Exercice 1: (11 points) Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

1. Déterminer si le point $F(2;-1)$ appartient à la droite $d_1 = \frac{x}{9}+\frac{y}{5}=0$.
   $\frac{2}{9}+\frac{-1}{5}=\frac{10}{45}-\frac{9}{45}=\frac{1}{45}\neq 0$ et $F\notin d_1$. (1 pt)
2. Dans chacun des cas, donner un vecteur directeur :
   — u_2 de la droite $d_2 : 7x-4y+2=0$.
   — u_3 de la droite $d_3 : y=5x-6$.
   — u_4 de la droite $d_4 : x-3=0$.
   $\vec{u_2}(4;7)$ est un vecteur directeur directeur de d_2. (1 pt)
   $\vec{u_3}(1;5)$ est un vecteur directeur de d_3. (1pt)
   $\vec{u_4}(0;1)$ est un vecteur directeur de d_4. (1pt)
3. Trouver une équation cartésienne pour la droite d_5 qui passe par le point $C(3;8)$ et qui a pour vecteur directeur $\vec{u}(2;3)$.
   d_5 possède une équation de la forme $d_1 : 3x-2y+c=0$.
   $C\in d_1 \Leftrightarrow 3\times 3-2\times 8+c=0 \Leftrightarrow c=7$
   d_5 admet comme équation cartésienne $d_5 : 3x-2y+7=0$. (1 pt)
4. Donner l'équation réduite de la droite d_5.
   $3x-2y+7=0 \Leftrightarrow 3x+7=2y \Leftrightarrow y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$ d_5 admet comme équation réduite $d_5 : y=\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}$ (1 pt)
5. Trouver l'équation réduite de la droite d_6 dirigée par le vecteur $\vec{v}(0;5)$ passant par le point $D(-2;4)$.
   d_6 est parallèle à l'axe des ordonnées, son équation réduite est de la forme $d_6 : x=k$ et comme $D(-2;4)\in d_6$, $d_6 : x=-2$. (1 pt)
6. Trouver une équation cartésienne pour la droite (AB) avec $A(4;7)$ et $B(2;4)$.
   $\vec{AB}(2-4;4-7)=(-2;-3)$ est un vecteur directeur de (AB), $\vec{u}(2;3)$ aussi. La droite (AB) possède une équation de la forme $3x-2y+c=0$. Or $A(4;7)$ appartient à (AB) d'où $3\times 4-2\times 7+c=0$ et $c=2$.
   En définitive, $(AB) : 3x-2y+2=0$. (1pt)
7. Donner l'ordonnée à l'origine de la droite $d_7 : 5x+6y-24=0$.
   Le point de coordonnées $(0;4)$ est sur d_8 car $5\times 0+6\times 4-24=0$ et 4 est donc l'ordonnée à l'origine de d_8. (1 pt)
8. Trouver toutes les valeurs de m pour lesquelles $d_8 : mx+4y+3=0$ est parallèle à la droite d_9 : $3x-5y+1=0$
   d_8 est parallèle à d_9
   $\Leftrightarrow$
   les vecteurs directeurs $\vec{u}(-4;m)$ et $\vec{v}(5;3)$ sont colinéaires. (1 pt)
   $\Leftrightarrow$
   $-4\times 3-5\times m=-12-5m=0$ soit $m=-\frac{12}{5}$. $-\frac{12}{5}$ est la seule valeur de m pour laquelle les droites d_8 et d_9 sont parallèles. (1 pt)

Exercice 2: (1 point)

Résoudre l'inéquation $\frac{3}{2x+1}<4x+1$.

$\frac{3}{2x+1}<4x+1$
$\Leftrightarrow$
$\frac{3}{2x+1}-(4x+1)<0$
$\Leftrightarrow$
$\frac{3-(4x+1)(2x+1)}{2x+1}<0$
$\Leftrightarrow$
$\frac{-8x^2-6x+2}{2x+1}<0$ (0.5 pt)

$\Delta = 36 + 64 = 10^2$, $x_1 = \dfrac{-(-6)-10}{2\times(-8)} = \dfrac{1}{4}$ et $x_2 = \dfrac{-(-6)+10}{2\times(-6)} = -1$.

On pose $f(x) = -8x^2 - 6x + 2$ et $g(x) = \dfrac{-8x^2-6x+2}{2x+1}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$2x+1$			$-$		0		$+$		
$g(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

d'où $S = \left]-1;-\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{4};+\infty\right[$ (0.5 pt)

<u>Exercice 3:</u> (8 points)

Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et soient M et N les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}, \quad \text{et } \overrightarrow{CN} = \frac{5}{4}\overrightarrow{CB}$$

1. Pourquoi les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ permettent de réaliser un repère $(A;\vec{AB},\vec{AD})$?
   $ABCD$ étant un parallélogramme non aplati, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ ne sont pas colinéaires et peuvent ainsi former un repère $(A;\vec{AB},\vec{AD})$. (1pt)
2. Calculer les coordonnées des points D, M, C et N dans le repère $(A,\vec{AB},\vec{AD})$.
   Comme $\vec{AD} = 0\times\vec{AB} + 1\times\vec{AD}$, $D(0;1)$. (1pt)
   Comme $\vec{AM} = \frac{4}{5}\vec{AB}$, $M(\frac{4}{5};0)$. (1pt)
   Comme $ABCD$ est un parallélogramme $\vec{AC} = 1\times\vec{AB} + 1\vec{AD}$ et $C(1;1)$. (1pt)
   Or $\vec{CN}(x_N-1, y_N-1) = \frac{5}{4}\vec{CB}(\frac{5}{4}(1-1);\frac{5}{4}(0-1)) = (0;-\frac{5}{4})$ d'où $N(1;-\frac{1}{4})$. (1pt)
3. Montrer que les points D, M et N sont alignés.
   $\vec{DM}(\frac{4}{5}-0;0-1) = (\frac{4}{5};-1)$ et $\vec{DN}(1-0;-\frac{1}{4}-1) = (1;-\frac{5}{4})$
   $\vec{DN} = \frac{5}{4}\vec{DM}$ donc $\vec{DN}$ est colinéaire à $\vec{DM}$ et les points D,N,M sont alignés. (1pt)
4. On considère un nombre réel a non nul, et P et Q définis par
   $$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB}, \quad \text{et } \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{a}\overrightarrow{CB}$$
   Les points D, P et Q sont-ils toujours alignés ?
   $P(a;0)$ et $\vec{CQ}(x_Q-1,y_Q-1) = \frac{1}{a}\vec{CB} = (\frac{1}{a}(1-1);\frac{1}{a}(0-1) = (0;-\frac{1}{a})$ d'où $Q(1;1-\frac{1}{a})$; (1pt)
   $\vec{DP}(a-0;0-1) = (a;-1)$ et $\vec{DQ}(1-0;1-\frac{1}{a}-1) = (1;-\frac{1}{a})$.
   Ainsi $\vec{DP}$ et $\vec{DQ}$ sont colinéaires. Les points D,P,Q sont toujours alignés. (1pt)