Probabilités.

1 Définition.

Définition 1
Une **probabilité** sur un univers fini $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ est la donnée d'une fonction

$$P : \Omega \to [0;1] \text{ telle que } \sum_{i=1}^{n} P(\omega_i) = 1$$

On appelle **éventualité** ou **issue** un élément ω_i de Ω.
On appelle **événement** une partie A de Ω, i.e un ensemble d'issues.
On peut étendre P aux événements :

$$\begin{array}{cccl} P: & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) \end{array}$$

Modéliser le caractère aléatoire d'une expérience consiste à définir une fonction de probabilité sur l'ensemble des issues de cette expérience.

Exemple 2
On réalise un lancer d'un dé équilibré à 6 faces.
Quelle est la probabilités d'obtenir un résultat pair ?
$\Omega = \{1, .., 6\}$, $A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ est pair}\} = \{\omega \text{ est pair}\} = \{2; 4; 6\}$.
Le dé étant équilibré, il y a équiprobabilité et $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = p$.
Or $P(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{6} P(i) = 6 \times p$,
donc $p = \frac{1}{6}$.
Comme $P(A) = P(2) + P(4) + P(6)$,
on a $P(A) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
De façon équivalente, comme il y a équiprobabilité, on peut écrire :
$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ où Card signifie le nombre d'éléments.

2 Suites d'experiences aléatoires.

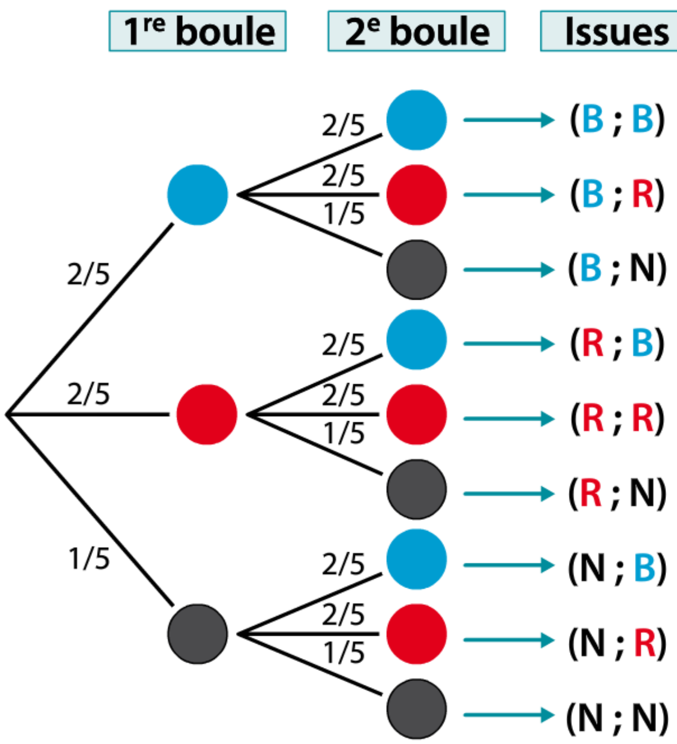
Théorème 3
Lorsqu'une expérience aléatoire (ou épreuve) est constituée d'une suite de n expériences aléatoires, on peut la représenter par un arbre pondéré. Une issue est la liste ordonnée des résultats que l'on peut représenter par un chemin de l'arbre.

- Loi des chemins :
  La probabilité d'une issue est le produit des probabilités inscrites sur chacune des arêtes constituant le chemin associé à cette issue.
- Loi des noeuds :
  La somme des probabilités inscrites sur les arêtes issues d'un même noeud vaut 1.

Définition 4
On dit qu'une expérience aléatoire est constituée d'une suite d'épreuves **indépendantes, identiquement distribuées** si chaque épreuve ne dépend pas des résultats des épreuves précédentes, c'est à dire si les issues possibles sont les mêmes et avec la même répartition de probabilités.

Exemple 5 (Page 319)

- Tirage avec remise (épreuves indépendantes, identiquement distribuées) dans une urne contenant 2 boules bleues, 2 rouges et une noire.
- Représentation de l'expérience par un arbre pondéré.



3 Variables aléatoires.

3.1 Définition.

Définition 6
Etant donnée une expérience aléatoire dont l'univers (l'ensemble des issues possibles) est Ω. Définir une **variable aléatoire** (réélle) X sur Ω consiste à associer à chaque issue un nombre réél. Autrement dit, X est une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Exemple 7
On définit, sur l'expérience aléatoire de l'exemple précédent, la variable (aléatoire) qui associe à un tirage le nombre de boule rouge obtenue.

Il n'y a que 3 valeurs possibles pour cette variable aléatoire : $0, 1, 2$.

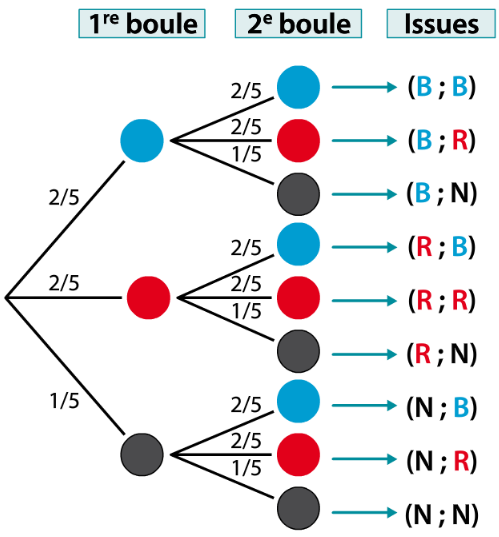
3.2 Loi de probabilité.

Définition 8
Soit Ω un univers muni d'une fonction de probabilité $P : \Omega \to [0;1]$.

Soit X une variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $x_i, i = 1,..,k$ ses différentes valeurs.

Établir la **loi de probabilité** de X consiste à associer à chaque valeur x_i la probabilité de l'événement $X = x_i$.

Exemple 9
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges tirées, de l'exemple précédent.



x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{25}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$

$P(X = 0)$

$= P(\{(B;B);(B;N);(N;B);(N;N)\})$

$= P(B;B) + P(B;N) + P(N;B) + P(N;N)$

$= (\frac{2}{5})^2 + \frac{2}{5}\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\frac{2}{5} + (\frac{1}{5})^2 = \frac{9}{25}$

$P(X = 1)$

$= P(\{(B;R);(R;B);(R;N);(N;R)\})$

$= P(B;R) + P(R;B) + P(R;N) + P(N;R)$

$= (\frac{2}{5})^2 + (\frac{2}{5})^2 + \frac{2}{5}\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\frac{2}{5} = \frac{12}{25}$

$P(X = 2)$

$= P(\{(R;R)\})$

$= P(R;R)$

$= (\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$

3.3 Paramètres d'une variable aléatoire.

Une loi de probabilité d'une variable aléatoire X :

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_k

est l'estimation des fréquences obtenues en faisant des statistiques sur un grand nombre de réalisations de l'expérience aléatoire :

x_i	x_1	x_2	...	x_k
f_i	f_1	f_2	...	f_k

De même que nous avons défini les paramètres moyenne, variance et écart-type d'une série statistique, nous définissons espérance $E(X)$, variance $var(X)$ et écart-type σ_X d'une variable aléatoire X.

Définition 10 (Paramètres d'une variable aléatoire)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i = p_1 x_1 + ... + p_k x_k$$

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{k} p_i (x_i - E(X))^2 = E(X^2) - E(X)^2 = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - (\sum_{i=1}^{k} p_i x_i)^2$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$

Exemple 11
On reprend l'exemple du tirage de boules de l'exemple précédent :

$E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$

$= \dfrac{12}{25} + 2 \times \dfrac{4}{25} = \dfrac{20}{25} = \dfrac{4}{5}$

$E(X^2) = 0^2 \times P(X = 0) + 1^2 \times P(X = 1) + 2^2 \times P(X = 2)$

$= \dfrac{12}{25} + 4 \times \dfrac{4}{25} = \dfrac{28}{25}$

$Var(X) = \dfrac{28}{25} - (\dfrac{20}{25})^2 = \dfrac{28 \times 25 - 20 \times 20}{25^2} = \dfrac{300}{25^2} = \dfrac{3 \times 4}{25} = \dfrac{12}{25}$

$\sigma_X = \dfrac{2\sqrt{3}}{5} \simeq 0.69$

Théorème 12
Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On note $aX + b$ la variable aléatoire telle que $(aX + b)(\omega) = aX(\omega) + b$.

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \;\; Var(aX + b) = a^2 var(X)$$

Théorème 13 (Loi des grands nombres)
Pour un grand nombre d'expériences aléatoires réalisées la moyenne (resp. l'écart-type) des valeurs observées pour X est proche de l'espérance (resp. l'écart-type) de X.

4 Schémas de Bernoulli.

4.1 Épreuve de Bernoulli.

Définition 14 (Schéma de Bernoulli d'ordre 1)
Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet exactement deux issues : Succès et echec.

En associant à cette expérience aléatoire la variable X qui vaut 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on obtient pour X la loi de probabilité suivante :

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

On dit que X suit une **loi de bernoulli** de paramètre p et on note $X \hookrightarrow B(p)$.

Exemple 15
On lance un dé équilibré à 6 faces. On définit le succès par l'événement «Obtenir 6». La variable aléatoire associée à cette épreuve de Bernoulli suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{6}$.

$X \hookrightarrow B(\frac{1}{6})$

k	0	1
$P(X=k)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Proposition 16
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de bernoulli de paramètre p.

$$E(X) = p$$

$$Var(X) = p(1-p)$$

Exemple 17
Dans la situation de l'exemple précédent :

$E(X) = p = \frac{1}{6}$

$Var(X) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$.

4.2 Schéma de Bernouilli d'ordre n

Définition 18 (Schéma de Bernoulli d'ordre n)
On appelle **schéma de Bernoulli** d'ordre n et de paramètre p, l'expérience aléatoire constituée par une suite de n épreuves de Bernoulli de pramètre p, indépendantes et identiquement distribuées.

Le résultat de l'expérience est la liste des n résultats représentée par un mot

$$R_1R_2...R_n$$

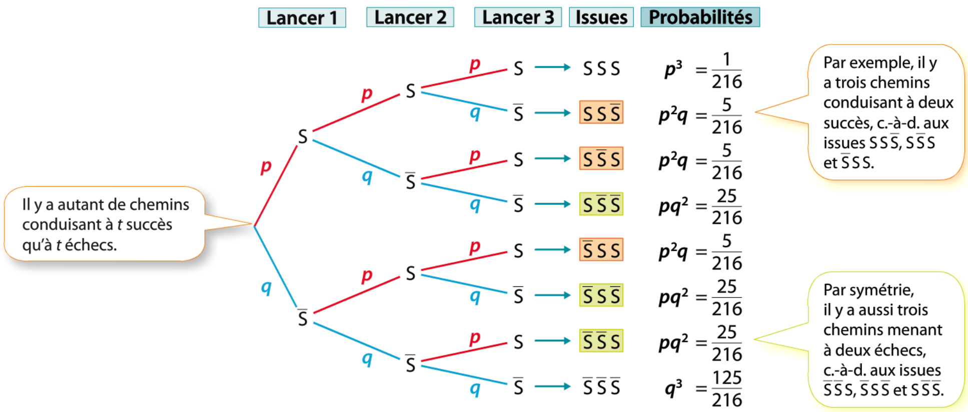
où $R_i = S$ ou $\overline{S}$.

On peut représenter l'expérience par un arbre pondéré et la probabilité d'une issue est :

$$p^k(1-p)^{n-k}$$

où k est le nombre de succès.

Exemple 19
On réalise 3 lancers successifs d'un dé équilibré, en considérant à chaque lancé «obtenir 6» comme le succès. La suite de ces trois épreuves de Bernoulli peut être représentée par l'arbre pondéré suivant :



4.3 Loi binomiale.

Définition 20 (Variable aléatoire associée)
À un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p, on associe la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès obtenu lors de cette suite d'épreuves de bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.

Les valeurs possibles pour Y sont $0, 1, ..., n$.

On représente l'expérience par un arbre pondéré. L'évènement $\{Y = k\}$ est constitué de tous les chemins de l'arbre contenant k succès exactement. D'après la loi des chemins, la probabilité d'un tel chemin est $p^k(1-p)^{n-k}$. On appelle C_n^k le nombre de tels chemins.

Théorème 21
On dit que la variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès lors d'une suite de n épreuves de Bernoulli de paramètre p suit une **loi binomiale** de paramètres n et p. On note $Y \hookrightarrow B(n,p)$.On a

$$P(Y = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \;\; E(Y) = np, \;\; Var(Y) = np(1-p)$$

4.4 Coefficients binomiaux.

Définition 22
On appelle coefficients binomiaux les entiers C_n^k du théorème 21.

C_n^k est le nombre de chemins empruntant exactement k succès (et donc $n-k$ échecs), dans l'arbre binaire associé à un shéma de bernoulli d'ordre n.

C_n^k est aussi le nombre de façon d'écrire un mot de n lettres composé de k fois la lettre S et $n-k$ fois la lettre E.

C_n^k est aussi le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.

Proposition 23

1. $C_n^0 = 1$, pour tout entier naturel n.
2. $C_n^k = C_n^{n-k}$, pour tout entier $n \geq 0$ et tout entier $0 \leq k \leq n$.
3. Formule du **triangle de Pascal** :
$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$
pour tout entier $n \geq 1$ et $1 \leq k \leq n$.

Démonstration 24

1. Il n'y a qu'un mot comportant que des échecs.
2. D'après la symétrie de l'arbre.
3. On distingue deux cas pour un chemin comportant exactement k succès : Soit il commence par un succès et il termine avec exactement $k-1$ succès durant les $n-1$ expériences restantes. Soit il commence par un échec et il termine avec exactement k succès parmi les $n-1$ expériences restantes.