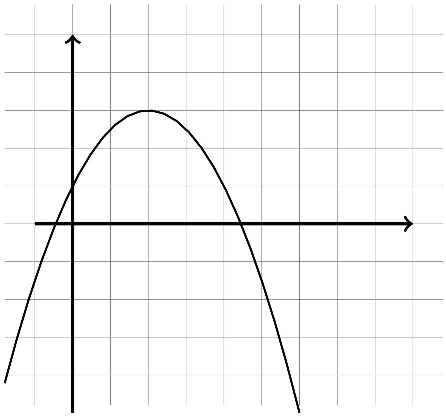
Exercice 1: (2.5 points)
La parabole suivante est la représentation graphique d'un trinôme $f(x) = ax^2+bx+c$ dont la forme canonique est $f(x) = a(x-\alpha)^2+\beta$. On note Δ le discriminant de $f(x)$.
Donner sans justification le signe des paramètres $a, c, \alpha, \beta, \Delta$ pour le trinôme dont la représentation graphique est la suivante :



$a < 0$,$c > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\Delta > 0$. (0.5 pt par réponse)

Exercice 2: (6 points)

1. Développer et réduire l'expression $(3x+2)(x+1)+(x-5)^2+x-51$
   $= 3x^2+3x+2x+2+x^2-10x+25+x-51 = 4x^2-4x-24$ (1 pt)
2. Calculer le discriminant du trinôme $g(x) = 4x^2-4x-24$.
   $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4(4)(-24) = 16(1+24) = 4^2 5^2 = 20^2$ (1 pt)
3. Combien le trinôme $g(x)$ admet-il de racines ? Calculer toutes ses racines.
   Comme $\Delta > 0$, $g(x)$ admet deux racines. (1 pt)
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-4)-20}{2\times 4} = \dfrac{-16}{8} = -2$ (1 pt) et $x_2 = \dfrac{-(-4)+20}{2\times 3} = 3$ (1 pt)
4. Donner si possible la forme factorisée de $g(x)$.
   $g(x) = 4(x-3)(x+2) = 4x^2-4x-24$ (1 pt)

Exercice 3: (3 points)
Déterminer toutes les valeurs du réel m pour lesquelles l'équation $mx^2+2x+m = 0$ n'admet pas de racine.
$mx^2+2x+m = 0$ n'admet une racine double.

$mx^2+2x+m = 0$

$\Longleftrightarrow$

$\Delta < 0$

$\Longleftrightarrow$

$4-4m^2 < 0$

$\Longleftrightarrow$

$1-m^2 < 0$

$\Longleftrightarrow$

$(1-m)(1+m) < 0$

Le trinôme $mx^2+2x+m = 0$ n'admet pas de racine équivaut à $m \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$.

Exercice 4: (4.5 points)
Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\dfrac{x^2}{12} - 4x + 3 = 0$

   Les solutions de cette équation sont les racines du trinôme $\dfrac{x^2}{12} - 4x + 3$ dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times \dfrac{1}{12} \times 3 = 16 - 1 = 15$

   $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{4 - \sqrt{15}}{2(\frac{1}{12})} = 6(4 - \sqrt{15})$

   $x_2 = 6(4 + \sqrt{15})$

   d'où $S = \left\{6(4 - \sqrt{15}); 6(4 + \sqrt{15})\right\}$ (1 pt)

2. $7x^2 - 10x + 9 > 7$

   $$7x^2 - 10x + 9 > 7$$
   $$\iff$$
   $$7x^2 - 10x + 2 > 0$$

   $7x^2 - 10x + 2 = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4(7)(2) = 44$, Il y a 2 racines.

3. $(x+1)(-x+4) = (5x+5)x$

   $$(x+1)(-x+4) = (5x+5)x$$
   $$\iff$$
   $$(x+1)(-x+4) - 5(x+1)x = 0$$
   $$\iff$$
   $$(x+1)(-x+4-5x) = 0$$
   $$\iff$$
   $$(x+1)(-6x+4) = 0$$
   $$\iff$$
   $$x = -1 \text{ ou } x = \frac{2}{3}$$

   donc $S = \{-1; \dfrac{2}{3}\}$ (1 pt)

4. $\dfrac{2-5x}{x-5} > x.$

   $$\frac{2-5x}{x-5} > x$$
   $$\iff$$
   $$\frac{2-5x}{x-5} - x > 0$$
   $$\iff$$
   $$\frac{2-5x-x(x-5)}{x-5} > 0$$
   $$\iff$$
   $$\frac{-x^2+2}{x-5} > 0 \text{ (0.5 pt pour la réduction)}$$
   $$\iff$$
   $$\frac{-(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x-5} > 0 \text{ (0.5 pt pour le calcul des racines)}$$

   Soit $f(x) = \dfrac{-(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{x-5}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$-(x-\sqrt{2})$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

(1 pt)

d'où $S = \left]-\infty;-\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{2};5\right[$ (0.5 pt)

Exercice 5: (4 points)

Soient $f_1(x) = (x+5)^2 + 2$ et $f_2(x) = -x^2 + 7x + 5$ deux trinômes.
Soient $\mathcal{P}_1 : y = f_1(x)$ et $\mathcal{P}_2 : y = f_2(x)$ leurs représentations graphiques.

1. Calculer les coordonnées du sommet des paraboles $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.
   $f_1(x)$ est sous forme canonique, on peut lire directement les coordonnées du sommet $S(-5;2)$ (1 pt)
   $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-7}{-2} = \dfrac{7}{2}$ et $\beta = f_2(\frac{7}{2}) = -(\frac{7}{2})^2 + 7(\frac{7}{2}) + 5 = -\dfrac{49}{4} + \dfrac{98}{4} + \dfrac{20}{4} = \dfrac{69}{4}$ et $S(\frac{7}{2};\frac{69}{4})$ (1 pt)
2. Dresser les tableaux de variations de f_1 et f_2.

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f_1(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

car $a = 1 > 0$ (1 pt)

x	$-\infty$		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$f_2(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{69}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

car $a = -1 < 0$ (1 pt)