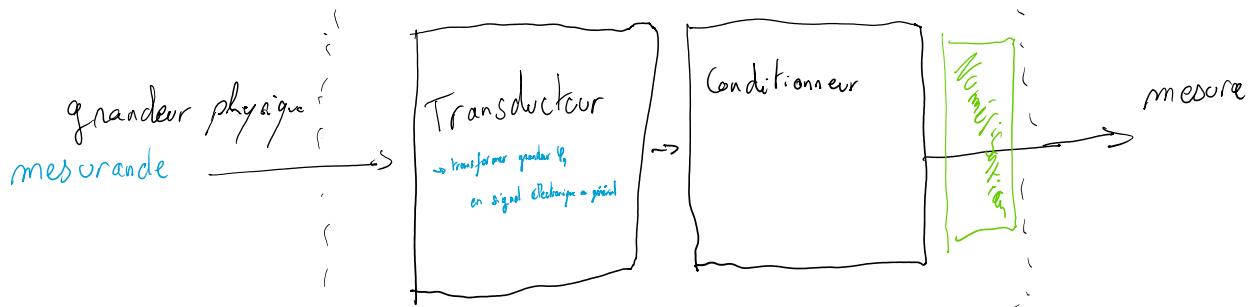


Acquisition des données

07 September 2024 16:30

Acquisition des données :

chaînes d'acquisition



Transducteur :

Conversion du mesurande en grandeur exploitable (généralement électrique)

- ex : - capteur piezo (contrainte méca \leftrightarrow tension)
- photodiode (rayonnement \leftrightarrow courant)
- thermistance ($T^\circ \leftrightarrow$ résistance) Δ pas nécessairement linéaire.

Limites du transducteur :
- intervalle de mesure
- résolution
- bande passante

Conditionnement :

"Préparer" la mesure pour l'expérimentateur

- ex : - amplif.
- linéarisation
- filtrage / débruitage
 \Rightarrow s'appuie sur les outils de traitement du signal.

ex : - Pont de Wheatstone ($R \rightarrow V$)

- Détection synchrone (detection d'un signal à fréquence fixe pour extraire un petit signal d'un bruit)

Numérisation :

Conversion analogique-numérique de la mesure (échantillonage + quantification).

(détail dans le pol)

① Échantillonage

② Quantification

Quelques outils de traitement de signal:

I Transformée de Fourier

⇒ définie sur les signaux continues (dans le domaine physique)

Def $x(t)$ signal
 $\hat{x}(v)$ sa TF avec t le temps et v la fréquence.

$$\hat{x}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi v t} dt$$

Dimensions

$$[\hat{x}] = [x] [t]$$

→ Propriétés de la TF sont vu en cours de Maths / phys.

1. TF d'une sinusnde

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{x}(v) = \frac{A}{2} (\delta(v-f_0) + \delta(v+f_0))$$

2. Relation entre TF et filtrage linéaire

$$y(t) = (h * x)(t)$$

Sortie du filtre

Entrée du filtre

⇒ réponse impulsionnelle (réponse à $x=\delta(t)$).

Rq: Produit de convolution
 $y(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-t') x(t') dt'$

Alors $\hat{y}(v) = \hat{h}(v) \cdot \hat{x}(v)$

⇒ réponse fréquentielle = produit de transfert.

De même si:

$$y(t) = g(t) x(t) \xrightarrow{\text{TF}} \hat{y}(v) = (\hat{g} * \hat{x})(v)$$

Rq: Dimension du dirac

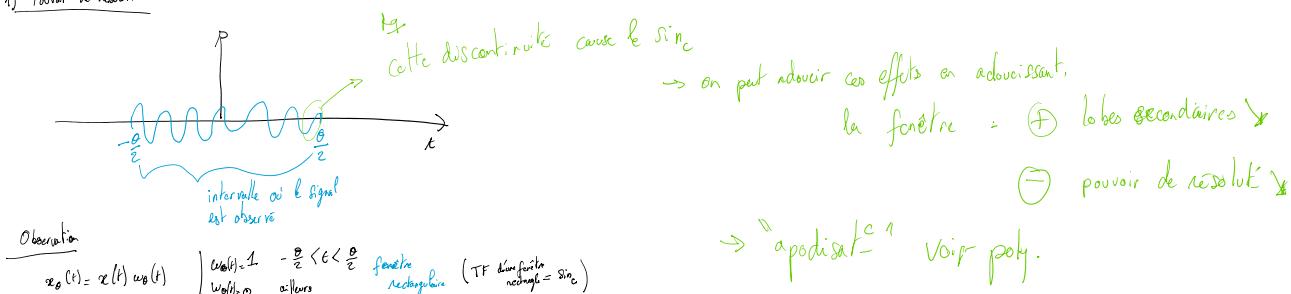
$$[\hat{x}] = [x] [t] \Rightarrow [\delta(v)] = [v]^{-1} = [t]$$

$= [\delta(t)] \cdot [x]$

Résolution fréquentielle

→ en pratique: observation des signaux sur une durée finie

1) Pouvoir de résolution



cette discontinuité cause le sinc
 → on peut adoucir ces effets en adoucissant,

la fenêtre = \oplus lobes secondaires

② pouvoir de résolution

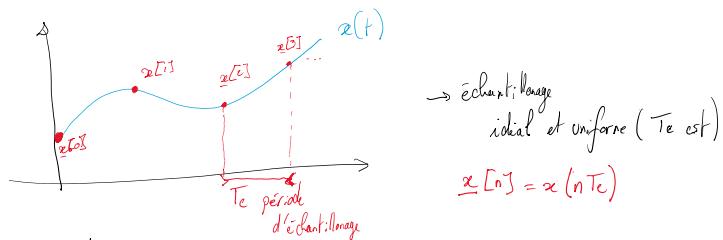
III Échantillonnage

1) Théorème d'échantillonnage

Notations: $x(t) \rightarrow \underline{x}[n]$
 ... l'absence \rightarrow n indice de n ème échantillon prélevé

... l'échantillonnage

Notations: $x(t) \rightarrow \underline{x}[n]$ prélevé
signal physique signal échantillonné



$$f_e = \frac{1}{T_c} \text{ fréquence d'échantillonnage.}$$

Question: Sous quelles conditions l'échantillonnage s'effectue sans perte d'information? \hookrightarrow on peut interpoler pour retrouver le signal de base.

Réponse: critère de Shannon (à la base du théorème de Nyquist)

① Représentation du signal échantillonné

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \sum_n x[n] \delta(t - nT_c) \\ &\approx x(t) \sum_n \delta(t - nT_c) \end{aligned}$$

peigne de Dirac $\underline{\underline{L}}_{T_c}(t)$

Alors $\hat{x}_e(\nu) = (\hat{x} * \underline{\underline{L}}_{T_c})(\nu)$

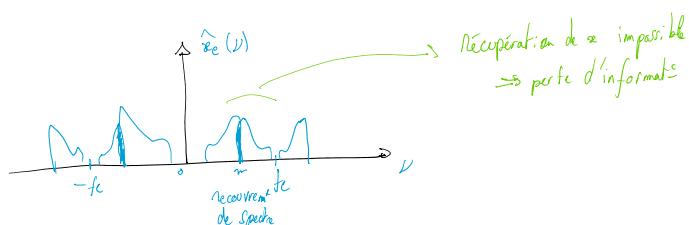
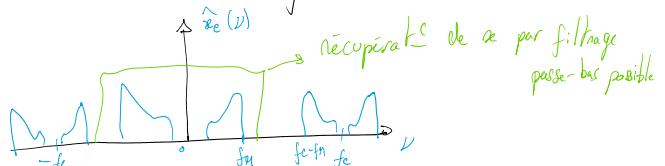
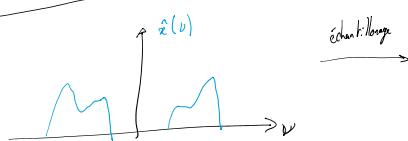
on $\hat{\underline{\underline{L}}}_{T_c}(\nu) = \frac{1}{T_c} \underline{\underline{L}}_{\frac{1}{T_c}}(\nu)$ pb de $\nu \gg t$? voir poly.

Alors $\hat{x}_e(\nu) = \frac{1}{T_c} (\hat{x} * \underline{\underline{L}}_{\frac{1}{T_c}})(\nu)$

$$= \frac{1}{T_c} \sum_n (\hat{x} * \delta_{\frac{n}{T_c}})(\nu)$$

$\boxed{\hat{x}_e(\nu) = f_c \sum_n \hat{x}(\nu - n f_e)}$ $\Rightarrow \hat{x}_e$ est périodique de période f_e

Illustration:



Condition:

$$f_N < f_c - f_n$$

$$\boxed{f_N < \left(\frac{f_c}{2} \right)} \text{ Critère de Shannon.}$$

fréquence de Nyquist

filtre anti-repliement: placé en amont de l'échantillonneur

filtre anti-repliement: placé en amont de l'échantillonneur
 \rightarrow filtre passe-bas (PB) de $f_c \leq \frac{f_e}{2}$

- ⊕ Évite le repliement du spectre
- ⊖ HF perdues

2) Transformée de Fourier discrète

\rightarrow observation sur une durée finie + échantillonnage = N échantillons

+ TF discrète

$$\left[\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j \frac{2\pi n k}{N}}, \quad k = 0, \dots, N-1 \right]$$

↓ TF discrète inverse

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}[k] e^{+j \frac{2\pi n k}{N}}$$

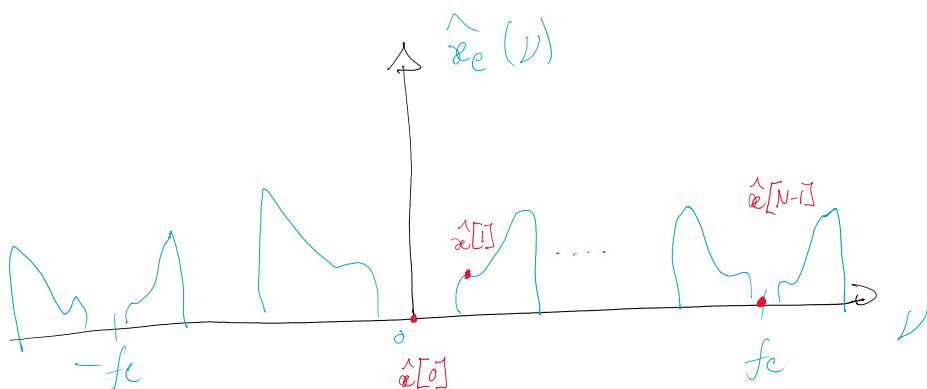
↓ Lien avec la TF continue

$$x_c(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \delta(t - nT_c)$$

$$\hat{x}_c(\nu) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j 2\pi \nu n T_c)$$

Donc en prenant $\nu = \frac{k}{N} f_c$

$$\text{On a } \hat{x}[k] = \hat{x}_c\left(\frac{k}{N} f_c\right)$$



(fft sur python calcule par défaut
sur l'intervalle (0, f_c))

En l'absence de repliement

$$\hat{x}[k] = (f_c \hat{x}[k f_c]) \text{ si } k \leq N$$

$$\hat{x}[k] = \begin{cases} 1 & \text{if } k \leq \frac{N}{2} \\ -1 & \text{if } k > \frac{N}{2} \end{cases}$$

en python

```
freq = np.arange(N) * fc / N
```

Le BRUIT en Traitement de Signal

débruitage = étape clé du conditionnement

I. Quelques définitions

bruit = perturbations qui dégrade la mesure

Notations: $x(t)$ = mesure

$x_o(t)$ = signal d'intérêt

$b(t)$ = bruit

Rapport signal sur bruit (RSB ou SNR)

$$RSB_{dB} = 10 \log \left(\frac{P_{x_o}}{P_b} \right) \text{ avec } P_x = \frac{1}{\Theta} \int_{-\Theta/2}^{\Theta/2} |x(t)|^2 dt \text{ la puissance moyenne qd } \Theta \rightarrow \infty$$

↑
tps d'intégration

Modèle de signal bruité

• bruit additif $x(t) = x_o(t) + b(t)$

• bruit multiplicatif, convolutif ...

⇒ bruit modélisé comme un signal aléatoire

II. Signaux aléatoires

si $b(t)$ = signal aléatoire \Rightarrow à chaque instant t la valeur de $b(t)$ est le tirage d'une variable aléatoire

Propriétés utilisées pour le caractériser

• moyenne $m_B = \langle b(t) \rangle$

• variance $\sigma_B^2 = \langle [b(t) - m_B]^2 \rangle$

• covariance entre $b(t)$ et $b(\tau)$

$$\gamma_B(t, \tau) = \langle [b(t) - m_B][b(\tau) - m_B] \rangle$$

bruit HF → γ_B basse
 bruit LF → γ_B haute

appel $\gamma \approx$ corrélation

Pour un bruit stationnaire

$\gamma_B(t, \tau)$ ne dépend que de $(t - \tau)$

→ c'est la fonction d'auto-covariance, le contenu spectral du bruit

$\gamma_B(t, \tau)$ ne dépend que de τ
 → c'est la fonction d'auto covariance
 ⇒ contient toute l'information sur le contenu spectral du bruit

ex: bruit blanc

$$\begin{cases} m_B = 0 \\ \gamma_B(\tau) = \sigma_B^2 \delta(\tau) \end{cases} \rightarrow \text{aucune corrélation des valeurs du bruit entre deux instants} \quad (\text{les valeurs de } b(t) \text{ et } b(\tau) \text{ sont systématiquement décorrélées})$$

bruit blanc gaussien → tirage selon une loi gaussienne $\sim \mathcal{N}(0, \sigma_B^2)$

Densité spectrale de puissance

→ caractérise la contribution des fréquences à la puissance totale du bruit.

$$P_B = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta |b(t)|^2 dt \quad (\text{formule de Parseval - Planckot})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |b_\Theta(\nu)|^2 d\nu$$

$$(\text{ergodicité: } \bar{x} = \langle x \rangle_t)$$

moyenne stat = moyenne temp

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Theta} |\hat{b}_\Theta(\nu)|^2$$

> 0
densité spectrale de puissance

$$[S_B(\nu) = \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{1}{\Theta} |\hat{b}_\Theta(\nu)|^2]$$

Δ dimension

$$\text{si } P_B \text{ en } [b]^2 \rightarrow S_B \text{ en } \frac{[b]^2}{Hz}$$

En fait

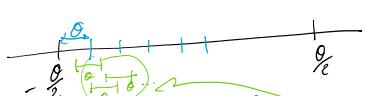
$$\hat{S}_B = S_B \quad (\text{Théo de Wiener - Khintchine})$$

ex: Bruit blanc

$$S_B(\nu) = \sigma_B^2, \forall \nu$$

Estimation de la densité spectrale de puissance

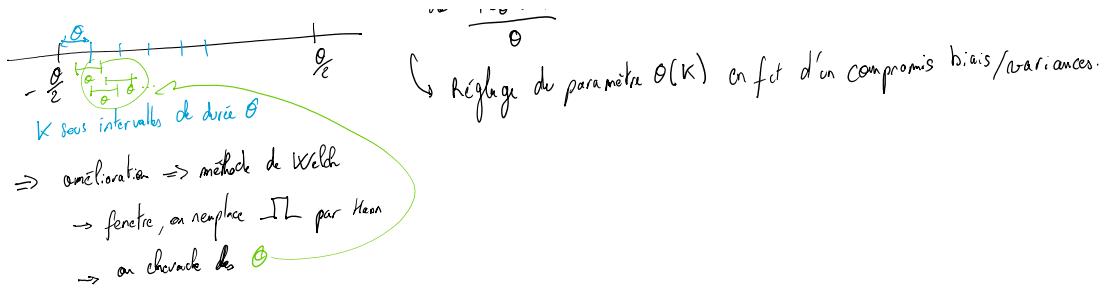
↪ méthode du périodogramme



on prend les moyennes sur les K termes de $\frac{|\hat{b}_\Theta(\nu)|^2}{\Theta}$

s: Θ trop petit → résolution fréq faible → biais grand
 s: K trop faible → variance élevée → moyenne pourrie

↪ réglage du paramètre Θ(K) en fait d'un compromis biais/variance.



III Détection Synchrones

A) Contexte

Objectif: Améliorer le SNR dans le cas où le signal et la transmettre sont bien localisé en fréq

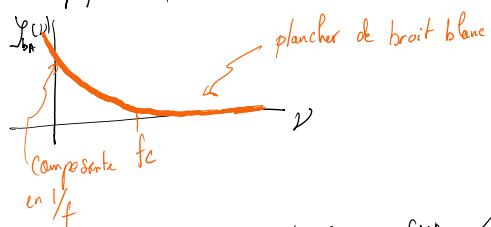
ex: amplification d'une composante BF

$$x(t) \rightarrow A \rightarrow y(t) = A x(t) + b_A(t)$$

↑ bruit produit par l'amplificateur

en général $b_A(t) \sim \frac{1}{f_x}$ si x BF $\rightarrow b_A \sim \text{HF}$ noye le signal.

Pb: L'amplification produit un bruit de scintillation/flicker



Si le contenu fréquentiel de $x(t)$ est $\ll f_c \Rightarrow$ SNR extérieur à \ll SNR intérieur

Idee: Amplifier le signal modulé = transposé en fréq

Principe:

$$x(t) \rightarrow \boxed{x} \rightarrow x_m(t) \rightarrow A \rightarrow y(t) = A x_m(t) + b_A(t)$$

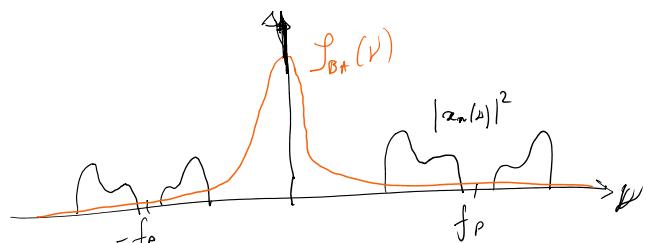
↑ portance de freq f_p

$x_m(t) = x(t) \cos(2\pi f_p t)$
 modulant portance

Modulation d'amplitude à portance supprimée

En Fourier:

$$\hat{x}_m(\nu) = \frac{1}{2} (\hat{x}(\nu - f_p) + \hat{x}(\nu + f_p))$$



→ L'amplification ne détériore plus le RSB

\Rightarrow Démodulation nécessaire

↓ détecteur synchrones

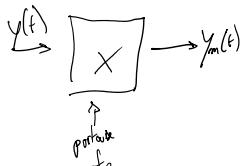
Distinguer possible entre la portance

\Rightarrow ...

↳ détecteur synchrones

2) Démodulation synchrones

déphasage possible entre la portance du modulateur et celle du démodulateur.



$$y_m(t) = y(t) \cdot \cos(2\pi f_p t + \varphi)$$

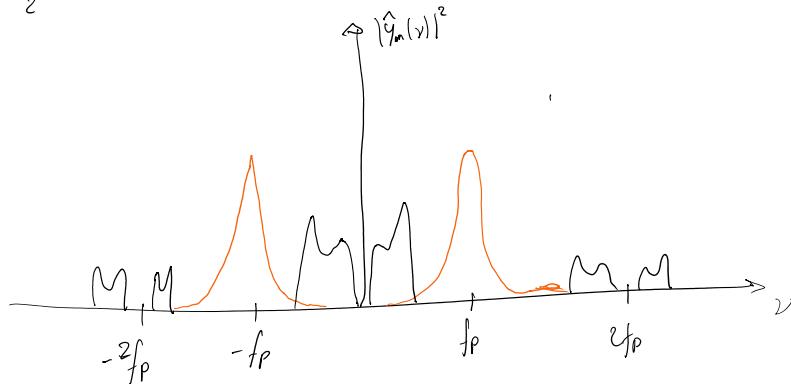
$$y_m(t) = A x_m(t) \cos(2\pi f_p t + \varphi) + b_n(t) \cos(2\pi f_p t + \varphi)$$

$$= A x(t) \cos(2\pi f_p t) \cos(2\pi f_p t + \varphi)$$

$$= \frac{A}{2} (\cos(4\pi f_p t) + \cos \varphi)$$

$$= \frac{A}{2} \cos \varphi x(t) + \frac{A}{2} x(t) \cos(4\pi f_p t + \varphi) + b_n \cos(2\pi f_p t + \varphi)$$

$$\hat{|y_m(t)|^2}$$



→ Enfin filtrage PB de fréq de coupure < f_p f_g, on récupère

$$y_m \rightarrow \boxed{z(t) \approx \frac{A}{2} \cos \varphi x(t)}$$

△ On doit avoir $\cos \varphi \approx 1$ pour démoduler efficacement.

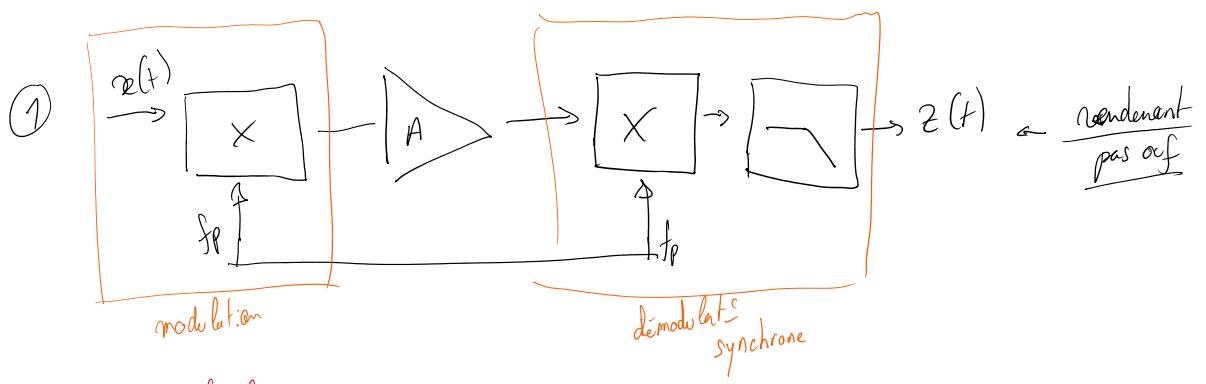
⇒ démodulation synchrones (portance conservée, verrouillage de phase pour obtenir φ).

Soit

① On injecte la même portance

② On utilise une boucle à verrouillage de phase pour assurer la phase de démodulateur

③ MA à portance conservée $x_m(t) = (1 + m x(t)) \cos(2\pi f_p t)$ supposée que $Lx=0$



modulation

démodulation
synchrone

IV Modulation de fréquence

→ La MFA est de faible rendement

→ On transmet

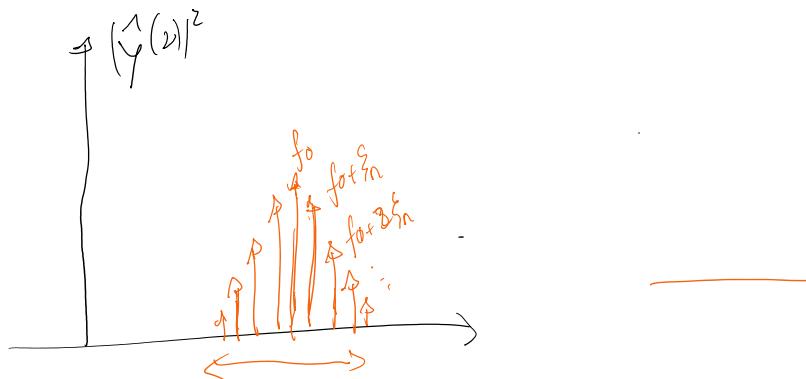
$$y(t) = \cos(2\pi f_0 t + 2\pi m \int_0^t \alpha(t') dt')$$

La fréquence instantanée est

$$f_0 + m\alpha(t)$$

$$\text{Si } \alpha(t) = X \cos(2\pi f_m t)$$

$$\text{on a } y(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(\beta) \cos\left(2\pi(f_0 + m\beta_m)t\right)$$



Embranement spectral $\approx 98\%$ de l'énergie du signal modulé
est compris dans la bande de largeur $B_c = 2(mX + \beta_m)$

rigole de Carson

Incertitudes

10 September 2024 15:48

→ inspiré de Fruchard → inspiré de GOM
guide universel des mesures?

I Definitions

1) Error

Notations

α_0 = la "vraie" valeur \rightarrow mesurande

ϱ = measure

$$c(x) = |x - x_0| \quad \text{erreur de mesure}$$

→ erreur aléatoire

→ erreur systématique

2 types d'erreur : - erreurs aléatoires = fluctuations, bruit, ...
- erreurs systématisques = erreur d'étalonnage

⇒ En pratique, λ_0 inconnu

\Rightarrow On estime l'incertitude plutôt que l'erreur

2) Inertitude

Inertie: il indique l'incertitude ou l'erreur dans la mesure. Il exprime le degré de connaissance du mesurande apporté par la mesure.

- a) On exprime un résultat sous la forme

$$X = x \pm \Delta x$$

mesure \ incertitude

2 choix possible pour Δx

- ① Incertitude-type \rightarrow écart-type sur la mesure
↳ *recap en prépa*
- ② Incertitude élargie \rightarrow intervalle de confiance.

Δ Chiffres significatifs

\hookrightarrow l'incertitude de x est présente avec tout CS

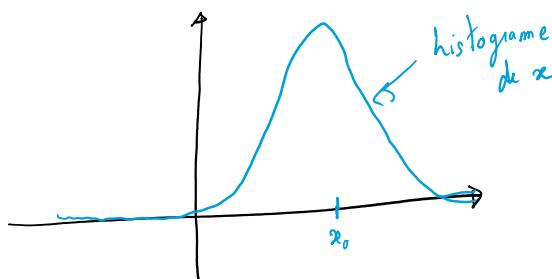
ex: $x = 1.23 \pm 0.45$
 $x = (2.379 \pm 0.003) 10^{-3}$

3) Types d'incertitudes

\rightarrow Classification du G09

a) Type A

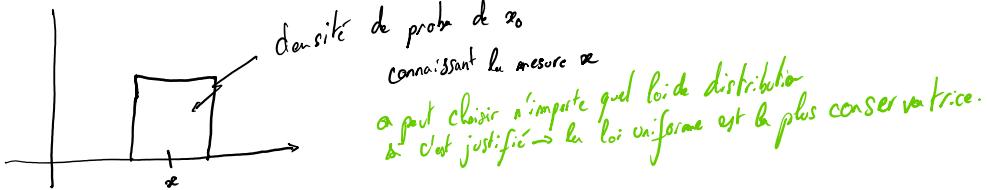
\Rightarrow Toute incertitude qui peut être évaluée à partir d'une série de mesures
 \Rightarrow analyse statistique



b) Type B

\Rightarrow Tout autre type d'incertitude
 En particulier: incertitudes évaluées à partir d'une unique mesure
 \Rightarrow repose sur un a priori sur l'état de connaissance de la mesure.

densité de proba de x_0
 connaissant la mesure x I.P.A. distribution



II. Estimation des incertitudes

1) Incertitude type et élargie

V type d'incertitude : - incertitude type = écart-type de la distribution considérée notée $\mu(x)$

- incertitude élargie $U(x) = k \mu(x)$

k : facteur d'élargissement qui dépend du niveau de crédibilité de l'intervalle élargi $[x - U(x), x + U(x)]$

Par exemple : si l'incertitude suit une loi normale

$k=2 \Rightarrow 95\%$ de crédibilité

2) Estimation de type A

On répète N mesures $x^{(1)}, \dots, x^{(N)}$

L'écart-type de la distribution des $x^{(n)}$ donne l'incertitude-type sur chaque mesure.

$$\mu(x^{(n)}) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^N (x^{(n)} - \bar{x})^2}$$

$$\text{avec } \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x^{(n)}$$

→ en python np.std(x, ddof=1)

estimat. non biaisé
pr dirigé par le bon nb de degrés de liberté

pour mettre $\frac{1}{N-1}$ plutôt que $\frac{1}{N}$

On peut privilégier la moyenne \bar{x} comme mesure de x_0

Q : Incertitude sur \bar{x} ?

si les mesures sont indépendantes

$$\text{Var}(\bar{x}) = \frac{1}{N^2} \text{Var}\left(\sum_{n=1}^N x^{(n)}\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{n=1}^N \text{Var}(x^{(n)}) = \frac{1}{N} \mu(x^{(n)})^2$$

$$\text{Résultat } \mu(\bar{x}) = \frac{\mu(x^{(n)})}{\sqrt{N}}$$

→ on "tue" l'incertitude de type A
par une moyenne si N grand.

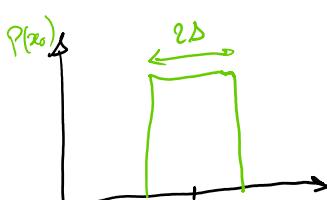
3) Estimation de type B

Repose sur un a priori sur l'information apportée par la mesure.

cas d'une loi uniforme

⇒ lorsque le résultat est quantifié

ex : - affichage numérique
- ...



\Rightarrow lorsque x est...
ex: - affichage numérique
- lecture de graduation



$$\text{Var}(x) = \int_{\mathbb{R}} (y-x)^2 p(y) dy \Rightarrow \boxed{\mu_s(x) = \frac{\Delta}{3}}$$

$$= \frac{1}{2P} \int_{x-\Delta}^{x+\Delta} (y-x)^2 dy = \frac{\Delta^2}{3}$$

ex: - graduation $\Delta = \frac{\Delta_{\text{grad}}}{z}$

- affichage numérique: $\Delta = \Delta_{\text{numérique}}$

ii) Incertitude totale

Yeo variances s'additionnent

$$\Rightarrow \boxed{\mu_{\text{tot}}(x) = \sqrt{\mu_A^2(x) + \mu_B^2(x)}}$$

III Composition des incertitudes

1) Formule de propagation des incertitudes

On souhaite connaître l'incertitude sur une grandeur $G(x_1, \dots, x_n)$

où chaque mesure x_i est assortie d'une incertitude $\mu(x_i)$

$$\boxed{\mu(G) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \mu(x_i)^2}}$$

ex:



$$R = \frac{U}{I}$$

mention du bruit de johnson qui est un bruit thermique (type A)
qui s'ajoutera mais en générant $\mu_R(x) \ll \mu_U(x)$
dans ce cas.

$$\mu(R) = \sqrt{\left(\frac{1}{I}\right)^2 \mu(U)^2 + \left(\frac{U}{I^2}\right)^2 \mu(I)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu(R)}{R} = \sqrt{\left(\frac{\mu(U)}{U}\right)^2 + \left(\frac{\mu(I)}{I}\right)^2}$$

2) Simulation Monte-Carlo

- la formule de propagation n'est pas toujours exploitables
- on simule des tirages des x_i suivant la loi d'écart-type $\mu(x_i)$
- on calcule G associé à chaque tirage
- estimation de $\mu(G)$ par une méthode de type A.

\Rightarrow On calcule G associé à chaque charge.

\Rightarrow Estimation de $u(G)$ par une méthode de type A.

IV Comparaison des mesures

critère Ecart Normalisé ou Z-score

① Si on a une valeur de référence (réf)

$$z = \frac{|x - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$$

mesure dont l'incertitude
est négligeable devant $u(x)$.

On s'assure de la compatibilité de notre mesure si $z \leq k$ = facteur d'élargissement choisi.

\rightarrow souvent $k=2$.

② On s'assure de la compatibilité de deux mesures entre elles

$$z = \frac{|x^{(1)} - x^{(2)}|}{(\mu(x^{(1)})^2 + \mu(x^{(2)})^2)^{1/2}}$$

Poly

07 September 2024 16:32



cours24_ch
aps123

ACQUISITION DES DONNÉES

La chaîne d'acquisition décrit les étapes de transformation d'un signal, partant de la grandeur physique (qui décrit le phénomène observé), jusqu'à la grandeur acquise, accessible à l'expérimentateur. Elle se décompose en deux étages [5] :

- Le capteur convertit la grandeur physique en une grandeur exploitable. En général, il s'agit d'une conversion en une grandeur électrique.
- Le conditionneur est un circuit électronique permettant de mettre en forme la mesure pour l'expérimentateur.

1.1 Capteur

On appelle mesurande décrit la quantité que l'on souhaite mesurer. Cette grandeur physique peut être de tout type. Le capteur permet de convertir cette quantité en une grandeur électrique. On peut citer par exemple :

- le capteur piézoelectrique convertit une contrainte mécanique en une tension ;
- la photodiode convertit un rayonnement optique en courant ;
- la thermistance convertit une température en résistance ;
- le microphone convertit une pression acoustique en tension.

Le fonctionnement d'un capteur implique généralement des limitations qui doivent être prises en compte par l'utilisateur. Nous en listons quelques-unes.

- L'intervalle de mesure désigne la plage de valeurs du mesurande pour lesquelles le capteur fonctionne avec une précision donnée.
- La résolution définit la plus petite valeur mesurable. Elle est limitée par la présence de bruit de mesure.
- La bande passante définit la gamme de fréquence exploitable. Elle peut être limitée par l'apparition de non linéarités comme le phénomène d'hystéresis.

La connaissance des limites du capteur utilisé est essentielle pour déterminer les incertitudes sur les mesures obtenues (cf. chapitre 5).

1.2 Conditionnement

Le conditionneur, placé en aval du capteur permet de préparer la mesure pour l'expérimentateur. Il peut s'agir :

- d'amplifier le signal électrique ;
- de linéariser la relation avec le mesurande ;
- de filtrer le signal pour éliminer des composantes parasites.

Le pont de Wheatstone et la détection synchrone sont des exemples de circuits électriques utilisés comme conditionneurs.

Le conditionnement s'appuie sur la théorie du traitement du signal. En effet, celui-ci consiste à en extraire de l'information que l'on juge utile à partir d'un signal brut. Cela passe par la mise en forme du signal pour mieux l'analyser, le transmettre, le stocker ou le nettoyer.

Dans ce cours, nous nous concentrerons sur des signaux unidimensionnels, c'est-à-dire dépendant d'une seule variable. Par souci de simplicité, on décrira les modèles de signaux temporels.

1.3 Numérisation

Une grande partie des mesures effectuées le sont à l'aide d'appareils de mesure numériques. Ceci permet une acquisition des données à taux d'échantillonnage élevé et sur une grande capacité de stockage. La numérisation d'une grandeur analogique comporte une étape d'échantillonnage et une étape de quantification du signal. La figure 1.1 schématise le principe de la conversion analogique-numérique.



FIGURE 1.1 – Conversion analogique-numérique.

- L'échantillonnage consiste à extraire une suite de valeurs successives à partir du signal analogique. La période d'échantillonnage T_e définit l'intervalle entre deux échantillons.
- La quantification attribue à chaque échantillon du signal une valeur parmi un nombre fini de valeurs possibles, noté E_q . Cette opération est caractérisée par deux grandeurs : le pas de quantification Δ_q informe sur la finesse de l'approximation réalisée et le nombre de niveaux I_q .

Selon le contexte, il peut être intéressant de modéliser le signal numérique lui-même — qui est le seul réellement accessible à l'utilisateur — ou le signal physique, que l'on peut vouloir restituer. Les modélisations de l'échantillonnage et de la quantification peuvent aussi être intéressantes pour déterminer la perte d'information consécutive à

ces deux opérations. Ainsi, selon le choix qui est fait, les signaux sont modélisés comme des fonctions du temps ou des suites numériques. Le tableau 1.1 résume les types de signaux qui peuvent être considérés.

TABLEAU 1.1 – Modèles de signaux.

		Temps	
		Continu	Discret
Valeurs du signal	Continues	Signal analogique $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $t \mapsto x(t)$	Signal échantillonné $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ $n \mapsto x[n]$
	Discrètes	Signal quantifié $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_q$ $t \mapsto x(t)$	Signal numérique $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{E}_q$ $n \mapsto x[n]$

L'organisation de ce cours est la suivante.

1. Dans le chapitre 2, nous étudions la représentation des signaux analogiques. En particulier, nous nous concentrons sur la transformée de Fourier. Nous présentons également le filtrage des signaux analogiques.
2. Le chapitre 3 détaille le processus de numérisation d'un signal. L'échantillonnage est présenté, et les conditions pour qu'il s'effectue sans perte d'information sont données. L'étude de la quantification est brièvement abordée.
3. Le chapitre 4 décrit quelques méthodes de conditionnement de signaux analogiques. Après avoir introduit le concept de bruit en traitement du signal, nous présentons les principes de la modulation d'amplitude et de fréquence des signaux analogiques. Nous appliquons ces concepts à l'étude de la détection synchrone.
4. Dans le chapitre 5, nous abordons la notion d'estimation statistique, propre à la représentation aléatoire des signaux et des mesures. La détermination et le traitement des incertitudes de mesures sont présentés.
5. Le chapitre 6, aborde la question de l'ajustement de données à un modèle. En particulier, nous décrivons le principe de la régression linéaire.

Quelques ressources utilisées pour préparer ce cours et disponibles à la bibliothèque sont : [3, 2, 4].

Chapitre 1. Acquisition des données



Chapitre 2

REPRÉSENTATION DES SIGNAUX ANALOGIQUES

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la représentation des signaux analogiques. Nous nous focalisons sur le cas des signaux unidimensionnels. Ceux-ci sont vus comme des fonctions, à valeurs réelles ou complexes, de la variable temporelle.

2.1 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est un outil fondamental pour l'analyse, le traitement ou la synthèse des signaux. Il s'agit de décomposer le contenu fréquentiel des signaux. Nous décrivons ici les bases théoriques relatives à cette représentation. Pour une étude plus complète de la transformée de Fourier, le lecteur pourra se référer aux livres de Vetterli et al. [11] ou de Mallat [7], entre autres.

2.1.1 Définition

Définition 2.1 (Espaces $L^p(\mathbb{R})$). Soit $p > 0$. L'espace vectoriel $L^p(\mathbb{R})$ est défini par

$$L^p(\mathbb{R}) = \left\{ x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

Définition 2.2 (Transformée de Fourier). Soit $x \in L^1(\mathbb{R})$. Sa transformée de Fourier $\hat{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par

$$\hat{x}(v) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-j2\pi vt} dt, \quad \forall v \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

La variable v est appelée *fréquence*. On exprime parfois la transformée de Fourier en fonction de la pulsation ω telle que $\omega = 2\pi v$.

Remarque (Cas multidimensionnel). Dans le cas de signaux de la variable spatiale $r \in \mathbb{R}^3$, la transformée de Fourier du signal s'exprime généralement en fonction du vecteur

Chapitre 2. Représentation des signaux analogiques

d'onde \mathbf{k} , qui est l'analogue de la pulsation des signaux temporels. Elle est donnée, pour tout $x \in L^1(\mathbb{R}^3)$, par

$$\hat{x}(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} x(r) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} dr, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^3 .

On peut alors montrer que la transformée de Fourier est inversible. Son inverse est donnée par le théorème suivant (voir [7] pour une démonstration).

Théorème 2.1 (Transformée de Fourier inverse). Soit $x \in L^1(\mathbb{R})$ tel que sa transformée de Fourier $\hat{x} \in L^1(\mathbb{R})$. On peut reconstruire le signal grâce à la transformée de Fourier inverse comme suit :

$$x(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{x}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

L'espace L^1 est un cadre commode pour définir la transformée de Fourier, mais cet espace caractérise mal les signaux physiques. Les signaux physiques sont mieux représentés par l'espace L^2 des signaux d'énergie finie.

Définition 2.3 (Signaux d'énergie finie). Soit $x, y \in L^2(\mathbb{R})$. Ces signaux sont dits d'énergie finie. Leur produit scalaire est défini par

$$\langle x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} x(t) \overline{y(t)} dt. \quad (2.2)$$

On appelle énergie du signal x la quantité $\|x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2 dt$.

On peut montrer que la transformée de Fourier s'étend aux signaux d'énergie finie. C'est le théorème de Plancherel. Dans ce cadre, la transformée de Fourier est une isométrie, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$\langle x, y \rangle = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle, \quad \forall x, y \in L^2(\mathbb{R}). \quad (2.3)$$

Exercice 2.1 — Soit x le signal donné par

$$x(t) = \text{sinc}(\pi t).$$

1. Montrer que $x \in L^2(\mathbb{R}) \setminus L^1(\mathbb{R})$.
2. Calculer la transformée de Fourier du signal y tel que

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. En déduire la transformée de Fourier de x .

2.1.2 Définition généralisée

Des signaux simples, comme les sinusoides, ne sont pas d'énergie finie. Les intégrales de Fourier de tels signaux sont donc divergentes. Plus généralement, les signaux de puissance finie sont les signaux pour lesquels la puissance moyenne est finie :

$$P_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (2.4)$$

Cette condition est physiquement réaliste, et s'applique à des signaux pour lesquels nous avons néanmoins envie de pouvoir définir la transformée de Fourier. Pour cela, la transformée de Fourier des distributions a été introduite. Une distribution est un concept mathématique permettant d'étendre la notion de fonction.

2.1.2.1 Brève introduction aux distributions

Seules les notions essentielles à ce cours sont présentées.

Définition 2.4 (Espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ si et seulement si ϕ est infiniment dérivable et toutes ses dérivées sont à décroissance rapide, c'est-à-dire

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| t^\alpha \frac{d^\beta \phi}{dt^\beta}(t) \right| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}.$$

Définition 2.5 (Distribution tempérée). Soit $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire et continue. T est alors appelée **distribution tempérée**.

Exemple 2.1 (Signaux de puissance finie). Soit $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un signal de puissance finie. La forme linéaire T_x donnée par

$$T_x(\phi) = \int_{\mathbb{R}} x(t)\phi(t)dt$$

est une distribution tempérée. Par abus de notation, on écrit $T_x(\phi) = \langle T, \phi \rangle$.

Exemple 2.2 (Distribution du Dirac). Soit $\delta : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ la distribution tempérée, appelée **impulsion de Dirac**, telle que

$$\delta(\phi) = \phi(0).$$

Par abus de notation, on écrit $\delta(\phi) = \langle \delta, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \delta(t)\phi(t)dt$.

Remarque. La dérivée d'une distribution tempérée est une distribution. Elle est définie par analogie avec l'intégration par parties, de sorte que la dérivée de T vérifie

$$\langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Exercice 2.2 — Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'échelon de Heaviside tel que

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la dérivée au sens des distributions de l'échelon de Heaviside est le Dirac, c'est-à-dire $\mathcal{T}'_u = \delta$.

2.1.2.2 Transformée de Fourier des distributions

La définition de la transformée de Fourier \hat{T} d'une distribution tempérée T s'appuie sur la propriété d'isométrie (2.3). Ainsi, elle vérifie

$$\langle \hat{T}, \phi \rangle = \langle T, \hat{\phi} \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Exercice 2.3 — Calculer la transformée de Fourier de la distribution de Dirac.

2.1.3 Quelques propriétés

La transformée de Fourier est un opérateur linéaire vérifiant un certain nombre de propriétés. Le tableau 2.1 condense certaines d'entre elles.

TABLEAU 2.1 — Propriétés de la transformée de Fourier.

Nom de l'opération	Signal	Transformée de Fourier
Retard	$x(t - \tau)$	$\hat{x}(\nu)e^{-j2\pi\nu\tau}$
Modulation	$e^{j2\pi\nu\tau}x(t)$	$\hat{x}(\nu - \zeta)$
Dilatation ($ a < 1$) / Contraction ($ a > 1$)	$x(at)$	$\frac{1}{ a }\hat{x}\left(\frac{\nu}{a}\right)$
Conjugaison	$\overline{x(t)}$	$\overline{\hat{x}(-\nu)}$
Dérivation n -ième	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$(2\pi\nu)^n \hat{x}(\nu)$

Remarque. En conséquence de la propriété de conjugaison du tableau, la transformée de Fourier d'un signal à valeurs réelles est à symétrie hermitienne. En d'autres termes, si $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors

$$\hat{x}(\nu) = \overline{\hat{x}(-\nu)}, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.4 — Soit δ_{f_0} le Dirac centré en f_0 , c'est-à-dire tel que $\delta_{f_0}(\nu) = \delta(\nu - f_0)$.

1. À l'aide des propriétés de la transformée de Fourier, calculer la transformée de Fourier inverse de la distribution δ_{f_0} .
2. En déduire la transformée de Fourier du signal sinusoïdal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$.
3. Quelle est la transformée de Fourier du signal sinusoïdal dont la phase à l'origine est quelconque, soit $y(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$.

2.2 Filtrage linéaire

2.2.1 Définition et caractérisation temporelle

En toute généralité, on appellera *système* ou *filtre* tout opérateur \mathcal{L} agissant de manière déterministe sur un signal d'entrée, appelée *excitation*, pour produire un signal de sortie, appelé *réponse* du filtre. Le schéma de la figure 2.1 résume ceci.

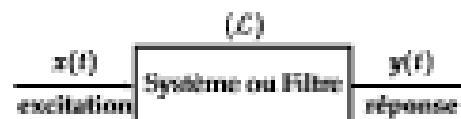


FIGURE 2.1 – Schéma général d'un filtre.

Le comportement de nombreux systèmes physiques peut être considéré, dans un certain domaine de fonctionnement, comme

- *linéaire* : $\mathcal{L}\{\lambda x_1 + x_2\} = \lambda \mathcal{L}\{x_1\} + \mathcal{L}\{x_2\}$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$;
- *continu* : $\mathcal{L}\{\lim_n x_n\} = \lim_n \mathcal{L}\{x_n\}$;

Remarque. En physique, on dit d'un système linéaire qu'il relève du principe de superposition. Ce principe est utilisé en électronique pour déterminer la réponse d'un circuit comportant plusieurs générateurs. On détermine la réponse à chacun générateur en éteignant les autres (générateurs de tension remplacés par des courts-circuits et générateurs de courant par des circuits ouverts), puis on applique la propriété de linéarité.

Pour tout système linéaire continu, il existe une fonction (ou une distribution) k de deux variables telle que

$$y(t) = \mathcal{L}\{x\}(t) = \int_{\mathbb{R}} k(t, t') x(t') dt'.$$

En outre, l'hypothèse d'invariance dans le temps est souvent raisonnable. Cela signifie que si l'entrée est retardée d'une durée τ , la sortie sera retardée de la même durée, soit :

$$\mathcal{L}\{x(\cdot - \tau)\}(t) = \mathcal{L}\{x\}(t - \tau).$$

Dans ce cas, la fonction k prend la forme $k(t, t') = k(t - t', 0)$, pour tous $t, t' \in \mathbb{R}$. On en déduit le résultat suivant.

Théorème 2.2 (Filtre linéaire). On appelle *filtre linéaire* tout système \mathcal{L} linéaire, continu et invariant dans le temps. Dans ce cas, il existe une fonction ou distribution h , appelée *réponse impulsionnelle* du filtre, telle que

$$y(t) = \mathcal{L}\{x\}(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t-t')x(t')dt'. \quad (2.5)$$

On note $y = h * x$. L'opérateur $*$ est appelé *produit de convolution*.

Remarque. Le produit de convolution est un opérateur symétrique : $h * x = x * h$.

La réponse impulsionnelle caractérise entièrement le filtre linéaire. Elle tire son nom du fait qu'elle est la réponse du filtre à une impulsion de Dirac : $\mathcal{L}(\delta) = h$.

2.2.2 Caractérisation fréquentielle

La réponse fréquentielle d'un filtre linéaire prend une forme canonique décrite par le théorème 2.3.

Théorème 2.3 (Fonction de transfert). On appelle *fonction de transfert* ou *réponse fréquentielle* d'un filtre linéaire la transformée de Fourier \tilde{h} de la réponse impulsionnelle. Celle-ci vérifie

$$\tilde{g}(\nu) = \tilde{h}(\nu)\tilde{x}(\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Plus généralement, le produit de convolution vérifie les deux propriétés du tableau 2.2.

TABLEAU 2.2 – Propriétés du produit de convolution.

Nom de l'opération	Signal	Transformée de Fourier
Produit de convolution	$y(t) = (h * x)(t)$	$\tilde{g}(\nu) = \tilde{h}(\nu)\tilde{x}(\nu)$
Produit de signaux	$y(t) = g(t)x(t)$	$\tilde{g}(\nu) = (\tilde{g} * \tilde{x})(\nu)$

Exercice 2.5 — Démontrer le résultat (2.6) en partant de l'expression du produit de convolution (2.5) pour calculer la transformée de Fourier de la sortie du filtre y .

2.2.3 Causalité

La causalité est une hypothèse naturelle, qui suppose que les effets ne peuvent pas précéder la cause. Dans notre cas, la réponse du filtre ne peut avoir lieu avant l'excitation.

du système. Autrement dit,

$$x(t) = 0, \quad \forall t < 0 \quad \Rightarrow \quad y(t) = 0, \quad \forall t < 0.$$

En conséquence, la réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire causal vérifie $h(t) = 0$, pour tout $t < 0$.

| **Exercice 2.6** — Démontrer ce dernier résultat.

2.3 Résolution fréquentielle

2.3.1 Pouvoir de résolution

En pratique, nous n'observons les signaux que sur des intervalles de durée finie. La durée d'observation limite la résolution fréquentielle de la transformée de Fourier.

Soit $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ le signal dont on souhaite déterminer la transformée de Fourier. On observe le signal sur l'intervalle $I_\Theta = [-\frac{\Theta}{2}, \frac{\Theta}{2}]$ de durée Θ . Le signal observé x_Θ s'écrit alors

$$x_\Theta(t) = x(t) \mathbf{1}_{I_\Theta}(t),$$

avec $\mathbf{1}_{I_\Theta}$ la fonction porte telle que

$$\mathbf{1}_{I_\Theta}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in I_\Theta, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étant donné la propriété de la transformée de Fourier énoncée au tableau 2.2, la transformée de Fourier du signal observé s'écrit comme un produit de convolution. Or, la transformée de Fourier de la fonction porte est le sinus cardinal : $\hat{\mathbf{1}}_{I_\Theta}(\nu) = \Theta \operatorname{sinc}(\pi \Theta \nu)$. La transformée de Fourier du signal observé s'écrit alors

$$\hat{x}_\Theta(\nu) = \Theta \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu - \xi) \operatorname{sinc}(\pi \Theta \xi) d\xi. \quad (2.7)$$

Lorsque $\Theta \rightarrow \infty$, on a $\Theta \operatorname{sinc}(\pi \Theta \nu) \rightarrow \delta$, donc $\hat{x}_\Theta \rightarrow x$. Néanmoins, la durée d'observation limite le pouvoir de résolution de la transformée de Fourier.

Exemple 2.3. Dans le cas du signal sinusoïdal $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$, la transformée de Fourier attendue est constituée de deux Dirac placés aux fréquences $\pm f_0$, à savoir

$$\hat{x}(\nu) = \frac{1}{2} (e^{j\varphi} \delta(\nu - f_0) + e^{-j\varphi} \delta(\nu + f_0)).$$

L'exercice 2.4 propose une démonstration de ce résultat. La transformée de Fourier du signal observé est donc

$$\hat{x}_\Theta(\nu) = \frac{\Theta}{2} (e^{j\varphi} \operatorname{sinc}(\pi \Theta(\nu - f_0)) + e^{-j\varphi} \operatorname{sinc}(\pi \Theta(\nu + f_0))). \quad (2.8)$$

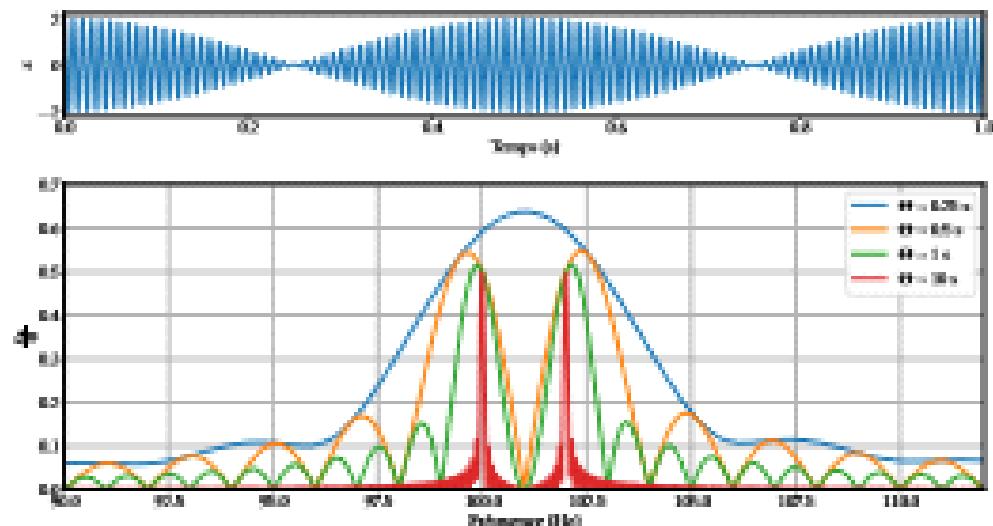


FIGURE 2.2 – En haut : signal formé par deux composantes sinusoïdales de fréquences proches. En bas : effet de la durée d'observation sur le pouvoir de résolution de la transformée de Fourier.

L'étalement du sinus cardinal autour de la fréquence $\pm f_0$ perturbe la détermination de la fréquence exacte de la sinusoïde observée. En particulier, si l'on suppose maintenant que le signal est constitué de la somme de deux sinusoïdes de fréquences f_0 et f_1 proches, la transformée de Fourier observée sera la somme des deux transformées de Fourier (par linéarité).

Nous illustrons cela sur le signal représenté en haut de la figure 2.2 dans le cas où $f_0 = 100\text{ Hz}$ et $f_1 = 102\text{ Hz}$. On observe un phénomène de battage dû à la proximité des deux fréquences formant le signal. En bas de la figure 2.2, nous représentons le résultat obtenu pour différentes durées d'observation. Pour comparer, nous avons tracé ici le module de la transformée de Fourier normalisée : $\frac{|Y(f)|}{|Y_0|}$.

La transformée de Fourier idéale est constituée de deux impulsions de Dirac aux fréquences f_0 et f_1 . À mesure que la durée d'observation augmente, la distinction entre les deux pics devient de plus en plus nette. En revanche, si le signal est observé sur une durée trop courte, le pouvoir de résolution est trop faible pour permettre de distinguer les deux composantes.

2.3.2 Fenêtrage

La présence de lobes secondaires est une autre conséquence de l'observation du signal sur une durée finie. Leur présence peut cependant être atténuée par le procédé du fenêtrage. Ceci consiste à multiplier le signal par une fenêtre de même durée. En

pratique, on a donc

$$x_0(t) = x(t)w_0(t),$$

où w_0 désigne la fenêtre d'apodisation. La transformée de Fourier résultante sera alors obtenue par lissage de \hat{x} par \hat{w}_0 :

$$\hat{x}_0 = \hat{x} * \hat{w}_0. \quad (2.9)$$

Pour quantifier la déformation introduite par ce lissage, nous introduisons deux quantités.

- La bande passante normalisée, notée A_v , indique la résolution largeur du lobe principal induite par le fenêtrage. Elle est donnée par

$$A_v = 2\Theta\nu_0 \quad \text{avec} \quad \left| \frac{\hat{w}(\pm\nu_0)}{\hat{w}(0)} \right|^2 = \frac{1}{2}.$$

Elle est d'autant plus grande que la perte de résolution fréquentielle est importante.

- La hauteur normalisée du lobe secondaire, notée A , s'exprime en décibels. Elle est et donnée par

$$A = 10 \log_{10} \left(\left| \frac{\hat{w}(\pm\nu_0)}{\hat{w}(0)} \right|^2 \right),$$

avec $\pm\nu_0$ la fréquence centrale des deux lobes latéraux.

Le tableau 2.3 présente certaines fenêtres couramment utilisées. La bande passante et la hauteur du lobe secondaire sont également fournies. Les fenêtres et leurs transformées de Fourier sont tracées figure 2.3.

TABLEAU 2.3 – Fenêtres d'apodisation.

Nom	$w(t)$	$\hat{w}(\nu)$	A_v	A (dB)
Rectangulaire	$1_B(t)$	$\Theta \text{sinc}(\pi\Theta\nu)$	0,89	-13
Bartlett	$\left(1 - \frac{ t }{\Theta}\right) 1_B(t)$	$\frac{\Theta}{2} \text{sinc}^2\left(\frac{\pi\Theta\nu}{2}\right)$	1,28	-27
Hann	$\cos^2\left(\pi\frac{ t }{\Theta}\right) 1_B(t)$	$\frac{\Theta}{2} \frac{\text{sinc}(\pi\Theta\nu)}{1 - 4\sin^2(\pi\nu)}$	1,44	-32

Notons que la fenêtre de Hann est celle faisant apparaître le moins de lobes secondaires mais elle diminue le pouvoir de résolution.

2.3.3 Principe d'incertitude

Le principe d'incertitude énonce l'impossibilité d'avoir un signal localisé en temps et en fréquence. Une grande variété d'inégalités caractérisant ce principe existent. Dans [9],

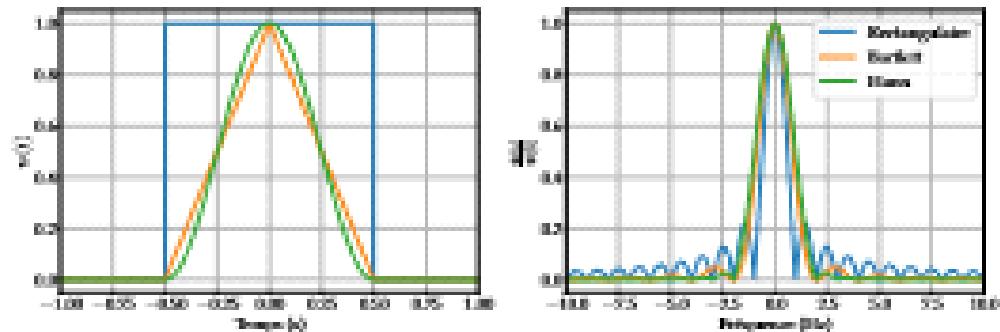


FIGURE 2.3 – Fenêtres d’apodisation (à gauche) et leurs transformées de Fourier (à droite).

les auteurs passent en revue un certain nombres de principes d’incertitudes, et présentent les conséquences pratiques de ces résultats théoriques. Nous énonçons ici le principe d’incertitude d’Heisenberg-Pauli-Weyl.

Théorème 2.4 (Principe d’incertitude d’Heisenberg-Pauli-Weyl). Soit $x \in L^2(\mathbb{R})$. On note

$$\begin{aligned} p_t &= \frac{1}{\|x\|^2} \int_{\mathbb{R}} t|x(t)|^2 dt, & p_v &= \frac{1}{\|x\|^2} \int_{\mathbb{R}} v|\hat{x}(v)|^2 dv \\ \sigma_t^2 &= \frac{1}{\|x\|^2} \int_{\mathbb{R}} (t - p_t)^2 |x(t)|^2 dt, & \sigma_v^2 &= \frac{1}{\|x\|^2} \int_{\mathbb{R}} (v - p_v)^2 |\hat{x}(v)|^2 dv. \end{aligned}$$

Alors,

$$\sigma_t \sigma_v \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (2.10)$$

L’inégalité (2.10) devient une égalité si et seulement si $x(t) = a e^{2\pi i b t} e^{-c(t-m)^2}$ avec $a, b, m \in \mathbb{R}$ et $c > 0$.

La démonstration de ce théorème dans un cas simplifié est proposée dans l’exercice 2.7.

On peut interpréter les différentes quantités mises en jeu en voyant le signal $\frac{|x(t)|^2}{\|x\|^2}$ comme une densité de probabilité. Les quantités p_t et p_v définissent alors le temps moyen et la fréquence moyenne autour desquels sont localisés le signal et sa transformée de Fourier. Les quantités σ_t et σ_v définissent alors la variance temporelle et la fréquentielle du signal et de sa transformée de Fourier. Ces dernières indiquent donc à quel point le signal est étalé autour d’un instant moyen et d’une fréquence moyenne. L’inégalité précise alors que si le signal est très localisé en temps, il est nécessairement étalé fréquentiellement (et inversement).

2.3. Résolution fréquentielle

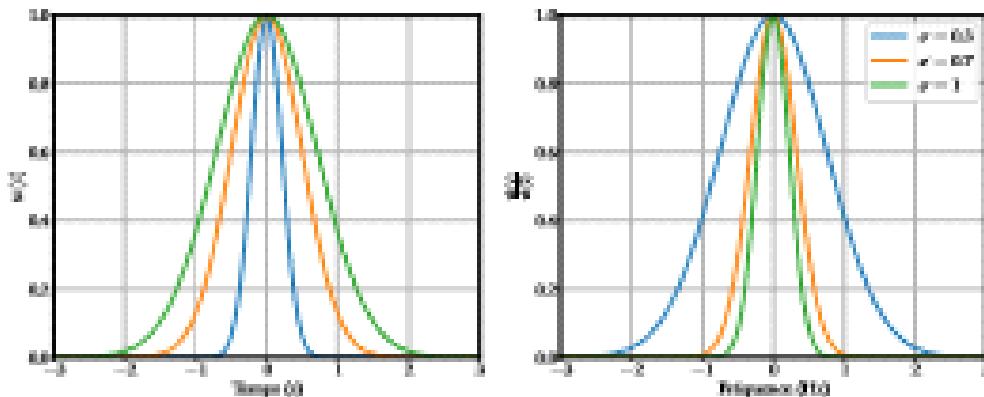


FIGURE 2.4 – Illustration du principe d'incertitude sur des gaussiennes. Plus le signal est localisé en temps, plus il est étale en fréquence. Ici $\Theta = 1 \text{ s}$.

Par exemple, l'impulsion de Dirac est très bien localisée en temps mais sa transformée de Fourier $\delta = 1$ s'étend sur toute les fréquences. À l'inverse, les sinusoides sont très bien localisées en fréquences mais s'étendent sur tout l'horizon temporel.

Les cas d'égalité concernent les gaussiennes qui sont les signaux les mieux localisés simultanément en temps et en fréquence. La figure 2.4 illustre ce principe sur des gaussiennes centrées de largeur variable, c'est-à-dire de la forme $x(t) = e^{-\frac{|t|}{\sigma^2}}$. Plus la variance σ^2 est grande, plus la gaussienne est étalée temporellement, et localisée fréquentiellement (et réciproquement).

Exercice 2.7 — Par souci de simplicité, nous considérons ici un signal réel et nous centrons l'axe temporel sur le signal de sorte que la quantité μ_x définie au théorème 2.4 est nulle. De plus, nous normalisons le signal de sorte que $\|x\| = 1$. En outre, on suppose le signal dérivable et $\frac{dx}{dt} \in L^2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mu_x = 0$ car le signal est réel.
2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} tx(t) \frac{dx}{dt}(t) dt$.
3. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour borner $\left| \int_{\mathbb{R}} tx(t) \frac{dx}{dt}(t) dt \right|$. On rappelle que le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ est donné par (2.2).
4. En déduire l'inégalité d'Heisenberg-Pauli-Weyl (2.10).
5. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz une équation différentielle vérifiée par les signaux dans les cas d'égalité.
6. La résoudre pour retrouver que les signaux gaussiens sont les mieux localisés simultanément en temps et en fréquence.

Chapitre 2. Représentation des signaux analogiques

Chapitre 3

NUMÉRISATION DES SIGNAUX

La numérisation des signaux est constituée par un ensemble d'opérations convertissant un signal analogique — ici, du monde physique — en une série de valeurs numériques. Nous étudierons ici les opérations d'échantillonnage et de quantification, et présenterons les conditions dans lesquelles elles doivent être réalisées pour préserver l'information des signaux analogiques.

Nous renvoyons le lecteur à [6] pour une étude des systèmes électroniques mis en œuvre pour la construction de convertisseurs analogique-numérique. Une étude théorique plus détaillée sur les conséquences de l'échantillonnage réel pour les signaux numérisés peut être trouvée dans [11].

3.1 Échantillonnage

L'échantillonnage consiste à extraire une suite de valeurs à partir d'un signal analogique. Nous allons présenter l'échantillonnage idéal, qui prélève les valeurs du signal à une fréquence donnée (régulière ou non). Nous présenterons le théorème d'échantillonnage qui donne une condition nécessaire et suffisante pour assurer la reconstruction du signal analogique à partir du signal échantilloné sans perte d'information. Ensuite, nous présenterons brièvement la problématique de la quantification. Enfin, nous introduirons la transformée de Fourier discrète des signaux échantillonés et discuterons la notion de filtrage numérique.

3.1.1 Définitions

Comme présenté au chapitre 1, nous noterons $x(t)$, les valeurs du signal analogique à l'instant t , et $x[n]$ le n -ème échantillon du signal échantilloné. L'échantillonnage uniforme consiste à prélever les valeurs du signal à intervalle régulier. On appelle alors période d'échantillonnage la durée de cette intervalle. Elle sera notée T_s . La fréquence d'échantillonnage, notée f_s , vérifie $f_s = \frac{1}{T_s}$.

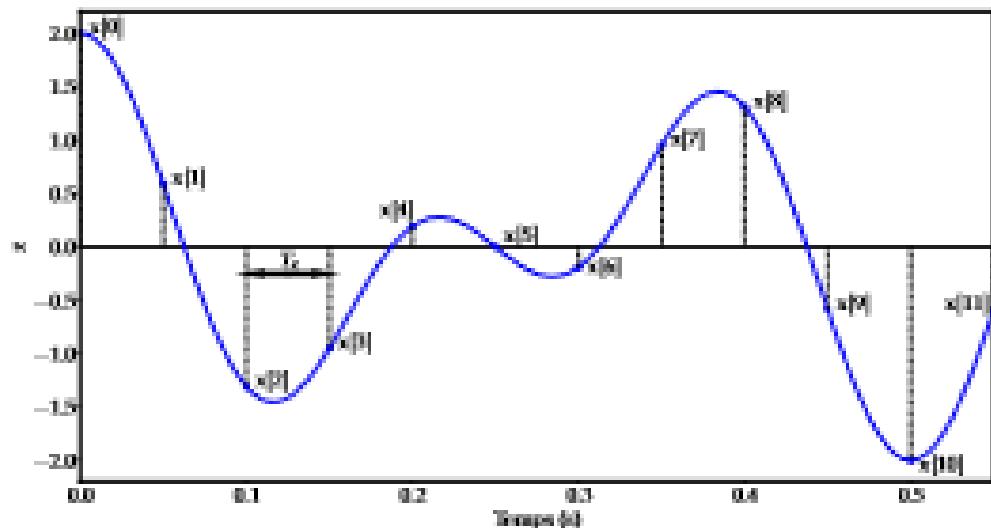


FIGURE 3.1 – Illustration de l'échantillonnage uniforme idéal d'un signal réel.

Remarque. Selon les situations, il peut être utile de procéder à un échantillonnage irrégulier. En effet, si le comportement du signal varie au cours du temps, on peut vouloir affiner l'échantillonnage à proximité des instants où les variations du signal sont les plus rapides. Cependant, dans ce qui suit nous nous focalisons sur l'échantillonnage régulier, qui est le plus fréquent et le plus souvent mis en œuvre par les appareils de mesure numériques — comme les oscilloscopes numériques, par exemple.

Échantillonnage idéal. Par conséquent, le signal échantillonné s'exprime par

$$x[n] = x(nT_s), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Cet échantillonnage est illustré à la figure 3.1.

Échantillonnage réel. En pratique, le temps de réponse du circuit électronique réalisant l'échantillonnage impose que la valeur de chaque échantillon prélevé dépende de la valeur moyenne locale du signal sur une durée propre au circuit. Il s'exprime alors par conséquent, le signal échantillonné s'exprime par

$$x[n] = \frac{1}{\tau} \int_{nT_s - \frac{\tau}{2}}^{nT_s + \frac{\tau}{2}} x(t) dt, \quad (3.1)$$

où τ désigne la durée caractéristique de prélèvement d'un échantillon. Cet échantillonnage est illustré à la figure 3.2. On parle alors d'échantillonnage moyenur. Notons que l'expression (3.1) se réécrit

$$x[n] = \frac{1}{\tau} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} x(nT_s - u) du = \left(\frac{1}{\tau} \mathbf{1}_{(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2})} * x \right) (nT_s).$$

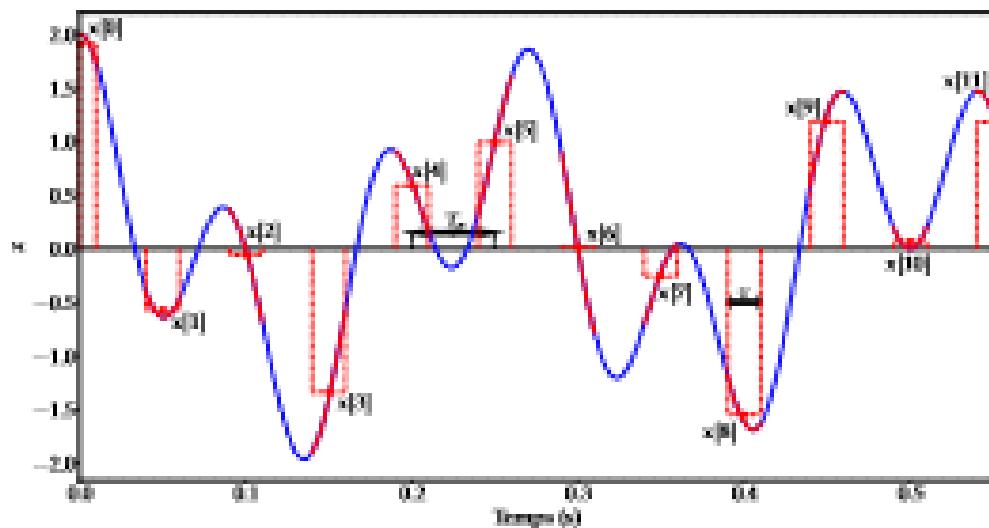


FIGURE 3.2 – Illustration de l'échantillonnage uniforme moyenneur d'un signal réel.

L'échantillonnage moyenneur est donc identique à l'échantillonnage idéal du signal filtré par un filtre passe-bas dont la réponse fréquentielle s'exprime $\text{sinc}(\pi f \tau v)$. Comme attendu, la dégradation de l'acquisition est d'autant plus faible que τ est petit. En effet, lorsque $\tau \rightarrow 0$, on retrouve l'échantillonnage idéal.

L'échantillonnage réel pouvant être vu comme l'échantillonnage idéal d'une version dégradée du signal analogique, nous quantifions, dans ce qui suit, l'effet de l'échantillonnage idéal seul.

3.1.2 Théorème d'échantillonnage

Le théorème d'échantillonnage a été pour la première fois énoncé par Edmund Taylor Whittaker en 1915 [12]. Cependant, on associe généralement les noms de Claude Shannon (dont les travaux [10] sont publiés en 1949) et Harry Nyquist ([8], 1928) à ce théorème.

Théorème 3.1 (Théorème d'échantillonnage). Soit x un signal réel vérifiant

$$x(v) = 0, \quad \forall |v| > \tilde{f}_M. \quad (3.2)$$

Alors, le signal est entièrement déterminé par le signal échantillonné à la fréquence f_e vérifiant

$$f_e \geq 2\tilde{f}_M. \quad (3.3)$$

L'inégalité (3.3) définit une condition suffisante sur la fréquence d'échantillonnage assurant la reconstruction du signal analogique. Réciproquement, si nous disposons d'un dispositif d'échantillonnage à la fréquence f_e , nous serons capable de reconstruire tout signal à support spectral limité dont la fréquence maximale \tilde{f}_M ne dépasse pas la fréquence $\frac{f_e}{2}$, appelée *fréquence de Nyquist*.

Pour démontrer ce théorème, on écrit le signal échantillonné sous forme de la distribution associée, à savoir

$$x_e(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_e).$$

Cette dernière se réécrit

$$x_e(t) = x(t) \text{III}_{T_e}(t),$$

où $\text{III}_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e)$ désigne le *peigne de Dirac*. La formule de Poisson nous montre que la transformée de Fourier du peigne de Dirac est aussi un peigne de Dirac : $\text{III}_{T_e} = f_e \text{III}_{f_e}$. Il en découle

$$\hat{x}_e(v) = f_e(\hat{x} * \text{III}_{f_e})(v) = f_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - nf_e). \quad (3.4)$$

Cette transformée de Fourier est périodique de période f_e . Donc si l'inégalité (3.3) est respectée, il suffit de filtrer la transformée de Fourier pour ne conserver que le motif central (c'est-à-dire l'intervalle $[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}]$) pour lequel $\hat{x}_e(v) = f_e \hat{x}(v)$. Ainsi, la reconstruction s'obtient par

$$\hat{x}(v) = \frac{1}{f_e} \text{I}_{[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}]}(v) \hat{x}_e(v).$$

En conséquence, la formule de reconstruction d'un signal analogique vérifiant le critère de Nyquist à partir du signal échantillonné est la suivante :

$$x(t) = (\text{sinc}(\pi f_e \cdot) * x_e)(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \text{sinc}(\pi f_e(t - nT_e)). \quad (3.5)$$

L'exercice 3.1 permet de compléter la démonstration du théorème 3.1 en démontrant la formule de Poisson.

Exercice 3.1 — Dans cet exercice, les calculs d'intégrales sont à comprendre au sens des distributions. Nous allons déterminer la transformée de Fourier du peigne de Dirac.

1. Rappeler l'expression de la décomposition en série de Fourier d'une fonction périodique de période T_e . Donner l'expression des coefficients de Fourier. On admettra que les distributions périodiques sont décomposables en série de Fourier de la même manière.
2. En déduire la formule sommatoire de Poisson

$$\text{III}_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i k \frac{t}{T_e}}.$$

3. En déduire la transformée de Fourier du peigne de Dirac.

3.1.3 Repliement de spectre

En règle générale, la fréquence d'échantillonnage est fixée par le dispositif d'acquisition des signaux dont nous disposons. Dans ce cas, l'échantillonnage s'effectue sans perte d'information uniquement pour les signaux respectant le critère (3.3). Dans le cas contraire, nous observons le phénomène de repliement de spectre (aussi appelé aliasing en anglais).

Nous illustrons le repliement de spectre sur un exemple présenté à la figure 3.3. Dans le cas 3.3a où la fréquence maximale contenue dans le signal est inférieure à la fréquence de Nyquist, on peut restituer le signal original en ne conservant que le motif central de la transformée de Fourier périodique du signal échantillonné. En revanche, dans le cas où la fréquence maximale contenue dans le signal est supérieure à la fréquence de Nyquist, la périodisation de la transformée de Fourier entraîne l'apparition d'interférences dans la transformée de Fourier au niveau des fréquences comprises dans l'intervalle non vide $[f_c - f_M, f_M]$. Si l'on essaye de reconstruire le signal analogique en appliquant la formule de reconstruction (3.5) (on note \hat{x} le signal analogique ainsi reconstruit), nous observons une perte d'information. Comme illustré sur la portion du signal tracée à la figure 3.4, le signal reconstruit ne capture pas les oscillations les plus rapides présentes dans le signal original. De plus, les oscillations parasites non présentes dans le signal de départ sont des artefacts due au repliement de spectre.

Ce phénomène est susceptible de fausser l'interprétation des signaux échantillonnés en faisant artificiellement apparaître des fréquences non présentes dans le signal analogique initial. Pour se prémunir de toute mauvaise interprétation, il convient de placer un filtre antirepliement en amont du dispositif d'échantillonnage. Le schéma de la figure 3.5 synthétise cela.



FIGURE 3.5 – Échantillonnage d'un signal après passage par un filtre antirepliement.

Le filtre antirepliement est un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est inférieure ou égale à la fréquence de Nyquist. Ainsi placé, le filtre de repliement empêche l'apparition d'artefacts fréquentiels. Cependant l'information contenue dans le signal analogique aux fréquences supérieures à la fréquence de coupure du filtre est perdue.

Chapitre 3. Numérisation des signaux

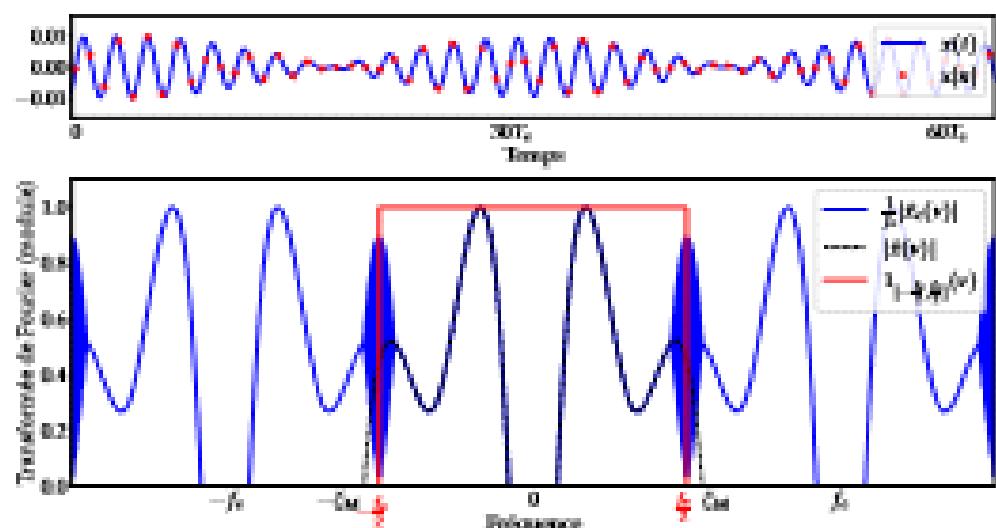
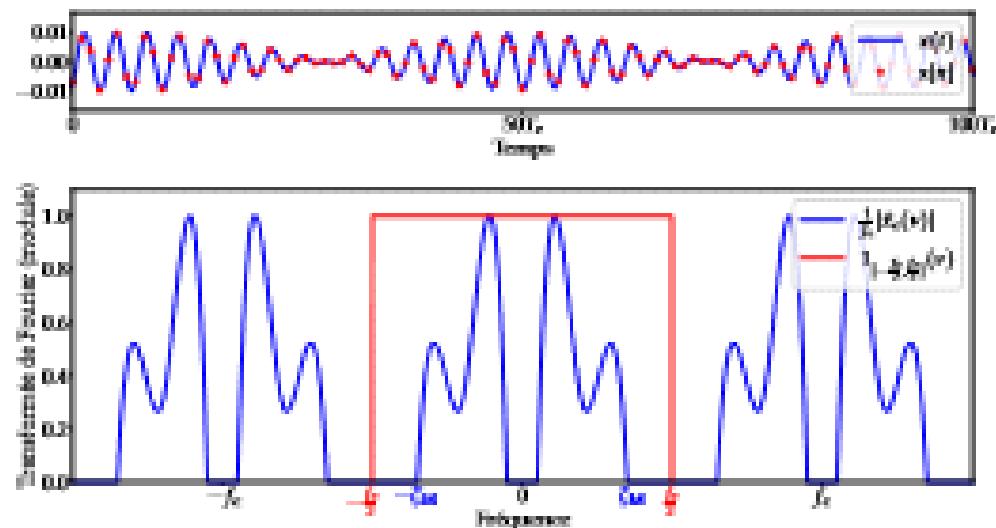


FIGURE 3.3 – Illustration du théorème d'échantillonnage et du phénomène de repliement de spectre.

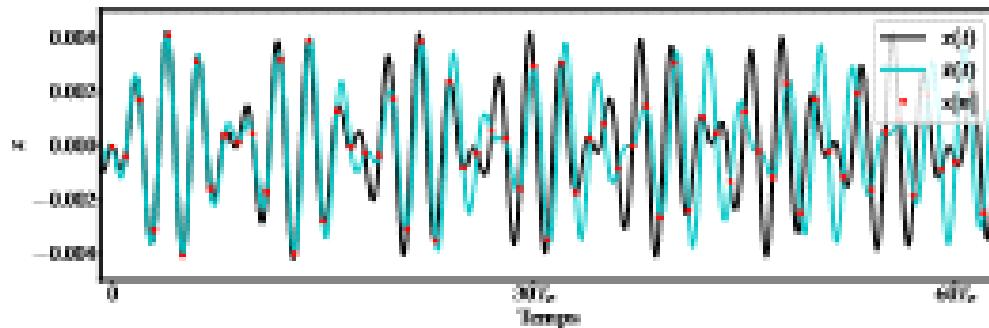


FIGURE 3.4 – Reconstruction d'un signal analogique à partir d'un signal échantillonné à une fréquence ne respectant pas le critère (3.2). La perte d'information due au repliement de spectre entraîne l'apparition d'artefacts de reconstruction.

3.2 Quantification

Le processus de quantification est la dernière étape de la numérisation. Il s'agit de remplacer la valeur réelle prise par chaque échantillon du signal par une valeur approchée choisie parmi un ensemble dénombrable de valeurs. L'arrondi ou la truncature sont des exemples de quantifications.

Dans ce qui suit, on étudie la **quantification uniforme**. Les valeurs du signal quantifié sont choisies dans l'ensemble

$$E_q = \{-Mq, -(M-1)q, \dots, -q, 0, q, \dots, (M-1)q\}.$$

Le paramètre q est appelé **pas de quantification**. Il définit la précision du quantificateur. Le nombre de niveaux sur lesquels le signal est quantifié est donné par la taille de l'ensemble E_q , ici 256. Les signaux dont l'amplitude dépasse Mq seront écrasés. On se place dans un cas où ce phénomène n'apparaît pas pour illustrer la quantification uniforme. Un exemple de signal approché par quantification uniforme est présenté à gauche de la figure 3.6. Sur la droite de la figure 3.6, nous avons représenté la relation entrée-sortie d'un quantificateur uniforme.

Le stockage de chaque valeur du signal étant codé en binaire, il est utile d'exprimer le nombre de niveaux autorisés en fonction du nombre de bits alloués à chaque valeur stockée. Notons ce nombre ℓ , le nombre de niveaux stockables est donc $2M = 2^\ell$. par exemple, un stockage sur $\ell = 8$ bits (un octet) offre 256 niveaux de quantification. De plus, si l'amplitude des signaux d'entrée est comprise dans $[-V, V]$, le pas de quantification est alors

$$q = \frac{V}{M} = \frac{2V}{2^\ell}. \quad (3.6)$$

On étudie alors la qualité de l'approximation en fonction du nombre de bits de stockage. Pour cela, on modélise le bruit de quantification ϵ défini comme

$$\epsilon[n] = x_q[n] - x[n].$$

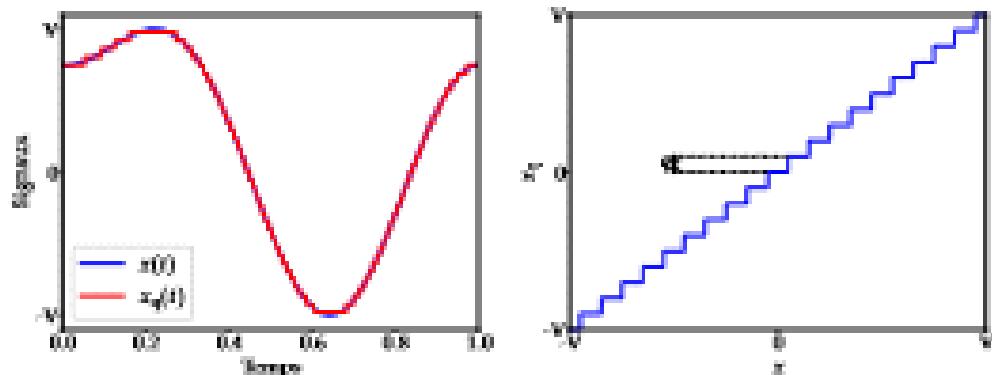


FIGURE 3.6 – Illustration de la quantification. Un exemple de signal quantifié est tracté sur la gauche, alors que la figure de droite représente la relation entrée-sortie de la quantification uniforme.

où x_q désigne le signal échantillonné quantifié. Sans connaissance a priori sur la forme du signal quantifié, on suppose que le bruit de quantification suit une loi uniforme sur $[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}]$. C'est un bruit de moyenne nulle, dont la puissance est donnée par

$$P_q = \mathbb{E}\{e[k]^2\} = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} \frac{1}{q} x^2 dx = \frac{q^2}{12}.$$

Si le signal à quantifier est un signal sinusoïdal, dans le cas optimal où le rapport signal sur bruit de quantification est maximisé, son amplitude couvre toute l'intervalle de valeur possible :

$$x(t) = V \cos(2\pi f_s t).$$

La puissance du signal à quantifier est donc $P_x = \frac{V^2}{2}$. Le rapport signal sur bruit de quantification est alors

$$\begin{aligned} \text{RSB}_q &= 10 \log_{10} \left(\frac{P_x}{P_q} \right) \\ &= 10 \log_{10} \left(6 \frac{V^2}{q^2} \right) \\ &= 20 \log_{10}(2) f + 10 \log_{10} \left(\frac{3}{2} \right) \\ &\approx 6,02 f + 1,76 . \end{aligned}$$

La troisième ligne se déduit de la relation (3.6) reliant l'amplitude maximale du signal observé et le pas de quantification.

Ajouter 1 bit de stockage pour chaque échantillon permet donc d'augmenter le rapport signal sur bruit de quantification de 6 dB environ.

3.3 Traitement des signaux numériques

Dans cette section, nous ne nous soucions plus de l'effet de la quantification. Comme vu précédemment, celui-ci peut être modélisé comme l'effet d'un bruit additif perturbant les observations. Les signaux analysés sont donc des signaux numériques à valeurs réelles ou complexes.

3.3.1 Transformée de Fourier discrète

3.3.1.1 Construction et définitions

En pratique, les signaux sont mesurés sur des intervalles de durée finie. Supposons que le signal analogique x soit observé sur l'intervalle $[0, T]$. Par analogie avec le théorème d'échantillonnage, nous pouvons reconstituer la transformée de Fourier de ce signal à partir de sa version échantillonnée. Notons Δ_f le pas d'échantillonnage fréquentiel de la transformée de Fourier; le critère (3.3) adapté à cette question devient

$$\frac{1}{\Delta_f} \geq \Theta. \quad (3.7)$$

En effet, l'encombrement temporel Θ joue ici le rôle que jouait l'encombrement fréquentiel $2f_M$ dans le critère (3.3).

Par ailleurs, rappelons que la transformée de Fourier du signal échantillonné x est définie au sens des distributions comme celle de la distribution $x_e(i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\delta(i - nT_e)$. En appliquant la transformée de Fourier à cette dernière égalité, puis en utilisant le résultat (3.4), nous obtenons

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j2\pi n f_e t} = f_e \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(v - n f_e). \quad (3.8)$$

Le terme de gauche est désigné comme la transformée de Fourier à temps discret du signal x . Le terme de droite montre que cette fonction est périodique de période f_e . La connaissance des valeurs prises pour $v \in [0, f_e]$ est donc suffisante pour reconstituer x .

En combinant ce résultat avec (3.7), et en posant $N = \frac{T}{T_e}$ le nombre total d'échantillons observé sur l'intervalle $[0, T]$, il suffit de connaître la valeur de la transformée de Fourier à temps discret aux fréquences

$$v_k = \frac{k}{NT_e}, \quad k \in \{0, \dots, N-1\}$$

pour restituer x . On en déduit l'expression de la transformée de Fourier discrète.

Définition 3.1 (Transformée de Fourier discrète). Soit x un signal comportant N échantillons. Sa transformée de Fourier discrète \tilde{x} est définie par

$$\tilde{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}, \quad k \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Comme nous venons de le montrer, la connaissance de la transformée de Fourier discrète permet de restituer le signal échantillonné. La formule d'inversion est la suivante.

Théorème 3.2 (Transformée de Fourier discrète inverse). On peut reconstruire le signal grâce à la transformée de Fourier inverse comme suit :

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi n \frac{k}{N}}, \quad n \in \{0, \dots, N-1\}.$$

Remarque. Comme le montre la formule (3.8), la transformée de Fourier discrète et la transformée de Fourier continue du signal échantillonné vérifient

$$X[k] = f_a F_a \left(\frac{k}{N} f_a \right). \quad (3.9)$$

Pour déterminer la transformée de Fourier du signal analogique, il faut donc ne pas oublier ce facteur de normalisation.

3.3.1.2 Mise en pratique

Algorithme. En pratique, le calcul numérique de chaque élément de la transformée de Fourier discrète demande d'effectuer N multiplications et $N - 1$ additions. Le nombre total d'opérations nécessaires à la détermination de tous les termes de la transformée de Fourier discrète est donc de $N(2N + 1)$. En informatique, on dit que la complexité de l'algorithme est $\mathcal{O}(N^2)$. Cependant, James Cooley et John Tukey ont proposé la transformée de Fourier rapide (ou fast Fourier transform (*FFT*) en anglais) qui réduit la complexité algorithmique du calcul de la transformée de Fourier discrète à $\mathcal{O}(N \ln(N))$ [1]. Cet algorithme s'appuie sur une combinaison astucieuse des opérations à effectuer pour réduire le coût de calcul. Les algorithmes aujourd'hui mis en œuvre dérivent de l'algorithme Cooley-Tukey et possèdent la même complexité.

Complétion de zéros. La transformée de Fourier discrète se déduit de l'échantillonnage de la transformée de Fourier avec un pas d'échantillonnage maximal qui assure la reconstruction (voir équation (3.7)). On peut néanmoins affiner le pas d'échantillonnage en calculant la transformée de Fourier discrète aux fréquences

$$v_k = \frac{k}{(N+P)T_a}, \quad k \in \{0, \dots, N+P-1\}$$

où $P \geq 0$. De manière équivalente, on peut voir cette approche comme le calcul de la transformée de Fourier du même signal complété par P valeurs nulles. C'est pourquoi on parle de complétion de zéros (ou zero-padding en anglais). Il faut noter que le zero-padding n'apporte aucune information supplémentaire sur le signal. Elle permet

seulement d'interpoler la transformée de Fourier discrète pour obtenir une meilleure visualisation. La complétion par zéros peut parfois être inappropriée lorsqu'on observe des signaux périodiques.

Signaux périodiques. Nous avons vu dans la section 2.3 que la résolution fréquentielle de la transformée de Fourier est d'autant plus grande que la durée d'observation est grande. Cependant, dans le cas des signaux périodiques, choisir une durée d'observation qui est un multiple entier de la période est un choix plus pertinent. En effet, la transformée de Fourier d'un signal périodique est formée d'un spectre de raies, c'est-à-dire d'impulsions de Dirac localisées à des fréquences multiples d'une fréquence fondamentale f_0 . Pour simplifier, on suppose que seule la fréquence fondamentale est présente, c'est-à-dire $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$. La transformée de Fourier du signal observé sur une durée Θ prend donc la forme

$$F(\nu) = \Theta e^{-j\nu\Theta(\nu - f_0)} \operatorname{sinc}(\pi\Theta(\nu - f_0)).$$

Ce dernier résultat s'obtient de la même manière que nous avons obtenu l'expression de la transformée de Fourier d'un sinusoidale tronqué à l'équation (2.8). D'autre part, la transformée de Fourier discrète de ce signal échantillonné s'exprime

$$\hat{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi f_0 n T_c} e^{-j2\pi n \frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j2\pi (kT_c - \frac{n}{N})} \right)^n$$

Deux situations sont à distinguer.

Premièrement, dans le cas où il existe k_0 tel que $f_0 T_c - \frac{k_0}{N}$ est un entier. Or, cette quantité étant bornée, seul le cas $f_0 T_c - \frac{k_0}{N}$ est possible. Étant donné que la durée d'observation est liée au nombres d'échantillons par $\Theta = NT_c$, cette condition s'exprime alors $\Theta = \frac{k_0}{f_0}$. Autrement dit, la durée d'observation est un multiple entier de la fréquence fondamentale.

$$\begin{aligned} \hat{x}[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j2\pi \frac{k_0 n}{N}} \right)^n \\ &= \begin{cases} N & \text{si } k = k_0 \\ \frac{1 - e^{j2\pi \frac{k_0 N}{N}}}{1 - e^{j2\pi \frac{k_0}{N}}} = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\hat{x}[k] = N \delta_{k,k_0},$$

où δ_{k,k_0} désigne le symbole de Kronecker, c'est-à-dire

$$\delta_{k,k_0} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = k_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Deuxièmement, dans les où la durée d'observation n'est un multiple entier de la fréquence fondamentale, nous avons

$$x[k] = \frac{1 - e^{j2\pi f_0 T_e}}{1 - e^{j2\pi(f_0 T_e - \frac{k}{N})}} = \frac{e^{j\pi N f_0 T_e}}{e^{j\pi(f_0 T_e - \frac{k}{N})} \sin(\pi(f_0 T_e - \frac{k}{N}))}$$

Etant donné que la durée d'observation est liée au nombres d'échantillons par $\Theta = NT_e$, nous avons

$$x[k] = e^{j\pi N f_0 T_e - j\frac{\pi}{2}(f_0 - v_k)} \frac{\sin(\pi(f_0 - v_k))}{\sin(\frac{\pi}{f_0}(f_0 - v_k))}. \quad (3.10)$$

En conclusion, si la durée d'observation est un multiple entier de la fréquence fondamentale, la transformée de Fourier discrète sera constituée d'un unique pic à la fréquence de la sinusoidale. Ce choix de durée d'observation fait donc disparaître l'effet de la troncature car on n'observe plus les oscillations du sinus cardinal. De même, le zero-padding d'un tel signal ferait réapparaître le sinus cardinal en interpolant les valeurs intermédiaires non nulles de la transformée de Fourier.

Nous illustrons l'intérêt du bon choix de la durée d'observation à la figure 3.7. Pour cela, on observe un signal sinusoidal de fréquence $f_0 = 30$ Hz, échantillonné à la fréquence $f_s = 100$ Hz. Dans un premier cas, on observe $N_1 = 100$ échantillons — la durée d'observation est donc un multiple entier de la fréquence du signal. Dans le second cas, on observe un échantillon supplémentaire : $N_2 = 101$ échantillons — la durée d'observation n'est plus un multiple entier de la fréquence du signal. Compte tenu des résultats démontrés au chapitre 2 (voir la section 2.3), la transformée de Fourier du second signal est légèrement mieux résolue que celle du premier. Toutefois, comme nous venons de l'illustrer, le choix pertinent de N_1 permet l'observation d'un unique coefficient non nul à la fréquence f_0 . Dans le même temps, le choix de N_2 laisse apparaître l'enveloppe du sinus cardinal : les coefficients de la transformée de Fourier autour de f_0 décroissent inversement proportionnellement à la fréquence.

3.3.2 Filtrage

Les filtres numériques sont des systèmes linéaires, continus et invariants dans le temps agissant sur les signaux numériques. Comme pour les signaux analogiques, ceux-ci sont entièrement déterminés par leur réponse impulsionnelle.

Théorème 3.3 (Filtre numérique). On appelle filtre numérique tout système linéaire \mathcal{L} continu et invariant dans le temps agissant sur les signaux numériques. Dans ce cas, il existe une suite numérique h , appelée réponse impulsionnelle du filtre, telle que

$$y[n] = \mathcal{L}\{x\}[n] = \sum_{n'=-\infty}^{\infty} h[n-n']x[n']. \quad (3.11)$$

On note $y = h * x$. L'opérateur $*$ est appelé produit de convolution.

3.3. Traitement des signaux numériques

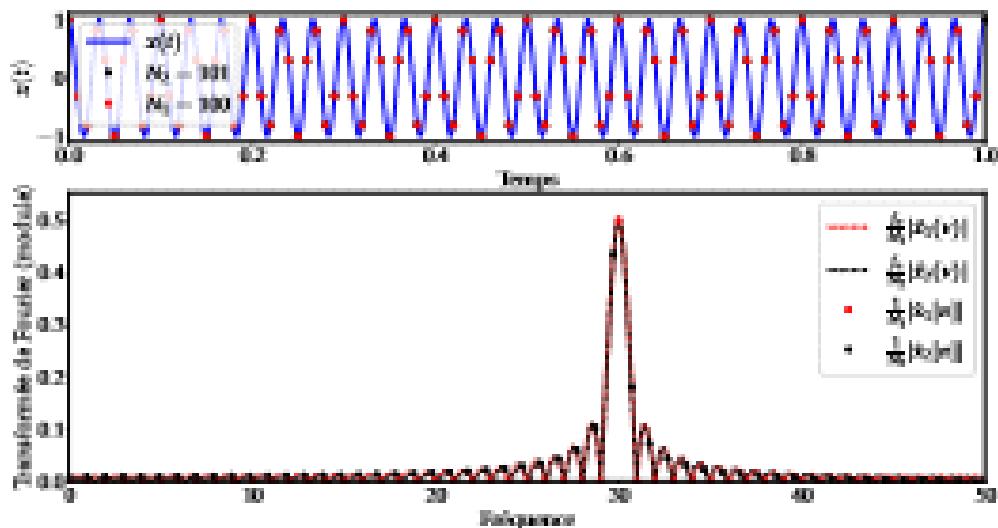


FIGURE 3.7 – Signal sinusoïdal échantillonné sur un intervalle multiple entier de sa fréquence (points rouges) et sur un intervalle qui n'est pas un multiple entier de sa fréquence (points noirs). En bas, la transformée de Fourier de la sinusoïde est bien mieux mise en évidence par le premier signal échantillonné.

Dans le cas des signaux numériques de longueur finie, si le signal d'entrée comporte N échantillons et la réponse impulsionnelle du filtre contient L échantillons non nuls, le produit de convolution (3.11) se ramène à

$$y[n] = \sum_{n'=0}^{N-1} h[n-n']x[n'], \quad n \in \{0, \dots, N+L-1\},$$

où $h[n] = 0$ pour tout $n > L$. La réponse du filtre est donc de longueur $N+L-1$. On en déduit que la relation entre les transformées de Fourier discrètes s'obtient sur la transformée discrète à $N+L-1$ termes de chacun des signaux.

Théorème 3.4 (Fonction de transfert). Soit x une signal à N échantillons, et h la réponse impulsionnelle d'un filtre à L échantillons. On appelle *fonction de transfert* ou *réponse fréquentielle* d'un filtre la transformée de Fourier discrète \tilde{h} de la réponse impulsionnelle. Celle-ci vérifie

$$\tilde{y}[k] = \tilde{h}[k] \tilde{x}[k], \quad \forall k \in \{0, \dots, N+L-1\}, \quad (3.12)$$

où les transformées de Fourier sont calculées sur $N+L-1$ points — c'est-à-dire avec zero-padding de x et h .

Chapitre 3. Numérisation des signaux

BIBLIOGRAPHIE

- [1] James W. COULYER et John W. TURKE : *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series.* Mathematics of computation, 19(90):297–301, 1965.
- [2] Francis CORNET : *Traitement des signaux et acquisition de données.* Sciences Sup Physique appliquée. Dunod, Paris, 1997.
- [3] Yvan DUBOC : *L'essentiel en théorie et traitement du signal : signaux déterministes et aléatoires, continus et discrets.* Technosup les filières technologiques des enseignements supérieurs. Ellipses, Paris, 2011.
- [4] Michel FAUCONNET, Pierre LUCAS, Étienne THIÉMÉ, Maxime CHAMPION et Arnaud LE DUNNOU : *Physique expérimentale : optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique : expériences.* LMD Physique. De Boeck supérieur, Louvain-la-Neuve, 2016.
- [5] Hélène HOASIN MOLIMARD, Eric VOURC'H et Jean-Pierre BARROT : *Capteurs et chaîne d'acquisition.* EDUSCOL-STL, juin 2015.
- [6] Walt KESTER : *Data conversion handbook.* Newnes, 2005.
- [7] Stéphane MALLAT : *A Wavelet Tour of Signal Processing (Second Edition).* Academic Press, San Diego, 1999.
- [8] Harry NYQUIST : Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 47(2):617–644, 1928.
- [9] Benjamin RICAUD et Bruno TOURAÎNSKI : A survey of uncertainty principles and some signal processing applications. *Advances in Computational Mathematics*, 40(3):629–650, 2014.
- [10] Claude E. SHANNON : Communication in the presence of noise. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 37(1):10–21, 1949.
- [11] Martin VIERNSTEIN, Jelena KOVACIĆ et Vivek K. Goyal : *Foundations of Signal Processing.* Cambridge University Press, 2014.
- [12] Edmund Taylor WHITTAKER : On the functions which are represented by the expansions of the interpolation-theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 35:181–194, 1915.

Bibliographie

07 September 2024 16:37



Bibliographi
e

Quelques ressources utilisées pour préparer ce cours et disponibles à la bibliothèque

- Francis GOTET : Traitement des signaux et acquisition de données. Sciences Sup Physique appliquée. Dunod, Paris, 1997.
- Yvan DUROC : L'essentiel en théorie et traitement du signal : signaux déterministes et aléatoires, continus et discrets. Technosup les filières technologiques des enseignements supérieurs. Ellipses, Paris, 2011.
- Michel FRUCHART, Pierre LIDON, Étienne THIBIERGE, Maxime CHAMPION et Arnaud LE DIFFON : Physique expérimentale : optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique : expériences. LMD Physique. De Boeck supérieur, Louvain-la-Neuve, 2016.

Bibliographie du document de cours

1. James W. COOLEY et John W. TUKEY : An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Mathematics of computation*, 19(90):297–301, 1965.
2. Hélène HORAIN MOLINARD, Eric VOURCH et Jean-Pierre BARBOT : Capteurs et chaîne d'acquisition. EDUSCOL-STI, juin 2015.
3. Walt KESTER : Data conversion handbook. Newnes, 2005.
4. Stéphane MALLAT : A Wavelet Tour of Signal Processing (Second Edition). Academic Press, San Diego, 1999.
5. Harry NYQUIST : Certain topics in telegraph transmission theory. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 47(2):617–644, 1928.
6. Benjamin RICAUD et Bruno TORRÉBANI : A survey of uncertainty principles and some signal processing applications. *Advances in Computational Mathematics*, 40(3):629–650, 2014.
7. Claude E. SHANNON : Communication in the presence of noise. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 37(1):10–21, 1949.
8. Martin VETTERLI, Jelena KOHĀCEVIĆ et Vivek K. Goyal : Foundations of Signal Processing. Cambridge University Press, 2014.
9. Edmund Taylor WHITTAKER : On the functions which are represented by the expansions of the interpolation-theory. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 35:181–194, 1915.

I- Principle

On dispose de mesures de type

$$\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad i=1, \dots, N$$

- Chaque mesure est associée à son incertitude type.
 - On possède un modèle de la forme

Notation : P = taille du vecteur Θ (nb de composante)

ex: mobile affine

$$ex: \text{move } y \\ f_0(x) = ax + b \text{ et } B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rightarrow P=2.$$

Ajustement de courbe

↳ Fournit toujours une valeur optimale de θ mais pas nécessairement

Significative

→ Il faut s'assurer que le module est valide.

\Rightarrow Test d'hypothèse statist. gac.

II Méthode d'ajustement

1) Méthode des moindres carrés

→ fast currents / standard

Principe : on minimise l'écart quadratique du modèle

$$\theta_{\text{ML}}^{\text{MLE}} = \arg \min_{\theta} \left(\sum_{i=1}^N \left(y_i - f_{\theta}(x_i) \right)^2 \right)$$

measure

prediction
du modèle

↑
minimiser
le tracé
d'erreurs partielles

estimation des moindres squares

Autre choix possible Moindres carrés pondérés

$$\Theta_{\text{SCP}}^{\text{SL}} = \arg \min_{\Theta} \sum_{i=1}^N w_i (y_i - f_{\Theta}(x))^2$$

pondérante du $i^{\text{ème}}$ terme.

et choir pour wi

$$\textcircled{1} \quad w_i = \frac{1}{\mu(y_i)^c} \quad \textcircled{2} \quad w_i = \frac{1}{\mu(y_i)^c + f_0'(x_i)^c k(x_i)^c}$$

Suppose $q \neq e$

1) f_{ext} is ook voor de
negligible gezant te beschouwen

per \hat{f}_α $\rightarrow \text{Var}(y_i + e) = \text{Var}(y_i) + \text{Var}(e)$
 $\rightarrow \text{Var}(x_i)^2 \approx \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_{ij})^2\right) \lambda(x_i)$ (zurück von DL)-

2) Régression linéaire

Dans ce cas

Y) Régression linéaire

Dans ce cas

$$\theta_{\text{RL}}^* = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^N (y_i - \alpha x_i - b)^2$$

$L(\alpha, b)$ (L pour "loss" enfr plutôt fit projectif?)

L est quadratique en α et b

$$\nabla L(\alpha^*, b^*) = 0$$

$$\begin{cases} \partial_{\alpha} L = \sum_{i=1}^N -x_i(y_i - \alpha x_i - b) \\ \partial_b L = \sum_{i=1}^N -2(y_i - \alpha x_i - b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^* \sum x_i^2 + b^* \sum x_i = \sum x_i y_i \\ \alpha^* \sum x_i + b^* N = \sum y_i \end{cases}$$

Notation $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$

→ Résolution du système

$$\alpha^* = \frac{\bar{y}\bar{x} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} \quad b^* = \frac{\bar{y}\bar{x} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} = \bar{y} - \alpha^* \bar{x}$$

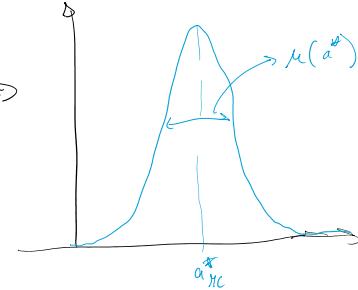
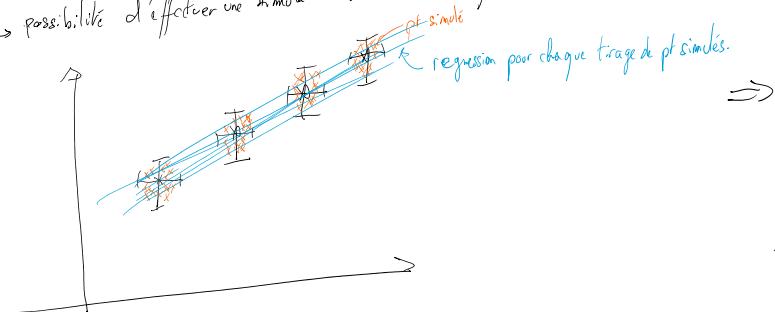
↳意義 des corrélations de α et b

3) Incertitudes sur les paramètres estimés

→ formule de propagation des incertitudes

Mais parfois difficiles à obtenir (cas des MC pondérés)

→ possibilité d'effectuer une simulation de Monte Carlo pour obtenir $\mu(\theta^*)$



A Cas général

Une approximation à l'ordre 2 de la fonction coût (loss fonction?) permet d'avoir une expression approchée

pour la formule de propagation (qui c'est ça que g'a dans PLU)

$$\mu(\theta_i^*) \approx \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 L(\theta^*)}{\partial \theta_i^2}}$$

A Cas particulier

- régression linéaire

- régression linéaire

- Incertitude négligeable en x : $\mu(x_i) = 0$

- Incertitude constante en y $\mu(y_i) = \mu(y)$

$$\mu(\alpha^*)^2 = \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial \alpha^*}{\partial y_i} \right)^2 \mu(y_i)^2 \quad \text{or} \quad D_{y_i, \alpha^*} = \frac{\frac{1}{N} x_i - \bar{x}}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2}$$

D'où

$$\mu(\alpha^*)^2 = \frac{\mu(y)^2}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

= N(\bar{x}^2 + (\bar{x})^2 - 2(\bar{x})^2)

$$\mu(\alpha^*) = \frac{\mu(y)}{\sqrt{N}(\bar{x}^2 - (\bar{x})^2)^{1/2}}$$

Observations:

* $\mu(\alpha^*)$ décroît en $\frac{1}{N}$

* plus précis si Variance grande \rightarrow logique si  alors que si 

Si les x_i sont étalés sur une grande plage de valeurs incertitude sur la pente plus faible.
l'estimation de α^* est plus précise car

$$\left(\frac{1}{\bar{x}^2 - (\bar{x})^2} \right)^{1/2} \rightarrow 0$$

III. Tests statistiques

Q: L'ajustement $y = f_\theta(x)$ a-t-il bien tenu compte toutes des observations et des incertitudes?

2 raisons possibles:

① si la loi $y = f_\theta(x)$ fait référence

↳ Je souhaite m'assurer que mes mesures sont plausibles

② Confronter l'expérimentation à une loi pour confirmer ou infirmer cette loi.

R: Test statistique du modèle

↳ s'appuie sur des résultats asymptotiques (i.e. N grands).

Test du χ^2 reduit

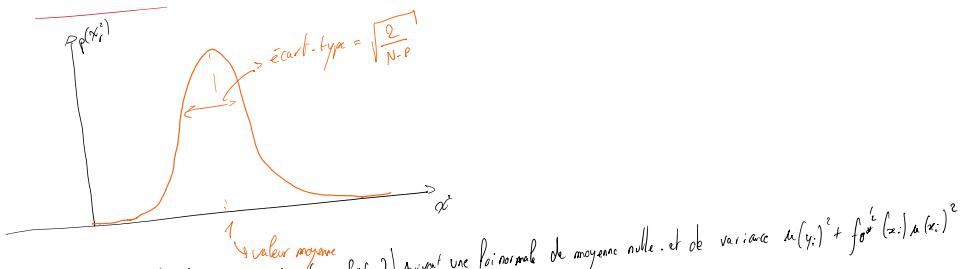
On calcule

$$\chi^2_{red}(\theta^*) = \frac{1}{N-p} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f_{\theta^*}(x_i))^2}{\mu(y_i)^2 + f_{\theta^*}'(x_i) \lambda(x_i)}$$

(n.s.)

FO

$$X_n(\theta^*) = \frac{1}{N-p} \sum_{i=1}^N \frac{\mu(y_i)^2 + f_{\theta^*}'(x_i) \lambda(x_i)}{\mu(y_i)^2 + f_{\theta^*}'(x_i)^2}$$



\Rightarrow Le X_n suit cette loi si les résidus $(y_i - f_\theta(x_i))$ suivent une loi normale de moyenne nulle et de variance $\mu(y_i)^2 + f_{\theta^*}'(x_i)^2$

Lorsque $N \rightarrow \infty$, on s'attend à obtenir un $X_n \sim 1$ avec une forte proba.

Si on trouve $X_n \ll 1$ on a probablement surestimé les incertitudes.

Si on trouve $X_n \gg 1 \Rightarrow$ le modèle f_θ n'est pas en adéquation avec les données.

Q) Ajustement linéaire ou affine?

Le根基 théorie suppose une relation de linéarité $f_\theta(x) = ax$ (càd $b=0$)

① On effectue un ajustement affine.

② On s'assure que le nombre b est égal à 0 est plausible. compte tenu de b^* et $\alpha(b^*)$

$$\text{càd } 0 \in [b^* - V(b^*), b^* + V(b^*)]$$

\Rightarrow On peut raisonnablement rejeter l'hypothèse $b \neq 0$.

③ Ajustement linéaire pour trouver a^* .