

1. Найти $\frac{(2-2i)^{2022}}{(2+2i)^{2020}}$.
2. Решить уравнение $z^2 = -\frac{8}{3} + 2i$.
3. Решить уравнение $(1+i)z^2 - 2(1+2i)z + 1 + 7i = 0$.
4. Решить уравнение $z^4 + 5z^2 + 9 = 0$.
5. Решить уравнение $z^6 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{1+i}$.
6. Выразить $\sin 5\varphi$ через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.
7. С помощью формул Эйлера представить $\cos^5 \varphi$ в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных φ .
8. При делении многочлена $f(x)$ на $x+2$, $x-2$ и $x+4$ остатки равны соответственно 7, 3 и 21. Чему равен остаток при делении $f(x)$ на $(x^2-4)(x+4)$?
9. Разложить многочлен $2x^5 + 18x^4 + 55x^3 + 63x^2 + 27x + 27$ на линейные сомножители.
10. Разложить многочлен $x^8 + 4x^4 + 4$ на неразложимые сомножители с вещественными коэффициентами.
11. Методом Крамера решить систему уравнений $\begin{cases} 2(1+i)x + iy = -1+i, \\ 2(1+2i)x + (1-i)y = -3-3i \end{cases}$.
12. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5(m-1)x - (2m^2 + m - 3)y = 5(m-1), \\ (2m-1)x - my = 3m-2 \end{cases}$ при всех значениях параметра m .
13. Вычислить определитель порядка n :
$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 3 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 3 & \dots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 3 \end{vmatrix}.$$
14. Вычислить определитель матрицы $C = -5AB$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.
15. Вычислить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}$.

16. Найти матрицу A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 11 \\ 6 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

17. Решить матричное уравнение $AXB = C$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

18. Выясните, линейно зависима или линейно независима система векторов: $\mathbf{a}_1 = (1, 4, 5, 6)$, $\mathbf{a}_2 = (-1, 2, 5, 8)$, $\mathbf{a}_3 = (2, 0, -2, -4)$, $\mathbf{a}_4 = (2, 3, 4, -9)$. Выделите максимальную линейно независимую подсистему. В линейно зависимой системе выпишите какую-нибудь линейную зависимость.

19. Даны точки $\mathbf{A}(8, -1, 2)$, $\mathbf{B}(9, -3, 4)$, $\mathbf{C}(4, 3, -4)$. Не используя формулу Герона, найти площадь треугольника \mathbf{ABC} и длину высоты, опущенной из вершины \mathbf{A} .

20. Составить канонические уравнения высоты треугольника \mathbf{ABC} , опущенной из точки \mathbf{A} на сторону \mathbf{BC} , если $\mathbf{A}(-1; -4)$, $\mathbf{B}(4; 1)$, $\mathbf{C}(-2; 4)$.

21. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $\mathbf{A}(2, -1, 1)$, $\mathbf{B}(3, 2, -1)$, $\mathbf{C}(5, 5, 4)$ и $\mathbf{D}(4, 1, 3)$.

22. Написать уравнение плоскости \mathbf{P} , проходящей через точки $\mathbf{M}(3, 2, -1)$, $\mathbf{N}(2, -3, 4)$ и $\mathbf{K}(4, -2, 2)$.

23. Написать уравнение плоскости \mathbf{P} , проходящей через две параллельные прямые

$$\mathbf{L}_1: \frac{x+2}{-5} = \frac{y+4}{10} = \frac{z-3}{5} \text{ и } \mathbf{L}_2: \frac{x+4}{4} = \frac{y+5}{-8} = \frac{z-7}{-4}.$$

24. Найти расстояние от точки $\mathbf{M}(3, 14, -6)$ до плоскости $\mathbf{P}: -3x - 3y + 2z = 7$.

25. Найти проекцию точки $\mathbf{M}(6, -3, 7)$ на плоскость $\mathbf{P}: 16x - 3y = 10$.

26. Написать канонические уравнения прямой $\mathbf{L}: \begin{cases} 3x - 2y + 3z = 10, \\ -x + 2y - 4z = 6 \end{cases}$.

27. Найти угол между прямой $\mathbf{L}: \frac{x+3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+5}{1}$ и плоскостью $\mathbf{P}: y - 5z - 6 = 0$.

28. Найти расстояние от точки $\mathbf{M}(2, 3, -1)$ до прямой $\mathbf{L}: \frac{x-5}{-3} = \frac{y}{-2} = \frac{z+25}{2}$.

29. При каких значениях параметров A и B плоскость $Ax + By + 3z = 5$ перпендикулярна к прямой $x = 2t + 3$, $y = -3t + 5$, $z = -2t - 2$?

30. Через фокус $\mathbf{F}(c; 0)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ проведена хорда, перпендикулярная к большой оси. Найти длину этой хорды.

31. Повернуть оси координат так, чтобы после поворота уравнение $x^2 - 3xy + y^2 + 1 = 0$ не содержало члена с произведением координат. Какую кривую задает новое уравнение?