



FACULTÉ
DES SCIENCES
D'ORSAY



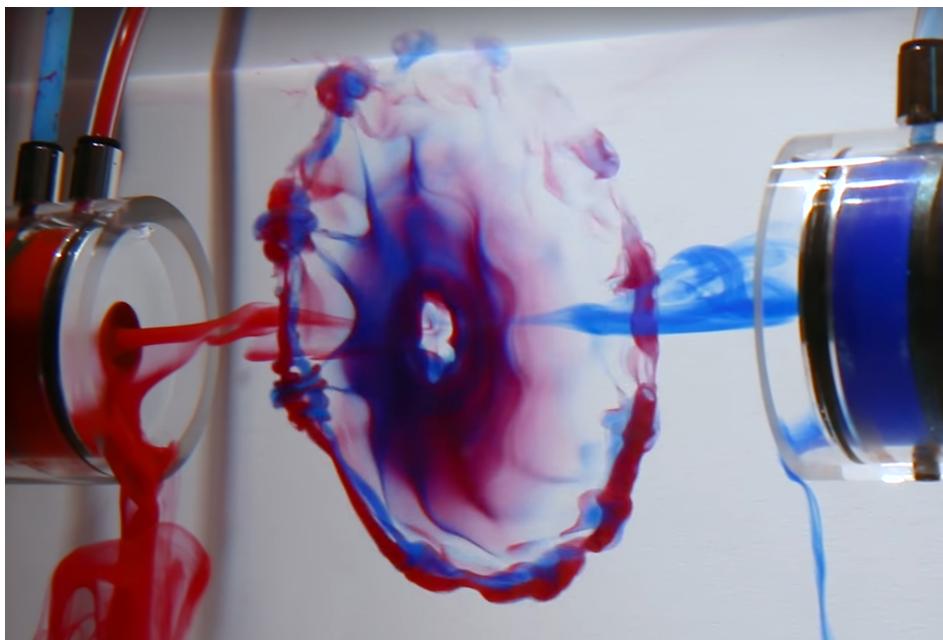
PRÉPARATION AGRÉGATION DE PHYSIQUE

MONTROUGE

.....
NOTES DE COURS SUR LES FLUIDES (2020-2021)
.....

Marc Rabaud

Laboratoire FAST, bât. Pascal (n° 530), 91405 Orsay cedex
marc.rabaud@universite-paris-saclay.fr



Collision frontale de deux anneaux tourbillonnaires
<https://www.youtube.com/watch?v=EVbdbVhzcM4>.

Table des matières

1 Leçon de Physique n°3 : Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.	7
1.1 Tenseur des contraintes	8
1.1.1 Notion de tenseur cartésien de rang 2	8
1.1.2 Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ (<i>stress tensor</i>)	9
1.1.3 Le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$	10
1.2 Principe fondamental de la dynamique et divergence de $[\sigma']$	11
1.2.1 Tenseur des déformations $[\epsilon]$ (<i>strain tensor</i>)	13
1.2.2 Tenseur des taux de déformation ou tenseur des gradients de vitesse $[G]$	13
1.2.3 Equation constitutive des fluides newtoniens	16
1.2.4 Divergence du tenseur des contraintes visqueuses	17
1.3 Equation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien	17
1.4 Signification physique de la viscosité	18
1.5 Mesure de la viscosité	20
1.5.1 Quelques viscosimètres simples	20
1.5.2 Quelques exemples de rhéomètre	21
1.6 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes	21
1.6.1 Quelques valeurs de nombres de Reynolds	23
1.6.2 Quelques autres nombres sans dimension	24
1.7 Les conditions aux limites cinématiques et dynamiques	25
1.7.1 Les conditions cinématiques	25
1.7.2 Les conditions dynamiques	27
1.7.3 Tableau récapitulatif des conditions aux limites	29
1.8 Solutions exactes de l'équation de Navier-Stokes : les écoulements parallèles	29
1.8.1 Ecoulement de Couette plan	30
1.8.2 Ecoulement de Couette circulaire	31
1.8.3 Ecoulement de Poiseuille plan	31
1.8.4 Ecoulement de Poiseuille en conduite circulaire	32
1.8.5 Solutions instationnaires	33
1.9 Solutions de Navier-Stokes à très faible nombre de Reynolds (écoulements de Stokes)	34
1.9.1 L'équation de Stokes	34
1.9.2 Ecoulement autour d'une sphère : force de Stokes	36
1.9.3 Application à la sédimentation	39
1.9.4 La réversibilité cinématique et la vie aux faibles nombres de Reynolds	40
1.10 Les fluides non-newtoniens et les modèles rhéologiques	41
1.10.1 Les fluides rhéofluidifiants	41
1.10.2 Les fluides rhéoépaississants	43

1.10.3	Les fluides visco-élastiques	44
1.10.4	Les fluides à seuils	46
1.10.5	La thixotropie	47
1.11	Pour en savoir plus	47
1.12	Quelques questions possibles	48
2	Leçon de Physique n°4 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide	49
2.1	Equation d'Euler	50
2.2	Equation de Bernoulli	50
2.3	Deux généralisations de l'équation de Bernoulli	52
2.3.1	Cas d'un fluide barotrope	52
2.3.2	Cas d'un écoulement instationnaire mais irrotationnel	52
2.3.3	Effet Coanda	53
2.4	Quelques applications de l'équation de Bernoulli	53
2.4.1	Anémomètre à tube de Pitot	53
2.4.2	Effet Venturi et débitmètre de Venturi	54
2.4.3	Expérience d'Evangelista Torricelli (1644)	56
2.4.4	Amplification des vagues par le vent	56
2.4.5	Jet incident sur une plaque	57
2.5	Conservation de la circulation (théorème de Kelvin)	57
2.5.1	Effet Magnus	58
2.5.2	Portance d'une aile	59
2.6	Paradoxe de d'Alembert	60
2.7	Couche limite laminaire sur une plaque plane	60
2.7.1	Les équations de Prandtl (1904)	61
2.7.2	Profil de vitesse de Blasius (1907)	62
2.7.3	Calcul de la contrainte pariétale et du coefficient de traînée	63
2.8	Décollement de la couche limite sur une paroi courbée	64
2.8.1	Couche limite turbulente	66
2.9	Quelques questions possibles	66
3	Leçon de Physique n°5 : Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides	69
3.1	Origine microscopique	70
3.2	La loi de Laplace	72
3.3	Angle de mouillage macroscopique	74
3.3.1	Loi d'équilibre d'Young-Dupré	75
3.3.2	Hystérésis de l'angle de contact	76
3.4	Effet de la gravité et longueur capillaire	76
3.5	La mesure du coefficient de tension superficielle	77
3.5.1	La loi de Jurin (1717)	77
3.5.2	Lame de Wilhelmy et anneau de Noüy	79
3.5.3	Méthode de la goutte pendante	79
3.5.4	Méthode de la goutte tournante	79
3.6	Effet de la température sur la tension de surface (effet Marangoni)	80
3.7	Les tensioactifs	80
3.7.1	Pourquoi met-on du savon pour se laver les mains ?	81
3.7.2	Comment expliquer la stabilité des membranes de savon ?	81

3.8	Dynamique de quelques écoulements contrôlés par la tension de surface	82
3.9	Pour en savoir plus	82
3.10	Quelques questions possibles	82
4	Leçon de Physique n°14 : Ondes acoustiques	85
4.1	Equation d'onde de l'acoustique linéaire	86
4.1.1	Cas des ondes planes progressives monochromatiques (OPPM)	88
4.2	Célérité des ondes acoustiques dans les gaz parfaits	88
4.2.1	Mirages acoustiques	89
4.3	Energie acoustique	90
4.3.1	Densité d'énergie acoustique	90
4.3.2	Puissance acoustique $\vec{\Pi}_a$	91
4.3.3	Conservation de l'énergie acoustique	91
4.3.4	Pression acoustique	91
4.3.5	Sensibilité de l'oreille humaine	92
4.4	Propagation des ondes acoustiques	93
4.4.1	Impédance acoustique	93
4.4.2	Propagation à travers un dioptre acoustique : coefficient de réflexion et de transmission.	94
4.4.3	Atténuation des ondes acoustiques	95
4.5	Diverses sources acoustiques	96
4.5.1	Onde sphérique ou monopôle acoustique	96
4.5.2	Dipôle acoustique	96
4.5.3	Effet Doppler	97
4.5.4	Diffraction du son	97
4.6	Acoustique musicale	97
4.6.1	Tuyaux sonores	97
4.6.2	Temps de réverbération d'une salle	98
4.6.3	Résonateur de Helmholtz	98
4.7	Ondes acoustiques dans les solides	98
4.8	Quelques questions possibles	99
4.9	Pour en savoir plus :	100
	Références	101

Chapitre 1

Leçon de Physique n°3 : Notion de viscosité d'un fluide. Écoulements visqueux.

Marc Rabaud, version du 23 novembre 2019

Sommaire

1.1	Tenseur des contraintes	8
1.1.1	Notion de tenseur cartésien de rang 2	8
1.1.2	Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ (<i>stress tensor</i>)	9
1.1.3	Le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$	10
1.2	Principe fondamental de la dynamique et divergence de $[\sigma']$	11
1.2.1	Tenseur des déformations $[\epsilon]$ (<i>strain tensor</i>)	13
1.2.2	Tenseur des taux de déformation ou tenseur des gradients de vitesse $[G]$	13
1.2.3	Equation constitutive des fluides newtoniens	16
1.2.4	Divergence du tenseur des contraintes visqueuses	17
1.3	Equation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien	17
1.4	Signification physique de la viscosité	18
1.5	Mesure de la viscosité	20
1.5.1	Quelques viscosimètres simples	20
1.5.2	Quelques exemples de rhéomètre	21
1.6	Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes	21
1.6.1	Quelques valeurs de nombres de Reynolds	23
1.6.2	Quelques autres nombres sans dimension	24
1.7	Les conditions aux limites cinématiques et dynamiques	25
1.7.1	Les conditions cinématiques	25
1.7.2	Les conditions dynamiques	27
1.7.3	Tableau récapitulatif des conditions aux limites	29
1.8	Solutions exactes de l'équation de Navier-Stokes : les écoulements parallèles	29
1.8.1	Ecoulement de Couette plan	30
1.8.2	Ecoulement de Couette circulaire	31
1.8.3	Ecoulement de Poiseuille plan	31

1.8.4	Ecoulement de Poiseuille en conduite circulaire	32
1.8.5	Solutions instationnaires	33
1.9	Solutions de Navier-Stokes à très faible nombre de Reynolds (écoulements de Stokes)	34
1.9.1	L'équation de Stokes	34
1.9.2	Ecoulement autour d'une sphère : force de Stokes	36
1.9.3	Application à la sédimentation	39
1.9.4	La réversibilité cinématique et la vie aux faibles nombres de Reynolds	40
1.10	Les fluides non-newtoniens et les modèles rhéologiques	41
1.10.1	Les fluides rhéofluidifiants	41
1.10.2	Les fluides rhéoépaisseurs	43
1.10.3	Les fluides visco-élastiques	44
1.10.4	Les fluides à seuils	46
1.10.5	La thixotropie	47
1.11	Pour en savoir plus	47
1.12	Quelques questions possibles	48

1.1 Tenseur des contraintes

1.1.1 Notion de tenseur cartésien de rang 2

Nous nous limiterons dans ce cours aux tenseurs cartésiens (décrits dans une base orthonormée fixe) sinon tout est bien plus compliqué !

Pour décrire les variations spatiales d'une fonction scalaire on doit calculer le vecteur gradient. De même pour décrire les variations spatiales d'une fonction vectorielle on peut calculer un *tenseur* particulier, le tenseur gradient, qui fait apparaître les composantes des vecteurs gradient de chacune de ses composantes.

On définit ainsi par exemple le tenseur des gradients de vitesse $[G]$ par

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} = [G_{ij}] = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right].$$

Ainsi chaque ligne de la matrice est constituée des composantes de $\vec{\nabla}(v_i)$.

Pour l'opérateur gradient d'un scalaire on a la relation : $dP = \vec{\nabla} P \cdot \vec{dl}$.

Pour le tenseur gradient on a la relation :

$$\vec{dv} = [G] \cdot \vec{dl}.$$

En effet

$$\{\vec{dv}\}_i = \{[G] \cdot \vec{dl}\}_i = \frac{\partial v_i}{\partial x} dx + \frac{\partial v_i}{\partial y} dy + \frac{\partial v_i}{\partial z} dz = \vec{\nabla}(v_i) \cdot \vec{dl} = dv_i.$$

Nous avons ici, avec $[G]$, un exemple de tenseur de rang 2 (il faut 2 indices pour énumérer les coefficients). Un tenseur de rang 1 correspond à un vecteur tandis qu'un tenseur de rang 0 est un scalaire. On peut aussi définir des tenseurs de rangs plus élevés (exemple pour décrire les variations spatiales d'un tenseur de rang 2).

1.1.2 Le tenseur des contraintes $[\sigma]$ (stress tensor)

On appelle *contrainte* la force de contact $\vec{\sigma}(\vec{n})$ qui s'applique sur une surface unité de normale \vec{n} (figure 1.2). Si \vec{n} est le vecteur unitaire, dirigé selon la normale sortante de cette surface (dans la direction du milieu qui applique la force de contact), la force s'exerçant sur une surface dS s'écrit :

$$\overrightarrow{df} = \vec{\sigma}(\vec{n})dS.$$

C'est la force de contact appliquée par le milieu supérieur (là où pointe \vec{n}) sur le milieu inférieur (là d'où sort \vec{n}) sur la surface $d\vec{S} = dS\vec{n}$.

Par exemple si on regarde les contraintes s'exerçant sur une des faces de surface unité d'un cube (figure 1.1), on a :

$$\vec{\sigma}(\vec{e}_i) = \sigma_{1i}\vec{e}_1 + \sigma_{2i}\vec{e}_2 + \sigma_{3i}\vec{e}_3.$$

Par exemple $\vec{\sigma}(\vec{e}_2)$ est un vecteur ayant trois composantes : σ_{22} représente la contrainte normale et σ_{12} et σ_{32} les deux composantes tangentielles.

Pour connaître l'état des contraintes sur n'importe quelle surface $d\vec{S}$, nous allons voir qu'il suffit de connaître $\vec{\sigma}(\vec{e}_1)$, $\vec{\sigma}(\vec{e}_2)$ et $\vec{\sigma}(\vec{e}_3)$. On construit donc le tenseur des contraintes :

$$[\sigma] = [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Par convention dans σ_{ij} , l'indice i est le numéro de ligne du tenseur et la direction de la composante de la contrainte considérée et j est le numéro de colonne et la direction de la normale sortante.

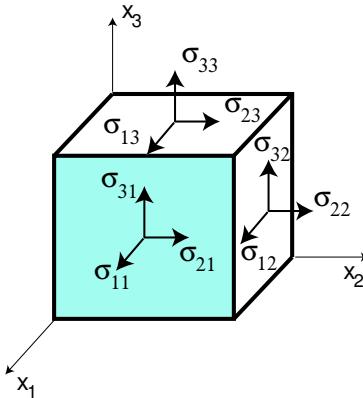


FIGURE 1.1 – Convention d'écriture des 9 termes du tenseur des contraintes.

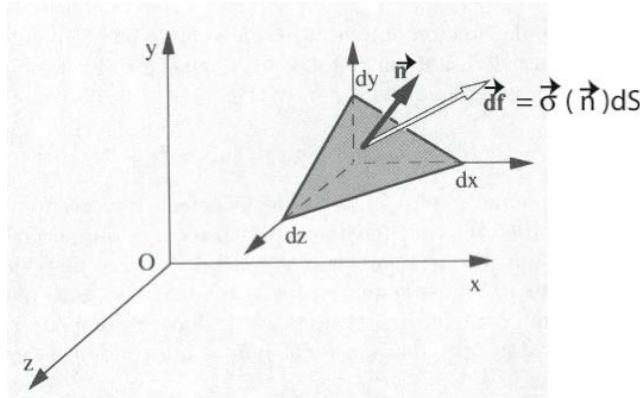


FIGURE 1.2 – Contrainte $\vec{\sigma}(\vec{n})$ dans une direction quelconque : $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n}$.

Symétries du tenseur des contraintes

Deux propriétés de symétrie sont importantes pour écrire les contraintes et le tenseur des contraintes :

- Le principe de l'action et de la réaction nous permet d'écrire :

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = -\vec{\sigma}(-\vec{n}).$$

En effet la somme des forces appliquées à une surface de masse nulle est forcément nulle.

En conséquence, pour connaître les contraintes appliquées sur un volume cubique infiniment petit il suffit de connaître les contraintes $\vec{\sigma}(\vec{n})$ sur trois faces contiguës et donc de connaître $[\sigma]$. Sur deux faces opposées les contraintes sont égales et opposées au premier ordre.

- Le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

En effet regardons les couples de rotation qui s'exercent sur un cube vis-à-vis de l'axe Oz par exemple :

$$d\Gamma_{Oz} = \|\vec{r} \wedge \vec{df}\| = \sigma_{yx} dS_x dx - \sigma_{xy} dS_y dy = (\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) d\tau.$$

Or le théorème du moment cinétique nous permet d'écrire $\Gamma_{Oz} = dI \frac{d^2\theta}{dt^2} \propto \rho d\tau r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$.

Donc $(\sigma_{yx} - \sigma_{xy}) \propto \rho r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2}$. Lorsque $r \rightarrow 0$ on doit donc avoir $\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$ pour ne pas avoir une accélération angulaire infinie.

Le même raisonnement pour les autres axes de rotation montrent que le tenseur des contraintes est un tenseur symétrique :

$$\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}. \quad (1.1)$$

Note : Il existe des matériaux élastiques où ce tenseur n'est pas forcément symétrique. Voir par exemple la théorie des frères Cosserat (1909) récemment réutilisée (Merkel et al., *Experimental Evidence of Rotational Elastic Waves in Granular Photonic Crystals*, Phys. Rev. Letters **107**, 225502 (2011)).

Calcul de la contrainte dans une direction quelconque $\vec{\sigma}(\vec{n})$

Connaissant le tenseur des contraintes $[\sigma]$ on peut connaître dans un milieu continu la contrainte s'exerçant sur n'importe quelle surface de normale \vec{n} . En effet on a la relation (figure 1.2) :

$$\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n_j. \quad (1.2)$$

Nous avons ici utilisé la *convention de sommation d'Einstein* : dès que des indices apparaissent deux fois dans une expression, le signe \sum sur cet indice n'est pas écrit pour simplifier mais il est implicite. Par exemple $a_{ii} \equiv \sum_{i=1}^3 a_{ii}$ et $\delta_{ii} = 3$, où δ_{ij} est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.

On peut vérifier la propriété (1.2) en faisant par exemple $\vec{n} = \vec{e}_i$ ou bien faire la démonstration complète d'équilibre des forces sur un tétraèdre (cube coupé par la face \vec{n} , voir Ref. [4] p. 108 ou [12] p. 127).

Exercice : Démontrer la propriété précédente à 2 dimensions.

1.1.3 Le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$

Considérons le cas d'un fluide au repos, c'est-à-dire en l'absence d'écoulement (hydrostatique). Dans le cadre de la thermodynamique à l'équilibre il y a isotropie des contraintes d'une part et uniquement des contraintes normales d'autre part (pas de contraintes tangentielles). On appelle « pression » le scalaire p tel que $\vec{df} = -p \vec{dS}$. Sans écoulement on peut donc écrire $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = -p[I]$$

où $[I]$ est le tenseur identité aussi appelé tenseur de Kroneker $[\delta]$ car $[I] = [\delta_{ij}]$.

On notera que, quelque soit le vecteur \vec{n} , on a alors $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n} = -p[I] \cdot \vec{n} = -p\vec{n}$. Les contraintes sont donc normales aux surfaces et isotropes dans un fluide au repos (équilibre thermodynamique).

Dans le cas où il existe un écoulement (hors équilibre) on définit le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$ par la relation :

$$[\sigma] = -p[I] + [\sigma'].$$

$[\sigma']$ est évidemment le tenseur nul s'il n'y a pas d'écoulement, ou plus généralement s'il n'existe pas d'autres forces que les forces de pression (ce sera le cas des écoulements parfaits qui sont supposés sans effet de la viscosité). Ce tenseur $[\sigma']$ caractérise les forces d'origine visqueuse qui apparaissent sous écoulement.

Notons que $[\sigma]$ ou $[\sigma']$ ne décrivent que les forces de contact (ou de surface, forces à courtes portées) et pas des forces de volumes (forces à longues portées) comme la gravité par exemple dont il faudra tenir compte par ailleurs.

1.2 Principe fondamental de la dynamique et divergence de $[\sigma']$

Nous avons démontré (équation ??) que pour un volume de contrôle matériel on a la relation :

$$\sum \vec{F} = \iiint_{VC} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau.$$

Nous allons maintenant décomposer les forces appliquées en forces de volume $\sum \vec{F}_{VC}$ et en forces de surface $\sum \vec{F}_{SC}$. Soit : $\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_{VC} + \sum \vec{F}_{SC}$. Pour les forces volumiques nous introduirons les forces par unité de masse (donc homogènes à des accélérations) que nous noterons \vec{g} car souvent ce sera l'accélération de la gravité, mais en principe le terme \vec{g} pourra représenter n'importe quelle force de volume (force magnétique, électrostatique, force de Laplace, pseudo-forces d'inertie, etc).

$$\sum \vec{F}_{VC} = \iiint_{VC} \rho \vec{g} d\tau.$$

Pour les forces de surface nous avons par définition :

$$\sum \vec{F}_{SC} = \oint_{SC} \vec{\sigma}(\vec{n}) dS = \oint_{SC} [\sigma] \cdot \vec{n} dS = \oint_{SC} [\sigma] \cdot \vec{dS}.$$

Or $\vec{\sigma}(\vec{n}) = [\sigma] \cdot \vec{n} = \sigma_{ij} n_j$, donc si on projette l'équation précédente sur l'axe des i , il vient :

$$\left\{ \oint_{SC} [\sigma] \cdot \vec{dS} \right\}_i = \oint_{SC} \vec{L}_i \cdot \vec{dS} = \iiint_{VC} \operatorname{div}(\vec{L}_i) d\tau = \iiint_{VC} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} d\tau.$$

Car c'est le flux d'un vecteur \vec{L}_i de composantes $\vec{L}_i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$ (L pour "ligne" car ses composantes sont les coefficients d'une ligne du tenseur des contraintes) à travers la surface \vec{dS} .

Donc si on regroupe les forces de volume et les forces de surface, on a pour la composante i :

$$\sum F_i = \iiint_{VC} \left[\rho g_i + \operatorname{div}(\vec{L}_i) \right] d\tau.$$

Ce que l'on peut encore écrire sous une forme compacte vectorielle :

$$\sum \vec{F} = \iiint_{VC(t)} \left[\rho \vec{g} + \overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma] \right] d\tau,$$

à condition de définir un nouvel opérateur, la divergence d'un tenseur, qui est un *vecteur* (attention !) dont chaque composante est la divergence du vecteur ligne correspondant : $\left\{ \overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma] \right\}_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$.

En introduisant l'expression $[\sigma] = -p[I] + [\sigma']$ on en déduit que

$$\left\{ \overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma] \right\}_i = -\frac{\partial(p\delta_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial\sigma'_{ij}}{\partial x_j}$$

soit

$$\overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma] = -\vec{\nabla}(p) + \overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma'].$$

Finalement en rassemblant tous les termes :

$$\sum \vec{F} = \iiint_{VC} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} d\tau = \iiint_{VC} \left[-\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma'] \right] d\tau,$$

quel que soit le volume de contrôle matériel et donc au niveau local :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g} + \overrightarrow{\operatorname{div}}[\sigma']} \quad (1.3)$$

Cette équation est la forme locale du Principe Fondamental de la Dynamique (PFD). Elle est exacte pour tous les fluides, compressible ou incompressible, visqueux ou non visqueux du moment qu'ils conservent leur masse. L'étape suivante est d'exprimer la *relation constitutive*, c'est-à-dire la relation entre le tenseur des contraintes visqueuses $[\sigma']$ et le tenseur des gradients de vitesse $[G]$. Nous établirons cette relation dans le chapitre 1 pour un fluide dit "newtonien". L'équation obtenue portera alors le nom d'équation de Navier-Stokes.

Dans le chapitre ?? nous allons étudier le cas idéal où l'on néglige les contraintes visqueuses ($[\sigma'] = 0$). On a alors l'équation de la dynamique suivante qui porte le nom d'équation d'Euler :

$$\boxed{\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla}(p) + \rho \vec{g}.} \quad (1.4)$$

Cette équation est appelée équation d'Euler du nom du mathématicien suisse du 18^{ème} siècle qui l'a établie. Cette équation gouverne l'écoulement des fluides sans viscosité que l'on appelle *les fluides parfaits* (ou plus exactement les écoulements parfaits) par opposition aux fluides réels qui sont visqueux.

Un fluide parfait n'a pas de viscosité, c'est-à-dire que deux veines de fluides vont pouvoir s'écouler côté à côté à des vitesses différentes sans interagir. Pour un fluide réel, à cause de l'agitation moléculaire d'origine thermique, il existe des collisions entre les molécules des deux veines et donc des échanges progressifs de quantité de mouvement. La viscosité est le coefficient qui mesure cette diffusion de la quantité de mouvement.

1.2.1 Tenseur des déformations $[\epsilon]$ (*strain tensor*)

Lorsqu'on tire avec une force constante sur une barre de métal, elle commence par s'allonger. Ensuite la longueur de la barre reste constante (sauf en cas de fluage) et l'on peut alors définir l'allongement relatif d'un vecteur initial \overrightarrow{AB} aligné avec l'axe de traction par la quantité :

$$\bar{\epsilon}(\overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{AB}}{\| \overrightarrow{AB} \|}.$$

A cette déformation longitudinale s'ajoutent des déformations transverses à la direction d'élongation. Si maintenant la contrainte a lieu dans une direction quelconque, on peut connaître la déformation d'un volume élémentaire si on connaît les 9 coefficients ϵ_{ij} et donc le *tenseur des déformations* $[\epsilon]$ (appelé *strain tensor* en anglais). Le tenseur des déformations est la réponse du solide à une contrainte appliquée. Dans le cadre de la théorie de l'élasticité linéaire [9] il y a proportionnalité entre le tenseur des déformations $[\epsilon]$ et le tenseur des contraintes $[\sigma]$, c'est-à-dire qu'il existe un tenseur de rang 4 tel que :

$$\epsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl}.$$

Heureusement si le matériau est isotrope et parce que le tenseur des contraintes est symétrique il est possible de ramener les $9 \times 9 = 81$ coefficients du tenseur $[A]$ à seulement deux coefficients : le module d'Young, E , (s'exprime en GPa par exemple) qui caractérise la raideur du matériau et le coefficient de Poisson, μ , (sans dimension $0 < \mu < \frac{1}{2}$) qui caractérise sa diminution de volume sous compression uniaxiale.

1.2.2 Tenseur des taux de déformation ou tenseur des gradients de vitesse $[G]$

Dans le cas d'un fluide soumis à une contrainte constante, la déformation se poursuit indéfiniment, contrairement au cas du solide. Par contre, la « vitesse de déformation » va être une fonction de l'intensité de la contrainte. On nomme cette vitesse de déformation, le *taux de déformation*. La encore, on peut définir un tenseur des taux de déformation (rate of strain tensor) $[\dot{\epsilon}]$, dérivé par rapport au temps du tenseur des déformations, qui n'est rien d'autre qu'un tenseur que nous avons déjà rencontré au chapitre ??, le *tenseur des gradients de vitesse* : $[\dot{\epsilon}] = [G] = \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]$.

$$[\dot{\epsilon}] = \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon] = [G].$$

Le tenseur $[G]$ décrit la variation spatiale du vecteur vitesse au voisinage d'un point. En effet la différence de vitesse entre un point \vec{r} et un point $\vec{r} + \vec{dr}$ s'écrit :

$$\vec{v}(\vec{r} + \vec{dr}) - \vec{v}(\vec{r}) = \vec{dv} = [G] \cdot \vec{dr},$$

car

$$dv_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j = \vec{\nabla} (v_i) \cdot \vec{dr}. \quad (1.5)$$

La dimension des coefficients $G_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ est l'inverse d'un temps (par exemple des s^{-1}).

Décomposition d'un tenseur

Tout tenseur peut être décomposé en la somme d'un tenseur symétrique et d'une tenseur antisymétrique. Pour le tenseur des gradients de vitesse, il suffit d'écrire :

$$[G] = [e] + [w] \quad (1.6)$$

avec

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.7)$$

et

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (1.8)$$

Le tenseur $[e]$ est par construction symétrique ($e_{ij} = e_{ji}$) et $[\omega]$ est antisymétrique ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$). On peut aussi écrire :

$$[e] = \frac{1}{2} ([G] + {}^t[G])$$

et

$$[w] = \frac{1}{2} ([G] - {}^t[G]).$$

Partie symétrique de $[G]$ ou tenseur $[e]$ des déformations pures

Le tenseur $[e]$ (Equ. 1.7) étant symétrique est caractérisé par 6 coefficients indépendants.

Notons déjà que $\text{trace}[e] = \text{trace}[G] = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{div}(\vec{v})$. Pour un fluide incompressible on a donc, $\text{trace}[e] = 0$.

Le tenseur $[e]$ étant symétrique dans une base orthonormée il est en chaque point diagonalisable. Dans la base orthonormée construite localement sur ses vecteurs propres il s'écrit donc :

$$[e] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Il n'y a maintenant plus que trois coefficients (les valeurs propres) mais cette base locale est définie par trois autres coefficients (par exemple les trois angles d'Euler), ce qui redonne bien les 6 coefficients de départ. Si l'écoulement est incompressible, $a + b + c = 0$. Il y a donc de façon générique soit une direction contractante ($a < 0$) et 2 directions dilatantes (b et $c > 0$), soit l'inverse (figure 1.3).

Un tel écoulement qui n'induit pas de rotation de la particule fluide, est dit de *déformation pure*.

En conclusion, les termes symétriques du tenseur des gradients de vitesse $[G]$ correspondent à des déformations pures.

- Exercices à deux dimensions :

- Etudier les déformations d'un carré pendant dt (figure 1.4a) si $[G] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.
- De même étudier les déformations d'un carré pendant dt si $[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$.

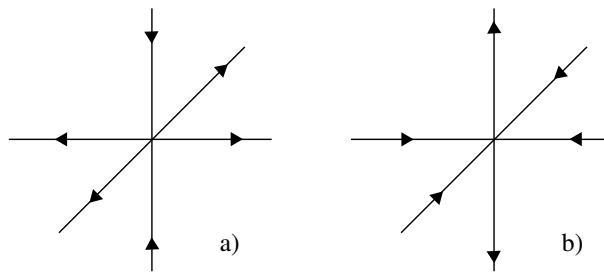


FIGURE 1.3 – Les deux cas génériques d'une déformation pure d'un écoulement incompressible 3D dans sa base orthonormée locale des vecteurs propres. a) une direction contractante (ici verticale) et les deux autres dilatantes, b) une direction dilatante (ici verticale) et les deux autres contractantes.

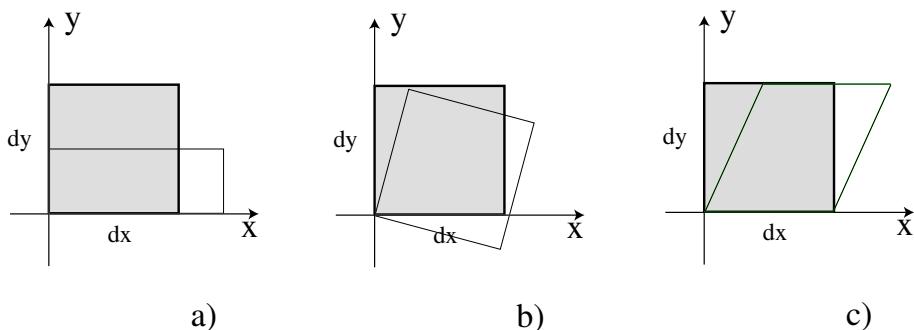


FIGURE 1.4 – Trois exemples de transformation d'une particule fluide dans un écoulement bidimensionnel. Retrouver le tenseur 2×2 correspondant à chacun des cas.

Partie antisymétrique de $[G]$ ou tenseur $[\omega]$ des rotations pures

La partie antisymétrique de $[G]$ s'écrit : $\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$. Ce tenseur est caractérisé par trois coefficients,

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Construisons le vecteur $\vec{\omega} = \{w_k\}$ ayant pour composantes $w_k = -\epsilon_{ijk} \omega_{ij}$ où ϵ_{ijk} (symbole de Levi-Civita) vaut 0, -1 ou +1 selon que deux des indices sont égaux, qu'ils sont dans le sens indirect ou qu'ils sont dans le sens direct. Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = -\omega_{23} + \omega_{32} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \omega_2 = \omega_{13} - \omega_{31} = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \omega_3 = \omega_{21} - \omega_{12} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{array} \right..$$

On constate donc que $\vec{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v})$. Ce vecteur $\vec{\omega}$ s'appelle le vecteur **vorticité** de l'écoulement, il

caractérise la rotation locale des particules fluides. C'est un vecteur très important pour l'étude de la dynamique des tourbillons (voir chapitre ??).

Si on récapitule, on a donc $\vec{dv} = [G] \cdot \vec{dl} = [e] \cdot \vec{dl} + [\omega] \cdot \vec{dl}$. En utilisant l'équation 1.9, on a :

$$[\omega] \cdot \vec{dl} = \frac{1}{2} (\vec{\omega} \wedge \vec{dl}).$$

Donc si $[e] = 0$, on a $\vec{dv} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \wedge \vec{dl}$, ce qui correspond à une *rotation locale pure* de vecteur rotation instantanée $\frac{1}{2} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$. Il est important de noter qu'une rotation pure ne déforme pas la particule fluide et il n'y a donc pas de mouvements relatifs du fluide à l'intérieur. En conséquence la rotation pure ne dissipera pas d'énergie. Rappelons qu'un mouvement quelconque d'une particule fluide est la somme d'une translation pure ($\vec{dv} = \vec{0}$), d'une rotation pure ($\vec{dv} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \wedge \vec{dl}$) et d'une déformation pure ($\vec{dv} = [e] \cdot \vec{dl}$). Seule la déformation pure dissipera de l'énergie. On peut facilement illustrer ce résultat en faisant tourner côté-à-côte un œuf dur et un œuf cru. Le second est beaucoup plus difficile à mettre en rotation. Pourquoi ?

• **Exercices à deux dimensions :**

- Etudier les déformations d'un carré pendant dt (figure 1.4b) si $[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$.
- Etude d'un cisaillement simple (qui n'est pas une déformation pure), l'écoulement de Couette plan : $[G] = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tracer le profil de vitesse de cet écoulement, calculer sa vorticité et son taux de déformation. Application à la déformation d'un carré pendant dt (figure 1.4c).
- A quelle condition deux lignes de courant se croisent-elles à angle droit ?

1.2.3 Equation constitutive des fluides newtoniens

Nous avons vu au chapitre ?? que le seul terme qui va dissiper de l'énergie dans l'écriture du principe fondamental de la dynamique (équation 1.3 page 12) est le terme qui fait intervenir le tenseur des contraintes visqueuses $\text{div}[\sigma']$. Or ni la translation globale de la particule fluide, ni sa rotation en bloc ne déforme la particule fluide (pas de mouvement relatif à l'intérieur). Seules les déformations pures dissipent de l'énergie, et donc le tenseur des contraintes visqueuses ne peut dépendre que de la partie symétrique du tenseur des déformations. Ce que l'on écrit :

$$[\sigma'] = f([e]).$$

On appelle **fluides newtoniens** les fluides pour lesquels le tenseur des contraintes visqueuses dépend **uniquement et linéairement** des valeurs **instantanées** des déformations. Soit :

$$\sigma'_{ij} = A_{ijkl} e_{kl},$$

où nous utilisons la convention d'Einstein (sommation implicite de tous les indices redoublés). $[A]$ est alors un tenseur de rang 4. Si le milieu est isotrope (invariant dans les directions 1, 2 et 3), on peut montrer de façon générale [9] qu'un tel tenseur, au lieu d'avoir 81 coefficients indépendants, n'en a que trois, A , A' et B et s'écrit :

$$A_{ijkl} = A \delta_{ik} \delta_{jl} + A' \delta_{il} \delta_{jk} + B \delta_{ij} \delta_{kl}.$$

δ_{ij} est l'indice de Kronecker (il vaut zéro si $i \neq j$ et 1 si $i = j$). Comme de plus le tenseur des contraintes visqueuses est symétrique, ($\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$) on en déduit $A = A'$.

$$\sigma'_{ij} = A(\delta_{ik}\delta_{jl}e_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk}e_{kl}) + B\delta_{ij}\delta_{kl}e_{kl} = A(e_{ij} + e_{ji}) + B\delta_{ij}e_{ll} = 2Ae_{ij} + B\delta_{ij}e_{ll},$$

car le tenseur $[e]$ est symétrique. On pose en général $A = \eta$ et $B = \zeta - \frac{2}{3}\eta$. La constante η (éta) est appelée la viscosité de cisaillement et ζ (zéta) la viscosité de volume. Alors :

$$\sigma'_{ij} = 2\eta(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{ll}) + \zeta\delta_{ij}e_{ll}. \quad (1.10)$$

Le premier terme est de trace nulle (en effet $\delta_{ll} = 3$), le deuxième terme fait apparaître la trace du tenseur $[e]$ qui caractérise la compressibilité de l'écoulement.

1.2.4 Divergence du tenseur des contraintes visqueuses

Repartons maintenant de la relation 1.10. La composante i du vecteur divergence du tenseur des contraintes visqueuses s'écrit (voir §1.2) :

$$\left\{ \vec{\text{div}} [\sigma'_{ij}] \right\}_i = \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} = 2\eta \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \delta_{ij} \frac{\partial e_{ll}}{\partial x_j}.$$

Or $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, donc :

$$\left\{ \vec{\text{div}} [\sigma'_{ij}] \right\}_i = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \eta \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_j \partial x_i} + \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right).$$

$$\left\{ \vec{\text{div}} [\sigma'_{ij}] \right\}_i = \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right).$$

$$\left\{ \vec{\text{div}} [\sigma'_{ij}] \right\}_i = \eta \nabla^2 v_i + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \frac{\partial}{\partial x_i} [\text{div}(\vec{v})].$$

Soit vectoriellement :

$$\boxed{\vec{\text{div}} [\sigma'] = \eta \vec{\nabla}^2 (\vec{v}) + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \vec{\nabla} [\text{div} (\vec{v})]}. \quad (1.11)$$

1.3 Equation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien

A partir du Principe Fondamental de la Dynamique nous avions trouvé (Eq. 1.3) :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \vec{\text{div}} [\sigma']$$

De l'équation 1.11 on déduit directement l'équation de Navier-Stokes pour un fluide newtonien compressible :

$$\boxed{\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{g} + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta \right) \vec{\nabla} [\text{div} (\vec{v})]}. \quad (1.12)$$

La viscosité η est appelé la viscosité de cisaillement ou aussi la viscosité dynamique (elle est parfois notée μ) et s'exprime en Pa.s. La viscosité de volume ζ (ou seconde viscosité) est moins bien connue [14], elle intervient, en plus de la viscosité de cisaillement par exemple dans l'atténuation du son dans un fluide.

Comme pour un fluide incompressible on a $\text{trace}[e] = e_{ll} = \text{div}(\vec{v}) = 0$, l'équation 1.10 donne finalement $[\sigma'] = 2\eta[e]$, soit l'expression finale des contraintes visqueuses pour un fluide newtonien incompressible :

$$\boxed{\sigma'_{ij} = 2\eta e_{ij} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}. \quad (1.13)$$

et l'équation de Navier-Stokes d'un fluide newtonien incompressible :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}}. \quad (1.14)$$

On appelle viscosité cinématique (unité classique, le $m^2 s^{-1}$) la quantité $\nu = \frac{\eta}{\rho}$. Comme la viscosité dynamique η , c'est pour un fluide newtonien une propriété du fluide et pas de l'écoulement. La viscosité cinématique caractérise la viscosité de cisaillement par unité de masse contrairement à η qui est la viscosité de cisaillement par unité de volume.

1.4 Signification physique de la viscosité

Le coefficient de viscosité correspond au coefficient de diffusion de la quantité de mouvement. C'est grâce à la viscosité que le mouvement d'une couche de fluide peut induire des mouvements dans les couches voisines (voir films du DVD [10] et les exemples du §1.8.5).

Le coefficient de viscosité caractérise aussi la dissipation d'énergie. Montrons que la puissance dissipée par frottement interne n'existe que si la particule fluide est déformée et que la puissance dissipée par unité de volume noté ici ϵ s'écrit :

$$\boxed{\epsilon = -2\eta e_{ij} e_{ij} = -\frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}, \quad (1.15)$$

avec une sommation implicite sur tous les indices redoublés (notations tensorielles) :

$$e_{ij} e_{ij} = e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2,$$

où plusieurs de ces termes sont égaux car le tenseur des déformations est un tenseur symétrique. Cette puissance est dissipée en chaleur dans le fluide, d'où le signe moins.

Démonstration : Voici une démonstration inspirée de la référence [1] p. 216.

L'énergie cinétique E_c contenue dans un volume de contrôle matériel s'écrit :

$$E_c = \iiint_{V_{Cm}} \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 d\tau.$$

Calculons la dérivée temporelle de cette énergie cinétique. En appliquant le théorème du transport pour une quantité scalaire (Equ. ?? page ??) et la conservation de la masse, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$ (Equ. ?? page ??) :

$$\begin{aligned}
\frac{dE_c}{dt} &= \iiint_{VC_m} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial(\rho\vec{v}^2)}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \vec{v} \right) \right] d\tau \\
&= \iiint_{VC_m} \left[\frac{1}{2} \rho \frac{\partial \vec{v}^2}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) \right] + \rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \right] d\tau \\
&= \iiint_{VC_m} \frac{1}{2} \rho \frac{D\vec{v}^2}{Dt} d\tau.
\end{aligned}$$

En introduisant la convention d'Einstein sur les indices redoublés, la dérivée de l'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{VC_m} \rho v_i \frac{Dv_i}{Dt} d\tau.$$

En introduisant le tenseur des contraintes σ_{ij} pour les forces de surface, le principe fondamental de la dynamique peut s'écrire : $\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \rho g_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ (voir § 1.2 page 11), donc :

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{VC_m} \left[\rho v_i g_i + v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] d\tau.$$

Le terme qui contient le tenseur des contraintes peut s'écrire : $v_i \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ et on a donc :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{VC_m} \rho v_i g_i d\tau + \iiint_{VC_m} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) d\tau - \iiint_{VC_m} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\tau.} \quad (1.16)$$

- Le premier terme du membre de droite de l'expression précédente s'écrit $\int_{VC_m} \rho \vec{v} \cdot \vec{g} d\tau$ et représente la variation d'énergie (la puissance) due à la force de gravité, ou plus généralement à toutes les forces volumiques.
- Le deuxième terme peut écrire :

$$\iiint_{VC_m} \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) d\tau = \iiint_{VC_m} \operatorname{div}([\sigma] \cdot \vec{v}) d\tau = \iint_{SC_m} ([\sigma] \cdot \vec{v}) \cdot \vec{n} dS = \iint_{SC_m} \vec{v} \cdot \vec{\sigma}(\vec{n}) dS.$$

Il représente donc la variation d'énergie due aux forces de surface $\vec{\sigma}(\vec{n}) dS$ qui s'exercent sur chaque élément de la surface du volume de contrôle.

- Enfin le troisième terme peut se transformer encore. En effet

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \sigma_{ji} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

puisque on peut permute les indices muets i et j et que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ car le tenseur des contraintes est symétrique.

De plus $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ (Equ. 1.13 page ci-contre) pour un fluide newtonien incompressible, donc

$$\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = 2\eta e_{ij} e_{ij}$$

car $\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} \vec{v} = 0$. Donc le troisième terme de l'équation 1.16 s'écrit finalement :

$$-\iiint_{VC_m} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\tau = -2\eta \iiint_{VC_m} e_{ij} e_{ij} d\tau.$$

Ce dernier terme, toujours négatif, représente donc la dissipation d'énergie. La dissipation est proportionnelle au coefficient de viscosité dynamique η , et elle est toujours présente si le tenseur des déformations est non nul. Ceci confirme que seule la déformation des particules fluides dissipe de l'énergie et pas leur translation ni leur rotation.

1.5 Mesure de la viscosité

Il existe de nombreux appareils pour mesurer la viscosité. On distingue les *viscosimètres* utilisés pour les fluides newtoniens, qui font une mesure comparative et doivent donc être étalonnés, et les *rhéomètres* qui mesurent la relation entre les contraintes et les taux de déformation. On réalise en général des écoulements rhéologiques, c'est-à-dire des écoulements où un seul terme du tenseur des gradients de vitesse est non nul et il faut de plus qu'il soit constant en temps et homogène en espace. On appelle taux de cisaillement le gradient de vitesse imposé, noté parfois $\dot{\gamma}$ ou $\dot{\epsilon}$, par exemple $\dot{\epsilon} = \partial v_x / \partial y$. Ce coefficient est homogène à l'inverse d'un temps (s^{-1}).

La table 1.5 donne la valeurs de la viscosité pour quelques fluides newtoniens.

	Viscosité dynamique η (Pa.s)	Viscosité cinématique $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ (m^2/s)
Eau (20°C)	10^{-3}	$1,006 \cdot 10^{-6}$
Air (20°C)	$18,2 \cdot 10^{-6}$	$15,1 \cdot 10^{-6}$
Glycérine (20°C)	1,49	$1180 \cdot 10^{-6}$
Mercure (20°C)	$1,55 \cdot 10^{-3}$	$0,116 \cdot 10^{-6}$
CO_2 (20°C, 1 atm.)	$14,7 \cdot 10^{-6}$	$8,03 \cdot 10^{-6}$
H_2 (20°C, 1 atm.)	$8,83 \cdot 10^{-6}$	$105 \cdot 10^{-6}$

TABLE 1.1 – Tableau donnant les viscosités de quelques fluides newtoniens à 20°C.

1.5.1 Quelques viscosimètres simples

Avec un viscosimètre à tube capillaire on mesure le temps d'écoulement d'un liquide visqueux à travers un tube mince (figure 1.5). Ce temps est simplement proportionnel à la viscosité pour un fluide newtonien. On fait de même dans un viscosimètre à chute de bille, où cette fois l'on mesure le temps de chute d'une bille le long d'un tube préalablement rempli du liquide à tester (figure 1.6). Dans la

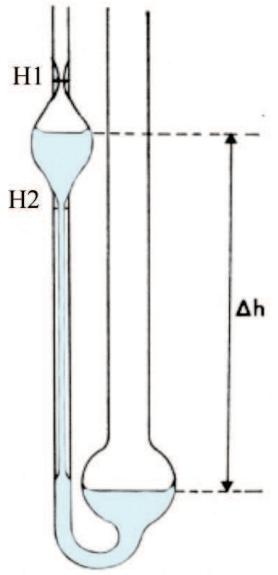


FIGURE 1.5 – Viscosimètre à tube capillaire.



FIGURE 1.6 – Viscosimètre à chute de bille.

méthode de la *louche percée* utilisée dans l'industrie de la peinture, on mesure le temps de vidange d'une louche percée d'un trou calibré.

1.5.2 Quelques exemples de rhéomètre

Dans un rhéomètre on génère des écoulements où il n'existe qu'une seule composante du tenseur des gradients de vitesse : par exemple la géométrie de Couette cylindrique (§1.8.2) ou la géométrie du cône/plan (figure 1.7).

La plupart des rhéomètres peuvent travailler à cisaillement imposé (constant strain) ou bien à contrainte imposée (constant stress). A partir des courbes donnant l'évolution de la contrainte σ avec le cisaillement $\dot{\epsilon}$ que l'on appelle des rhéogrammes, on peut décrire la variation de la viscosité apparente avec l'intensité du taux de cisaillement $\eta = \sigma/\dot{\epsilon} = f(\dot{\epsilon})$.

La figure 1.8 montre que la viscosité est une propriété des fluides qui, même pour un fluide newtonien, dépend fortement de la température, mais différemment pour un gaz ou un liquide ! Dans un liquide les viscosités dynamique et cinématique diminuent avec la température (loi de Andrade, $\log(\eta) \approx A + \frac{B}{T}$). Pour un gaz au contraire elles augmentent avec la température (l'agitation moléculaire augmentant, la diffusion de la quantité de mouvement augmente aussi).

1.6 Adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes

Dans le chapitre précédent nous avons établi l'équation de Navier-Stokes (équation 1.14) pour un fluide newtonien incompressible :

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}} . \quad (1.17)$$

Le premier terme correspond au terme instationnaire, le second au terme inertiel. A droite on a

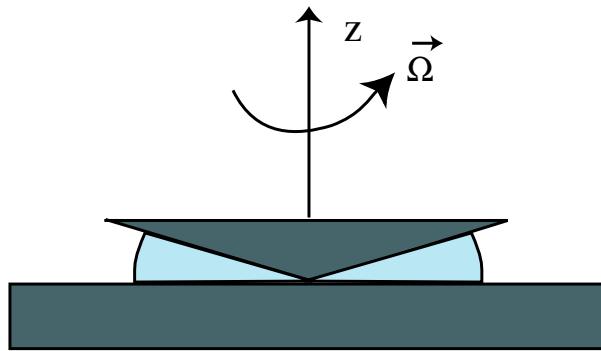


FIGURE 1.7 – Principe du rhéomètre cône/plan. Il peut fonctionner soit à contrainte imposée (couple imposé) soit à cisaillement imposé ($\vec{\Omega} = Cste$) et il permet de plus de mesurer l'apparition éventuelle des contraintes normales σ_{zz} , ce qui est important pour caractériser les fluides viscoélastiques par exemple.

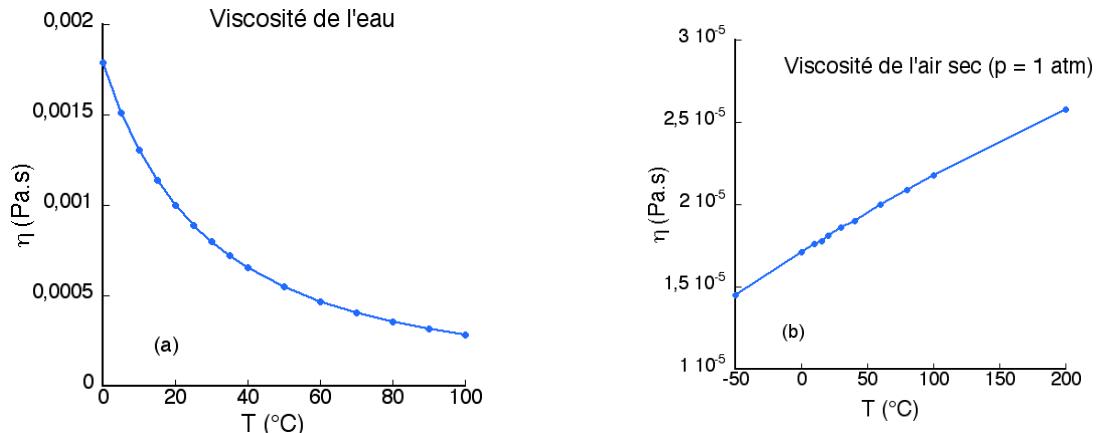


FIGURE 1.8 – Courbes montrant l'évolution de la viscosité dynamique η de l'eau (a) et de l'air sec (b) en fonction de la température, à une pression de 1 atm. (D'après [2] p. 594-597).

successivement les forces de pression, les forces de volume et les forces visqueuses. Cette équation, écrite par unité de masse, est dimensionnée mais on peut chercher à l'adimensionner.

On adimensionne les variables en minuscule en posant :

$$t = \hat{t} T, \quad x_i = \hat{x}_i L, \quad v = \hat{v} V_0, \quad p = \hat{p} P_0, \quad \vec{g} = \hat{\vec{g}} G,$$

où les termes en majuscule sont des constantes dimensionnées et les termes avec un chapeau les variables sans dimension. On peut remplacer toutes les variables en minuscule dans l'équation de Navier-Stokes et l'on obtient :

$$\frac{V_0}{T} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{t}} + \frac{V_0^2}{L} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{P_0}{\rho L} \vec{\nabla}(\hat{p}) + G \vec{g} + \frac{\nu V_0}{L^2} \vec{\nabla}^2 (\vec{v}).$$

En faisant apparaître un coefficient unité devant le terme inertiel on obtient :

$$\frac{L}{V_0 T} \frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{t}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = - \frac{P_0}{\rho V_0^2} \vec{\nabla}(\hat{p}) + \frac{LG}{V_0^2} \vec{g} + \frac{\nu}{V_0 L} \vec{\nabla}^2 (\vec{v}).$$

Considérons d'abord le cas très simple d'une sphère de rayon L se déplaçant à une vitesse

constante V_0 dans un fluide au repos. Les paramètres L et V_0 sont alors les seules échelles du problème. Il n'y a pas d'échelle indépendante de temps et de pression et l'on peut alors choisir $T_0 = L/V_0$ et $P_0 = \rho V_0^2$. Supposons de plus que la gravité n'intervienne pas dans cet exemple, on obtient l'équation adimensionnée de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{t}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla}(\hat{p}) + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2(\vec{v}). \quad (1.18)$$

On appelle **nombre de Reynolds** le rapport :

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} = \frac{\rho V_0 L}{\eta}. \quad (1.19)$$

N.B. : Même si la sphère est fixe dans l'écoulement, le terme instationnaire peut être non nul s'il existe une instabilité du sillage.

Il ne reste donc plus dans l'équation de Navier-Stokes qu'un seul nombre sans dimension. La structure de l'écoulement ne dépend alors que de la valeur de ce nombre de Reynolds Re et des conditions aux limites. On a en particulier deux cas limites :

- $Re \rightarrow 0$, les effets visqueux sont dominants,
- $Re \rightarrow \infty$, les effets inertIELS dominent.

Le nombre de Reynolds peut d'ailleurs aussi s'écrire comme le rapport des ordres de grandeur du terme d'inertie et du terme visqueux :

$$Re = \frac{\text{terme inertiel}}{\text{terme visqueux}} = \frac{\|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}\|}{\|\nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}\|} = \frac{V_0^2/L}{\nu V_0/L^2} = \frac{V_0 L}{\nu}.$$

1.6.1 Quelques valeurs de nombres de Reynolds

On peut facilement estimer des ordres de grandeur pour quelques écoulements :

- Une paramécie nageant dans l'eau : $Re \approx 10^{-2}$.
- Un goutte de pluie tombant dans l'air : $Re \approx 1000$.
- Sillage d'un marcheur : $Re \approx 30\,000$.
- Sillage d'une voiture : $Re \approx 4 \times 10^6$.
- Sillage d'un avion : $Re \approx 2 \times 10^8$.

• Il est important de noter que la limite $Re \rightarrow \infty$ est mathématiquement une limite singulière, car l'équation différentielle aux dérivées partielles passe alors du second au premier ordre de dérivation en espace. L'équation de Navier-Stokes est d'ordre 2 pour la dérivation en espace alors que l'équation d'Euler est d'ordre 1 en espace. Par exemple dans le cas du sillage d'une sphère sans rotation sur elle-même dans un écoulement parfait, comme il n'y a plus aucun paramètre sans dimension dans l'équation d'Euler, la solution ne doit plus dépendre d'aucun paramètre et doit en particulier être la même quelque soit la vitesse de la sphère. Une autre conséquence de ces ordres des dérivées dans les équations est que l'on a besoin de plus de conditions aux limites pour résoudre l'équation de Navier-Stokes que pour résoudre l'équation d'Euler.

• A cause du terme $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$, l'équation de Navier-Stokes, comme l'équation d'Euler, sont des équations non-linéaires. En conséquence on ne peut utiliser ni le théorème de superposition ni le théorème d'unicité : pour les mêmes conditions aux limites il existe des solutions multiples. Certaines

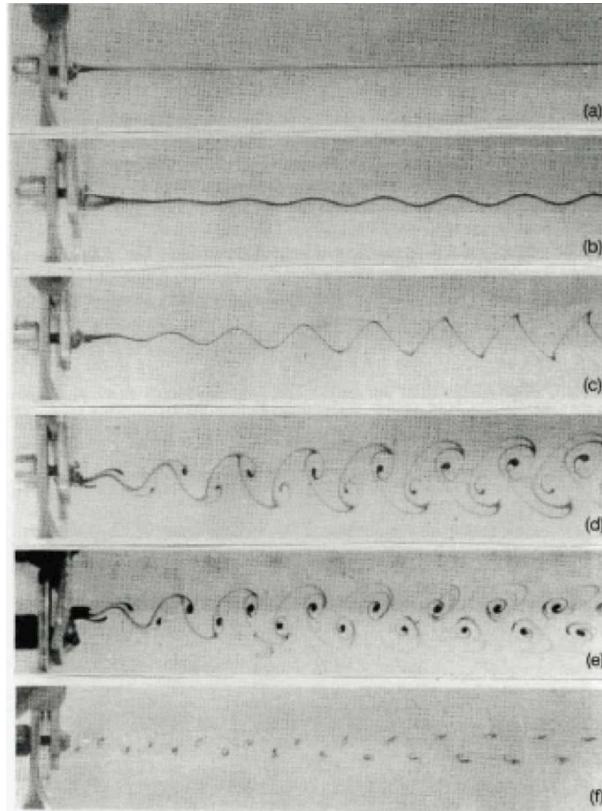


FIGURE 1.9 – Visualisation du sillage d'un cylindre par émission d'encre à travers un orifice dans le cylindre. Ce sillage serait le même pour différents diamètres, différents fluides ou différentes vitesses du moment que le nombre de Reynolds Re est le même. Le nombre de Reynolds prend de haut en bas les valeurs 30, 40, 47, 55, 67 et 100. Pour $Re > 50$ on visualise une allée de tourbillons alternés émis par le cylindre, dite *allée de tourbillons de Bénard-von Kármán*. (D'après [20] p. 25).

de ces solutions peuvent être stables, d'autres instables, et c'est uniquement l'ensemble des solutions qui satisfait aux symétries du problème (principe de Curie).

1.6.2 Quelques autres nombres sans dimension

Reprenons l'adimensionnement de l'équation de Navier-Stokes. S'il apparaît dans les conditions du problème, une pression propre P_0 , un temps caractéristique des phénomènes instationnaires T , des effets de la gravité (ondes de surface par exemple), des tailles différentes en x , y ou z , l'équation de Navier-Stokes fait alors apparaître d'autres nombres sans dimension :

- Le nombre de Strouhal : $St = \frac{\text{fréquence imposée}}{\text{fréquence naturelle}} = \frac{1/T}{V_0/L} = \frac{L}{V_0 T}$.
- Le nombre de Froude : $Fr = \left[\frac{\text{forces d'inerties}}{\text{forces de gravité}} \right]^{1/2} = \frac{V_0}{\sqrt{gL}}$. L'exposant 1/2 permet de comparer directement la vitesse de l'objet aux vitesses des ondes de gravité en eau peu profonde (voir §§??).
- Le nombre d'Euler : $Eu = \frac{\text{forces de pression}}{\text{forces inertielles}} = \frac{P_0/\rho L}{V_0^2/L} = \frac{P_0}{\rho V_0^2}$.

L'équation de Navier-Stokes adimensionnée s'écrit alors :

$$St \frac{\partial \vec{v}}{\partial \hat{t}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -Eu \vec{\nabla}(\hat{p}) + \frac{1}{Fr^2} \vec{g} + \frac{1}{Re} \vec{\nabla}^2(\vec{v}).$$

Si l'obstacle n'est pas une sphère, $L_x \neq L_y \neq L_z$ on doit aussi introduire des rapports d'aspect géométriques, L_x/L_z ou L_y/L_z , ou plus généralement des fonctions de la forme de l'objet.

1.7 Les conditions aux limites cinématiques et dynamiques

Il existe deux types de conditions aux limites que l'on doit préciser pour résoudre les équations du mouvement : les conditions aux limites cinématiques (sur la vitesse) et les conditions aux limites dynamiques (sur les forces).

1.7.1 Les conditions cinématiques

Cas d'une surface solide immobile

- Si le matériau est non poreux, alors les particules fluides ne peuvent pénétrer dans le solide et la composante de la vitesse normale à la paroi doit être nulle (pas de flux de matière) : $Q = \int \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$, et ce quelque soit $d\vec{S}$. Soit :

$$\boxed{\vec{v}_\perp = \vec{0}}.$$

La vitesse normale à une paroi solide est nulle.

- Si l'écoulement est parfait (pas de viscosité, équation d'Euler), il n'y a pas d'autre condition cinématique car il peut exister des gradients de vitesse infinis entre le liquide et le solide, et donc la vitesse tangentielle à la paroi peut prendre n'importe quelle valeur.
- Si le fluide est réel (visqueux), on observe expérimentalement que les molécules de fluide au voisinage de la paroi sont en moyenne immobiles, surtout si la surface est un peu rugueuse ou si les molécules sont adsorbées sur la paroi. La vitesse tangentielle d'une particule fluide (vitesse mésoscopique) est donc nulle. C'est ce que l'on appelle *la condition de non-glisement sur une paroi solide*.

$$\boxed{\vec{v}_{\parallel} = 0}.$$

Notons toutefois que cette condition classique de non-glisement n'est pas évidente à petite échelle. Plus précisément si on note λ le libre parcours moyen des molécules entre deux collisions, à une distance z inférieure à λ de la paroi, la moitié des particules vont vers la paroi et n'ont pas encore eu de collisions avec elle. Ces molécules ont donc toujours une composante parallèle à la surface solide $V_S = v_{\parallel}(z = \lambda)$ alors que l'autre moitié des molécules s'éloignent de la paroi après l'avoir frappée. Si lors du choc il y a eu une adsorption temporaire des molécules sur la paroi (collision non spéculaire), il y a après le choc *en moyenne* perte de la vitesse tangentielle, $V_S = 0$. En faisant la moyenne de ces deux contributions on a donc finalement au voisinage de la paroi : $V_S = \frac{1}{2}v_{\parallel}(z = \lambda)$. Il existe alors une petite vitesse de glissement à la paroi et c'est uniquement le prolongement du profil de vitesse qui s'annule à l'intérieur du solide, à une distance $b \approx \lambda$ (Fig. 1.10). La relation de continuité du gradient de vitesse donne alors :

$$V_S = b \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}.$$

Cela dit, dans la plupart des applications le libre parcours est inférieur à 1 micromètre et la distinction reste souvent bien minime. Notons toutefois quelques exceptions notoires : la microfluidique où les fluides se déplacent dans des microcapillaires où un glissement sur 1 μm n'est pas négligeable, le cas des gaz très dilués (régime de Knudsen) où le libre parcours n'est pas petit devant la taille de l'objet, ce qui augmente fortement l'effet du glissement du fluide à la paroi. On retrouve aussi de telles vitesses de glissement pour certains écoulements de polymères concentrés ou même pour des écoulements granulaires denses.

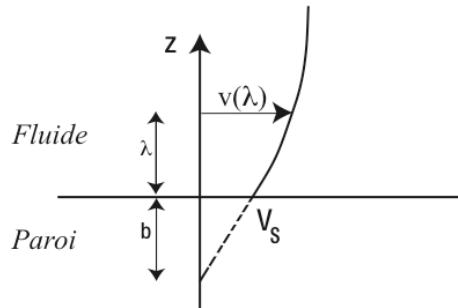


FIGURE 1.10 – Détail d'un profil de vitesse près d'une paroi mettant en évidence la vitesse de glissement $V_s = b \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0}$ où b est de l'ordre du libre parcours moyen des molécules du fluide.

Cas d'une surface solide mobile

Si la paroi se déplace les conditions aux limites sont physiquement les mêmes, mais il faut écrire la nullité des vitesses normales et tangentielles à la paroi *dans le référentiel de la paroi*, et donc égalité des vitesses normales (écoulement parfait) ou égalité des vecteurs vitesses (fluide visqueux) dans le référentiel fixe :

$$v_{\perp \text{fluide}} = v_{\perp \text{paroi}} \text{ pour un écoulement parfait}$$

$$\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{paroi}} \text{ pour un écoulement réel}$$

Cas d'une interface fluide déformable

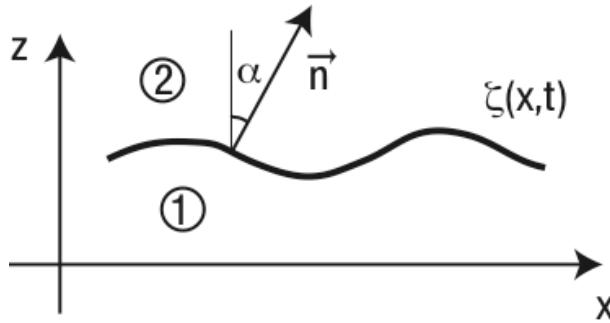
Là encore il faut écrire une condition sur les vitesses au niveau de l'interface (figure 1.11). Tout d'abord les vitesses normales doivent être égales sinon il apparaît un espace entre les deux fluides (ou un recouvrement) :

$$(v_1)_\perp = (v_2)_\perp$$

Le calcul de cette vitesse normale fait intervenir l'équation de l'interface $\zeta(x, t)$. Le vecteur normal à l'interface a pour composantes $\vec{n} = (\sin \alpha, \cos \alpha)$ où $\tan \alpha = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ (figure 1.11). En égalisant les composantes normales des vitesses de l'interface et des fluides 1 et 2, $\frac{\partial \zeta}{\partial t} \cdot \vec{n} = \vec{v}_1 \cdot \vec{n} = \vec{v}_2 \cdot \vec{n}$, il vient :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \cos \alpha = v_{1x} \sin \alpha + v_{1z} \cos \alpha = v_{2x} \sin \alpha + v_{2z} \cos \alpha,$$

soit en divisant pour $\cos \alpha$,

FIGURE 1.11 – Interface déformée $\zeta(x, t)$ entre deux fluides et normale locale \vec{n} .

$$\boxed{\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -v_{1x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{1z} = -v_{2x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{2z}.} \quad (1.20)$$

On peut aussi retrouver cette équation en écrivant qu'une particule fluide de l'interface reste à l'interface. En effet une particule M_1 de coordonnées (x_1, z_1) dans le fluide 1 est à l'interface si la distance $h = z_1 - \zeta(x_1, t)$ est nulle. Elle reste sur l'interface si $dh(x_1, z_1, t) = 0$. Or $dh = dz_1 - \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx_1 - \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt = 0$, c'est-à-dire si $\frac{dz_1}{dt} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{dx_1}{dt} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0$. Comme $\frac{dz_1}{dt} = V_{1z}$ et $\frac{dx_1}{dt} = V_{1x}$ et en faisant le même raisonnement pour une particule du milieu 2 on retrouve les équations 1.20.

Si de plus les deux fluides sont visqueux, la condition d'égalité des vitesses tangentielles à l'interface, $(v_1)_{//} = (v_2)_{//}$, conduit à l'égalité des vecteurs vitesses à l'interface :

$$\boxed{\vec{v}_1 = \vec{v}_2} .$$

1.7.2 Les conditions dynamiques

Pour les conditions dynamiques il faut faire un bilan des forces qui s'appliquent à un petit volume qui entoure l'interface, puis faire tendre la hauteur de ce volume vers zéro. Comme la masse devient nulle il faut que la somme des forces appliquées à ce petit volume soit nulle. Rappelons l'expression du tenseur des contraintes : $[\sigma] = -p[I] + [\sigma'] = [-p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)]$.

Cas des écoulements parfaits

Il n'existe pas d'autre force que les forces de pression dans chacun des fluides ($[\sigma'] = 0$), avec éventuellement des forces interfaciales s'il existe une courbure de l'interface et une tension de surface (voir leçon 3). Il n'existe alors que des conditions sur les pressions à la paroi :

1. pour une surface solide : $P_{fluide} = P_{paroi}$
2. pour une interface plane entre deux fluides : $P_{fluide1} = P_{fluide2}$
3. pour une interface courbée entre deux fluides, on a l'équation de Laplace (Eq. 3.3 page 73) :

$$P_{fluide1} - P_{fluide2} = \gamma \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right) \quad (1.21)$$

où R' et R'' sont les deux rayons de courbure de la surface (comptés positivement si leur centre est du côté 1) et γ la tension de surface (voir leçon 3). C'est la loi de Laplace, qui montre que la pression est plus élevée du côté concave de la surface.

Cas des fluides réels

Il faut maintenant égaliser aussi bien les contraintes tangentielles que les contraintes normales. Considérons successivement les trois cas suivants : une surface solide, une interface fluide plane, une interface fluide courbée.

1. Cas d'une surface solide

Montrons d'abord que dans le tenseur des gradients de vitesse, de nombreux termes sont nuls sur une paroi solide. En effet si la paroi est perpendiculaire à la direction Oz , au voisinage d'un point x on a $\vec{v}(x + dx) = \vec{v}(x) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx$. Comme la vitesse à la paroi est nulle en x et aussi en $x + dx$ on en déduit : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{0}$. On montre de même $\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} = \vec{0}$. En utilisant l'incompressibilité du fluide, $\text{div}(\vec{v}) = 0$, on en déduit que $\partial v_z / \partial z = 0$ au niveau de la paroi.

Donc seules les composantes $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ et $\frac{\partial v_y}{\partial z}$ peuvent ne pas être nulles et la contrainte à la paroi a alors pour composantes :

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right), \\ \sigma_{yz} &= \eta \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ \sigma_{zz} &= -p.\end{aligned}$$

2. Cas d'une interface entre deux liquides sans effet de tension de surface

En présence de deux fluides non miscibles, on doit écrire à l'interface

$$[\sigma_1] \cdot \vec{n} = [\sigma_2] \cdot \vec{n}.$$

L'égalité des contraintes tangentielles s'écrit :

$$\boxed{\eta_1 \frac{\partial v_{1x}}{\partial z} = \eta_2 \frac{\partial v_{2x}}{\partial z}} \quad (1.22)$$

et idem pour la composante σ_{yz} si elle existe. Les pentes des profils de vitesse de part et d'autre de l'interface sont donc dans le rapport inverse des viscosités. La pente est la plus faible dans le fluide le plus visqueux (voir figure 1.12 page ci-contre).

On appelle « surface libre » une surface sur laquelle la contrainte tangentielle est nulle. Cette condition de surface libre est souvent justifiée à l'interface entre l'air et l'eau car la viscosité dynamique de l'air est très faible devant celle de l'eau. La condition de contrainte nulle impose que la pente du profil de vitesse dans l'eau soit nulle. Il existe alors un maximum de la vitesse à la surface libre (figure 1.13). Condition à une surface libre :

$$\boxed{\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0}. \quad (1.23)$$

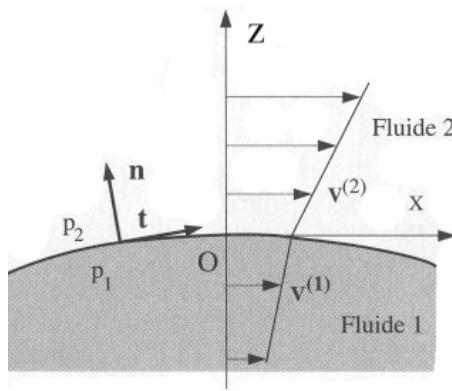


FIGURE 1.12 – Conditions aux limites cinématiques dans le plan (xOy) à une interface fluide.

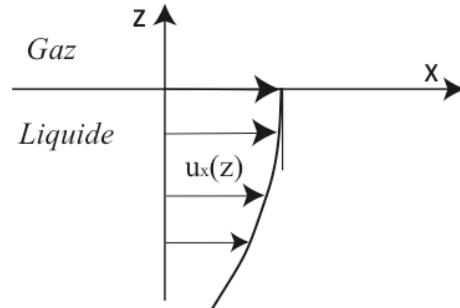


FIGURE 1.13 – Profil de vitesse au voisinage d'une surface libre, c'est-à-dire si la contrainte du gaz sur le liquide peut être négligée.

3. Cas d'une interface entre deux liquides avec tension de surface

S'il existe une tension de surface, par rapport au cas précédent il se rajoute une contrainte normale proportionnelle à la courbure de l'interface (comme dans le cas de deux fluides parfaits, donné par la loi de Laplace (Equ. 3.3)) plus éventuellement une contrainte tangentielle s'il existe un gradient de tension de surface. Un tel gradient peut apparaître sous l'action d'un gradient de température, ou d'un gradient de concentration en produit tensioactif. On parle alors d'effet Marangoni (voir [12] p. 155 ou [2] p. 69).

1.7.3 Tableau récapitulatif des conditions aux limites

Le tableau 1.2 résume les différentes conditions aux limites, pour un écoulement parfait et pour un écoulement réel.

Dans la suite nous allons parler des écoulements « laminaires » (par opposition aux écoulements turbulents), c'est-à-dire des écoulements où le fluide s'écoule en « lames » parallèles. Ce sont en général les écoulements que l'on observe quand le fluide est peu sollicité c'est-à-dire lorsque le nombre de Reynolds n'est pas trop élevé.

1.8 Solutions exactes de l'équation de Navier-Stokes : les écoulements parallèles

On appelle écoulements *parallèles* des écoulements unidirectionnels et invariants le long de l'écoulement. Ce sont des écoulement "1C1D" ($\vec{v} = \{u(y), 0, 0\}$) ou "1C2D" ($\vec{v} = \{u(y, z), 0, 0\}$). Cette propriété impose automatiquement $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0$. Le terme non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes disparaît donc. De plus l'incompressibilité est obligatoirement vérifiée car $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$. Voyons quelques exemples.

Type d'interface	Ecoulement parfait (Euler)	Ecoulement visqueux (Navier-Stokes)
Paroi solide	$(v_\perp)_{\text{fluide}} = (v_\perp)_{\text{paroi}}$ $p_{\text{fluide}} = p_{\text{paroi}}$	$\vec{v}_{\text{fluide}} = \vec{v}_{\text{paroi}}$ $p_{\text{fluide}} = p_{\text{paroi}}$ $\sigma_{xz} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z}$
Interface fluide (sans tension de surface)	$(v_\perp)_1 = (v_\perp)_2$ $p_1 = p_2$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ $p_1 = p_2$ $\eta_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_1 = \eta_2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_2$
Interface fluide (avec tension de surface)	$(v_\perp)_1 = (v_\perp)_2$ $P_1 - P_2 = \gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$	$\vec{v}_1 = \vec{v}_2$ $(\sigma_{ij} n_j)_1 - (\sigma_{ij} n_j)_2 = -\gamma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) n_i + \left\{ \vec{\nabla} \gamma \right\}_i$

TABLE 1.2 – Tableau récapitulatif des conditions aux limites.

1.8.1 Ecoulement de Couette plan

On cherche l'écoulement établi (indépendant du temps) entre deux plaques parallèles dont l'une se déplace dans son plan à la vitesse U_0 . On suppose $\vec{v} = \{u(y), 0, 0\}$ et l'on néglige la gravité. L'équation de Navier-Stokes se ramène alors à :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Comme u ne dépend pas de x , $\frac{\partial p}{\partial x}$ n'en dépend pas non plus. C'est une constante qui ne peut dépendre ni de y ni de z puisque p n'en dépend pas ($\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$). Cette constante sera nulle s'il n'y a pas de gradient de pression imposé à l'infini par les conditions aux limites. Nous le supposerons ici et on trouve alors, en tenant compte des conditions aux limites $u = 0$ en $y = 0$ et $u = U_0$ en $y = h$:

$$u(y) = \frac{U_0}{h} y.$$

Le gradient de vitesse est constant partout dans l'écoulement (figure 1.14). C'est un écoulement de cisaillement pur (somme d'un écoulement de déformation pure et de rotation pure, voir § 1.2.2).

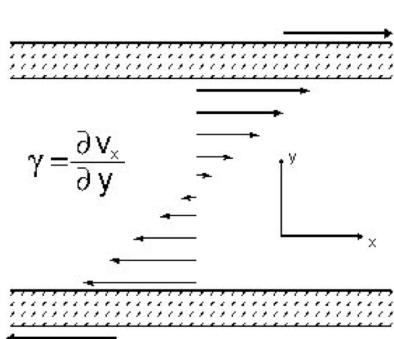


FIGURE 1.14 – Géométrie et profil de vitesse de l'écoulement de Couette plan, ici avec deux vitesses de paroi égales et opposées.

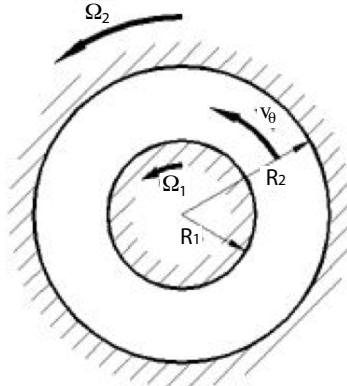


FIGURE 1.15 – Géométrie de Couette cylindrique.

Exercice : Calculer l'écoulement de Couette plan entre deux plaques avec deux fluides superposés et de viscosités différentes. Tracer le profil transverse des vitesses.

1.8.2 Ecoulement de Couette circulaire

Cherchons maintenant l'écoulement axisymétrique purement azimuthal existant entre deux cylindres coaxiaux ($\vec{v} = v_\theta(r)\vec{e}_\theta$). La projection de Navier-Stokes sur la direction orthoradiale nous conduit à l'équation $\eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta = 0$. On trouve alors :

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r}.$$

Les valeurs de A et B sont données par les conditions aux limites cinématiques aux parois en $r = R_1$ et $r = R_2$ (figure 1.15) :

$$A = \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{et} \quad B = (\Omega_1 - \Omega_2) \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}.$$

1.8.3 Ecoulement de Poiseuille plan

Supposons maintenant que nous ayons deux plaques parallèles et immobiles. En appliquant une différence de pression $P_{\text{entrée}} - P_{\text{sortie}}$ on crée un écoulement visqueux selon la direction x . Le même système d'équations que pour le calcul de l'écoulement de Couette plan nous montre que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = Cste = -\frac{P_{\text{entrée}} - P_{\text{sortie}}}{L} = -G.$$

$G (> 0)$ est le gradient de pression imposé. On déduit de l'équation de Navier-Stokes que le profil de vitesse est parabolique :

$u(y) = \frac{G}{2\eta} y(h - y)$

(1.24)

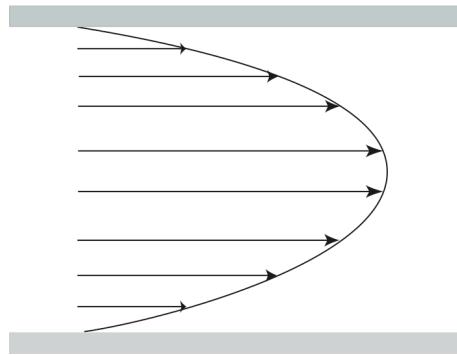


FIGURE 1.16 – Profil de vitesse parabolique de Poiseuille entre deux plaques ou dans une conduite circulaire.

Ce profil parabolique porte le nom de profil de Poiseuille (~ 1850) ou de Hagen-Poiseuille (Figure 1.16).

Le débit volumique par unité de largeur dans la troisième dimension est donné par :

$$Q_v = \int_0^h u(y) dy = \frac{h^3}{12\eta} G. \quad (1.25)$$

Exercice : Ecoulement sur un plan incliné. Calculer le profil de vitesse d'une couche de fluide d'épaisseur h coulant sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Montrer en particulier que la condition de surface libre impose que le profil de vitesse est une demi-parabole.

1.8.4 Ecoulement de Poiseuille en conduite circulaire

En refaisant le calcul du profil de Poiseuille pour une conduite de section circulaire on trouve :

$$u(r) = \frac{G}{4\eta} (R^2 - r^2) \quad (1.26)$$

et que le débit volumique vaut :

$$Q_v = \frac{\pi R^4}{8\eta} G. \quad (1.27)$$

Attention, une des conditions aux limites est donnée par le fait que l'on ne veut pas de vitesse infinie sur l'axe ($r = 0$). Cette solution non physique est en effet générée par le choix des coordonnées cylindriques. Cette équation montre que, à gradient de pression constant, si le diamètre du tube diminue d'un facteur 2, le débit est divisé par 16 ! Cette forte non-linéarité explique la difficulté d'équilibrer les réseaux de distribution d'eau d'une ville par exemple. De même il faut 10 000 tubes de 1 mm de rayon pour faire s'écouler le même débit que dans un tube de rayon 1 cm si on applique la même différence de pression. Jean-Louis Marie Poiseuille était d'ailleurs un médecin physiologiste qui s'est intéressé dans les années 1850 aux écoulements sanguins.

On peut calculer les contraintes visqueuses appliquées sur les parois du tube, $\sigma'_{zr} = -GR/2$, et en déduire que les forces appliquées par le liquide sur une longueur de tube sont logiquement égales à la différence des forces de pression appliquées entre ses deux extrémités.

La relation 1.27 n'est valable que si l'écoulement reste laminaire. Au-dessus d'un nombre de Reynolds de l'ordre de quelques milliers ce n'est plus vrai. Il apparaît brutalement d'autres composantes de la vitesse et un régime turbulent. C'est en étudiant cette transition que O. Reynolds à montré que cette transition était gouvernée par un nombre sans dimension qui porte maintenant son nom. A débit donné, la turbulence de l'écoulement augmente la dissipation d'énergie et donc le gradient de pression, c'est-à-dire la différence de pression entre l'entrée et la sortie aussi appelée en hydraulique la *perte de charge* (figure 1.17).

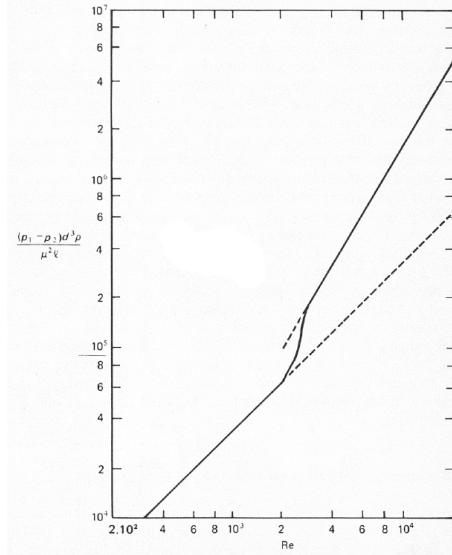


FIGURE 1.17 – Transition laminaire/turbulent de l'écoulement de Poiseuille en tube. Variation du gradient de pression moyen adimensionné $G \frac{d^3 \rho}{\eta^2}$ en fonction du nombre de Reynolds Re . Lignes pointillées : écoulement laminaire ($G \frac{d^3 \rho}{\eta^2} = 32 Re$) ou complètement turbulent ([20] p. 20). Ligne continue : un exemple de cas réel présentant une transition pour $Re \approx 2000$ mais cette valeur de transition dépend en réalité fortement de l'état de surface du tube et de la qualité de l'écoulement injecté (le record de stabilité est actuellement de $Re = 100000 !$, et dans le cadre d'une théorie linéaire il devrait être infini pour un tube, alors qu'il vaut $Re = 2100$ pour un écoulement de Poiseuille plan).

1.8.5 Solutions instationnaires

Mise en mouvement d'une plaque

Supposons maintenant que, dans un milieu infini, on mette brutalement une plaque en mouvement dans son plan. Si les effets de la gravité sont négligeables et si l'écoulement est invariant dans la direction du mouvement (il n'y aura donc pas de gradient de pression longitudinal), l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \nabla^2 u. \quad (1.28)$$

On reconnaît là une équation de diffusion. Le coefficient de diffusion de la quantité de mouvement est ν , la viscosité cinématique. On peut adimensionner cette équation

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} = \frac{\nu \tau}{\delta^2} \hat{\nabla}^2 \hat{u}.$$

On trouve alors que le temps caractéristique de diffusion sur une distance δ est :

$$\boxed{\tau = \frac{\delta^2}{\nu}} . \quad (1.29)$$

Dans le cas du démarrage brutal de la plaque à la vitesse U_0 dans un fluide au repos, on trouve par intégration la solution de l'équation de diffusion :

$$u(y) = U_0 \left[1 - \operatorname{erf} \left[\frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right] \right]$$

où erf est la **fonction « erreur »**, intégrale d'une gaussienne : $\operatorname{erf}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X \exp(-x^2) dx$.

Mise en mouvement d'un fluide entre deux parois

Dans le cas de l'écoulement de Couette plan il faut un temps $\tau \sim h^2/\nu$ pour que le profil linéaire s'établisse (figure 1.18), soit une longueur de déplacement de la plaque $X = U_0\tau \sim Re h$.

Dans un tube, pour obtenir un profil parabolique à partir d'un profil d'entrée plat (on dit aussi « bouchon ») il faut attendre un temps $\tau \sim R^2/\nu$, c'est-à-dire une distance depuis l'entrée du tube $X \approx Re R$. En conséquence, dès que le nombre de Reynolds est élevé, la *longueur d'entrée* avant l'établissement du profil parabolique est loin d'être négligeable (figure 1.19). Expérimentalement on trouve plutôt $X/R \approx Re/30$.

1.9 Solutions de Navier-Stokes à très faible nombre de Reynolds (écoulements de Stokes)

1.9.1 L'équation de Stokes

Dans les écoulements strictement parallèles le terme $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$ était géométriquement nul. Si maintenant l'écoulement est non parallèle mais que le nombre de Re est très faible (effets dominant de la viscosité), le terme inertiel peut être négligé devant le terme visqueux et l'on obtient :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}(p) + \vec{g} + \nu \vec{\nabla}^2 \vec{v} . \quad (1.30)$$

Ce cas correspond à la limite opposée à l'équation d'Euler ($Re \rightarrow \infty$).

Nous supposerons dans la suite que la force volumique dérive d'un potentiel. On peut alors introduire le potentiel $\Phi = \vec{g} \cdot \vec{r}$ (alors $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$). De plus nous supposerons que le nombre de Stokes qui compare le terme instationnaire aux termes visqueux est très petit :

$$St = \frac{\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\|}{\|\nu \vec{\nabla}^2 \vec{v}\|} = \frac{L^2}{\nu T} \ll 1.$$

Ceci correspond à des variations temporelles lentes comparées au temps de diffusion visqueux, et l'on parle d'approximation quasi-statique. Formellement le nombre de Stokes apparaît comme le produit du nombre de Strouhal déjà rencontré (§1.6.2) et du nombre de Reynolds. On obtient alors l'équation de Stokes :

$$\boxed{\vec{\nabla}(p + \rho\Phi) = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}} . \quad (1.31)$$

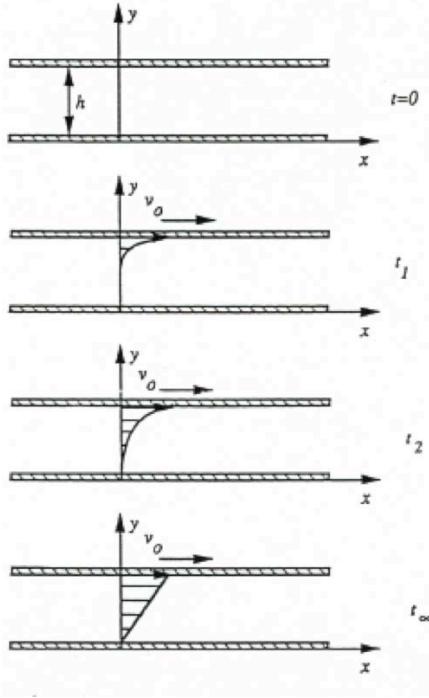


FIGURE 1.18 – Ecoulement instationnaire en géométrie de Couette plan. Evolution du profil de vitesse entre deux plaques parallèles infinies. La plaque supérieure est mise en translation à vitesse uniforme à l'instant $t = 0$.

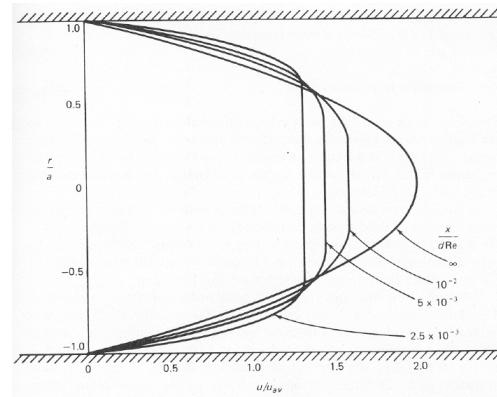


FIGURE 1.19 – Profils de vitesse laminaires à diverses distances de l'entrée d'une conduite circulaire. Remarquer que le débit est conservé. D'après [20], p. 15.

Cette équation est exacte en toute rigueur pour un écoulement stationnaire et si $Re \rightarrow 0$. Une des propriétés des écoulements de Stokes est l'absence d'inertie. Dès que les causes du mouvement disparaissent, l'écoulement s'arrête sans délai. Ces écoulements dissipent extrêmement rapidement leur énergie cinétique.

L'équation de Stokes étant une équation linéaire il y a unicité de la solution une fois connues les conditions aux limites. De plus on peut aussi montrer que l'écoulement de Stokes est celui qui minimise la dissipation d'énergie ([12] p. 443-452).

Il existe d'autres formes équivalentes de l'équation de Stokes :

1. Première variante :

$$\vec{\nabla}(p + \rho\Phi) = -\eta \vec{\text{rot}}(\vec{\omega}) . \quad (1.32)$$

En effet $\vec{\nabla}^2 \vec{v} = \vec{\nabla}(\text{div}(\vec{v})) - \vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}(\vec{v}))$, or $\text{div}(\vec{v}) = 0$ pour un fluide incompressible et l'on écrit $\vec{\omega} = \vec{\text{rot}}(\vec{v})$ la vorticité.

2. Deuxième variante en prenant la divergence de l'équation précédente :

$$\nabla^2(p + \rho\Phi) = 0 . \quad (1.33)$$

En effet on a $\nabla^2(p + \rho\Phi) = \text{div}(\vec{\nabla}(p + \rho\Phi))$ et $\text{div}(\vec{\text{rot}}(\vec{v})) = 0$.

La quantité $p + \rho\Phi$ satisfait donc à une équation de Laplace à très faible nombre de Reynolds.

3. Troisième variante :

$$\boxed{\vec{\nabla}^2(\vec{\omega}) = 0} . \quad (1.34)$$

En effet $\vec{\nabla}^2(\vec{\omega}) = \vec{\nabla} \left[\operatorname{div}(\vec{\omega}) \right] - \vec{\nabla} \times (\vec{\omega}) = -\vec{\nabla} \times (\vec{\omega}) = \frac{1}{\eta} \vec{\nabla} \left[\vec{\nabla} \cdot (\vec{\omega}) + p + \rho\Phi \right] = 0$.

Ceci montre qu'à très faible nombre de Reynolds et en régime stationnaire ou quasi-stationnaire, il n'y a plus transport de la vorticité. La vorticité est dans un état d'équilibre et ne diffuse plus.

4. Quatrième variante pour un écoulement plan 2D2C : En prenant le rotationnel de l'équation de Stokes, et en écrivant que pour un écoulement incompressible 2D2C, $\vec{v} = \vec{\nabla} \times (\psi \vec{k})$, on obtient l'équation bi-harmonique suivante pour la fonction de courant :

$$\boxed{\nabla^4(\psi) = 0} . \quad (1.35)$$

1.9.2 Ecoulement autour d'une sphère : force de Stokes

Nous allons montrer, dans la limite des nombres de Reynolds tendant vers 0, que la force de traînée visqueuse exercée sur une sphère de rayon R par un fluide s'écoulant à la vitesse \vec{U} s'écrit :

$$\boxed{\vec{F}_{St} = 6\pi\eta R\vec{U}} \quad (1.36)$$

C'est ce que l'on appelle la force de Stokes (1851).

Démonstration

Les hypothèses sont $Re \ll 1$, écoulement stationnaire $St \ll 1$ et pas de force volumique. Nous pouvons alors utiliser l'équation de Stokes (Equ. 1.31) :

$$\vec{\nabla}(p) = \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v}.$$

Nous allons travailler en coordonnées sphériques avec une sphère immobile dans un écoulement homogène de vitesse à l'infini U , dirigé selon Oz (figure 1.20). Nous supposerons un écoulement axisymétrique autour de Oz (nous aurons alors $\frac{\partial}{\partial\varphi} = 0$) et que $u_\varphi = 0$. L'écoulement est alors 2C2D stationnaire et s'écrit en coordonnées sphériques : $\vec{u} = u_r(r, \theta) \vec{e}_r + u_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$.

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} \vec{u} = \vec{0} & \text{en } r = R \\ \vec{u} = U \vec{e}_z & \text{en } r \rightarrow \infty \end{cases}$$

Soit $u_r = u_\theta = 0$ en $r = R$ et $u_r = U \cos \theta$ et $u_\theta = -U \sin \theta$ en $r \rightarrow \infty$.

En introduisant la fonction de Stokes en coordonnées sphériques (Equ. ?? page ??) on trouve pour la fonction de courant (voir TD 7) : $\Psi = U \sin^2 \theta \left(\frac{L}{r} + M r^2 + C \frac{r}{2} \right)$ avec L , M et C trois constantes à déterminer pour satisfaire les conditions aux limites. On trouve alors

$$\Psi = -\frac{1}{2} U r^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{3}{2} \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \frac{R^3}{r^3} \right).$$

On trouve finalement le champ de vitesse partout autour de la sphère (figure 1.21)) (cf. Acheson [1] p. 223 et Guyon et al. [12] p. 465) :

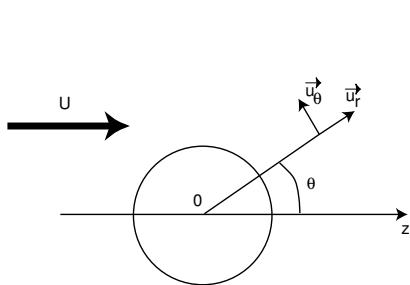


FIGURE 1.20 – Coordonnées sphérique autour d'une sphère. L'écoulement à l'infini est selon Oz .

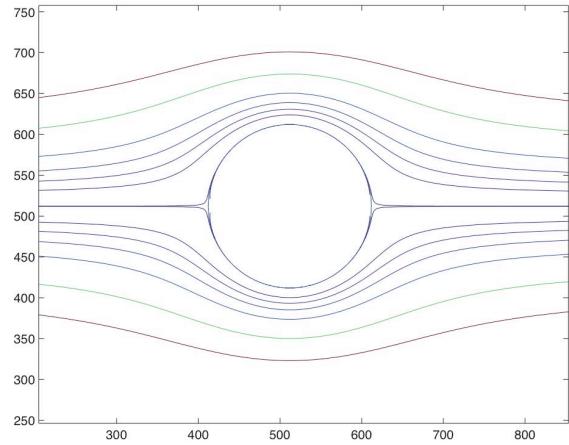


FIGURE 1.21 – Lignes de courant autour d'une sphère immobile dans un écoulement de Stokes.

$$\begin{cases} p(r, \theta) &= P_0 - \frac{3}{2} \frac{\eta U R}{r^2} \cos \theta \\ u_r(r, \theta) &= U \cos \theta \left[1 - \frac{3}{2} \frac{R}{r} + \frac{R^3}{2r^3} \right] \\ u_\theta(r, \theta) &= -U \sin \theta \left[1 - \frac{3}{4} \frac{R}{r} - \frac{R^3}{4r^3} \right] \end{cases} \quad (1.37)$$

Ces équations montrent que le champ de vitesse décroît très doucement à grande distance (en $1/r$). Ce qui fait que l'écoulement est très influencé par des parois même lointaines ou d'autres particules en mouvement (cas de la sédimentation de particules).

A partir du champ de vitesse nous pouvons maintenant calculer les composantes du tenseur des contraintes $[\sigma]$ en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} &= 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{\theta\theta} &= 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{\phi\phi} &= 2\eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot \theta}{r} \right) - \frac{2}{3}\eta(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - p \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} &= \eta \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{\theta\phi} = \sigma_{\phi\theta} &= \eta \left(\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{u_\varphi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \sigma_{r\phi} = \sigma_{\phi r} &= \eta \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right) \end{cases} \quad (1.38)$$

Le fluide étant incompressible, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. De plus, sur la sphère $u_r = u_\theta = u_\varphi = 0$ et $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$. On en déduit les contraintes à la surface de la sphère :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \sigma_{rr} & = & -p \\ \sigma_{\theta\theta} & = & -p \\ \sigma_{\phi\phi} & = & -p \\ \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} & = & \eta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\phi} = \sigma_{\phi\theta} & = & 0 \\ \sigma_{\phi r} = \sigma_{r\phi} & = & 0 \end{array} \right. \quad (1.39)$$

On peut ensuite calculer la composante selon l'axe Oz de la contrainte : $\sigma_z = ([\sigma] \cdot \vec{n}) \cdot \vec{e}_z = \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta$, et l'on trouve : $\sigma_z = \frac{3\eta}{2} \frac{U}{R}$ en tout point de la sphère (quelque soit θ).

Finalement

$$F_z = \oint \sigma_z dS = \sigma_z 4\pi R^2 = 6\pi\eta RU.$$

C'est la force de Stokes exercée par un fluide visqueux sur une sphère.

Exercices :

- Vérifier que la force transverse (portance) est bien nulle comme l'impose ici la symétrie de l'écoulement.
- Montrer que, pour une bulle sphérique, donc avec surface libre (contrainte tangentielle nulle à l'interface), on trouve : $\vec{F}_z = 4\pi\eta R\vec{U}$.

Coefficient de traînée C_D

Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds on introduit souvent le coefficient adimensionné de traînée C_D . Il est défini par

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 S} \quad (1.40)$$

où S est la section de l'objet et F_D la force de traînée (D pour *Drag* en anglais). En identifiant ici avec l'expression de la force de Stokes, on trouve :

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (1.41)$$

où le nombre de Reynolds est calculé sur le diamètre ($2R$) de la sphère. La figure 1.22 montre que l'expression de la force de Stokes est une bonne approximation de la force de traînée jusqu'à $Re \sim 1$. Au-delà, la correction analytique d'Oseen¹ permet d'écrire à l'ordre suivant ($Re < 5$) :

$$C_D = \frac{24}{Re} \left[1 + \frac{3}{16} Re \right] \quad (1.42)$$

A plus haut nombre de Reynolds encore on peut trouver d'autres formules empiriques pour C_D (§ ?? page ??).

1. **Correction d'Oseen :** On peut montrer que loin de la sphère, certes la vitesse décroît mais les distances augmentent aussi et l'énergie cinétique totale diverge ([12] p. 474). L'équation de Stokes n'est en fait plus valide à grande distance (en réalité à une distance $L \approx R/Re$) car le terme convectif n'est plus négligeable devant le terme visqueux. Il faut donc refaire le calcul loin de la sphère et faire un raccordement asymptotique entre les deux solutions.

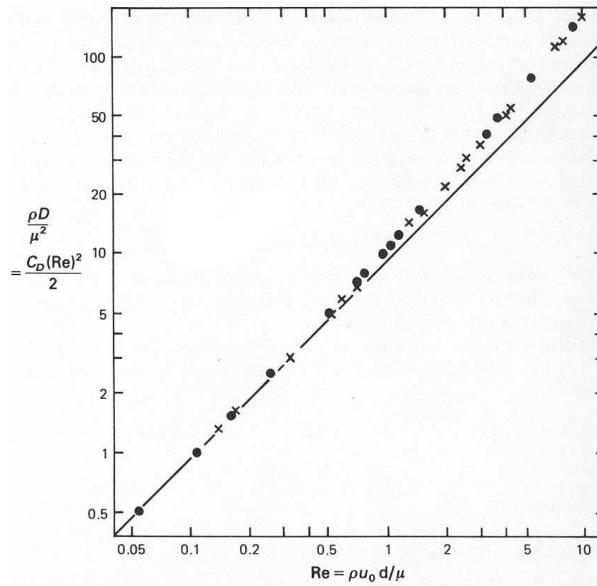


FIGURE 1.22 – Trainée sur une sphère à faible nombre de Reynolds. Ici la fonction $C_D Re^2$ est tracée en fonction de Re ([20] p. 111).

1.9.3 Application à la sédimentation

Une sphère unique placée dans un fluide va sédimerter si sa densité est supérieure à la densité du fluide. Après une phase initiale d'accélération elle sédimente ensuite à sa vitesse limite de chute. La valeur du nombre de Reynolds calculé avec cette vitesse de chute va permettre de savoir si c'est une vitesse de chute visqueuse ou inertielle. A très faible Reynolds il y a égalité entre le poids apparent (poids corrigé de la poussée d'Archimède) et la force de Stokes :

$$g(\rho_s - \rho_f) \frac{4}{3} \pi R^3 = 6\pi\eta RV_{Stokes},$$

et donc la vitesse limite de Stokes :

$$V_{Stokes} = \frac{2}{9} \frac{\Delta\rho g}{\eta} R^2, \quad (1.43)$$

avec $\Delta\rho = \rho_s - \rho_f$. Cette vitesse limite est proportionnelle au carré du rayon, donc les grosses particules sédimentent plus vite. Ce résultat reste vrai même si les particules ne sont pas parfaitement sphériques.

Pour que le nombre de Reynolds de chute soit petit et que l'on puisse utiliser la formule de la force de Stokes il faut :

$$Re = \frac{2RV_{Stokes}}{\nu} = \frac{4}{9} \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{gR^3}{\nu^2} \ll 1,$$

soit :

$$R \ll \left(\frac{9}{4} \frac{\rho}{\Delta\rho} \frac{\nu^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Notons toutefois que les toutes petites particules ($\sim 1 \mu\text{m}$) dites **particules colloïdales** ou **particules browniennes** ne sédimentent pratiquement pas à cause de l'agitation thermique (la vitesse aléatoire moyenne devient supérieure à la vitesse de sédimentation).

Si maintenant de nombreuses particules sédimentent ensemble, le calcul de la vitesse de sédimentation se complique nettement (il n'est d'ailleurs pas résolu à ce jour). En effet il existe des interactions collectives (à N corps) car le champ de vitesse autour d'une particule décroît lentement (en $1/r$). De plus des effets supplémentaires apparaissent à cause de la taille finie du récipient (effet de paroi). La sédimentation d'un grand nombre de particules crée en effet un contre-écoulement du fluide vers le haut qui ralentit leur chute (une jolie démonstration en est l'effet Boycott observé lorsque l'on incline le récipient). La vitesse de sédimentation est alors une fonction de la concentration en particules :

- A faible Reynolds, Albert Einstein (1905) a donné le premier terme correctif à la vitesse limite de chute dépendant de la concentration c en particules : $V_{lim} \approx V_{Stokes} [1 - 6,55 c]$.
- Au-delà on utilise la loi empirique de Richardson-Zaki, $V_{lim} = V_{Stokes} [1 - c/c_{max}]^n$ où $n \approx 5$, mais dépend du nombre de Reynolds et c_{max} est la compacité maximum, de l'ordre de 54 % pour un empilement aléatoire lâche de sphères identiques.

1.9.4 La réversibilité cinématique et la vie aux faibles nombres de Reynolds

Si $Re \ll 1$ les termes inertIELS sont négligeables et l'équation de la dynamique se réduit à l'équation 1.30. Si de plus l'écoulement est stationnaire (ou a un nombre de Stokes très petit) on trouve l'équation de Stokes (Eq. 1.31). Cette équation $\vec{\nabla}(p + \rho\Phi) = \eta\nabla^2\vec{v}$ est une équation **réversible**, ce qui a d'importantes conséquences. En effet, la transformation $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$ transforme $(p + \rho\Phi)$ en $-(p + \rho\Phi)$.

Voyons quelques exemples et contre-exemples :

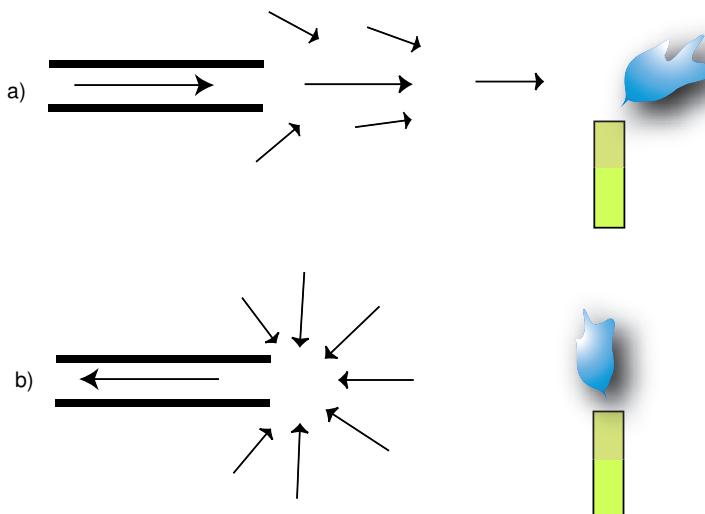


FIGURE 1.23 – Un exemple d'irréversibilité cinématique des écoulements, ou pourquoi il est plus facile d'éteindre une bougie en soufflant (a) qu'en aspirant (b) ! Pour en savoir plus : A. Jenkins. *Irreversibility in an ideal fluid*. American Journal of Physics, 82, 1040–1046, 2014.

- Cas d'une bille tombant à côté d'un mur vertical. La réversibilité cinématique impliquant que le mouvement vers le bas est identique à un mouvement vers le haut, la bille doit tomber parallèlement à la paroi. A faible Reynolds et en régime stationnaire une bille n'est ni repoussée ni attirée par la paroi.
- Si maintenant on regarde le mouvement d'une bille s'approchant d'une paroi horizontale, ou

s'en éloignant, ces mouvements ne sont pas forcément identiques car dans les deux cas il peut y avoir des forces d'accélération (instationnarité) donc des effets de masse ajoutée et des forces d'histoire.

- Expérience de G.I. Taylor. Une tache de colorant dans un fluide visqueux placé dans l'espace entre deux cylindres d'un montage de Couette circulaire est déformée par l'écoulement. Mais quelques tours en sens contraire reconstituent la forme initiale de la tache (aux effets de diffusion moléculaire près) si la viscosité du liquide est suffisamment forte. Voir la très belle démonstration de la réversibilité cinématique dans la vidéo suivante <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>.
- Chaos lagrangien. On peut obtenir le mélange de deux fluides dans un écoulement à faible nombre de Reynolds, mais uniquement près des points cols, là où les termes instationnaires sont importants, ou part des mouvements alternés de deux batteurs.

L'article de Purcell [17] est une excellente lecture introductory et stimulante au sujet de la réversibilité des écoulements et de sa conséquence pour la vie animale aux faibles nombres de Reynolds. Je vous en recommande très vivement la lecture !

1.10 Les fluides non-newtoniens et les modèles rhéologiques

Pour certains fluides, $[\sigma'] \neq 2\eta[e]$, c'est-à-dire que la viscosité n'est plus une propriété intrinsèque du fluide et qu'elle varie en fonction de l'écoulement, éventuellement du temps et de la position. On peut alors essayer de modéliser les comportements observés par d'autres relations reliant les contraintes et les taux de déformation, relations non-linéaires que l'on appelle *équations constitutives*. Parmi ces fluides, généralement assez visqueux, on peut citer certaines peintures, les cristaux liquides, les solutions de polymères, les suspensions concentrées, les shampoings, le dentifrice, la purée avec du fromage, les gels coiffants, la siliputty... Les différents types de rhéogrammes classiques pour un cisaillement simple ($\sigma'_{xy} = f(\frac{\partial v_x}{\partial y})$) sont présentés sur la figure 1.24.

1.10.1 Les fluides rhéofluidifiants

Pour un fluide rhéofluidifiant (shear-thinning), la viscosité apparente, rapport de la contrainte sur le taux de cisaillement est une fonction décroissante de la contrainte. La figure 1.25 donne un exemple pour une solution de polymères rigides (un polysaccharide comme le Xanthane) dans un solvant. Les encres d'imprimerie (suspension de pigments anisotropes) et certaines peintures sont aussi rhéofluidifiantes. Un produit modèle est le carbopol.

Il existe de nombreuses équations modèles pour décrire ce type de comportement. Parmi les plus simples on peut citer :

- Le modèle en loi de puissance (décrit par Ostwald en 1925) :

$$\sigma' = K\dot{\epsilon}^n, \quad (1.44)$$

où K et n sont deux paramètres.

Exercice : Calculer pour un fluide en loi de puissance le profil de vitesse de l'écoulement entre deux plaques parallèles induit par un gradient de pression uniforme.

- Le modèle de Williams-Carreau pour lequel il existe deux plateaux dits « newtoniens » à faible et à fort taux de cisaillement :

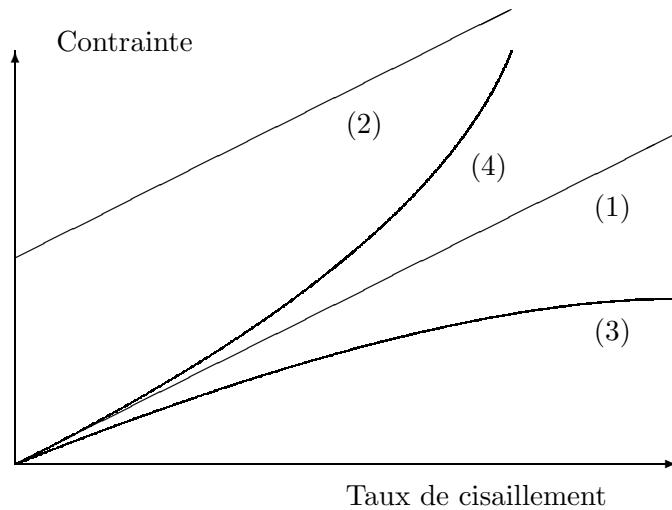


FIGURE 1.24 – Rhéogrammes montrant le comportement typique d'un fluide newtonien (1), à seuil (2) rhéofluidifiant (3) et rhéoépaississant (4) lors d'un cisaillement simple.

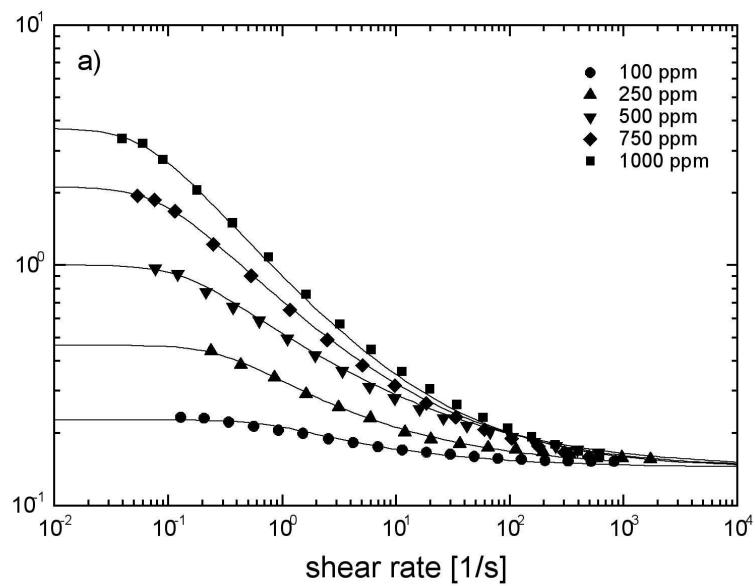


FIGURE 1.25 – Rhéogramme montrant pour différentes concentrations en polymère (en « part par million », ppm) la diminution de la viscosité dynamique apparente $\eta = \sigma'_{xy}/\dot{\epsilon}$ en fonction du taux de cisaillement $\dot{\epsilon} = \partial v_x / \partial y$.

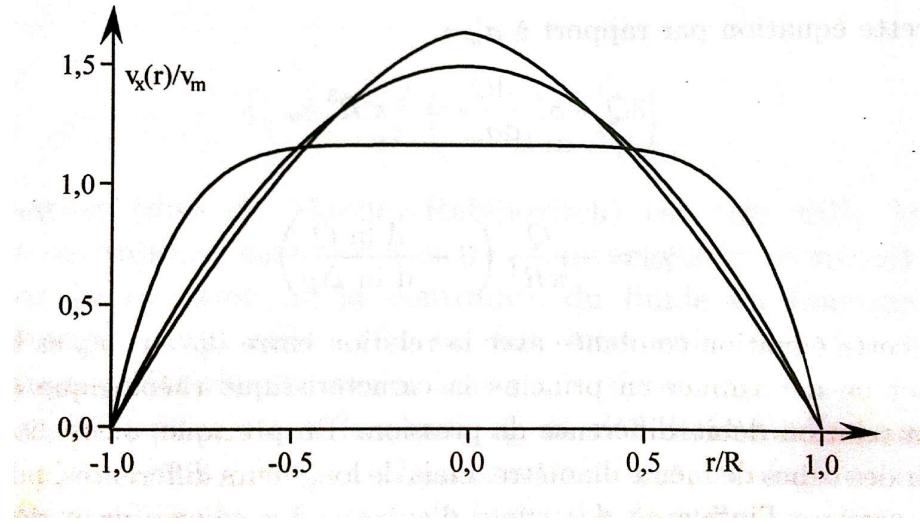


FIGURE 1.26 – Profils adimensionnés de la vitesse dans un tube circulaire pour des fluides newtonien, rhéoépaississant et rhéofluidifiant satisfaisant une équation constitutive en loi de puissance. D’après [12].

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = (1 + \beta^2 \dot{\epsilon}^2)^{-p}, \quad (1.45)$$

où les constantes η_0 et η_∞ correspondent aux viscosités de cisaillement de ces deux plateaux. On peut montrer que ce modèle à quatre paramètres se réduit au modèle rhéologique en loi de puissance à 2 paramètres dans la gamme des cisaillements intermédiaires, par exemple $10^{-2} s^{-1} < \dot{\epsilon} < 10^8 s^{-1}$.

Exercice : Trouver les relations précises existant entre les paramètres des modèles d’Ostwald et de Carreau dans le régime des taux de cisaillement intermédiaires.

1.10.2 Les fluides rhéoépaississants

Les fluides rhéoépaississants (shear thickening en anglais) présentent le comportement inverse de celui des fluides rhéofluidifiants : une augmentation de la viscosité apparente sous cisaillement. Ce comportement est plus rare car la majorité des fluides non-newtoniens sont rhéofluidifiants. On le rencontre avec certaines suspensions de particules (sable immergé par exemple) qui présente cette propriété d’augmentation de la viscosité sous contrainte, au moins dans une certaine gamme de taux de cisaillement. C’est le cas en particulier d’un mélange eau-Maïzena, comme le montre la vidéo suivante : <http://www.youtube.com/watch?v=f2XQ97XHjVw> !

La figure 1.26 présente les profils adimensionnés de vitesse dans un tube circulaire pour des fluides newtonien, rhéoépaississant et rhéofluidifiant satisfaisant une équation constitutive en loi de puissance.

1.10.3 Les fluides visco-élastiques

Pour d'autres fluides, en général des solutions de polymères à chaînes flexibles, de l'énergie peut être stockée sous forme élastique, ce qui donne lieu à des comportements inattendus tel que le phénomène de gonflement lors de l'extrusion (die swell, figure 1.27) ou l'effet Weissenberg (rod climbing, figure 1.28).

L'élasticité de ces fluides a une origine microscopique lié à la présence de longues chaînes de polymères flexibles. La forme à l'équilibre de ces « pelotes » est une forme sphérique. Mais sous écoulement ces macromolécules peuvent se trouver allonger dans le sens de l'écoulement. Elles stockent alors de l'énergie sous forme élastique, énergie qu'elles pourront relâcher plus tard ou plus loin (par reptation et désenchevêtrement des molécules). On parle parfois de « matériaux visco-élastiques » tant la distinction entre liquide et solide devient délicate.

Exemples de fluide fortement visco-élastiques : solution de polyoxyéthylène oxyde (Polyox de masse moléculaire $M = 10^5$ à 3000 ppm par exemple) ou solution de scléroglycane. Un modèle rhéologique classique pour ces fluides est le modèle de Boger (viscosité constante mais effets élastiques).



FIGURE 1.27 – Ecoulement d'un fluide visco-élastique à la sortie d'un tube cylindrique. Les photos montrent le gonflement progressif du jet à la sortie d'un tube lorsque le taux de cisaillement augmente (de gauche à droite : $\dot{\epsilon} = 24$ puis 60 puis 240 s^{-1}). Ce gonflement met en évidence l'existence de contraintes normales dans ce fluide. (Photos L. Pauchard, FAST Orsay.)

Anisotropie des contraintes normales

Pour un fluide viscoélastique il apparaît, même pour un écoulement de cisaillement simple, une anisotropie des contraintes normales. Si l'on note σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} les trois contraintes normales, on a pour un fluide au repos $\sigma_{ii} = -p$, c'est-à-dire que les contraintes normales sont isotropes et égale au signe près à la pression. Pour un fluide élastique cette propriété n'est en général plus vérifiée et il apparaît sous écoulement dans la direction 1 et gradient de vitesse dans la direction 2, deux différences de contraintes normales non nulles

$$N_1 = \sigma_{11} - \sigma_{22}$$

et

$$N_2 = \sigma_{22} - \sigma_{33}.$$

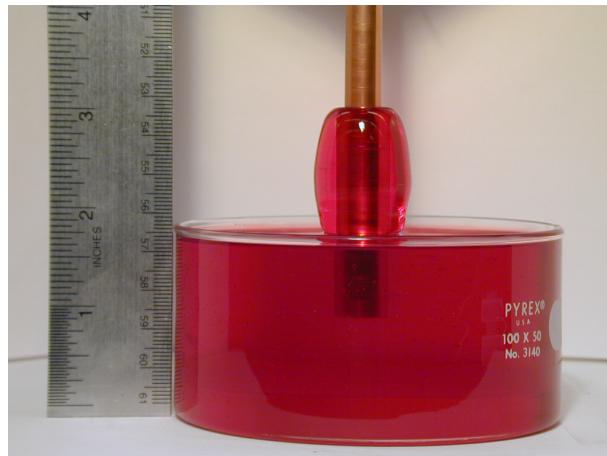


FIGURE 1.28 – Illustration de « l’effet Weissenberg » ou « rod-climbing » lorsqu’un fluide élastique s’élève le long d’un cylindre en rotation (<http://web.mit.edu/nmf/>).

L’existence de ces termes non nuls permet d’expliquer les phénomènes de *siphon suspendu*, de gonflement de jet et d’effet Weissenberg. Un rhéomètre de type cône-plan (figure 1.7) permet de mesurer N_1 (mais pas N_2) pour un écoulement de cisaillement simple. Rappelons que pour un fluide newtonien $N_1 = 0$ pour cet écoulement simple mais pas pour un écoulement de type élongationnel.

Deux modèles de matériaux visco-élastiques

Les matériaux viscoélastiques présentent à la fois des propriétés d’un solide élastique et d’un liquide visqueux. On les modélise donc à partir de quelques comportements de base :

- Pour un solide élastique, il y a proportionnalité entre la contrainte $\sigma(t)$ et la déformation $\epsilon(t)$, ce que l’on peut écrire $\sigma(t) = K\epsilon(t)$, et K est appelé le module de rigidité et s’exprime en fonction du module d’Young et du coefficient de Poisson du matériau. On peut représenter ce comportement par un ressort.
- Pour un liquide newtonien, il y a proportionnalité entre la contrainte $\sigma(t)$ et le taux de déformation $\dot{\epsilon}(t)$, ce que l’on peut écrire $\sigma(t) = \eta\dot{\epsilon}(t)$. On peut représenter ce comportement par un amortisseur visqueux.
- Le modèle du **liquide de Maxwell** correspond à la mise en série de ces 2 éléments (figure 1.29a)
- le modèle du **solide de Kelvin-Voigt** correspond à ces 2 éléments mis en parallèle (figure 1.29b).

Le comportement à basse fréquence de sollicitation permet aisément de distinguer un comportement plutôt liquide ou plutôt solide à ces fréquences de sollicitation.

Comportement dynamique des fluides viscoélastiques

En général lors d’une sollicitation harmonique, la contrainte et la déformation ne sont pas en phase. En utilisant les notations complexes et avec un forçage en déplacement imposé

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \exp i\omega(t),$$

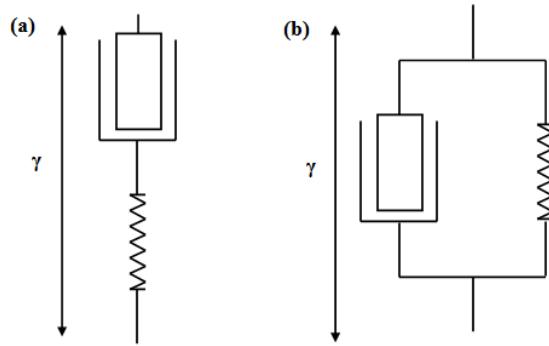


FIGURE 1.29 – Deux modélisations des matériaux viscoélastiques : (a) liquide de Maxwell et (b) solide de Kelvin-Voigt.

on obtient une réponse en contrainte que l'on peut écrire

$$\sigma(t) = G(\omega)\epsilon(t)$$

avec une rigidité complexe :

$$G(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega).$$

G' est appelé le module de conservation (i.e. raideur du ressort) et G'' le module de perte (caractérisant la viscosité).

On peut aussi écrire $\sigma = \sigma_0 \exp i(\omega t + \delta)$, où δ est appelé l'angle de perte.

Enfin on peut aussi choisir d'introduire une viscosité complexe $\eta(\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) = \sigma(t)/\dot{\epsilon}(t)$.

La figure 1.30 représente les résultats obtenus par sollicitation périodique d'un matériau viscoélastique. L'évolution du module de conservation $G'(\omega)$ et du module de perte $G''(\omega)$ à basse fréquence montre qu'à temps long le matériau se comporte comme un liquide visqueux. Le comportement à haute fréquence montre qu'à temps courts plutôt il se comporte plutôt comme un solide élastique.

Exercice : Calculer G' et G'' pour un liquide de Maxwell et pour un solide de Kelvin-Voigt.

Test de fluage et test de relaxation

Un test de fluage d'un matériau consiste à lui appliquer rapidement une contrainte constante et à étudier l'évolution temporelle de la déformation $\epsilon(t)$. Un test de relaxation, c'est le contraire, on soumet rapidement le matériau à une déformation constante et l'on mesure l'éventuelle relaxation de la contrainte $\sigma(t)$.

Exercice : Calculer la réponse au fluage et à la relaxation d'un solide de Kelvin-Voigt et d'un liquide de Maxwell.

1.10.4 Les fluides à seuils

Les fluides à seuils (yield stress fluids) sont des fluides qui se comportent comme des solides tant que la contrainte appliquée reste inférieure à une valeur seuil, puis s'écoule sous plus fortes sollicitations. Dans cette catégorie on peut trouver des gels (gels coiffants par exemple), des peintures,

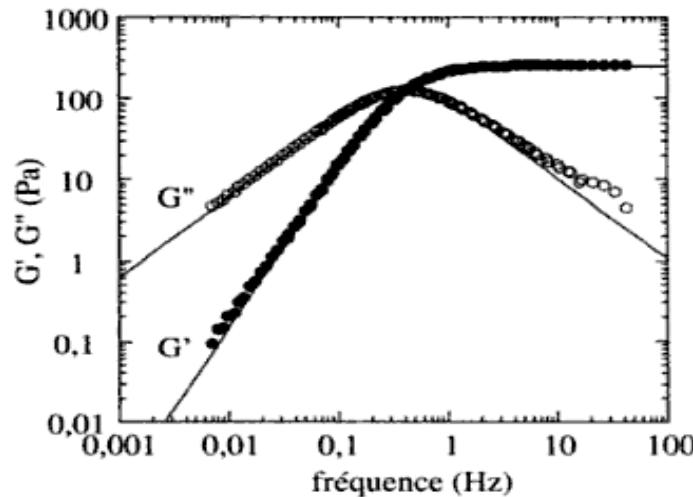


FIGURE 1.30 – Evolution du module de conservation G' et du modèle de perte G'' avec la fréquence d'excitation ω . Les courbes continues correspondent au modèle de liquide de Maxwell. D'après [12].

des produits cosmétiques, les boues de forage, les pâtes dentifrice, certaines suspensions d'argiles (avec les conséquences catastrophiques des coulées de boue), etc.

Un modèle classique de loi rhéologique pour décrire ces fluides est le modèle du **fluide de Bingham** pour lequel :

$$\dot{\epsilon} = 0 \text{ si } \sigma < \sigma_c \text{ et } \sigma = \sigma_c + \alpha \dot{\epsilon} \text{ si } \sigma > \sigma_c.$$

Un modèle plus réaliste est le modèle de **Herschel-Bulkley** pour lequel :

$\dot{\epsilon} = 0$ si $\sigma < \sigma_c$ et $\sigma = \sigma_c + K \dot{\epsilon}^n$ si $\sigma > \sigma_c$. Par exemple pour des solutions de Carbopol on peut trouver les valeurs suivantes : $\sigma_c = 25$ Pa, $K = 17$ et $n = 0.5$.

1.10.5 La thixotropie

Souvent la viscosité d'un fluide dépend aussi des sollicitations antérieures. Ceci apparaît en général parce que la structure microscopique est modifiée par l'écoulement et qu'elle met un certain temps à se reconstituer. On peut alors observer des phénomènes d'hystéresis qui compliquent sérieusement la caractérisation rhéologique de ces fluides. L'exemple classique est la sauce Ketchup qui est plus fluide juste après avoir été secouée. C'est le cas aussi de certains gels fragiles, qui mettent un certain temps pour gélifier à nouveau.

1.11 Pour en savoir plus

- *Low Reynolds Number Flow*, Sir Geoffrey Taylor, National Committee for Fluid Mechanics Films, <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>
- [17] E. Purcell. Life at low reynolds numbers. Am. J. Phys. **45**, 3–11, 1977. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/gold/pdfs/purcell.pdf>
- H. K. Moffatt. Behaviour of a viscous film on the outer surface of a rotating cylinder. Journal de Mécanique, 16 :651–673, 1977. http://www.igf.fuw.edu.pl/KB/HKM/PDF/HKM_026_s.pdf

- *Rhéophysique ou comment coule la matière*, Patrick Oswald, Belin.
- *Initiation à la rhéologie*, Guy Couaraze et Jean-Louis Grossiord, Lavoisier.
- [12] *Hydrodynamique physique*, E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit, EDP Sciences, 3ème édition, 2012.
- *Comment s'écoulent les fluides complexes*, Daniel Boon, séminaire téléchargeable sur <http://www.diffusion.ens.fr/index.php?res=conf&idconf=664>.
- *Rheological behavior of fluids*, H. Markovitz, National Committee for Fluid Mechanics Films, http://modular.mit.edu:8080/ramgen/ifluids/Rheological_Behavior_of_Fluids.rm
- <http://www.youtube.com/watch?v=f2XQ97XHjVw>
- <http://www.youtube.com/watch?v=nX6GxoiCneY>
- http://web.mit.edu/nmf/research/phenomena/open_siphon1.mov

1.12 Quelques questions possibles

1. Décrire le principe de quelques viscosimètres/rhéomètres. A quelle condition peut-on tracer une courbe contrainte-taux de déformation pour un fluide non-newtonien ?
2. Peut-on définir un nombre de Reynolds pour un écoulement parallèle ? Introduire les temps caractéristiques par exemple pour un écoulement de Couette plan.
3. Pourquoi la viscosité est-elle une fonction croissante de la température dans un gaz et une fonction décroissante dans un liquide ?
4. Quelle est l'origine de la condition de vitesse nulle sur une paroi ? On pourra distinguer le cas de la vitesse normale et de la vitesse tangentielle.
5. Le coefficient de viscosité est-il toujours une quantité positive ?
6. Estimer le temps d'établissement d'un écoulement de Couette plan ou de Poiseuille plan. Estimer la "longueur d'entrée" pour un Reynolds de 1000.
7. Estimer l'épaisseur $e(x)$ d'une couche limite sur une plaque plane à partir d'un temps de diffusion.
8. Existe-t-il une viscosité pour un gaz parfait ? Si oui dépend-elle de la pression ?

Chapitre 2

Leçon de Physique n°4 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Marc Rabaud, version du 19 décembre 2019

Sommaire

2.1	Equation d'Euler	50
2.2	Equation de Bernoulli	50
2.3	Deux généralisations de l'équation de Bernoulli	52
2.3.1	Cas d'un fluide barotrope	52
2.3.2	Cas d'un écoulement instationnaire mais irrotationnel	52
2.3.3	Effet Coanda	53
2.4	Quelques applications de l'équation de Bernoulli	53
2.4.1	Anémomètre à tube de Pitot	53
2.4.2	Effet Venturi et débitmètre de Venturi	54
2.4.3	Expérience d'Evangelista Torricelli (1644)	56
2.4.4	Amplification des vagues par le vent	56
2.4.5	Jet incident sur une plaque	57
2.5	Conservation de la circulation (théorème de Kelvin)	57
2.5.1	Effet Magnus	58
2.5.2	Portance d'une aile	59
2.6	Paradoxe de d'Alembert	60
2.7	Couche limite laminaire sur une plaque plane	60
2.7.1	Les équations de Prandtl (1904)	61
2.7.2	Profil de vitesse de Blasius (1907)	62
2.7.3	Calcul de la contrainte pariétale et du coefficient de traînée	63
2.8	Décollement de la couche limite sur une paroi courbée	64
2.8.1	Couche limite turbulente	66
2.9	Quelques questions possibles	66

2.1 Equation d'Euler

Si dans l'équation 1.3, forme locale du Principe Fondamental de la Dynamique,

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g} + \overrightarrow{\text{div}}[\sigma'],$$

on néglige les contraintes de surface (autres que la pression) exercées sur le volume de contrôle, alors $\overrightarrow{\text{div}}[\sigma'] = \vec{0}$ et l'on obtient l'équation d'Euler, établie par Leonhard EULER (figure 2.1) en 1755 :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla}p + \rho\vec{g}$$

(2.1)

Cette équation est utilisée pour les écoulements dits « parfaits », c'est-à-dire pour ceux où l'on peut négliger les effets de la viscosité. Ceci est parfois justifiable loin des parois et si le nombre de Reynolds (défini au §1.6) de l'écoulement est élevé. L'équation est utilisable même pour des fluides compressibles.

Le problème est bien posé si l'on connaît de plus les conditions aux limites sur \vec{v} (pas de vitesse normale sur les parois) et sur p et si l'on écrit la conservation de la masse, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$.



FIGURE 2.1 – Portrait de Leonhard EULER (1707-1783)

On peut facilement montrer que les écoulements parfaits sont réversibles en temps. En effet la transformation de $\vec{v}(x, y, z)$ en $-\vec{v}(x, y, z)$ et de t en $-t$ laisse l'équation 2.1 invariante. La source d'irréversibilité c'est la dissipation d'énergie par la viscosité, source qui n'existe donc pas pour ces fluides idéalisés. De façon étonnante nous verrons dans le §1.9.1 que l'autre limite des écoulements dominés par les forces visqueuses conduit aussi à des écoulements réversibles.

2.2 Equation de Bernoulli

Un fluide parfait n'ayant par définition pas de viscosité, il ne peut pas dissiper d'énergie. On peut donc à partir de l'équation d'Euler trouver une équation de conservation de l'énergie, appelée équation de Bernoulli.

Démonstration : Voyons d'abord la démonstration classique de cette équation, nous verrons ensuite des généralisations possibles. On suppose donc :

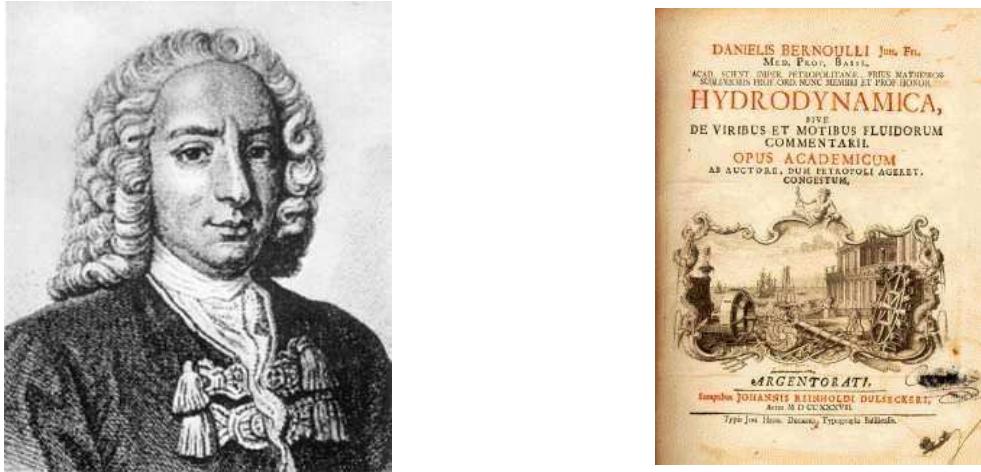


FIGURE 2.2 – Portrait de Daniel Bernoulli (1700-1782) et première page de son traité *Hydrodynamica* publié en 1738. Daniel Bernoulli faisait partie d'une famille de huit mathématiciens éminents (<http://www.bibmath.net/bios/index.php>).

1. un fluide de masse volumique constante ($\rho = Cste$)
2. un écoulement stationnaire ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$)
3. que les forces volumiques dérivent d'un potentiel : $\vec{g} = -\vec{\nabla}(\Phi_g)$. Dans le cas de la force de gravité $\Phi_g = gz$ avec l'axe z dirigé vers le haut.

L'ensemble de ces conditions sont parfois résumées en HPPI (Homogène, Parfait, Permanent et Incompressible). L'équation d'Euler (Eq. 2.1) peut alors s'écrire :

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}(p + \rho gz)$$

Nous pouvons alors utiliser une relation du formulaire pour transformer partiellement le membre de gauche en un gradient. On a en effet l'identité :

$$\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

Si on l'écrit pour le vecteur $\vec{A} = \vec{B} = \vec{v}$ on obtient :

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \vec{v} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{v}.$$

L'équation d'Euler s'écrit alors :

$$\vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2\right) = \vec{v} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{v}.$$

(2.2)

Nous allons montrer que la quantité $C = \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}v^2$, appelée parfois la « charge », reste constante sur une ligne de courant.

Par définition du gradient nous avons :

$$dC = \vec{\nabla}(C) \cdot \vec{dl} = (\vec{v} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{v}) \cdot \vec{dl}.$$

Donc si \vec{dl} est colinéaire à \vec{v} , ce qui est le cas le long d'une ligne de courant, le terme de droite est nul et $dC = 0$. Ceci prouve bien que $C = Cste$ sur une ligne de courant (il n'y a pas de « perte de charge »). Toutefois cette constante peut être différente pour chaque ligne de courant.

Sur une ligne de courant l'équation de Bernoulli (figure 2.2) s'écrit alors :

$$p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = Cste. \quad (2.3)$$

Le même raisonnement permet de montrer que C est aussi une constante sur une ligne de vorticité (on appelle *vorticité* la quantité $\vec{\omega} = \vec{\text{rot}} \vec{v}$).

Si l'écoulement est *irrotationnel* (aussi appelé écoulement potentiel) dans un certain domaine d'espace, c'est-à-dire si $\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ alors la constante C est la même sur toutes les lignes de courant traversant dans ce domaine.

- Le terme p est appelé *pression statique* (ou locale).
- Le terme $\rho g h$ est appelé *pression hydrostatique*.
- Le terme $\frac{1}{2} \rho v^2$ est appelé *pression dynamique*.
- $p + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2$ est appelé *pression totale* ou pression de stagnation ou encore pression d'arrêt. En effet la charge étant constante sur une ligne de courant, cette pression totale est aussi la pression que l'on mesure en un point où la vitesse est nulle.

2.3 Deux généralisations de l'équation de Bernoulli

2.3.1 Cas d'un fluide barotrope

Si le fluide est compressible, mais que la masse volumique ρ en un point de l'écoulement ne dépend que de la pression p et pas de la température par exemple, les isobares sont aussi des isostères (iso masse volumique). On dit alors que le fluide est *barotrope* (cas d'une transformation isotherme ou adiabatique pour un gaz parfait par exemple). Dans ce cas le terme $\frac{\vec{\nabla}(p)}{\rho}$ peut se mettre sous la forme d'un gradient :

$$\frac{\vec{\nabla}(p)}{\rho} = \vec{\nabla} \left(\int \frac{dp}{\rho(p)} \right).$$

En effet par définition du gradient on a : $\vec{\nabla} \left(\int \frac{dp}{\rho(p)} \right) \cdot \vec{dl} = d \left(\int \frac{dp}{\rho(p)} \right) = \frac{dp}{\rho(p)} = \frac{\vec{\nabla} p}{\rho(p)} \cdot \vec{dl}$. Si de plus l'écoulement est stationnaire et si les forces volumiques dérivent d'un potentiel, la charge peut se mettre sous la forme : $C = \int \frac{dp}{\rho(p)} + gz + \frac{1}{2} v^2$.

2.3.2 Cas d'un écoulement instationnaire mais irrotationnel

Si l'écoulement est instationnaire, incompressible et que les forces volumiques dérivent d'un potentiel, l'équation d'Euler peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} v^2 \right) = \vec{v} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{v}.$$

Si l'écoulement est *irrotationnel* ($\vec{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$), \vec{v} dérive d'un potentiel (d'où le nom d'écoulement potentiel aussi utilisé) et l'on peut écrire $\vec{v} = \vec{\nabla}(\Phi)$ et donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$. On peut alors généraliser l'équation de Bernoulli à chaque instant par :

$$C(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2} v^2.$$

La charge $C(t)$ ne dépend pas de la position mais uniquement du temps. A chaque instant $C = Cste$ dans toute la zone irrotationnelle. On peut d'ailleurs faire disparaître cette constante en redéfinissant le potentiel de vitesse comme $\Phi' = \Phi - \int_0^t C(t)dt$. En effet ces deux potentiels ont le même gradient. Attention toutefois si vous devez changer de référentiel¹ !

2.3.3 Effet Coanda

Réécrivons l'équation d'Euler pour un écoulement stationnaire en négligeant les effets de gravité :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\vec{\nabla}(p).$$

Si les lignes de courant sont courbées on peut utiliser le référentiel tangent et l'on note \vec{n} le vecteur unitaire dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire au point considéré et \vec{t} le vecteur tangent. L'accélération s'écrit alors comme la somme d'une accélération tangente $\frac{dv}{dt}$ (dérivée du module de la vitesse) et d'une accélération centripète $\frac{v^2}{R}$ (R est le rayon de courbure local de la trajectoire) :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{dv}{dt}\vec{t} + \frac{v^2}{R}\vec{n}.$$

L'équilibre de la force centrifuge par la composante radiale du gradient de pression s'écrit donc :

$$\rho \frac{v^2}{R} = \frac{\partial p}{\partial r}.$$

C'est ce que l'on appelle l'effet « Coanda ». La pression augmente lorsque on s'éloigne du centre de courbure des lignes de courant. On peut utiliser cette relation pour expliquer la figure 2.3 où une balle légère est maintenue par une force dirigée vers le jet courbé. Cette force est aussi très nettement mesurable si l'on approche le dos d'une cuillère d'un filet d'eau sous un robinet. Cet effet Coanda n'est pas sans relation avec l'effet de portance sur une aile décrits aux §2.5.1 et 2.5.2.

2.4 Quelques applications de l'équation de Bernoulli

2.4.1 Anémomètre à tube de Pitot

Cet appareil, inventé par Henri PITOT en 1732 et toujours utilisé aujourd'hui notamment dans l'aviation, permet à peu de frais de mesurer la vitesse moyenne d'un écoulement stationnaire ou variant lentement (figure 2.4).

Supposons un écoulement uniforme de vitesse U_∞ et à la pression P_∞ loin de l'obstacle pour un fluide de masse volumique ρ . Le tube de Pitot étant profilé il perturbe peu l'écoulement. Une fois les niveaux des liquides équilibrés dans le manomètre à tube (on peut aussi utiliser d'autres types de manomètres) il n'y a plus d'écoulement à l'intérieur du tube et les lois de l'hydrostatique s'appliquent $P_A - P_B = (\rho_m - \rho) g h_m$ où ρ_m est la masse volumique du liquide manométrique ($\rho_m > \rho$).

Sur la ligne de courant venant de l'infini et passant par le point de stagnation A on a $U_A = 0$ soit :

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_A$$

1. D. Clamond. Remarks on Bernoulli constants, gauge conditions and phase velocities in the context of water waves, Applied Math. Letters, **74**, 114-120, 2017.



FIGURE 2.3 – Effet Coanda

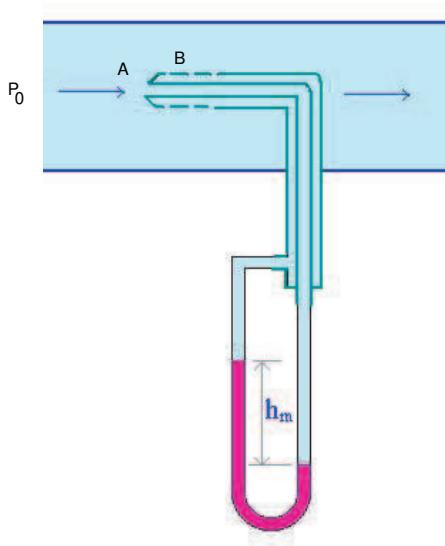


FIGURE 2.4 – Anémomètre à tube de Pitot

Cette même ligne de courant après A se prolonge le long du tube et passe au point B, donc on a aussi :

$$P_B + \frac{1}{2}\rho U_B^2 = P_A = P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2.$$

On supposera que la vitesse en B est déjà revenue à sa valeur à l'infini, $U_B = U_\infty$, alors cette équation nous montre que la pression en B est aussi égale à la pression P_∞ (on a négligé les effets de gravité dans Bernoulli).

La différence entre la pression de stagnation mesurée en A et la pression à la paroi mesurée en B est donc proportionnelle au carré de la vitesse : $\Delta P = P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$, soit finalement :

$$U_\infty = \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}} = \sqrt{2(\frac{\rho_m}{\rho} - 1)gh_m}.$$

Le tube de Pitot fonctionne également si l'écoulement n'est pas totalement parfait à condition d'avoir un écoulement rapide (nombre de Reynolds élevé) pour que l'épaisseur de la couche limite soit encore faible au voisinage du point B. Nous verrons au §2.7 que dans ce cas le gradient de pression transverse à la couche limite est négligeable et que l'on peut bien confondre P_B et P_∞ .

Les tubes de Pitot sont encore couramment utilisés (on en a beaucoup parlé dans les journaux suite à l'accident du vol Rio-Paris en 2009). Ils mesurent bien la pression en statique, par contre ils ont une mauvaise réponse temporelle à cause du comportement de filtre passe-bas de l'écoulement dans les petits trous ou les petits tubes.

2.4.2 Effet Venturi et débitmètre de Venturi

Considérons une conduite dont la section est localement et progressivement diminuée (figure 2.5). Une mesure de la chute de pression entre l'entrée du tube et l'endroit où la section est la plus faible va permettre, à condition de connaître les sections, de calculer le débit passant dans la conduite, et ceci sans pièce mobile. L'effet Venturi a été étudié par Giovanni Battista Venturi à la fin du 18^e.

En régime stationnaire $p + \frac{1}{2}\rho U^2$ est constant sur les lignes de courant si on néglige la gravité. Donc si on suppose de plus que la vitesse est uniforme dans toute section de la conduite (ce qui est réaliste pour un écoulement parfait), on a, en appelant respectivement A, B et C, les trois points de mesure :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho U_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho U_B^2 = P_C + \frac{1}{2}\rho U_C^2$$

Comme de plus on conserve le débit volumique $Q = Q_A = Q_B = Q_C$ soit $U_A S_A = U_B S_B = U_C S_C$, et donc on peut relier la différence de pression entre A et B à la vitesse et donc au débit Q :

$$P_A - P_B = \frac{1}{2}\rho(U_B^2 - U_A^2) = \frac{1}{2}\rho U_A^2 \left[\left(\frac{S_A}{S_B} \right)^2 - 1 \right]$$

soit

$$Q = S_A \sqrt{\frac{2(P_A - P_B)}{\rho} \left(\frac{S_B^2}{S_A^2 - S_B^2} \right)}.$$

La mesure de $P_A - P_B$ et la connaissance de S_A , S_B , et de la masse volumique ρ du fluide en écoulement permettent de déterminer le débit.

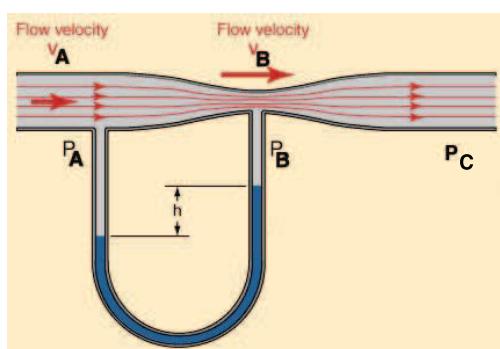


FIGURE 2.5 – Débitmètre de Venturi

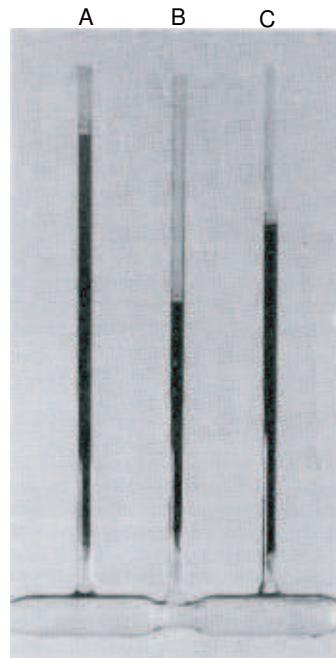


FIGURE 2.6 – Démonstration de l'effet Venturi.
D'après [20] p. 120. $P_A > P_C > P_B$.

Parfois la pression P_B est tellement faible au niveau de la contraction que l'on y observe des bulles de cavitation (dégagement de vapeur au sein du liquide si P_B devient inférieur à la pression de vapeur saturante du liquide).

Cet effet Venturi, et plus précisément la dépression générée au point B (figure 2.5), est aussi utilisé dans les *trompes à eau* pour abaisser la pression d'un gaz, ou pour projeter de la peinture avec un aérographe.

Exercice : Refaire l'étude du débitmètre de Venturi pour un fluide compressible.

Notons que sur la figure 2.6, la pression en C est plus faible que la pression en A, ce qui ne devrait pas être le cas pour un écoulement parfait. Ceci est due aux pertes de charges dans le rétrécissement, pertes de charge qui n'existent que parce que le fluide réel n'est pas parfait et qu'il y a dissipation d'énergie. Une autre cause possible est que le rétrécissement est un peu trop brusque et qu'il se forme un jet en sortie (l'écoulement n'est alors plus homogène dans la section en C).

L'*artériosclérose* est une maladie où le diamètre des artères est localement diminué par des dépôts de graisse. L'effet Venturi explique en partie l'évolution grave de cette maladie.

2.4.3 Expérience d'Evangelista Torricelli (1644)

L'expérience de Torricelli consiste à vider un récipient par un petit trou situé à la profondeur h sous la surface du liquide (figure 2.7). Si le récipient est large comparé à la taille du trou on peut négliger le caractère instationnaire de l'écoulement (h diminue doucement) et sur une ligne de courant reliant un point de la surface à un point dans le trou on a : $P_{atm} + \rho gh + 0 = P_{atm} + 0 + \frac{1}{2}\rho U^2$ soit :

$$U = \sqrt{2gh}.$$

Une clepsydre (récipient rempli d'eau utilisé il y a bien longtemps pour mesurer les durées) est basée sur ce principe. Elle se vide de plus en plus lentement lorsque h diminue, contrairement à un sablier dont le sable s'écoule lui à vitesse constante.

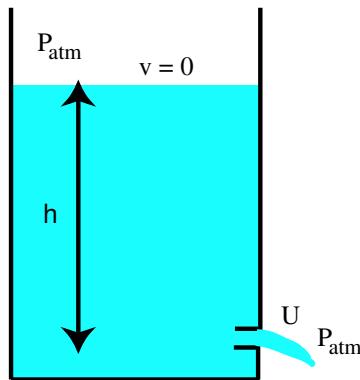


FIGURE 2.7 – Expérience de Torricelli

Exercice : En appliquant la conservation du débit, trouver l'équation régissant $h(t)$ pour un récipient cylindrique de section S et pour un trou de section s . Montrer en particulier que le temps de vidange vaut $\frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$, où h_0 est la hauteur initiale de remplissage au-dessus du trou. Quelle doit-être la forme du récipient $S(h)$ pour que l'écoulement se fasse à vitesse constante ?

2.4.4 Amplification des vagues par le vent

L'apparition des vagues sous l'action du vent peut se comprendre comme une instabilité (l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, voir § ?? page ??) dont le mécanisme déstabilisant s'explique par l'équation de Bernoulli. En effet si on considère une interface air-eau légèrement déformée et que l'on décrit les lignes de courant dans le référentiel qui se déplace avec les vagues (afin de pourvoir appliquer l'équation de Bernoulli stationnaire), le vent est accéléré au-dessus des crêtes, la pression y est donc plus

faible. De même la vitesse du vent décroît au niveau des creux, la pression y est plus forte. Le même raisonnement peut être fait dans l'eau qui se propage dans l'autre direction. En conséquence l'amplitude de toute déformation initiale de l'interface croît au cours du temps. Ce sont les forces de gravité et de tension de surface qui vont limiter l'amplitude des vagues mais surtout expliquer l'existence d'un seuil en vitesse pour cette instabilité, c'est-à-dire une vitesse du vent minimale pour que en principe les premières rides puissent apparaître. On sait depuis Kelvin que la réalité est plus complexe car le seuil trouvé ne correspond pas à la réalité. La turbulence de l'air est un paramètre important à prendre en compte.

2.4.5 Jet incident sur une plaque

Exercice : Calculer la force appliquée par un jet d'eau (bidimensionnel et horizontal), d'épaisseur h rencontrant une plaque plane inclinée d'un angle α vis-à-vis de la verticale. Montrer que la force par unité de largeur perpendiculaire à la plaque F_{\perp} vaut :

$$F_{\perp} = \rho U^2 h \cos \alpha.$$

Que vaut la force tangentielle F_{\parallel} ?

2.5 Conservation de la circulation (théorème de Kelvin)

La circulation du vecteur vitesse sur un contour \mathcal{C}_m fermé matériel, c'est-à-dire emporté par l'écoulement, s'écrit : $\Gamma = \oint_{\mathcal{C}_m} \vec{v} \cdot d\vec{l}$. Par application du théorème de Stokes, on peut aussi l'écrire : $\Gamma = \iint_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$, où S est n'importe quelle surface portée par ce contour matériel.

Nous allons étudier l'évolution de cette circulation le long d'un contour matériel emporté par l'écoulement. En utilisant le théorème de Leibnitz (Equ. ??) et en s'inspirant du théorème du transport on peut écrire :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{\mathcal{C}_m} \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot d\vec{l} + \oint_{\mathcal{C}_m} \vec{v} \cdot \frac{D\vec{l}}{Dt}.$$

Dans le premier terme du membre de droite se trouve l'accélération particulière des particules fluides sur un contour fixe tandis que dans le deuxième terme apparaît le déplacement du contour.

Pour le deuxième terme, dessinons un petit élément $d\vec{l}$ aux instants t et $t + dt$ (figure 2.8). On a $d\vec{l}(t + dt) = d\vec{l}(t) + \vec{v}_B dt - \vec{v}_A dt$. Or $\vec{v}_B = \vec{v}_A + d\vec{v}$, soit finalement $\frac{D\vec{d}\vec{l}}{Dt} = d\vec{v}$.

On peut donc écrire $\vec{v} \cdot \frac{D\vec{d}\vec{l}}{Dt} = \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} d(v^2)$. L'intégrale sur un contour fermé de ce terme est nulle.

Pour le premier terme en utilisant l'équation d'Euler on a $\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g}$.

Si la masse volumique est constante (ou si le fluide est barotrope), la circulation du gradient de pression est nulle. Si de plus les forces de volume dérivent d'un potentiel, la dérivée particulière de la circulation s'écrit :

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0.$$

Enoncé du théorème de Kelvin (1869) : Sous la condition de satisfaire les conditions suivantes :

- Ecoulement parfait ($\nu = 0$)
- forces de volume dérivant d'un potentiel
- densité constante (ou alors fluide barotrope),

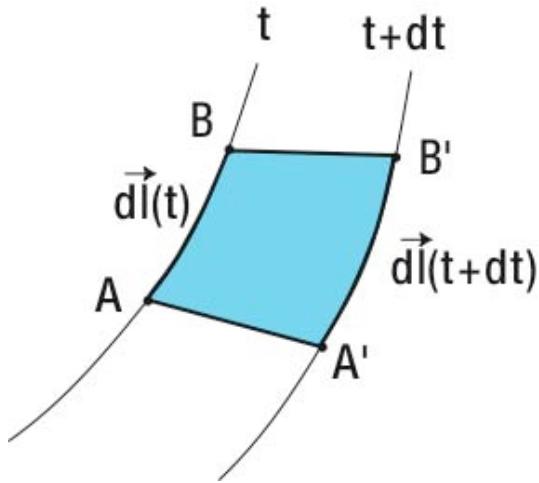


FIGURE 2.8 – Schéma du déplacement pendant dt de l’élément du contour \vec{dl} .

la circulation du vecteur vitesse autour de n’importe quelle boucle fermée et entraînée par le fluide est une quantité qui se conserve au cours du mouvement. Ce que l’on peut écrire :

$$\boxed{\frac{D\Gamma}{Dt} = 0}.$$

Une conséquence du théorème de Kelvin : la persistance de l’irrotationnalité. Si dans un domaine de l’espace simplement connexe l’écoulement est irrotationnel, la circulation autour de n’importe quel contour contenu dans ce domaine sera nulle. Cette propriété est conservée par advection par l’écoulement. Une zone irrotationnelle restera donc irrotationnelle. **Il n’y a que dans les couches limites visqueuses que peut naître de la vorticité.** Ceci est cohérent avec le fait que pour faire tourner sur elles-mêmes des particules fluides et donc leur donner de la vorticité il faut l’action des contraintes visqueuses.

2.5.1 Effet Magnus

Le nom d’effet Magnus vient du nom du physicien allemand Heinrich Gustav Magnus (1802-1870) qui a décrit ce phénomène. Robins avait en fait mis en évidence ce phénomène près d’un siècle plus tôt (1742). Dans de nombreux sports on « lifte » ou on « brosse » les balles, c’est-à-dire qu’on leur donne une rotation sur elles-mêmes qui a pour effet de courber leur trajectoire. Là encore cet effet peut être décrit par le théorème de Bernoulli.

Prenons une balle tournant sur elle-même avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ (figure 2.9). Dans le référentiel du centre de masse de cette balle il existe un écoulement d’air de gauche à droite d’intensité \vec{U} . À cause de l’existence de couches limites au voisinage de la balle (zones où la viscosité du fluide se fait sentir, voir § 2.7 page 60) et de la condition de non-glisement du fluide au voisinage de la surface de la balle (§ 1.7.1 page 25) le fluide va aller plus vite que \vec{U} juste au-dessous de la balle (les vitesses s’ajoutent) et légèrement moins vite juste au-dessus (les vitesses se soustraient). La relation de Bernoulli nous dit alors que la pression va être un peu plus forte au-dessus qu’au-dessous de la balle avec pour conséquence une force dirigée ici de haut en bas (cas d’une balle liftée) appelée portance (*lift* en anglais) \vec{F}_L . Ici nous avons une portance négative qui fait plonger la balle.

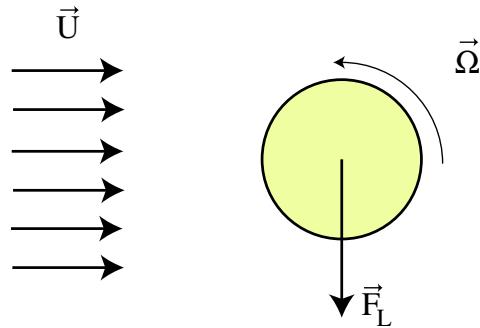


FIGURE 2.9 – Exemple de portance acquise par effet Magnus d'une balle tournant sur elle-même.

On peut montrer que $\vec{F}_L \propto \rho \vec{U} \wedge \vec{\Omega}$. Une autre façon de décrire les choses est que, comme nous le verrons dans l'étude de la portance sur une aile d'avion, il existe une portance parce qu'apparaît une circulation du vecteur vitesse $\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l}$ autour de l'objet.

Une autre application classique de l'effet Magnus est la propulsion par cylindres tournants imaginée par Anton FLETTNER et pour la première fois utilisée sur le Baden Baden en 1926. L'idée a ensuite été perfectionnée pour l'Alcyone, bateau de J.-Y. COUSTEAU. Dans ce cas la dissymétrie de l'écoulement est contrôlée par aspiration asymétrique des couches limites plutôt que par la rotation du cylindre.

2.5.2 Portance d'une aile

Les deux figures suivantes (figures 2.10 et 2.11) représentent respectivement l'écoulement et les forces locales agissant sur une voile mince ou sur une aile portante sous faible incidence. L'équation de Bernoulli permet d'évaluer assez simplement la portance sur une telle aile.

Si on compare deux lignes de courant passant respectivement juste au-dessous (zone 1) et juste au-dessus (zone 2) d'une aile de longueur L et d'envergure a , on peut écrire :

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2$$

et

$$P_\infty + \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2$$

soit :

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(U_2^2 - U_1^2) = \frac{1}{2}\rho(U_2 - U_1)(U_2 + U_1).$$

Au premier ordre on peut écrire $U_2 + U_1 \approx 2U_\infty$ et la portance F_L peut s'écrire :

$$F_L \approx \int_0^L a(P_1 - P_2) dl \approx a\rho U_\infty \left[\int_0^L (U_2 - U_1) dl \right] = -a\rho U_\infty \Gamma$$

où Γ est la circulation autour de l'aile calculée dans le sens trigonométrique. Ce calcul n'est qu'une estimation mais le résultat trouvé est exact comme nous le verrons au chapitre ?? page ??.

Notons que dans ce type d'approche, basée sur l'équation d'Euler et la conservation de l'énergie, il n'existe pas de force de traînée puisqu'il n'y a pas de viscosité (voir § 2.6 page suivante). En effet sans viscosité il n'existe pas de vorticité, ni de couche limite, ni de décollement de couche limite, un phénomène pourtant capital pour expliquer la traînée et l'éventuel décrochage d'une aile.

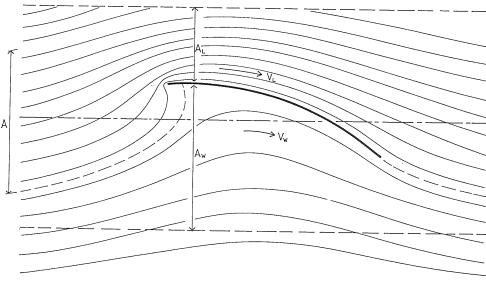


FIGURE 2.10 – Portance sur une aile en incidence. La portance exercée par l'air sur l'aile est égale et opposée à l'action de l'aile déviant l'air vers le bas.

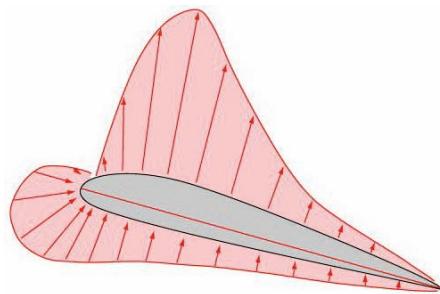


FIGURE 2.11 – Répartition réelle de pression autour d'une aile.

2.6 Paradoxe de d'Alembert

On nomme paradoxe de d'Alembert le fait que dans le cadre de l'équation d'Euler il n'existe pas de force de traînée sur un obstacle (force dans le sens de l'écoulement appliquée par le fluide sur l'obstacle) pour un écoulement stationnaire, bien qu'on puisse calculer une portance. Les forces de traînée existent pourtant bien dans la réalité, mais elles sont dues à l'existence de couches limites (éventuellement décollées) qui changent la distribution de pression autour de l'obstacle par rapport au cas de l'écoulement parfait.

Dans le cas d'une aile, le flux de quantité de mouvement est défléchi ce qui donne une portance, par contre il n'y a pas de perte de quantité de mouvement horizontale ce qui correspondrait à une force de traînée et donc à une dissipation d'énergie.

Notons toutefois qu'il existe une force de traînée en régime instationnaire, qui correspond à la nécessaire variation de l'énergie cinétique des particules fluides. Cette force est appelée la force de *masse ajoutée*. Par exemple pour une sphère accélérée on trouve $\vec{D} = -\frac{1}{2}\rho V_0 \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$, où V_0 est le volume de la sphère.

Même en régime stationnaire il peut quand même exister une traînée en écoulement parfait en présence d'ondes (sonores, de surface ou autres). En effet ces ondes peuvent rayonner de l'énergie vers l'infini. C'est le cas de la traînée de vague ressentie par un obstacle se déplaçant à la surface de l'eau.

Exercice : On considère un obstacle symétrique admettant des lignes de courant symétriques. En déduire que, dans le cadre de l'équation d'Euler stationnaire, la pression présente la même symétrie et que donc la traînée est nulle. On peut généraliser cette démonstration à des corps non-symétriques et ainsi démontrer le paradoxe de D'Alembert (voir [16] page 240 ou [2] page 404).

2.7 Couche limite laminaire sur une plaque plane

On pourra lire avec profit les documents suivants : [12] p. 507, [4] p. 321, [13] p. 299 et [7] tome II p. 86, et le chapitre correspondant dans le DVD [10].

La compréhension du comportement des couches limites date du début du XX^e siècle. Les travaux de Prandtl ont permis une avancée majeure dans l'histoire de la mécanique des fluides.

Nous avons déjà évoqué quelques phénomènes de couches limites lors de l'établissement de l'écoulement de Poiseuille ou de Couette, ou du démarrage d'une plaque plane au §1.8.5. Il existe

alors deux domaines : l'un loin des parois où l'écoulement n'est pas encore modifié et où la viscosité n'a aucune influence, l'autre près de la paroi où la quantité de mouvement diffuse en racine carrée du temps à cause de la viscosité. En passant d'une description temporelle à une description spatiale on voit apparaître deux échelles de longueur très distinctes, une grande dans le sens de l'écoulement et une petite dans la direction transverse à la paroi. L'étude de la couche limite laminaire, par exemple sur une plaque plane comme schématisée sur la figure 2.12, est le but de ce chapitre.

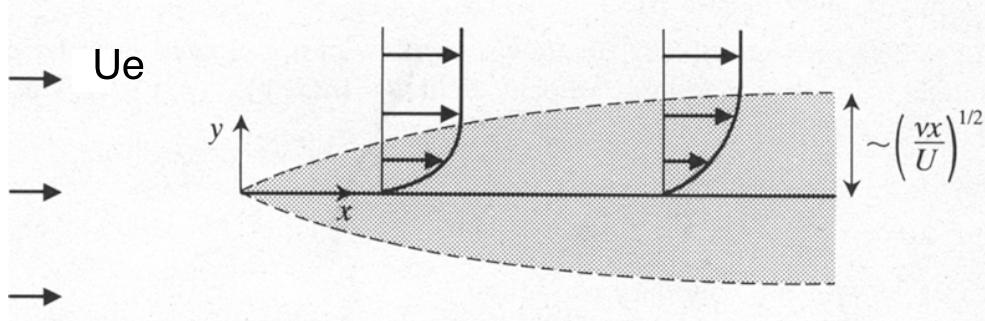


FIGURE 2.12 – Ecoulement de couche limite au voisinage d'une plaque plane. D'après [1] p. 49.

L'hypothèse de base est que, loin des parois, l'écoulement est laminaire et n'est pas influencé par la viscosité. On a alors affaire à un fluide parfait, qui satisfait à l'équation d'Euler. Si on suppose de plus que l'écoulement extérieur est potentiel (irrotationnel) on peut y appliquer partout l'équation de Bernoulli. Près de la plaque au contraire, l'écoulement est dominé par les termes visqueux. Dans cette couche limite, d'épaisseur variable $\delta(x)$ mais supposée faible, l'on pourra faire les approximations des écoulements quasi-parallèles, comme nous l'avons vu dans la théorie de la lubrification (§ ?? page ??). Le raisonnement est aussi valable si la paroi est légèrement courbée, à condition que le rayon de courbure soit grand devant l'épaisseur de la couche limite.

2.7.1 Les équations de Prandtl (1904)

Près de la paroi on suppose que l'écoulement est 2D2C, $\vec{u}(x, y) = (u, v, 0)$ avec les conditions aux limites $\vec{u} = \vec{0}$ pour $y = 0$ et $u = U_e(x)$ pour $y \rightarrow +\infty$ (figure 2.12) et l'on mène un calcul similaire à celui d'un écoulement de lubrification (§ ?? page ??).

La conservation de la masse, $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, nous permet une estimation des ordres de grandeur : $u/x_0 \approx v/\delta(x_0)$, où x_0 est l'abscisse du point considéré par rapport au bord d'attaque de la plaque. Donc la vitesse transverse est négligeable devant la vitesse longitudinale lorsque $\delta(x_0) \ll x_0$.

Ecrivons l'équation de Navier-Stokes d'un écoulement stationnaire pour les deux composantes u et v .

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.4)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.5)$$

Le terme visqueux a été simplifié pour tenir compte du fait que $\delta(x_0) \ll x_0$ et donc que les dérivées secondes en y dominent.

Comme $v \ll u$, les termes où la vitesse intervient dans l'équation selon y (2.5) sont d'un ordre de grandeur inférieur aux termes correspondants de la première équation (2.4). On en déduit que $\frac{\partial p}{\partial y} \ll \frac{\partial p}{\partial x}$. Les gradients de pression transverses sont faibles et au premier ordre la pression ne varie que selon x , soit $p \approx p(x)$. En particulier la pression au sein de la couche limite est la même que dans l'écoulement extérieur. C'est à cause de cette propriété qu'un tube de Pitot peut être utilisé pour mesurer la vitesse dans un fluide (cf § 2.4.1 page 53). En effet la pression mesurée à la paroi est pratiquement la même que celle qui existe *au-delà* de la couche limite ($\frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$). De même, c'est parce que les couches limites sont minces que les équations d'Euler donnent la bonne portance pour une aile d'avion en faible incidence malgré la présence de couches limites attachées (cf § 2.5.2 page 59).

Les termes visqueux sont dominants dans la couche limite, les termes inertIELS le sont en dehors de cette couche. Les deux termes sont du même ordre de grandeur à une distance $\delta(x_0)$ de la surface solide si :

$$U_e^2/x_0 \approx \nu U_e/\delta^2, \text{ où } x_0 \text{ est la distance au bord d'attaque de l'obstacle. Soit si}$$

$$\delta(x_0) = \sqrt{\nu x_0 / U_e}.$$

Cette quantité est, dimensionnellement, l'épaisseur locale de la couche limite. Cette épaisseur croît lentement, en racine de la distance selon x . Si on introduit un nombre de Reynolds longitudinal construit sur la distance x_0 du début de la couche limite, $Re_{x_0} = U_e x_0 / \nu$, on obtient :

$$\frac{\delta(x_0)}{x_0} = \frac{1}{\sqrt{Re_{x_0}}}.$$

Si ce nombre de Reynolds est élevé, on vérifie bien l'hypothèse $\delta(x_0) \ll x_0$. Attention, l'analyse n'est plus valable si x_0 est petit, c'est-à-dire très près du bord d'attaque de la plaque.

En dehors de la couche limite, la viscosité étant négligeable, l'équation de Bernoulli nous donne en l'absence d'effet de la gravité $p(x) + \rho U_e^2(x)/2 = Cste$ sur une ligne de courant et en fait partout si l'écoulement amont est irrotationnel. Nous allons pour l'instant traiter le cas général où l'écoulement externe $U_e(x)$ dépend effectivement de x . Soit :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = U_e(x) \frac{\partial U_e}{\partial x}. \quad (2.6)$$

On peut donc reporter cette relation dans l'équ. 2.4 et l'on obtient l'équation de Prandtl de la couche limite :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_e(x) \frac{\partial U_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

(2.7)

Cette équation ne peut être résolue que si l'on connaît l'écoulement externe $U_e(x)$. Nous allons d'abord décrire le cas d'un écoulement homogène. Il existe aussi toute une famille de solutions, les solutions de Falkner-Skan (1930), lorsque l'on peut écrire $U_e(x) = Cx^m$ (cf § ??).

2.7.2 Profil de vitesse de Blasius (1907)

Si maintenant on considère le cas le plus simple d'un écoulement externe homogène, $U_e(x) = U_e = Cste$ au-dessus d'une plaque plane, l'équation 2.7 se simplifie en :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Cette équation, après adimensionnement, admet une solution auto-similaire unique.

Pour le montrer, posons $X = x/x_0$, $Y = y/\delta(x_0)$, $U = u/U_e$ et $V = v/(U_e/\sqrt{Re_{x_0}})$. La conservation de la masse et l'équation de la dynamique de la composante longitudinale s'écrivent alors :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.8)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (2.9)$$

Ces équations ne contiennent plus aucun paramètre (ni U_e , ni Re_{x_0}). En plus elle admet pour la variable U une solution auto-similaire, $U(X, Y) = f(\theta)$ ce qui fait que l'on obtiendra une équation différentielle ordinaire, bien plus simple qu'une équation aux dérivées partielles. Ceci est possible car notre résultat doit être indépendant du choix arbitraire de l'abscisse x_0 et l'on peut alors éliminer cette variable. La vitesse $U(X, Y)$ ne dépend donc pas de X et Y indépendamment mais à travers une variable intermédiaire unique indépendante de x_0 . On trouve alors $\theta = Y/\sqrt{X} = y/\delta(x)$ avec pour conditions aux limites : $f(0) = 0$ et $f(\infty) = 1$. Attention $\theta = y/\delta(x)$ n'est pas la variable $Y = y/\delta(x_0)$!

En exprimant $\frac{\partial V}{\partial Y}$ par l'équation de continuité (2.8) et en intégrant par partie cette expression on obtient formellement :

$$V(X, \theta) = \frac{1}{2\sqrt{X}} \left[\theta f - \int_0^\theta f(\xi) d\xi \right] \quad (2.10)$$

que l'on peut injecter dans l'équation 2.9. Il convient de remarquer que la vitesse V n'est elle pas une fonction auto-similaire de θ car elle dépend aussi de X .

On en déduit l'équation intégro-différentielle satisfaite par f :

$$2f'' + f' \int_0^\theta f(\xi) d\xi = 0. \quad (2.11)$$

Si on introduit la fonction $F(\theta) = \int_0^\theta f(\xi) d\xi$ cette nouvelle équation peut aussi s'écrire :

$$2F''' + F''F = 0. \quad (2.12)$$

C'est l'**équation de Blasius**. Cette équation différentielle ordinaire et non-linéaire s'intègre numériquement et l'on obtient alors le profil de vitesse longitudinale dans la couche limite (figure 2.13a). Le profil de vitesse reste très linéaire dans la couche limite et transite rapidement (exponentiellement) vers l'asymptote.

L'écartement progressif des lignes de courant au voisinage de la plaque plane (en \sqrt{x}) est dû à l'existence d'une petite composante de vitesse transverse (dans et hors de la couche limite) que l'on peut calculer explicitement en utilisant l'équation 2.10 (figure 2.13b).

2.7.3 Calcul de la contrainte pariétale et du coefficient de traînée

La connaissance explicite de la vitesse dans la couche limite permet de calculer la contrainte locale de frottement visqueux sur la paroi.

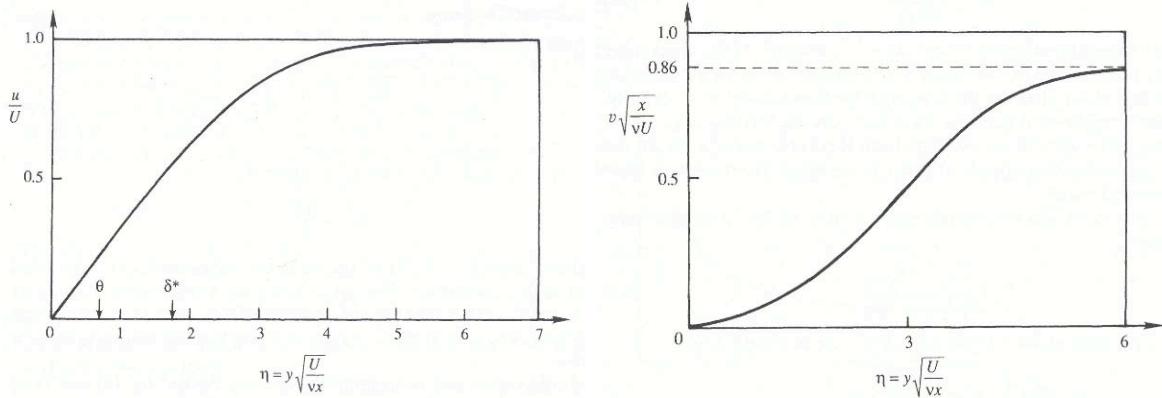


FIGURE 2.13 – Profil de vitesse de Blasius. a) vitesse longitudinale $U = f(\theta)$, b) vitesse transverse $V = f(X, \theta)$. D'après [13] p. 311.

$$\sigma_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \approx \eta U_e f'(0) \frac{\partial \theta}{\partial y} = \eta U_e f'(0) \sqrt{\frac{U_e}{\nu x}} \approx \frac{1}{3} \frac{\rho U_e^2}{\sqrt{Re_{x_0}}}.$$

On en déduit la force de traînée visqueuse par unité de largeur et par face d'une plaque de longueur L :

$$F_D = \int_0^L \sigma_{xy} dx = 2\rho U_e^2 L f'(0) \frac{1}{\sqrt{Re_L}}.$$

La force de traînée varie donc comme $U_e^{3/2}$ et comme $L^{1/2}$. La dépendance avec la vitesse en puissance 3/2 est clairement intermédiaire entre le cas très visqueux (force de Stokes) où elle est proportionnelle à U_e et le cas des Reynolds très élevés où l'écoulement est turbulent et où elle varie comme le carré de la vitesse. La dépendance avec la longueur en puissance 1/2 fait que si L double, la force de traînée ne double pas. La contribution au frottement des zones en amont de la plaque est donc plus importante que celles des zones en aval (où le cisaillement est moins intense).

Si on introduit le coefficient de traînée adimensionné, on trouve :

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U_e^2 L} = \frac{4}{3} \frac{1}{\sqrt{Re_L}}.$$

Résultat qu'il faut multiplier par 2 si l'on veut tenir compte des deux faces de la plaque. Lorsque le nombre de Reynolds est élevé, ce coefficient de traînée est très faible, mais la couche limite peut aussi devenir turbulente !

A. N. : Calculer la force de traînée d'une plaque de $1 \text{ m} \times 1 \text{ m}$ tirée à incidence nulle à une vitesse de 1 m/s dans de l'eau.

2.8 Décollement de la couche limite sur une paroi courbée

S'il existe un écoulement extérieur non uniforme (par exemple parce que la surface est courbée ou que l'écoulement se situe dans un convergeant ou un divergent) il existe des gradients de pression

longitudinaux positifs ou négatifs dans l'écoulement externe qui interviennent donc dans l'équation de la couche limite (équation 2.4).

- Si une particule fluide accélère, d'après l'équation de Bernoulli valable au-delà de la couche limite pour un écoulement potentiel (équation 2.6), on a $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$. Le fluide est accéléré par ce gradient de pression, v devient négatif et la couche limite s'amincit.
- Par contre si l'écoulement ralentit on a $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$. Le fluide est décéléré et comme près de la paroi il était déjà ralenti l'écoulement peut changer de sens près de la paroi (figure 2.14). C'est ce que l'on appelle le phénomène de décollement de la couche limite.

Le décollement de la couche limite peut être brutal. C'est une transition qui peut être catastrophique par exemple pour un avion lorsque l'incidence des ailes augmente car il correspond à une perte brutale de la portance (décrochage). C'est le même phénomène que le marin cherche à éviter et c'est pour pouvoir le mettre en évidence que l'on colle des brins de laine sur l'intrados et sur l'extrados de ses voiles (figure 2.15).

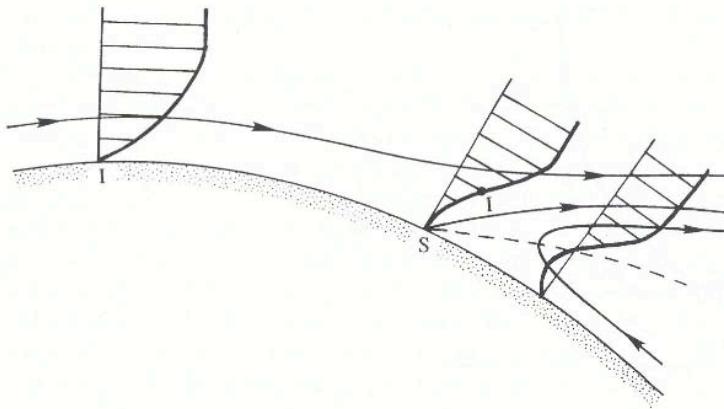


FIGURE 2.14 – Lignes de courant et profils de vitesse près d'un point de séparation S. La ligne pointillée représente le lieu où $u = 0$. D'après [13] p. 319.

Le décollement des couches limites induit un sillage plus important et donc une forte augmentation de la traînée de pression. Il est donc très important de bien profiler l'arrière des obstacles. Le fait de profiler un véhicule par exemple permet de faire baisser la force de traînée d'un facteur 10 à 100 ! Il existe de nombreux dispositifs pour essayer de contrôler le décollement des couches limites : volets de bord d'attaque ou de bord de fuite sur les ailes à l'atterrissement, aspiration ou soufflage des couches limites, profilage des véhicules, alules sur les ailes de certains oiseaux planeurs (figure 2.16), etc.

Pour diminuer la traînée des objets à grand Reynolds il est important de les profiler. C'est encore plus importante en aval du profil, là où la décélération de l'écoulement pourrait créer un décollement de la couche limite. Cela peut donc conduire à des profils asymétriques avant/arrière. Par contre à bas nombre de Reynolds, l'écoulement est modifié par l'obstacle jusqu'à de grandes distances et sa forme exacte importe peu pour le calcul de la traînée de pression. Par contre il est important de minimiser la surface de cisaillement visqueux et cela conduit à des formes optimales plus compactes.

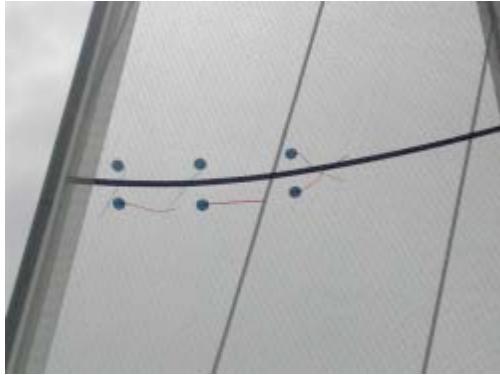


FIGURE 2.15 – Brins de laine placés sur l’extra-dos et l’intrados (près du bord d’attaque) d’une voile d’avant d’un voilier naviguant au près et qui permettent de visualiser le décollement éventuel des couches limites.

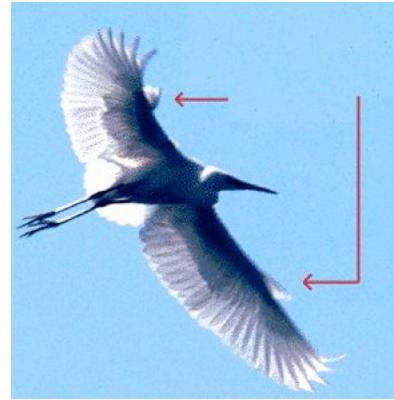


FIGURE 2.16 – Aigrette en vol montrant ses alules qu’elle utilise pour recoller la couche limite et donc augmenter la portance à basse vitesse.

2.8.1 Couche limite turbulente

Si l’épaisseur de la couche limite est très faible, il existe un très fort cisaillement entre la vitesse nulle sur la paroi et la vitesse U_e hors de la couche limite. Ce cisaillement peut devenir suffisant pour que l’écoulement laminaire se déstabilise et devienne turbulent. Expérimentalement la couche limite laminaire transite vers une couche limite turbulente si le nombre de Reynolds transverse, i.e. calculé avec l’épaisseur de la couche limite :

$$Re_y = U_e \delta / \nu = U_e \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}} / \nu = \sqrt{\frac{U_e x}{\nu}} = \sqrt{Re_x}.$$

devient de l’ordre de 300 (ce qui correspond à $Re_x \approx 10^5$). On voit alors apparaître des ondes transverses dites « ondes de Tollmien-Schlichting » qui se déstabilisent en « épingle à cheveux », puis des taches turbulentes apparaissent qui finalement envahissent toute la couche limite et au-delà.

Pour en savoir plus

Livres : Références [12] et [19] H. Schlichting (2000), Boundary Layer Theory, Springer, 8^e édition. On y trouve en particulier quelques études plus pointues sur les couches limites instationnaires et sur les calculs au-delà du premier ordre.

Vidéo : *Fundamentals of Boundary Layers*, F.H. Abernathy, National Committee for Fluid Mechanics Films, <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>

2.9 Quelques questions possibles

1. Quelle différence peut-on faire entre un écoulement parfait et un gaz parfait.
2. Quelles sont les conditions aux limites, cinématiques et dynamiques, pour un écoulement parfait.
3. Dans l’expérience du tube de Venturi, on observe en aval du rétrécissement une pression un peu plus faible qu’en amont. Comment peut-on expliquer cela ?

4. Un écoulement parfait et un écoulement turbulent sont-ils compatibles ?
5. Que peut-on dire de la vorticité dans un écoulement parfait ? Pourquoi les écoulements parfaits sont-ils souvent potentiels ?
6. Peut-on donner une interprétation énergétique au théorème de Bernoulli ?
7. Paradoxe de d'Alembert. Peut-il exister une force de traînée dans un écoulement parfait ? Existe-t-il des contre-exemples ?

Chapitre 3

Leçon de Physique n°5 : Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides

Marc Rabaud, version du 19 décembre 2019

Sommaire

3.1	Origine microscopique	70
3.2	La loi de Laplace	72
3.3	Angle de mouillage macroscopique	74
3.3.1	Loi d'équilibre d'Young-Dupré	75
3.3.2	Hystérésis de l'angle de contact	76
3.4	Effet de la gravité et longueur capillaire	76
3.5	La mesure du coefficient de tension superficielle	77
3.5.1	La loi de Jurin (1717)	77
3.5.2	Lame de Wilhelmy et anneau de Noüy	79
3.5.3	Méthode de la goutte pendante	79
3.5.4	Méthode de la goutte tournante	79
3.6	Effet de la température sur la tension de surface (effet Marangoni)	80
3.7	Les tensioactifs	80
3.7.1	Pourquoi met-on du savon pour se laver les mains ?	81
3.7.2	Comment expliquer la stabilité des membranes de savon ?	81
3.8	Dynamique de quelques écoulements contrôlés par la tension de surface	82
3.9	Pour en savoir plus	82
3.10	Quelques questions possibles	82

Lorsque des corps en contact sont non miscibles, cela signifie qu'il existe à leur interface des forces qui empêchent les molécules de chacune des phases (solide, liquide ou gazeuse) de se mélanger sous l'action de l'agitation thermique. Ces forces sont appelés des forces interfaciales, ou de tension superficielle ou aussi des forces capillaires dans le cas des liquides. Au contraire, dans le cas des corps miscibles ces forces sont nulles ou du moins insuffisantes pour empêcher le mélange à temps long : c'est le cas des gaz qui sont toujours miscibles ou de deux liquides si leur mélange est possible.

Aux petites échelles ces forces de tension aux interfaces ne peuvent souvent plus être négligées devant les autres forces, la gravité par exemple. Ce sont elles par exemple qui expliquent comment

$\gamma_{air-eau}$	72 mN/m
γ_{Hg-air}	490 mN/m
$\gamma_{éthanol-air}$	22 mN/m
$\gamma_{éthanol-huile silicone}$	0,7 mN/m

TABLE 3.1 – Quelques valeurs du coefficient de tension interfaciale à 20°C

les araignées d'eau marchent sur l'eau (figure 3.1) ou pourquoi nos cheveux sont collés entre eux en sortant de l'eau (figure 3.2).



FIGURE 3.1 – Un gerris posé à la surface d'un étang.



FIGURE 3.2 – Effet des forces capillaires sur un pinceau sec, immergé ou mouillé. (D'après [23], p. 12).

3.1 Origine microscopique

Les phénomènes de tension de surface, aussi appelés phénomènes capillaires ou interfaciaux trouvent leur origine dans les forces intermoléculaires attractives qui existent dans toute phase condensée de la matière. Une molécule loin de toute surface a de nombreuses voisines (entre 6 et 10 premières voisines) donc une forte énergie d'interaction. Par contre une molécule en surface a moitié moins de voisines de son espèce, donc moitié moins d'énergie d'interaction (figure 3.3). Tout se passe comme s'il avait fallu casser un certain nombre de liaisons, ce qui a un coût en énergie. L'énergie E_S pour fabriquer une surface S est égale à ce coût par molécule multiplié par le nombre de molécules en surface (lui-même proportionnel à la surface S). On peut donc écrire :

$$E_S = \gamma S. \quad (3.1)$$

Le coefficient de proportionnalité γ s'appelle le coefficient de tension de surface ou tension interfaciale. C'est une énergie par unité de surface (grandeur intensive) mais, comme nous le verrons, ce coefficient peut aussi être interprété comme une force par unité de longueur. La tension de surface s'exprime en J/m^2 ou en N/m .

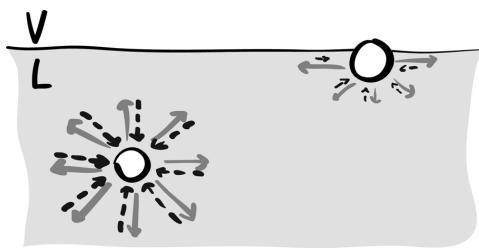


FIGURE 3.3 – Schéma des interactions entre molécules à la surface et au sein d'un liquide [15].



FIGURE 3.4 – Effet des forces capillaires sur le whisky du capitaine Haddock dans *On a marché sur la lune*.

Le cas de l'eau : l'eau très pure a un coefficient de tension de surface relativement forte (environ 72 mN/m) comparativement à d'autres liquides usuels à cause de son caractère polaire et des liaisons hydrogènes. Mais c'est en réalité une valeur asymptotique car, dès que l'eau est en contact avec l'atmosphère, de nombreuses particules vont se déposer progressivement à la surface et en quelques minutes ou heures la tension de surface vaut plutôt de l'ordre de 50 mN/m. C'est aussi l'ordre de grandeur de la tension de surface que l'on mesure pour l'eau du robinet.

Afin de minimiser son énergie E_S , un fluide va avoir tendance à minimiser sa surface et donc à prendre une forme sphérique en l'absence d'autres contraintes comme la gravité (figure 3.4 ou les vidéos https://www.youtube.com/watch?v=TLbhrMCM4_0 et https://www.youtube.com/watch?v=bKk_7NIKY3Y prises dans la Station Spatiale Internationale).

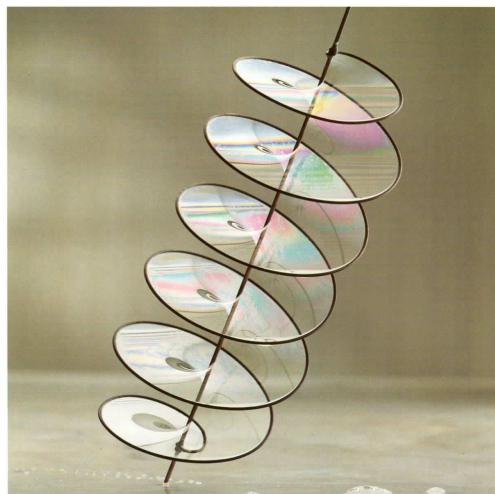


FIGURE 3.5 – Exemple de surface minimale portée par une hélice et son axe [23].



FIGURE 3.6 – La caténoïde, surface minimale portée par deux anneaux [23].

La figure 3.7 illustre le fait qu'il existe une force qui tend à minimiser la surface de la membrane de savon et qui conduit à une surface dont l'aire est minimale. En tirant avec une force f sur la ficelle centrale on fournit un travail $dW = f dl = \gamma dS$ et l'on peut donc augmenter la surface. Cette action est réversible.

Une mince membrane de savon (pour laquelle on peut négliger l'effet de la gravité) portée par un contour va réaliser une *surface minimale*, c'est-à-dire une surface portée par un contour dont l'aire est

la plus faible possible (figures 3.5 et 3.6).

La surface d'un liquide est donc un lieu de contrainte. Tout segment \vec{dl} dans le plan de cette surface est soumis à deux forces égales et opposées si la surface est à l'équilibre, **dirigées elle aussi dans le plan de la membrane**, et perpendiculairement à l'élément de longueur considéré :

$$\vec{df} = \pm \gamma (\vec{n} \wedge \vec{dl}). \quad (3.2)$$

où \vec{n} représente la normale à la surface. Une description détaillée au niveau microscopique de pourquoi cette force est parallèle à la surface est donnée dans la Ref. [15]. On peut facilement rompre cet équilibre en diminuant localement la tension de surface, par exemple si le liquide est de l'eau en touchant la surface avec du savon ce qui à pour effet de diminuer localement la tension de surface (voir § 3.7). L'équilibre est alors rompu et le fluide en surface se déplace brutalement radialement vers la zone de plus forte tension de surface.

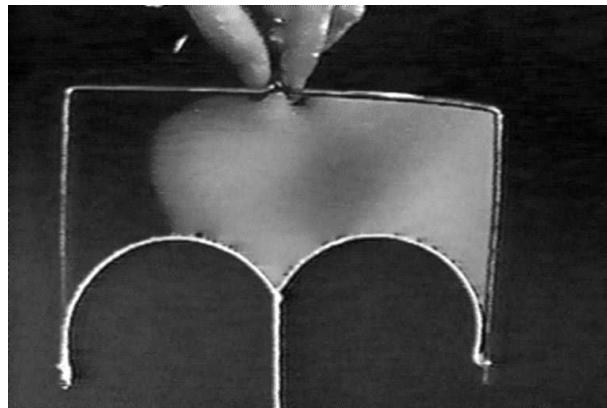


FIGURE 3.7 – Démonstration de l'existence des forces capillaires. Les deux bouts de la ficelle sont en forme d'arcs de cercle. Pourquoi ?

Exercice : On s'intéresse à l'ouverture rapide d'un trou dans une membrane de savon horizontale sous l'action de la tension de surface. En supposant que toute la masse se retrouve dans un bourrelet montrer qu'après un transitoire ce bourrelet avance ensuite à vitesse constante dite de Taylor-Culick que l'on calculera. Ref. : Culick, F.E.C. 1960 Comment on a ruptured soap film. J. Appl. Phys. 31 1128-1129.

3.2 La loi de Laplace

Si une surface est courbée, les contraintes de traction existant sur la surface ont une composante non nulle dans la direction normale à la surface et orientée vers le centre de courbure, c'est-à-dire du côté concave de la surface. A l'équilibre, cette force normale est compensée par une pression plus forte du côté intérieur que du côté extérieur. Prenons l'exemple d'une goutte sphérique que nous allons couper en deux par la pensée (figure 3.8). La force dirigée vers le haut due à la surpression à l'intérieur de la goutte, $\Delta P \pi R^2$, doit être égale à la somme des forces de tension de surface sur l'équateur $2\pi R$. Soit pour une goutte sphérique :

$$\Delta p = p_{int} - p_{ext} = 2 \frac{\gamma}{R}.$$

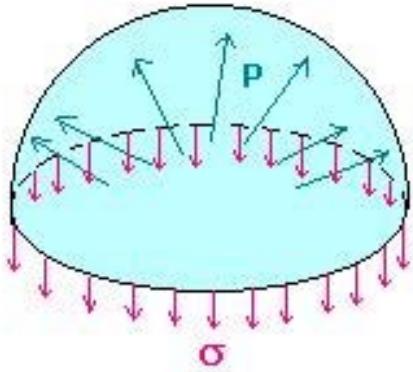


FIGURE 3.8 – Illustration de l’effet de la surpression de Laplace Δp sur une goutte coupée en deux par la pensée.

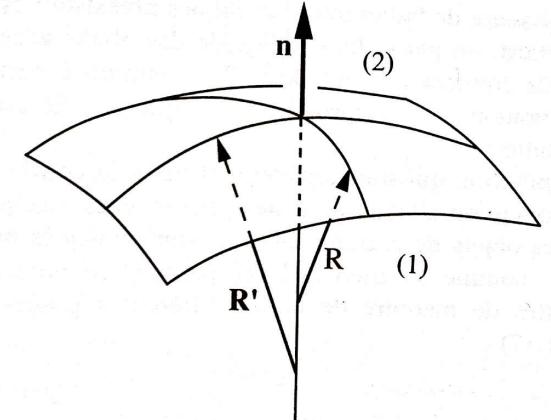


FIGURE 3.9 – Notion de rayon de courbure, d’après [12] p. 46.

Dans le cas général on montre que la loi de Laplace, formulée pour la première fois en 1806 par Pierre-Simon de Laplace, s’écrit en chaque point d’une surface courbée :

$$p_i - p_j = \gamma \left[\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right]. \quad (3.3)$$

où R' et R'' sont les deux rayons de courbure de la surface en ce point, comptés positivement lorsque leur centre de courbure se trouve du côté i . En effet, pour tout point d’une surface lisse, on peut définir la normale et donc des plans contenant cette normale. Chacun de ces plans coupe la surface selon une courbe dont on peut déterminer le centre de courbure et le rayon de courbure (figure 3.9).

Démonstration : La figure 3.10 représente le plan Oxy contenant la normale \vec{n} et un vecteur tangent \vec{t} en un point M de l’interface entre deux fluides. Dans ce plan l’élément de surface a pour longueur ds . O est le centre de courbure. La force de tension superficielle en M vaut par élément de longueur dz dans la direction transverse : $\vec{F}(s) = \gamma dz \vec{t}$. A l’équilibre cette force à le même module en $s + ds$ mais pas la même direction :

$$\vec{F}(s + ds) = \vec{F}(s) + \gamma dz \vec{dt}.$$

Or $\frac{d\vec{t}}{d\theta} = -\vec{n}$ et $ds = R'd\theta$, où $R' = OM$ est le rayon de courbure en M. Donc $d\vec{F} = -\gamma dz \frac{ds}{R'} \vec{n}$. S’il existe aussi un rayon de courbure R'' dans le plan perpendiculaire à Oxy et contenant \vec{n} , il existe une deuxième contribution à la force normale $d\vec{F} = -\gamma dz \frac{ds}{R''} \vec{n}$. A l’équilibre cette force est compensée par une force de surpression $\Delta p(ds) \vec{n}$ ce qui donne finalement l’équation 3.3.

Pour une courbe $y = f(x)$, la courbure (inverse du rayon de courbure) qui caractérise la rotation du vecteur tangent lorsqu’on se déplace sur la courbe est donnée par la relation :

$$C' = 1/R' = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

Les deux rayons R' et R'' doivent être mesurés dans deux plans perpendiculaires [2]. On montre que la somme de ces rayons de courbure, appelée **courbure géométrique** ou **courbure moyenne**

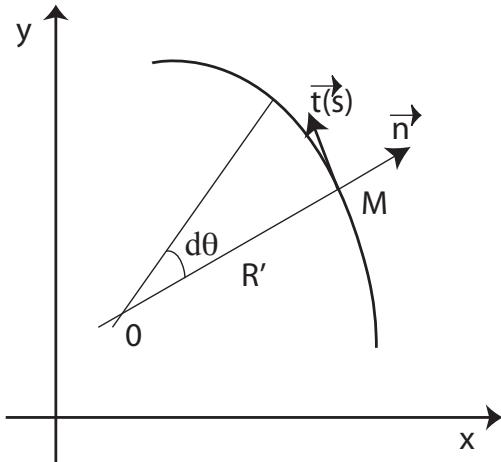


FIGURE 3.10 – Plan perpendiculaire à l’interface c’est-à-dire contenant \vec{n} .

$C = C' + C'' = (1/R' + 1/R'')$ est indépendante du choix des deux plans perpendiculaires, c'est un invariant de la surface.

Notons qu'une surface peut avoir une courbure nulle, c'est le cas d'un point-selle (aussi appelé point-col). En effet les rayons de courbure sont des quantités algébriques, comptées positives si le centre de courbure est situé du côté identifié par la lettre i . Dans le cas du point-selle les pressions de chaque côté de la surface sont égales. Les figures 3.5 et 3.6 sont des exemples de surface de courbure nulle en tout point et donc de surface minimale.

En conséquence de la loi de Laplace, plus une goutte est petite plus le fluide à l'intérieur est à une pression élevée. Les petites bulles sont donc bien sphériques et peu déformables. Attention, pour les bulles de savon, la tension de surface agit des deux côtés des membranes (il y a en effet deux interfaces eau-gaz). Il apparaît donc un facteur 2 dans la relation de Laplace : $\Delta P = 4\gamma/R$. Cette surpression dans les petites bulles a de nombreuses conséquences, par exemple pour l'initiation de la cavitation ou de l'ébullition ou pour la formation de brouillards.

3.3 Angle de mouillage macroscopique

Dans de nombreuses situations, trois phases, solide-liquide-gaz par exemple, sont présentes et leur frontière est une ligne nommée **ligne triple**. Si la ligne triple est stable, les trois forces interfaciales doivent s'équilibrer.

Prenons le cas d'une goutte liquide posée sur un substrat et notons θ l'angle de contact mesuré dans la phase liquide (figures 3.11 et 3.12). La goutte peut s'étaler plus ou moins sur le support, on dit qu'on est en situation **mouillante** si θ est faible, en situation de **mouillage partiel**, ou encore en situation **non mouillante** si θ est élevé ($90^\circ < \theta < 180^\circ$).

Un exemple historique de mouillage total est l'expérience de Benjamin Franklin qui en 1750 versa une cuillère d'huile d'olive sur un étang dans les environs de Londres. Il observa une disparition des rives créées par le vent sur une surface importante de l'étang et Lord Rayleigh put, 100 ans plus tard, déduire de cette expérience une estimation très raisonnable de la dimension typique des molécules.

L'angle θ est appelé l'angle de mouillage apparent ou angle macroscopique. En effet il n'est pas

forcément défini au niveau microscopique (il peut par exemple exister un film précurseur [8] dont l'épaisseur de l'ordre de quelques molécules est contrôlé par la pression de disjonction).

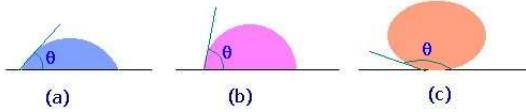


FIGURE 3.11 – Liquide partiellement mouillant une paroi et de moins en moins mouillant de (a) à (c).

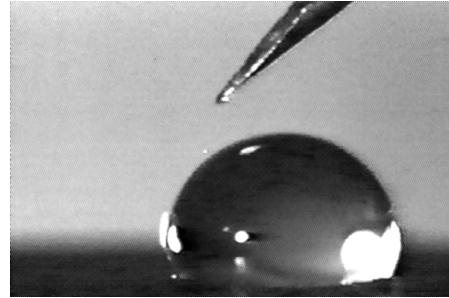


FIGURE 3.12 – Goutte d'eau sur une surface cirée.

3.3.1 Loi d'équilibre d'Young-Dupré

Pour une goutte posée sur une surface solide indéformable, l'équilibre des forces sur une longueur dl de la ligne triple de contact et dans le plan tangent à la surface s'écrit (figure 3.13) :

$$\sum df = \gamma_{SL} dl + \gamma_{LG} \cos \theta dl - \gamma_{GS} dl = 0,$$

Où γ_{ij} est le coefficient de tension de surface entre la phase i et j . Soit :

$$\boxed{\gamma_{SL} + \gamma_{LG} \cos \theta = \gamma_{GS}.} \quad (3.4)$$

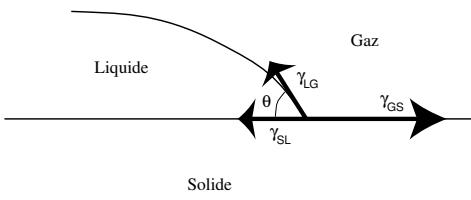


FIGURE 3.13 – Equilibre des forces de tension de surface au niveau de la ligne triple pour une goutte posée sur une surface solide (relation d'Young-Dupré).

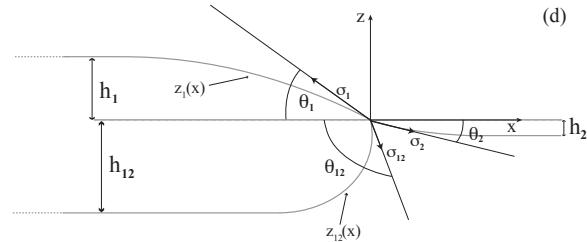


FIGURE 3.14 – Même condition d'équilibre pour une goutte posée sur un autre liquide.

C'est la loi d'Young-Dupré. La référence [15] présente en détail les subtilités au niveau microscopique de l'équilibre des forces au niveau de la ligne triple.

Comme

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{SG} - \gamma_{LS}}{\gamma_{LG}},$$

l'angle θ n'est pas défini si $\frac{\gamma_{SG} - \gamma_{LS}}{\gamma_{LG}} < -1$, on parle alors de **non mouillage** ($\theta = 180^\circ$), ou si $\frac{\gamma_{SG} - \gamma_{LS}}{\gamma_{LG}} > 1$ et l'on parle alors de **mouillage total** ($\theta = 0^\circ$). Dans le premier cas $\gamma_{LS} > \gamma_{SG} + \gamma_{LG}$

et le système préfère minimiser l'aire de contact liquide-solide qui coûte trop en énergie. C'est ce que l'on essaye de réaliser sur des vêtements imperméables en les enduisant de produit déperlant ou dans le fond des poêles en utilisant des revêtements anti-adhésifs. Dans le second cas $\gamma_{SG} > \gamma_{SL} + \gamma_{LG}$ le contact solide-gaz coûte beaucoup d'énergie et c'est le liquide qui va séparer les deux phases. C'est ce que l'on appelle le **mouillage total**. C'est par exemple le cas d'une goutte d'huile sur du verre propre. On peut aussi introduire le paramètre d'étalement S qui, s'il est positif, prédit l'étalement du liquide :

$$S = \gamma_{SG} - \gamma_{SL} - \gamma_{LG}.$$

Note : La composante transverse appliquée par l'interface gaz-liquide $\gamma_{LG} \sin \theta$ sur la surface solide (figure 3.13) est en général équilibrée par la rigidité de ce solide mais on peut parfois observer une légère déformation pour des gels très souples. Dans le cas où l'on a deux liquides et un gaz, par exemple une lentille d'huile à la surface de l'eau, il faut alors aussi écrire l'équilibre des forces verticales (figure 3.14).

3.3.2 Hystérésis de l'angle de contact

L'angle de contact dépend grandement de la propreté des surfaces et en général du mouvement présent ou passé de la goutte. S'il est mesuré pendant le mouvement de la goutte on parle d'angle de contact dynamique. Il augmente avec la vitesse d'avancée et pour les faibles angles de mouillage on peut montrer qu'il augmente comme la racine cubique de la vitesse. L'hystérésis de l'angle de contact au repos est particulièrement visible pour une goutte de pluie accrochée sur un pare-brise de voiture. Le fait que la goutte ne glisse pas malgré la pente impose que l'angle au bord le plus haut de la goutte soit plus faible que sur le bord du bas. Cette différence d'angle est lié à l'existence de rugosités, d'impuretés physiques ou chimiques sur la surface.

3.4 Effet de la gravité et longueur capillaire

Si l'on observe une grosse goutte posée sur une surface horizontale, elle n'a pas une forme sphérique, elle est aplatie. Il existe un compromis entre la gravité qui tend à abaisser le centre de gravité de la goutte et la tension de surface qui tend à rendre la goutte sphérique (figure 3.15). Ce compromis est caractérisé par un nombre sans dimension, le nombre de Bond (non, pas en l'honneur de James, mais d'un autre anglais, Wilfrid Noel Bond). Pour une goutte sphérique de rayon R , en absence de gravité, la surpression due à la loi de Laplace sera égale à $2\gamma/R$ partout à l'intérieur. En présence de gravité la variation hydrostatique de pression selon la verticale sera $\Delta p = \rho g \Delta z$. C'est parce que la pression interne dépend alors de z que la goutte se déforme. Le nombre de Bond compare cette correction hydrostatique calculée sur le diamètre de la goutte supposé sphérique $2R$ à la surpression de Laplace :

$$Bo = \frac{\rho g 2R}{2\gamma/R} = \frac{\rho g}{\gamma} R^2.$$

Ce nombre de Bond peut aussi s'écrire comme le rapport de deux longueurs $Bo = (R/l_c)^2$. La longueur l_c est appelée *longueur capillaire* :

$$l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}.$$

(3.5)

La goutte restera parfaitement sphérique si $Bo \ll 1$. Pour $Bo = 1$ les effets de gravité et de tension de surface sont comparables et la goutte est significativement déformée. Si $R \gg l_c$ les effets de gravité dominent et la goutte ... est une flaque.

- Pour de l'eau dans l'air par exemple on trouve $l_c \approx 3$ mm. On retrouve cette taille caractéristique en regardant la déformation de la surface de l'eau au bord d'un verre de rayon R (figure 3.16). Loin du bord la surface est horizontale car on peut négliger la force capillaire ($R \gg l_c$) mais près de la paroi verticale la tension de surface fait monter l'eau qui mouille partiellement le verre ($\theta < 90^\circ$).
- On retrouve aussi cette longueur capillaire $l_c \approx 3$ mm dans la taille typique des gouttes d'eau (figure 3.17), ou des premières rides observées sur l'eau lorsque le vent se lève.



FIGURE 3.15 – Déformation sous l'effet de la gravité de gouttes de mercure de taille croissante. D'après [12] p. 37.

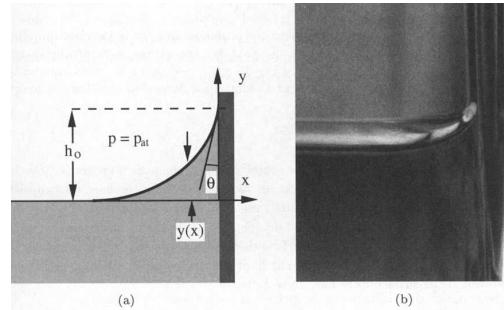


FIGURE 3.16 – Ménisque sur le bord d'un verre d'eau. D'après [12] p. 39.

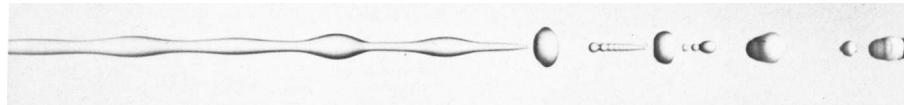


FIGURE 3.17 – Instabilité de Plateau-Rayleigh d'un jet d'eau tombant (ici de gauche à droite) dans le champ de gravité et qui se fractionne en gouttes.

3.5 La mesure du coefficient de tension superficielle

Il existe de nombreuses méthodes pour mesurer la tension de surface, basées sur la mesure d'une force ou d'une forme.

3.5.1 La loi de Jurin (1717)

Si on plonge un tube fin (on parle de tube « capillaire », c'est-à-dire dont le diamètre intérieur est de l'ordre de grandeur du diamètre d'un cheveu) dans un liquide, *à l'équilibre* la surface du liquide dans le tube n'est pas au même niveau qu'à l'extérieur (figures 3.18 et 3.19). C'est l'illustration classique des forces capillaires, autre nom des forces de tension interfaciale. James Jurin était un médecin anglais qui décrivit ce phénomène en 1717.

Le calcul de la hauteur h d'ascension capillaire se fait en calculant la dépression Δp qui existe au-dessous du ménisque : $\Delta p = 2\gamma/r$ où r est le rayon de courbure de la calotte sphérique que forme le ménisque. Si R est le rayon du tube et θ l'angle de mouillage on a $R = r \cos \theta$ et donc



FIGURE 3.18 – Illustration de la loi de Jurin ([23], p. 13). Plus le tube est fin plus le liquide monte haut.

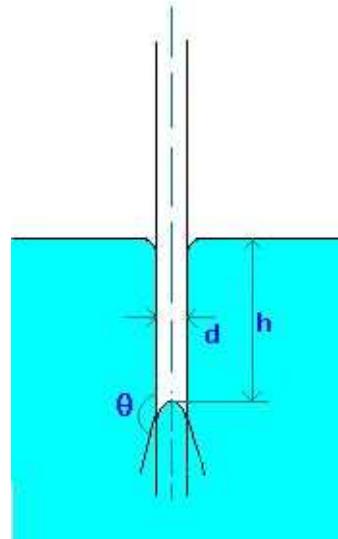


FIGURE 3.19 – Cas d'un liquide non mouillant comme le mercure montrant une ascension négative.

$\Delta p = 2\gamma \cos \theta / R$ (car $r < l_c$). Cette dépression tire la colonne de fluide vers le haut et à l'équilibre on a donc $\Delta p = \rho gh$. Finalement

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g} \frac{1}{R}.$$

A.N. Avec de l'eau, si $R = 0,1$ mm, on trouve $h = 14$ cm. La mesure de h est donc une mesure de la tension de surface si on connaît l'angle de mouillage θ et le diamètre du capillaire.

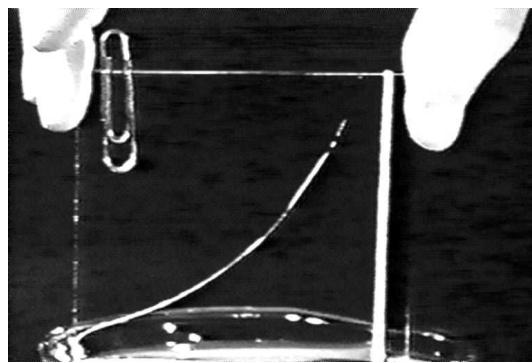


FIGURE 3.20 – Ascension capillaire dans le dièdre formé par deux plaques de verre séparées d'un côté de l'épaisseur d'un trombone.

L'ascension capillaire est limitée pour l'eau à environ 10 mètres, ce qui correspond à un tube de rayon de l'ordre d'un micromètre. En effet, au-delà de cette hauteur, la pression sous le ménisque deviendrait inférieure à la pression de vapeur saturante et le liquide s'évaporerait. Ce phénomène limitant intervient dans la montée de la sève dans les arbres et est, en partie, la cause de leur taille

maximale de l'ordre de quelques dizaines de mètres.

Exercice : Si on fait l'expérience non pas dans un tube, mais entre deux plaques de verre au contact d'un côté mais légèrement espacées de l'autre (figure 3.20) quelle sera la forme de la surface de la surface libre ?

3.5.2 Lame de Wilhelmy et anneau de Noüy

Les tensiomètres de Wilhelmy et de Noüy sont basés sur la mesure de la force d'arrachement qu'il faut exercer sur une lame ou un anneau de platine pour la sortir lentement du liquide. Juste avant que le film liquide qui tire l'objet vers le bas ne casse, la balance mesure une force (de l'ordre du centième de Newton) proportionnelle à la tension de surface (figures 3.21 et 3.22) : $\gamma = F/(p \cos \theta)$ si p est le périmètre de la lame. On peut aussi mesurer par cette méthode des forces interfaciales entre deux liquides.

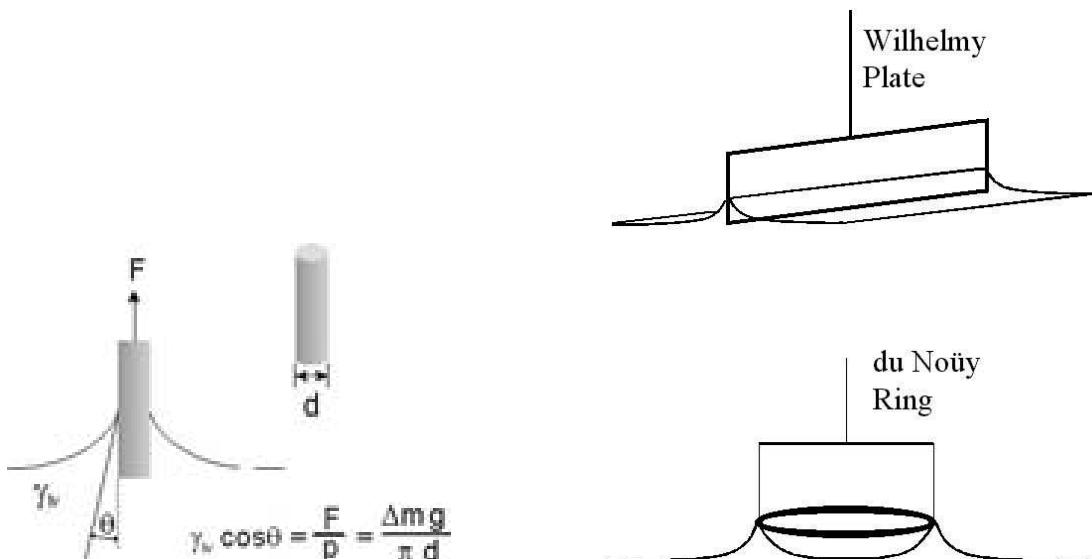


FIGURE 3.21 – Mesure de la tension de surface par la méthode de la lame de Wilhelmy.

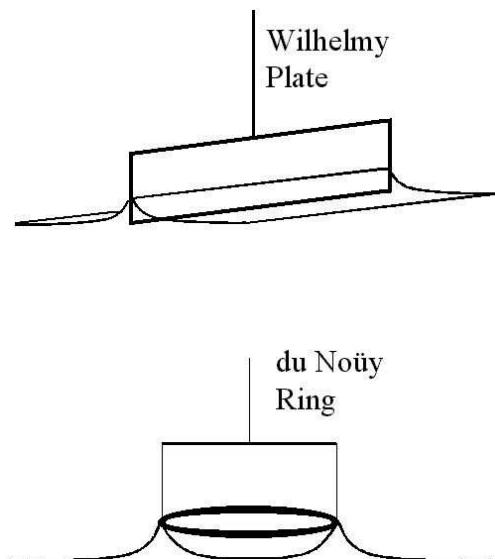


FIGURE 3.22 – Méthode de la lame de Wilhelmy et de l'anneau de Noüy.

3.5.3 Méthode de la goutte pendante

Juste avant qu'une goutte ne se détache d'un robinet, son poids est équilibré par la tension de surface (loi de Tate). La mesure du volume de la goutte ou de son poids est donc aussi une mesure précise de la tension de surface (figures 3.23 et 3.24) et cette méthode porte le nom de stalagmométrie. Là aussi, la méthode permet de mesurer le coefficient de tension de surface entre deux liquides.

On peut aussi mesurer le profil complet de la goutte et le comparer au résultat de l'intégration d'une équation intégro-différentielle dont le seul paramètre est la longueur capillaire. Pour cela on écrit dans chaque plan horizontal l'équilibre des forces entre le poids de la goutte sous ce plan, les forces de pressions de Laplace à l'interface et la tension interfaciale ([8] p. 59).

3.5.4 Méthode de la goutte tournante

Cette méthode est utilisée pour mesurer les faibles tensions de surface ([8] p. 60).

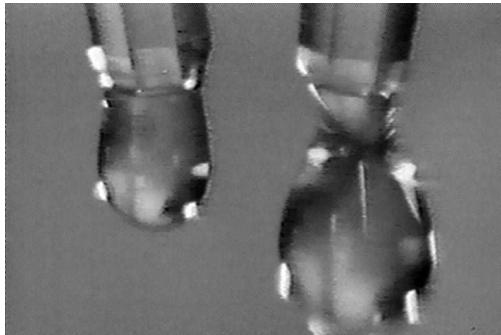


FIGURE 3.23 – Une goutte d’alcool (à gauche) et une goutte d’eau (à droite) toutes les deux sur le point de se détacher.



FIGURE 3.24 – Détachement d’une goutte pendante ([23], p. 8).

3.6 Effet de la température sur la tension de surface (effet Marangoni)

Le coefficient de tension de surface est en général une fonction décroissante de la température, en effet elle s’annule au point critique (liquide et vapeur ne font plus qu’un, ils sont alors en quelque sorte miscibles). Cette variation qui porte le nom d’effet Marangoni explique les deux expériences suivantes (figures 3.25 et 3.26). Les endroits chauds, de plus faible tension de surface, sont des zones de divergence de l’écoulement de surface et conduisent donc à l’amincissement de la couche fluide, alors qu’une zone froide, de forte tension interfaciale, est une zone de convergence et donc d’épaisseur.

C’est aussi un effet important pour la mise en mouvement d’un liquide avec surface libre chauffé par le bas (convection de Bénard-Marangoni).

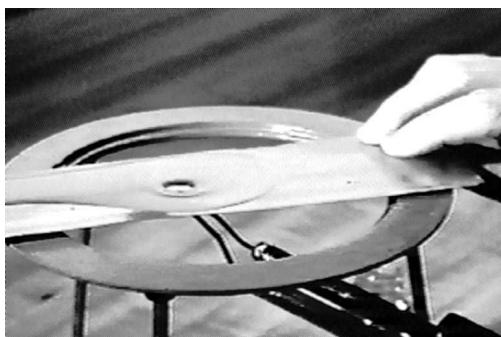


FIGURE 3.25 – Effet d’un point chaud fixe sous une couche mince de liquide.

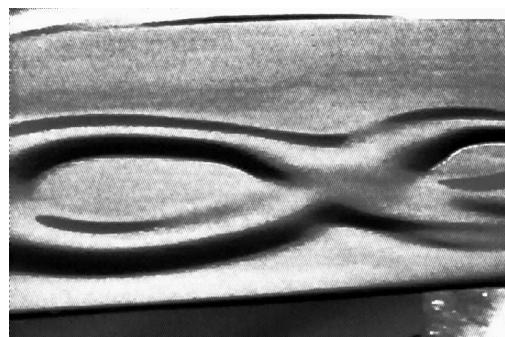


FIGURE 3.26 – Effet d’un point froid se déplaçant sous une couche mince de liquide.

3.7 Les tensioactifs

Les tensioactifs sont très utilisés dans l’industrie pour fabriquer et stabiliser les mousses, ou pour contrôler l’étalement des liquides.

3.7.1 Pourquoi met-on du savon pour se laver les mains ?

Le savon est un tensioactif pour l'eau, c'est-à-dire un corps dont la présence diminue la tension de surface du liquide. Le plus souvent il s'agit de molécules amphiphiles, c'est-à-dire des molécules dont une extrémité préfère être entourée de molécules d'eau et l'autre refuse au contraire cette proximité. Ces molécules se mettent de préférence aux interfaces et elles sont donc très efficaces, même en faible quantité, pour diminuer la tension de surface (figure 3.27). En réalité il existe toujours un équilibre thermodynamique entre les molécules adsorbées en surface et des molécules présentes dans le liquide ([3] chap. 16). C'est cette diminution de la tension de surface qui rend l'eau savonneuse plus « mouillante » (l'angle θ est plus faible) et donc plus efficace pour détacher et dégraisser.

Dans un premier temps, plus on augmente la quantité de tensioactif plus la tension de surface diminue, jusqu'à un certain point appelé la concentration micellaire critique (c.m.c.) où les molécules amphiphiles isolées déjà présentes à l'intérieur du liquide atteignent une concentration maximale et commencent à se regrouper sous forme de globules appelés *micelles*. A partir de la c.m.c., la tension de surface ne décroît plus et les molécules rajoutées augmentent seulement la taille et le nombre de micelles (figure 3.28).

3.7.2 Comment expliquer la stabilité des membranes de savon ?

Une membrane de savon est en réalité une membrane d'eau avec des molécules de tensioactif sur ses deux surfaces. Si une membrane de savon est rapidement déformée et donc étirée localement, la concentration surfacique de savon dans la partie étirée sera plus faible, la tension de surface locale y devient plus élevée qu'ailleurs et il apparaît donc une force de rappel qui tend à lutter contre la déformation initiale. Cet effet élastique, qui n'existe pas pour une membrane d'eau pure, explique la stabilité et la relative longévité des bulles de savon.

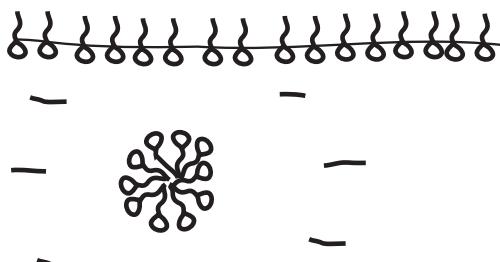


FIGURE 3.27 – Localisation des molécules amphiphiles : à la surface de l'eau ou dans des micelles.

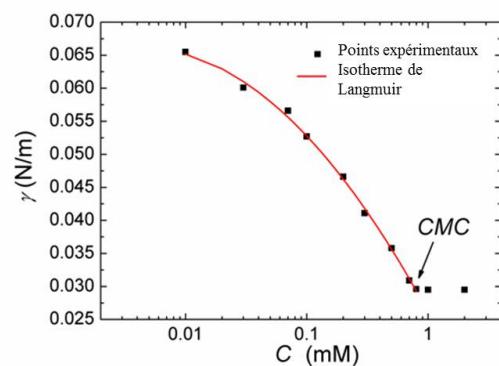


FIGURE 3.28 – Evolution du coefficient de tension de surface en fonction de la concentration C en tensioactif C12 dans de l'eau (Thèse E. Rio).

3.8 Dynamique de quelques écoulements contrôlés par la tension de surface

1. **Rétraction de Taylor-Culick.** On s'intéresse à l'ouverture rapide d'un trou dans une membrane de savon horizontale sous l'action de la tension de surface. En supposant que toute la masse se retrouve dans un bourrelet, montrer qu'après un transitoire ce bourrelet avance à vitesse constante dite de Taylor-Culick que l'on calculera [Culick, F.E.C. 1960 *Comment on a ruptured soap film*. J. Appl. Phys. **31** 1128-1129].
2. **Imbibition d'un milieu poreux ou d'un tube capillaire.** Pour un tube horizontal ou vertical trouver la cinétique d'envahissement par le liquide mouillant pour un écoulement parfait et pour un fluide très visqueux (loi de Washburn [8] p.130).
3. **Dynamique d'étalement d'une goutte de liquide mouillant une surface solide.** On trouve des lois en $t^{1/8}$ et $t^{1/10}$ selon la taille de la goutte (lois de Tanner [8] p. 149).
4. **Evaporation d'une goutte de café.** Une goutte en forme de calotte sphérique et contenant des particules en suspension est posée sur une table. En supposant un flux d'évaporation constant, montrer que dans le référentiel de la ligne triple il existe un écoulement dans la goutte. En déduire pourquoi il reste une auréole sur la table de la cuisine [Deegan *et al.* (1997), *Capillary flow as the cause of ring stains from dried liquid drops*, Nature, **389** (6653), 827-828].
5. **Divergence de la dissipation visqueuse au voisinage de la ligne triple d'une goutte qui avance.** Dessiner le profil de vitesse du fluide dans le référentiel où la ligne triple est immobile. Calculer les cisaillements au voisinage de la ligne triple (on peut supposer l'angle de contact petit) et en déduire la dissipation d'énergie. Montrer qu'il existe une divergence de cette dissipation à la ligne triple. Comment résoudre ce problème ([8] p. 142) ?

3.9 Pour en savoir plus

- [8] *Gouttes, bulles, perles et ondes*, P.-G. de Gennes, F. Brochard-Wyart, D. Quéré, Belin (2006).
- [15] *Why is surface tension a force parallel to the interface?*, A. Marchand, J. H. Weijs, J. H. Snoeijer, and B. Andreotti, American Journal of Physics, 79(10) :999–1008, 2011.
- [3] *Liquides. Solutions, dispersions, émulsions, gels*, B. Cabane et S. Hénon, Belin (2003).
- *Les mousses : structure et dynamique*, I. Cantat *et al.*, Belin (2010).
- *1805-2005 deux siècles de découvertes sur la capillarité*, Y. Pomeau, séminaire disponible en vidéo sur <http://savoirs.ens.fr/expose.php?id=194>
- *Surface Tension in Fluid Mechanics*, Lloyd Trefethen, National Committee for Fluid Mechanics Films, <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>

3.10 Quelques questions possibles

1. Expliquer le lien entre la tension de surface et les potentiels thermodynamiques.
2. Expliquer pourquoi le coefficient de tension de surface décroît avec la température.
3. Pourquoi la tension de surface n'est pas une force perpendiculaire à la surface ?
4. La longueur capillaire dépend assez peu des fluides. Pouvez-vous l'expliquer ?
5. Comment caractériser le fait qu'un liquide s'étale plus ou moins bien sur un solide ? Qu'appelle-t-on le paramètre d'étalement ?

6. Pourquoi une serviette est-elle râche après séchage ?
7. Existe-t-il une limite à l'ascension dans la loi de Jurin ? Existe-t-il un rapport avec la hauteur des arbres ?
8. Pourquoi met-on du savon pour se laver les mains ?
9. Pourquoi l'angle d'avancé d'un ménisque est-il plus grand que l'angle de reculé ? Pouvez-vous en déduire une explication du fait qu'une goutte d'eau peu restée accrochée sur une vitre inclinée ?
10. Pourquoi faut-il un sable un peu d'humidité, mais pas trop, pour faire de beaux châteaux de sable sur la plage ?
11. **Exercice :** Décrire l'écoulement au voisinage d'une ligne triple d'une goutte qui avance. Estimer le gradient de vitesse et en déduire la dissipation d'énergie à une distance x de la ligne triple. Que ce passe-t-il lorsque x tend vers 0 ?

Chapitre 4

Leçon de Physique n°14 : Ondes acoustiques

Marc Rabaud, version du 19 décembre 2019.

Sommaire

4.1	Équation d'onde de l'acoustique linéaire	86
4.1.1	Cas des ondes planes progressives monochromatiques (OPPM)	88
4.2	Célérité des ondes acoustiques dans les gaz parfaits	88
4.2.1	Mirages acoustiques	89
4.3	Energie acoustique	90
4.3.1	Densité d'énergie acoustique	90
4.3.2	Puissance acoustique \vec{I}_a	91
4.3.3	Conservation de l'énergie acoustique	91
4.3.4	Pression acoustique	91
4.3.5	Sensibilité de l'oreille humaine	92
4.4	Propagation des ondes acoustiques	93
4.4.1	Impédance acoustique	93
4.4.2	Propagation à travers un dioptre acoustique : coefficient de réflexion et de transmission.	94
4.4.3	Atténuation des ondes acoustiques	95
4.5	Diverses sources acoustiques	96
4.5.1	Onde sphérique ou monopôle acoustique	96
4.5.2	Dipôle acoustique	96
4.5.3	Effet Doppler	97
4.5.4	Diffraction du son	97
4.6	Acoustique musicale	97
4.6.1	Tuyaux sonores	97
4.6.2	Temps de réverbération d'une salle	98
4.6.3	Résonateur de Helmholtz	98
4.7	Ondes acoustiques dans les solides	98
4.8	Quelques questions possibles	99
4.9	Pour en savoir plus :	100

Les ondes acoustiques (ou sonores dans le domaine audible) sont des ondes de pression (on peut les enregistrer avec un simple microphone et les observer sur un oscilloscope) et de densité. Elles se propagent dans le volume du fluide (ou du solide) à cause d'une certaine élasticité de la matière et donc d'une compressibilité non nulle. Il n'y a pas besoin de forces externes pour qu'elles se propagent, contrairement aux ondes de surface gravito-capillaires, ou aux ondes internes (fluides stratifiés) ou aux ondes inertielles dans les fluides en rotation. Par contre elles ont besoin d'un support matériel pour pouvoir se propager contrairement aux ondes électromagnétiques. Nous verrons que ce sont des ondes longitudinales (et non transverses) et peu dispersives (toutes les ondes ont la même célérité). La figure 4.1 présente une simulation d'une onde de compression radiale générée par l'oscillation radiale d'une sphère (voir vidéo en ligne). On peut aussi observer cette propagation rapide d'une onde de compression sur un long ressort hélicoïdal (type "Slinky") après avoir généré une brusque compression localisée.

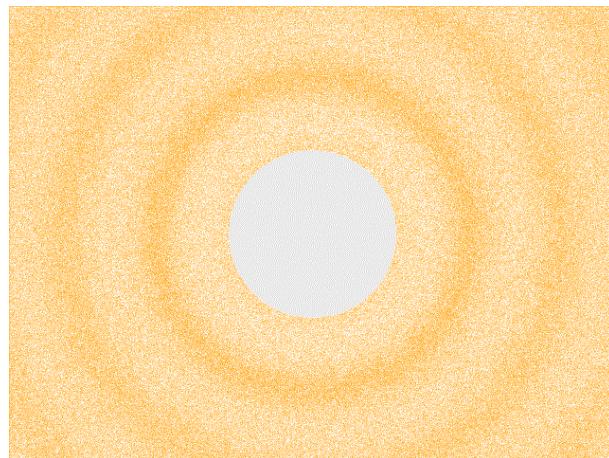


FIGURE 4.1 – Ondes acoustiques générées par une sphère oscillante. Les variations de densité sont très largement exagérées ! (<https://commons.wikimedia.org/wiki/Son>)

4.1 Equation d'onde de l'acoustique linéaire

Nous utiliserons les hypothèses suivantes :

1. Le fluide support de l'onde est au repos (sans écoulement hydrodynamique) avant l'arrivée des ondes sonores. La pression, masse volumique et température à l'équilibre thermodynamique (au repos) valent respectivement p_0 , ρ_0 , T_0 et ne dépendent donc pas de la position.
2. Il y a conservation de la masse du fluide, soit localement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.1)$$

3. Nous négligerons les forces volumiques (e.g. la force de gravité).

4. La dissipation est négligeable. Le son peut en effet se propager sur des distances grandes devant sa longueur d'onde, sans beaucoup perdre en amplitude. (La même hypothèse est faite pour les ondes de surface gravito-capillaires et conduit à un champ de vitesse irrotationnel.)
5. Nous supposerons que les ondes sont de faible amplitude (approximation linéaire : faible modification de la pression moyenne ou de la densité moyenne au passage de l'onde, faible vitesse hydrodynamique) et l'on introduit les petites corrections par rapport aux valeurs d'équilibre :

$$p(\vec{r}, t) = p_0 + p'(\vec{r}, t) \quad (4.2)$$

et

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0 + \rho'(\vec{r}, t). \quad (4.3)$$

Dans ces conditions, l'équation d'Euler qui donne l'évolution de la vitesse fluide v induite par l'onde acoustique peut se linéariser et devient :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p'. \quad (4.4)$$

Au même ordre d'approximation, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div}(\vec{v}) = 0. \quad (4.5)$$

Pour résoudre le problème il faut encore une équation, l'équation constitutive qui relit l'évolution de la masse volumique à la pression. Notons $p = f(\rho)$ cette équation, qui dépendra du milieu (solide, liquide ou gaz). En développant cette équation au premier ordre, $p = p_0 + \frac{\partial p}{\partial \rho}|_{\rho_0} \rho'$, on obtient :

$$p' = c^2 \rho' \quad (4.6)$$

avec $c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}|_{\rho_0}$. Si c^2 est réel, les oscillations de pression et de masse volumique sont en phase. (Ce n'est pas forcément le cas pour les oscillations de la vitesse du fluide et de la pression, sauf pour des ondes planes.) Attention, il convient de bien définir la condition de dérivation (transformation isentropique, isotherme ou autres ...). Nous verrons que c'est en général une transformation isentropique (i.e. adiabatique réversible) $S = Cste$ qu'il convient de prendre. La quantité c sera la célérité des ondes acoustiques. On peut aussi introduire la **compressibilité isentropique** :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S \quad (4.7)$$

et l'on a alors la relation :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}. \quad (4.8)$$

En prenant la divergence de l'Eq. 4.4 et la dérivée temporelle de l'Eq. 4.5 on peut éliminer la vitesse du fluide et obtenir une **équation d'onde** pour la pression :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 p' = 0.$$

(4.9)

On obtient la même équation d'onde pour la masse volumique (en utilisant l'Eq. 4.6) ou pour la vitesse (après un peu plus de calcul). Cette équation porte aussi le nom d'équation de d'Alembert.

Ces équations d'ondes admettent pour solution des ondes progressives, par exemple des ondes planes (mais pas uniquement) pour lesquelles la phase est constante dans un plan. Par exemple : $p' = p_1(x - ct) + p_2(x + ct)$. Les deux directions de propagation sont évidemment possibles.

L'expression de la célérité c (Eq. 4.8) ne dépendant pas du nombre d'onde, cela signifie que le milieu est **non dispersif** (toutes les fréquences ou longueurs d'ondes se propagent à la même vitesse), contrairement par exemple aux ondes gravito-capillaires qui se propagent à la surface d'un liquide. La vitesse de groupe est alors égale à la vitesse de phase : $v_g = v_\varphi = c$. Le fait qu'une conversation reste compréhensible même lorsqu'on s'éloigne de l'orateur est bien en accord avec le fait que les ondes sonores de différentes fréquences arrivent au niveau de l'auditeur avec les mêmes déphasages, donc que les ondes ne sont pas dispersives dans l'air.

Remarque : Ce n'est pas parce qu'une quantité se propage comme une onde qu'il existe forcément une équation d'onde sous-jacente pour cette quantité (e.g. cas des ondes de surface).

Quelques valeurs expérimentales :

- vitesse du son dans l'air sec : 331 m/s à 0°C, à 343 m/s à 20°C.
- vitesse du son dans l'hélium : 1007 m/s à 20°C.
- vitesse du son dans l'eau : 1480 m/s à 20°C.

Questions :

1. A quelle condition peut-on négliger dans l'équation d'Euler son terme non linéaire devant le terme instationnaire ? On pourra introduire le nombre de Mach. Cette condition sera à vérifier a posteriori.
2. Justifier que l'on peut très raisonnablement négliger les forces volumiques dans l'équation 4.4.
3. Conditions pour qu'un écoulement fluide puisse être considéré comme incompressible. S'il existe des ondes acoustiques c'est que le milieu est compressible, mais les effets de compressibilité associés à ces ondes sont extrêmement faibles. Un écoulement hydrodynamique dans le fluide pourra raisonnablement être considéré comme incompressible si les variations de densité reste faible, i.e si $\Delta\rho/\rho_0 \ll 1$. En estimant un ordre de grandeur des variations de pression, montrer que cette condition est équivalente à la condition $v \ll c$.
4. Estimer ρ'/ρ_0 dans l'air pour une onde sonore dont le niveau sonore est 100 dB.

4.1.1 Cas des ondes planes progressives monochromatiques (OPPM)

Pour des ondes planes progressives et monochromatiques on peut écrire que toutes les variables évoluent proportionnellement à $\cos(kx - \omega t)$, où k est le nombre d'onde, x la direction de propagation, et ω la pulsation de l'onde. Pour toutes les expressions linéaires on peut utiliser la notation complexe $\exp i(kx - \omega t)$. La vitesse de phase est alors égale à la vitesse du son et l'on a donc : $\omega/k = c$.

Pour des OPPM, l'équation 4.4 donne

$$p'(x, t) = \rho_0 c v(x, t). \quad (4.10)$$

Les oscillations de la vitesse sont donc en phase avec celles de la pression et de la densité. Ce n'est pas vrai dans le cas général, par exemple pour des ondes harmoniques, progressives mais sphériques.

4.2 Célérité des ondes acoustiques dans les gaz parfaits

Pour un gaz parfait $PV = nRT$, où n est le nombre de mole et R la constante des gaz parfaits ($R = N_A k_B \approx 8,314 \text{ J/K/mol}$). En introduisant la masse molaire M , la masse volumique s'écrit

$\rho = m/V = nM/V$ et on a donc la relation :

$$P = \rho \frac{RT}{M}. \quad (4.11)$$

Si le passage d'une onde sonore était un processus isotherme, la célérité des ondes sonores dans les gaz serait $c = \sqrt{\frac{RT}{M}}$, soit environ 288 m/s pour l'air dans les conditions normales, valeur nettement trop basse par rapport à l'expérience. En fait les transformations sont assez rapides et sont donc plutôt adiabatiques. La relation classique de la thermodynamique des gaz parfaits pour de telles transformations, $PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$, conduit à la relation $P = P_0 (\frac{\rho}{\rho_0})^\gamma$. Le paramètre $\gamma = c_p/c_v$ est le rapport des deux capacités calorifiques et vaut $\gamma \approx 7/5 = 1,4$ pour l'air sec (gaz parfait diatomique). La célérité de l'onde acoustique dans un gaz parfait s'écrit donc :

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT_0}{M}}. \quad (4.12)$$

La relation précédente nous montre que la célérité du son dans l'air ne dépend que de la température et pas de la pression de l'air. La vitesse du son dans l'air passe par exemple de 331,5 m/s à 0°C à 349,2 m/s à 30°C. Ainsi le "mur du son" ne correspond pas à la même vitesse pour un avion au voisinage du sol ou en altitude, mais pas parce que la pression décroît avec l'altitude mais parce que la température est plus faible en altitude.

La table 4.1, donne la relation entre fréquences acoustiques et longueurs d'onde dans l'air à 20°C. Par exemple la note "La 440" correspond à une longueur d'onde de 77 cm.

Fréquence (Hz)	1	20	200	2×10^3	20×10^3	2×10^6
Longueur d'onde (m)	340	17	1,7	0,17	17×10^{-3}	170×10^{-6}

TABLE 4.1 – Longueurs d'onde dans l'air pour différentes fréquences, des infrasons aux ultrasons. Les valeurs centrales (non grises) correspondent aux fréquences audibles pour l'homme.

Questions :

1. La célérité du son dans un gaz est légèrement inférieure à la vitesse quadratique moyenne des molécules ($u^* = \sqrt{3 \frac{RT}{M}}$, relation qu'il faut savoir retrouver). Est-ce logique ? Dans l'eau ou dans les solides la célérité du son est nettement plus grande que u^* . Pourquoi ? Voir réponse dans le Walton [22] ou le Feynman [11].
2. L'hypothèse adiabatique réversible est-elle toujours vraie ? Pour répondre, comparer le temps de diffusion thermique sur une longueur caractéristique avec le temps de passage de l'onde. On donne la diffusivité thermique de l'air $D_{th} = 20 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$. Dans quel domaine de fréquence cette hypothèse peut-elle être éventuellement mise en défaut ? Pourquoi la diffusion thermique conduit-elle à une atténuation supplémentaire des ondes ?

4.2.1 Mirages acoustiques

En acoustique, comme en optique lorsque l'indice optique varie spatialement, on peut avoir des phénomènes de réfraction, i.e. de rotation des surfaces d'ondes. Cela peut conduire à des mirages acoustiques.

Questions :

1. **Notion de surface d'onde.** Dans l'air la célérité du son augmente avec la température (cf. Eq. 4.12). Décrire la propagation sonore dans le cas d'un sol chaud (en été) et d'un sol froid (en hivers) et en déduire qu'il est plus agréable (au niveau sonore :-) de faire une sieste sur la plage en été qu'en hivers !
2. **Effet du vent sur la propagation des sons.** La vitesse du vent est le plus souvent très faible devant la célérité du son. Pourtant le vent à un effet important sur la portée des sons. Comment l'expliquer ? Dessiner le profil du vent dans la couche limite atmosphérique au-dessus du sol. En déduire l'effet sur la trajectoire des ondes sonores se propageant avec, ou contre, le vent. La première explication de ce phénomène est dûe à Stokes [18].
3. **Propagation guidée :** exemple de la communication des cétacés en mer. Il existe vers - 500 m une bande de minimum de vitesse du son, qui piège les sons par réfraction. Cela permet des communications à très grandes distances (plusieurs dizaines de kilomètres) car le son se propage beaucoup mieux dans l'eau que dans l'air (moins de dissipation). Inversement il existe des profondeurs où la vitesse du son est maximum. Expliquer pourquoi ces profondeurs sont utilisées par les sous-marins pour éviter d'être détectés par les sonars ?

http://www.pourlascience.fr/ewb_pages/a/article-mirages-acoustiques-24883.php.

4.3 Energie acoustique

4.3.1 Densité d'énergie acoustique

La densité d'énergie e (énergie par unité de volume) de l'onde acoustique est composée d'une contribution liée à l'énergie cinétique $e_c = \frac{1}{2}\rho_0v^2$ et d'une contribution liée à l'énergie potentielle d'origine élastique $e_p = \frac{1}{2}\frac{p'^2}{\rho_0c^2} = \frac{1}{2}\chi_S p'^2$. Démontrons le.

Ecrivons que la variation d'énergie dans un volume fixe par unité de temps est égale à la puissance des forces de pression sur les parois du volume :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V e d\tau = - \oint_S p' \vec{v} \cdot d\vec{S} = - \iiint_V \operatorname{div}(p' \vec{v}) d\tau \quad (4.13)$$

soit au niveau local,

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\operatorname{div}(p' \vec{v}) = -p' \operatorname{div}(\vec{v}) - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p'.$$

Les équations 4.5 et 4.6 nous permettent d'écrire : $\operatorname{div}(\vec{v}) = -\frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p'}{\partial t}$. L'équation d'Euler (Eq. 4.4) multipliée par la vitesse particulière nous donne :

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p' = -\frac{\rho_0}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t}.$$

Soit finalement

$$\operatorname{div}(p' \vec{v}) = p' \operatorname{div}(\vec{v}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p' = -\frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p'^2}{\partial t} - \frac{\rho_0}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} = -\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Soit en intégrant :

$$e = \frac{1}{2}\rho_0v^2 + \frac{1}{2}\frac{p'^2}{\rho_0c^2}$$

(4.14)

La densité d'énergie potentielle e_p correspond au travail des forces de pression pour passer de l'état (ρ_0, p_0) à l'état $(\rho_0 + \rho', p_0 + p')$. Pour le retrouver on peut aussi écrire que $de_p = -p'dV/V$.

Question : Pour une onde plane, montrer que $e_c(x, t) = e_p(x, t)$, et que donc les deux densités d'énergie oscillent en phase.

4.3.2 Puissance acoustique $\vec{\Pi}_a$

On définit la "puissance acoustique surfacique" $\vec{\Pi}_a$, parfois aussi appelée "intensité acoustique" comme le produit de la pression acoustique par la vitesse particulaire :

$$\vec{\Pi}_a = p' \vec{v} \quad (4.15)$$

Cette quantité représente la puissance (travail par unité de temps) des forces de pression par unité de surface (voir Eq. 4.13). Attention, cette puissance acoustique est un vecteur ! Elle joue le même rôle que le vecteur de Poynting en électromagnétisme. Elle est dirigée dans la direction de propagation et caractérise le flux d'énergie.

La puissance \mathcal{P}_p des forces de pression qui traverse une surface \mathcal{S} quelconque s'écrit :

$$\mathcal{P}_p = \iint_{\mathcal{S}} p' \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi}_a \cdot d\vec{S}. \quad (4.16)$$

C'est le flux du vecteur puissance acoustique à travers la surface. $\vec{\Pi}_a$ s'exprime donc en W/m^2 . Pour des OPPM, comme $p' = \rho_0 cv$, on obtient l'égalité : $\Pi_a = ce = \rho_0 cv^2 = \frac{p'^2}{\rho_0 c}$.

4.3.3 Conservation de l'énergie acoustique

En utilisant le vecteur puissance acoustique surfacique, la conservation de l'énergie (Eq. 4.13) s'écrit :

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{\Pi}_a \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} e d\tau = 0. \quad (4.17)$$

On obtient donc l'écriture locale de la conservation de l'énergie :

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}(\vec{\Pi}_a) = 0}. \quad (4.18)$$

4.3.4 Pression acoustique

Comme la pression dépend du temps on définit la "pression acoustique" comme la pression efficace :

$$P_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T p'^2(t) dt}, \quad (4.19)$$

en prenant la limite à grand temps pour un signal quelconque ou la période temporelle pour un signal périodique. C'est donc la valeur RMS de la pression. Pour une onde monochromatique on obtient : $P_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} p'_{max}$.

4.3.5 Sensibilité de l'oreille humaine

L'oreille humaine, dont les différents éléments sont représentés sur la Fig. 4.2, perçoit les sons dans la gamme de fréquence 20 Hz - 20 kHz environ. Environ car cela dépend des personnes et en particulier de leur âge (perte des aigus en premier). Au-dessous de 20 Hz on parle d'infrasons et au-delà de 20 kHz d'ultrasons (Fig. 4.3 et Table 4.1).

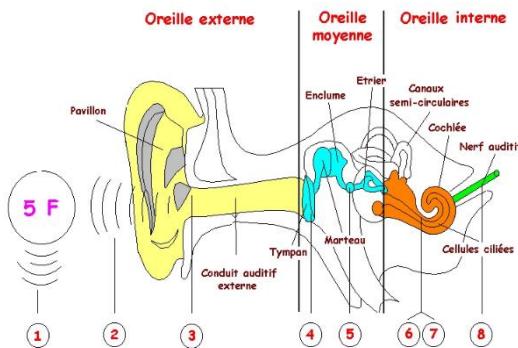


FIGURE 4.2 – Schéma des différentes parties de l'oreille humaine (<https://www.coquelicot.asso.fr/surdite>).

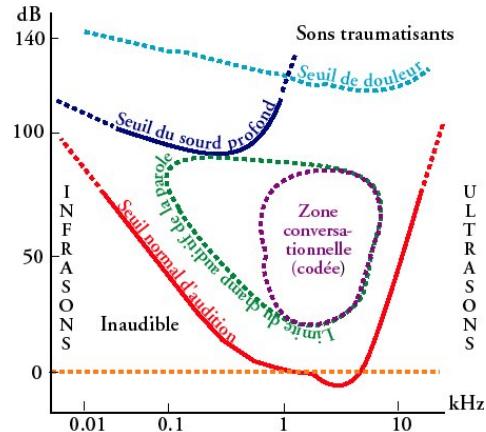


FIGURE 4.3 – Audiogramme représentant dans un plan énergie/fréquence les différents zones de l'audition humaine (<https://www.coquelicot.asso.fr/surdite>).

Pour mesurer les niveaux sonores, on les compare usuellement à une pression acoustique de référence, la limite d'audition à 1 kHz : $P_{ref} = 2 \times 10^{-5}$ Pa. Cette pression correspond donc à une puissance de référence dans l'air $\Pi_{ref} = 10^{-12}$ W/m². C'est l'une des rares échelles logarithmiques utilisées (avec l'échelle de Richter en sismologie ...), utile car la sensibilité de l'oreille est plutôt logarithmique. Heureusement car sinon, soit on ne pourrait entendre un murmure, soit on ne pourrait supporter un bruit un peu fort comme celui d'une moto. Vous trouverez plus de détails sur le fonctionnement assez subtil de l'oreille interne, de la cochlée et de son rôle de filtre actif sur le site <http://www.cochlea.eu/cochlea/fonctionnement>.

On définit un **niveau sonore** (SPL pour Sound Pressure Level) en décibel N_{dB} par :

$$N_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{\Pi_{eff}}{\Pi_{ref}} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{P_{eff}}{P_{ref}} \right). \quad (4.20)$$

Il est facile de montrer sur un smartphone ce que représente un niveau sonore en dB. Il existe de nombreuses applications pour le montrer en temps réel.

L'oreille humaine distingue assez mal les différences de puissances sonores (± 3 dB, soit 30% en puissance). Elle est par contre assez sensible au changement de fréquence, et certains musiciens arrivent à distinguer le dixième de ton, soit une variation relative de fréquence de 2 %.

Questions :

1. Calculer la sensibilité en déplacement au seuil d'audition de l'oreille. Elle est impressionnante, mais elle reste toutefois largement inférieure à la sensibilité des détecteurs d'ondes gravitationnelles Virgo et Ligo (10^{-19} m) !

Décibel (dB)	0	20	100
Pression (Pa)	2×10^{-5}	2×10^{-4}	2
v (m/s) à 1 kHz	60×10^{-9}	$0,6 \times 10^{-6}$	6×10^{-3}
Amplitude de déplacement à 1 kHz (m)	60×10^{-12}	$0,6 \times 10^{-9}$	6×10^{-6}

TABLE 4.2 – Quelques ordres de grandeurs pour différentes puissances acoustiques.

2. Sensibilité directionnelle aux sons. Comment fonctionne notre perception de la direction d'un son ? A-t-on la même perception pour des sons graves ou aigus ? Pourquoi ?

4.4 Propagation des ondes acoustiques

4.4.1 Impédance acoustique

L'impédance acoustique est une quantité qui va permettre de caractériser la transmission et la réflexion des ondes acoustiques à travers une surface. Elle est définie par la relation :

$$Z = \frac{p'}{\vec{v} \cdot \vec{n}} \quad (4.21)$$

où \vec{n} est la normale à la surface. (L'équation 4.21 définit plus précisément *l'impédance acoustique spécifique* car il existe d'autres définitions en particulier pour la propagation dans des conduits acoustiques).

Quelle est l'unité d'impédance acoustique ?

L'impédance acoustique permet de calculer l'angle de réfraction d'une onde acoustique à l'interface entre deux milieux et l'énergie transmise à travers cette interface (cf § 4.4.2).

Dans le cas d'onde plane progressive monochromatique (OPPM), se propageant dans le sens des x croissant, on a $p' = Zv$ avec :

$$Z = \rho_0 c . \quad (4.22)$$

Dans le cas d'une onde se propageant dans la direction des x décroissant, $Z = -\rho_0 c$. Pour d'autres types d'ondes, pression et vitesses peuvent être déphasées, ce qui conduit à une impédance complexe, comme pour l'impédance électrique.

Par exemple pour l'air on trouve $Z_a = 415 \text{ kg/m}^2/\text{s}^2$ à 20°C et $Z_e = 1.48 \times 10^6 \text{ kg/m}^2/\text{s}^2$ pour l'eau. Dans le cas d'un mur très lourd, la vitesse normale du déplacement à la paroi sera pratiquement nulle et l'impédance sera infinie.

Si dans un volume d'air on diminue progressivement la pression à température fixée, la célérité du son reste constante (Eq. 4.12) mais ρ_0 décroît (e.g. exemple d'une sonnette dans une cloche à vide) et la transmission du son se fait de plus en plus difficilement à cause du désaccord d'impédance entre l'air à basse pression et la paroi de la cloche à vide.

4.4.2 Propagation à travers un dioptre acoustique : coefficient de réflexion et de transmission.

Nous décrirons ici seulement le cas d'une incidence normale (Fig. 4.4). Pour une onde arrivant en biais, les calculs sont tout-à-fait similaires aux calculs des coefficients de Fresnel en optique. L'impédance acoustique, proportionnelle à la célérité de l'onde pour des OPPM, à le même rôle que l'inverse de l'indice optique pour les lois de la réfraction (Snell-Descartes).

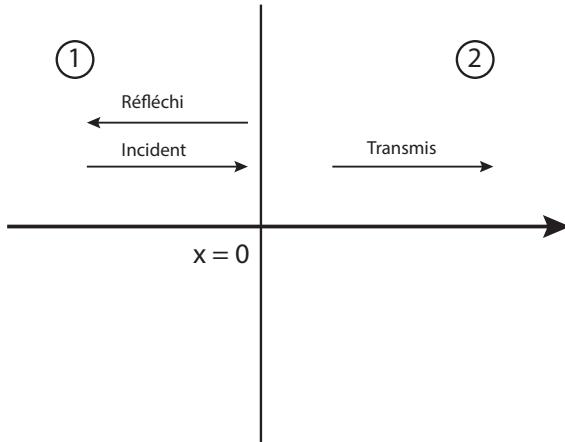


FIGURE 4.4 – Schéma d'un dioptre plan acoustique pour une onde incidente se propageant dans le milieu 1 dans le sens des x croissants.

A l'interface il faut respecter les conditions de passage cinématique (égalité des vitesses normales) et dynamique (continuité de la pression). Si la paroi est immobile (ou plutôt si elle vibre légèrement à la fréquence de l'onde) il n'y a pas d'effet Doppler, et la fréquence de l'onde est conservée. Si la célérité de l'onde est différente dans chacun des milieux, la longueur d'onde va changer pour l'onde transmise mais pas la fréquence.

On note p_i , p_t et p_r les pressions acoustiques pour les ondes incidente, transmise et réfléchie (sans "prime" pour simplifier les notations) et de même pour les vitesses normales u_i , u_t et u_r . Attention, sauf si les deux milieux ont la même impédance, il y a toujours une onde réfléchie dont il faut tenir compte.

Les conditions aux limites à l'interface s'écrivent : $p_i + p_r = p_t$ et $u_i + u_r = u_t$.

Le coefficient de transmission de la pression s'écrit $t = p_t/p_i$ et $r = p_r/p_i$. En introduisant l'impédance des deux milieux on a, en tenant compte de la direction de propagation : $u_i = p_i/Z_1$, $u_t = p_t/Z_2$ et $u_r = -p_r/Z_1$, où le signe moins vient du changement de direction de propagation.

A partir de ces relations et des deux conditions de continuité on trouve facilement pour les coefficients de la pression :

$$t = \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2} \text{ et } r = \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2} \text{ (} r \text{ peut être négatif).}$$

Il est plus intéressant de calculer les coefficients de transmission de l'énergie (donc de la puissance acoustique) $T = |\Pi_t|/|\Pi_i|$ et $R = |\Pi_r|/|\Pi_i|$.

On trouve :

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad (4.23)$$

$$T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}. \quad (4.24)$$

L'énergie est bien conservée puisque $R + T = 1$. Plus les impédances sont proches, mieux l'onde acoustique est transmise. Inversement, plus ils sont différents ($Z_1/Z_2 \rightarrow 0$ ou $Z_2/Z_1 \rightarrow 0$) plus le coefficient de réflexion tend vers 1. Ces coefficients sont parfois donnés en décibel.

En échographie, les images sont obtenues en utilisant la réflexion des ondes ultrasonores sur des tissus ayant des impédances acoustiques différentes.

Comme en électromagnétisme il est utile d'adapter les impédances si l'on veut bien transmettre l'énergie et ne pas tout réfléchir et inversement il faut bien différencier les impédances si on veut faire de l'isolation phonique (cas des doubles vitrages).

Si le coefficient de réflexion est élevé, et si deux parois sont en face-à-face, on observera des ondes stationnaires lorsque l'écartement sera un multiple de la moitié de la longueur d'onde. Ce phénomène est à la base du fonctionnement de la plupart des instruments à vent.

Questions :

1. Montrer que l'impédance acoustique joue un rôle similaire à l'indice optique pour la réfraction des ondes lumineuses.
2. Peut-il y avoir une onde réfléchie même si la célérité est identique dans les deux milieux ?
3. Estimer la résolution spatiale d'une échographie pour une fréquence de 5 MHz. La vitesse du son dans le corps humain est de l'ordre de 1500 m/s. On donne l'impédance acoustique de l'air ($Z_a = 413 \text{ kg/m}^2/\text{s}$) et de la peau ($Z_p = 1.64 \times 10^6 \text{ kg/m}^2/\text{s}$). Estimer le coefficient de transmission T et expliquer pourquoi on doit utiliser un gel entre la sonde et la peau, gel dont l'impédance est proche de celle de la peau.

4.4.3 Atténuation des ondes acoustiques

Nous avons jusqu'à maintenant négligé la dissipation d'énergie. Mais le son s'atténue pourtant avec la distance. Il peut y avoir une première raison géométrique : si on considère une source sonore localisée, l'énergie se répartie sur une surface de plus en plus grande lorsqu'on s'éloigne de la source. Mais il existe aussi une dissipation intrinsèque due à la viscosité du fluide, surtout à haute fréquence.

Ecrivons l'équation de Navier-Stokes linéarisée pour une onde acoustique dans un fluide newtonien compressible :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p' + \eta \vec{\nabla}^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \vec{\nabla} [\operatorname{div}(\vec{v})]. \quad (4.25)$$

L'existence d'une compression au passage de l'onde induit une dissipation d'énergie (l'effet de la seconde viscosité ζ n'est pas bien connu, voir explication du Landau [14]). Pour des ondes planes, dimensionnellement, on obtient un temps caractéristique d'atténuation $\tau = (2\nu k^2)^{-1}$, soit une distance typique d'atténuation de l'amplitude $L = c\tau = \frac{c^3}{2\nu\omega^2}$. Cette effet peut devenir mesurable pour les hautes fréquences et les ultrasons. A.N. Pour une fréquence de 1 kHz, cette formule donne une distance typique d'atténuation dans l'air de 33 km, mais 300 m pour 10 kHz. L'effet est facilement dominé par l'amortissement géométrique en $1/r^2$ pour une source ponctuelle.

L'humidité de l'air peut aussi être un facteur significatif d'amortissement, mais aussi les l'absorption par les parois (c'est tout le domaine de l'acoustique des salles, de la mesure des temps de réverbération, etc...).

4.5 Diverses sources acoustiques

Le son peut-être généré directement dans le fluide par l'écoulement hydrodynamique, s'il est suffisamment intense (turbulent), et surtout si la vitesse de l'écoulement commence à s'approcher de la vitesse du son. Nous n'étudierons pas ici ce cas car nous avons supposé le fluide au repos. La source et le récepteur seront donc des objets solides.

4.5.1 Onde sphérique ou monopôle acoustique

L'exemple le plus simple de source sonore est une sphère oscillante (voir animation de la figure 4.1). Le rayonnement sonore est alors isotrope et il décroît rapidement avec la distance. En coordonnées sphériques, l'équation de d'Alembert s'écrit pour $p'(r, t)$:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp') = 0. \quad (4.26)$$

Soit encore

$$\frac{\partial^2 (rp')}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp') = 0. \quad (4.27)$$

c'est-à-dire que la fonction rp' est solution d'une équation d'onde 1D. La solution générale pour l'incrément de pression s'écrit $p' = \frac{1}{r} f_+(r - ct) + \frac{1}{r} f_-(r + ct)$. La première fonction décrit une onde rayonnée vers l'infini, l'autre sa retournée temporelle qui viendrait de l'infini et convergerait vers l'origine. Si on calcule le champ de vitesse associé à l'onde divergente grâce à l'équation 4.4, on obtient :

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho_0 c} \left[\frac{1}{r} f_+(r - ct) - \frac{1}{r^2} F_+(r - ct) \right] \vec{e}_r \quad (4.28)$$

où F est la primitive de f . Pour la vitesse on a donc une contribution de champ proche (F) et une contribution de champ lointain. On montre alors sans difficulté que la puissance acoustique décroît en champ lointain comme $1/r^2$.

Question : A partir de quelle distance peut-on commencer à négliger la contribution de champ proche ? Comment varie ensuite la puissance acoustique avec la distance ? Pouvait-on le prédire plus simplement ? Montrer qu'en champ proche, p' et \vec{v} sont déphasés.

4.5.2 Dipôle acoustique

Deux sources proches en opposition de phase constituent un dipôle. Le champ rayonné est fortement anisotrope et le champ décroît rapidement. Les calculs sont équivalents à ceux du dipôle électrique. S'il n'y a pas de terme monopolaire le terme dipolaire peut être le terme dominant. Si ce terme dipolaire est aussi nul en champ lointain, le terme dominant sera le terme suivant du développement, le terme quadripolaire.

Question : Un diapason une fois frappé émet-il un son dipolaire ou quadripolaire ?

4.5.3 Effet Doppler

La vitesse du son n'étant pas très élevée comparée aux vitesses possibles pour les sources ou les récepteurs, les effets de mouvement relatif peuvent être significatifs sur la fréquence des sons reçus (e.g. cas d'une ambulance faisant fonctionner sa sirène et passant sur une route à côté de l'observateur).

Application en échographie. L'effet Doppler permet de mesurer la vitesse des écoulements sanguins.

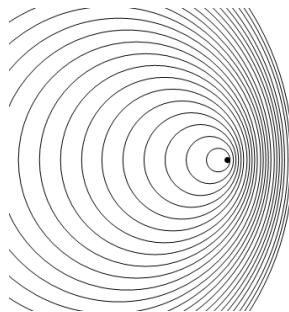


FIGURE 4.5 – Schéma d'une source émettant des ondes circulaires et en mouvement à une vitesse légèrement inférieure à la vitesse du son dans le milieu. A l'avant de la source les longueurs d'ondes sont plus courtes et la fréquence plus élevée, derrière c'est l'inverse.

Dans le cas du fluide au repos, si la source sonore (qui émet à la fréquence f_{em}) avance à la vitesse v_{em} et si le récepteur avance dans la même direction à la vitesse v_{rec} , ce récepteur mesurera une fréquence f_{rec} donnée par la relation :

$$f_{rec} = \frac{c - v_{rec}}{c - v_{em}} f_{em}. \quad (4.29)$$

Questions :

1. Vérifier que la formule 4.29, prédit la bonne variation de fréquence pour le son émis par un moto passant rapidement à coté de vous.
2. Pourquoi ce n'est finalement pas la différence des vitesses ($v_{em} - v_{rec}$), c'est-à-dire la vitesse relative qui apparaît dans l'équation 4.29 ?
3. Expliquer le passage du mur du son pour un avion en utilisant l'effet Doppler.

4.5.4 Diffraction du son

En comparant les longueurs d'ondes audibles et les longueurs d'ondes visibles, expliquer pourquoi la diffraction du son est un phénomène important dans la vie de tout les jours. Décrire la notion de lobe d'émission par exemple.

4.6 Acoustique musicale

4.6.1 Tuyaux sonores

On parle de propagation guidée, caractérisées par des superpositions d'ondes contrapropagatives et des modes stationnaires. Si les dimensions transverses sont petites devant la longueur d'onde, la

phase reste constante dans un plan. Sinon il faut définir les modes (m, n) transverses. Dans la longueur du tuyau on obtient un nombre entier de demi longueur d'ondes à cause des conditions aux extrémités du tube. Quelles sont les conditions aux limites aux extrémités ? Une paroi solide est une noeud pour la vitesse et un ventre pour la pression. Pour une extrémité libre c'est l'inverse. (Voir figure 4.6 issue de https://fr.wikipedia.org/wiki/Onde_stationnaire_dans_un_tuyau).

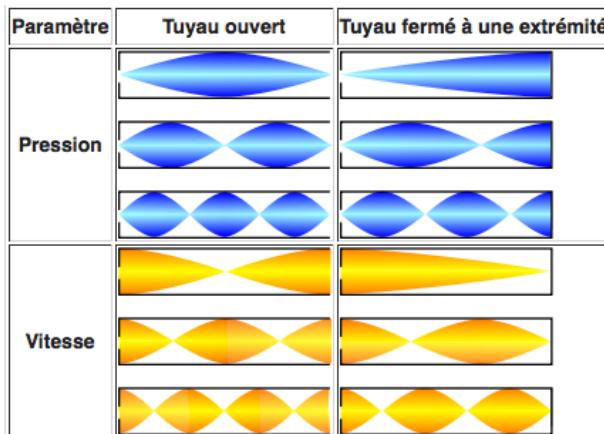


FIGURE 4.6 – Noeuds et ventres de vibration de la pression et de la vitesse dans des tuyaux ouverts ou fermés.

Voir problème d'Agrégation de physique de 2009. Discuter le rôle du pavillon en sortie de certains instruments à vent.

4.6.2 Temps de réverbération d'une salle

On définit le temps de réverbération RT60, comme le temps nécessaire pour que le niveau sonore dans un lieu clos diminue de 60 dB par rapport à son niveau initial. Ce temps est essentiellement contrôlé par les coefficients de réflexion sur les parois de la salle.

4.6.3 Résonateur de Helmholtz

Voir https://en.wikipedia.org/wiki/Helmholtz_resonance et exercice de TD.

4.7 Ondes acoustiques dans les solides

Dans les solides, il n'existe pas seulement des ondes acoustiques longitudinales (dites ondes "P" en sismologie, pour Primaires car elles voyagent plus vite que les autres), mais aussi des ondes de cisaillement (S pour secondaires ou pour Shear), représentées sur la figure 4.7. Dans les liquides ou les gaz ces ondes S n'existent pas, car il existe juste des ondes évanescentes près de la source induites par la viscosité (atténuation sur une longueur de diffusion $\delta = \sqrt{\nu/f}$, voir exercice de la plaque oscillante). Dans les solides les célérités des ondes P et S sont données par les relations :

$$c_P = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho_0(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad (4.30)$$

$$c_S = \sqrt{\frac{E}{2\rho_0(1+\nu)}} \quad (4.31)$$

où E est le module d'Young et ν le coefficient de Poisson. Vérifier que $c_P > c_S$.

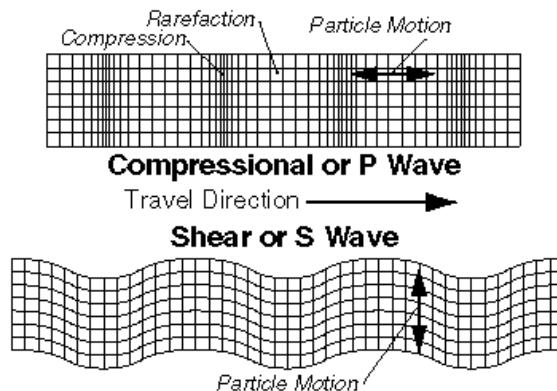


FIGURE 4.7 – Schéma d'une onde P et d'une onde S dans un solide.

Pour la propagation du son dans les solides on peut utiliser l'analogie d'une ligne de masses couplées par des ressorts. A l'intérieur de la Terre les ondes P ont une vitesse de l'ordre de 10 km/s, les ondes S une vitesse moitié environ.

NB : A la surface des solides il peut exister d'autres types d'ondes (Ondes de Rayleigh, de Love...), comme il peut exister des ondes de surface gravito-capillaires à la surface d'un liquide.

Question : Si $c_P/c_S \approx 2$, en déduire le coefficient de Poisson du matériaux.

4.8 Quelques questions possibles

1. Peut-on fabriquer des lentilles acoustiques ? Des miroirs acoustiques ? Quelle est la limite de diffraction ? Quelles différences finalement avec l'optique géométrique ?
2. L'impédance acoustique est-elle équivalente à l'impédance électrique ?
3. Les effets de la viscosité du fluide sont-ils plus notables à basse ou haute fréquence ? Estimer l'atténuation du son. Comment dépend-elle de la fréquence. (Voir Landau [14].)
4. Pourquoi parle-t-on avec une voix de canard dans l'hélium ?
5. Comment les ondes dans les solides ou les liquides peuvent-elles se propager plus vite que la vitesse quadratique moyenne de leurs molécules ? (Voir Walton [22].)
6. Quelle différence existe-t-il entre un écoulement incompressible et un fluide incompressible ?
7. L'hypothèse adiabatique pour calculer la compressibilité est-elle toujours raisonnable ?
8. Pour l'isolation phonique des fenêtres, vaut-il mieux des doubles vitrages ou bien seule importe l'épaisseur totale du verre ?

9. Quelle doit-être la vitesse d'un ambulance pour que sa sirène change d'un ton lorsqu'elle passe à coté de vous ?
10. Expliquer l'effet du vent sur la propagation du vent. Que peut-il se passer si le vent augmente avec l'altitude ?
11. Pourquoi certains instruments à vent ont-ils un pavillon exponentiel en sortie du tube, et d'autres non ?
12. Comment expliquer le changement de hauteur du son émis par une cuillère frappant le fond d'une tasse de café que l'on vient de préparer.

4.9 Pour en savoir plus :

- Pour la Science, Décembre 1984, Tomographie sismique.
- Pour la Science, Avril 1990, Le traitement du son dans l'oreille interne.
- Vidéo d'une simulation d'une source sonore sphérique https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_pressure_waves.gif.
- Vidéo "Aerodynamics Generation of Sound" <http://web.mit.edu/hml/ncfmf.html>.
- [5] A. Chaigne, *Ondes acoustiques*, Les éditions de l'école polytechnique, 2011.
- [6] A. Chaigne et J. Kergomard, *Acoustique des instruments de musique*, Belin, 2008.
- [14] L. D. Landau and E. M. Lifchitz. Fluid Mechanics. Pergamon, New-York, 1963.
- [11] R. Feynman, R. Leighton, and M. Sands. Le cours de physique de Feynman. Dunod, 2013.
- [22] A. J. Walton. Three phases of matter. Oxford University Press, 1983.
- [21] J. Walker. Le carnaval de la physique. Dunod, 1980.
- [18] J. W. S. Rayleigh. The theory of sound. vol. 1 et 2. 1877.

Bibliographie

- [1] D.J. Acheson. *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford, 1990.
- [2] G. K. Batchelor. *Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2000.
- [3] B. Cabane and S. Hénon. *Liquides - Solutions, dispersions, émulsions, gels*. Belin, Paris, 2003.
- [4] S. Candel. *Mécanique des fluides*. Dunod, 1995.
- [5] Antoine Chaigne. *Ondes acoustiques*. Editions Ecole Polytechnique, 2011.
- [6] Antoine Chaigne and Jean Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [7] Raymond Comelet. *Mécanique expérimentale des fluides, tomes 1, 2 et 3*. Editions Masson, 1979.
- [8] P.-G. de Gennes et F. Brochard-Wyart et D. Quéré. *Gouttes, bulles, perles et ondes*. Belin, 2002.
- [9] L. Landau et E. Lifchitz. *Elasticité*. Editions de Moscou, 1989.
- [10] G. Homsy *et al.* *Multi-Media Fluid Mechanics, second edition*. DVD-Rom Cambridge University Press, 2008.
- [11] Richard Feynman, Robert Leighton, and Matthew Sands. *Le cours de physique de Feynman*. Dunod, 2013.
- [12] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. EDP Sciences, 3ème edition, 2012.
- [13] P.K. Kundu. *Fluid Mechanics*. Academic Press, 1990.
- [14] L. D. Landau and E. M. Lifchitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon, New-York, 1963.
- [15] Antonin Marchand, Joost H Weijns, Jacco H Snoeijer, and Bruno Andreotti. Why is surface tension a force parallel to the interface? *American Journal of Physics*, 79(10) :999–1008, 2011.
- [16] A.R. Paterson. *A first course in fluid dynamics*. Cambridge University Press, 1983.
- [17] E.M. Purcell. Life at low reynolds numbers. *Am. J. Phys.*, 45 :3–11, 1977.
- [18] John William Strutt Rayleigh. *The theory of sound. Vol. 1 et 2*. Macmillan and co.(London), 1877.
- [19] H. Schlichtling. *Boundary Layer Theory*. Springer, 8th edition, 2000.
- [20] D. J. Tritton. *Physical fluid dynamics*. (second edition), Oxford University Press, 1988.
- [21] Jearl Walker. *Le carnaval de la physique*. Dunod, 1980.
- [22] Alan J Walton. *Three phases of matter*. Oxford University Press, 1983.
- [23] W. Wick. *Gouttes d'eau*. Editions Millepages, 1999.