Основные понятия

Когда объекты объединены по какому-то признаку, это объединение называют множеством. Множества будем обозначать заглавными буквами, а составляющие их объекты (элементы множеств) – строчными.

Символы ∩, ∪, ⊂, ⊃ используются для обозначения пересечения, объединения и включения одного множества в другое, а символы $\epsilon, \bar{\epsilon}$ – для обозначения принадлежности элемента некоторому множеству.

Если $B \subset A$, то B называется подмножеством множества A.

Множества бывают конечные и бесконечные. Примерами бесконечных множеств являются числовые множества.

1. Множество натуральных чисел N: $1,2,3, \dots$.
2. Множество целых чисел Z: $0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$.
3. Множество рациональных чисел Q: m/n, $\quad m,n \in Z$, $\; n \neq 0$.
   Каждое целое число можно рассматривать как рациональное со знаменателем, равным единице. Поэтому $N \subset Z \subset Q$.
4. Множество вещественных (действительных) чисел R .
   Строгая теория вещественных чисел в нашем курсе не рассматривается.
   Будем представлять вещественное число просто в виде бесконечной десятичной дроби. Верны два утверждения.

А) **Всякое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби**.

Доказательство.

Пусть $a = m/n$ рациональное число. Запустим процесс деления m на n. Получим целую часть m_1 и остаток r_1, $0 \le r_1 < n$. Если $10r_1 < n$, то полагаем $m_2 = 0$ и проверим $10^2 r_1 < n$. Если это выполнено, то $m_3 = 0$ и проверим $10^3 r_1 < n$ и т.д. , до тех пор пока не станет $10^k r_1 \ge n$. Число различных остатков конечно, поэтому, начиная с некоторого шага, числа m_i и r_i начнут повторяться. Получится периодическая десятичная дробь.

Если на каком-то шаге оказалось $r_i = 0$, то далее все числа $m_{i+1}, m_{i+2}, \dots$ будут равны 0.

В этом случае $a = m_1, m_2 m_3 \dots m_i 00000 \dots$, т.е. фактически это конечная десятичная дробь (0 в периоде).

Б) Всякая периодическая дробь равна некоторому рациональному числу. отсюда следует $Q \subset R$.

Доказательство.

Пусть период состоит из двух цифр, например, $a = 0,(m_2 m_3)$, m_2, m_3 – цифры. Обозначим $b = m_2 10 + m_3$.Тогда получаем геометрическую прогрессию

$a = b/10^2 + b/10^4 + b/10^6 + \dots = b/10^2 \cdot (1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \cdots) = b/99$

Кроме периодических дробей, существуют бесконечные непериодические дроби. Например, $\sqrt{2}, \pi$, и т. д.

Почему нужны бесконечные непериодические дроби?

Почему недостаточно рациональных чисел ? Ведь компьютер может обрабатывать только конечные дроби.

Более 2000 лет тому назад выяснили, что существуют отрезки, длину которых нельзя выразить рациональным числом. Например, пусть с – длина гипотенузы прямоугольного треугольника с единичными катетами. Тогда $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Предположим, что $c = m/n$, где m, n взаимно простые натуральные числа (несократимая дробь). Тогда

$$m^2 = 2n^2$$

Очевидно, m четное, т.е. $m = 2m_1$. Тогда n нечетное, иначе мы бы сократили на 2. Получим $4(m_1)^2 = 2n^2 \Longrightarrow 2(m_1)^2 = n^2$. Отсюда следует, что n четное. Противоречие!

Сравнение бесконечных множеств

Пусть А и В два множества. В каком из них больше элементов? Для конечных множеств ответ очевиден. Для бесконечных множеств это более сложный вопрос.
Определение. Если каждому элементу $a\epsilon A$ сопоставлен некоторый элемент $b\epsilon B$, то говорят, что определено **отображение** множества A в множество B.
Обозначается $A \to B$ или $b = f(a)$. Элемент b называется образом элемента a , а элемент a — прообразом элемента b.

Определение. Отображение A в B называется **взаимно однозначным** или 1-1 соответствием, если каждый элемент множества B имеет один и только один прообраз.

Определение. Множества А и В называются **равномощными**, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие.

На первый взгляд, у равномощных множеств одинаковое количество элементов. Для конечных множеств это верно. Но для **бесконечных** множеств само понятие "количество элементов" теряет смысл. Пусть N_2 — множество всех четных натуральных чисел. Вроде бы в N_2 меньше чисел , чем в N. С другой стороны, легко проверить, что N_2 и N равномощны. Действительно, $k \Leftrightarrow 2k$.

Определение. Множество А называется **счетным**, если оно равномощно N.

Счетность множества означает, что все его элементы можно пронумеровать.

Теорема 1. Множество всех рациональных чисел счетно.
Доказательство. Для краткости ограничимся положительными числами.
Зададим натуральное число k и рассмотрим все рациональные числа m/n, для которых $m + n = k$.
Таких чисел конечное число. Пронумеруем их. Пусть наибольший номер равен i_1. Рассмотрим теперь числа, для которых $m + n = k + 1$. Их тоже пронумеруем, начав нумерацию с $i_1 + 1$. При повторении этих действий мы можем дойти до любого рационального числа и, значит, это число получит номер. Тем самым счетность доказана.

Теорема 2. Множество всех вещественных чисел несчетно.
Доказательство.
Достаточно ограничиться интервалом $(0, 1)$. Каждое число на $(0, 1)$ имеет вид
$0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, где $a_1, a_2, a_3 \ldots$ - цифры. Предположим, что множество $(0, 1)$ счетно. Расположим все его элементы в порядке возрастания их номеров и выпишем только дробные части (без 0,) .

$$\begin{array}{c}
a_{11} a_{12} a_{13} \ldots\ a_{1n}\ \ldots \\
a_{21} a_{22} a_{23} \ldots\ a_{2n}\ \ldots \\
a_{31} a_{32} a_{33} \ldots\ a_{3n}\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1} a_{m2} a_{m3} \ldots\ a_{mn}\ \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Рассмотрим число $x = 0, a_{11} a_{22} a_{33} \ldots$, составленное из диагональных элементов таблицы. Изменим каждую его цифру любым способом. В результате получим новое число y, которое по построению не совпадает ни с одним числом из таблицы. Но таблица по условию содержит все числа из $(0, 1)$. Противоречие! Теорема доказана.

Система координат на прямой устанавливает 1-1 соответствие между точками прямой и R. Поэтому такие понятия, как «точка на прямой» и ее координата, используются как синонимы.
Окрестностью точки a числовой оси называется любой интервал с центром в точке a.

Ограниченные множества

Множество A называется **ограниченным сверху (снизу)**, если существует такая постоянная M , что

$\forall x \epsilon A$ выполняется $x \leq M$ $(x \geq M)$

Множество A называется **ограниченным**, если существует такая постоянная M , что

$\forall x \epsilon A$ выполняется $|x| \leq M$

Очевидно, ограниченное множество является ограниченным и сверху и снизу.
Постоянная M называется верхней (нижней) границей множества A.
Ясно, что , если M верхняя граница, то $M + C,\ \ C > 0$ тоже верхняя граница, так что верхних и нижних границ бесконечно много, а если M нижняя граница, то $M - C,\ \ C > 0$ тоже нижняя граница.

Число b называется **точной верхней** границей множества A, если
1) b является верхней границей множества A;
2) в любой окрестности точки b имеются элементы множества A.

Число b называется **точной нижней** границей множества A, если
1) b является нижней границей множества A;
2) в любой окрестности точки b имеются элементы множества A.

Обозначения $\sup A$, $\inf A$. Полные названия – supremum и infimum.
Замечание. $\sup A$, $\inf A$ сами могут быть элементами множества А. В этом случае они являются наибольшим (наименьшим) элементом множества А.
Примеры:
$A = [0; 1)$, $supA = 1$, но $1 \bar{\epsilon} A$.
$A = [0; 1]$, $supA = 1$, $1 \epsilon A$.

Теорема. О существовании точной границы
Ограниченное сверху множество имеет supremum.
Ограниченное снизу множество имеет infimum.
(без доказательства)

Лемма о вложенных отрезках

$I_n = [a_n; b_n]$.

Пусть $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$. Тогда $\exists c \in$ всем отрезкам. $c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} I_n$

Док-во. Пусть $A = \{a_n, n = 1, 2, \ldots\}$, $B = \{b_n, n = 1, 2, \ldots\}$, причем A ограничено сверху, а B – снизу. По теореме существуют
$\alpha = \sup A$, $\beta = \inf B$. Докажем, что $\alpha \leq \beta$. Пусть не так, т.е. $\alpha > \beta$. Рассмотрим две непересекающиеся окрестности α, β. Пусть a_m принадлежит окрестности числа α , а b_n – окрестности числа β. Тогда получилось бы $a_m > b_n$. Противоречие! Итак, $\alpha \leq \beta$. Отсюда
$a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$.
Замечание. Возможен случай $\alpha = \beta$. Тогда $c = \alpha = \beta$ – единственная точка.

Вопросы для самоконтроля
1) Если отрезки заменить интервалами, то лемма неверна. Рассмотрите, например, $I_n = (0,\ \ 1/n)$. Докажите, что эти вложенные отрезки не имеют общей точки.
2) Даны множества $A = [0;\ \pi/2]$, $B = [0; 1]$. Отображение $f\colon A \to B$ дается формулой $y = \sin x$, $x \epsilon A$, $y \epsilon B$. Является ли оно взаимно однозначным? Чему равен прообраз элемента $y = 0{,}5$?

3) Тот же вопрос, если $A = [0;\ \pi]$, $B = [0; 1]$.
4) Пусть $A = [0;\ \pi/2)$, B — образ множества A при отображении $y = \sin x$. Найдите числа $\alpha = infB$, $\beta = supB$. Верно ли, что $\alpha \epsilon B$, $\beta \epsilon B$?
5) Верно ли, что между любыми двумя рациональными числами найдется бесконечно много рациональных чисел?
6) Пусть α и β рациональные числа. Может ли отрезок $[\alpha;\ \beta]$ состоять только из рациональных чисел?
7) Можно ли подобрать такие натуральные числа m, n , что $\left|\sqrt{2} - m/n\right| < \varepsilon$, где $\varepsilon = 10^{-3}$?
Тот же вопрос при $\varepsilon = 10^{-10}$.
8) Даны множеств $A = [2; 5]$, $B = [0; 1]$. Установите 1-1 соответствие между множествами A и B.
9) A — квадрат со стороной 1, B — отрезок длины 1. Установите 1-1 соответствие между множествами A и B. (это более сложная задача)
10) Докажите, что множество не может иметь более одного супремума и инфимума.