
Остается единственный вариант: $f''(x_0) = 0$. Теорема доказана.
Замечание. Условие (3) необходимо, но недостаточно для перегиба. Например, $f''(0) = 0$ для $f(x) = x^4$, но $(0; 0)$ не является точкой перегиба.

Асимптоты

Определение. Пусть точка M перемещается по кривой K так, что ее расстояние от начала координат стремится к ∞. Если при этом расстояние от точки M до некоторой прямой L стремится к 0, то L называется **асимптотой** кривой K.

Асимптоты, по их расположению относительно осей координат, можно разбить на две группы: вертикальные и наклонные.
Каждой точке **бесконечного разрыва** функции соответствует **вертикальная** асимптота. Это следует из сравнения определения бесконечного разрыва и определения асимптоты.

Для наклонных асимптот справедлива следующая теорема.
Теорема. Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ являлась асимптотой графика функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовал хотя бы одна из двух пар пределов

$$k = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x\,; \quad b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx] \qquad (4)$$

$$k = \lim_{x\to-\infty} f(x)/x\,; \quad b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - kx] \qquad (5)$$

Если формулы (4) и (5) дают разные значения чисел k, b, то график имеет две асимптоты : одну на $+\infty$, другую – на $-\infty$. Возможен также случай, когда существуют асимптоты только на $+\infty$ или только на $-\infty$.

Доказательство.

а) Достаточность.

Пусть существуют пределы (4) . Докажем, что прямая $y = kx + b$ является асимптотой.

Из (4) $b = f(x) - kx + \alpha$, $\alpha \to 0$ при $x \to +\infty$. Отсюда $f(x) - (kx + b) = -\alpha \to 0$.
Доказано.

б) Необходимость.

Пусть прямая $y = kx + b$ является асимптотой на $+\infty$. Докажем (4). По условию имеем

$$f(x) - (kx + b) \to 0. \qquad (6)$$

Тем более $[f(x) - (kx + b)]/x = f(x)/x - k - b/x \to 0$. Отсюда $k = \lim_{x\to+\infty} f(x)/x$.
Далее (6) запишем в виде $(f(x) - kx) - b \to 0$. Отсюда следует и второй предел из (4).

Примеры.

1) $f(x) = \begin{cases} x\ , & x < 0 \\ xe^{-x}, & x \ge 0 \end{cases}$. Функция имеет разные асимптоты на $+\infty$ и на $-\infty$. Найдите их. Начертите примерный график.

2) $f(x) = x + 1/(x^2 + 1)$. Одна и та же асимптота на $+\infty$ и на $-\infty$.

3) $f(x) = \begin{cases} 1\ , & x = 0 \\ \sin x/x\ , & x \ne 0 \end{cases}$ Одна и та же асимптота на $+\infty$ и на $-\infty$.

Кривизна кривой

Нам понадобится понятие длины кривой. Это понятие нуждается в строгом определении, но мы его отложим до следующего семестра, а пока что будем опираться на интуитивное представление о том, что такое длина кривой.
Пусть кривая K – график дифференцируемой функции $y = f(x)$. K – **гладкая** кривая (в каждой ее точке можно провести касательную). Рассмотрим отрезок кривой между точками M_0 , M. Пусть Δl – длина этого отрезка кривой, M_0 фиксирована, а M перемещается по кривой так, что $\Delta l \to 0$. Расстояние между точками M_0 , M равно
$|M_0M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.
Учитывая, что $|M_0M| \sim \Delta l$ (дуга эквивалентна хорде!), получаем

$$\Delta l \sim \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x\sqrt{1 + (\Delta y/\Delta x)^2} \sim \Delta x\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}$$

(7) (почему?)

Определение. Кривизной кривой K в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется число, определяемое формулой

$$k(x_0) = \lim_{\Delta l \to 0} \Delta\varphi/\Delta l \qquad (8)$$

M_0 , M точки на графике, φ_0, φ — углы наклона касательных в M_0 , M, а $\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$ — угол между касательными в точках M_0 , M .

Вычислять кривизну прямо по формуле (8) затруднительно. Заметим, что $\Delta\varphi \sim d\varphi(x_0) = \varphi'(x_0)\Delta x$; $\Delta l = \sqrt{1 + \left(f'(x_0)\right)^2}\Delta x$. Кроме того, $f'(x) = tg(\varphi)$.

Поэтому $\varphi(x) = arctg\left(f'(x)\right)$ и формула (8) с учетом (7) принимает вид

$$k(x_0) = \frac{\varphi'(x_0)}{\sqrt{1 + \left(f'(x_0)\right)^2}} \qquad (9)$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем $\left(arctg\left(f'(x)\right)\right)' = f''(x)/(1 + [f'(x)]^2)$. Подставив это выражение в (9), получим

$$k(x_0) = \frac{|f''(x_0)|}{\left(1 + \left(f'(x_0)\right)^2\right)^{3/2}} \qquad (10)$$

Знак модуля в (10) добавлен, так как знак $f''(x)$ связан только с направлением выпуклости графика и не имеет отношения к **кривизне**.

Примеры.

1) $f(x) = \sin x$. Сравним кривизну графика при $x = \pi/6$ и $x = \pi/2$.

$$k(\pi/3) = \frac{\sin(\pi/6)}{(1+\cos^2(\pi/6))^{3/2}} = 0{,}5/(1{,}75)^{1{,}5} \cong 0{,}22.$$

$$k(\pi/2) = \frac{\sin(\pi/2)}{(1+\cos^2(\pi/2))^{3/2}} = 1.$$

2) $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $|x| \le r$. Кривая – полуокружность. Здесь редкий случай, когда легко вычислить кривизну прямо по формуле (8). Имеем $\Delta l = r\Delta\varphi \Longrightarrow k = \lim \Delta\varphi/r\Delta\varphi = 1/r$

Вопросы для самоконтроля

1) Пусть $f'(x) \ge 0 \quad \forall x \epsilon (a; b)$. Следует ли отсюда, что $f(x)$ возрастает на $(a; b)$?
2) $f(a) > g(a)$ и $f'(x) < 0$, $g'(x) > 0 \quad \forall x \epsilon (a; +\infty)$. Обязательно ли пересекутся графики этих функций?
3) Пусть x_0 — точка локального экстремума для дифференцируемой функции $f(x)$. Будет ли x_0 точкой локального экстремума для $g(x) = f^2(x)$?
4) Пусть x_0 — точка локального экстремума для функции $f(x)$, причем $f'(x_0)$ не существует. Приведите пример.

5) Пусть $f(x)$ − многочлен степени n с вещественными коэффициентами. Каково наибольшее возможное число точек экстремума у $f(x)$?
6) Пусть $f(x)$ − многочлен степени 5 с вещественными коэффициентами. Может ли $f(x)$ не иметь точек экстремума?
7) Верно ли , что между двумя точками максимума дифференцируемой функции всегда находится точка минимума?
8) Может график иметь бесконечно много точек пересечения со своей асимптотой?
9) $f(x) = P(x)/Q(x)$, $P(x), Q(x)$ − многочлены степени m и n с вещественными коэффициентами. При каких условиях график функции $f(x)$ имеет асимптоты ? Только наклонные? Только вертикальные? И те и другие?
10) $f''(x) = x^3 + 2x$. Может ли график функции $f(x)$ иметь точку перегиба?
11) Пусть $g(x) = xf(x)$, $f(0) > 0$, ($f(x)$ − дифференцируемая функция). Может ли $x = 0$ быть точкой экстремума для $g(x)$?
12) Графики функций $f(x), g(x)$ имеют общую наклонную асимптоту на $+\infty$. Найдите $\lim_{x\to+\infty}[f(x) - g(x)]$.
13) Найдите кривизну кривой $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ с помощью формулы (8).