Exercice 1: (8 points)

Soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati et soient M et N les points tels que :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \quad \text{et } \overrightarrow{CN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}$$

1. Pourquoi les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ permettent de réaliser un repère $(A;\vec{AB},\vec{AD})$?
   $ABCD$ étant un parallélogramme non aplati, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ ne sont pas colinéaires et peuvent ainsi former un repère $(A;\vec{AB},\vec{AD})$. (1pt)
2. Calculer les coordonnées des points D, M, C et N dans le repère $(A,\vec{AB},\vec{AD})$.
   Comme $\vec{AD} = 0\times\vec{AB} + 1\times\vec{AD}$, $D(0;1)$. (1pt)
   Comme $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB}$, $M(\frac{2}{3};0)$. (1pt)
   Comme $ABCD$ est un parallélogramme $\vec{AC} = 1\times\vec{AB} + 1\vec{AD}$ et $C(1;1)$. (1pt)
   Or $\vec{CN}(x_N-1, y_N-1) = \frac{3}{2}\vec{CB}(\frac{3}{2}(1-1);\frac{3}{2}(0-1)) = (0;-\frac{3}{2})$ d'où $N(1;-\frac{1}{2})$. (1pt)
3. Montrer que les points D, M et N sont alignés.
   $\vec{DM}(\frac{2}{3}-0;0-1) = (\frac{2}{3};-1)$ et $\vec{DN}(1-0;-\frac{1}{2}-1) = (1;-\frac{3}{2})$
   $\vec{DN} = \frac{3}{2}\vec{DM}$ donc $\vec{DN}$ est colinéaire à $\vec{DM}$ et les points D, N, M sont alignés. (1pt)
4. On considère un nombre réel a non nul, et P et Q définis par

   $$\overrightarrow{AP} = a\overrightarrow{AB}, \quad \text{et } \overrightarrow{CQ} = \frac{1}{a}\overrightarrow{CB}$$

   Les points D, P et Q sont-ils toujours alignés ?
   $P(a;0)$ et $\vec{CQ}(x_Q-1, y_Q-1) = \frac{1}{a}\vec{CB} = (\frac{1}{a}(1-1);\frac{1}{a}(0-1) = (0;-\frac{1}{a})$ d'où $Q(1;1-\frac{1}{a})$; (1pt)
   $\vec{DP}(a-0;0-1) = (a;-1)$ et $\vec{DQ}(1-0;1-\frac{1}{a}-1) = (1;-\frac{1}{a})$.
   Ainsi $\vec{DP}$ et $\vec{DQ}$ sont colinéaires. Les points D, P, Q sont toujours alignés. (1pt)

Exercice 2: (11 points) Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.

1. Trouver une équation cartésienne pour la droite d_1 qui passe par le point $A(2;5)$ et qui a pour vecteur directeur $\vec{u}(2;1)$.
   d_1 possède une équation de la forme $d_1 : x - 2y + c = 0$.
   $A \in d_1 \Leftrightarrow 2 - 2\times 5 + c = 0 \Leftrightarrow c = 8$
   d_1 admet comme équation cartésienne $d_1 : x - 2y + 8 = 0$. (1 pt)
2. Donner l'équation réduite de la droite d_1.
   $x - 2y + 8 = 0 \Leftrightarrow x + 8 = 2y \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 4$ d_1 admet comme équation réduite $d_1 : y = \frac{1}{2}x + 4$ (1 pt)
3. Trouver l'équation réduite de la droite d_2 dirigée par le vecteur $\vec{v}(0;2)$ passant par le point $B(4;-3)$.
   d_2 est parallèle à l'axe des ordonnées, son équation réduite est de la forme $d_2 : x = k$ et comme $B(4;-3) \in d_2$, $d_2 : x = 4$. (1 pt)
4. Dans chacun des cas, donner un vecteur directeur :
   — u_3 de la droite $d_3 : 3x - 5y + 1 = 0$.
   — u_4 de la droite $d_4 : y = 3x - 7$.
   — u_5 de la droite $d_5 : x - 6 = 0$.
   $\vec{u_3}(5;3)$ est un vecteur directeur directeur de d_3. (1 pt)
   $\vec{u_4}(1;3)$ est un vecteur directeur de d_4. (1pt)
   $\vec{u_5}(0;1)$ est un vecteur directeur de d_5. (1pt)

5. Donner l'ordonnée à l'origine de la droite $d_6 : 7x+5y-15=0$.
Le point de coordonnées $(0;3)$ est sur d_6 et 3 est donc l'ordonnée à l'origine de d_6. (1 pt)
6. Déterminer si le point $E(-1;2)$ appartient à la droite $d_7 = \frac{x}{5}+\frac{y}{9}=0$. $\frac{-1}{5}+\frac{2}{9}=-\frac{9}{45}+\frac{10}{45}=\frac{1}{45}\neq 0$ et $E\notin d_7$. (1 pt)
7. Trouver toutes les valeurs de m pour lesquelles $d_8 : 3x+my+4=0$ est parallèle à la droite $d_9 : 5x-4y+1=0$
d_8 est parallèle à d_9
$\Leftrightarrow$
les vecteurs directeurs $\vec{u}(-m;3)$ et $\vec{v}(4;5)$ sont colinéaires. (1 pt)
$\Leftrightarrow$
$-5m-12=0$ soit $m=-\frac{12}{5}$. $-\frac{12}{5}$ est la seule valeur de m pour laquelle les droites d_8 et d_9 sont parallèles. (1 pt)
8. Trouver une équation cartésienne pour la droite (AB) avec $A(3;7)$ et $B(2;5)$.
$\vec{AB}(2-3;5-7)=(-1;-2)$ est un vecteur directeur de (AB), $\vec{u}(1;2)$ aussi. La droite (AB) possède une équation de la forme $2x-y+c=0$. Or $B(2;5)$ appartient à (AB) d'où $2\times 2-5+c=0$ et $c=1$.
En définitive, $(AB) : 2x-y+1=0$. (1pt)

Exercice 3: (1 point)
Résoudre l'inéquation $\frac{2}{3x+1}>2x+1$.

$\frac{2}{3x+1}>2x+1$
$\Leftrightarrow$
$\frac{2}{3x+1}-(2x+1)>0$
$\Leftrightarrow$
$\frac{2-(3x+1)(2x+1)}{3x+1}>0$
$\Leftrightarrow$
$\frac{-6x^2-5x+1}{3x+1}>0$ (0.5 pt)

$\Delta=25+24=7^2$, $x_1=\frac{-(-5)-7}{2\times(-6)}=\frac{1}{6}$ et $x_2=\frac{-(-5)+7}{2\times(-6)}=-1$.

On pose $f(x)=-6x^2-5x+1$ et $g(x)=\frac{-6x^2-5x+1}{3x+1}$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$3x+1$			$-$		0		$+$		
$g(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	

d'où $S=]-\infty;-1[\cup\left]-\frac{1}{3};\frac{1}{6}\right[$ (0.5 pt)