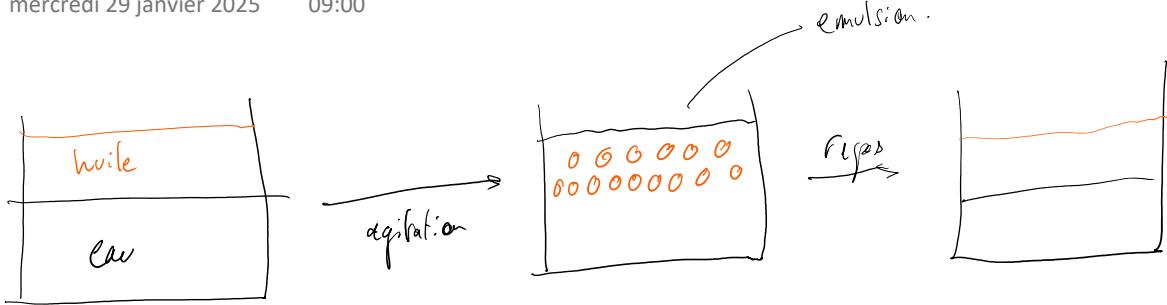


Chapitre 1:

mercredi 29 janvier 2025 09:00



Avec agitation, on brise le film séparant les deux phases et on crée une suspension de gouttes d'huile dans l'eau.

pas stable \rightarrow après repos \rightarrow deux phases

argumentation de l'interface (avec les gaffes)

→ nécessite d'un apport d'énergie

\rightarrow nécessite d'en apporter de l'énergie
C'est énergétique à la création d'une interface entre deux phases non-miscibles.

Tension de surface

I. Tension de surface

1) Definition thermodynamique

Définition: Le travail réversible de création d'une interface δW_{ext} est le travail extérieur nécessaire à l'augmentation réversible de l'interface entre deux phases α et β d'une aire infinitésimale d'aire $d\Sigma$. Il est proportionnel à $d\Sigma$.

$$\int \mathcal{W}^{iv} = \mathcal{V}_{\alpha, \beta} d\mathcal{E}$$

avec $\gamma_{\text{Lip}} > 0$ la tension de surface

$$[g] = \text{J} \cdot m^{-2}$$

$\chi_{\alpha\beta}$ depend des Wert phasen en présence

116

l'interface doit prendre en compte ces effets

γ_{dp} dépend des deux phases en présence

Une étude thermodynamique d'un système présentant une interface doit prendre en compte ces effets si évolution infinitésimale réversible sans mouvement macro

le premier principe donne:

$$dU = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i + \gamma_{\text{dp}} d\zeta$$

. $\delta Q^{\text{av}} = TdS$; transfert thermique

. $\delta W_p^{\text{av}} = -pdV$; travail des forces de pression

. $\delta W_c^{\text{av}} = \mu_i dN_i$; travail chimique, μ_i : potentiel chimique et N_i : la quantité de matière

donc $U = U(S, V, N_i, \zeta)$

Donc la tension de surface est la variable conjuguée à ζ :

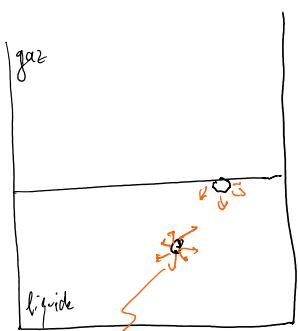
$$\gamma_{\text{dp}} = \left. \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right|_{S, V, N_i}$$

→ possible de changer de pot. thermo si besoin

$$\text{Trisf: } F(T, V, N_i, \zeta) = U(S, V, N_i, \zeta) - TS$$

$$\text{Pov: } G(T, P, N_i, \zeta) = F(T, V, N_i, \zeta) + PV$$

2) Origine microscopique



Dans un liquide, cohésion résultat d'interaction moléculaire
(VdW, liaison H, ...)

Une molécule à l'interface perd la moitié de ses voisines et donc des interactions associées.
donc interface déstabilisée

→ le liquide ajuste sa forme pour présenter une surface minimale à l'exterieur.

attraction de la bouteille par les interactions qui assurent la cohésion

→ d'après: défaut d'énergie à l'interface par unité de surface

Op: accise cohésion

Tension de surface: défaut d'énergie à l'interface par unité de surface

S: on note U l'énergie de cohésion par molécule dans le liquide, l'ordre du défaut d'énergie pour une molécule à la surface est $\frac{U}{2}$. (si pas d'interaction avec l'autre phase).

Si on note a la dimension caract. d'une molécule

$$\gamma_{\text{fl}} \approx \frac{U}{2a^2}$$

→ fonction croissante de l'énergie de cohésion

Huile/Air	Eau/Air	Mercure/Air	Eau/Huile	À température ambiante.
$\gamma (\text{nJ.m}^{-1})$ ~20	γ ~70	γ ~500	γ ~50	

Une estimation de U est $k_B T_b$, énergie thermique à ébullition (qui brise la cohésion)

Pour γ_{eau} : plus grande car liaison hydrogène

3) Paramètres influençant la tension de surface

Température: Température baisse la cohésion donc γ fait décroissant de T

Dépendance bien modélisée par linéaire (pour faibles variations de T)

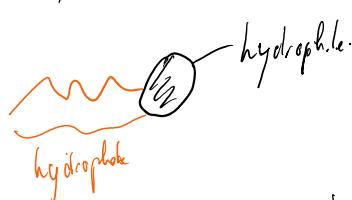
$$\gamma(T) = \gamma(T_0) (1 - b(T - T_0))$$

avec $b \approx 10^{-2}$ de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-1} K^{-1}

Surfactant:

Ajout de molécules (surfactants) qui viennent modifier l'interface

Par exemple pour eau/huile, molécule amphiphile: tête hydrophile (ion) et queue hydrophobe.

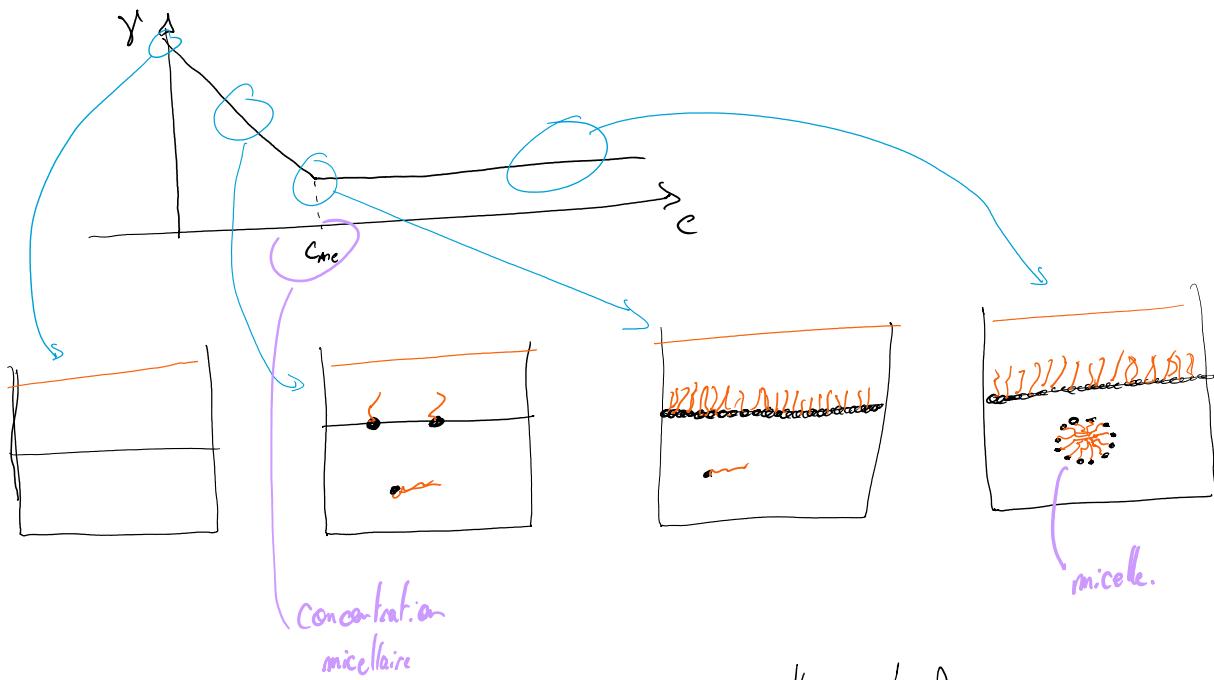




Les molécules à l'interface et modifient les interactions entre les phases, donc γ

Plus l'interface augmente, plus on peut stabiliser de surfactants à l'interface.

Donc γ dépend avec la concentration en surfactant



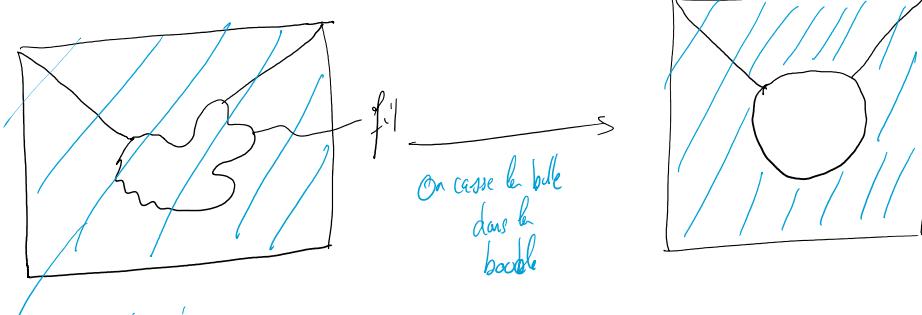
Diminution jusqu'à saturation de l'interface (concentration micellaire critique)

Au delà, les surfactants forment des micelles

{ détails modèle de Langmuir, cours B-Guiseclin portait de référ.}

Impuretés → variation de γ

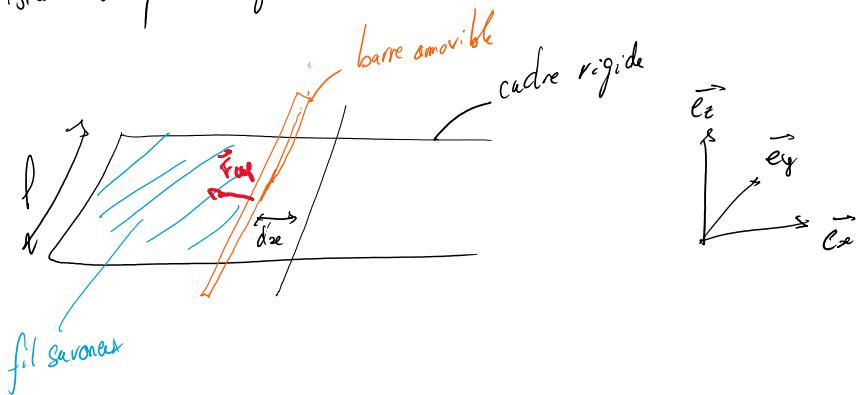
4) Interprétation en terme de force linéaire.





Si la bulle claque le cadre rigide, la bulle a une forme quelconque
Si on casse la bulle dans la boulle, minimisation de la surface de la bulle restant
qui tend la boulle en un cercle

→ existence de forces agissant sur la boulle → forces capillaires



Le film de savon tend à minimiser sa surface
→ exerce une force sur la barre.

Travail nécessaire pour qu'un opérateur déplace la barre de distance \vec{e}_x

$$\delta W^{op} = \int W_e^{res} = 2 \gamma l d\vec{e}_x \quad (1)$$

interfaces en haut et en bas.

Travail fourni par la force $\vec{F} = -\vec{F}_{cap} = -F_{cap} \vec{e}_x$

Déplacement: $d\vec{r} = d\vec{e}_x$

donc $\delta W^{op} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_{cap} d\vec{e}_x$

avec (1) $\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{cap} = -2\gamma l \vec{e}_x}$

Force capillaire proportionnelle à γ : γ est force linéaire ($N \cdot m^{-1} = J \cdot m^{-2}$)

\vec{F}_{cap} est normale à la jonction entre le film et la barre, tangente à la surface du film
et dirigée vers le sens de la diminution de la surface.

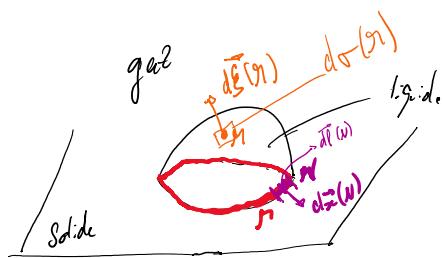
Linéaire peut être subtile (source d'erreur)

et au jeu v -

⚠ interprétation en force linéaire peut être subtile (source d'erreur)
↳ se ramener à des études thermo.

II. Principales conséquences de la tension de surface

1) Équilibre d'une interface (Bilan thermo).



But: déterminer conditions d'équilibre / pesanteur négligée.

Bilan thermo: gaz (thermostat + pressostat) T_0, p_0

Enthalpie libre extérieure

$$G^* (T_0, p, \varepsilon_{lg}, \varepsilon_{ls}, \varepsilon_{sg}) = F(T_0, V, \varepsilon_{lg}, \varepsilon_{ls}, \varepsilon_{sg}) + p_0 V$$

Sur différentes interfaces, p_i : pression dans le fluide

équilibre \rightarrow minimisation de G^*

Supposons la goutte à l'équilibre + déformation infinitésimale:

- charge N de l'interface $l \cdot g$ se déplace de $d\vec{S}(N)$, normale à ε_{lg}
- charge N de la ligne triple l se déplace de $d\vec{s}(N)$, normal à p et tangentiel au substrat

$$\text{donc } dG^* = (p_0 - p) dV + \gamma_{lg} d\varepsilon_{lg} + \gamma_{ls} d\varepsilon_{ls} + \gamma_{sg} d\varepsilon_{sg}$$

Or variations de V et des ε sont corrélées

augmentation de ε_{ls} induit diminution de ε_{sg}

$$\text{donc } d\varepsilon_{sg} = - d\varepsilon_{ls}$$

$$\therefore dG^* = dV + \gamma_{lg} d\varepsilon_{lg} + (\gamma_{ls} - \gamma_{sg}) d\varepsilon_{ls}$$

$$dG^{\theta} = (p_o - p) dV + \kappa_{fg} d\epsilon_{fg} + (\chi_{ps} - \chi_{sg}) d\epsilon_{ps}$$

Variation de V : $d\sigma(r)$: surface infinitésimale autour de r (à l'équilibre).
 alors $\boxed{dV = \int_{\partial\sigma(r)} d\sigma(r) d\xi(r)}$ (car $d\xi \perp \partial\sigma(r)$)

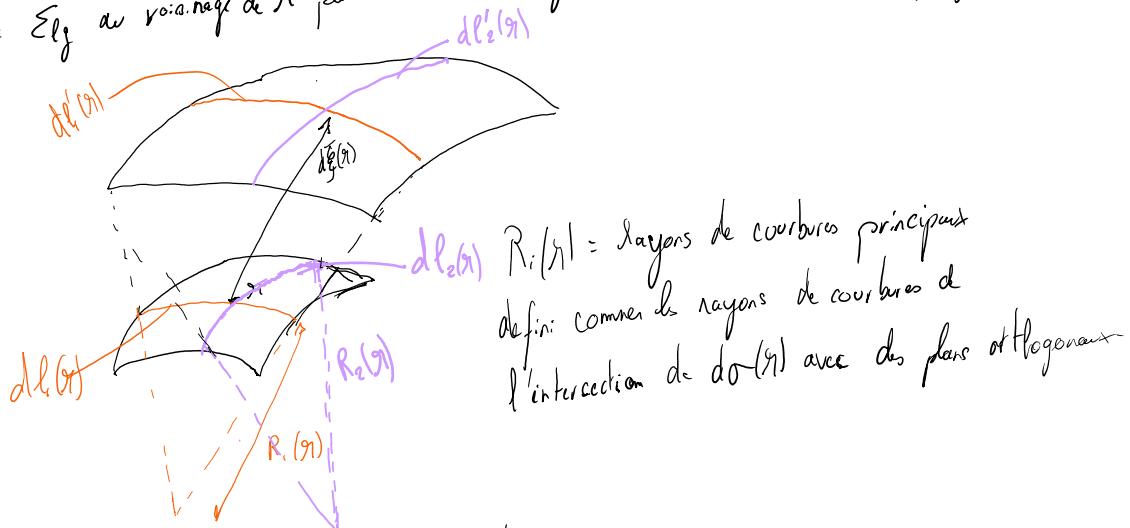
Variation de ϵ_{ps} :

$$dl(N) \text{ élément infinitésimal de } \Gamma \text{ autour de } N$$

donc $\boxed{d\epsilon_{ps} = \int_{\partial\sigma(r)} dl(N) dz(N)}$ (car $dz(N)$ normal à Γ)

Variation de ϵ_{fg} : due à $d\xi$ et dz

$$\text{Surface } \Sigma_{fg} \text{ au voisinage de } r \text{ peut être caractérisée par sa courbure } C(r) = \frac{1}{R_1(r)} + \frac{1}{R_2(r)}$$



On note $dl_i(r)$ les longueurs des arcs des intersections.

$$\rightarrow d\sigma(r) = dl_1(r) \times dl_2(r)$$

Sous la déformation, R_i(r) \rightarrow R_i(r) + dxi(r)

$$\text{donc } dl'_i(r) = \frac{dl_i(r)}{R_i(r)} \times (R_i(r) + d\xi(r))$$

Variation de $d\sigma(r)$

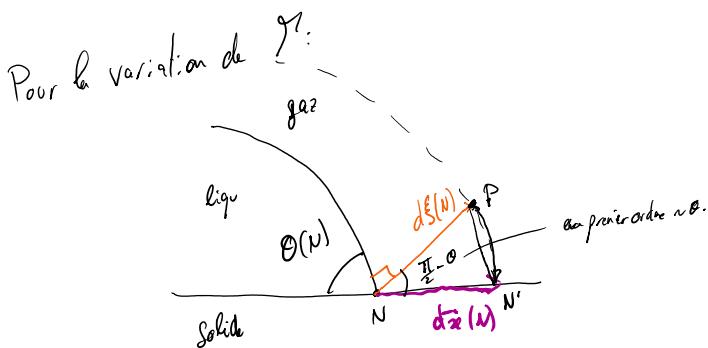
$$dl'_1(r) dl'_2(r) - dl_1(r) dl_2(r) = d\xi(r) d\sigma(r) \times \epsilon(r)$$

$$d\ell_1'(r) d\ell_2'(r) - d\ell_1(r) d\ell_2(r) = d\xi(r) \left(\frac{1}{R_1(r)} + \frac{1}{R_2(r)} \right) = d\xi(r) d\sigma(r) \times \mathcal{E}(r)$$

Premier ordre

Variation de $d\xi$ du fait de la calotte sphérique

$$\int_{N \in \Sigma_g} d\xi(r) d\sigma(r) \left(\frac{1}{R_1(r)} + \frac{1}{R_2(r)} \right)$$



Pour la variation de γ

$$N'p = \cos(\theta(N)) d\alpha(N)$$

donc contribue à la variation de Σ_g pour

$$\int_{N \in M} \cos(\theta(N)) d\alpha(N) d\ell(N)$$

Finlement: $d\Sigma_g = \int_{N \in \Sigma_g} d\xi(r) d\sigma(r) \mathcal{E}(r) + \int_{N \in M} \cos(\theta(N)) d\alpha(N) d\ell(N)$

Bilan:

$$df^0 = \int_{N \in \Sigma_g} d\sigma(r) d\xi(r) \left((p_0 - p) + \gamma_{sg} \left(\frac{1}{R_1(r)} + \frac{1}{R_2(r)} \right) \right)$$

$$+ \int_{N \in M} d\ell(N) d\alpha(N) \left(\gamma_{sg} \cos(\theta(N)) + \gamma_{ls} - \gamma_{sg} \right)$$

$d\alpha, d\xi$ indép doivent être nul !

\Rightarrow les deux termes doivent être nul !

Équilibre \Rightarrow

$$\text{Pour tout } r \in \Sigma_g, \quad p_0 - p_0 + \gamma_{sg} \left(\frac{1}{R_1(r)} - \frac{1}{R_2(r)} \right) = 0$$

Équation

Pour tout $\eta \in \Sigma_{\text{eg}}$, $p_0 - p_\eta + \gamma_{\text{eg}} \left(\frac{1}{R_1(\eta)} - \frac{1}{R_2(\eta)} \right) = 0$

Loi de Laplace

Pour tout $N \in \mathbb{N}$ $\gamma_{\text{eg}} \cos(\theta(N)) + \gamma_{\text{ls}} - \gamma_{\text{sg}} = 0$

Loi de Young-Dupré

3) Loi de Laplace

Tension de surface est source de variation de pression à l'intérieur des gouttes

$$p_{\text{int}}(\eta) - p_{\text{ext}}(\eta) = \gamma_{\text{lap}} \mathcal{E}(\eta)$$

avec η sur l'interface entre phases α et β

Pour une goutte sphérique de rayon R : $\mathcal{E} = \frac{2}{R}$

donc surpression dans la goutte

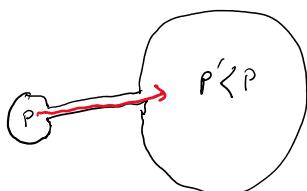
d'autant plus grande que R est petit

Exemple: Pour $R \approx 1\text{mm}$ (aérosol), $p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} \approx 1\text{bar}$

$R \approx 1\text{cm}$ (bulle de savon), $p_{\text{int}} - p_{\text{ext}} \approx 10\text{Pa}$

Expérimentalement:

marquage d'Ostwald
les petites bulles se vident
dans les grandes



→ effet de vieillissement dans les emulsions.

3) Loi d'Young-Dupré - Menillez

1 n 1 D. & V. Y.-D.

3) Loi de Young-Dupré

Équilibre de la ligne triple donne la loi de Young-Dupré

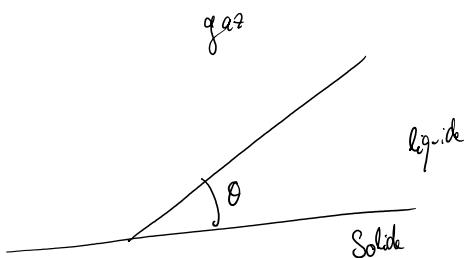
$$\gamma_{lg} \cos(\theta) = \gamma_{lg} - \gamma_{ls}$$

→ décrire comment une goutte s'étale sur un substrat solide (marquage)

Paramètre d'étalement:

$$S = \gamma_{gg} - (\gamma_{lg} + \gamma_{ls})$$

Caractérise la différence d'énergie entre substrat sec et marqué (il y a alors deux interfaces : ℓ et g)



Avec Young-Dupré:

$$S = \gamma_{lg} (\cos \theta - 1)$$

(i) $S > 0$ la présence de liquide est favorable

L'angle de marquage θ est mal défini ($\cos(\theta) > 1$)

Ligne triple instable, le liquide s'étale totalement sur le solide

On parle de marquage total

$$S > 0$$



(ii) $-2\gamma_{lg} < S < 0$: la présence de liquide est défavorable

Le liquide forme une calotte sphérique, avec angle de contact θ

→ marquage partiel

$$-2\gamma_{lg} < S < 0$$

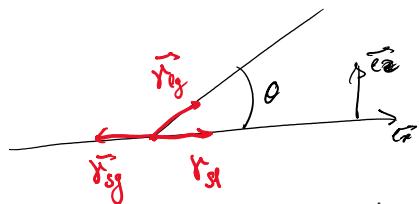


$$-2\gamma g < 0$$

N°iii

(iii) $S < -2\gamma g$, θ est mal défini. ($\cos(\theta) < -1$)
pas d'équilibre, la goutte ne repose sur le solide qu'en un point
 \rightarrow interface non-mouillante

Remarque:
Théorème de Young-Dupré par eq des forces de capillarité sur la ligne triple

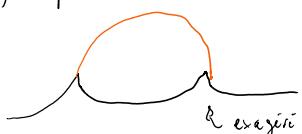


Young-Dupré = équilibre des forces selon \vec{r}_z

eq selon \vec{r}_z ?

↳ compensé par forces élastiques dans le substrat
généralement négligeable pour substrat rigide

(dans le cas interface liquide-liquide peut différer possible)



à exiger

III. Compétition entre gravité et capillarité

D) Nombre de Bond

Fluide de masse volumique ρ et de longueur caract L

$$\text{Pression hydrostatique : } P_g = \rho g L$$

$$\text{Pression capillaire : } P_c = \frac{\gamma}{L}$$

(avec Lo. de Laplace)

Nombre sans dimension pour comparer ces effets

$$\left| B_o = \frac{P_g}{P_c} = \frac{\rho g L^2}{\gamma} \right|$$

Nombre de Bond

$$B_0 = \frac{P_g}{P_c} = \frac{\gamma g L^2}{\gamma} \quad | \quad \text{Nombre de Bond}$$

- $B_0 > 1$: effets de pesanteur prépondérants
- $B_0 < 1$: pesanteur négligeable, effet capillaire

Longueur critique de traction : $l_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$ = longeur capillaire

- si $L \ll l_c$: capilarité domine
- si $L \gg l_c$: pesanteur domine

Odg : eau : $l_c \approx 2.7 \text{ mm}$

mercure : $l_c \approx 1.8 \text{ mm}$

2) Ascension capillaire - Loi de Jurin

tube capillaire (de diamètre intérieur plus petit que l_c) plongé dans un liquide
 → ascension du ménisque dans le tube
 ascension d'autant plus haute que la tige est fine

Pour déterminer si effet d'ascension possible / favorable

Paramètre d'imprégnation : $I = \gamma_{sg} - \gamma_{sl}$

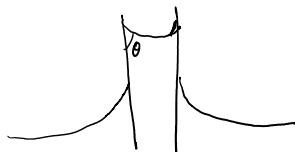
Si $I < 0$, mouillage défavorable



descente capillaire

(cas de mercure)

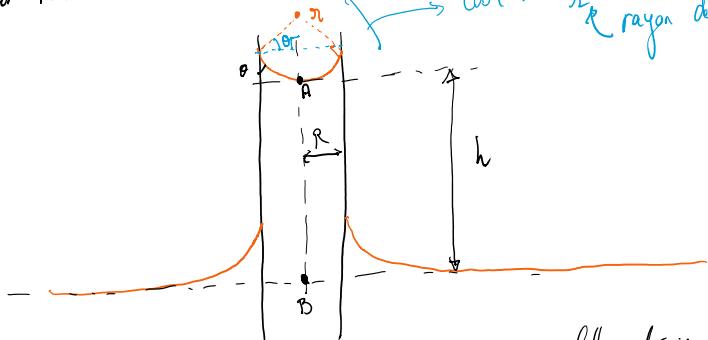
Si $I > 0$, abaissement de l'énergie si le tube est mouillé
 ↳ ascension capillaire



Avec Young-Dupré: $I = \gamma g \cos(\theta)$

Mouillage favorable $\Rightarrow \theta < \frac{\pi}{2}$

Tube de Rayon R et h la hauteur de montée mesurée à la surface libre et bas du ménisque



$$\cos(\theta) = \frac{R}{r}$$

r = rayon de courbure du ménisque

$R \ll r_c \Rightarrow$ le ménisque est une bonne approximation une calotte sphérique de rayon $\frac{R}{\cos(\theta)}$

Dans un tube de ménisque, surpression due à la loi de Laplace

$$P_A = P_0 - \frac{2 \gamma g \cos(\theta)}{R}$$

(signe - car rayon de courbure négatif du point de vue du fluide)

(signe - car rayon de courbure négatif du point de vue du fluide)

$$P_A = P_B - \rho g h$$

ρ masse volumique de liquide

Comme B à la surface libre, hydrostatique $\Rightarrow P_B = P_0$

$$\text{donc } h = \frac{2 \gamma g \cos(\theta)}{\rho g}$$

Loi de Jurin

On retrouve bien l'équation en $\frac{1}{R}$

Pour de l'eau: $R \approx 0.5 \text{ mm}$, $h \approx 2 \text{ cm}$

angle subit un cycle d'hystérèse
on fait de si la goutte est formée
en monté ou descente
 \rightarrow dissolution des Jolides
et petites bulles de goutte goutte perles.

3) Etalement d'une goutte

$R \ll r_c \rightarrow$ goutte sphérique


 pression à l'intérieur de la goutte est celle à la pression de Laplace
 celle-ci dépend de la courbure.
 \hookrightarrow pression = cst \Rightarrow courbure = cst
 \hookrightarrow donc goutte a bulle sphérique.

(angle donné par Young - Dupré)

$R \gg l_c$ la goutte s'aplatis



épaisseur e quasi-constante

si $R \gg l_c$, diamètre donné par $2R$

Variation de la surface d'étalage

$R \rightarrow R + dR \}$ à volume constant
 $e \rightarrow e + de \}$

$$V = \pi R^2 e \text{ donc } dV = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{2dR}{R} = -\frac{de}{e}}$$

Variation de $e \Rightarrow$ variation du centre de gravité donc de l'énergie potentielle

$$dE = \gamma_{lg} dE_{lg} + \gamma_{ls} dE_{ls} + \gamma_{sg} dE_{sg} + f_z \frac{Vg}{2} de$$

position de centre de gravité en e .

$$\begin{aligned} dE_{lg} &= dE_l = -dE_{sg} = 2\pi R dR \\ \hookrightarrow dE &= \pi R^2 \left(\frac{\gamma_{lg} + \gamma_{ls} - \gamma_{sg}}{e} + f_z \frac{d}{2} \right) de \end{aligned}$$

donc équilibre si

$$e = \sqrt{\frac{2\gamma_g}{f_z}} \sqrt{1 - \cos(\theta)} \quad (\text{Young - Dupré})$$

$$\Rightarrow \boxed{e = 2l_c \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$



Notamment, mouillage total donc $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \epsilon \rightarrow 0$

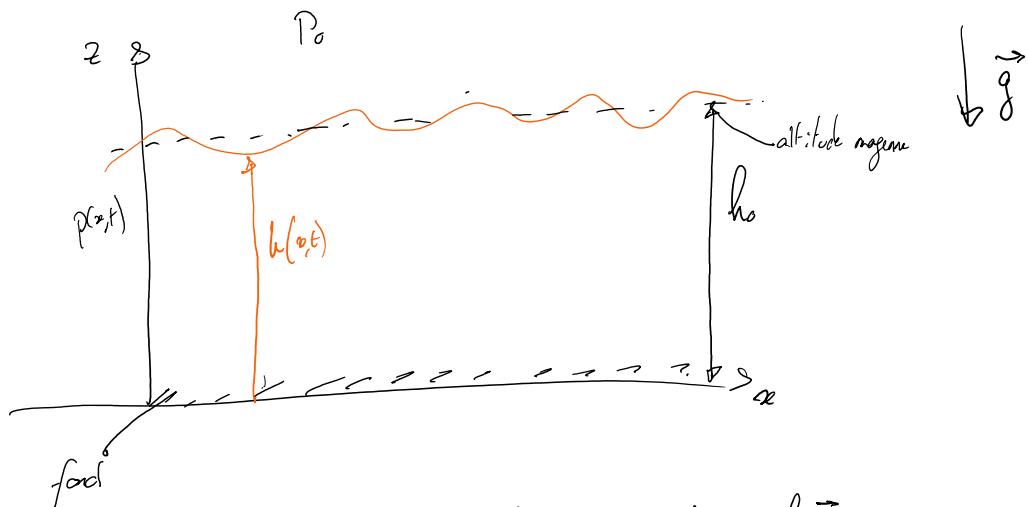
Suite

vendredi 31 janvier 2025 13:31

IV - Ondes gravito-capillaires

1) Propagation des ondes

Position du problème:



Hautur h_0 de liquide, qui repose sur un fond en $z=0$ de normale \vec{e}_z
→ ondes de surface, variations de la hauteur $h(x, t)$ de la surface libre
→ atmosphère de pression p_0 constante
→ invariance par translation selon \vec{e}_x

Compétition entre plusieurs effets:

- inertie des particules de fluide
- rappel du à la pesanteur (qui s'oppose à l'élevation du centre de gravité)
- rappel du à la tension de surface (qui s'oppose à la courbure de la surface libre)

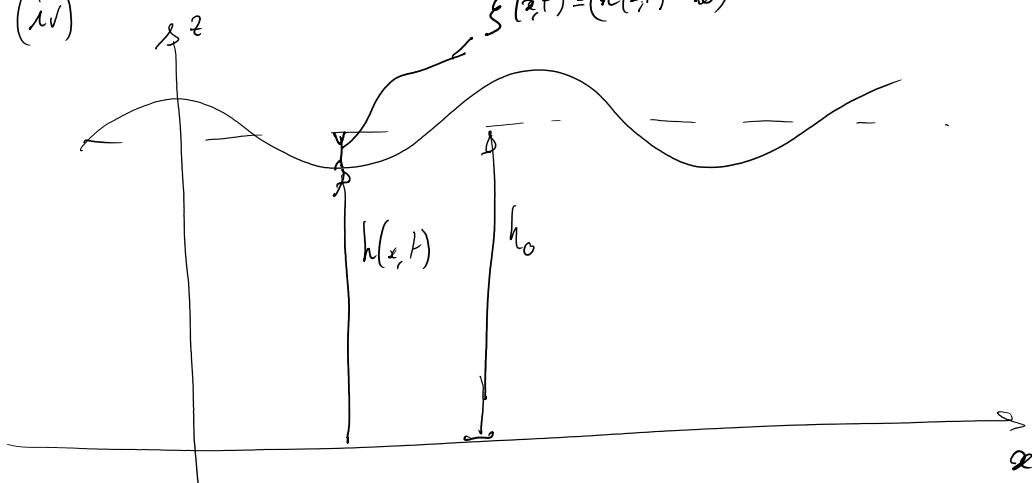
Hypothèses:

(i) Écoulement incompressible $\Rightarrow p \text{ cst}$

(ii) Écoulement parfait (pas de dissipation visqueuse).

- (ii) Écoulement parfait (pas de dissipation visqueuse).
 (iii) Fluide initialement au repos et faible perturbation $\Rightarrow \vec{v}$ faible, et linearisation.

(iv) $\xi(x,t) = (h(x,t) - h_0)$



Faible amplitude $|\xi(x,t)| \ll h_0$

Écoulement parfait $\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{v}$ conservée
théorème de Kelvin

Initiallement $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{0} \quad \forall t$

donc $\exists \vec{\psi} / \vec{v}(x,z,t) = \vec{\nabla} \vec{\psi}(x,z,t)$

Et incompressible : $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\Delta \vec{\psi}(x,z,t) = 0}$

Résolution dépend fortement des CL

Conditions aux limites

• Présence de fond $\Rightarrow v_z(x, 0, t) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\partial_z \vec{\psi}(x, 0, t) = 0} \quad (1)$

à l'atmosphère \Rightarrow courbure de l'interface liquide/gaz

- Déformation surface \Rightarrow courbure de l'interface liquide gazeuse
 \Rightarrow dis continuité de la pression

Loi de Laplace:

$$p(x, h(x,t), t) = p_0 + \gamma g \xi(x,t)$$

À un premier ordre: $\xi(x,t) \approx -\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}(x,t)$

$$\text{et donc } p(x, h_0, t) = p_0 - \gamma g \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}(x,t) \quad (2)$$

- La composante normale de la vitesse à l'interface est la vitesse de l'interface.

La composante normale de la vitesse à l'interface est la vitesse de l'interface et donc:

Dans l'hypothèse des faibles amplitudes, la normale à l'interface est \vec{e}_z donc:

$$\partial_z [x, h_0 + \xi(x,t), t] = \partial_z \xi(x,t)$$

donc au premier ordre:

$$\partial_z \vec{v} (x, h_0, t) = \partial_z \xi(x,t) \quad | \quad (3)$$

Couplage de \vec{v} , ξ et p qui sont aussi couplés par l'écoulement

éq d'Euler (pour faible fluctuations):

$$p \partial_z \vec{v}(x, z, t) = - \vec{\nabla} p(x, z, t) + \rho \vec{g}$$

\Rightarrow relation de Bernoulli:

$$\partial_z \phi(x, z, t) + \frac{p(x, z, t)}{\rho} + g z = K \quad |$$

En la surface libre

$$\partial_z \phi(x, h_0 + \xi(x,t), t) + \frac{p(x, h_0 + \xi(x,t), t)}{\rho} + g (h_0 + \xi(x,t)) = K$$

Premier ordre:

$$\partial_t \bar{\Phi}(x, h_0, t) + \frac{P(x, h_0, t)}{C} + g \xi(x, t) = K - g h_0$$

Avec (2)

$$\hookrightarrow \left[\partial_t \bar{\Phi}(x, h_0, t) - \frac{g h_0}{C} \partial_x^2 \xi(x, t) + g \xi(x, t) = K - g h_0 - \frac{P_0}{C} \right] \quad (4)$$

Donc CL données par (1), (3), (4)

on prend (4) et (3) pour avoir des CL pour $\bar{\Phi}$ uniquement.

$$\partial_t^2 \bar{\Phi}(x, h_0, t) - \frac{g h_0}{C} \partial_x^2 \partial_t \xi(x, t) + g \partial_t \xi(x, t) = 0$$

$$\hookrightarrow \left[\partial_t^2 \bar{\Phi}(x, h_0, t) - \frac{g h_0}{C} \partial_x^2 \partial_t \bar{\Phi}(x, h_0, t) + g \partial_x^2 \bar{\Phi}(x, h_0, t) = 0 \right] \quad (3)$$

Donc CL en $\bar{\Phi} = (1)$ et (5)

Recherche de solutions:

Propagation d'ondes selon x , et stationnaire selon z

$\Downarrow z \rightarrow g$ parce que

$$\text{Ansatz: } \bar{\Phi}(x, z, t) = Z(x) e^{i(\omega t - k z)}$$

$$\Delta \bar{\Phi}(x, z, t) = 0 \Rightarrow -k^2 Z(z) + Z''(z) = 0$$

$$\text{donc } \exists A, B / Z(z) = A \operatorname{ch}(k z) + B \operatorname{sh}(k z)$$

$$\text{CL: (1)} \Rightarrow \partial_z \bar{\Phi}(x, 0, t) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$(5) \quad -\omega^2 Z(h_0) + \frac{g h_0}{C} k^2 Z'(h_0) + g Z''(h_0) = 0$$

$$\text{donc } -\omega^2 \operatorname{ch}(k h_0) + k \left(g + \frac{g h_0 k^2}{C} \right) \operatorname{sh}(k h_0) = 0$$

$$1_{..} = k g \left(1 + \frac{k^2 C}{g} \right) \operatorname{th}(k h_0)$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = g \left(1 + k^2 l_c^2 \right) \tanh(k h_0)} /$$

→ relation dispersion

$$\phi(x, z, t) = A \cosh(k h_0) \cos(\omega(h) t - k z + \varphi)$$

2) Régimes de dispersion

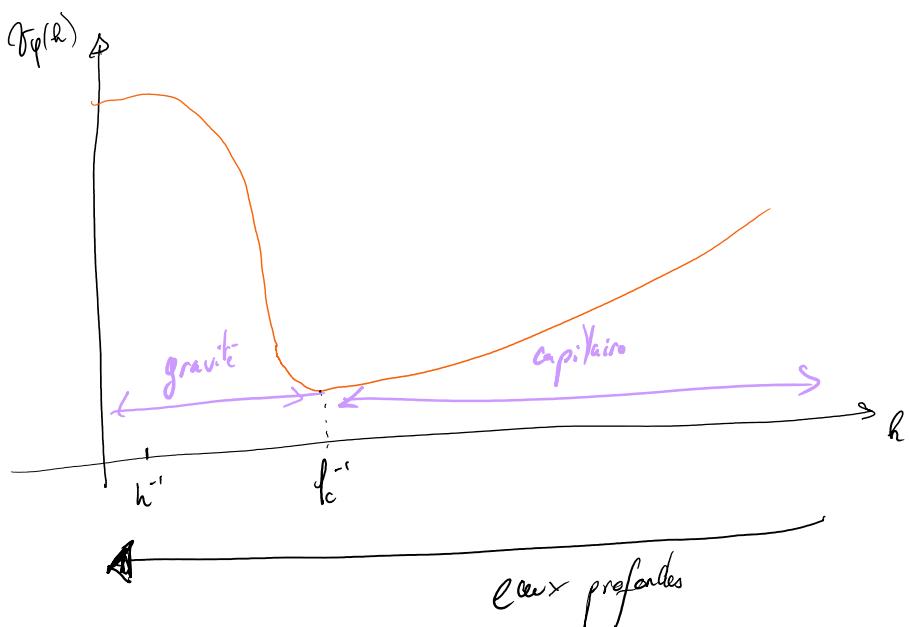
$$\omega_p(k) = \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{g \left(\frac{1}{h} + k^2 l_c^2 \right) \tanh(k h_0)}$$

Eaux profondes: $k h_0 \gg 1 \Leftrightarrow h_0 \gg \lambda$

alors $\tanh(k h_0) \gg 1 \Leftrightarrow h_0 \gg \lambda$

$$\omega_p(k) = \sqrt{g \left(\frac{1}{h} + k^2 l_c^2 \right)} \rightarrow \omega_p \text{ n'est pas monotone, min en } k = k_c^{-1}, \omega_{p,\min} = \sqrt{g l_c}$$

$h_0 > l_c$



si $k \ll k_c^{-1}$, ondes de gravité

$$\omega_p(k) = \sqrt{\frac{g}{h}}, \quad \omega_g(k) = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{g}{R}}$$

↳ dispersion normale.

↳ dispersion normale.

→ hôte en haute mer.

. si $k \gg l_c$, onde capillaire

$$\omega_q(k) = l_c \sqrt{g k}, \quad \nu_g(k) = \frac{3}{2} l_c \sqrt{g k}$$

don dispersion normale

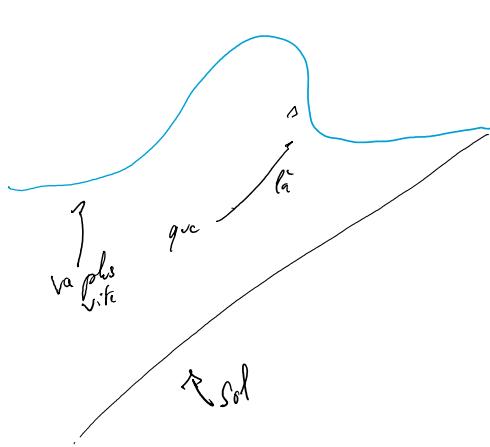
→ vagues d'onde, phénomène de faible λ .

Eau peu profonde

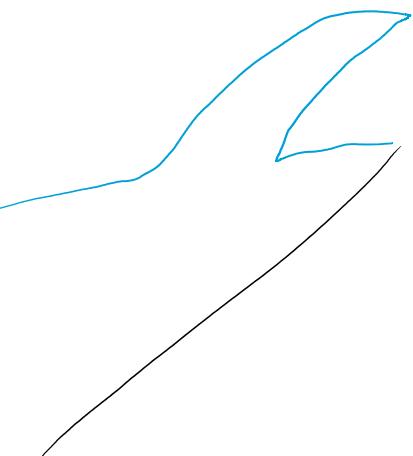
$$h \ll l_c \quad \omega_q(k) \sim \sqrt{g h} (1 + h^2/l_c^2)$$

$$\text{si } k l_c \ll 1 \quad \omega_q(k) = \sqrt{g h}$$

→ pas de dispersion mais dépend de $h^{-\frac{1}{2}}$



⇒



→ déferlement des vagues (carrière du front d'onde rattrape l'avant)