Exercice 1: (6 points)

Un sac contient 150 jetons dont 90 sont gris et les autres sont marron.
On tire au hasard, successivement et avec remise 10 jetons de ce sac.

1. Identifier et justifier la loi que suit la variable aléatoire comptant le nombre de jetons gris obtenus.
2. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux jetons gris (à 10^{-4} près).
3. Si on répète un grand nombre de fois cette expérience, combien de jetons gris obtient-on en moyenne ?

Correction

1. Comme on répète 10 fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (succès :«obtenir un jeton gris») de paramètre $p = \frac{90}{150} = \frac{6}{10}$, on a un schéma de Bernoulli d'ordre $n = 10$.
   La variable aléatoire X comptant le nombre de jetons gris obtenus suit la loi binomiale $B(10; 0.6)$.
2. On cherche $P(X \geq 2)$.
   $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - C_{10}^{0} \times (0.6)^0 \times (0.4)^{10} - C_{10}^{1} \times (0.6)^1 \times (0.4)^9 \simeq 0.9983$.
3. $E(X) = 10 \times 0.6 = 6$. Si on réitère un grand nombre de fois cette expérience, on obtient 6 jetons gris en moyenne.

Exercice 2: (5 points)

Algorithme 1

N prend la valeur 0

R prend la valeur ...

Tant que $R \leq$...

N prend la valeur ...

R prend la valeur ...

Fin Tant que

Afficher R

Algorithme 2

S prend la valeur 0

Pour I allant de 1 à 8

S prend la valeur $S + I^2$ $(*)$

Fin Pour

Afficher S

1. L'algorithme incomplet 1 permet de calculer puis afficher la plus petite puissance de 2 dépassant 10000. Recopier-le sur votre feuille en le complétant.
2. Donner les valeurs successives des variables I et S à la fin de l'exécution de l'instruction $(*)$ lors des quatre premières itérations de la boucle de l'algorithme 2.
3. Que permet de calculer puis afficher l'algorithme 2 ?

Correction

1. N prend la valeur 0

   R prend la valeur 1 (0.5 pt)

   Tant que $R \leq 10000$ (0.5 pt)

   N prend la valeur $N + 1$ (0.5 pt)

   R prend la valeur $2 \times R$ (0.5 pt)

   Fin Tant que

   Afficher R

2. $I = 1, S = 1$ $I = 2$ $S = 1 + 4 = 5$; $I = 3$ $S = 5 + 9 = 14$; $I = 4$ $S = 14 + 16 = 30$. (2 pts)
3. L'algorithme permet de calculer la somme des carrés des 8 premiers entiers. (1 pt)

Exercice 3: (4 points)
Soit $f(x) = x^2 + x - 1$

1. Calculer le discriminant et les racines du trinôme $f(x)$.
2. Réaliser le tabeau de signe de $f(x)$.
3. Résoudre l'inéquation $x^2 + 2x + 1 < 2 + x$ (vous pouvez utiliser l'étude précédente).

Correction

1. $\Delta = 1 + 4 = 5$ (0.5 pt), $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (1 pt).
2. $f(x)$ est négatif sur l'intervalle $[x_1 ; x_2]$ positif en dehors (1 pt).
3. $x^2 + 2x + 1 < 2 + x \Leftrightarrow x^2 + x - 1 < 0$ (0.5 pt) , $S =]x_1 ; x_2[$ (1 pt).

Exercice 4: (5 points)
Lors d'une saison footballistique comprenant 38 matchs, deux équipes ont encaissé des buts selon les répartitions suivantes :

Equipe A :

Nombres de buts	0	1	3	4	5
Nombre de matchs	23	7	5	1	2

Equipe B :

Nombres de buts	0	1	3	6
Nombre de matchs	19	12	6	1

Soit $(a_i, n_i)_{1 \leq i \leq 5}$ (resp $(b_j, m_j)_{1 \leq i \leq 4}$) la série statistique associée á l'équipe 1 (resp. 2).

1. Ecrire une formule littérale pour calculer le nombre moyen de buts encaissés par match pour chacune de ces deux équipes (Bonus utiliser un symbole de somme).
2. Donner une valeur exacte (à l'aide d'une fraction) pour ces deux moyennes.
3. Ecrire une formule littérale pour calculer l'écart-type de la série des nombres de buts encaissés par match pour chacune des deux équipes (Bonus utiliser un symbole de somme).
4. Donner une valeur approchées au dixième de but près pour ces deux écart-types.
5. Au vu de ces résultats, quelle équipe possède des performances défensives les plus irrégulières ?

Correction

1. $\overline{a} = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{n_i a_i}{38} = \frac{36}{38} = \frac{18}{19}$. (1 pt) et $\overline{b} = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{m_i b_i}{38} = \frac{36}{38} = \frac{18}{19}$. (1 pt)
2. $\sigma_a = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{n_i (a_i - \overline{a})^2}{38}} \simeq 1.5$ (1 pt) et $\sigma_b = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{m_i (b_i - \overline{b})^2}{38}} \simeq 1.3$. (1 pt)
3. L'équipe B possède les performances défensives les plus régulières sur cette saison.