3.2. Задания

Рассматриваются ряды $f(x) = \sum_{i=0...\infty} u_i$. Для каждого индивидуального задания определены вид элемента ряда u_i, функция $f(x)$, область сходимости D, если $D \neq R$.

1. $u(i) = (-1)^i x^{2i} / (2i)!$; $f(x) = \cos(x)$.
2. $u(i) = x^i / i!$; $f(x) = \exp(x)$.
3. $u(i) = (1/\mathrm{sqrt}(2\pi))(-1)^n x^{2n+1}/(2^n n!(2n+1))$; $f(x) = \Phi(x)$ – “функция ошибок” [10, с.46].
4. $u(i) = (-1)^i x^{2i} / i!$; $f(x) = \exp(-x^2)$.
5. $u(i) = x^i (i+1) / i!$; $f(x) = \exp(x)(1+x)$.
6. $u(i) = x^{3i} / (3i)!$; $f(x) = (1/3)\exp(x) + 2\exp(-x/2)\cos(x\ \mathrm{sqrt}(3)/2)$.
7. $u(i) = x^{3i+q} / (3i+q)!$; $q = 1, 2$;

   $f(x) = (1/3)\exp(x) - (2/3)\exp(-x/2)\cos(x\ \mathrm{sqrt}(3)/2 - (\pi/3)(-1)^q)$.
8. $u(i) = q^i x^{4i} / (4i)!$; $q = +1, -1$;

   $f(x) = (1/2)(\mathrm{ch}(x) + \cos(x))$; при $q = +1$;

   $f(x) = \cos(x / \mathrm{sqrt}(2))\ \mathrm{ch}(x / \mathrm{sqrt}(2))$; при $q = -1$.
9. $u(i) = x^{4i+1} / (4i+1)!$; $f(x) = (1/2)(\mathrm{sh}(x) + \sin(x))$.
10. $u(i) = x^{4i+3} / (4i+3)!$; $f(x) = (1/2)(\mathrm{sh}(x) - \sin(x))$.
11. $u(i) = (-1)^i 2^{2i} x^{4i} / (4i)!$; $i \geq 1$; $f(x) = \mathrm{ch}(x)\sin(x) - 1$.
12. $u(i) = (-1)^{i+1} 2^{2i-1} x^{4i-2} / (4i-2)!$; $i \geq 1$; $f(x) = \mathrm{sh}(x)\cos(x)$.
13. $u(i) = 2^{2i} x^{2i+1} / (2i+1)!$; $i \geq 1$; $f(x) = x - \mathrm{sh}(x)\sin(x)$.
14. $u(i) = (-1)^{i+1} 2^{2i-1} x^{2i} / (2i)!$; $i \geq 1$; $f(x) = \sin^2(x)$.
15. $u(i) = (-1)^i (2i-1)!\, x^{2i} / 2^{2i} / (i!)^2$; $i \geq 1$;

    $f(x) = \ln 2 - \ln(1 + \mathrm{sqrt}(1 + x^2))$; $x^2 \leq 1$.
16. $u(i) = (-1)^i 2^{2i-1} (i-1)!\, i!\, x^{2i+1} / (2i+1)!$; $i \geq 1$;

    $f(x) = x - \mathrm{sqrt}(1 + x^2) \ln(x + \mathrm{sqrt}(1 + x^2))$; $x^2 < 1$.

17. $u(i) = (-1)^i 2^{2i} (i!)^2 x^{2i+1} / (2i+1)!$;

$f(x) = \ln(x + \mathrm{sqrt}(1 + x^2)) / \mathrm{sqrt}(1 + x^2)$; $x^2 < 1$.

18. $u(i) = (-1)^i (2i-1)! / 2^{2i-1} / i! / (i-1)! / (2i+1) / x^{2i+1}$; $i \geq 1$;

$f(x) = \ln(1 + \mathrm{sqrt}(1 + x^2)) - \ln(x) - 1/x$; $x^2 \geq 1$.

19. $u(i) = (2i)!\, x^{2i+1} / 2^{2i} / (i!)^2 / (2i+1)$; $f(x) = \arcsin(x)$; $x^2 < 1$.

20. $u(i) = 2^{2i} (i!)^2 x^{2i+1} / (2i+1)! / (i+1)$; $f(x) = \arcsin^2(x)$; $x^2 \leq 1$.

21. $u(i) = (2i)! / 2^{2i} / (i!)^2 / (2i+1) (x^2 / (1 + x^2))^i$;

$\mathrm{arctg}(x) = [x / \mathrm{sqrt}(1 + x^2)]\, f(x)$; $x^2 < \infty$;

для сравнения рассмотреть:

а) $u(i) = (-1)^i x^{2i+1} / (2i+1)$; $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$; $x^2 \leq 1$;

б) $u(i) = (-1)^i / x^{2i+1} / (2i+1)$; $f(x) = \pi/2 - \mathrm{arctg}(x)$; $x^2 \geq 1$.

22. Вычислить пару функций f_1 и f_2:

$u_1(i) = p^i \sin(i \cdot x) / i$; $i \geq 1$; $u_2(i) = p^i \cos(i \cdot x) / i$; $i \geq 1$;

$f_1(x) = \mathrm{arctg}(p \sin(x) / (1 - p \cos(x)))$;

$f_2(x) = \ln(1 / \mathrm{sqrt}(1 - 2p\cos(x) + p^2))$; $(0 < x < 2\pi)$ & $(p^2 \leq 1)$.

23. Вычислить пару функций f_1 и f_2:

$u_1(i) = x^i \sin(i \cdot p)/i!$; $i \geq 1$; $u_2(i) = x^i \cos(i \cdot p) / i!$; $i \geq 0$;

$f_1(x) = \exp(x \cos(p)) \sin(x \sin(p))$;

$f_2(x) = \exp(x \cos(p)) \cos(x \sin(p))$; $x^2 < 1$.

24. $u(i) = (-1)^i x^{2i+1} / (2i+1)!$; $f(x) = \sin(x)$.

25. $u(i) = x^{2i+1} / (2i+1)!$; $f(x) = \mathrm{sh}(x)$.

26. $u(i) = x^{2i} / (2i)!$; $f(x) = \mathrm{ch}(x)$.

Примечание. $\mathrm{sh}(x) = (\exp(x) - \exp(-x)) / 2$;
$\mathrm{ch}(x) = (\exp(x) + \exp(-x)) / 2$.