Exercice 1: (6 points)

1. Développer et réduire l'expression $(2x+2)(x+1)+(x-3)^2-4x-35$
$= 2x^2+2x+2x+2+x^2-6x+9-4x-35 = 3x^2-6x-24$ (1 pt)
2. Calculer le discriminant du trinôme $g(x) = 3x^2-6x-24$.
$\Delta = b^2-4ac = (-6)^2-4(3)(-24) = 36+36\times 8 = 36 * 9 = 18^2$ (1 pt)
3. Combien le trinôme $g(x)$ admet-il de racines ? Calculer toutes ses racines.
Comme $\Delta > 0$, $g(x)$ admet deux racines. (1 pt)
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6)-18}{2\times 3} = \dfrac{-12}{6} = -2$ (1 pt) et $x_2 = \dfrac{-(-6)+18}{2\times 3} = 4$ (1 pt)
4. Donner si possible la forme factorisée de $g(x)$.
$g(x) = 3(x-4)(x+2)$ (1 pt)

Exercice 2: (4.5 points)

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\dfrac{9}{2}x^2-5x+\dfrac{2}{3} = 0$
Les solutions de cette équation sont les racines du trinôme $\dfrac{9}{2}x^2-5x+\dfrac{2}{3}$ dont le discriminant est
$\Delta = b^2-4ac = (-5)^2-4\times\dfrac{9}{2}\times\dfrac{2}{3} = 25-12 = 13$
$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-\sqrt{13}}{2(\frac{9}{2})} = \dfrac{5-\sqrt{13}}{9}$
$x_2 = \dfrac{5+\sqrt{13}}{9}$
d'où $S = \left\{\dfrac{5-\sqrt{13}}{9};\dfrac{5+\sqrt{13}}{9}\right\}$ (1 pt)
2. $(x+1)(x+3) = (4x+4)x$
$$\begin{aligned} & (x+1)(x+3) = (4x+4)x \\ \iff & \\ & (x+1)(x+3)-4(x+1)x = 0 \\ \iff & \\ & (x+1)(x+3-4x) = 0 \\ \iff & \\ & (x+1)(1-x) = 0 \\ \iff & \\ & x+1 = 0 \text{ ou } 1-x = 0 \\ \iff & \\ & x = -1 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$
donc $S = \{-1;1\}$ (1 pt)
3. $13x^2-7x+9 > 7$
$$\begin{aligned} & 13x^2-7x+9 > 7 \\ \iff & \\ & 13x^2-7x+2 > 0 \end{aligned}$$
$13x^2-7x+2 = 0$, $\Delta = b^2-4ac = 49-4(13)(2) < 0$, Il n'y a pas de racine. Ce trinôme est toujours strictement positif (a=13>0)
et $S = \mathbb{R}$ (1 pt)

4. $\dfrac{5-3x}{x-3} > x$.

$$\dfrac{5-3x}{x-3} > x$$

$\iff$

$$\dfrac{5-3x}{x-3} - x > 0$$

$\iff$

$$\dfrac{5-3x-x(x-3)}{x-3} > 0$$

$\iff$

$\dfrac{-x^2+5}{x-3} > 0$ (0.5 pt pour la réduction)

$\iff$

$\dfrac{-(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{x-3} > 0$ (0.5 pt pour le calcul des racines)

Soit $f(x) = \dfrac{-(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})}{x-3}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		3		$+\infty$
$x-3$				$-$			0	$+$	
$x+\sqrt{5}$		$-$	0			$+$			
$-(x-\sqrt{5})$			$+$		0		$-$		
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$-$	

(1 pt)

d'où $S = \left]-\infty;-\sqrt{5}\right[\cup \left]\sqrt{5};3\right[$ (0.5 pt)

Exercice 3: (4 points)

Soient $f_1(x) = (x+3)^2 - 2$ et $f_2(x) = -x^2 + 5x + 7$ deux trinômes.
Soient $\mathcal{P}_1 : y = f_1(x)$ et $\mathcal{P}_2 : y = f_2(x)$ leurs représentations graphiques.

1. Calculer les coordonnées du sommet des paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

$f_1(x)$ est sous forme canonique, on peut lire directement les coordonnées du sommet $S(-3;-2)$ (1 pt)

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-5}{-2} = \dfrac{5}{2}$ et $\beta = f_2(\dfrac{5}{2}) = -(\dfrac{5}{2})^2 + 5(\dfrac{5}{2}) + 7 = -\dfrac{25}{4} + \dfrac{50}{4} + \dfrac{28}{4} = \dfrac{53}{4}$ et $S(\dfrac{5}{2};\dfrac{53}{4})$ (1 pt)

2. Dresser les tableaux de variations de f_1 et f_2.

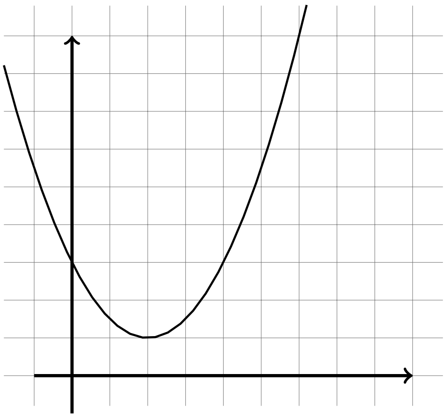
x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

car $a = 1 > 0$ (1 pt)

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{53}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

car $a = -1 < 0$ (1 pt)

Exercice 4: (2.5 points) La parabole suivante est la représentation graphique d'un trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ dont la forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$. On note Δ le discriminant de $f(x)$. Donner sans justification le signe des paramètres $a, c, \alpha, \beta, \Delta$ pour le trinôme dont la représentation graphique est la suivante :



$a > 0$,$c > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\Delta < 0$. (0.5 pt par réponse)

Exercice 5: (3 points)
Déterminer toutes les valeurs du réel m pour lesquelles l'équation $x^2 + 2mx + 1 = 0$ admet une racine double.
$x^2 + 2mx + 1 = 0$ admet une racine double.

$x^2 + 2mx + 2 = 0$

$\iff$

$\Delta = 0$

$\iff$

$4m^2 - 8 = 0$

$\iff$

$m^2 - 2 = 0$

$\iff$

$m^2 - (\sqrt{2})^2 = 0$

$\iff$

$(m - \sqrt{2})(m + \sqrt{2}) = 0$

$\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$ sont les seules valeurs pour m pour lesquelles le trinôme admet une racine double.