

Équations et inéquations

Voici une fiche purement technique... Là aussi, la pratique est nécessaire pour une bonne maîtrise d'outils qui ne seront pas revus en classe de première S, mais souvent utilisés.

Il est intéressant de faire une vérification avec Xcas (et d'apprendre ainsi à interpréter l'information renvoyée par le logiciel), mais aussi avec le mode GRAPH de la calculatrice.

Exemple 1 : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $(1+4x)^2 - (5x-2)(1+4x) = 0$.

$$\begin{aligned}
 (1+4x)^2 - (5x-2)(1+4x) &= 0 & \Leftrightarrow & (1+4x)[(1+4x) - (5x-2)] = 0 \\
 & & \Leftrightarrow & (1+4x)(1+4x-5x+2) = 0 \\
 & & \Leftrightarrow & (1+4x)(3-x) = 0 \\
 & \Leftrightarrow & 1+4x=0 & \text{ ou } 3-x=0 \\
 & \Leftrightarrow & x=-\frac{1}{4} & \text{ ou } x=3
 \end{aligned}$$

Vérification avec Xcas :

1	<code>factoriser((1+4x)^2-(5x-2)*(1+4x))</code>		
			<code>-(x-3)*(4*x+1)</code>
2	<code>resoudre((1+4x)^2-(5x-2)*(1+4x)=0)</code>		
			<code>[-1/4, 3]</code>

Exemple 2 : Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\frac{x}{2-x} = -x-3$

1. Recherche des valeurs candidates :

$$2-x=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2$$

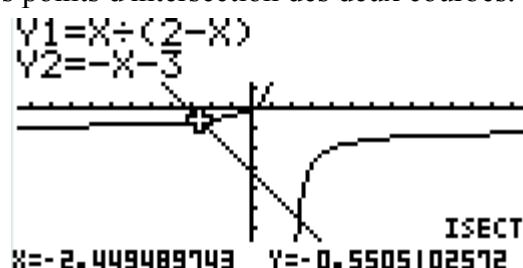
Les valeurs candidates sont donc celles de la réunion d'intervalles $] -\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

2. Résolution :

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{2-x} = -x-3 &= 0 & \Leftrightarrow & \frac{x}{2-x} + x + 3 = 0 \\
 & & \Leftrightarrow & \frac{x + (x+3)(2-x)}{2-x} = 0 \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x + (2x - x^2 + 6 - 3x) = 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} -x^2 + 6 = 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} x^2 - 6 = 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow & \begin{cases} (x - \sqrt{6})(x + \sqrt{6}) = 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow & x = \sqrt{6} \quad \text{ ou } \quad x = -\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

Vérification à l'aide du mode GRAPH de la calculatrice :

On trace l'hyperbole d'équation $y = \frac{x}{x-2}$ et la droite d'équation $y = -x-3$: résoudre l'équation ci-dessus revient à chercher les abscisses des points d'intersection des deux courbes. On peut utiliser G-Solv – ISCT



Exercice 1 : Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

1. $\frac{1}{2} - 2x^2 = \frac{1}{4}$
2. $\frac{2-x}{x+4} = 2$
3. $4(x+2)^2 = (x-2)^2$
4. $\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{5}{2x^2+x} - \frac{1}{2x}$
5. $2x^3 + x^2 - x = 0$

Exercice 2 : Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1. $-5x + 3 \leq 9$
2. $x(x+3)(-2x+1) < 0$
3. $x^2 - 5x + 4 > 0$
4. $\frac{(3x+4)(-2x+5)}{-x+7} \geq 0$
5. $\frac{(-3x+2)(4x^2-25)}{2x+5} < 0$
6. $\frac{1}{2x} > 2x$

Exercice 3 : Rappel : $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B^2 \\ B \geq 0 \end{cases}$

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\sqrt{-2x+5} = x$. Vérifier avec Xcas ou avec le mode GRAPH de la calculatrice.

Exercice 4 : Rappel : $\sqrt{A} \leq \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \leq B \\ A \geq 0 \end{cases}$ car la fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{-2x+8} \leq \sqrt{x^2}$. Vérifier avec Xcas ou avec le mode GRAPH de la calculatrice.

Exercice 5 : On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-1}{-x+4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .
2. Étudier le signe de f sur D_f .
3. En déduire les solutions de l'inéquation $\frac{2x-1}{-x+4} \geq 0$.

Exercice 6 : On considère les droites (d) et (d') dans le repère ci-contre.

1. Donner les équations réduites de (d) et (d').
2. Montrer que le couple de coordonnées du point d'intersection de ces deux droites est le couple solution du système linéaire $\begin{cases} -3x + 4y = 12 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$
3. Résoudre ce système par la méthode des combinaisons linéaires et vérifier la cohérence du résultat avec le graphique.
4. Vérifier le résultat avec le mode EQUA (SIML) de la calculatrice.

