Exercice 1: (7 points)

1. Démontrer que la suite (x_n) défine pour tout entier $n > 0$ par $x_n = \dfrac{1}{n}$ n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. Calculer le 7ème terme de la suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $\sqrt{5}$.
3. Démontrer que la suite(w_n) définie pour tout entier n par $w_n = 9(-11)^n$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
4. Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 11$ et $u_7 = 18$.
Calculer la forme explicite de la suite (u_n) ainsi que u_{17}.

Correction

1. $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{1}{2} = x_1 - \dfrac{1}{2} = x_1 \times \dfrac{1}{2}$. $x_3 = \dfrac{1}{3} \neq 0 = x_2 - \dfrac{1}{2}$ et $x_3 \neq \dfrac{1}{4} = x_2 \times \dfrac{1}{2}$. Ainsi, (u_n) n'est ni arithmétique ni géométrique. (2 pts)
2. $v_6 = v_0(\sqrt{5})^{(6-0)} = 2(5)^3 = 250$. (1 pt)
3. $w_{n+1} = 9(-11)^{n+1} = 9(-11)^n \times (-11) = w_n \times (-11)$. (1 pt) La suite est bien géométrique de raison -11 et de premier terme $w_0 = 9$. (1 pt)
4. $u_7 - u_2 = 18 - 11 = 7 = (7-2)r = 5r$ d'où $r = \dfrac{7}{5}$, $u_n = u_2 + (n-2)r = 11 + (n-2)\dfrac{7}{5}$ (1 pt)
$u_{17} = 11 + (17-2)\dfrac{7}{5} = 11 + \dfrac{15 \times 7}{5} = 11 + 21 = 32$ (1 pt)

Exercice 2: (5 points)

1. Calculer la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x) = -\dfrac{4}{3}x^3 - 8x^2 - 16x + 42$
2. Décomposer $f'(x)$ en un produit de facteurs de degré 1 et étudier son signe.
3. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel par $u_n = -\dfrac{4}{3}n^3 - 8n^2 - 16n + 42$ est strictement décroissante.

Correction

1. $f'(x) = -4x^2 - 16x - 16$ (1 pt)
2. $f'(x) = -4(x+2)(x+2)$, en effet, $\Delta = 0, x_0 = \dfrac{-(-16)}{-8} = -2$. (2 pts)
$f'(x) < 0$ sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$, $f'(x) = 0$ en -2.(1 pt)
3. La fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc la suite $(u_n = f(n))$ est strictement décroissante. (1 pt)

Exercice 3: (3 points)
Soit (u_n) la suite définie par récurrence par $u_0 = 1$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = 2u_n + 3$. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. Démontrer que le suite (u_n) est strictement croissante.
2. Trouver une forme explicite pour la suite (u_n). On pourra introduire la suite auxiliaire $v_n = u_n + 3$.

Correction

1. $u_{n+1} - u_n = u_n + 3 > 0$ pour tout entier naturel. (u_n) est donc strictement croissante. (1 pt)
2. $v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = 2u_n + 3 + 3 = 2u_n + 6 = 2(u_n + 3) = 2v_n$. La suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = u_0 + 3 = 4$. D'où $v_n = 4 \times 2^n$ et $u_n = 4 \times 2^n - 3$. (2 pts)

Exercice 4: (5 points)

Réaliser un algorithme permettant de calculer et afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $3^n > 129140163$.
Correction
n prend la valeur 0
tant que $3^n \leq 129140163$ faire
n prend la valeur n+1
fin tant que
Afficher n