Производная сложной функции

Даны дифференцируемые функции $f(u)$, $u(x)$. Пусть область значений функции u принадлежит области определения функции f . Рассмотрим суперпозицию этих функций

$$g(x) = f(u(x)) \qquad (2)$$

Такую функцию называют также **сложной**.

Докажем формулу

$$\frac{dg}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} \qquad (3)$$

Иначе формулу (3) можно записать так

$$g'_x = f'_u \cdot u'_x \qquad (3')$$

Доказательство.

а) Предположим сначала, что $\Delta u(x) \neq 0$ при $\Delta x \neq 0$. Тогда

$$\Delta g(x) = f\big(u(x + \Delta x)\big) - f\big(u(x)\big) = f\big(u(x) + \Delta u(x)\big) - f\big(u(x)\big),$$

делим на Δx

$$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{f\big(u(x) + \Delta u(x)\big) - f(u(x))}{\Delta u(x)} \cdot \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} \qquad (4)$$

Переходя к пределу в (4) при $\Delta x \to 0$, получим (3).

б) Если же $\Delta u(x) = 0$ для некоторых значений Δx , стремящихся к 0, тогда для этих же значений Δx будет $\Delta g(x) = 0$, откуда следует $u'(x) = 0$, $g'(x) = 0$. Формула (3) доказана и в этом случае.

Примеры.

1. $g(x) = \sin(x^2)$. Обозначим $u = x^2$, $f(u) = \sin u$.
   По формуле (3) $(\sin(x^2))' = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2) \cdot 2x$
2. $g(x) = \sin^2(x)$. Здесь $u = \sin x$, $f(u) = u^2$
   По формуле (3) $(\sin^2(x))' = 2\sin x \cdot \cos x$.
3. $g(x) = \ln(3x - 2)$. Здесь $u = 3x - 2$, $f(u) = \ln u$
   $(\ln(3x - 2))' = \dfrac{1}{u} \cdot 3 = \dfrac{3}{3x - 2}$

Производная обратной функции

Пусть $y = f(x)$, $x = g(y)$ – взаимно обратные дифференцируемые функции. Обозначим $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, где $\Delta x \neq 0$. Тогда $\Delta x = g(y + \Delta y) - g(y)$. Заметим, что $\Delta y \neq 0$, так как иначе было бы $\Delta x = 0$. Имеем

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \Leftrightarrow \frac{\Delta g(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \qquad (5)$$

Заметим, что каждая из дробей в (5) стремится к $f'(x)$ и $g'(y)$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в (5), получаем

$$f'(x) \cdot g'(y) = 1. \qquad (6)$$

Примеры.

1. $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1 - x^2}$.
   Обозначим $y = \arcsin x$. Тогда $x = \sin y$.

По формуле (6)

$(\arcsin x)' = 1/(\sin y)' = 1/\cos y = 1/\sqrt{1-\sin^2 y} = 1/\sqrt{1-x^2}$

2. $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1+x^2)$.

Обозначим $y = \operatorname{arctg} x$. Тогда $x = \operatorname{tg} y$.

По формуле (6)

$(\operatorname{arctg} x)' = 1/(\operatorname{tg} y)' = 1/\cos^{-2} y = \cos^2 y = 1/(1+\operatorname{tg}^2 y) = 1/(1+x^2)$

Производная функции, заданной параметрически

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta \qquad (7)$$

Предположим, что функция $u(t)$ имеет обратную $t = w(x)$, $a \le x \le b$. Подставим $w(x)$ во второе уравнение системы (7). Получим $y = v(w(x))$. Тем самым мы определили y как функцию от x, исключив параметр t.

Такой способ задания функции называется **параметрическим** .

Пример.

$$\begin{cases} x = t^7 + t \\ y = e^t + t \end{cases}, \qquad -\infty < t < +\infty$$

Очевидно, $x(t) = t^7 + t$ монотонно возрастающая функция (самостоятельно). Поэтому система задает y как функцию от x, однако выписать в явном виде эту функцию невозможно, так как уравнение $x = t^7 + t$ не решается в явном виде относительно t . Тем не менее такую функцию можно исследовать, например, дифференцировать, не переходя к явному заданию.

Вернемся к системе (7). Выберем любую точку t, в которой $u'(t) \neq 0$.

Заметим, что, если $\Delta t \neq 0$, но при этом достаточно мало, то $\Delta u(t) \neq 0$. Действительно, если бы $\Delta u(t) = 0$ при каких-то значениях Δt, стремящихся к нулю, отсюда бы следовало $u'(t) = 0$, а это противоречит условию. Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta v(t)}{\Delta u(t)} = \frac{\Delta v(t)/\Delta t}{\Delta u(t)/\Delta t}$$

Переходим к пределу при $\Delta t \to 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v'_t}{u'_t} \qquad (8)$$

Применим формулу (8) к функции $y(x)$ из примера.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^t + t)'}{(t^7 + t)'} = \frac{e^t + 1}{7t^6 + 1}$$

Пусть, например, $t = 0$. Тогда $x = 0, y = 1$, $y'(0) = (e^0 + 1)/(0 + 1) = 2$.

Значит, угловой коэффициент касательной к графику в точке (0,1) равен 2, а угол φ наклона касательной равен $\operatorname{arctg}(2) \cong 63,4^{\circ}$.

Пример.

1. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = \ln(t^2 + 1) \end{cases}, -2 < t < +2$$

а) задает ли эта система функцию $y(x)$?

б) какова область определения этой функции?

в) существует ли $y'(x)$?

г) имеет ли график функции $y(x)$ касательную в точке $(0{,}0)$?

д) постройте примерный график функции $y(x)$ при $-2 < t < +2$.

2. Те же вопросы для системы

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = \ln(0{,}2t + 1) \end{cases}, -2 < t < +2$$