Предел функции

Ранее было определено понятие отображения одного множества в другое. Здесь рассмотрим отображения только числовых множеств.
Пусть $D \subset R$ числовое множество и $f -$ отображение $D \to R$. Такие отображения обычно называют функциями и обозначают $y = f(x),\ x\epsilon D,\ y\epsilon R$.
$D -$ называется **областью определения** (**областью задания)** функции .
Множество всех значений функции f обозначим через E.
Множество всех точек (x, y) , удовлетворяющих уравнению $y = f(x)$, называется **графиком** функции.
Примеры.
1) $f(x) = x^2, D = [0, +\infty),\ E = [0, +\infty)$.
2) $f(x) = x^2, D = (-\infty, +\infty),\ E = [0, +\infty)$.
3) $f(x) = \sin x,\ D = [0, \pi],\ E = [0,1]$.
4) $f(x) = \sin x,\ D = [-\pi/2\,, \pi/2],\ E = [-1,1]$.

Определение. **Основными элементарными** функциями называются следующие функции $x^m, a^x, \log_a x\,, \sin x\,, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ и обратные к тригонометрическим.

Определение. **Элементарными** называются функции, которые получаются из основных элементарных с помощью конечного числа алгебраических действий и подстановок.

Например, $2^{\sin 3x}/(x^2 + 1)$ и т.п.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 , кроме, может быть, самой точки x_0.
Определение. Число b называется **пределом функции $\boldsymbol{f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$ (при $\boldsymbol{x \to x_0}$)**, если для **любой** последовательности x_n , стремящейся к x_0 , последовательность значений $f(x_n)$ стремится к b.
Обозначение: $f(x) \to b$ при $x \to x_0$ или $\lim_{x \to x_0} f(x) = b$.

Как и для последовательности, можно дать равносильное определение предела функции на языке окрестностей.

Определение. Число b называется **пределом функции $\boldsymbol{f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$** , если для **любой** окрестности $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ точки b найдется такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, что из условия $x\epsilon(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ следует $f(x)\epsilon(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$.

Более наглядно (хотя и не точно) смысл определения выражается фразой:
чем ближе x к x_0 , тем ближе $f(x)$ к b.

Односторонние пределы

Иногда функция $f(x)$ определена не во всей окрестности точки x_0 , а слева или справа от этой точки, т.е. при $x\epsilon(x_0 - \delta,\ x_0)$ или $x\epsilon(x_0,\ x_0 + \delta)$. В этом случае определение предела необходимо изменить.
Определение. Число b называется **пределом функции $\boldsymbol{f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$ слева** (**справа**), если

для **любой** последовательности x_n , стремящейся к x_0 и такой, что $x_n \le x_0$ $(x_n \ge x_0)$, последовательность $f(x_n)$ стремится к $f(x_0)$.
Такие пределы называются **односторонними**.
Обозначения: $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ - пределы слева и справа.
Сравнивая введенные определения, нетрудно доказать следующее.
Теорема. **Предел функции в** точке **существует тогда и только тогда, когда оба односторонних предела существуют и равны друг другу**.
В краткой записи это выглядит так

$$b = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = b .$$

Доказательство.
а) Пусть $b = \lim_{x \to x_0} f(x)$. Докажем сначала, что $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ существуют и равны b.
Пусть $x_n \to x_0$. Задаем $\varepsilon > 0$. Тогда, начиная с некоторого номера, будет выполняться

$$f(x_n) \epsilon (b - \varepsilon, b + \varepsilon). \qquad (1)$$

Разобьем x_n на две последовательности $\bar{x}_n$ и $\bar{\bar{x}}_n$, стремящиеся к x_0 слева и справа соответственно. Для достаточно больших номеров будет

$$f(\bar{x}_n) \epsilon (b - \varepsilon, b + \varepsilon) \text{ и } f(\bar{\bar{x}}_n) \epsilon (b - \varepsilon, b + \varepsilon). \qquad (2)$$

Отсюда следует существование односторонних пределов и их равенство.
б) Пусть

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = b. \qquad (3)$$

Докажем $b = \lim_{x \to x_0} f(x)$.
Любую последовательность x_n , стремящуюся к x_0, можно разбить на две последовательности $\bar{x}_n$ и $\bar{\bar{x}}_n$, как это описано в пункте а) . По условию выполняется (3), значит, и (1).
Примеры.
1) $f(x) = \sqrt{x - 1}$, $x \epsilon [1, +\infty)$, $f(x)$ не определена при $x < 1$, поэтому речь может идти только о пределе справа в точке $x = 1$. Очевидно, $f(1 + 0) = 0$.
2) $f(x) = \begin{cases} 1/(x-1), & x > 1 \\ -x, & x \le 1 \end{cases}$. Имеем $f(1 + 0) = +\infty$, $f(1 - 0) = -1$.

Основные теоремы о пределах

Эти теоремы почти дословно совпадают с соответствующими теоремами для последовательностей (см. теоремы 1-6 для последовательностей). В теоремах 1-5 нужно заменить $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x_n}$ на $\boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{y_n}$ на $\boldsymbol{g(x)}$,а $\boldsymbol{n} \to +\infty$ заменить на $\boldsymbol{x \to x_0}$.
Теорема о предельном переходе в неравенстве для функций будет формулироваться так: если в окрестности точки x_0 выполняется $f(x) \le g(x)$ и существуют пределы $\lim_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim_{x \to x_0} g(x)$, то $\lim_{x \to x_0} f(x) \le \lim_{x \to x_0} g(x)$

Признаки существования предела функции

Также и в этом пункте формулировки теорем о существовании предела функции нуждаются только в небольших изменениях по сравнению с пределом последовательности.

Определение. Функция $f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на (a, b) , если $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **монотонной** на (a, b) , если она либо убывающая либо возрастающая на (a, b).

Пример. $\sin x$ возрастающая на $(-\pi/2\,,\ \pi/2)$, убывающая на $(\pi/2\,,\ 3\pi/2)$ и ни та ни другая на $(0,\ 2\pi)$.

Так же, как и для последовательностей, при замене строгого неравенства на нестрогое получим **неубывающую и невозрастающую** функции.
Теорема 1.
Если функция $f(x)$ монотонная и ограниченная на $(x_0-\varepsilon, x_0)$, то существует $f(x_0-0)$.
Аналогично для $(x_0, x_0+\varepsilon)$ существует $f(x_0+0)$. (Без доказательства)

Теорема 2. О сжатой переменной. Если в окрестности точки x_0 выполняется условие $f(x) \le h(x) \le g(x)$ и существуют пределы $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = b$, то $\lim_{x\to x_0} h(x)$ существует и равен b. (доказать самостоятельно)

Без доказательства приведем свойство элементарных функций:
Если элементарная функция определена в окрестности точки x_0, включая саму точку x_0, то $lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Иначе говоря, предел элементарной функции при $x \to x_0$ находится простой подстановкой числа x_0 вместо x. Такой метод вычисления предела называется **непосредственным переходом** к пределу. В дальнейшем будут рассмотрены случаи, когда такой метод неприменим.

Пример. $\lim_{x\to 1} (2^x+3)/\sqrt{x+8} = (2^1+3)/\sqrt{1+8} = \frac{5}{3}$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой при $x \to x_0$**, если $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

Сравните с определением бесконечно малой последовательности. Для последовательности всегда $n \to +\infty$, других вариантов нет. Поэтому последовательность можно назвать бесконечно малой, не добавляя слов "при $n \to +\infty$ ". Для функции обязательно нужно указывать “при $x \to x_0$”.
Например, $\sin x$ – б.м. при $x \to 0$, но $\sin x$ не б.м. при $x \to \pi/2$, так как $\sin x \to \sin \pi/2 = 1$
Замечание. Определение сохраняет смысл и в том случае, когда $x_0 = +\infty$ или $-\infty$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой при $x \to x_0$**, если **для любой** последовательности x_n, стремящейся к x_0, последовательность $f(x_n)$ является бесконечно большой.

Замечание.
Обратите внимание на слова **для любой.**
Например, $f(x) = 2^x \sin x$ не является б.б. при $x \to +\infty$, хотя для некоторых значений x она может принимать сколь угодно большие значения, например, при $x_n = \pi\,(2n+1)/2\,, n = 1,2,3,\ldots$, имеем $|f(x_n)| \to +\infty$.
Однако для последовательности $x_n = \pi n, n = 1,2,3,\ldots$ получаем $f(x_n) = 0$.
Но функция $f(x) = 2^x\,(\sin x + 2)$ – б.б. (объясните, в чем отличие от предыдущей функции).

Все, что было сказано про бесконечно малые и бесконечно большие последовательности – их свойства и сравнение друг с другом, полностью применимо и к функциям.

Замечательные пределы

пять пределов – это примеры неопределенностей. Первый их них – неопределенность типа 1^∞, а остальные – типа $\frac{0}{0}$.

1. $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x = e$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)/x = 1$
4. $\lim_{x\to 0}(e^x-1)/x = 1$
5. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x} = m$

<u>Доказательства</u>.

1. Число

$$\boldsymbol{e} = \lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}. \qquad (4)$$

Здесь выражение в скобках стремится к 1, а показатель степени – к ∞. Поэтому такую неопределенность обозначают как 1^∞.

Вместо доказательства приведем правдоподобные рассуждения (строгое доказательство приведено в конце данного файла, см. **Приложение**).

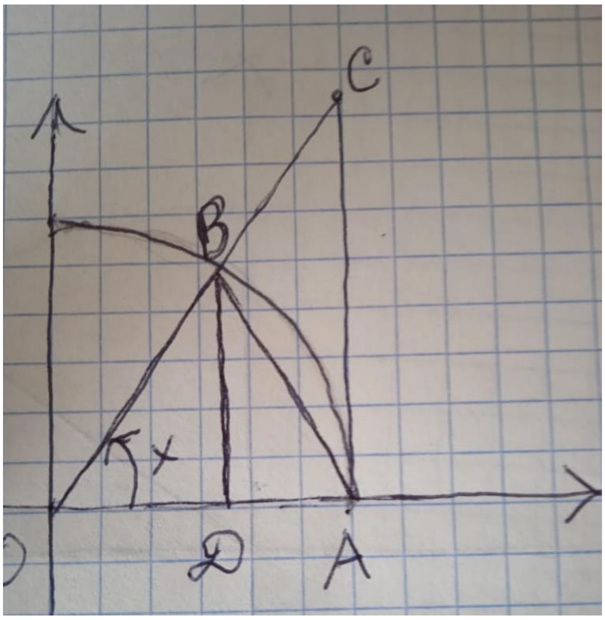
Рассмотрим функцию $f(x) = (1+1/x)^x$. Подставим $x = 1; 2; 3, \dots, 10$. Получим $(1+1/1)^1 = 2$; $(1+1/2)^2 = 2{,}25$; $(1+1/3)^3 = 2{,}37$; $(1+1/10)^{10} = 2{,}59$, т.е. возрастающую последовательность.

Можно доказать, что эта последовательность возрастающая и ограниченная. Отсюда следует, что существует $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Этот предел обозначают буквой $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e} \cong 2{,}71828\dots$.

Число $\boldsymbol{e}$ наряду с π является в математике важнейшей постоянной.

<u>Упражнение</u>. В пределах

а) $\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{1/x}$, б) $\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{x}\right)^{1/x}$ также имеется неопределенность типа 1^∞, но пределы не равны числу $\boldsymbol{e}$ и не равны друг другу. Вычислите их и попытайтесь объяснить, из-за чего эта разница.



2. Рассмотрим окружность радиуса 1 и точки A и B на ней. BD – высота треугольника OAB, IBDI = sin x. Очевидно, площади треугольников OAB, OAC и сектора удовлетворяют неравенству $S_{OAB} < S_{\text{сек}} < S_{OAC}$. Вычислим эти площади

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}\sin x, \quad S_{OAC} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x, \quad S_{\text{сек}} = \frac{1}{2}x$$

Отсюда получим

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

Разделим на $\frac{1}{2}\sin x$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Longrightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Учитывая, что $\cos x \to \cos 0 = 1$ при $x \to 0$ (элементарная функция!) , переходим к пределу

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

3. Логарифм по основанию ***e*** называется **натуральным** логарифмом, обозначается $\ln x$.
   Заметим, что $\ln y \to \ln e = 1$ при $y \to e$. (Объясните, почему). Отсюда получаем
   $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x} = \ln e = 1.$
4. Обозначим $y = e^x - 1$. Тогда $x = \ln(y+1)$. Заметим, что $y \to 0$ при $x \to 0$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = 1$$

5. Будет доказано немного позже.

Пределы 1,3,4,5 удобно формулировать на языке эквивалентности:

При $x \to 0$ справедливы соотношения

$$\sin x \sim x; \quad \ln(1+x) \sim x; \quad e^x - 1 \sim x; \quad (1+x)^m - 1 \sim mx \qquad (5)$$

Раскрытие неопределенностей

Если при вычислении предела невозможен непосредственный переход к пределу, то говорят, что имеет место неопределенность. Это не означает, что предела нет, просто для его вычисления требуется дополнительное исследование. Рассмотренные выше замечательные пределы представляют собой примеры таких неопределенностей. Все эти пределы, кроме предела с числом e, содержат неопределенность типа $\frac{0}{0}$, т.е. предел отношения двух функций, причем каждая из них стремится к нулю. Например, при попытке непосредственно перейти к пределу в $\frac{\sin x}{x}$ получаем $\frac{0}{0}$.

При раскрытии неопределенностей удобно использовать соотношения эквивалентности. Правило, сформулированное ранее для последовательностей, остается верным и для функций.

Правило. *Предел отношения или произведения бесконечно малых или бесконечно больших функций не изменится, если их заменить эквивалентными б.м. или б.б. .*

Примеры.

1) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. Имеем $1-\cos x = 2\sin^2(x/2)$, $\sin(x/2)\sim x/2$, $\sin^2(x/2)\sim x^2/4$.

Отсюда $1-\cos x\sim x^2/2$. Далее

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}=0{,}5$$

2) Теперь докажем 5-й замечательный предел.

$$(1+x)^m = e^{m\ln(1+x)} \Rightarrow (1+x)^m - 1 = e^{m\ln(1+x)} - 1 \sim m\ln(1+x) \sim mx$$

Итак, $(1+x)^m - 1 \sim mx$

Заменяем числитель в 5-м пределе на mx

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{x}=m$$

Приложение. Доказательство существования числа $\boldsymbol{e}$.

1) Бином Ньютона.

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b^1 + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \cdots + C_n^{n-1}a^1 b^{n-1} + b^n, \qquad (*)$$

где

$$C_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)/k!$$

2)Применим формулу (*) при $a=1$, $b=1/n$.

$$x_n = (1+1/n)^n = 1 + n\cdot 1/n + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2}{(n-1)!n^{n-1}} + \frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\cdot\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n^n}$$

Обозначим сумму слагаемых, начиная со второго по $(n-2)$ – й, через y_n.

$$y_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-2}{n}\right)\cdot\frac{1}{(n-1)!}. \quad (**)$$

Тогда

$$x_n = 2 + y_n + \frac{1}{n^n} \qquad (***)$$

Докажем, что последовательность y_n возрастающая и ограниченная. Отсюда будет следовать существование предела y_n и, значит, предела x_n .

а) Сначала докажем возрастание.

Заметим, что в y_n ровно $(n-2)$ слагаемых, а в y_{n+1} – $(n-1)$. Сравним слагаемые с одинаковыми номерами в y_n и y_{n+1}. Например, вторые слагаемые в y_n и y_{n+1} равны соответственно в y_n и y_{n+1}

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!} \quad \text{и} \quad \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{3!}$$

Очевидно,

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!}<\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{3!}$$

Аналогично сравниваются и остальные слагаемые, кроме последнего в y_{n+1}. Итак, $y_n < y_{n+1}$.

б) Докажем теперь ограниченность последовательности y_n.

Очевидно, все разности в (**) будут меньше 1. Заменим их единицей, тогда

$$y_n < \frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}$$

Имеем $\frac{1}{3!}=\frac{1}{2\cdot 3}<\frac{1}{2^2}$; $\frac{1}{4!}=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3}$; … $\frac{1}{(n-1)!}<\frac{1}{2^{n-2}}$. Отсюда

$$y_n < \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}} = 0{,}5\,\frac{1-(0{,}5)^{n-3}}{1-0{,}5} < 1 .$$

Из формулы $(***)$ получаем $x_n < 3$.

Итак, последовательность x_n монотонная и ограниченная, поэтому имеет предел.

Замечание (для внимательных). Приведенное здесь доказательство имеет пробел. Действительно, в формуле $e=\lim_{x\to\infty}(1+1/x)^x$ переменная x может принимать не только натуральные значения, а мы использовали только натуральные.