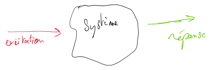
Système linéaire en physique

11 September 2024 13:16

I Systèmes linéaires en physique

Def : Physique : "Comprendre", "Modéliser", "prédire"



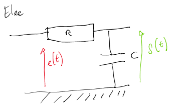
ex : • Mécanique

en général on connait excitat° + système

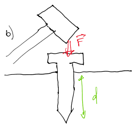
mais par ex Sonar, radar (on connait excita° + réponse) on veut connaître le système.

• Elec

a)

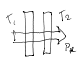


b)



Modélisation : réponse linéaire

ex



$T_1 - T_2 \rightarrow P_{th}$

$2(T_1 - T_2) \rightarrow 2P_{th}$

a) $e(t) \xrightarrow{S} s(t)$

$2e(t) \longrightarrow 2s(t)$

b) Si $|\vec{F}|$ pas trop grand

$|\vec{F}| \rightarrow d$

$2|\vec{F}| \rightarrow 2d$

Proportionnalité ≠ linéarité

Si $\vec{S}$ linéairement relié à $\vec{E} \rightarrow \exists \hat{M} \,/\, \vec{S} = \hat{M}\vec{E}$

$\{\vec{e_i}\}_{1\ldots N}$ = base $\rightarrow S_i = \sum_j M_{ij} E_j$

techniquement la loi de Fourier ; la loi d'Ohm

$\vec{J} = -\underbrace{\hat{\lambda}}_{\text{matrice.}} \vec{\nabla} T \quad ; \quad \vec{j_i} = -\hat{\sigma}\,\vec{\nabla} V$

Sommat° d'einstein

en hydro : $\Pi_{ij} = \eta_{ijkl}\, v_{kl} \qquad v_{kl} = \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k}$

piezo : $\vec{P} = \bar{\bar{\Lambda}}\hat{\Pi} \qquad P_i = \Lambda_{jkl}\, \Pi_{kl}$

II Système linéaire invariants temporellements

→ cas particulier de systèmes linéaire.

A) Définition

si entrée $e(t)$ donné par le système S, $s(t)$

Si $e(t) \xrightarrow{S} s(t)$ alors S est un SLIT

SSi :

(a) Si $e_1(t) \xrightarrow{S} s_1(t)$, $e_2(t) \xrightarrow{S} s_2(t)$ alors $\forall \lambda_1, \lambda_2$, $\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t) \longrightarrow \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t)$

(b) Si $e(t) \xrightarrow{S} s(t)$ alors $\forall \tau$ $e(t-\tau) \xrightarrow{S} s(t-\tau)$

⇒ effet de viellissement ne sont pas pris en compte dans cette modélisation.

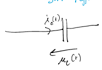
Premier type de SLIT

Tout système dans lequel on a une equation de la forme :

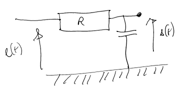
$$\underbrace{\sum_n a_n \frac{d^n s}{dt^n}}_{\text{Sortie / effet}} = \underbrace{\sum_m b_m \frac{d^m e}{dt^m}}_{\text{entrée / cause}} = \text{SLIT}$$

(penser à bien faire effet à gauche = cause à droite en particulier pr Maxwell (voir après))

ex



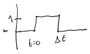
$i_c(t) = C\frac{du_c}{dt}$

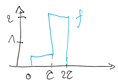


$s(t) + RC\frac{ds}{dt} = e(t)$

B) Réponse d'un SLIT à une indicatrice. (avec les mains)

SLIT : $e(t) \xrightarrow{S} s(t)$

$e(t) =$  $= e_i^{\Delta t}(t) \equiv$ indicatrice.



$f(t) = \frac{1}{2} e_i^{\tau}(t) + 2\, e_i^{\tau}(t-\tau)$

(→ généralisable à tte f° , ressemble à l'intégrale de Riemann ....)

Soit le système considéré,

$e_i^{\Delta t} \longrightarrow h_i^{\Delta t}(t)$

$\forall t$ et $\forall e(t)$, $e(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} e(k\Delta t)\, e_i^{\Delta t}(t - k\Delta t)$ $(\Delta t \to 0)$

$s(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{-\infty}^{\infty} e(k\Delta t)\, h_i^{\Delta t}(t - k\Delta t)$

$s(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \sum e(k\Delta t)\, \frac{h_i^{\Delta t}}{\Delta t}(t - k\Delta t)\,\Delta t$

$t = k\Delta t$

$\Leftrightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, e(t')\, h(t-t')$ avec $h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{h_i^{\Delta t}(t)}{\Delta t} \equiv$ réponse du système à $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{e_i^{\Delta t}(t)}{\Delta t}$

$\equiv$ Dirac qd $\Delta t \to 0$.

C) Réponse impultionelle à un SLIT

Rappel : $\delta(t) \,/\, \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\,\delta(t) = f(0)$

$\forall t_0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\, \delta(t-t_0) = f(t_0)$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e_i^{\Delta t}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t^2}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\Delta t^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \exp\left(\pm i 2\pi \nu t\right)$$

De façon général on appelle réponse impulsionelle à un système SLIT la quantité suivante :

Si dans un SLIT $\delta(t) \xrightarrow{S} h(t)$

alors $h(t)$ est nommé réponse impulsionnelle (Ce que ça veut dire c'est que si on connait la réponse du sys à un δ(t) on connait toutes les réponses).

De façon général on appelle réponse impulsionnelle à un système SLIT la quantité suivante :

Si dans un SLIT $\delta(t) \xrightarrow{S} h(t)$

alors $h(t)$ est nommé réponse impulsionnelle (Ce que ça veut dire c'est que si on connait la réponse du sys à un $\delta(t)$, on connait toutes les réponses).

Pour 1 SLIT décrit pour 1 equa diff de type

$$\sum_n a_n \frac{d^n h}{dt^n} = \sum_m b_m \frac{d^m}{dt}(\delta(t))$$

__Propriété :__ Si $\delta(t) \xrightarrow{S} h(t)$

alors (SLIT) $\forall e(t) \longrightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, h(t-t')\, e(t')$

__Preuve__
$$\delta(t) \xrightarrow{S} h(t)$$
$$\delta(t-t') \xrightarrow{S} h(t-t')$$
$$e(t')\,\delta(t-t') \xrightarrow{S} e(t')\, h(t-t')$$
$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, e(t')\,\delta(t-t') \xrightarrow{S} \int_{\infty}^{\infty} dt'\, e(t')\, h(t-t')$$
$\Rightarrow$ Sortie totalement conditionnée par la réponse impulsionnel

Cas important des systèmes causaux $h(t) \neq 0$ ssi $t \geq 0$

$$\longrightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{t} dt'\, e(t')\, \underbrace{h(t-t')}_{\text{fct}^\circ \text{ de "mémoire"}}$$
(conditionné par tous les valeurs antérieurs)

On pratique difficile de faire un $\delta(t)$...

$\longrightarrow$ réponse indicielle.

__Note__ réponse indicielle

$$H_e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t<0 \\ \text{"}1/2\text{"} & \text{si } t=0 \\ 1 & \text{si } t>0 \end{cases} \qquad H_e(t) \xrightarrow{S} S_h(t)$$

$$S_h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, h(t-t')\, H_e(t') = \int_0^t dt'\, h(t-t') \times 1$$

$$\frac{d S_h(t)}{dt} = \overset{\text{dérivés/bornes}}{h(0)} + \int_0^t dt' \frac{d}{dt}\Big(h(t-t')\Big) = h(0) - \int_0^t dt' \frac{d}{dt'}\Big(h(t-t')\Big) = h(0) - \big[h(0) - h(t)\big] = \underline{h(t)}$$

$\Rightarrow$ réponse impulsionelle $= \frac{d}{dt}$ (réponse indicielle)

/!\ en pratique bien filtrer avant de dérivé

III SLIT et Transformée de Fourier

A) Rappels

__Pour des vecteurs__ $\vec{v} \cdot \vec{g}$ = "mesure de ressemblance" (produit scalaire) = forme bilinaire symétrique

si $\{\vec{e_i}\}$ = base d'un espace $\vec{v} = \sum_i (\vec{v} \cdot \vec{e_i})\vec{e_i}$

__Produit de Schwartz :__ espace de Dirichlet mais pour nous "espace des fct physique, acceptable, genre : H_e...)

Soit f et g deux fct° de D, $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\langle g | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, g^*(t) f(t) \quad \to \text{valeur de (semi) produit scalaire}$$

__def TF__

Soit f une fonct° de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on definit son coef de Fourier à la freq ν

par $F(\nu) = \langle \exp(i 2\pi \nu t) | f(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \exp(-i 2\pi \nu t)$ $\to$ la TF nous dis donc "à quel point ma fct° ressemble à une exp oscillant à ν"

le prof note ses TF "$\tilde{F}$"

__et donc__

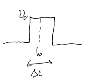
$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, F(\nu) \exp(i 2\pi \nu t)$$

$$\text{"="} \sum_\nu \langle \exp(i 2\pi \nu t) | f(t) \rangle \exp(i 2\pi \nu t)$$

__Autre def__

$$\tilde{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t) \exp(-i\omega t) \quad \text{et alors} \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F(\omega) \exp(i\omega t)$$

__Exo__ Calculer la TF ① $f(t) = H_e(t) \exp(-t/\tau)$ $\left(\to \text{TF} = F(\nu) = \frac{\tau}{\tau + i 2\pi\nu\tau}\right)$

② $g(t) =$  $\left(\to G(\nu) = \Delta t\, V_0\, \text{sin}_c(\pi \nu \Delta t) \exp(-i 2\pi \nu t_0)\right)$

B) Quelques propriétés

a) __Linéarité__ si $f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu)$, $g(t) \xrightarrow{TF} G(\nu)$ alors $\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t) \xrightarrow{TF} \lambda_1 F(\nu) + \lambda_2 G(\nu)$

b) __Dérivat°__ si $f(t) \xrightarrow{TF} F(\nu)$ alors $g(t) = \frac{df}{dt} \xrightarrow{TF} (i 2\pi \nu) F(\nu)$

$$g_n(t) = \frac{d^n f}{dt^n} \xrightarrow{TF} (i 2\pi \nu)^n F(\nu)$$

__En effet__
$$\frac{d f(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, F(\nu) \exp(i 2\pi \nu t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, \underbrace{\big(i 2\pi \nu\, F(\nu)\big)}_{G(\nu)} \exp(\ldots)$$

Soit $\underbrace{h(t)}_{\text{rep impulsionnelle d'un SLIT}}$ / $\sum a_n \frac{d^n h}{\ldots} = \sum b_n \frac{d^n}{\ldots}(\delta(t))$ $\quad \delta(t) = \int^{\infty} d\nu \exp(\pm i 2\pi \nu t) \Rightarrow TF(\delta(t)) = 1$

rep impulsionnelle d'un SLIT

Soit $h(t)$ / $\sum_n a_n \frac{d^n h}{dt^n} = \sum_n b_n \frac{d^n}{dt^n}(\delta(t))$ $\quad \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \exp(\pm i 2\pi \nu t) \Rightarrow TF(\delta(t)) = 1$

TF

$$\sum_n a_n (i2\pi\nu)^n H(\nu) = \sum_n b_n (i2\pi\nu)^n \times 1$$

$$H(\nu) = \frac{\sum_m b_m (i2\pi\nu)^m}{\sum_n a_n (i2\pi\nu)^n} \quad \text{et} \quad h(t) = \int_{\infty}^{\infty} d\nu\, H(\nu) \exp(i2\pi\nu t)$$

Si $e(t) \xrightarrow{S} s(t)$

$$\sum_n a_n (i2\pi\nu)^n S(\nu) = \sum_m b_m (i2\pi\nu)^m E(\nu)$$

$$S(\nu) = H(\nu) E(\nu) \rightarrow s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, H(\nu) E(\nu) \exp(i2\pi\nu t)$$

$$\text{et} \quad s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, h(t-t')\, e(t')$$

cette égalité est vraie parce que SLIT

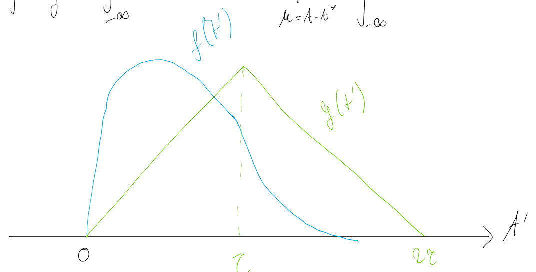
c) TF et produit de convolution

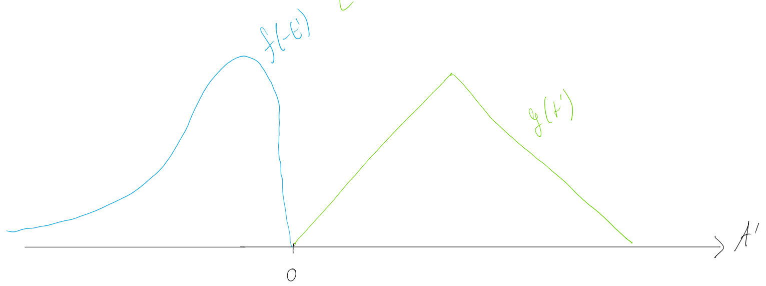
Def : Produit de convolution de f et g

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t-t')\, g(t')$$

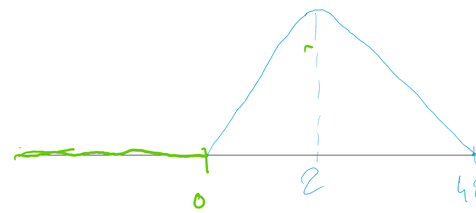
Cas des SLIT $\quad s(t) = h * e(t)$

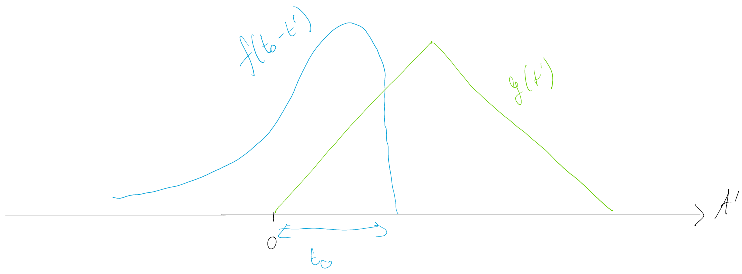
Note : $f * g = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t-t')\, g(t') \underset{u = t - t'}{=} \int_{-\infty}^{\infty} du\, f(u)\, g(t-u) = \int_{\infty}^{\infty} du\, f(u)\, g(t-u) = g * f$





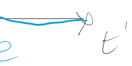
$f * g =$





Propriété : Si $C(t) = f * g(t)$ alors $C(\nu) = F(\nu) G(\nu)$

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, f(t')\, g(t-t') = \int^{\infty} dt' \int^{\infty} d\nu_1\, F(\nu_1) \exp(i2\pi\nu_2 t') \int^{\infty} d\nu_2\, G(\nu_2) \exp(i2\pi\nu_2(t-t'))$$


t'

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') g(t-t') = \int_{-\infty} dt' \int_{-\infty} d\nu_1 F(\nu_1) \exp(i2\pi\nu_1 t') \int_{-\infty} d\nu_2 G(\nu_2) \exp(i2\pi\nu_2(t-t'))$$

$$C(\nu) = \int d\nu_1 d\nu_2 dt' dt \, F(\nu_2) G(\nu_2) \exp(i2\pi\nu_1 t') \exp(i2\pi\nu_2(t-t')) \exp(-i2\pi\nu t)$$

$$= \int d\nu_1 d\nu_2 F(\nu_1) G(\nu_2) \underbrace{\int dt' \exp(i2\pi t'(\nu_1-\nu_2))}_{\delta(\nu_1-\nu_2)} \underbrace{\int dt \exp(i2\pi t(\nu-\nu_2))}_{\delta(\nu-\nu_2)}$$

$$= F(\nu_1) G(\nu_2)$$

V SLIT :

$s(t) = e * h(t)$ et $S(\nu) = H(\nu) E(\nu)$

Résoudre 1 SLIT :

Cas ∀	cas pas d'éq diff
① Eq diff	~~X~~
② Eq diff $\to H(\nu)$	$H(\nu)$ donné ou mesuré
③ $h(t) \to TF^{-1}$	↓ idem
④ $e(t) \to s(t)$	

→ ex : $S(\nu) = (i2\pi\nu)^{-3/2} E(\nu)$

Exo : Trouver via $h(t)$ la réponse de RC à une excitat° quelconque

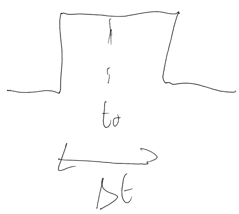
→ applicat° $e(t) = V_0 H_e(t)$

Rq : ici le δ est une solut° particulière de l'éq diff.
les solut° générales sont données par la transformat° de Laplace.

Théorème de Helmoltz-Hodge.

Previously ...

$\Pi^{\Delta t}_{(t)} =$



$h(t) = H_e(t) \exp(-t/\tau)$

$\tilde{\Pi}(\nu) = \Delta t \, \mathrm{sin_c}(\pi\nu\Delta t) \exp(-i2\pi\nu t_0)$

$\rightarrow \tilde{\Pi}(\nu) = \Delta t \, \mathrm{sin}_c(\pi \nu T_R) \exp(-i 2\pi \nu t_0)$

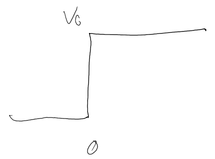
$$H_1(\nu) = \frac{\tau}{1 + i 2\pi \nu \tau}$$

$$e(t) \xrightarrow{S} s(t)$$

$$s(t) = h * e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \, h(t-t') \, e(t') \rightarrow S(\nu) = E(\nu) H(\nu)$$

Solut° de l'équa :

$$s(t) + RC \frac{ds}{dt} = e(t) \rightarrow h(t) = \frac{H(t)}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

$e(t)$ 

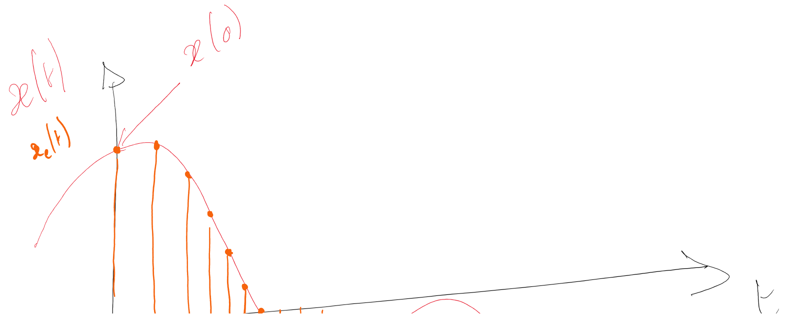
$$s_e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, h(t-t') \, e(t') = \int_{0}^{t} dt \, h(t-t') \, V_0 = \int_0^t$$

And Now ....

IV Signaux discrets et TF

A) Signal réel et échantilloné

$x(t)$ = signal réel analogique



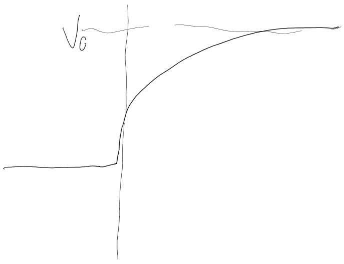
$$dt' \exp\left(-\frac{t-t'}{RC}\right) V_0 = \frac{RC}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \left[\exp\left(\frac{t'}{RC}\right)\right]_0^t = V_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{R\ldots}\right.\right.$$

Rq <u>Causalité</u>

- Abraham-Lorentz →

- Filtre non causaux en

$RC \big) \Big]$

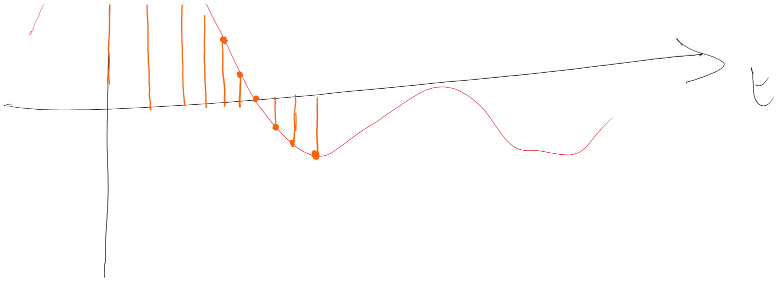


non-causal → le début de l'accélérat° commence 10^{-22} s avant le déplacement

↳ tps compton → limite quantique de la p

électronique.

orce -



$x_e(t)$ = signal échantillonné réel
$= 0$ sauf si $t = k T_e$ et alors $x_e(t) = x(kT_e)$

) étudier ça demande des maths horrible.... Donc signaux idéaux.

$$x_d(t) = T_e \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\,\delta(t - kT_e) = \text{“} x_e(t)\, T_e\, \delta(t - kT_e) \text{”}$$

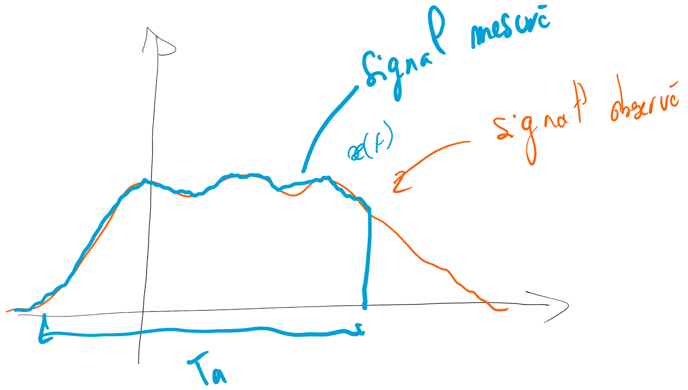
$$x_d(t) = x(t) \times T_e ⧢_{T_e}(t) \quad \text{où} \quad ⧢_{T_e} = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$$

↖ lettre nommé "sha" en russe.

Propriété : Si $y(t) = x(t)\,h(t) \longrightarrow Y(\nu) = X * H(\nu)$

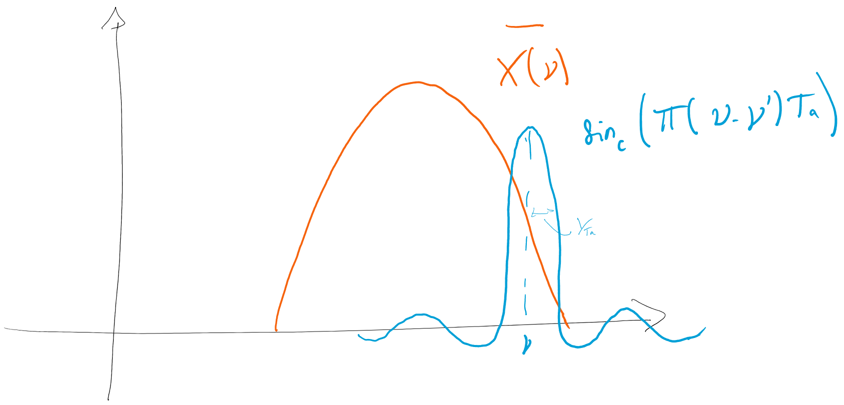
$$Y(\nu) = \int_{\mathbb{R}} d\nu'\, X(\nu - \nu')\, H(\nu')$$

Cas typique :



Signal mesuré =

⇒ a

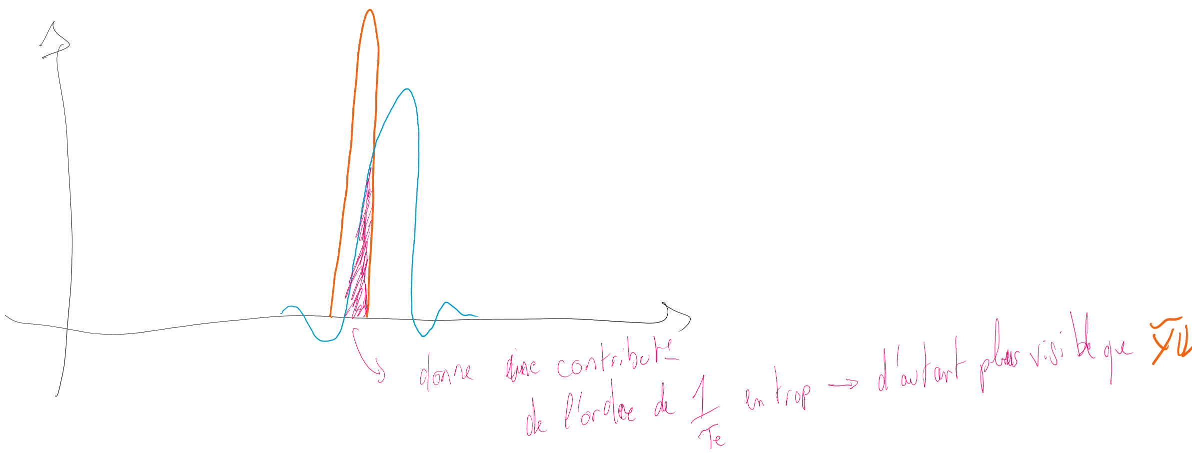


$\rightarrow \int d\nu\, X(\nu)\, \mathrm{sinc}(\pi($

signal observé $\ast$ porte Π

pparités d'un sinc

$\nu - \nu^1) T_a) \; T_a$



$$x_d(t) = T_e ⧢_{(t)}\, x(t)$$

$$\downarrow TF$$

$$X_d(\nu) = T_e\, \widetilde{⧢} * X(\nu)$$

$$\text{et } \widetilde{⧢}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e) \exp(-i 2\pi \nu t)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} \exp(-i 2\pi \nu k T_e)$$

$$= \nu_e \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu - k\nu_e) \quad \text{où } \nu_e = \frac{1}{T_e}$$

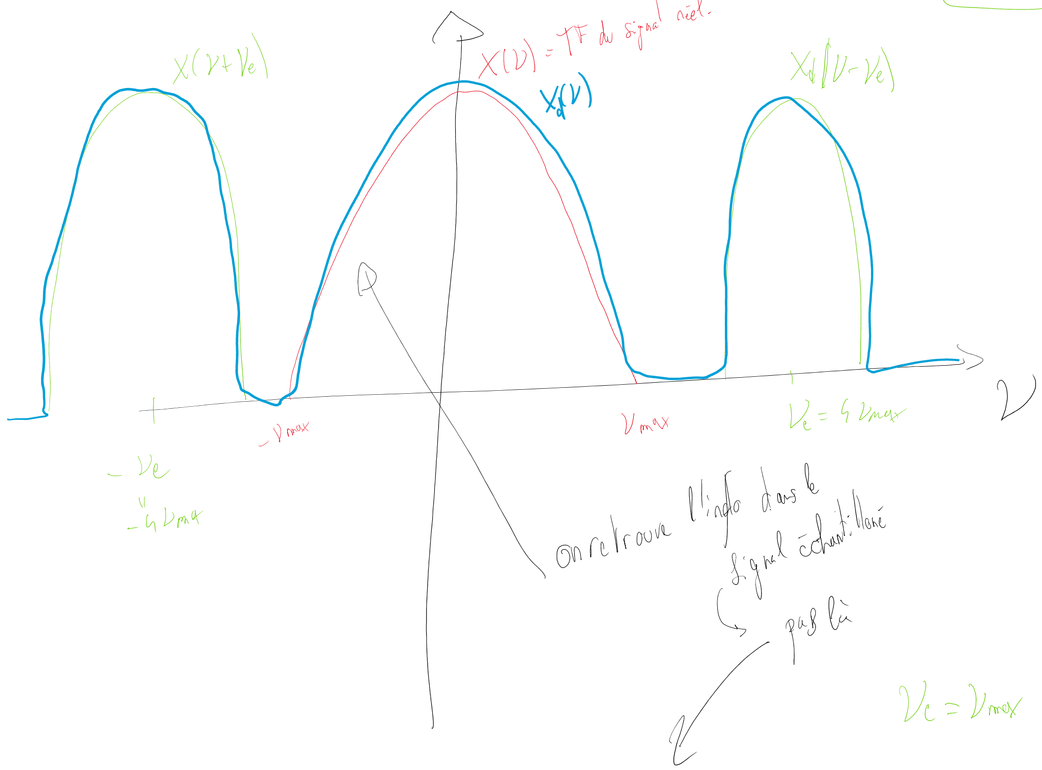
démo pénible.

$$X_d(\nu) = T_e \cdot X * \widetilde{⧢}(\nu)$$

$$= T_e \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' X(\nu') T_e \nu_e \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu' \cdot \nu - k\nu_e) = \sum_{-\infty}^{\infty} X(\nu + k\nu_e)$$

$\nu_{e\,max} = \ldots$

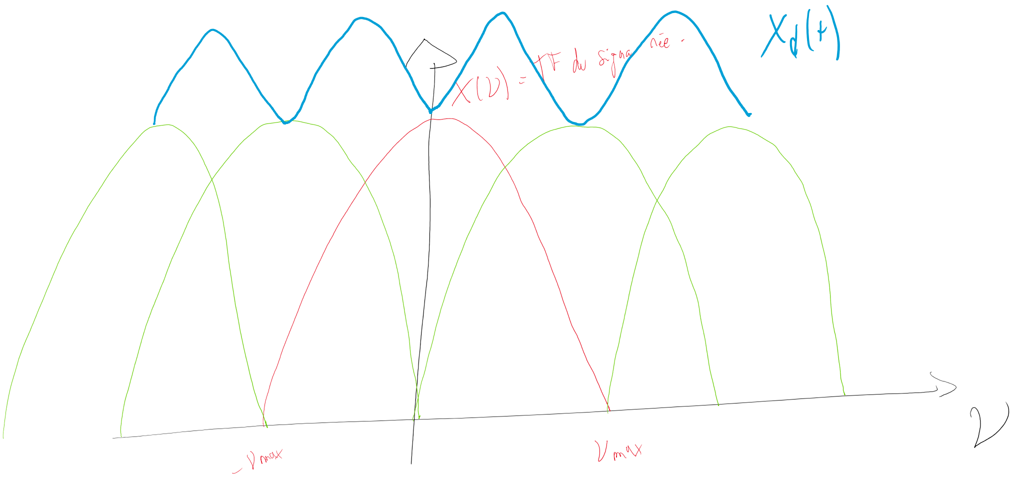
$\boxed{\text{Si } \nu_e = 4\nu_{max}}$



$\nu_e = \nu_{max}$

) fin devant la porte.

"dernier zéro" de la fonct°



Sommes de plages en ν à $X_d(\nu) = X(\nu)$

que faut-il pour avoir $X_d(\nu) = X(\nu)$ sur $(-\nu_{max}, \nu_{max})$

$$\left.\begin{aligned} \nu_{max} - \nu_e &< -\nu_{max} \\ -\nu_{max} + \nu_e &> \nu_{max} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\nu_e > 2\nu_{max}}$$

Critère de Shannon.

Si on a bien $\nu_e > 2\nu_{max}$

$$\left.\begin{aligned} -\nu_{max} + \nu_e &> \nu_{max} \\ \text{et } \nu_{max} &< \frac{\nu_e}{2} \end{aligned}\right\} \rightarrow -\nu_{max} + \nu_e > \frac{\nu_e}{2}$$

Sur $\left]-\frac{\nu_e}{2}, \frac{\nu_e}{2}\right[$ on a $X_d(\nu) = X(\nu)$ et $\frac{\nu_e}{2} > \nu_{max}$

Reconstruction ??

$$X_d(\nu) \xrightarrow{??} x(t) \ \forall t$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, X(\nu) \exp(i2\pi\nu t)$$

parce que Shannon respecté

$$= \int_{-\frac{\nu_e}{2}}^{\frac{\nu_e}{2}} d\nu\, X(\nu) \exp(i2\pi\nu t) = \int_{-\frac{\nu_e}{2}}^{\frac{\nu_e}{2}} d\nu\, X_d(\nu) \exp(i2\pi\nu t)$$

$$= \int_{-\frac{\nu_e}{2}}^{\frac{\nu_e}{2}} d\nu\, X_d \tilde{\sqcap}(\nu) \exp(i2\pi\nu t)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\nu\, \sqcap^{\nu_e}_{\nu=0}(\nu)\, X_d(\nu) \exp(i2\pi\nu t)$$

porte centrée en 0 $\pm \frac{\nu_e}{2}$ de largeur.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt'\, x_d(t') \frac{1}{T_e} \operatorname{sinc}\left(\pi \nu_e (t - kT_e)\right) \quad \text{or } x_d(t') = \sum_{-\infty}^{\infty} T_e\, \delta(t' - kT_e)\, x(t')$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x(kT_e) \operatorname{sinc}\left(\pi \nu_e (t - kT_e)\right)$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} x(kT_e) \, \mathrm{sinc}\left(\pi F_e (t - kT_e)\right)$$

→ en TP les filtres anti-repliement sont des passe bas pour forcer le critère de Shannon

→ perte d'info en entrée mais signal reconstruit anyway.

Électromagnétisme et TF

11 September 2024 14:41

V) Électromagnétisme et TF

A) Théorème de Helmotz - Hodge.

en statique : $\begin{cases} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{0} \end{cases}$ et $\begin{matrix} \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} \end{matrix}$

Est que j'ai toujours une solut° pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$? ai-je unicité ?

Plus généralement

si $V(\vec{r})$

avec $\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = a(\vec{r})$ et $\vec{\nabla}\times\vec{V} = b(\vec{r})$ ✗

Théorème de Helmoltz - Hodge $\longrightarrow$ $\vec{V}$ existe et est fixé de façon unique si a et $\vec{b}$ $\overbrace{}^{\text{connu partout}}$ (sous réserve $V \to 0$ suffisamment vite?)

$V \underset{\infty}{\to} 0$

Sous entendu que V a une TF (fonct° $L(2)$ fait ça ?)

Preuve ? TF.

$$\vec{V}(\vec{r}) \Rightarrow \vec{V}(\vec{q}) = \int d^3r'\, \vec{V}(r')\, \exp\left(-i\,2\pi\,\vec{q}\cdot\vec{r}'\right)$$

et alors $$\vec{V}(\vec{r}) = \int d^3q\, V(q)\, \exp\left(+i\,2\pi\,\vec{q}\cdot\vec{r}\right)$$

on a alors si : $V(\vec{r}) \xrightarrow{TF} \vec{V}(\vec{q})$

$\mathrm{div}(\vec{V}) \longrightarrow i\,2\pi\,\vec{q}\cdot\vec{V}(q)$ et $\vec{\nabla}\times\vec{V} \xrightarrow{TF} i\,2\pi\,\vec{q}\times\vec{V}(q)$

& TF $\longrightarrow$ $i\,2\pi\,\vec{q}\cdot\vec{V}(q) = \tilde{a}(\vec{q})$

$i\,2\pi\,\vec{q}\times\vec{V}(q) = \tilde{b}(\vec{q})$

Cas de Maxwell dans le vide

$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\vec{J} + \dfrac{1}{c^2}\partial_t\vec{E}$

pas connu partout en tout temps

$\Rightarrow$ on peut pas utiliser H-H en principe...

faisons la TF spatio-temps...

TF $(\vec{q}, \nu)$

$i\,2\pi\,\vec{q}\cdot\vec{E}(q,\nu) = \dfrac{\rho(\vec{q},\nu)}{\varepsilon_0}$

$i\,2\pi\,\vec{q}\times\vec{E}(\vec{q},\nu) = -i\,2\pi\,\nu\,\vec{B}(\vec{q},\nu)$

$i\,2\pi\,\vec{q}\cdot\vec{B}(q,\nu) = 0$

$i\,2\pi\,\vec{q}\times\vec{B}(\vec{q},\nu) = \mu_0\vec{J}(\nu,q) + \dfrac{1}{c^2}\,i\,2\pi\,\nu\,E(q,\nu)$

$\longrightarrow$ fonctionne si q et ν fixé

$\Rightarrow$ impose de connaître des condit° initiales genre le champs initial de l'univers en tt temps partout.

Dans la matière on ajoute encore des champs...

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\partial_t\vec{B}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$

$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \mu_0 J_{libre} + \partial_t\vec{D}$

$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{M}$

$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$

4 new field $\Rightarrow$ il faut des contraintes supplémentaire

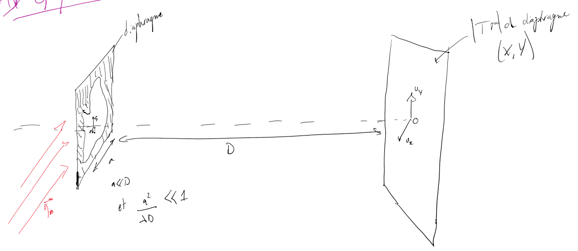
↳ hypothèse ~~dans~~ le modèle

sur χ en fourier + hypo sur localité, etc...

Optique et TF

11 September 2024 15:17

IV Optique et TF



amplitude de l'image diffractée

$$\Psi_{(\alpha,\beta)} = k \int dx\,dy\; t(x,y)\, \psi_0(x,y) \exp\left(-i2\pi(\alpha-\alpha_0)x - i2\pi(\alpha-\alpha_0)y\right)$$

si petit angles $\alpha = \frac{X}{\lambda D}$ $\beta = \frac{Y}{\lambda D}$

Complémentarité : ← théorème de complémentarité de Babinet.

Soit f et g / $f(t) + g(t) = 1 \ \forall t$

$\to F(\nu) + G(\nu) = \delta(\nu)$

$\to F(\nu) = \delta(\nu) - G(\nu)$

Translation :

$f \to F$

$g(t) = f(t-\tau) \to G(\nu) = F(\nu)\exp(-i2\pi\nu\tau)$

$\to \|G(\nu)\| = \|F(\nu)\|$

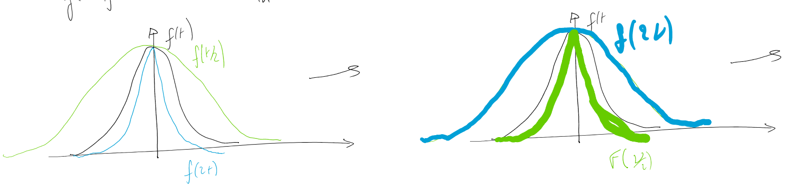
si translatio de l'objet fait évoluer figure de diffractio ⇒ je suis pas en fraunhofer.
(rotation avec inverse de [?])

Modulatio

$g(t) = f(t)\exp(-i2\pi\nu_0 t)$

$\to G(\nu) = F(\nu - \nu_0)$

$g(t) = f(at) \to G(\nu) = \frac{1}{|a|} F(\nu/a)$



dilatation devient compression et vice-versa

Wienrer - Kintshin

$$C_{fg}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f^*(t)\, g(t+\tau)$$ ← fonction de correlation temporelle

↙ d'auto correlation (à quel point ma fct se ressemble à elle même entre t et $t+\tau$).

$$\to C_{ff}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f^*(t)\, f(t+\tau)$$

$$C_{fg}(t) = \int dt'\, f^*(t)\, g(t+t')$$

TF

$$\tilde{C}_{fg}(\nu) = F^*(\nu)\, G(\nu)$$

donne en . Michelson
d'air

TF $\hookrightarrow$ $\tilde{C}_{fg}(\nu) = F^*(\nu)\,G(\nu)$

si $f=g$ $\tilde{C}_{ff}(\nu) = |F(\nu)|^2$ $\Rightarrow$ ce que donne un Michelson en lame d'air