

Exercice 1: (3 points)

Montrer en utilisant l'expression du taux d'accroissement que la dérivée de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse $a \neq 0$ est $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h} - \frac{1}{a}}{h} = \frac{1}{h} \frac{a - (a+h)}{a(a+h)} = \frac{1}{h} \frac{-h}{a(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)} \text{ qui tend vers } \frac{-1}{a^2} \text{ quand } h \text{ tend vers } 0.$$

Exercice 2: (5 points)

Soit $f(x) = \frac{2x+2}{x+3}$

1. Donner le plus grand ensemble de réels sur lequel f est définie et dérivable.

$$]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[\text{ (1 pt)}$$

2. Calculer la dérivée de la fonction $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{(2x+2)'(x+3) - (2x+2)(x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{2(x+3) - (2x+2)(1)}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x-2}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2} \text{ (2 pts)}$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$.

Pour tout réel x différent de -3 , $f'(x) > 0$. (1 pt)

4. Réaliser le tableau des variations de $f(x)$.

f est croissante sur $]-\infty; -3[$. f est aussi croissante sur $] -3; +\infty[$. (1 pt)

Exercice 3: (9 points)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 2$$

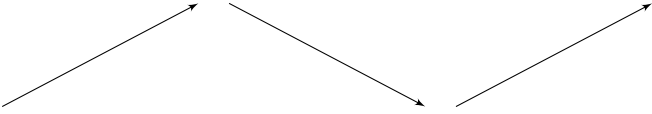
1. Calculer $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \text{ (2 pts)}$$

2. Étudier le signe du trinôme $3x^2 - 12x$.

$$3x^2 - 12x = 3x(x-4) \quad x_1 = 0, x_2 = 4. \text{ La suite dans le tableau de la question 3). (2 pts)}$$

3. Dresser le tableau de variation de f .

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$				

(1 pts)

4. Déterminer les extremums locaux de f .

$$f(0) = 2$$

2 est un maximum local atteint pour $x = 0$. (1 pt)

$$f(4) = 64 - 6 \cdot 16 + 2 = -30, -30 \text{ est un minimum local pour } f \text{ atteint pour } x = 4. \text{ (1 pt)}$$

5. Donner le meilleur encadrement possible pour $f(x)$ lorsque

a. x appartient à $[1, 3]$.

b. x appartient à $[-3, 4]$

$$f(1) = -3, f(3) = -25 \text{ et pour } x \in [1, 3], -25 \leq f(x) \leq -3.$$

$$f(-3) = -79 \text{ et pour } x \in [-3, 4], -79 \leq f(x) \leq 2.$$

Exercice 4: (3 points)

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

Soit T la droite d'équation $T : y = \frac{1}{8}x + 2$.

T est-elle tangente à la courbe \mathcal{C} ?

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ (1 pt) } f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{8}, \text{ (1 pt) } f(16) = 4$$

$$T_{f,16} : y = \frac{1}{8}(x - 16) + 4 = \frac{1}{8}x + 2$$

$T = T_{f,16}$ est bien tangente à \mathcal{C} . (1 pt)

Exercice 5: (Bonus)

Démontrer le théorème sur les variations d'une fonction affine en utilisant la dérivée.

Exercice 6: (Bonus)

Calculer la dérivée de la fonction définie sur $] -\frac{1}{3}, +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{3x + 1}$.

Exercice 7: (Bonus)

Montrer que pour toute fonction h dérivable sur un intervalle I , la fonction $i(x) = [h(x)]^2$ est aussi définie et dérivable sur I et $i'(x) = 2h'(x) \times h(x)$.