Exercice 1: (5 points)

Soit $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$

1. Donner le plus grand ensemble de réels sur lequel f est définie et dérivable.
   $]-\infty;-\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2};+\infty[$ (1pt)
2. Calculer la dérivée de la fonction $f(x)$.
   $f'(x) = \dfrac{(x+1)'(2x+3)-(x+1)(2x+3)'}{(2x+3)^2} = \dfrac{(2x+3)-(x+1)(2)}{(2x+3)^2} = \dfrac{2x+3-2x-2}{(2x+3)^2} = \dfrac{1}{(2x+3)^2}$ (2 pts)
3. Étudier le signe de $f'(x)$.
   Pour tout réel x différent de $-\frac{3}{2}$, $f'(x) > 0$. (1 pt)
4. Réaliser le tableau des variations de $f(x)$.
   f est croissante sur $]-\infty;-\frac{3}{2}[$. f est aussi croissante sur $]-\frac{3}{2};+\infty[$. (1 pt)

Exercice 2: (3 points)

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Soit T la droite d'équation $T : y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.
T est-elle tangente à la courbe $\mathcal{C}$?
$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, (1 pt) $f'(9) = \dfrac{1}{2\sqrt{9}} = \dfrac{1}{6}$, (1 pt) $f(9) = 3$
$T_{f,9} : y = \frac{1}{6}(x-9)+3 = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$
$T = T_{f,9}$ est bien tangente à $\mathcal{C}$. (1 pt)

Exercice 3: (9 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 5$$

1. Calculer $f'(x)$.
   $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$ (2 pts)
2. Étudier le signe du trinôme $3x^2 - 9x + 6$.
   $\Delta = 81-4(3)(6) = 81-72 = 9 = 3^2$, $x_1 = \dfrac{9-3}{6} = 1$, $x_2 = \dfrac{9+3}{6} = 2$. La suite dans le tableau de la question 3). (3 pts)
3. Dresser le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

(2 pts)

4. Déterminer les extremums locaux de f.
   $f(1) = 1^3 - \frac{9}{2}1^2 + 6 + 5 = \frac{15}{2}$

$\frac{15}{2}$ est un maximum local. (1 pt)

$f(2) = 2^3 - \frac{9}{2}2^2 + 6(2) + 5{=}7$, 7 est un minimum local pour f. (1pt)

5. Donner le meilleur encadrement possible pour $f(x)$ lorsque

a. x appartient à $[2,3]$.

b. x appartient à $[0,2]$

$f(3) = -25$ et pour $x \in [2,3]$, $7 \leq f(x) \leq \frac{19}{2}$.

$f(-3) = -79$ et pour $x \in [0,2]$, $5 \leq f(x) \leq \frac{15}{2}$.

Exercice 4: (3 points)

Montrer en utilisant l'expression du taux d'accroissement que la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ au point d'abscisse a est $f'(a) = 2a$.

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 - 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = 2a+h$ qui tend vers 2a quand h tend vers 0.

Exercice 5: (Bonus)

Montrer par un calcul de dérivée que le sommet d'une parabole d'équation $\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c$ a pour abscisse $-\frac{b}{2a}$.

Exercice 6: (Bonus)

Calculer la dérivée de la fonction définie sur $]-\frac{1}{3}, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{3x+1}$.

Exercice 7: (Bonus)

Montrer que pour toute fonction h dérivable sur un intervalle I, la fonction $i(x) = [h(x)]^2$ est aussi définie et dérivable sur I et $i'(x) = 2h'(x) \times h(x)$.