

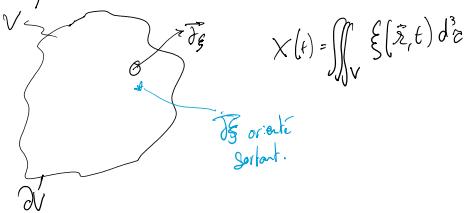
Transfert d'énergie
↳ "transverse" ↳ domain de 4

I) Équation de la diffusion

1) Bilan macro, loi de conservation

Set X extensif, $\xi(x, t)$ (intensif) = "X volumique"

✓ fixe quelconque, de bord 2V



$$\frac{d\chi}{dt} = \iiint_V d^3c \frac{\partial \xi}{\partial t} (\vec{x}, t)$$

je compte sortant

$$= - \oint_{\partial V} \vec{J}_\xi \cdot \vec{dS} + \iiint_V S_\xi (\vec{x}, t) d^3c = \text{flux (entrant sortant) de } \xi + \text{terme de source de } \xi$$

(à droite)

$$\rightarrow \iiint_V \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{J}_\xi) - S_\xi (\vec{x}, t) \right) d^3c = 0$$

$$\Rightarrow \text{Vrai pour tout } V \text{ (vu que } V \text{ quelconque)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_r \xi + \operatorname{div}(\vec{j}_\xi) = S_\xi(x, t)} \quad \begin{array}{l} \text{(on parle de} \\ \text{lois de conservation} \\ \text{si } S_\xi = 0). \end{array}$$

2) Courants et gradients

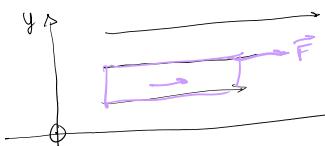
Physiquement le transport est "induit" par des inhomogénéités
↳ gradient de quantités intensives.

- Loi de Fourier: $\vec{J}_{Th} = -\frac{\lambda}{\alpha} \nabla T$ conductivité thermique.
 - Loi de Fick: $\vec{J}_n = -D \nabla n$ (attention relation non convective n'est pas intense \rightarrow convection est prédominante).
 - Loi d'Ohm: $\vec{J}_{el} = -\sigma \nabla U$ (alg. max de σ indiv : $\sim 200 / 300 \text{ S.m}^{-1}$) $v_g : \sim 1 \text{ cm.s}^{-1}$

Loi d'Ohm: $\vec{j}_{el} = -\sigma \vec{g}rad V$ (coeff marin de σ marin: $v_g \approx 1 \text{ cm}^{-3}$)

Contrainte visqueuse: $\frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \vec{E} = -V \frac{\partial v}{\partial y} \vec{ex}$

Masse volumique
lentille de contrainte (relax-y)



Diffusion courant propre: $\vec{j}_n = -\frac{i\pi}{2\omega} (\vec{v}^* \vec{\nabla} v - \vec{v} \vec{\nabla} v^*)$ (Si on injecte sa loi de conservation → on retrouve l'équation).

⚠️ Lois phénoménologiques (pas phys.), avec limitations (quadri au 1^{er} ordre)
 ↳ cadres d'applications spécifiques
 ↳ voir expériences

[A] dans ce chapitre équation local (sinon T n'existe) ou est dans un système hors eq mais pas de P équilibré).

{
 • Équation bilan → conservation (+ source, perte).
 • $\vec{g}_S = f(\vec{g}rad(\xi))$
 ↳ approx linéaire (sin OK) vis à vis des limitations.
 ↳ équation de diffusion

3) Équation de diffusion pour le reste de cours sauf au chal.

$$\partial_t \xi = -\operatorname{div}(-D \vec{g}rad \xi) + S_\xi$$

↪ D homogène → $\boxed{\partial_t \xi = D \Delta \xi}$ | équation de diffusion

→ c'est une éq. diff | Condition initiale (CI)
 Condition finale (CF)

→ irréversibilité manifeste.
 ↳ si $\hat{\xi}(x, t)$ est solution $\hat{\xi}(x, -t)$ n'est pas solution
 ↳ n'est pas solution de $-\partial_t \xi = D \Delta \xi$

Analyse dimensionnelle

$$\frac{\xi}{T} = \frac{D \xi}{L^2}$$

$$\Rightarrow D = \frac{L^2}{T} \Leftrightarrow L = \sqrt{DT} \neq CT$$

↪ prop à \sqrt{T} signature des phénomènes diffusifs.

II - Etude de ces de solutions à l'équation de la chaleur

0) Équation de la chaleur

II -

0) Équation de la chaleur

- \vec{q}_f therm. local
- Transfo monoénergie
- Locallement: $dQ = dH(\vec{x}, t) = dH(T(\vec{x}, t), p, n)$



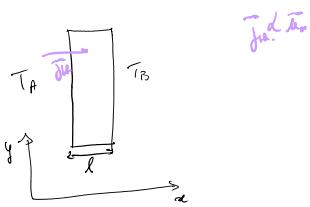
$$\frac{1}{V} \frac{\partial H}{\partial t} = - \operatorname{div}(\vec{q}_f) = \lambda \Delta T$$

$$\text{or } \frac{1}{V} \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{V} \frac{\partial H}{\partial T} \Big|_{p,n} \times \frac{\partial T}{\partial t}$$

$\frac{V}{V} \rho c_p \dot{T}$ \rightarrow conductance par une plaque mince donc $c_p = c_v = c$.

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\partial_t T}{D_R} = \frac{1}{\rho c_p} \Delta T} \quad D_R \leftarrow m^2$$

1) Flux à travers une paroi: Rés.



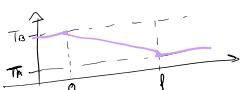
$$\frac{\partial_t T}{D_R} = \frac{1}{\rho c_p} \Delta T$$

\rightarrow cas statique (ou stationnaire ou régime permanent)

$$\frac{\partial_t T}{D_R} = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\vec{q}_f) = 0, \quad T(x, t) = kx + \beta \quad \text{via: a arbitraire.}$$

$$T(x, t) = T_A + (T_B - T_A) \frac{x}{l}$$



$$\vec{J}_R = -\lambda \vec{\operatorname{grad}} T = -\lambda \frac{(T_B - T_A)}{l} \hat{e}_x$$

est.

$$Q_R = \oint_S \vec{J}_R \cdot d\vec{S} = \vec{J}_R \cdot \hat{e}_z \cdot S = \frac{\lambda (T_B - T_A)}{l} S$$

\downarrow $\frac{Q}{S}$ \downarrow $\frac{dS}{d\text{surface}}$

Analogie:

$$\frac{I}{R} = \frac{1}{R} U_{dep} \quad (\text{analogie})$$

$$\Rightarrow \boxed{R_R = \frac{l}{\lambda S}} \quad \text{Analogie} \quad \boxed{R_{el} = \frac{l}{\sigma S}} \quad \text{Analogie} \neq \text{réalité}$$

NB: R dépend de la géométrie!

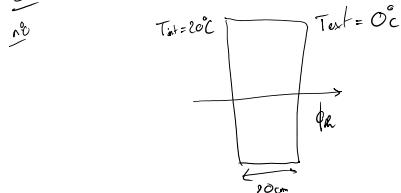
NB Dépend de la géométrie!

(en cylindrique, en sphérique... par le même hypothèse → faire ce à la devoir bauvin thermique)

→ On peut appliquer les règles de combinaisons usuelles.

→ questions de type isolation des batiments.

Ex Mur de béton

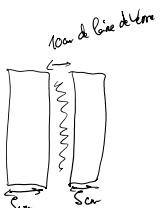


$$\lambda_{\text{ciment}} = 1 \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$$

$$S = 1 \text{ m}^2$$

$$\dot{Q}_h = \Delta T \cdot \frac{S \cdot L}{\lambda} = 100 \text{ W.} \quad (\text{Obj. grille pain } \approx 500 \text{ W.} \approx 1 \text{ kW})$$

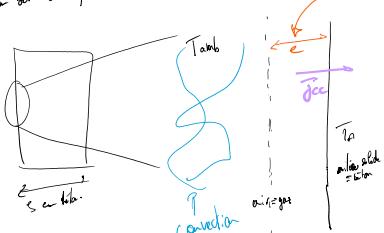
$$\lambda_{\text{air dans mur}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ W.m}^{-1}\text{K}^{-1}$$



$$\dot{Q}_h = \frac{S \Delta T}{\frac{2 \lambda_{\text{air}}}{\lambda_{\text{mur}}} + \frac{\lambda_{\text{air}}}{\lambda_{\text{mur}}}} = 8 \text{ W}$$

n°2: Conducto-convection

zéro sur une face du mur



$$\dot{Q}_{\text{conv}} = h (T_{\text{amb}} - T_{\text{int}}) \vec{e}_x$$

coeff conducto-convection.

Il dépend de l'espèce de fluid.

$$h = \frac{1}{c} \quad \text{épaisseur de couche limite}$$

Si il y a plusieurs couches limites
→ couche limite d'écoulement
→ couche limite thermique. (si on souffle sur les jets on retire une couche limite qui "contrôle" l'énergie thermique et on n'a plus de flux d'air frais ⇒ transfert thermique efficace).

$$h_{\text{air}} = 3 \text{ W.m}^{-2}\text{K}^{-1}$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_{\text{conv}} = \frac{S \Delta T}{\frac{2 \lambda_b}{\lambda_b} + \frac{\lambda_{\text{air}}}{\lambda_{\text{air}}} + \frac{1}{h_{\text{air}}}} \text{ dehors/dedans}$$

$$= 6 \text{ W} < 8 \text{ W}$$

Constante de temps

$$\cdot \text{Conduction: } Z_{\text{cd}} = \frac{L^2}{D_{\text{air}}} = \frac{L^2 \rho c}{\lambda_{\text{air}}}$$

↪ $Z_{\text{cd}} \gg Z_{\text{ad}} \approx \text{stationnaire (ARQS)}$

Conduite - convection:

$$R = \frac{l}{k} \cdot \frac{\pi d}{4}$$

$$h = \frac{q}{\pi d \Delta T}$$

$$E_{co} = h \cdot R = \frac{h l}{k}$$

Bi = $\frac{E_{co}}{E_{cc}} = \frac{h l}{k l} = \frac{h}{k}$

Number de Biot

Cond. majoritaire (partie par conduite-convection négligeable, flux longitudinal, pas de gradient intérieur (à l'air))

Cond. convection qui domine (partie thermique)

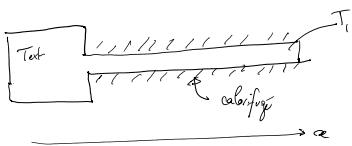
Bi < 1 → cond. majoritaire
Bi > 1 → cond. convection qui domine

cas général:

$$Bi = \frac{E_{co}}{E_{cc}} \times \frac{S}{C^2} = \frac{h S}{\lambda C}$$

Nombre de Biot.

3) onde thermique



$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = D \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

$$T(x, t=0) = T_0 \quad T(x=0, t) = T_{ext}$$

$$\text{Changement de variable: } u = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} = -\frac{1}{2t} \frac{\partial^2 T}{\partial u^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} &= \frac{1}{4D} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\ \Rightarrow \left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 4Du \frac{\partial T}{\partial u} \right] &= 0 \\ \Rightarrow \frac{dT}{du} &= \lambda e^{-\lambda u} \\ \Rightarrow T(u) &= \text{const} + \lambda \int_0^u e^{-\lambda v} dv \end{aligned}$$

$$\text{CI} \Rightarrow T(0) = T_{ext} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} T(u) = T_1 = T_{ext} + \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda v} dv$$

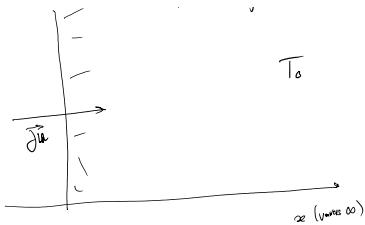
$$\frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\lambda v} dv = \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4Dt}}$$

$$\Rightarrow \lambda = (T_1 - T_{ext}) \frac{2}{\sqrt{4Dt}}$$

$$\Rightarrow T(x, t) = T_{ext} + (T_1 - T_{ext}) \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

3) onde thermique et effet canne





$$J = (j\omega + j\alpha \cos(\omega t)) \hat{e}_x \quad (\text{exemple de tel forçage : solil sur la Terre})$$

$$\begin{cases} T(x, t=0) = T_0 \\ -\partial_x T(x=0, t) = j\omega \cos \omega t + j\alpha \end{cases} \quad \text{continuité de flu}$$

$$\rightarrow T = T_0 + \frac{\alpha}{\omega} \sim \text{cst} + \sin \omega t$$

on intègre par rapport à θ .

$$\theta(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi) \quad (\varphi \text{ est réel dans } A(x))$$

$$\hookrightarrow \theta = A(x) e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \partial_x \theta = D \partial_x^2 \theta \quad \xrightarrow{\text{RSF}} \frac{i\omega}{D} A = A''$$

$$A(x) = \alpha e^{i\omega x} + \beta e^{-i\omega x}$$

avec $\lambda_{\pm} = \pm (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2D}} = \pm \frac{(1+i)}{S}$ racines du polynôme

Solution $e^{i\omega x}$ diverge physiquement

$$\rightarrow \alpha = 0$$

$$\rightarrow \partial_x \theta \Big|_{x \rightarrow \infty} = j\omega e^{i\omega t}$$

$$\hookrightarrow \beta = j\omega \frac{S(1-i)}{2\lambda}$$

$$\theta(x, t) = j\omega \frac{S(1-i)}{2\lambda} e^{i\omega t} e^{-i\omega x} \frac{S}{\delta}$$

$$\theta(x, t) = \frac{j\omega S}{2\lambda} e^{-\frac{x}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\boxed{\eta_{ip} = \frac{\omega}{R} = \omega S = \sqrt{ED\omega} = 2Dk}$$

$$\omega = 2Dk^2 \rightarrow \omega = \frac{d\omega}{dt} = 4Dk$$

$$\boxed{S = \sqrt{\frac{E\lambda}{\rho c_m}}} \quad \text{Rôle des conductivité et densité de la matière !}$$

$$\hookrightarrow S_{el} = \sqrt{\frac{E}{\mu_0 \delta \omega}}$$

$$\boxed{Z = \frac{\infty}{S_{el}} + \frac{\pi}{4\omega} \quad \text{réactance de phase}}$$

Déf solil : un peu

- $\omega \approx 8\pi$ (une vague)

$$\hookrightarrow \text{retard} = 3 \text{ jours} \quad \rightarrow \text{pas de variation de } T$$

$$\hookrightarrow \text{atténuation} = 10^{-7}$$

- variation annuel

$$\hookrightarrow \text{retard} = 1 \text{ ou 2 mois}$$

$$\text{Atténuation} = \frac{1}{2}$$

$$1.10$$

- variation amel
↳ retard = 1 ou 2 ms
Atténuation = $\frac{1}{2}$
↳ fin gol onde de court-circuit absent des lignes de force qui retard?

Chapitre 2: couplage et compétition

mardi 28 janvier 2025 09:00

I. Courant et taux d'entropie

1) Retour sur équilibre therm local

Locallement $\begin{cases} u(\vec{x}, t) \text{ densité volumique d'énergie interne} \\ c(\vec{x}, t) \text{ concentration de particule diffusante} \end{cases}$
 modèle "hydrodynamique" "particule de fluide" qui échange d'énergie dans petit volume pour pas manquer global du substrat
 $\hookrightarrow s(u, c, \dots)$ entropie volumique (dans intensive \rightarrow on perd de l'info).

$$\rightarrow T(\vec{x}, t) = \left(\frac{\partial s}{\partial \mu} \Big|_{c, \dots} \right)^{-1}$$

$$\mu(\vec{x}, t) = -T(\vec{x}, t) \frac{\partial s}{\partial c} \Big|_{u, \dots}$$

$$ds = \sum_i \frac{x_i}{T} \frac{d\xi_i}{\xi_i} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{volumique} \end{matrix}$$

$$x_i = \frac{x_i}{T} \quad \text{fonction continue locales } (\vec{x}, t)$$

$$x_a = \frac{1}{T}, \quad x_c = -\frac{\mu}{T}, \quad x_e = -\frac{\phi}{T}$$

\vec{j}_i : courant de ξ_i

Bilan de conservation

+ Absence de sources \rightarrow sans source pas de création d'énergie ou quoi

$$\Rightarrow \boxed{\partial_t \xi_i + \operatorname{div}(\vec{j}_i) = 0} \quad \forall i$$

) le système ici
 justifie le siège du transport
 et des flux sans création d'énergie.

\downarrow pas de perte au niveau microscopique.

Courant d'entropie:

$$\vec{j}_s = \sum_i x_i \vec{j}_i$$

2) Bilan d'entropie

$$\partial_t s = \sum_i x_i \partial_t \xi_i$$

$$= - \sum_i x_i \operatorname{div}(\vec{j}_s)$$

$$0, \operatorname{div}(\vec{j}_s) = \sum_i x_i \operatorname{div}(\vec{j}_i) + \vec{j}_s \cdot \vec{\operatorname{grad}} Y_i$$

$$\hookrightarrow \boxed{\partial_t s + \operatorname{div}(\vec{j}_s) = \sum_i \vec{j}_i \cdot \vec{\operatorname{grad}} Y_i}$$

échange
d'entropie

creation
d'entropie

\rightarrow pour le transport courant et gradient sont sources d'irréversibilité.) dont les moteurs de transport

Def: Affinité conjuguée: $\vec{\operatorname{grad}} Y_i = \vec{A}_i \equiv$ force thermodynamique

$$S_c = \sum_i \vec{A}_i \cdot \vec{j}_i \leq \text{taux de création d'entropie}$$

$\{\vec{A}_i\}$ dépend de $\{\vec{j}_i\}$

3) Régime linéaire

- "évolution suffisamment lente" \rightarrow variation instantanée (ARRS)
 - ↳ pas de retard dans la propagation

- Affinités "suffisamment faibles"
 - ↳ les courants sont des combinaisons linéaires de ses affinités $\{\vec{H}_i\}$?

$$\text{DL} \rightarrow \forall i \quad \vec{j}_i = \sum_k L_{ik} \vec{A}_k$$

↳ matrice des coefficients constants (cas de Onsager)

Hyp: i) Régime linéaire limité par l'expansion/modèle

$$\text{ii) Isotropie} \rightarrow \vec{j} = \underline{L} \vec{A}$$

(à priori assez)

iii) Instantané et local \rightarrow "environ du volume de fluid"

(ETL: bonne échelle méso)

libre parcours moyen ℓ est négligé

Prop: i) Positivité de la diagonale $\forall k \quad L_{kk} > 0$

ii) Symétrie d'Onsager

$$L_{ij}(\vec{B}) = L_{ji}(-\vec{B})$$

on n'importe qu'un pseudo-vecteur

$$\vec{B} = 0$$

iii) Inégalité triangulaire

$$\forall j \quad L_{ii} L_{jj} - L_{ij}^2 > 0 \quad (\text{Div Thermo des Landau Pofat}).$$

II. Effets thermoélectriques dans un conducteur. (électricité)

→ conducteur isotrope, non polarisé, sans réaction chimique

→ soumis à \vec{E} et grad T stationnaires

→ 1 seul de type de porteur de charge (e , T_{ic})

1) Effets thermiques et électriques

Deux courants $\vec{j}_e \vec{j}_e = -e \nabla \mu \vec{j}_e$

curant de convection en e^-

$$\mu_e(\vec{x}, t) = \mu_0(T, p_e) - \frac{V_A}{e} e V(\vec{x})$$

densité volumique de charge

potentiel électrique

Affinités conjuguées: $\left\{ \begin{array}{l} \vec{A}_0 = -\frac{1}{T^2} \text{grad}(T) \\ \vec{A}_c = -\frac{1}{T} \text{grad}(\mu) \end{array} \right. \rightarrow$ Affinité en faveur de transport thermique

PSR Div complément 5b.

Voir + dans
au delà
de l'équilibre

$$\vec{j}_d = -\frac{\vec{j}_0}{T^2} \cdot \text{grad} T - \frac{\vec{j}_c}{T} \text{grad} \mu - \text{div} \vec{j}_s$$

Approche linéaire:

$$\begin{cases} \vec{j}_a = -\frac{L_{aa}}{T^2} \vec{\text{grad}} T - \frac{L_{ac}}{T} \vec{\text{grad}} \mu \\ \vec{j}_c = -\frac{L_{ca}}{T^2} \vec{\text{grad}} T - \frac{L_{cc}}{T} \vec{\text{grad}} \mu \end{cases}$$

$$\vec{j}_s + \text{div}(\vec{j}_s) = \dot{s}_c = \sum_i \vec{j}_i \cdot \vec{A}_i$$

APRÈS

$$\dot{s}_c = \sum_i \vec{j}_i \cdot \vec{A}_i = \vec{j}_a \cdot \vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) + \vec{j}_c \cdot \vec{\text{grad}}(-\frac{\mu}{T}) + \sum_k \vec{j}_k \cdot \vec{\text{grad}}\left(\frac{x_k}{T}\right)$$

$$\vec{j}_m = \vec{j}_a + \lambda \vec{j}_c - \sum_k x_k \vec{j}_k$$

$$\Rightarrow \dot{s}_c = \vec{j}_a \cdot \underbrace{\vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right)}_{V_{aa} \cdot V_{an}} + \vec{j}_c \cdot \underbrace{\left(\vec{\text{grad}}\left(\frac{\mu}{T}\right) + \lambda \vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) \right)}_{V_{ac}} + \sum_k \vec{j}_k \cdot \underbrace{\left(\vec{\text{grad}}\left(\frac{x_k}{T}\right) - \lambda x_k \vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{T}\right) \right)}_{\vec{A}'_k = \frac{1}{T} \vec{\text{grad}} \times \vec{x}_k}$$

"L'ensemble des effluves dépend de l'ensemble des courants"
 Changer $\mu \rightarrow \bar{\mu}$ implique un changement sur $V_{aa} \rightarrow V_{a\bar{a}}$ mais
 charge $k \rightarrow \bar{k}$ fait les autres.

$$\vec{j}_c = -\frac{L_{cc}}{T} \vec{\text{grad}} \mu - \frac{L_{cp}}{T} \vec{\text{grad}} T$$

$$\vec{j}_a = -\frac{L_{aa}}{T} \vec{\text{grad}} \mu - \frac{L_{ac}}{T^2} \vec{\text{grad}} T$$

2) Conductivité électrique isotherme (Ohm)

$$\vec{j}_{el} = -e \frac{V}{W} \vec{j}_c = \frac{e W L_{ce}}{T} \vec{\text{grad}} \mu$$

$$\mu = \mu_0(\rho, T) - e \frac{W}{h} V(x)$$

$$\Rightarrow \vec{j}_{el} = -\frac{(e W)^2 L_{ce}}{T} \vec{\text{grad}} V$$

$$\boxed{\vec{j}_{el} = \frac{(e W)^2 L_{ce}}{T} \vec{E}} \quad | \quad \text{Ohm}$$

3) Conductivité thermique: Loi de Fourier

$$\vec{j}_c = \vec{0} \Rightarrow \vec{\text{grad}} \mu = -\frac{L_{cc}}{L_{ce}} \frac{1}{T} \vec{\text{grad}} T$$

$$\Rightarrow \vec{j}_Q = -\frac{L_{aa}}{T^2} \vec{\text{grad}} T + \frac{L_{aa}}{L_{ce} T^2} \vec{\text{grad}} T$$

$$\boxed{\vec{j}_Q = -\frac{1}{T^2} \left(L_{aa} - \frac{L_{ca}}{L_{ce}} \right) \vec{\text{grad}} T} \quad | \quad \text{Fourier}$$

4) Effet Seebeck

$$\vec{\text{grad}} T \Rightarrow \vec{\text{grad}} \mu$$

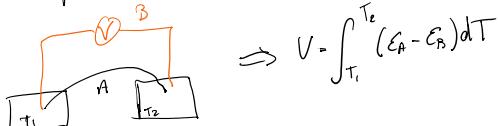
$$\vec{\text{grad}} \mu = \epsilon \frac{W}{h} e \vec{\text{grad}} T$$

pouvoir thermoelectrique

$$\epsilon_{\infty} = -\frac{1}{W h e} \frac{L_{ca}}{L_{ce}}$$

$$E = - \frac{1}{\text{Wheat}} \frac{L_{\text{ee}}}{L_{\text{ec}}} \text{V}$$

Ex thermocouple



$$V = \int_{T_1}^{T_2} (E_A - E_B) dT$$

$$\vec{J}_Q = - \vec{\nabla} T + ET \vec{j}_{el}$$

(or en énergie et la C.L.)

Vrai tout le long.

transfert thermique pur

transfert d'énergie par diffusion de particule.

5) Effet Peltier, effet Joule

Dans le cas T uniforme

$$\vec{J}_Q = ET \vec{j}_{el}$$

$$= \vec{w} \vec{j}_{el}$$

$$\boxed{-\vec{w} = ET} = -\frac{1}{\text{Wheat}} \frac{L_{\text{ee}}}{L_{\text{ec}}} \quad \text{coeff Peltier.}$$

$$\{ L_{\text{ee}}, L_{\text{ec}}, L_{\text{ea}} \} \rightarrow \{ E, \vec{w}, T, \lambda \} \dots$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_A &= \vec{J}_Q + \mu \vec{j}_c \\ &= \vec{j}_{el} \left(\vec{w} - \frac{\mu}{e \text{Wheat}} \right) \\ \rightarrow \text{div}(\vec{j}_A) &= \left(\vec{w} - \frac{\mu}{e \text{Wheat}} \right) \text{div}(\vec{j}_{el}) + \vec{j}_{el} \cdot \vec{\nabla} \left(\vec{w} - \frac{\mu}{e \text{Wheat}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{div}(\vec{j}_{el}) = 0$$

Dans le cas T uniforme:

$$\vec{\nabla} \left(\vec{w} - \frac{\mu}{e \text{Wheat}} \right) = -\frac{1}{e \text{Wheat}} \vec{\nabla} \mu = -\vec{E}$$

$$\rightarrow \text{div}(\vec{j}_A) = -j_{el} \vec{E} = -\sigma E^2 \quad \underline{\text{Effet Joule}}$$

$$\Delta T = T \partial T \epsilon \text{ coeff de Thomson}$$

$$\text{Aparté : Nb d'Yers } \mathcal{L} = \frac{\partial R}{T \partial T} = \frac{\epsilon \sigma}{P} \quad (\text{Wiedemann-Franz})$$

qui dépend pas du métal, on T Vrai coefficient.

$$\text{Exp: } \mathcal{L} = [2.17 - 2.59] \times 10^{-2} \text{ V}^2 \text{ K}^{-2}$$

$$1928 \rightarrow \text{Sommerfeld} \rightarrow \mathcal{L} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 \approx 2.45 \times 10^{-8} \text{ V}^2 \text{ K}^{-2}$$

\Rightarrow A. de la d'équilibre

III - Convection

1) Transport convectif vs diffusif

D) Pour la quantité de mouvement: Re.

$$Re = \frac{\text{"flux convection"}}{\text{"flux diffusion"}}$$

$$= \frac{E_{\text{diffusif}}}{E_{\text{convection}}} = \frac{L^2 / V}{L / u}$$

$$\boxed{Re = \frac{UL}{V}}$$

D) Péclet : diffusion convective et matrice/thermique:

$$Pe = \frac{J_{\text{concr}}}{J_{\text{diff}}} = \frac{eU}{De/L} = \boxed{\frac{LU}{D(L/\text{mat})}}$$

D) $Nu = \frac{Q}{\lambda \Delta T}$ transfert th avec convec.
| eU convec = diffusif
Nusselt?

Ex Anémomètre $Nu = 0.57 Pr^{0.3} Re^{0.42} \dots$ Pr_{air}

D) Entrée phénomène diffusif:

2) Prandtl

$$Pr = \frac{V}{De} = \frac{Pe \cdot L}{Re} = \frac{\rho c}{\lambda L}$$

Chapitre 3: Approches microscopiques.

vendredi 31 janvier 2025 15:55

I - Diffusion dans les fluides

1) Conductivité thermique d'un gaz 1D

Chaîne unidimensionnelle de "GP" monoatomique + Équilibre thermique local.
 $\langle E(T) \rangle = \frac{1}{2} kT$ (il n'est pas parce que why not)

Transfert d'énergie entre deux atomes distants \bar{l} on a \bar{l} libre parcours moyen entre 2 chocs

$$E(x) - E(x+\bar{l}) = -\bar{l} \underbrace{\frac{dE}{dT} \frac{dT}{dx}}_{(3) \text{ he}}$$

$$\int_{x_0}^{x_0+2\bar{l}} \bar{l} dx = n \bar{v} \quad \text{"Flux thermique & Flux de particule"}$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_{th} &= n \bar{v} \Delta E \\ \bar{J}_{th} &= -\bar{l} n \bar{v} c \frac{dT}{dx} \end{aligned}$$

2) Diffusion de particule dans un gaz

Équilibre thermique local

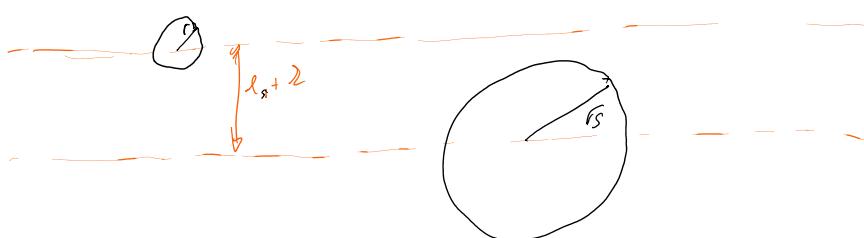
$n(x,t) \Rightarrow$ densité de gaz diffusant et ns densité uniforme de substrat

a. Gaz sphères dures : r_g , r_s

\bar{l} : distance typique entre deux chocs du gaz diffusant / substrat (suffisamment dilué)

\rightarrow hypothèses

que les chocs sont que avec le substrat
pas de chocs diffusant/diffusant



$$\Gamma = \pi (1 + \frac{r_s}{l})^2$$

$$n_s \approx \frac{\Gamma}{\pi} = 1$$

$$n_s \bar{f} = 1$$

$$\Rightarrow \bar{f} = \frac{1}{n_s T (1 + \alpha_s)^2}$$

Équation d'état du substrat

$$P(V - b_s) = n_s k_B T \quad (\text{sphères dures}).$$

$$\text{Pr} \Rightarrow n_s = \frac{n_s}{V} = \frac{P}{RT} + \theta(b_s) \quad [\text{suffisamment dilué}].$$

$b_s \ll 1$

$$\Rightarrow \bar{f}_s = \frac{kT}{P\pi(1 + \alpha_s)^2}$$

$$\text{Où } N_2 \text{ dans } N_2, 300K, 1\text{ bar}, r \sim 1$$

$$\Rightarrow \bar{f}_s = 1.5 \times 10^{-7} \text{ m} \rightarrow \gg r \rightarrow \text{dilué}$$

→ On cherche le coefficient de diffusion D

On suppose une distribution hexadirectionnelle des vitesses $\vec{v} \in \pm v_{th} \{ \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z \}$ $v_{th} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$

Quel est \vec{j} qui traverse dS ?

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{s} = S \vec{u}_x$$

Bilan de particules traversant dS entre t et $t + dt$:

$$\int N_x = \frac{1}{6} n(x - \bar{l}) v_{th} dS dt - \frac{1}{6} n(x + \bar{l}) v_{th} dS dt = \vec{j} dS dt$$

$$\Rightarrow \vec{j} = - \frac{1}{3} v_{th} \bar{l} \vec{\nabla}_x n$$

$$\Rightarrow D = \frac{v_{th} \bar{l}}{3} = \frac{(RT)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3m} P\pi (1 + \alpha_s)^2}$$

Ex: (O) dans N_2 à $300K, 1\text{ bar}$

$$D = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$D_{exp} = 2.1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$D = \frac{L \cdot v}{\tau}$$

$$D_{\text{exp}} = 2.1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$$

3) Diffusion dans les liquides

Interaction diffusion / substrat à tout instant

Diffusion de sphères (R) dans un liquide de viscosité η .

$$\vec{F} = -6\pi\eta R \vec{v} \quad (\vec{F}_{\text{substrat}} \rightarrow \text{particules diffusantes}). \quad \text{Force de Stokes} \quad (\text{appelée } \alpha \text{ pour le substrat}).$$

$$\text{On note alors la mobilité } \mu = \frac{\langle \vec{v} \rangle}{\langle \vec{F} \rangle} = \frac{1}{6\pi\eta R}$$

$$\boxed{\text{Relation d'Einstein: } D = \mu kT}$$

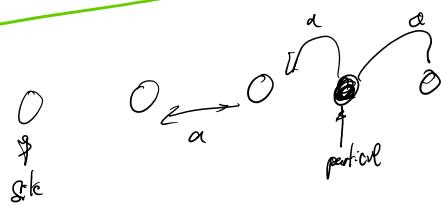
$$\boxed{D = \frac{kT}{6\pi\eta R}}$$

$$\begin{aligned} \eta &= 10^3 \text{ Pa s} \\ R &= 10 \text{ nm} \quad \Rightarrow \quad D = 2.2 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s} \ll g a^2 \end{aligned}$$

$T = 300 \text{ K}$
 Ainsi R pas trop grand $\lesssim 1 \mu\text{m}$ pour que les effets thermiques impriment la dynamique.

III. Mouvement brownien et marche au hasard

1) Marche au hasard 1D



On pose $p(x_n, t)$ \rightarrow probabilité que la particule soit en x à t .

\rightarrow sauts discrets de taille a entre t et $t+1$

On suppose isotropie:

$$p(x_n, t) = \frac{1}{2} p(x_{n-1}, t) + \frac{1}{2} p(x_{n+1}, t)$$

$$\rho(x_n, t) = \frac{1}{2} \rho(x_{n-1}, t) + \frac{1}{2} \rho(x_{n+1}, t)$$

$$\Rightarrow \partial_t \rho(x_n, t) = \underbrace{\frac{a^2}{2\tau}}_D \partial_x^2 \rho(x_n, t)$$

2) Généralisation 3D

Même démarche à 3D $\rightarrow a = \bar{l}$

$C = \frac{\bar{l}}{N\tau}$ \Rightarrow \rightarrow répartition uniforme des directions (isotropie à 3D).

 $\rightarrow \langle \vec{R} \rangle = 0 \quad \rightarrow \langle \vec{R}^2(t) \rangle = \bar{l}^2$

$$\langle R^2(Nz) \rangle = N \bar{l}^2$$

$$\Rightarrow \langle R(t) \rangle = \sqrt{\frac{\bar{l}^2}{C}} t$$

$$D$$

3) Approche d'Einstein: densité de proba

Hyp : - mouvements indépendants (diffusifs)
- processus sans mémoire $\rightarrow C$

$\xi \rightarrow$ la variation de position de particule diffusante pendant τ
 $\phi(\xi, \tau) d\xi$ la proba du déplacement entre ξ et $\xi + d\xi$ à τ

 $n(x, t + \tau) dx = \int_{\mathbb{R}} n(x - \xi, t) \phi(\xi, \tau) d\xi$

ϕ satisfaisant :

- isotropie $\phi(\xi, \tau) = \phi(-\xi, \tau)$
- $\phi(\xi, \tau) \xrightarrow[|\xi| \rightarrow \infty]{} 0$

$$n(x, t) dx + \tau \partial_t n dx \stackrel{DL}{=} n(x, t) \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi, t) d\xi \xrightarrow{=} 1$$

$$n(x,t) dx + \partial_t n dx = n(x,t) \int_{\mathbb{R}} \phi(\xi, t) d\xi = 1$$

il faut dégager comme ça

$$-\partial_x n \int_{\mathbb{R}} \xi \phi(\xi, t) d\xi = 0$$

$$+ \frac{1}{2} \partial_x^2 \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \phi(\xi, t) d\xi$$

$$\Rightarrow \partial_t n = \boxed{\frac{1}{2\tau} \int_{\mathbb{R}} \xi^2 \phi(\xi, t) d\xi} \partial_x^2 n$$

\square

Sinon

$$P(x,t|x_0, t_0) = \frac{n(x,t)}{N} = \phi(x - x_0, t - t_0 + \tau)$$

Pour δ ini. \rightarrow gaussienne \equiv calcul de moment d'ordre 2.

$$\langle (\vec{R} - \vec{R}_0)^2 \rangle = 2D(t-t_0) \times \text{nb de dimensions.}$$

\uparrow
pour gaussienne.

\square

$\left. \begin{array}{l} \text{simple Brownian motion.} \\ \text{Pour } \delta \text{ ini. } \rightarrow \text{gaussienne.} \end{array} \right\}$

4) Théorie de Langevin.

$$m \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{\mu} \omega + f \quad \text{Équation de Langevin.}$$

f stochastique

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{dt \rightarrow 0} \langle f(0, \frac{1}{dt}) \rangle = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{W(0, 1)}{dt}$$

$$\langle f(t) \rangle = 0 \xrightarrow{\text{meilleur}} \text{isotrope}$$

$$\langle f(t) f(t') \rangle = \delta(t-t') \rightarrow \text{sans mémoire. (pas de corrélat.)} \rightarrow$$

Théorème fluctuation-dissipation

$$f = \sqrt{2 \frac{kT}{\mu}}$$