Exercice 1: (3 points)

Montrer en utilisant l'expression du taux d'accroissement que la dérivée de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse $a \neq 0$ est $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{1}{h}\frac{a-(a+h)}{a(a+h)} = \frac{1}{h}\frac{-h}{a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$ qui tend vers $\frac{-1}{a^2}$ quand h tend vers 0.

Exercice 2: (5 points)

Soit $f(x) = \frac{2x+2}{x+3}$

1. Donner le plus grand ensemble de réels sur lequel f est définie et dérivable.
   $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$ (1pt)
2. Calculer la dérivée de la fonction $f(x)$.
   $f'(x) = \frac{(2x+2)'(x+3)-(2x+2)(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{2(x+3)-(2x+2)(1)}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x-2}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2}$ (2 pts)
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
   Pour tout réel x différent de -3, $f'(x) > 0$. (1 pt)
4. Réaliser le tableau des variations de $f(x)$.
   f est croissante sur $]-\infty;-3[$. f est aussi croissante sur $]-3;+\infty[$. (1 pt)

Exercice 3: (9 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$$

1. Calculer $f'(x)$.
   $f'(x) = 3x^2 - 12x$ (2 pts)
2. Étudier le signe du trinôme $3x^2 - 12x$.
   $3x^2 - 12x = 3x(x-4)$ $x_1 = 0$,$x_2 = 4$. La suite dans le tableau de la question 3). (2 pts)
3. Dresser le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

(1 pts)

4. Déterminer les extremums locaux de f.
   $f(0) = 2$
   2 est un maximum local atteint pour $x = 0$. (1 pt)
   $f(4) = 64 - 6*16 + 2 = -30$, -30 est un minimum local pour f atteint pour $x = 4$. (1pt)
5. Donner le meilleur encadrement possible pour $f(x)$ lorsque
   a. x appartient à $[1,3]$.
   b. x appartient à $[-3,4]$

   $f(1) = -3$, $f(3) = -25$ et pour $x \in [1,3]$, $-25 \leq f(x) \leq -3$.
   $f(-3) = -79$ et pour $x \in [-3,4]$, $-79 \leq f(x) \leq 2$.

Exercice 4: (3 points)

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.
Soit T la droite d'équation $T : y = \frac{1}{8}x+2$.
T est-elle tangente à la courbe $\mathcal{C}$?
$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, (1 pt) $f'(16)=\frac{1}{2\sqrt{16}}=\frac{1}{8}$, (1 pt) $f(16)=4$
$T_{f,16} : y = \frac{1}{8}(x-16)+4=\frac{1}{8}x+2$
$T=T_{f,16}$ est bien tangente à $\mathcal{C}$. (1 pt)

Exercice 5: (Bonus)

Démontrer le théorème sur les variations d'une fonction affine en utilisant la dérivée.

Exercice 6: (Bonus)

Calculer la dérivée de la fonction définie sur $]-\frac{1}{3},+\infty[$ par $g(x)=\sqrt{3x+1}$.

Exercice 7: (Bonus)

Montrer que pour toute fonction h dérivable sur un intervalle I, la fonction $i(x)=[h(x)]^2$ est aussi définie et dérivable sur I et $i'(x)=2h'(x)\times h(x)$.