

École normale supérieure de Lyon
Agrégation de Physique, 2024-2025

Optique

Christophe Winisdoerffer

Version : v2.2 2024/08/27

Fondements de l'optique géométrique

Dans tout ce chapitre, les milieux seront considérés comme localement homogènes et isotropes, ce qui permettra d'évacuer de la discussion toute problématique associée au caractère vectoriel de la lumière (cf. propagation dépendant de la polarisation dans un milieu inhomogène et/ou anisotrope). La définition du "localement" ne peut être donnée que dans une approche plus complète (électromagnétique) de l'optique. On ne considérera également que des milieux transparents.

§1 Définitions

§1.1 Rayon lumineux

Définition. Un rayon lumineux est une courbe (au sens mathématique du terme) suivant laquelle l'énergie lumineuse est transportée.

§1.2 Indice

Définition. L'indice d'un milieu transparent correspond au rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide c et la vitesse de la lumière dans ce milieu :

$$n = \frac{c}{v}, \quad (1.1)$$

avec $n \geq 1$, et $n = 1$ si et seulement si le milieu considéré est le vide.

Remarque. Par "lumière", il faut entendre "énergie lumineuse". On peut en effet montrer en électromagnétisme que la définition de l'indice repose sur la vitesse de phase de l'onde, qui coïncide avec la vitesse de groupe ainsi qu'avec la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique dans le cas d'un milieu non dispersif, i.e. un milieu pour lequel l'indice est indépendant de la fréquence de l'onde considérée. Ce n'est plus le cas si le milieu est dispersif, mais on peut alors montrer que l'indice n'est plus réel, que la partie imaginaire de l'indice correspond à de l'absorption, en d'autres termes que le milieu n'est plus transparent. Néanmoins, pour un milieu diélectrique dispersif, pourvu que les aspects "absorption" ne soient pas pertinents dans le contexte considéré, on peut étendre la relation précédente en s'appuyant sur la forme que prend une onde plane se propageant selon l'axe Oz et de pulsation ω , solution de l'équation de propagation de Helmholtz, $\mathbf{E} = E_0 \exp(-i\omega t) \exp(i k_z z) \exp(i k_x x)$: n' et n'' correspondent respectivement aux parties réelle et imaginaire de n défini à l'aide de l'équation de dispersion $k = \omega/c$ et de la susceptibilité relative $\kappa \equiv \sqrt{\epsilon_r} \equiv n' + in''$. La vitesse de phase vérifie alors :

$$v_p = \frac{c}{n'} \quad \text{avec} \quad n' = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{C + \sqrt{C^2 + k_x^2}}, \quad (1.2)$$

ce qui assure dans ce cas également¹ que $v_p < c$. La vitesse de groupe, définie par $v_g \equiv dv/dk = c/(n + \omega dn/d\omega)$ peut prendre des valeurs inférieures, mais également supérieures (voire négatives !) si n dépend fortement de ω (ce qui est le cas au voisinage d'une résonance atomique), mais son interprétation comme "vitesse de propagation d'un paquet d'onde" n'est alors plus pertinente.

¹Faut-il rappeler que ce résultat n'est en rien une obligation, le contre-exemple traditionnel étant celui de la propagation d'une onde plane dans un plasma, pour lequel la relation de dispersion vient $\omega^2 = \omega_0^2 - c^2 k^2$.



§I.3 Chemin optique

Définition. Soit Γ un arc de courbe passant par deux points M et M' . On appelle "chemin optique de M à M' " l'intégrale curviligne :

$$\mathcal{L}(MM') \equiv [MM'] \equiv \int_{MM'} n \, ds, \quad (1.3)$$

où ds est l'élément infinitésimal d'abscisse curviligne le long de la courbe Γ .

Remarque. Le chemin optique est une grandeur algébrique : la courbe Γ étant orientée, si le sens du chemin d'intégration est le même que celui de la courbe Γ , alors $[MM'] > 0$, sinon $[MM'] < 0$.

Remarque. La courbe Γ est tracée dans un milieu d'indice n . Si le milieu est homogène, alors :

$$[MM'] = \int_{MM'} n \, ds = n \int_{MM'} ds, \quad (1.4)$$

mais ce n'est pas le cas si Γ traverse une surface séparant deux milieux homogènes, ou si n varie (localement pour rester dans le cadre de l'optique géométrique) dans l'espace.

Remarque. Le chemin optique le long d'un rayon lumineux correspond au temps mis par la lumière pour aller de M à M' . En effet, pour un rayon lumineux, on a, pour un arc de longueur ds , un temps de parcours égal à $d\tau = ds/v = n ds/c$, et donc :

$$[MM'] = \int_{\substack{MM' \\ \text{rayon lum.}}} n \, ds = c \int_{\substack{MM' \\ \text{rayon lum.}}} d\tau = c \Delta t_{M \rightarrow M'}. \quad (1.5)$$

§II Principe de Fermat (1650)

Énoncé. De toutes les courbes menant de M à M' , celle(s) qui correspond(ent) à un rayon lumineux est(sont) celle(s) pour laquelle(es) le chemin optique est stationnaire.

Soit Γ_1 un arc de courbe paramétré par l'abscisse curviligne s , menant de M à M' . On considère une transformation infinitésimale qui, à tout point $P_1 \in \Gamma_1$, associe un point $P_2 \in \Gamma_2$, avec $|P_1 P_2| = \epsilon f(s)$, où f est une fonction continue et dérivable, avec $f(s_M) = 0 = f(s_{M'})$. La continuité de f assure que :

$$\int_{\Gamma_1} n \, ds - \int_{\Gamma_2} n \, ds = \mathcal{O}(\epsilon^2) \text{ a priori.} \quad (1.6)$$

Le principe de Fermat dit que Γ_1 correspond à un rayon lumineux si et seulement si :

$$\int_{\Gamma_1} n \, ds - \int_{\Gamma_2} n \, ds = \mathcal{O}(\epsilon^2) \text{ quelque soit la fonction } f \text{ considérée.} \quad (1.7)$$

Par conséquent, $[MM']$ est "minimal ou maximal" (localement) suivant un rayon lumineux.



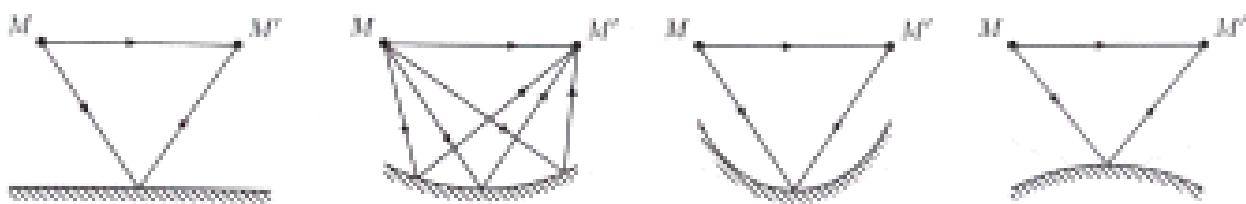


Figure 1.1: Illustration du caractère minimal ou maximal du chemin optique associé à un rayon lumineux : de droite à gauche, réflexion sur un miroir plan (minimal), réflexion sur un miroir elliptique (cas dégénéré), réflexion sur un miroir plus concave que l'ellipse (maximal), réflexion sur un miroir moins concave que l'ellipse (minimal).

Remarque. Héron d'Alexandrie, 300 ans avant JC, avait interprété la propagation rectiligne de la lumière (dans un milieu homogène) et les propriétés de la réflexion spéculaire en postulant que la lumière emprunte toujours "le trajet le plus court" pour aller d'un point à un autre.

§III Applications

§III.1 "Principe" du retour inverse de la lumière

Soit un rayon lumineux allant de M à M' . Le chemin optique s'écrit :

$$[MM'] = \int_{M \rightarrow M'} n \, ds = - \int_{M' \rightarrow M} n \, ds = -[M'M]. \quad (1.8)$$

Comme $[MM']$ est stationnaire car calculé sur un rayon lumineux, $[M'M]$ l'est aussi, i.e. la même courbe Γ correspond à un rayon lumineux allant de M à M' , ou à un rayon lumineux allant de M' à M (avec l'orientation opposée bien évidemment).



§III.2 Propagation rectiligne de la lumière dans un milieu homogène

Un milieu homogène est caractérisé par un indice indépendant de la position considérée de l'espace. Le chemin optique de M à M' s'écrit alors :

$$[MM'] = \int_{M \rightarrow M'} n \, ds = n \int_{M \overset{\text{arc}}{\rightarrow} M'} ds = n \hat{MM'}, \quad (1.9)$$

où $\hat{MM'}$ désigne la longueur de l'arc de courbe reliant M à M' . Le chemin optique est donc stationnaire (et en l'occurrence minimal) si l'arc de courbe reliant M à M' est un segment² de droite.

§III.3 Lois de Snell-Descartes

L'existence d'une surface, appelée dioptrique, séparant deux milieux localement homogènes et isotropes, affecte la propagation de la lumière. Cela se traduit par le dédoublement éventuel d'un rayon lumineux incident en un rayon réfléchi (phénomène de réflexion) et un rayon réfracté (phénomène de réfraction). Les lois précisent

²Cela est bien entendu valable dans un espace euclidien. Si l'espace "est courbe", alors le principe de Fermat reste valable, mais le chemin le plus court mesuré de M à M' ne coïncide plus forcément avec un segment de droite. On parle alors de géodésique.

les angles de réflexion/réfraction en fonction de l'angle d'incidence sont les lois découvertes³ par Snell (1621) et Descartes (1637).

Ces lois s'obtiennent à partir du principe de Fermat. On considère pour cela un dioptrie localement plan (pour pouvoir définir une normale [locale] à ce dioptrie) séparant deux milieux homogènes et isotropes d'indice n_1 et n_2 . Dans chacun des deux milieux, le rayon lumineux correspond donc à un segment de droite. La question est donc de déterminer le point $P \in \mathcal{S}$ où "tracer les deux segments" pour satisfaire le principe de Fermat sur l'ensemble de la courbe menant de M_1 à M_2 . On considère pour cela un point $P' \in \mathcal{S}$ infiniment voisin de P , et on détermine la variation de chemin optique. On a :

$$[M_1 M_2] = n_1 \|M_1 P\| + n_2 \|PM_2\| \quad (\text{via } P) \quad = n_1 \|M_1 P'\| + n_2 \|P'M_2\| \quad (\text{via } P'). \quad (1.10)$$

d'où :

$$\delta[M_1 M_2] = n_1 (\|M_1 P'\| - \|M_1 P\|) + n_2 (\|P'M_2\| - \|PM_2\|). \quad (1.11)$$

Or :

$$\|M_1 P'\| = \|M_1 P + PP'\| = \sqrt{(M_1 P + PP') \cdot (M_1 P + PP')} \quad (1.12)$$

$$= \|M_1 P\| \left(1 + \frac{M_1 P \cdot PP'}{\|M_1 P\|^2} + O\left(\frac{\|PP'\|^2}{\|M_1 P\|^2}\right) \right), \quad (1.13)$$

et une formule similaire pour $\|P'M_2\|$. On en déduit (à l'ordre le plus bas) :

$$\delta[M_1 M_2] = n_1 \frac{M_1 P}{\|M_1 P\|} \cdot PP' + n_2 \frac{M_2 P}{\|M_2 P\|} \cdot PP' = (n_1 u_1 - n_2 u_2) \cdot PP', \quad (1.14)$$

où l'on a introduit les vecteurs unitaires des segments de droite orientés dans le sens de la propagation $u_1 = M_1 P / \|M_1 P\|$ et $u_2 = PM_2 / \|PM_2\|$. Comme $\delta[M_1 M_2]$ doit être nul (à l'ordre le plus bas) lorsque $P \in \mathcal{S}$ se trouve sur le rayon lumineux, et que $P' \in \mathcal{S}$, il faut donc que le rayon lumineux satisfasse :

$$n_1 u_1 - n_2 u_2 = k \mathbf{N}, \quad (1.15)$$

où \mathbf{N} désigne la normale au dioptrie au point P (et k est une constante sans intérêt dans l'immediat).

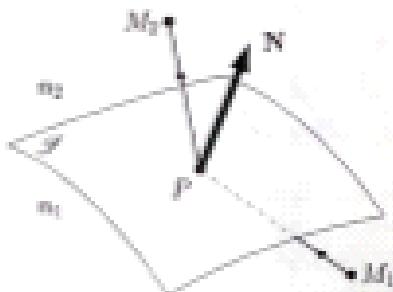
Remarque. On a traité le cas où M_2 appartient au milieu d'indice n_2 , mais rien ne change dans la démonstration si l'on place M_2 du même côté du dioptrie que M_1 : la démonstration recouvre donc à la fois la réfraction et la réflexion d'un rayon lumineux sur un dioptrie.

De l'équation Eq.(1.15) découlent les "relations de Snell-Descartes" sous leur forme habituelle⁴. Ainsi, comme u_2 s'écrit sous la forme d'une combinaison linéaire de u_1 et \mathbf{N} , u_2 appartient au plan défini par u_1 et \mathbf{N} , appelé plan d'incidence. Par conséquent, rayon réfracté, rayon réfléchi et rayon incident (forcément !) appartiennent au plan d'incidence : c'est la première loi de Snell-Descartes. La seconde loi de Snell-Descartes s'obtient en effectuant le produit vectoriel par \mathbf{N} de la relation Eq.(1.15) :

$$n_1 \mathbf{N} \times u_1 - n_2 \mathbf{N} \times u_2 = 0, \quad (1.16)$$

³Il vaut dire ces lois apparaissent dès la fin du X^e siècle dans un manuscrit de mathématicien persan à la cour de Bagdad, Abu Sahl al-Ala Ibn Sahl [KwDut2022].

⁴Köpler donne dès 1611 les lois de la réfraction dans la limite des petits angles.



soit, en introduisant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{l'angle d'incidence} & i_1 = (\mathbf{N}, \mathbf{u}_1) \\ \text{l'angle de réfraction} & i_2 = (\mathbf{N}, \mathbf{u}_2) \\ \text{l'angle d'incidence} & i_1 = (\mathbf{N}, \mathbf{u}_1) \\ \text{l'angle de réflexion} & i_2 = (\mathbf{N}, \mathbf{u}_2) \end{array} \right. : \begin{array}{l} n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2, \\ i_2 = \pi - i_1. \end{array} \quad (1.17)$$



Figure 1.2: Illustration des lois de la réfraction (à gauche) et de la réflexion (à droite).

Remarque. L'optique ne permet pas, sauf dans le cas de la réflexion totale, de déterminer les intensités respectives du rayon réfléchi et du rayon réfracté. C'est l'électromagnétisme qui permet de le faire, et les formules correspondantes sont connues sous la dénomination de "coefficients de Fresnel".

Angle limite de réfraction

Les lois de Snell-Descartes imposent qu'il existe un angle limite⁵ pour la réfraction au passage d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent. La démonstration est immédiate : si $n_1 > n_2$, l'équation $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ n'admet pas de solution $i_2 \in \mathbb{R}$ si $(n_1 \sin i_1)/n_2 > 1$. Cela définit un angle maximal d'incidence $i_1^{\max} = \arcsin(n_2/n_1)$ au-delà duquel il n'y a plus de rayon réfracté ; il y a alors réflexion totale.

§III.4 Équation des rayons lumineux

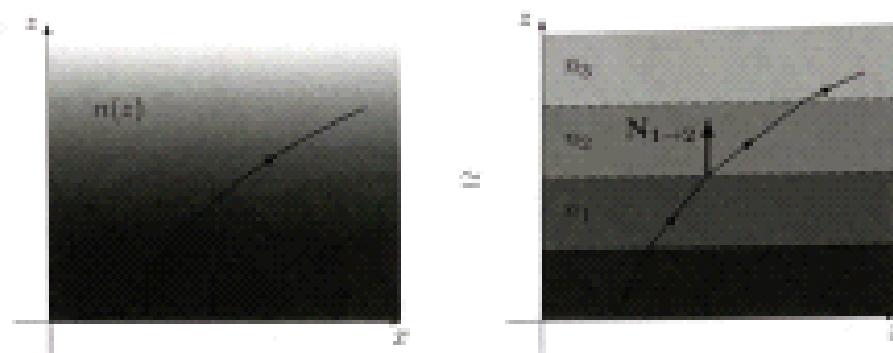
L'équation des rayons lumineux dans un milieu (évidemment/entièrement) inhomogène peut être obtenue comme passage à la limite continue du cas précédent, ou directement à partir du principe de Fermat. Les deux démonstrations sont instructives, et sont donc développées ci-dessous.

Première démonstration. On considère un milieu inhomogène comme la limite continue de la juxtaposition de milieux localement homogènes d'indices différents, comme illustré ci-dessous pour le cas unidimensionnel. Un dioptrre correspond donc à une surface équi-indice, et la normale à ce dioptrre est donc colinéaire à ∇n . La relation Eq.(1.15) s'écrit donc, pour chacun de ces dioptries :

$$d(nu) = k \nabla n. \quad (1.18)$$

⁵Cette même problématique abordée dans le cadre de l'électromagnétisme permet notamment de montrer qu'il apparaît une onde transcente (dans le milieu le moins réfringent), à l'origine d'une correction aux lois de Snell-Descartes correspondant à un décalage spatial (de l'ordre de la longueur d'onde) du faisceau diffusé. En fonction de la polarisation du faisceau incident, ce décalage peut varier sous le nom d'effet Goos-Hänchen ou effet Imbert-Fedorov.

²Cette même problématique abordée dans le cadre de l'electromagnétisme permet notamment de montrer qu'il apparaît une onde transcente (dans le milieu le moins réfringent), à l'origine d'une correction aux lois de Snell-Descartes correspondant à un décalage spatial (de l'ordre de la longueur d'onde) du faisceau diffusé. En fonction de la polarisation du faisceau incident, ce phénomène est connu sous le nom d'effet Goos-Hänchen ou effet Imbert-Fedorov.



En introduisant l'abscisse curviligne s permettant de paramétriser le rayon lumineux, et en notant que le vecteur unitaire tangent au rayon lumineux correspond à $u = dr/ds$ (avec le choix approprié de s pour assurer la normalisation), on a :

$$0 = u \cdot [d(nu) - k \nabla n] = u \cdot (udn + ndu) - k \frac{du \cdot \nabla n}{ds} = dn - k \frac{dn}{ds}, \quad (1.19)$$

où l'on a exploité, dans la dernière égalité, le fait que $u \cdot u = 1$ (et donc que $u \cdot du = d(u \cdot u/2) = 0$) et la définition de $\nabla n \equiv dn/dr$. On en déduit que k n'est rien d'autre que ds , ce qui conduit finalement à "l'équation des rayons lumineux" :

$$\frac{d(ns)}{ds} = \nabla n \text{ avec } u = dr/ds \text{ vecteur unitaire le long du rayon lumineux.} \quad (1.20)$$

Seconde démonstration. Soit Γ une courbe paramétrée par un paramètre s , associée au chemin optique $\mathcal{L}(M M')$. Par définition de l'intégrale curviligne sur Γ , on a, en repérant un point P par ses coordonnées cartésiennes :

$$\mathcal{L}(MM') = \int_{M(M')} n(x, y, z) ds = \int_{s_M}^{s_{M'}} n(x_s, y_s, z_s) \sqrt{\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2} ds. \quad (1.21)$$

Le principe de Fermat invite à considérer à quelle(s) condition(s) le chemin optique est stationnaire, i.e. $\delta \mathcal{L}(M M') = 0$. La mécanique analytique et les équations d'Euler-Lagrange fournissent la réponse ; il faut et il suffit que :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \text{ avec } \mathcal{L}((q_1), \{q_i\}) = n(x, y, z) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ et } x = q_1, y = q_2, z = q_3. \quad (1.22)$$

On a donc les trois équations suivantes :

$$\frac{d}{ds} \frac{n x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\partial n}{\partial x}, \quad \frac{d}{ds} \frac{n y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\partial n}{\partial y}, \quad \text{et} \quad \frac{d}{ds} \frac{n z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\partial n}{\partial z}, \quad (1.23)$$

qui ne sont rien d'autres que les trois composantes cartésiennes de l'équation :

qui ne sont rien d'autres que les trois composantes cartésiennes de l'équation :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{n dr/ds}{\|dr/ds\|} \right) = \nabla n, \quad (1.24)$$

soit encore :

$$\frac{d(nu)}{ds} = \nabla n \text{ avec } u = dr/ds \text{ vecteur unitaire le long du rayon lumineux.} \quad (1.25)$$

□

Exercices

Chapitre 1. Fondements de l'optique géométrique

13

Parmi les applications de cette équation, on peut citer les mirages, les lentilles à gradient d'indice, les fibres optiques à gradient d'indice (et à const. d'indice), et le phénomène de réfraction/absorption/déviation atmosphérique.

Remarque. Cette équation est le "miracle de l'optique géométrique", et justifie le fait que l'on ait pu développer cette branche de la physique bien avant de connaître la nature "onde électromagnétique" de la lumière : le rayon lumineux satisfait une équation différentielle indépendante de la longueur d'onde et/ou de la polarisation (caractère ondulatoire/vectoriel), mais où n'apparaît que la "géométrie" (i.e. la distribution spatiale des indices) du milieu dans lequel se propage la lumière. Spécifier les conditions initiales du rayon lumineux et la géométrie du milieu suffit donc pour obtenir la "trajectoire de la lumière".

§III.5 Théorème de Malus-Dupin

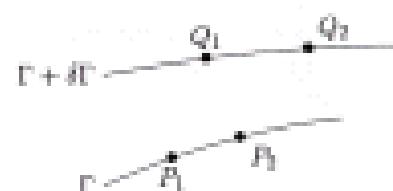
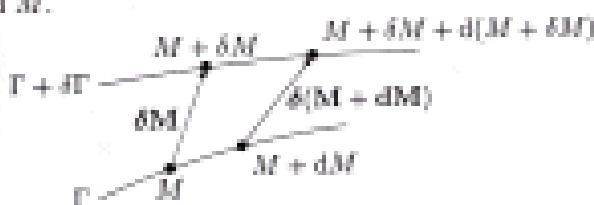
Théorème. Soit un ensemble de rayons lumineux issus d'un même point source S (on parle alors de faisceau isogène), correspondant aux normales d'un ensemble de surfaces. Soient M et M' deux points appartenant à l'une de ces surfaces. Alors les chemins optiques $[SM]$ et $[SM']$ calculés le long de chemins des rayons lumineux sont égaux.



Démonstration. Déterminons la différence de chemin optique entre \hat{SM} et \hat{SM}' , avec M' infinitésimement voisin de M . On a :

$$\Delta S' = |SM'| - |SM| = \int_{S\hat{M}} n ds - \int_{S\hat{M}'} n ds = \int_{S\hat{M}} dn ds + \int_{S\hat{M}} n d(ds), \quad (1.26)$$

avec $dn = \nabla n \cdot dM$ et $d(ds) = \delta\sqrt{dM \cdot dM} = dM \cdot \delta dM/ds = u \cdot dM$, où u est le vecteur unitaire tangent en M .



Les points P_1 et P_2 (resp. Q_1 et Q_2) appartiennent à la courbe Γ (resp. $\Gamma + \delta\Gamma$) et sont infinitésimement voisins. On note $P_1P_2 \equiv dM$, $Q_1Q_2 \equiv d(M + \delta M)$, et $P_2Q_1 \equiv \delta M$, $P_2Q_2 \equiv \delta(M + \delta M)$. On considère la transformation infinitésimale $\delta\varphi$: $\Gamma \rightarrow \Gamma + \delta\Gamma$, qui associe P_1 à Q_1 (i.e. $\delta\varphi(P_1) = Q_1$) et P_2 à Q_2 , et que l'on développe à l'ordre linéaire autour de P_1 . On a donc :

$$P_2Q_2 = P_1Q_1 + Q_1Q_2 = \delta M + d(M + \delta M) = \delta M + dM + \delta dM \quad (1.27)$$

développe à l'ordre linéaire autour de P_1 . On a donc :

$$P_1 Q_2 = P_1 Q_1 + Q_1 Q_2 - \delta M + d(M + \delta M) = \delta M + dM + \delta dM \quad (1.27)$$

$$= P_1 P_3 + P_3 Q_2 - dM + \delta(M + dM) = dM + \delta M + \delta dM, \quad (1.28)$$

ce qui établit que $d\delta M = \delta dM$ (dit plus rapidement, que les symboles δ et d commutent). On en déduit alors :

$$\Delta Z = \int_{S^{\delta M}} \nabla u \cdot \delta M \, ds + \int_{S^{\delta M}} n u \cdot d\delta M = \int_{S^{\delta M}} \nabla u \cdot \delta M \, ds + |nu \cdot \delta M|_S^H - \int_{S^{\delta M}} \delta M \cdot d(nu) \quad (1.29)$$

$$= nu \cdot MM' + \int_{S^{\delta M}} \delta M \cdot \left(\nabla u - \frac{d(nu)}{ds} \right) \, ds. \quad (1.30)$$

L'intégrale qui apparaît dans la dernière équation est nulle car $S^{\delta M}$ correspond à un rayon lumineux et satisfait donc l'équation des rayons lumineux. Reste donc $\Delta Z = nu \cdot MM'$. Or MM' appartient à la surface passant par M de normale u , donc $u \cdot MM' = 0$, et donc $\Delta Z = 0$. Un argument de continuité permet de généraliser le résultat de proche en proche pour parcourir toute la surface. \square

Remarque. Ce théorème prendra plus de sens (et d'importance) avec l'approche ondulatoire de l'optique ; les surfaces seront alors qualifiées de surfaces d'onde (ou surfaces équiphasées pour les ondes monochromatiques), et ramèner le calcul du déphasage entre deux trajets de rayon lumineux au calcul de la différence de chemin optique (ou différence de marche) pleinement justifié.

Remarque. L'orthogonalité entre rayon lumineux et surface d'onde n'est vrai que dans les milieux isotropes (ou isotropes par morceaux). Dans le cas des milieux biréfringents, on peut montrer que ce sont les vecteurs D (le "déplacement électrique"), B (le champ magnétique) et k (le vecteur d'onde local) qui définissent (localement) la structure d'onde plane et donc la surface équiphasée, mais que le vecteur de Poynting (sur lequel s'appuie la notion de rayon lumineux), lui, reste associé au champ électrique E et n'est donc plus nécessairement orthogonal à cette surface.

Références

- [KwDlu02] Alistair Kwan, John Dudley, and Eric Lantz. "Who really discovered Snell's law?" In: Physics World 15.4 (Apr. 2002), p. 64.





Formation des images en lumière incohérente

Il s'agit de la motivation première de l'optique géométrique. L'aspect "lumière incohérente" ne pourra être explicité que plus tardivement dans ce cours.

§1 Définitions

§1.1 Dioptrle

||| Définition. On appelle dioptrle une surface séparant deux milieux homogènes d'indice différent.

§1.2 Système optique

||| Définition. On appelle système optique un ensemble de dioptrles (éventuellement considéré dans la limite continue) et de surfaces réfléchissantes.

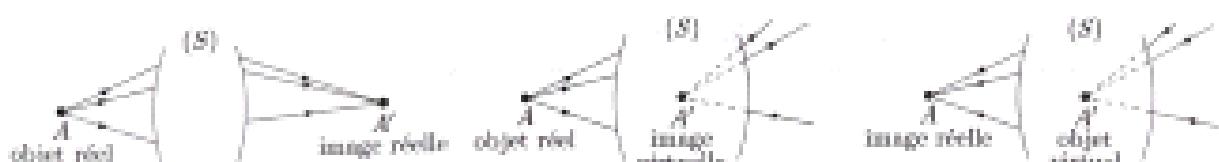
§1.3 Objets et images

||| Définition. Pour un système optique (S) donné, un point A est dit point objet s'il se trouve à l'intersection de rayons lumineux incident sur le système (S). Un point A' est dit image du point A par (S) si pour tout rayon lumineux incident sur (S) passant par A , le rayon émergent passe par A' . On dit alors qu'il y a stigmatisme rigoureux par (S) pour le couple de points (A, A'), ou encore que A et A' forment un couple de points conjugués.

Dans la situation (très courante) où les milieux traversés par la lumière avant la surface d'entrée et après la surface de sortie de (S) sont homogènes, le point A est dit réel (resp. virtuel) s'il se trouve avant (resp. après) la surface d'entrée de (S), "avant" et "après" étant définis par le sens de propagation de la lumière. Le point image A' est dit réel (resp. virtuel) s'il se trouve après (resp. avant) la surface de sortie de (S).

Remarque. L'aspect virtuel d'un point objet ou image impose de considérer le prolongement éventuel des rayons lumineux au sein du système (S) pour leur définition.

Remarque. Les notions d'objet et d'image, ainsi que les qualificatifs réel et virtuel sont relatifs au sens de propagation de la lumière. Il faut par conséquent toujours faire figurer ce sens sur les dessins.



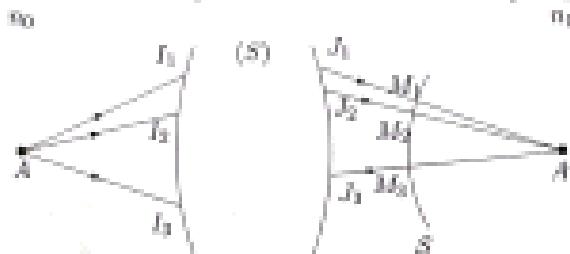
Remarque. Si l'image par (S) du point (objet) A est le point (image) A' , alors, par application du "principe" du retour inverse de la lumière, l'image par (S) du point (objet) A' est le point (image) A (avec (S) utilisé "en sens inverse").

§II Stigmatisme rigoureux

Définition. Un système optique (S) est dit rigoureusement stigmatique pour un couple de points (A, A') si tout rayon incident passant par A émerge de (S) en un rayon passant par A' .

§II.1 Stigmatisme et chemin optique

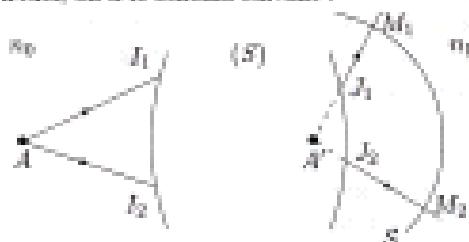
On considère la situation où A et A' sont réels (et donc les milieux avant et après (S) sont supposés homogènes).



L'ensemble des rayons $AJ_iJ_iM_i$ constitue un faisceau isogène. La surface S définie par un point M et par les normales correspondant à chacun des rayons du faisceau correspond donc, par application du théorème de Malus-Dupin, à $[AJ_iJ_iM_i] = \text{constante}$. Cette surface S est une sphère centrée en A' car le milieu après (S) est homogène, et donc $[M_iA'] = \text{constante}$. Par conséquent, quel que soit le rayon lumineux considéré, le chemin optique $[AJ_iJ_iM_iA']$ est le même, ce qui se réécrit aussi, les milieux avant et après (S) étant homogènes :

$$[AA'] = n_0 AJ_i + [J_iJ_i] + n_1 J_i A' = \text{constante} \quad (\text{indép. de } i). \quad (2.1)$$

Dans le cas où A est réel et A' virtuel, on a le schéma suivant :



Rien ne change dans la démonstration pour la partie $[AJ_iJ_iM_i]$, ni pour la discussion de S . Seul change le signe du terme $[M_iA']$:

$$[M_iA'] = \int_{M_iA'} n_1 ds = -n_1 A'M_i, \quad (2.2)$$

car $A'M_i$ est orienté dans le sens contrappropagatif. Par conséquent, on a finalement :

$$[AA'] = n_0 AJ_i + [J_iJ_i] - n_1 J_i A' = \text{constante}. \quad (2.3)$$

La généralisation est immédiate à toutes les situations en comptant algébriquement les longueurs, le sens de propagation de la lumière définissant le signe positif ou négatif à considérer :



$$[AA'] = n_0 \overline{AI} + [II] + n_1 \overline{IA'} = \text{constante indépendante du rayon lumineux.} \quad (2.4)$$

Sur le dessin précédent, le premier terme de la somme ($n_0 \overline{AI}$) est positif, le second également, tandis que le dernier est négatif. Si l'on intervertit les rôles de A' et A , alors :

$$[A'A] = n_1 \overline{AI} + [II] + n_0 \overline{IA} = \text{constante,} \quad (2.5)$$

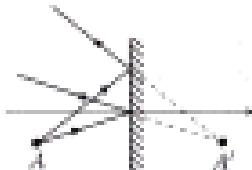
avec le premier terme négatif et les deux derniers positifs. On notera au passage que l'on trouve la même valeur numérique dans les deux situations, et c'est normal car on a changé entre temps le sens de propagation de la lumière !

§II.2 Exemples de systèmes rigoureusement stigmatiques

Systèmes catadioptriques

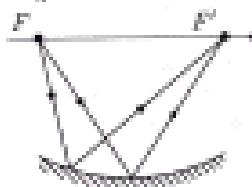
Ce sont des systèmes où la formation des images se fait à l'aide de miroirs.

- miroir plan



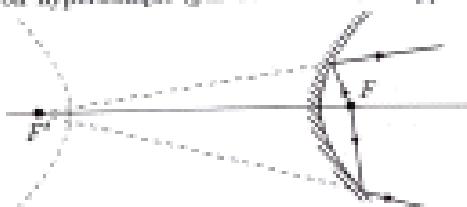
Un miroir plan est stigmatique pour tous les points de l'espace. $[AA'] = 0$. Si A est réel (resp. virtuel), A' est virtuel (resp. réel).

- miroir elliptique (par définition d'une ellipse \mathcal{E} de foyers F et F' , $FM + MF' = \text{constante } \forall M \in \mathcal{E}$).



Un miroir elliptique est stigmatique pour tous ses foyers. $[FF'] = FM + MF' = \text{constante}$. Si F est réel (resp. virtuel), F' est réel (resp. virtuel).

- miroir hyperbolique (par définition d'une hyperbole \mathcal{H} de foyers F et F' , $FM - MF' = \text{constante } \forall M \in \mathcal{H}$).



Un miroir hyperbolique est stigmatique pour tous ses foyers. $[FF'] = FM - MF' = \text{constante}$. Si F est réel (resp. virtuel), F' est virtuel (resp. réel).

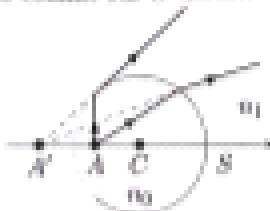
Remarque. Le cas du miroir plan correspond à $FM - MF' = 0$.

- miroir parabolique (convexe) : le foyer F d'un miroir parabolique et le "point" A situé à l'infini sur l'axe de symétrie de la parabole sont conjugués.

Systèmes dioptriques

Ce sont des systèmes où la formation des images se fait à l'aide de dioptriques. Dans le cas d'un unique dioptrique conjuguant les points A et A' , l'équation de la surface est donnée par $n_0 \overline{AI} + n_1 \overline{IA'} = \text{constante}$ (avec I appartenant au dioptrique séparant les milieux d'indice n_0 et n_1). Si A et A' sont de même nature (tous les deux réels ou tous les deux virtuels), l'équation précédente s'écrit (avec n_0 et $n_1 > 1$) : $n_0 \overline{AI} + n_1 \overline{IA'} = \text{constante}$: ce sont les étoiles de Descartes, sans intérêt autre que mathématique. Si A et A' sont de nature opposée, l'équation

précédente s'écrit : $n_0 A I - n_1 I A' = \text{const.}$, et seul le cas où la constante est nulle présente un intérêt. Le lieu des points I solution de $n_0 A I - n_1 I A' = 0$ est une sphère, de centre C , de rayon R , avec $\overline{CA} = n_1/n_0 \overline{SC}$ et $\overline{CA'} = n_0/n_1 \overline{SC}$, avec S, C, A et A' alignés comme sur le dessin.



Le disptre sphérique est rigoureusement stigmatique pour le couple de points (A, A') ainsi définis, appelés points de Weierstrass (ou points d'Young). Ce dispositif est utilisé en particulier dans les objectifs de microscopes dits "à immersion".

§II.3 Instrument absolu

À l'exception du miroir plan, les dispositifs présentés jusqu'à présent ne sont rigoureusement stigmatiques que pour un couple de points particuliers.

Définition. On appelle instrument absolu un système optique qui assure par stigmatisme rigoureux un ensemble d'images à un ensemble d'objets appartenant à un ouvert de \mathbb{R}^3 .

Exemples : miroir plan ;

fish-eye de Maxwell, correspondant à un milieu inhomogène à symétrie sphérique, où l'indice suivait : $n(r) = 2n_0/(1 + r^2/a^2)$;

lentille de Lense-Thirring, correspondant à un milieu inhomogène à symétrie sphérique, où l'indice suivait : $n(r) = n_0\sqrt{1 - r^2/g^2}$.

Hormis le cas du miroir plan, la nécessité de faire intervenir un milieu inhomogène rend la réalisation pratique difficile, et l'image d'un objet étendu est fortement déformée, ce qui est en général rédhibitoire¹. Malheureusement, dans la situation où les milieux d'entrée et de sortie sont homogènes, des théorèmes dus à Maxwell et Cauchy montrent que l'image fournie par un tel instrument absolu est identique à celle que donnerait un miroir plan (ou une association de miroirs plans). Les dimensions de l'image sont donc les mêmes que celles de l'objet [Newtons, p.140], réduisant l'intérêt d'un tel instrument !

Néanmoins, l'exigence du caractère absolu d'un système d'optique est superflue pour deux raisons. La première est d'ordre théorique : sans vouloir déformer la suite du cours, la discussion du caractère ponctuel d'une image fait apparaître des dimensions (plus petites ou) comparables à la longueur d'onde de la lumière étudiée, et l'aspect ondulatoire se manifestera alors. La seconde est d'ordre pratique : quel que soit le récepteur utilisé (photodétecteur, cellule rétinienne, ...), ce dernier a une extension spatiale finie et est donc incapable de distinguer une tache de diamètre fin mais plus petite que sa propre extension spatiale d'un véritable point. Ces considérations amènent à relâcher la contrainte "instrument absolu" pour rechercher des instruments dits "optiquement parfaits" pour lesquels on n'exige plus que l'image d'un objet ponctuel soit ponctuelle mais uniquement qu'elle corresponde, suivant les lois de l'optique géométrique, à une tache de taille petite devant celle due au phénomène de diffraction.

Remarque. Dans la discussion de l'aspect ondulatoire de la lumière, il peut être question du phénomène de diffraction dû à l'extension spatiale finie du système optique, qui disperserait incident [cela pourrait être cependant considéré comme un défaut de l'instrument], mais de façon plus fondamentale, il est aussi question du comportement d'une onde lumineuse à proximité d'un point de convergence.

¹ Sauf si l'on se contente d'une simple détection de la présence d'un objet, comme c'est le cas pour les ondes primaires pour lesquelles les lentilles de Lense-Thirring ont été développées.

Remarque. On peut affaiblir l'exigence de la formation d'images par stigmatisme rigoureux d'un domaine unidimensionnel et ne s'intéresser qu'à celle concernant une surface bidimensionnelle. Des théorèmes [parsons, p.149] montrent alors que pour un système optique (S) à symétrie cylindrique et avec des milieux avant et après (S) homogènes, il n'y a en général qu'un plus deux surfaces qui peuvent être imagedes par stigmatisme rigoureux.

§III Stigmatisme approché et systèmes centrés

§III.1 Définitions

Définition. Soit un ensemble de rayons issus d'un point A_0 représenté par le couple (θ_0, φ_0) autour d'une direction commune (θ_0, φ_0) . On dit qu'il y a stigmatisme approché lorsque les dimensions de la tâche image du point A varient comme $\{\alpha(\varepsilon_\theta), \alpha(\varepsilon_\varphi)\}$ lorsque $\varepsilon_\theta \equiv \theta - \theta_0 \rightarrow 0$ et $\varepsilon_\varphi \equiv \varphi - \varphi_0 \rightarrow 0$ (ce sont donc au plus des infiniment petits du second ordre).

Définition. On appelle système centré un système optique présentant un axe de révolution ou, par extension, un ensemble de systèmes centrés séparés par des miroirs plans et tels que les axes de révolution de chacun des sous-systèmes soient les images les uns des autres par réflexion sur ces miroirs. L'axe de révolution, orienté par le sens de propagation de la lumière, constitue l'axe optique du système.

⚠ Il est impératif de respecter au pied de la lettre cette définition lors de l'illustration expérimentale d'un système centré. Les centres optiques des diverses lentilles mises en œuvre doivent par exemple s'aligner sur une et une seule droite (sauf à vouloir discuter certaines aberrations), et l'axe optique n'est pas constitué d'une ligne brisée de segments de droites... Avec ou sans banc, l'étape 0 de toute expérience d'optique consiste donc à rassembler l'ensemble du matériel (sources lumineuses, diaphragmes, lentilles, ...), à trouver un pied pour chaque élément, et à faire en sorte tous les centres optiques soient à la même hauteur, avec des faisceaux lumineux qui se devront donc d'être horizontaux. Il n'y a pas d'exception à cette règle.

§III.2 Conditions de Gauss

Pour un système centré, on peut montrer que :

- la conservation du stigmatisme orthogonalement à l'axe optique (= "aplatissement") impose de satisfaire la "condition des sinus d'Abbe" ;
- la conservation du stigmatisme le long de l'axe optique impose de satisfaire la "condition d'Herschell" ;
- la condition des sinus d'Abbe et la condition d'Herschell ne peuvent être satisfaites simultanément en général. Cela correspond bien entendu au "problème de l'instrument absolu".

Les conditions d'Abbe et d'Herschell ne présentent pas particulièrement d'intérêt, mais leur démonstration est une application de l'indépendance du chemin optique entre 2 points conjugués par rapport au rayon lumineux suivi.

Démonstration. On ne fait intervenir dans la démonstration qu'un unique dioptrre, la généralisation à un système optique quelconque étant immédiate par "transitivité". Ainsi, avec les notations du paragraphe suivant, on considère 2 paires de points conjugués (A, A'), situés sur l'axe optique, et (B, B'), avec B' infiniment voisin de A et B' infiniment voisin de A' donc (mais sans position particulière a priori par rapport à l'axe optique). On considère également les deux rayons lumineux infiniment proches, l'un allant de A à A' en passant par I , et l'autre de B à B' en passant par J infiniment voisin de I . L'indépendance des chemins optique s'écrit

voisin de A et B' infinitésimale; voyant que ce sont deux rayons proches, par conséquent le passage par J ne provoque pas d'effet optique). On considère également les deux rayons lumineux infinitésimement proches, l'un allant de A à A' en passant par I , et l'autre de B à B' en passant par J infinitésimellement voisin de I . L'indépendance des chemins optiques s'écrit

$[AA'] = \text{cste } n$ et $[BB'] = \text{cste } n'$, et l'on décompose chacun d'eux en faisant intervenir les points intermédiaires I et J situés sur le dioptrie. La relation de Charles donne $BJ = BA + AI + IJ$ et, en ce qui concerne le chemin optique, à l'ordre le plus bas :

$$[BJ] = n [BJ] = n\sqrt{BJ \cdot BJ} \approx n [AI] + n \frac{AI}{[AI]} \cdot (IJ - AB). \quad (26)$$

On en déduit donc, comme $[BB'] - [AA'] = \text{cste}$:

$$[BB'] - [AA'] = \text{cste} = n \frac{AI}{[AI]} \cdot (IJ - AB) + n' \frac{IA'}{[IA']} \cdot (A'B' - IJ). \quad (27)$$

En introduisant les vecteurs unitaires $u = AI/\|AI\|$ et $u' = IA'/\|IA'\|$ orientés dans le sens de propagation de la lumière, l'expression se réécrit :

$$[BB'] - [AA'] = \text{cste} = (nu - n'u')IJ + n'u' \cdot A'B' - nu \cdot AB = n'u' \cdot A'B' - nu \cdot AB \quad (28)$$

car le premier terme s'annule d'après la relation de Snell-Descartes Eq.(1.15).

La condition d'Abbe consiste à considérer que le cas particulier où AB et $A'B'$ sont perpendiculaires à l'axe optique : les produits scalaires s'expriment à l'aide de $\sin \theta$ et $\sin \theta'$, et la constante est explicitée en considérant le cas $\theta = 0 = \theta'$, soit :

$$nAB \sin \theta = n'A'B' \sin \theta'. \quad (29)$$

La condition d'Henshell consiste à considérer que le cas particulier où AB et $A'B'$ sont colinéaires à l'axe optique : les produits scalaires s'expriment à l'aide de $\cos \theta$ et $\cos \theta'$, et la constante est explicitée de la même façon. Avec $\cos(2\alpha) = 1 - \sin^2 \alpha$, on obtient ainsi :

$$nAB \sin^2(\theta/2) = n'A'B' \sin^2(\theta'/2). \quad (2.10)$$

□

On peut montrer qu'il suffit, pour qu'un système centré réalise un stigmatisme approché, qu'il satisfasse les conditions de Gauss, c'est-à-dire deux des trois conditions suivantes :

- les angles que font tous les rayons lumineux avec l'axe optique sont faibles ;
- les angles que font tous les rayons lumineux sur tous les dioptres ou miroirs (non plans) sont faibles² ;
- la distance à l'axe optique de tous les rayons lumineux au niveau de chacun des dioptres ou miroirs (non plans) est faible par rapport au moyen de courbure local du dioptrie ou miroir considéré.

²Par angle, il faut bien entendu entendre angle compris par rapport à la normale locale.

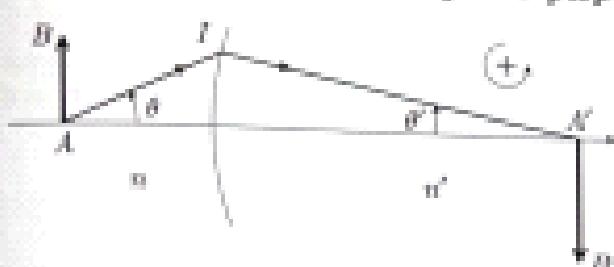
On peut alors montrer que tout point objet admet une (et une seule) image au sens du stigmatisme approché, et l'on parle alors d'image paraxiale (ou image dans les conditions de Gauss).

On peut alors montrer que tout point objet admet une (et une seule) image au sens du stigmatisme approché, et l'on parle alors d'*image paraxiale* (ou image dans les conditions de Gauss).

§III.3 Relation de Lagrange-Helmholtz

La démonstration se fait pour un dioptrè ou un miroir seul dans les conditions de Gauss.

Cas du dioptrè, formant d'un objet AB perpendiculaire à l'axe optique une image $A'B'$



▲ Noter la convention d'orientation ! Sur le dessin ci-contre, $\theta > 0, \theta' < 0, \overline{AB} > 0, \overline{A'B'} < 0$.

Le chemin optique de A à A' (tout comme de B à B') est indépendant du rayon lumineux considéré. La différence des deux l'est donc également. En considérant les rayons AIA' et BIB' , on a :

$$[AA'] - [BB'] = [(AI) - (BI)] + [(IA') - (IB')] = n\overline{AB}\theta - n'\overline{A'B'}\theta' + o(\theta, \theta', \overline{AB}, \overline{A'B'}), \quad (2.11)$$

d'où, à l'ordre linéaire :

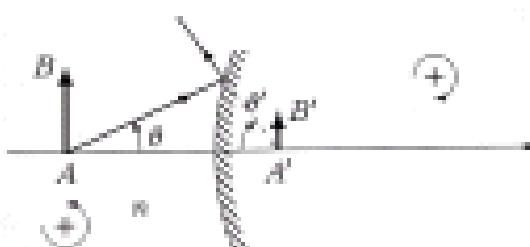
$$[AA'] - [BB'] = n\overline{AB}\theta - n'\overline{A'B'}\theta' = \text{const.} \quad (2.12)$$

Dans le cas où $\theta = 0, \theta' = 0$, ce qui fixe la constante à 0 et établit la relation de Lagrange-Helmholtz pour un dioptrè :

$$n\overline{AB}\theta = n'\overline{A'B'}\theta', \quad (2.13)$$

i.e. " $n\overline{AB}\theta$ est un invariant".

Cas du miroir, formant d'un objet AB perpendiculaire à l'axe optique une image $A'B'$



▲ Noter la convention d'orientation ! On redéfinit le sens de l'axe optique à la réflexion, ce qui fait que sur le dessin ci-contre, $\theta > 0, \theta' > 0, \overline{AB} > 0, \overline{A'B'} > 0$.

De la même façon, on a :

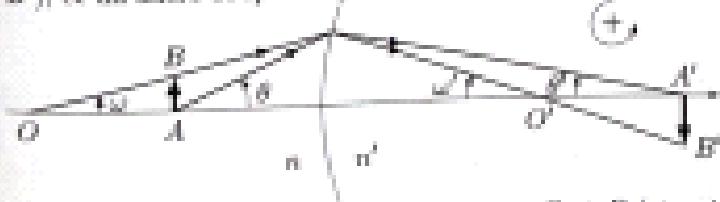
$$n\overline{AB}\theta = n'\overline{A'B'}\theta', \quad (2.14)$$

avec $n = n'$ dans ce cas.

Conclusion : $n\overline{AB}\theta$ étant un "invariant" pour un dioptrè ou un miroir, il l'est pour un ensemble de dioptrès ou miroirs partageant le même axe optique, i.e. pour un système centré quelconque dans les conditions de Gauss (avec un signe à corriger éventuellement en fonction des conventions adoptées pour le repérage des angles si l'y a une ou plusieurs réflexions).

La relation de Lagrange-Helmholtz (où AB et $A'B'$ sont orthogonaux à l'axe optique) permet d'obtenir sans peine une relation similaire "le long de l'axe optique". On considère pour cela le couple (A, B) conjugué avec

angles s'il y a une ou plusieurs renctions). La relation de Lagrange-Helmholz (où AB et $A'B'$ sont orthogonaux à l'axe optique) permet d'obtenir sans peine une relation similaire "le long de l'axe optique". On considère pour cela le couple (A, B) conjugué avec $(A'B')$, et un autre couple de points conjugués (O, O') .



▲ Tout rayon (et donc en particulier celui issu de O) passant par B doit passer par B' après traversée du dioptre.

En considérant le rayon lumineux passant par O et B (et qui passe donc par O' et B'), on a :

$$n\overline{AB}\theta = n'\overline{A'B'}\theta', \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{OA} \tan \omega \approx \overline{OA}\omega, \\ \overline{A'B'} = \overline{O'A'} \tan \omega' \approx \overline{O'A'}\omega'. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

On en déduit :

$$n\overline{OA}\omega = n'\overline{O'A'}\omega'/\theta, \quad (2.17)$$

avec (O, O') conjugués et (A, A') conjugués. On rapproche bien évidemment ces expressions des conditions des sinus d'Abbe et d'Henschell dans la limite considérées dans les limites correspondant aux conditions de Gauss.

§III.4 Grandissements

Définitions. Pour un objet AB perpendiculaire à l'axe optique dont l'image par le système optique est $A'B'$, on définit :

$$\bullet \text{ le grandissement transversal : } \gamma \equiv \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}, \quad (2.18)$$

$$\bullet \text{ le grandissement angulaire : } g \equiv \frac{\theta'}{\theta}, \quad (2.19)$$

$$\bullet \text{ le grandissement longitudinal : } \gamma_l \equiv \lim_{O \rightarrow A} \frac{\overline{O'A'}}{\overline{OA}} = \frac{\gamma}{g}. \quad (2.20)$$

La relation de Lagrange-Helmholz impose que $\gamma g = n/n'$, avec un éventuel signe si l'on ne redéfinit pas les axes optiques à la réflexion.

§IV Systèmes centrés : présentation générale

Dans ce paragraphe, on a fait le choix d'une présentation très géométrique des systèmes centrés. Il est évident que si l'on souhaite se limiter au cas des lentilles minces, voire d'une combinaison très simple d'entre elles (telle que la lunette astronomique ou de Galilée), les éléments développés ici sont exagérément "compliqués". Mais dès que l'on aborde les instruments "réels" (tels qu'un objectif d'appareil photographique ou d'un microscope), on ne peut plus faire l'économie de ces discussions. Quant à la "technique" des matrices de transfert, elle permet une présentation "abstraite" des calculs intéressants dans l'obtention des relations de conjugaison, sans avoir à introduire des notations qui deviennent rapidement très nombreuses. D'autre part, elle donne un cadre que l'on peut retrouver dans différents domaines de physique, par exemple en relativité restreinte.

permet une présentation "abstraite" des calculs intervenants dans l'ébauche des relations de conjugaison, sans avoir à introduire des notations qui deviennent rapidement très nombreuses. D'autre part, elle donne un cadre que l'on peut retrouver dans différents domaines de physique, par exemple en optique (pour la discussion de la stabilité d'une cavité) ou en mécanique quantique (pour l'équation de Schrödinger 1D) ; cela souligne la dimension "système linéaire" qui est au cœur de l'optique géométrique dans les conditions de Gauss.

§IV.1 Éléments cardinaux

Définitions. On appelle plan focal image l'image des points objets situés à l'infini. Le foyer image correspond à l'intersection du plan focal image avec l'axe optique.

On appelle plan focal objet le plan dont l'image est située à l'infini. Le foyer objet correspond à l'intersection du plan focal objet avec l'axe optique.

Si l'un de ces deux plans est à distance finie, l'autre l'est aussi. On parle alors de système optique à foyers. Dans le cas contraire, le système est dit afoyer.

Pour un système centré à foyers, on montre qu'il existe à distance finie :

- un couple de plans conjugués de grandissement $\gamma = +1$: ces plans sont dit principaux ;
- un couple de plans conjugués de grandissement $\gamma = -1$: ces plans sont dit antiprincipaux ;
- un couple de plans conjugués de grandissement négatif $\gamma = +1$: ces plans sont dit nodaux ;

- un couple de plans conjugués de grandissement négatif $\gamma = -1$: ces plans sont dit antinodaux.

Les intersections de ces plans avec l'axe optique délimitent les points objets et images principaux, antiprincipaux, nodaux et antinodaux. L'ensemble de ces plans et points particuliers correspond aux éléments cardinaux du système centré. Il est conventionnel de réservé les lettres suivantes pour désigner :

F : foyer objet	H : point principal objet	N : point nodal objet
F' : foyer image	H' : point principal image	N' : point nodal image

Remarque. Le caractère objet/image des différents éléments cardinaux n'est pas absolu mais relatif au sens de propagation de la lumière.

Définition. On parle de système mince à foyers lorsque $\overline{HF} = 0 = \overline{N\bar{F}'}$. Les plans principaux objet et image sont alors confondus, ainsi que les plans nodaux. Le centre optique du système correspond au point de l'axe optique confondu avec N et N'.

§IV.2 Distances focales et vergence

Définition. La distance focale objet est définie par $f = \overline{HF}$. La distance focale image est définie par $f' = \overline{H'F'}$. La vergence d'un système optique est définie par :

$$C = \frac{s'}{f'} = -\frac{n}{f}. \quad (2.21)$$

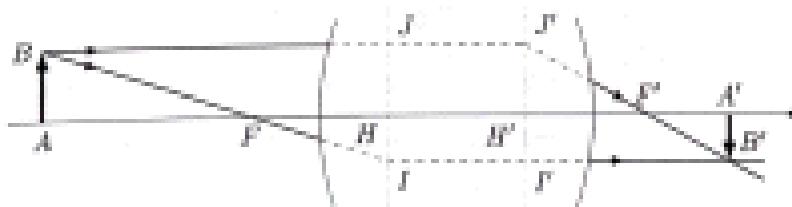
Son unité est la dioptrie, notée d (avec $1d = 1 \text{ m}^{-1}$). Un système à foyers est dit convergent (resp. divergent) si $C > 0$ (resp. $C < 0$).

Son unité est la dioptrie, notée d (avec $1d = 1 \text{ m}^{-1}$). Un système à foyers est dit convergent (resp. divergent) si $C > 0$ (resp. $C < 0$).

§IV.3 Construction géométrique (systèmes à foyers)

La construction géométrique de l'image $A'B'$ d'un objet AB par un système centré exploite les propriétés définitionnelles des plans principaux ou nodaux. À noter que le tracé des rayons entre le dioptrie d'entrée et le dioptrie de sortie du système optique, sous la forme de segments de droite, est essentiellement formel : dans la réalité d'un système centré tel qu'un objectif d'appareil photographique, la trajectoire réelle des rayons lumineux est beaucoup plus complexe (sans même considérer les écarts aux conditions de Gauss), mais l'exploitation des propriétés des éléments cardinaux suffit à la construction géométrique sans avoir à connaître plus de détails.

Construction à l'aide des plans principaux et des foyers

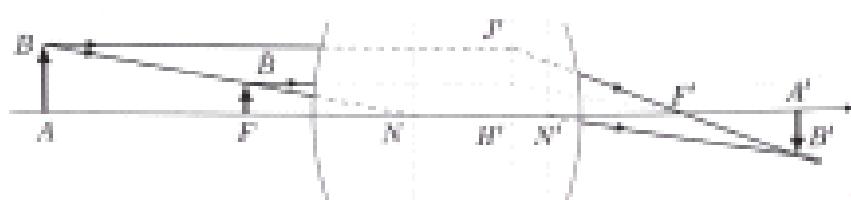


❶ on considère le rayon partant de B passant par F . Il intercepte le plan principal objet en J . L'image de J est J' , situé dans le plan principal image, avec $\overline{HJ} = \overline{H'J'}$ (car $\gamma = +1$). Le rayon émergent correspond ensuite au rayon parallèle à l'axe optique passant par J' .

❷ on considère le rayon passant par B parallèle à l'axe optique. Il intercepte le plan principal en J . L'image de J est J' , situé dans le plan principal image, avec $\overline{HJ} = \overline{H'J'}$ (car $\gamma = +1$). Le rayon émergent correspond ensuite au rayon porté par la droite $J'F'$.

❸ l'intersection de ces deux rayons définit B' , image de B . L'image de A est ensuite déterminée en abaissant la perpendiculaire sur l'axe optique passant par B' , car l'objet AB est orthogonal à l'axe optique et les conditions de Gauss assurent l'aplanétisme.

Construction à l'aide des plans nodaux et des foyers



❶ on trace le rayon BN , et l'on sait que le rayon émergent correspondant passe par N' (car N et N' sont conjugués), et est parallèle au rayon incident (car $\gamma = +1$).

❷ le rayon BN intercepte le plan focal objet en B . On considère alors l'objet BN , situé dans le plan focal objet. Son image est donc rejettée à l'infini. On considère alors deux rayons issus de B : celui qui passe par N , qui correspond donc au rayon considéré à l'étape précédente, et le rayon parallèle à l'axe optique passant par N . Le rayon émergent correspondant passe par N' ; il est également parallèle au rayon $N''B''$ car l'image de B est à l'infini. L'intersection de ces deux rayons permet de déterminer le plan principal image.

❸ on continue alors le rayon parallèle à l'axe optique jusqu'à N . Il intersectera les deux nœuds situés au

- à l'origine convergent vers une origine communément à un rayon parallèle, ou au rayon principal si le système est convergent par \hat{B} . Le rayon émergent correspondant passe par F' ; il est également parallèle au rayon $N'\hat{B}'$ car l'image de \hat{B} est à l'infini. L'intersection de ces deux rayons permet de déterminer le plan principal image.
- on considère alors le rayon parallèle à l'axe optique passant par B . Il intercepte le plan principal image en J' , à partir duquel on construit le rayon $J'F'$.

• l'intersection du rayon $J'F'$ et du rayon parallèle à BN passant par N' permet de construire B' , puis A' de la même manière que dans la construction précédente.

Remarque. Si l'on ne connaît pas les foyers mais uniquement les plans principaux et nodaux, on ne peut pas faire la construction géométrique sauf si l'on connaît en outre les indices des milieux extrêmes, en utilisant pour cela les relations suivantes (cf. Eq.(2.53)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} f = \overline{HF}, \\ f' = \overline{H'F'}, \\ f + f' = \overline{HN} - \overline{H'N'}, \\ \frac{f}{n'} = -\frac{f}{n} = \frac{1}{C}. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

§IV.4 Relations de conjugaison (systèmes à foyers)

Les relations de conjugaison s'obtiennent immédiatement en constatant le caractère homothétique des triangles FAB / FHJ et $F'A'B' / F'H'J'$ sur la construction avec les plans principaux :

$$\begin{aligned} \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} &= -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'A}} &&; \text{relation de conjugaison de grandissement de Newton.} \\ \overline{FA}\overline{F'A'} &= ff' &&; \text{relation de conjugaison de position de Newton.} \end{aligned} \quad (2.23)$$

En considérant deux paires de points conjugués (A, A') et (O, O') sur l'axe optique, on a, à partir de la seconde relation :

$$ff' = \overline{FA}\overline{F'A'} = (\overline{FO}+\overline{OA})(\overline{FO'}+\overline{O'A'}) = \overline{FO}\overline{FO'} + \overline{FO}\overline{O'A'} + \overline{OA}\overline{FO'} + \overline{OA}\overline{O'A'} = \overline{FO}\overline{FO'}, \quad (2.24)$$

d'où, en divisant cette relation par $\overline{OA}\overline{O'A'}$:

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OF'}}{\overline{O'A'}} = 1 \quad ; \text{relation de conjugaison de position de Descartes.} \quad (2.25)$$

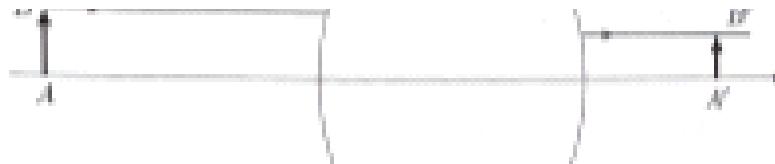
Remarque. Si l'on considère $(O, O') = (H, H')$, alors :

$$\frac{f}{\overline{HA}} + \frac{f'}{\overline{H'A'}} = 1, \quad \text{soit encore : } \frac{n'}{\overline{H'A'}} - \frac{n}{\overline{HA}} = C. \quad (2.26)$$

§IV.5 Cas particuliers des systèmes afocaux

Comme vu précédemment, un système afoocal forme de tout objet situé à l'infini une image située à l'infini. Tout faisceau de rayons incidents parallèles donne à la sortie du système un faisceau parallèle. L'absence de foyer ne permet pas d'utiliser les relations de conjugaison précédentes.





Soit un objet AB orthogonal à l'axe optique. Le rayon parallèle à l'axe optique passant par B émerge du système optique parallèlement à l'axe optique, et passe par B' . Cela est vrai quelle que soient les positions de $(AB, A'B')$ conjugués. Par conséquent, $\gamma \equiv \lambda B'/\lambda B = \text{const}$, et donc $\rho = \gamma^{-1} u/v = \text{const}$ et $\gamma_0 = \gamma/g = \text{const}$.

§IV.6 Matrices de transfert

Déterminer quelle est l'image $A'B'$ d'un objet AB par un système optique centré dans les conditions de Gauss revient, d'un point de vue géométrique, à la détermination des éléments cardinaux puis à l'application des relations de conjugaison (ou au tracé de rayons appropriés), ou, d'un point de vue analytique, à la détermination de l'intersection de deux rayons (et deux seules) à cause du signification (aussi de B) lors une faisant un angle différent par rapport à l'axe optique. Or un rayon lumineux est caractérisé par :

- sa "distance" par rapport à l'axe optique (avec "distance" entendue au sens $\|AB\|$) ;
- l'"angle" qu'il fait par rapport à l'axe optique (avec "angle" entendu comme les deux angles nécessaires pour repérer la direction du rayon lumineux par rapport à l'axe optique).

En excluant les situations avec des milieux à gradient d'indice, un système optique peut être considéré comme une succession de dioptries et/ou de surfaces réfléchissantes séparant des milieux homogènes. Dans les conditions de l'optique paraxiale, les relations de Snell-Descartes deviennent linéaires sur les angles ($n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \rightarrow n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2$), et les rayons lumineux entre deux interfaces sont des segments de droites. En repérant un rayon lumineux par la coordonnée $z = x + iy$ et par l'angle $ng = n[\alpha + i\beta]$, il existe donc une relation linéaire entre la coordonnée d'entrée et la coordonnée de sortie du rayon lumineux au niveau d'un dioptre/miroir, et lors de la traversée d'un milieu homogène. Par transitivité, il existe donc une relation linéaire entre la coordonnée d'entrée et la coordonnée de sortie d'un rayon lumineux lors de la traversée d'un système optique centré :

$$X_s \equiv \begin{bmatrix} z \\ ng \end{bmatrix}_s = T \begin{bmatrix} z \\ ng \end{bmatrix}_e, \quad (2.27)$$

où T est la matrice de transfert du système centré, et les indices e et s signifient "sortie" et "entrée". La détermination de T caractérise complètement le système optique dans les conditions paraxiales.



On a donc, entre deux plans (pas nécessairement conjugués) :

$$X_{Z_2} \equiv \begin{bmatrix} z \\ ng \end{bmatrix}_{Z_2} = T(\overline{Z_4} \overline{Z_3}) \begin{bmatrix} z \\ ng \end{bmatrix}_{Z_1} = T(\overline{Z_4} \overline{Z_3})T(\overline{Z_3} \overline{Z_2}) \begin{bmatrix} z \\ ng \end{bmatrix}_{Z_1} = T(\overline{Z_4} \overline{Z_3})T(\overline{Z_3} \overline{Z_2})T(\overline{Z_2} \overline{Z_1}) \begin{bmatrix} z \\ ng \end{bmatrix}_{Z_1}, \quad (2.28)$$

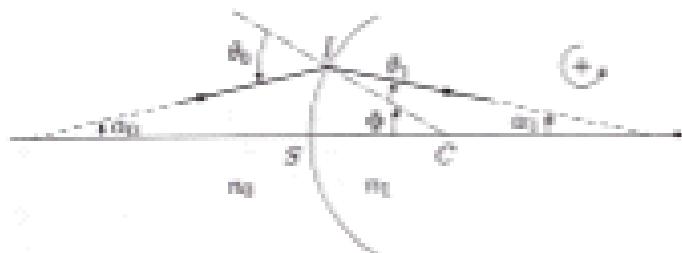
$$= T(\overline{Z_4} \overline{Z_3})T(\overline{Z_3} \overline{Z_2})T(\overline{Z_2} \overline{Z_1})T(\overline{Z_1} \overline{Z_0}) \dots T(\overline{Z_7} \overline{Z_6})T(\overline{Z_6} \overline{Z_5}) \begin{bmatrix} z \\ ng \end{bmatrix}_{Z_1} = T(\overline{Z_0} \overline{Z_1}) \begin{bmatrix} z \\ ng \end{bmatrix}_{Z_1}. \quad (2.29)$$

On voit donc apparaître les trois matrices fondamentales :

Ou voit donc apparaître les trois matrices fondamentales :

- * la matrice de réfraction (ex : $T(\overline{Z_0Z_1})$, $T(\overline{Z_0Z_2})$, ...);
- * la matrice de translation (ex : $T(\overline{Z_0Z_1})$, $T(\overline{Z_1Z_2})$, ...);
- * la matrice de réflexion (qui peut être obtenue formellement à partir de la matrice de réfraction), à partir desquelles on peut établir l'expression de n'importe quelle matrice de transfert.

Matrice de réfraction



On a $\underline{x}_0 = \underline{x}_1$ et $n_0\theta_0 = n_1\theta_1$, avec :

$$\theta_0 = \alpha_0 - \Phi, \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \pi - (-\alpha_1 + (\vec{C}_1^z, \vec{C}_1^t)) \\ &= \pi + \alpha_1 - (\pi + \Phi) = \alpha_1 - \Phi, \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\Phi \approx -\frac{ST}{SC}. \quad (2.32)$$

On en déduit :

$$n_0(\alpha_0 - \Phi) = n_1(\alpha_1 - \Phi) \text{ soit } n_0\alpha_0 = n_1\alpha_1 - \frac{n_1 - n_0}{SC} ST, \quad (2.33)$$

soit finalement, sous forme matricielle :

$$X_s = RX_e \text{ avec } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix}, \text{ où } V = \frac{n_1 - n_0}{SC} = \frac{n_1 - n_0}{R} \text{ et } X_e = \begin{bmatrix} I \\ n_0 \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Matrice de translation



On a $\underline{x}_{01} = \underline{x}_{11}$ et $a_0 \approx (x_1 - x_0)/\overline{Z_0Z_1}$. On en déduit la relation matricielle $X_s = TX_e$ avec :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & \overline{Z_0Z_1}/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ où } X_e = \begin{bmatrix} I \\ n_0 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

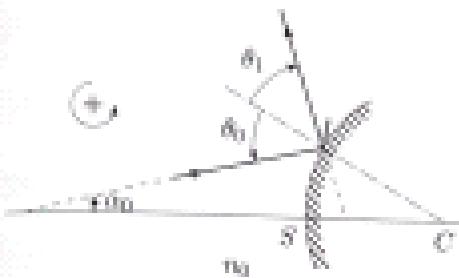
Remarque. En introduisant un point intermédiaire Z_i entre Z_0 et Z_1 , on vérifie sans peine que :

$$T(\overline{Z_0Z_1}) = T(\overline{Z_0Z_i})T(\overline{Z_iZ_1}) = \begin{bmatrix} 1 & \overline{Z_0Z_i}/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \overline{Z_iZ_1}/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (\overline{Z_0Z_i} + \overline{Z_iZ_1})/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Matrice de réflexion



On a $\underline{x}_0 = \underline{x}_1$ et $\theta_0 = -\theta_1$, qui est formellement identique à $n_0\theta_0 = n_1\theta_1$ avec $n_1 = -n_0$. On en



On a $\underline{x}_1 = \underline{x}_1$ et $\delta_0 = -\delta_1$, qui est formellement identique à $n_0\delta_0 = n_1\delta_1$ avec $n_1 = -n_0$. On en déduit la relation matricielle $X_s = R X_i$, avec :

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix}, \text{ et } X_s = \begin{bmatrix} L \\ n_0 \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

où l'on a posé :

$$V = -\frac{2n}{f_1} = -\frac{2n}{L}. \quad (2.38)$$

Remarque. Dans le cas d'un miroir plan, on a $R = +\infty$ et R s'identifie à la matrice unité, "comme on pouvait s'y attendre" modulo la redéfinition du sens de l'axe optique.

Conclusion : à l'aide de ces deux (trois) matrices, on peut donc exprimer dans toutes les situations la matrice de transfert d'un système centré (dans les conditions paraxiales) entre deux plans quelconques (pas forcément conjugués). On peut montrer que la matrice de transfert s'écrit toujours sous la forme :

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ -V & d \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

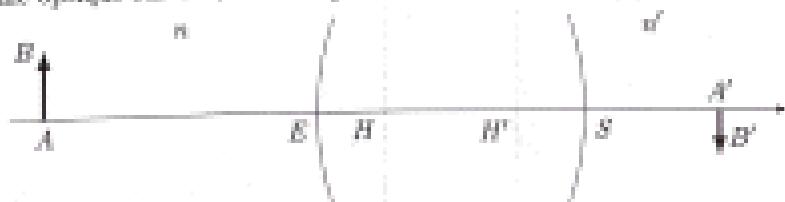
où V désigne la vergence du système optique avec $f' = n'/V$ et $f = -n/V$, et qu'entre deux plans conjugués (associés à A et A' situés sur l'axe optique) :

$$T(\overline{AA'}) = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ -V & gs'/n \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

Remarque. Le lecteur conscientieux vérifiera sans peine que les trois matrices fondamentales sont toutes les trois de déterminant égal à 1. Par conséquent, $T(\overline{AA'})$ (en tant que produit de matrices unitaires) Tient également, et $\det T(\overline{AA'}) = 1$ conduit donc à la relation suivante :

$$\gamma s' = \frac{n}{n'}. \quad (2.41)$$

L'expression de $T(\overline{AA'})$ entre deux plans conjugués et la connaissance de la matrice de translation permet de déterminer la position des plans principaux, nodaux et des foyers (pour un système à foyers). En effet, considérons le système optique suivant, délimité par les surfaces d'entrée (E) et de sortie (S) :



On écrit :

$$\left[\begin{bmatrix} L \\ n_0 \end{bmatrix} \right]_{A'} = T(\overline{AA'}) \left[\begin{bmatrix} L \\ n_0 \end{bmatrix} \right]_A = T(\overline{SA'}) T(\overline{H'S}) T(\overline{HH'}) T(\overline{EH}) T(\overline{AE}) \left[\begin{bmatrix} L \\ n_0 \end{bmatrix} \right]_A \quad (2.42)$$

$$= T(\overline{SA'}) T(\overline{ES}) T(\overline{AE}) \left[\begin{bmatrix} L \\ n_0 \end{bmatrix} \right]_A. \quad (2.43)$$

soit $T(\overline{HH'}) = T^{-1}(\overline{HS})T(\overline{ES})T^{-1}(\overline{EH})$ avec :

$$T(\overline{SH'}) = \begin{bmatrix} 1 & \overline{SH'}/n' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.44)$$

$$T(\overline{HE}) = \begin{bmatrix} 1 & \overline{HE}/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.45)$$

$$T(\overline{HH'}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & gn'/n \end{bmatrix} \quad \text{car } H \text{ et } H' \text{ sont conjugués} \quad (2.46)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \quad \text{car ils correspondent aux plans principaux (et } \det T = 1\text{).} \quad (2.47)$$

Avec $T(\overline{ES}) = \begin{bmatrix} a & b \\ -V & d \end{bmatrix}$, on a, après avoir effectué le produit matriciel :

$$\begin{cases} 1 = a - V \frac{\overline{SH'}}{n'} \quad (= T_{11}(\overline{HH'})), \\ 1 = d - V \frac{\overline{HE}}{n} \quad (= T_{22}(\overline{HH'})), \end{cases} \quad (2.48)$$

d'où :

$$\begin{cases} \overline{SH'} = \frac{n'}{V}(a-1) = f'(a-1), \\ \overline{EH} = -\frac{n}{V}(d-1) = f(d-1). \end{cases} \quad (2.49)$$

De la même façon, en considérant les plans nodaux correspondant à $T(\overline{NN'}) = \begin{bmatrix} n/n' & 0 \\ -V & n'/n \end{bmatrix}$ (avec $g = 1$ et $\det T = 1$), on arrive à :

$$\begin{cases} \frac{n}{n'} = a - V \frac{\overline{SN'}}{n'} \quad (= T_{11}(\overline{NN'})), \\ \frac{n'}{n} = d - V \frac{\overline{NE}}{n} \quad (= T_{22}(\overline{NN'})), \end{cases} \quad (2.50)$$

d'où :

$$\begin{cases} \overline{SN'} = \frac{n'}{V}\left(a - \frac{n}{n'}\right) = f'\left(a - \frac{n}{n'}\right), \\ \overline{EN} = -\frac{n}{V}\left(d - \frac{n'}{n}\right) = f\left(d - \frac{n'}{n}\right). \end{cases} \quad (2.51)$$

Pour situer les foyers, on applique la définition :

$$\begin{cases} f = \overline{HF} = \overline{HE} + \overline{EF} \\ f' = \overline{H'F'} = \overline{H'S} + \overline{SF'} \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \begin{cases} \overline{EF} = fd, \\ \overline{SF'} = f'a. \end{cases} \quad (2.52)$$

Remarque. On a :

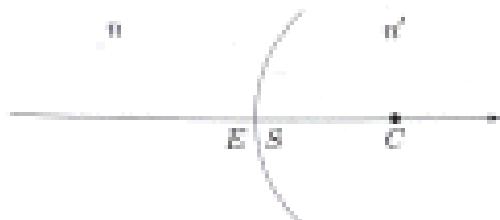
$$\begin{cases} \overline{HN} = \overline{HE} + \overline{EN} = -f(d-1) + f(d-n'/n) = f(1 - n'/n) = f + f', \\ \overline{H'N'} = \overline{H'S} + \overline{SN'} = -f'(a-1) + f'(a - n/n') = f'(1 - n/n') = f + f', \end{cases} \quad (2.53)$$

soit $\overline{HN} = \overline{H'N'}$. Si $n = n'$, alors, en comparant l'expression de $\overline{SH'}$ et $\overline{SN'}$, ainsi que \overline{EH} et \overline{EN} , on constate en outre que H et N sont confondus, ainsi que H' et N' .

§V Systèmes centrés : quelques exemples

Dans ce paragraphe, il ne s'agit que d'applications des formules générales démontrées précédemment.

§V.1 Dioptrre sphérique



La matrice de transfert s'écrit :

$$T(ES) = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \quad \text{où } V = \frac{n' - n}{nR} = \frac{n' - n}{f} = \frac{n'}{f} = -\frac{n}{f}. \quad (2.54)$$

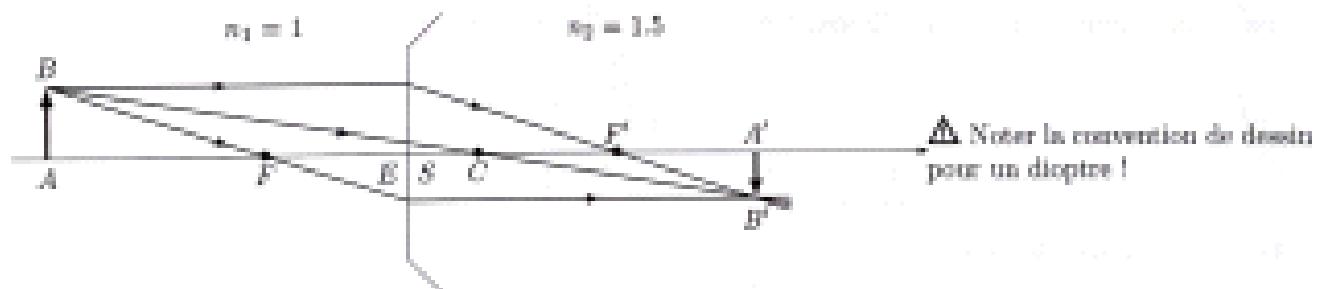
On a donc :

$$\left. \begin{array}{l} EH^2 = f'(n - 1) = 0 \\ EH = f(d - 1) = 0 \end{array} \right\} H \text{ et } H' \text{ sont confondus avec } E = S, \quad (2.55)$$

$$\left. \begin{array}{l} SN^2 = f' \left(1 - \frac{n}{n'} \right) = f' \frac{n' - n}{n'} = \frac{1}{V} VH = H \\ EN = H \text{ car } HH = H'N^2 \end{array} \right\} N \text{ et } N' \text{ sont confondus avec } C. \quad (2.56)$$

ainsi que :

$$\left. \begin{array}{l} f = HF = EF \text{ car } H \text{ et } E \text{ sont confondus, avec } f = -\frac{n}{n' - n} H, \\ f' = H'F' = SF' \text{ car } H' \text{ et } S \text{ sont confondus, avec } f' = \frac{n}{n' - n} H. \end{array} \right. \quad (2.57)$$



Relations de conjugaison.

$$FA'F'H = ff' = -\frac{nn'}{(n' - n)^2} H^2, \quad (2.58)$$

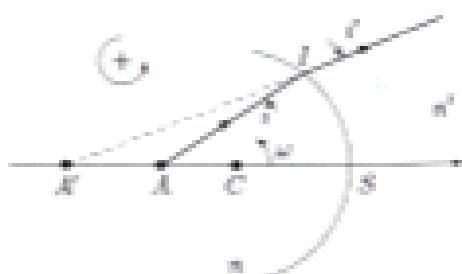
$$\frac{n'}{SA'} = \frac{n}{SA} = \frac{n' - n}{R}. \quad (2.59)$$

Remarque. Ces relations de conjugaison sont évidemment à rapprocher des expressions générales Exp. (2.23) et (2.26) au paragraphe § IV.4.

Remarque. La démonstration "traditionnelle" (sans matrice de transfert) des relations de conjugaison pour un dioptrre sphérique repose sur l'exploitation de la relation de Snell-Descartes pour le rayon réfracté au niveau du dioptrre et de la loi des sinus².

²En considérant un triangle de côtés a , b , et c et les angles "vu regard" α , β , et γ , il suffit de se souvenir que le (module) du produit vectoriel de deux vecteurs correspond au double de l'aire du triangle qu'ils délimitent, ce qui établit immédiatement la

²En considérant un triangle de côtés a , b , et c et les angles "en regard" α , β , et γ , il suffit de se souvenir que le (modèle) du produit vectoriel de deux vecteurs correspond au double de l'aire du triangle qu'ils délimitent, ce qui établit immédiatement la



Après avoir remarqué que la normale au dioptre (sphérique) correspond à la droite (CA), on a, dans les triangles CIA et CIA' :

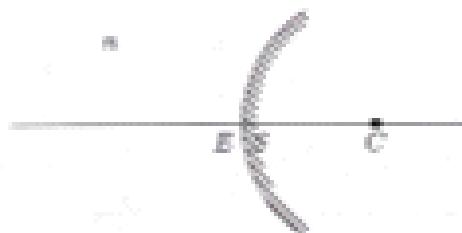
$$\frac{\sin i}{CA} = \frac{\sin(\pi - \omega)}{IA} \quad \text{et} \quad \frac{\sin i'}{CA'} = \frac{\sin(\pi - \omega')}{IA'} \quad \text{soit} \quad \frac{IA \sin i}{CA} = \frac{IA' \sin i'}{CA'}. \quad (2.61)$$

La relation de Snell-Descartes s'écrit $n \sin i = n' \sin i'$, et donc finalement (en rétablissant des valeurs algébriques) :

$$n \frac{CA}{IA} = n' \frac{CA'}{IA'}. \quad (2.62)$$

La dernière étape de la démonstration repose sur l'exploitation des conditions de Gauß : $\overline{IA} \approx \overline{SA}$ et $\overline{IA'} \approx \overline{SA'}$, et la décomposition $\overline{CA} = \overline{CS} + \overline{SA}$ et $\overline{CA'} = \overline{CS} + \overline{SA'}$, ce qui permet d'établir la relation de conjugaison Eq.(2.59).

§V.2 Miroir sphérique



Le matrice de transfert s'écrit :

$$T(ES) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad V = -\frac{2n}{2f} = -\frac{2n}{R} = \frac{n}{f} = -\frac{n}{f}. \quad (2.63)$$

On a donc, avec la convention de réorientation de l'axe optique :

$$\left. \begin{aligned} \overline{SH'} &= f(n-1) = 0 \\ \overline{EH} &= f(d-1) = 0 \end{aligned} \right\} H \text{ et } H' \text{ sont confondus avec } E \equiv S, \quad (2.64)$$

$$\left. \begin{aligned} \overline{SN'} &= f \left(1 - \frac{n}{f}\right) = 2f = -\overline{R} \\ \overline{EN} &= f \left(1 - \frac{n}{f}\right) = 2f = \overline{R} \end{aligned} \right\} N \text{ et } N' \text{ sont confondus avec } C. \quad (2.65)$$

On peut écrire alors avec la convention de réorientation de l'axe optique :

$$\overline{EN} = f \left(1 - \frac{\overline{EF}}{R} \right) = 2f - \overline{E} \quad \left. \begin{array}{l} N \text{ et } N' \text{ sont confondus avec } C. \end{array} \right\} (2.65)$$

ainsi que, toujours avec la convention de réorientation de l'axe optique :

$$\left. \begin{array}{l} f = \overline{HF} = \overline{R}/2 \\ f' = \overline{H'F'} = -\overline{R}/2 \end{array} \right\} F \text{ et } F' \text{ sont confondus, à mi-distance de } S \text{ et } C. \quad (2.66)$$

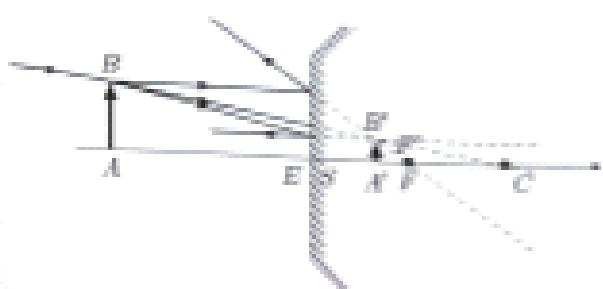
relation :

$$\frac{\sin \alpha}{\overline{E}A} = \frac{\sin \beta}{\overline{E}B} = \frac{\sin \gamma}{\overline{E}C}. \quad (2.67)$$

Les angles α , β et γ sont les angles d'incidence, de réflexion et de transmission respectivement.

Chapitre 2. Formation des images en lentille minérale

30



A Noter la convention de dessin, ainsi que la "réorientation" de l'axe optique à la réflexion !

*Sur ce schéma, $\overline{EA} < 0$ et $\overline{FA} > 0$.

Relations de conjugaison.

$$\overline{FA} \overline{F'A'} = -\overline{E}^2/4. \quad (2.67)$$

$$\frac{1}{\overline{EF}} - \frac{1}{\overline{EA}} = -\frac{2}{\overline{E}}. \quad (2.68)$$

A Ne pas oublier dans toutes ces formules la convention de réorientation de l'axe optique à la réflexion !

Remarque. Bien évidemment, la démonstration "traditionnelle" (sans matrice de transfert) des relations de conjugaison pour un miroir sphérique est similaire à celle du dioptr sphérique, et correspond formellement à poser $n' = -n$ dans les formules correspondantes.

§V.3 Lentille

Une lentille est constituée de deux dioptr s séparés par un milieu homogène d'indice n_0 , d'épaisseur e au niveau de l'axe optique.



La matrice de transfert s'écrit :

$$T(\overline{ES}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e/n_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - eV_1/n_0 & e/n_0 \\ -V & 1 - eV_2/n_0 \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \frac{n_0 - n_1}{n_1} \\ V_2 = \frac{n_0 - n_2}{n_2} \end{array} \right.$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \frac{n_0 - n_1}{R_1}, \\ V_2 = \frac{n_2 - n_0}{R_2}, \\ V = V_1 + V_2 - \frac{cV_1V_2}{n_0}. \end{array} \right. \quad (2.70)$$

Cette dernière équation est connue sous le nom de "formule de Gullstrand", du nom d'un ophtalmologiste suédois (prix Nobel de médecine en 1911). Les éléments cardinaux pour les relations de conjugaison s'en déduisent immédiatement. Dans le cas où la lentille est plongée dans un milieu homogène d'indice $n_0 = 1 = n_2$ (le cas le plus fréquent dans un montage d'aggrégats...), on a :

$$V = V_1 + V_2 - \frac{cV_1V_2}{n_0} = (n_0 - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n_0 - 1}{n_0} \frac{c}{R_1 R_2} \right). \quad (2.71)$$

et donc :

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{f} = (n_0 - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{n_0 - 1}{n_0} \frac{c}{R_1 R_2} \right). \quad (2.72)$$

L'approximation dite de "lentille mince" consiste à considérer :

$$\left\{ \begin{array}{l} c \ll \left| \frac{n_0}{n_0 - 1} \right| |R_1|, \\ c \ll \left| \frac{n_0}{1 - n_0} \right| |R_2|, \\ c \ll \left| \frac{n_0}{n_0 - 1} \right| |R_1 - R_2|. \end{array} \right. \quad (2.73)$$

La matrice de transfert prend alors la forme suivante :

$$T(\overline{ES}) \approx \begin{bmatrix} 1 & c/n_0 \\ -(V_1 + V_2) & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.74)$$

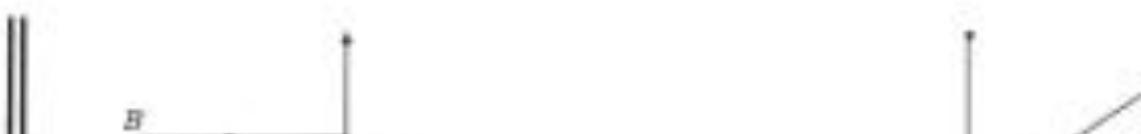
correspondant à :

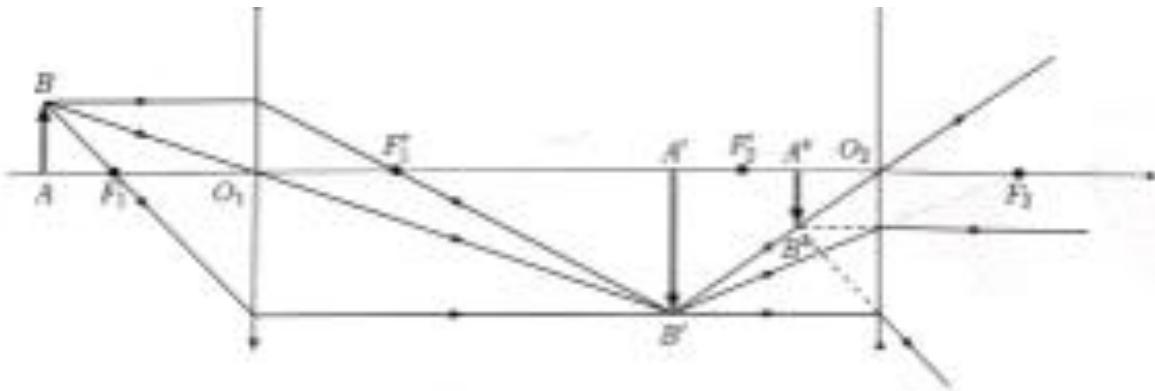
$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{f} = (n_0 - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.75)$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} \overline{SH}^0 &= f'(a - 1) = 0, \\ \overline{EH} &= f(d - 1) = 0, \\ \overline{SN}^0 &= f'(a - 1) = 0, \\ \overline{EN} &= f(d - 1) = 0, \\ \overline{EP} &= fd = f \gg c, \\ \overline{SF} &= f'a = f' \gg c. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Comme $\overline{HH}^0 = c = \overline{NN}^0 \ll |f|, |f'|$, on confond E, S, H, H', N et N' en O , centre optique de la lentille mince.





▲ Noter la convention de dessin d'une lentille convergente (celle de gauche) et divergente (celle de droite) !

Relations de conjugaison.

$$F_1 F_2 F = f f' = -f^2 \text{ dite "de Newton".} \quad (2.77)$$

$$\frac{1}{d'} - \frac{1}{d} = \frac{1}{f} \text{ dite "de Descartes".} \quad (2.78)$$

Sous qu'elles constituent (formellement) des lentilles minces, on distingue (en considérant des lentilles de verre placées dans l'air) :

lentille biconvexe, convergente,

$$V_1 > 0, V_2 > 0, V > 0 ;$$



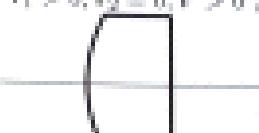
lentille biconcave, divergente,

$$V_1 < 0, V_2 < 0, V < 0 ;$$



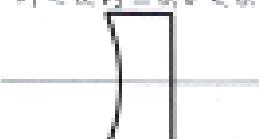
lentille plan-convexe,

$$V_1 > 0, V_2 = 0, V > 0 ;$$



lentille plan-concave,

$$V_1 < 0, V_2 = 0, V < 0 ;$$



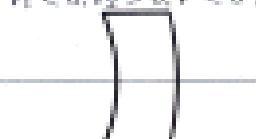
ménisque convergent,

$$V_1 > 0, V_2 < 0, V > 0 ;$$



ménisque divergent,

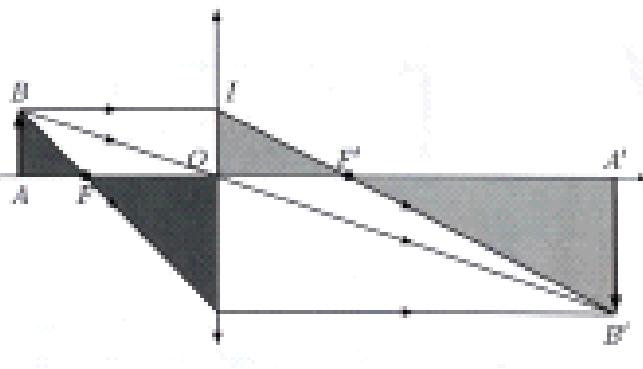
$$V_1 < 0, V_2 > 0, V < 0 ;$$



Remarque. On notera que le caractère convergent ou divergent d'une lentille est indépendant du sens de propagation de la lumière.

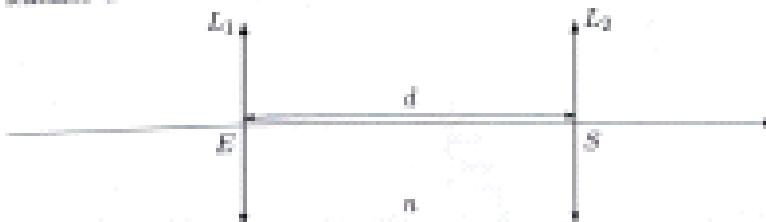
Remarque. Bien évidemment, les relations de conjugaison pour une lentille peuvent être retrouvées à partir des résultats obtenus sur le dioptrie sphérique. Il suffit pour cela de décomposer la formation de l'image par la lentille en deux étapes : la première correspond à la formation par le premier dioptrie d'une image "intermédiaire" de l'objet, image alors considérée comme objet pour le second dioptrie qui en forme à son tour une image. Un peu d'algèbre permet alors de retrouver la formule de Galilée Eq.(2.70).

Dans le cas d'une lentille mince, la démonstration est beaucoup plus rapide. Il suffit d'appliquer le théorème de Thalès pour obtenir, d'une part $\gamma = \overline{AF}/\overline{AB} = \overline{FO}/\overline{FA}$ et d'autre part $\gamma = \overline{F'A'}/\overline{FA}$, et donc immédiatement $\overline{FA}/\overline{F'A'} = ff'$. La relation de conjugaison de Descartes s'obtient alors soit algébriquement (en décomposant $\overline{FA} = \overline{FO} + \overline{OA}$ et $\overline{F'A'} = \overline{FO} + \overline{OA'}$ avec $f = \overline{OF}$ et $f' = \overline{OF'}$), soit en considérant d'une part les triangles semblables OAB , $OA'B'$ et d'autre part les triangles semblables $F'OI$ et $F'A'B'$ et en appliquant à nouveau le théorème de Thalès.



§V.4 Doublet de lentilles minces

On considère deux lentilles minces dont on fait coïncider les axes optiques, séparées par une distance d .



La matrice de transfert du système s'écrit :

$$T(\overline{ES}) = \begin{bmatrix} 1 & e_2/n_2 \\ -V_2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & e_1/n_1 \\ -V_1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - dV_1/n - e_2 V_1/n_2 & d/n + e_1/n_1 + e_2/n_2 \\ -(V_1 + V_2 - V_1 V_2 d/n) & 1 - dV_2/n - e_1 V_2/n_1 \end{bmatrix}. \quad (2.79)$$

Deux cas sont intéressants à discuter :

- $d = 0$: les lentilles sont alors accolées. La matrice de transfert prend alors la forme :

$$T(\overline{ES}) = \begin{bmatrix} 1 - e_2 V_1/n_2 & e_1/n_1 + e_2/n_2 \\ -(V_1 + V_2) & 1 - e_1 V_2/n_1 \end{bmatrix}. \quad (2.80)$$

La vergence du système est donc égale à $V = V_1 + V_2$, soit :

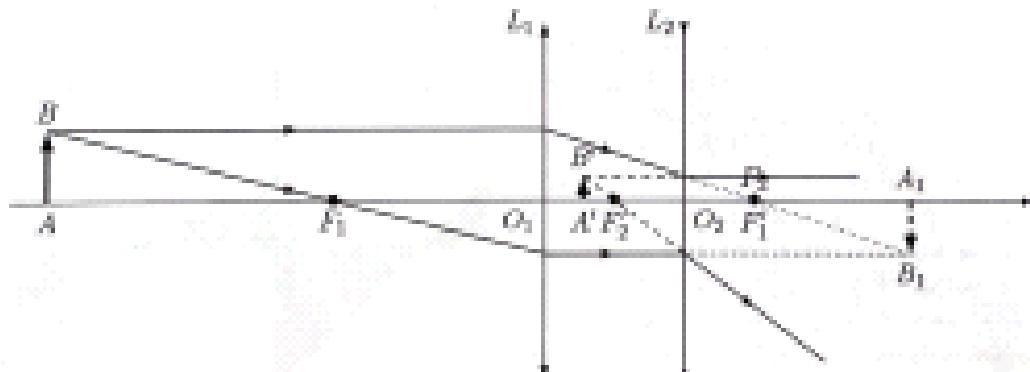
$$\begin{cases} \frac{1}{f_{\text{tot}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}, \\ \frac{1}{f_{\text{tot}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{d}{f_1 f_2}. \end{cases} \quad (2.81)$$

- $d \neq 0$: la vergence du système est donc égale (avec $n = 1$) à $V = V_1 + V_2 - dV_1 dV_2$, soit :

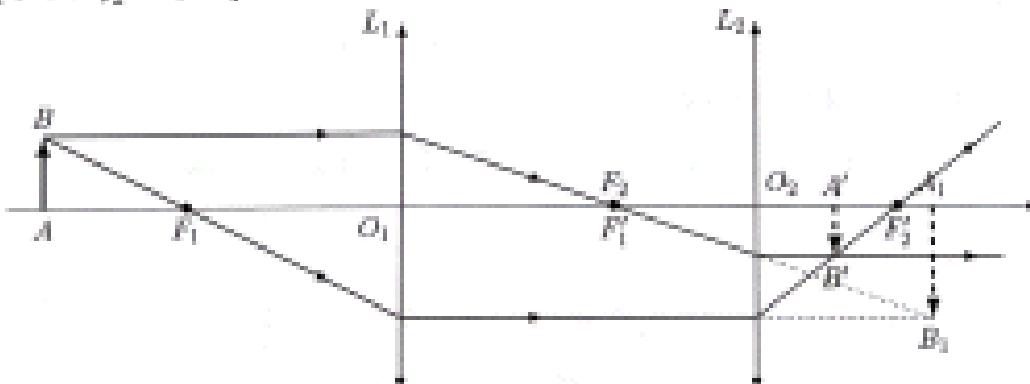
$$\begin{cases} \frac{1}{f_{\text{tot}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}, \end{cases} \quad (2.82)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f_{\text{tot}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}, \\ \frac{1}{f_{\text{tot}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2}. \end{array} \right. \quad (2.82)$$

On peut donc fabriquer un système afoocal ($V = 0$) en choisissant $d = f'_1 + f'_2 = -(f_1 + f_2)$ (le signe de d fixant l'ordre des lentilles). Dans le cas où $f'_1 > 0$ et $f'_2 < 0$ (et $d > 0$), on parle de lunette de Galilée :



On notera que $A'B'$ est une image virtuelle, et dans le même sens que l'objet AB (avec AB réel). Dans le cas où $f'_1 > 0$ et $f'_2 > 0$, on parle de lunette astronomique :



On notera que $A'B'$ est une image réelle, et de sens inversé par rapport à AB (avec AB réel).

§VI Aberrations

L'image d'un objet que forme un système optique est en général entachée de certains défauts, appelés aberrations, que l'on classe en deux catégories :

- les aberrations chromatiques, dues au fait que l'indice d'un milieu dépend en général de la longueur d'onde (on parle alors de milieu dispersif), qui intervient donc lorsque la lumière utilisée pour former l'image est polychromatique ; ces aberrations sont absentes pour des systèmes optiques mettant exclusivement en œuvre des surfaces réflectissantes ;
- les aberrations géométriques, dues au fait que les conditions de Gauss correspondent à des développements limités trouqués à l'ordre le plus bas.

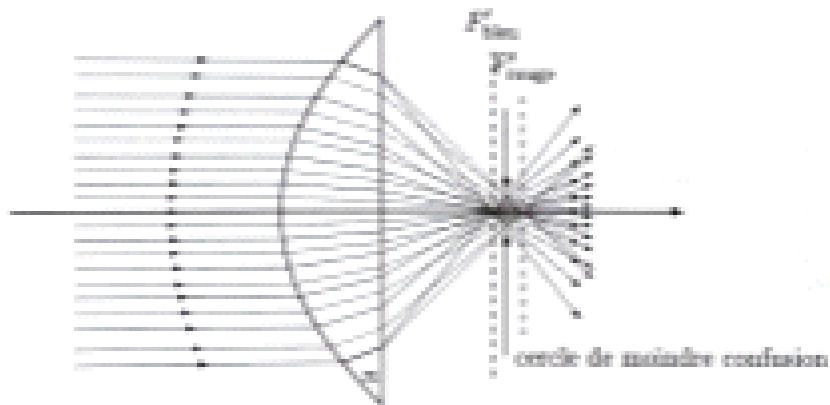
§VI.1 Aberrations chromatiques

§VI.1 Aberrations chromatiques

Dans le domaine optique, pour des matériaux transparents usuels, l'indice d'un milieu vitré en général la loi de Cauchy² :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}, \quad \text{avec } A, B > 0. \quad (2.83)$$

Les distances focales pour les systèmes à foyers finis (épaisseur un (ou plusieurs) millimètres) vont donc dépendre de la longueur d'onde considérée. Ainsi, pour une lentille mince³ éclairée par un faisceau parallèle de lumière blanche parallèlement à l'axe optique, on a :



i.e. :

- le plan focal image pour le bleu est différent du plan focal image pour le rouge : on parle d'aberration chromatique longitudinale ;
- dans un plan orthogonal à l'axe optique, on obtient différentes tâches circulaires colorées: bleue au centre et rouge au bord en F'_{blue} , rouge au centre et bleue au bord en F'_{red} . Il est facile de se convaincre que cela correspond à une différence de grandissement transversal, et on parle ainsi l'aberration chromatique transversale.

Le rayon minimal de la tâche que l'on peut obtenir correspond au cercle de moindre-confusion ("chromatique") : c'est ce plan qui sera en général atteint au plus conjugué de la source (avec un éventuel biais dû à la réponse spectrale de l'œil qui favorise les longueurs d'onde autour de 550 nm).

Pour analyser de manière quantitative ces aberrations, on considère par convention trois longueurs d'onde

²Pour ce qui nous concerne, il suffit de savoir que " $n_{\text{blue}} > n_{\text{red}}$ ".

³L'illustration de l'aberration chromatique sur le schéma ci-dessous repose sur un choix loin d'être innocent : elle met en œuvre une lentille plan-concave dite "de Fresnel", rigoureusement stigmatique (pour un indice) pour le couple de points ("point"). A cause de l'index sur l'axe optique, foyer F') et curieusement dégénéré (rôle des 0°) ; la pénétrabilité de l'aberration sphérique (cf. plus loin) est donc éliminée.

particularies⁴ : le jaune $\lambda_D = 587.56$ nm, le rouge $\lambda_C = 636.3$ nm, le bleu $\lambda_F = 486.1$ nm, et l'on caractérise le pouvoir dispersif d'un matériau par le nombre d'Abbe (ou constance) :

$$A = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C}. \quad (2.84)$$

$$n = \frac{c}{n_f - n_c}$$

On distingue, pour des raisons historiques, deux grandes familles de verres :

- les verres "lourds", ou *creus*, avec $A \gtrsim 50$ (exemple : le verre optique le plus commun, BK7 : $A=64$; la fluorine CaF_2 : $A=93$) ;
- les verres "légers", ou *flints*, avec $A \lesssim 50$ (exemple : le cristal d'art).

On peut obtenir une très grande diversité de verres en modifiant leur composition chimique, que ce soit en ce qui concerne leurs propriétés optiques (comme illustré sur Fig. (2.1)) mais également mécaniques ou thermiques. L'association d'éléments optiques taillés dans différents verres permet de réduire ces aberrations chromatiques. On peut montrer que les aberrations longitudinale et transversale peuvent être corrigées simultanément à l'aide d'un ensemble⁶ de deux lentilles minces accolées, l'une étant convergente et l'autre divergente. Si l'approximation de système mince n'est pas valable, seule l'une de ces deux aberrations peut être en général corrigée, sauf à ne faire intervenir dans le système optique que des achromats, évidemment, ou à utiliser plus de deux lentilles.

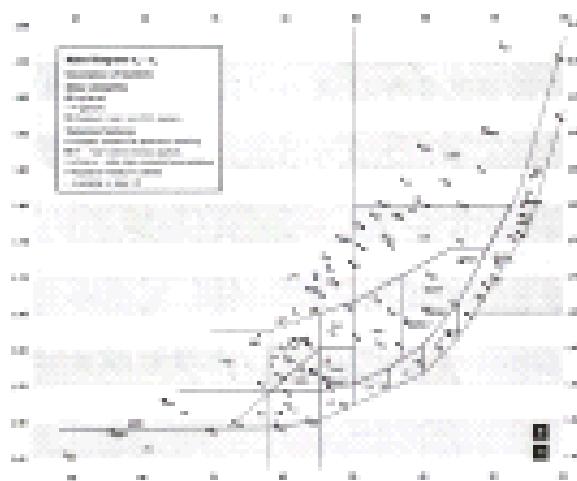


Figure 2.1: Illustration de la diversité de verres optiques proposés à la vente par l'entreprise Schott. Le nombre d'Abbe figure sur l'axe des abscisses (décroissant de gauche à droite) et l'indice de réfraction (pour $\lambda = \lambda_D = 587.56 \text{ nm}$) sur celui des ordonnées (source : <https://www.schott.com/interactive-abbe-diagram>).

⁶Ces longueurs d'onde correspondent à trois raies dites "de Fraunhofer": la raie $D\alpha$ (ou d) de l'Hélium, la raie C de l'Hydrogène et la raie F de l'Hydrogène. Également, qui appasent en absorption dans le spectre solaire (en travaux les plus renommés de Fraunhofer, à son époque, portent sur l'obtention de spectres, en particulier du Soleil, et non pas sur des problématiques de diffraction ; c'est probablement ce qui justifie son surnom : "Appasement solaire" [Il a appassé les étoiles]). Les raies C et F ne sont rien d'autre que les raies $H\alpha$ et $H\beta$ de la série de Balmer.

⁷Un tel ensemble est appelé généralement "achromat de Fraunhofer", même si son invention est à mettre au crédit de deux anglais (Chester Moore Hall et John Dollond) dans la première moitié du XVIII^e siècle, qui collaient les deux lentilles à l'aide de baume du Canada. Fraunhofer améliora le dispositif au début du XIX^e, en conservant la possibilité que les rayons de courbure des dioptries "en regard" soient différents et que les deux lentilles soient ainsi séparées par une couche d'air. À noter au passage que Newton avait conclu, de façon erronée, que tous les verres ont le même pouvoir dispersif ; à l'impossibilité de disposer dans ces conditions d'une lunette sans aberrations chromatiques, le télescope (construit à l'aide de miroirs) présentait ainsi un intérêt évident.



§VI.2 Aberrations géométriques

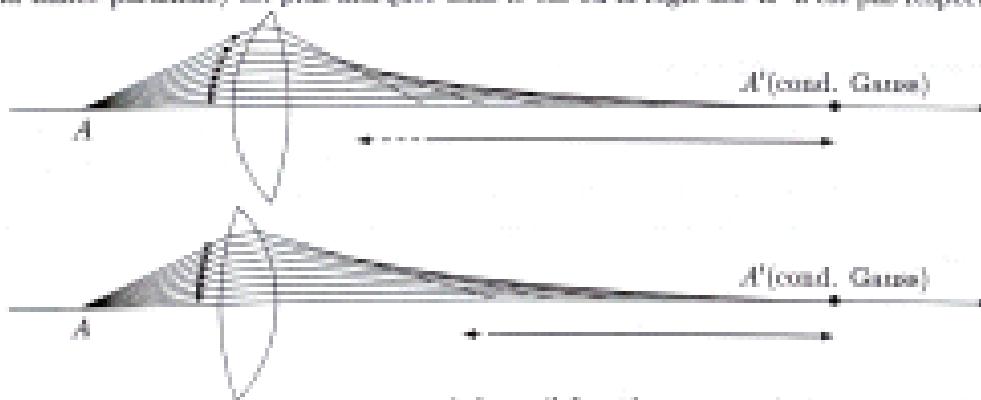
Sont regroupés sous le terme aberrations géométriques tous les défauts de l'image dus au fait que former une image "dans les conditions de Gauss" n'est qu'asymptotiquement correct : c'est ce qui correspond à l'approximation parabolique du trajet des rayons lumineux.

En introduisant la distance h entre un point objet B et l'axe optique, et la distance ρ par rapport à l'axe optique à laquelle un rayon issu de B passe par la pupille d'entrée, on peut développer le calcul pour déterminer à quelle distance d de B' , image paraxiale de B , ce rayon intersecte le plan perpendiculaire à l'axe optique contenant B' . On montre que l'on peut alors classer, pour des dioptrées sphériques, ces aberrations en plusieurs catégories dites de Seidel, correspondant aux six¹ premiers termes du développement en puissance de (ρ, h) :

d	$\propto \rho^2$ (indép. de h)	$\propto h\rho^2$	$\propto h^2\rho$	$\propto h^3$
nom	aberration sphérique	aberration de coma	astigmatisme ² et courbure de champ	distorsion

L'illustration expérimentale de ces aberrations (avec notamment les notions de caustique, plans sagittal et méridien, distorsion barillet/coussinet) est présentée en détail dans [Dess, p.25-32]. L'aberration sphérique permet en particulier de justifier l'éclairage que l'on observe lorsque l'on cherche à faire l'image d'un trou source situé sur l'axe optique, avec, en particulier, l'apparition d'un cercle de confusion ("géométrique").

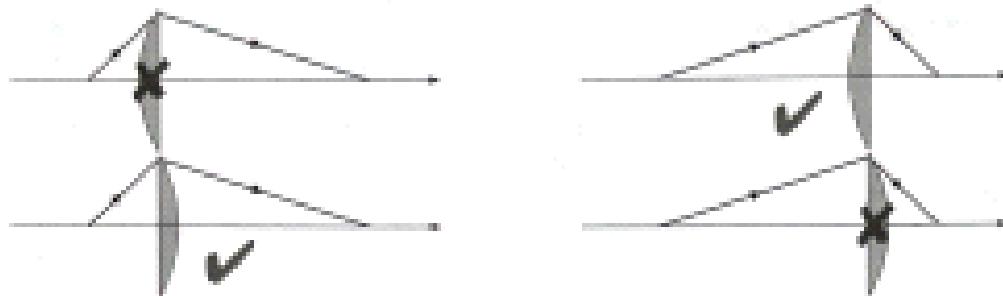
Pour limiter ces aberrations, la première idée qui peut venir à l'esprit consiste à limiter l'intervalle de ρ , i.e. à diaphragmer la pupille d'entrée. Cela réduit en effet les aberrations (sauf la distorsion), mais l'inconvénient est que cela diminue également la luminosité ! Toute l'ingénierie optique³ consiste à inventer des surfaces qui, n'étant plus associées à des dioptrées sphériques, permettent de réduire ces aberrations. En ce qui concerne l'aberration sphérique (pour des dioptrées sphériques), on peut montrer que l'on diminue cette aberration en rendant minimaux les angles d'inclinaison des rayons sur les dioptrées. Pour une lentille, cela correspond donc à placer la face la plus plate de la lentille (celle dont le rayon de courbure est le plus grand en valeur absolue) du côté des rayons les plus inclinés, c'est la "règle des 4P : plus plat, plus près". Cela est illustré sur la figure ci-après, pour laquelle ont été tracés différents rayons optiques en respectant (sans imparfaiction) les lois de Snell-Descartes au niveau des deux dioptrées qui forment une lentille : l'aberration sphérique (i.e. le fait qu'un rayon lumineux issu de A intersecte l'axe optique de plus en plus loin de l'image géométrique A' lorsqu'on s'éloigne de la limite paraxiale) est plus marquée dans le cas où la règle des 4P n'est pas respectée.



Un montage d'optique se doit de respecter cette règle, et il faut donc penser à retourner éventuellement une lentille en fonction des positions respectives de l'objet et de l'image.

¹La sixième aberration, sans intérêt sauf dans un contexte d'interférométrie, est appelée "planon".

²Les logiciels de conception optique mettent en œuvre ces approches analytiques, basées sur les polynômes de Seidel (théorie développée au milieu du XIX^e siècle) ou plus précisément leur généralisation à partir des polynômes de Zernike (prix Nobel en 1953 pour l'invention du microscope à contraste de phase), associées à des techniques de tracé de rayons ("ray-tracing" en anglais).



▲ Il est évident que la surface la plus plane d'une lentille ne pourrait être repérée à l'aide d'un doigt, et encore moins d'un objet tel que la pointe d'un crayon...

Remarque. Une façon différente (plus formelle et plus riche) d'appréhender les aberrations géométriques consiste à repartir du principe de Fermat, qui détermine la "trajectoire" de chacun des rayons lumineux traversant le système optique considéré. De la même façon qu'en mécanique analytique, on peut construire un "Hamiltonien" (appelé, dans ce contexte, fonction caractéristique) et les équations de Hamilton correspondantes. Il ne reste plus qu'à comparer ce Hamiltonien (associé au système optique réel) et le Hamiltonien obtenu dans les conditions de Gauss pour discuter et classifier les différentes aberrations, en développant la différence entre les deux sur une base de fonctions appropriée (historiquement les polynômes de Seidel). Cela revient à analyser l'écart entre la surface d'onde réelle et la surface d'onde (sphérique) obtenue dans l'approximation paraxiale.

§VII Instruments d'optique

Outre les caractéristiques physiques que sont les grandeurs transversal, longitudinal et angulaire, il est d'usage d'introduire d'autres caractéristiques pour quantifier l'apport d'un instrument d'optique. Ces caractéristiques peuvent être de deux types : soit l'instrument facilite l'observation en terme de "grossissement" (caractéristiques commerciales), soit il apporte un confort visuel en terme de "luminosité" (caractéristique photométrique).

§VII.1 Caractéristiques commerciales

L'idée est de comparer l'observation directe d'un objet à l'œil nu à celle de l'image de cet objet qu'effectue le système optique que l'on interpose. On considère donc pour cela un objet AB , perpendiculaire à l'axe optique, éventuellement à l'infini, et son image $A'B'$ (éventuellement à l'infini). On note α l'angle sous lequel est vu l'objet AB (en l'absence d'instrument, donc), et α' l'angle sous lequel est vu $A'B'$ (le "est vu" faisant référence à la pupille d'entrée de l'œil).

Puissance

Définition. On appelle puissance P le rapport suivant :

$$P = \frac{\alpha'}{\alpha}. \quad (2.85)$$

Ses unités est la dioptrie, avec $1\text{d} = 1\text{ m}^{-1}$.



Son unité est la dioptrie, avec $1\text{ dpt} = 1\text{ m}^{-1}$.

La puissance n'est pas caractéristique de l'instrument mais dépend de la position relative de l'objet AB , de l'instrument et de l'œil.

Chapitre 2: Formation des images au moyen de l'œil

29

Grossissement

Définition. On appelle grossissement G le rapport suivant :

$$G \equiv \frac{\alpha'}{\alpha}. \quad (2.86)$$

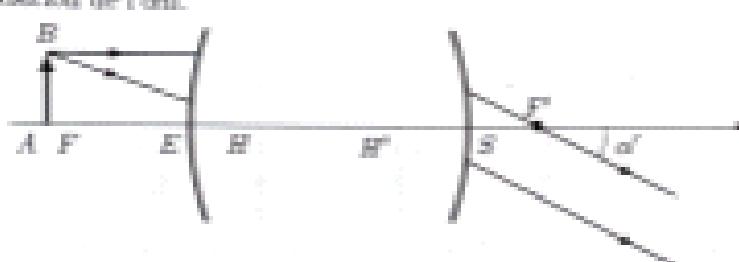
Tout comme la puissance, le grossissement n'est pas caractéristique de l'instrument uniquement.

Puissance intrinsèque

Définition. On appelle puissance intrinsèque P_i l'inverse de la distance focale image :

$$P_i \equiv \frac{1}{f'}. \quad (2.87)$$

Elle correspond à la notion de puissance lorsque l'objet AB est placé dans le plan focal objet, son image étant alors renvoyée à l'infini et étant donc vue (sans effort d'accommodation par un œil normal) toujours sous l'angle α' indépendant de la position de l'œil.



Grossissement commercial

Dans le cas où l'objet est situé à l'infini, l'angle α sous lequel cet objet est vu (en l'absence d'instrument) est indépendant de la position de l'œil. Cet instrument peut bien entendu faire une image de cet objet, soit dans le plan focal image (pour un système à foyers), soit à l'infini (pour un système afoocal). Compte tenu du fait qu'une observation à l'œil est optimale lorsque l'œil est au repos (i.e. s'accommode peu), et que cela correspond à la situation où l'œil observe un objet (ou son image) situé(s) à l'infini, on ne définit le grossissement commercial d'un instrument faisant l'image d'un objet situé à l'infini que dans le cas d'un système afoocal. Ce grossissement commercial n'est alors rien d'autre que le grossissement angulaire.

Dans le cas où l'objet est situé à distance finie, pour les mêmes considérations d'observation idéale avec un œil au repos, on se place dans la situation où son image est envoyée à l'infini (c'est-à-dire que l'objet est placé dans le plan focal objet, le système devant forcément être à foyers), ce qui fixe α' indépendamment de la position de l'œil. Pour la détermination de α , on considère par convention que c'est l'angle maximal sous lequel un œil normal d'âge moyen peut voir cet objet (en l'absence d'instrument) ; cet objet doit alors être placé à

placé dans le plan focal objet, le système devient forcément être à foyers), ce qui fixe α' indépendamment de la position de l'œil. Pour la détermination de α , on considère par convention que c'est l'angle maximal sous lequel un œil normal d'âge moyen peut voir cet objet (en l'absence d'instrument) ; cet objet doit alors être placé à une distance (minimale) de 0.25 m, et l'on a donc $\alpha = AB/0.25$. On en déduit le grossissement commercial :

$$G_c = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{AB/f'}{AB/0.25} = \frac{1}{f'} \quad (2.88)$$

§VII.2 Caractéristiques photométriques

Clarté

Il est facile de se convaincre que la "conservation de l'énergie" doit imposer une relation entre l'amont et laval d'un instrument d'optique, qui doit faire intervenir une quantité d'ordre énergétique ainsi qu'un aspect

géométrique. Sans entrer dans les détails de photométrie et en considérant que les milieux traversés sont parfaitement transparents, on peut démontrer que dans le cas usuel où les milieux extrêmes d'un instrument d'optique sont identiques (généralement l'air), c'est la luminance¹⁰, dont l'unité est le $W\cdot m^{-2}\cdot sr^{-1}$, qui est conservée (tout comme l'est la luminance monochromatique, i.e. la luminance par unité de longueur d'onde bien évidemment). Reste alors à réaliser que l'instrument d'optique forme une image sur un ensemble de photodétecteurs (par exemple les cellules photosensibles de la rétine) qui peuvent ou non résoudre cette image. Deux cas¹¹ doivent alors être discutés :

- si l'instrument d'optique ne permet pas de résoudre l'objet, alors son image se forme sur un seul "pixel" du détecteur. C'est la situation rencontrée, par exemple, lors de l'observation d'un ciel étoilé, les télescopes ou lunettes d'amateur¹² faisant d'une étoile "pointuelle" une image "pointuelle"¹³. La clarté C est alors définie comme le rapport des flux lumineux entrant dans l'œil en présence ou en absence de l'instrument d'optique, ce qui correspond au rapport des surfaces des pupilles d'entrée. Dans les conditions normales d'utilisation d'un instrument d'optique, c'est l'instrument et non la pupille de l'œil qui détermine le diaphragme d'ouverture. En notant a le diamètre de la pupille de l'œil ($a \approx 6$ mm lorsque l'œil est "grand ouvert") et d celui de la pupille d'entrée de l'instrument (qui correspond dans le cas d'un télescope ou d'une lunette astronomique au diamètre de l'objectif, $d \approx 60 - 200$ mm pour les instruments "abordables"), la clarté est alors :

$$C = \left(\frac{d}{a}\right)^2 \quad (2.89)$$

C'est ce qui justifie le fait que les étoiles paraissent beaucoup plus lumineuses lorsqu'elles sont observées à travers un instrument plutôt qu'à l'œil nu.

- si l'objet est "éteint", son image se forme donc sur plusieurs pixels, avec ou sans l'instrument. L'instrument permet, certes, de collecter plus de lumière (dans le même rapport que celui discuté ci-dessus), mais l'image, elle, se forme sur une surface G^2 fois plus grande (a priori), où G correspond au grossissement défini ci-dessus. La clarté C est alors définie comme le rapport des éclairements (le flux lumineux entrant dans l'œil ramené à la surface de l'image formée sur la rétine) en présence ou en absence de l'instrument d'optique. Avec les notations introduites précédemment, on a alors :

$$C = \frac{1}{G^2} \left(\frac{d}{a}\right)^2 \quad (2.90)$$

C'est ce qui justifie que contrairement au cas des étoiles, un objet étendu (par exemple un paysage observé à travers des lunettes) n'apparaît pas forcément beaucoup plus lumineux (et peut-être même beaucoup

C'est ce qui justifie que contrairement au cas des étoiles, un objet écaillé (par exemple un paysage observé à travers des jumelles) n'apparaît pas forcément beaucoup plus lumineux (et peut être même moins) lorsqu'il est observé à travers un instrument.

Remarque. Les pertes dues aux réflexions parasites sur les dioptres présents dans l'instrument ou à la traversée des optiques sont aisément prises en compte en multipliant les définitions précédentes par un facteur $r < 1$ rendant compte de ces aspects¹⁴.

¹³Luminance et brillance (parfois aussi appelée brillance de surface) recouvrent les mêmes quantités photométriques, et correspondent à ce qui est appelé radiance en radiométrie...

¹⁴Ces deux situations peuvent être illustrées à l'aide du logiciel (en ligne) Stellarium : <https://www.stellarium.org/screens/screen-telescope/>

¹⁵Une exception notable est l'image de la surface de Betelgeuse (α Ori), une étoile dite "supergéante rouge", prise en 1990 par le télescope spatial Hubble.

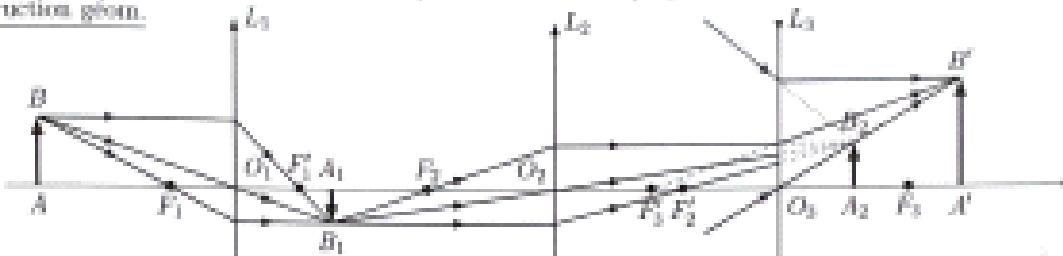
¹⁶En anticipant un peu, il est intéressant de remarquer dans ce contexte que dans la partie la plus sensible de la rétine, la densité superficielle de cellules photo sensibles correspond justement à la limite de diffraction pour l'ouverture "maximale" de la pupille en-dehors de laquelle les aberrations (aphéctiques notamment) dégradent l'acuité visuelle.

¹⁷Ces pertes sont loin d'être négligeables ! Pour le verre optique le plus commun, le BK7 (ou N-BK7), et une longueur d'onde de 620 nm, la transmittance est proche de 99,8 % pour une épaisseur de 10 mm [18, p.12] mais la prise en compte de réflexions sur les surfaces d'entrée et de sortie ramène ce chiffre à 99 % [22] pour une lame non traitée de même épaisseur ! En même sans considérer ces réflexions, on peut noter que l'affaiblissement d'un signal à travers ce verre serait de l'ordre de 1 dB sur une épaisseur de 10 m, chiffre à rapprocher des distances à parcourir dans le domaine des télécommunications...

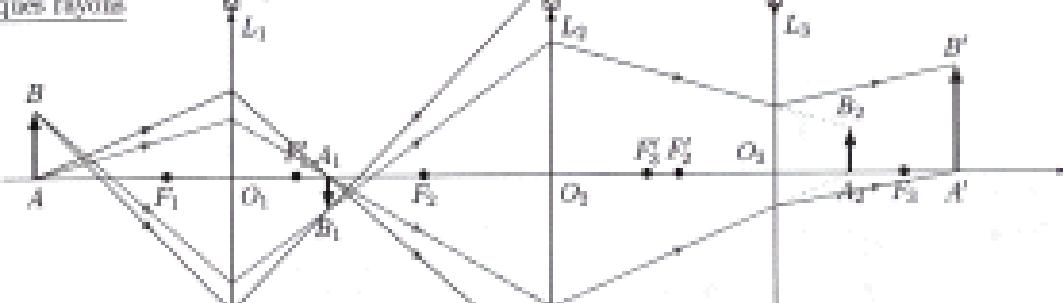
§VII.3 Diaphragmes, pupilles et lucarnes

On considère un instrument d'optique à symétrie de révolution, constitué d'un ou plusieurs dioptres et/ou miroirs. Ces dioptres/miroirs n'ont pas (dans la vraie vie) une extension spatiale infinie, mais sont délimités par des supports/insertions : on parle alors de diaphragmes. Tout en restant dans le cadre de l'optique paraxiale, l'effet de ces diaphragmes va être de restreindre l'ensemble des rayons issus d'un point A pouvant effectivement atteindre le point A' image de A par l'instrument d'optique.

Construction géom.



Quelques rayons

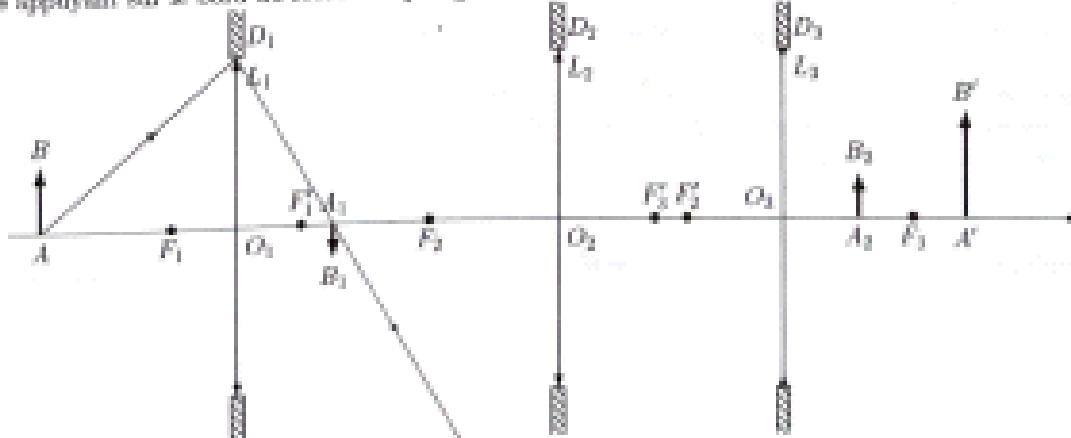




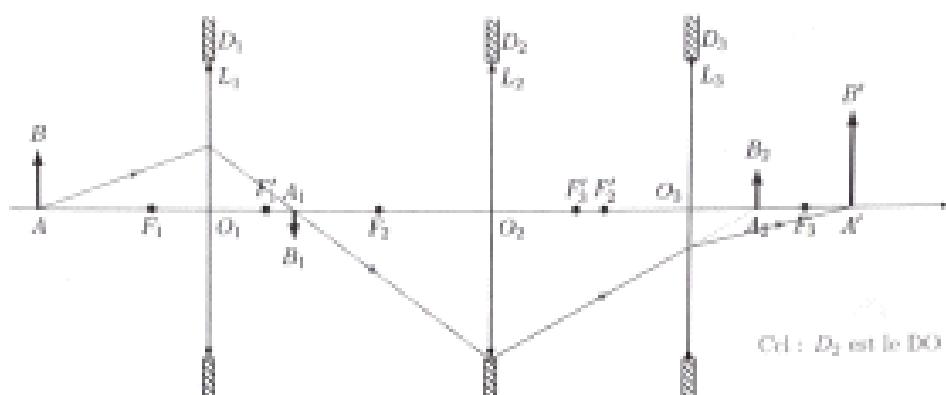
Diaphragme d'ouverture

C'est le diaphragme qui contrôle la quantité de lumière qui atteint le plan image. Il définit le faisceau en quelque sorte étroit issu du point objet A situé sur l'axe optique dont on cherche à faire l'image. Pour déterminer le diaphragme d'ouverture, il faut procéder comme suit (les deux méthodes étant équivalentes) :

* tracer le rayon partant de A s'appuyant sur le bord du premier diaphragme rencontré. Si aucun autre diaphragme ne l'intercepte jusqu'à arriver en A', ce diaphragme constitue le diaphragme d'ouverture. Si au contraire il est intercepté par un autre diaphragme, ce n'est pas le diaphragme d'ouverture ; tracer alors le rayon s'appuyant sur le bord du second diaphragme rencontré, et rediscuter.

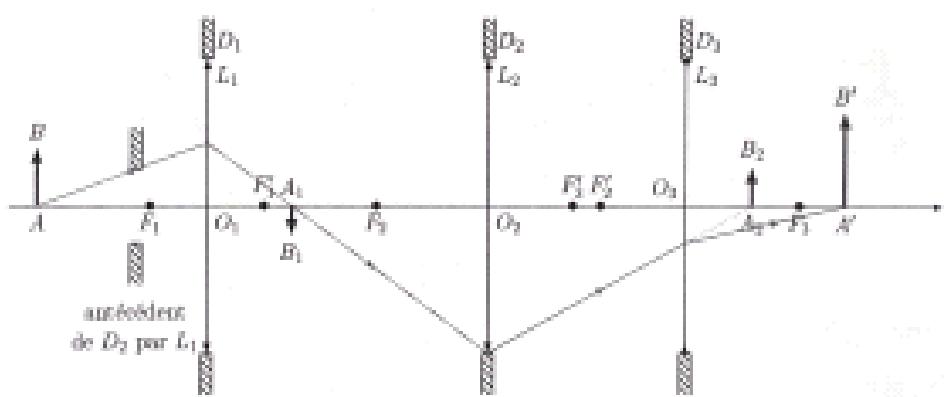


• Cd : Décision pour le DO



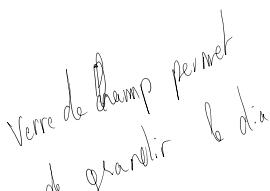
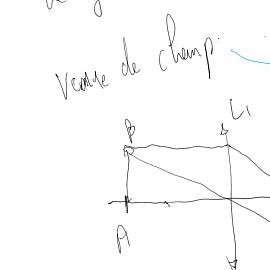
Cel : D_2 est le DO

♦ déterminer l'ensemble des antécédents par le système optique de tous les diaphragmes présents. Celui qui est vu sous l'angle le plus faible depuis A est l'antécédent du diaphragme d'ouverture.



antécédent
de D_2 par L_1

Vette de champ permet de grandir le dia
Vette de champ

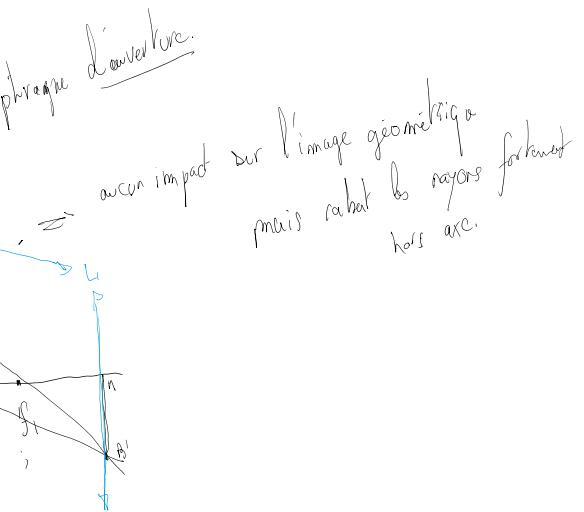




antécédent de D_2 par L_3 puis par L_1

L'antécédent du diaphragme d'ouverture s'appelle pupille d'entrée. L'image du diaphragme d'ouverture (par "ce qui reste" du système optique) s'appelle pupille de sortie.

Remarque. On notera que le diaphragme d'ouverture, ainsi que les pupilles d'entrée et de sortie, dépendent de la position de l'objet A . Ainsi, sur le schéma précédent, L_1 aurait été le diaphragme d'ouverture si l'objet avait été placé au foyer de L_1 !

Définition. On appelle couverture minérale O.N. le produit de l'indice du milieu dans lequel est plongé



l'objet A et le sinus de l'angle sous lequel est vu depuis A la pupille d'entrée :

$$\bar{O}N \equiv n_s \sin u_0. \quad (2.01)$$

C'est une quantité qui apparaît en particulier dans les notices d'objectifs de microscopes.

Définition. On appelle nombre d'ouverture $N.O.$ (pour un système à lavers) le rapport entre la focale et le diamètre de la pupille d'entrée :

$$N.O. = \frac{f'}{D} \quad (2.02)$$

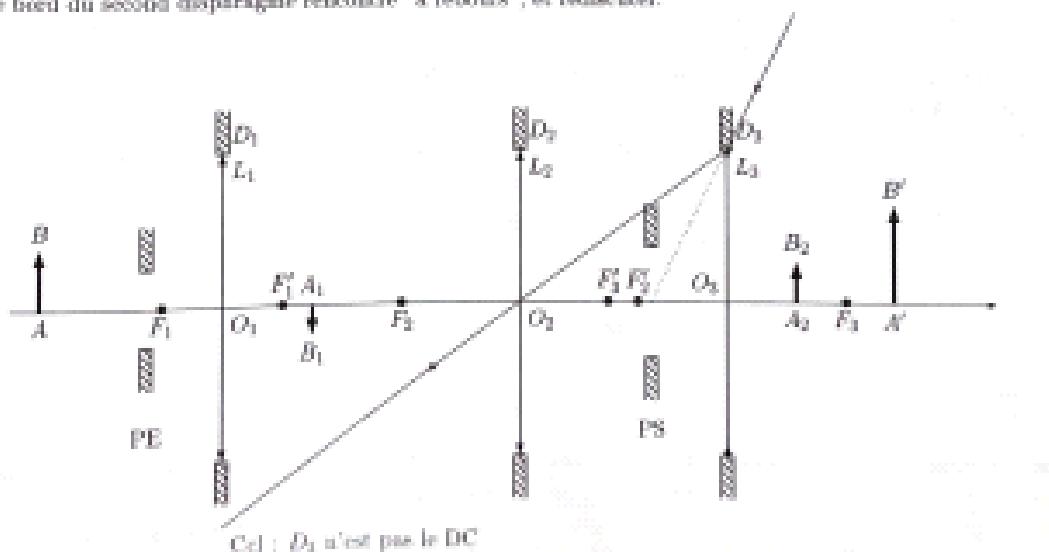
C'est ce nombre qui apparaît sur les objectifs d'appareils photographiques par exemple, et que l'on peut modifier "en diaphragmant".

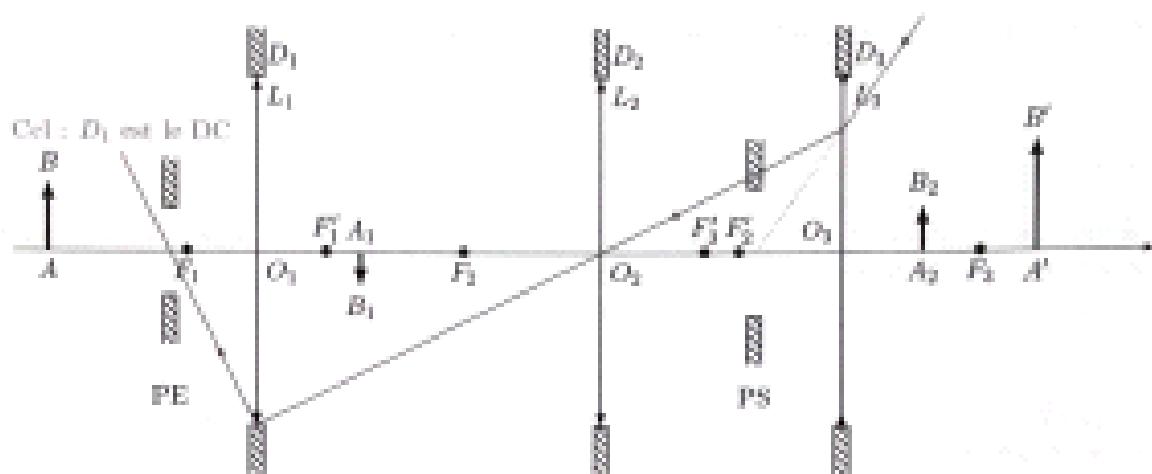
Remarque. Les nombres d'ouverture forment une suite géométrique de raison $\sqrt{2}$: 1.4, 2, 2.8, 4, 5.6, 8, ... Ainsi, passer d'un nombre d'ouverture au suivant modifie l'éclairement de la surface photosensible d'un facteur 2 (sauf éclairage particulier...).

Diaphragme de champ

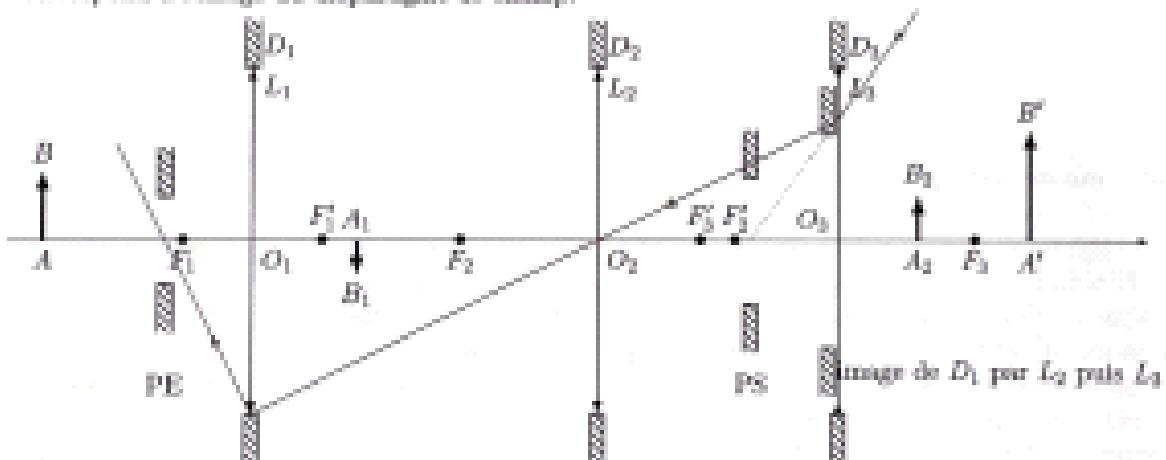
C'est le diaphragme qui contrôle la portion du plan objet dont le système optique forme effectivement une image. Il définit le faisceau optique le plus étroit issu du centre de la pupille de sortie. Pour déterminer le diaphragme de champ, il faut procéder comme suit (les deux méthodes étant équivalentes) :

◆ tout d'abord, déterminer la pupille de sortie. À partir de la pupille de sortie, tracer le rayon s'appuyant sur le bord du dernier diaphragme du système optique. Si aucun autre diaphragme ne l'intercepte jusqu'à arriver dans le plan de l'objet correspondant à A , ce diaphragme constitue le diaphragme de champ. Si au contraire il est intercepté par un autre diaphragme, ce n'est pas le diaphragme de champ ; tracer alors le rayon s'appuyant sur le bord du second diaphragme rencontré "à rebours", et rediscuter.





♦ tout d'abord, déterminer la pupille de sortie, ainsi que l'ensemble des images des diaphragmes par "ce qui reste" du système optique. Celle qui est vue sous l'angle le plus faible depuis le centre de la pupille de sortie correspond à l'image du diaphragme de champ.

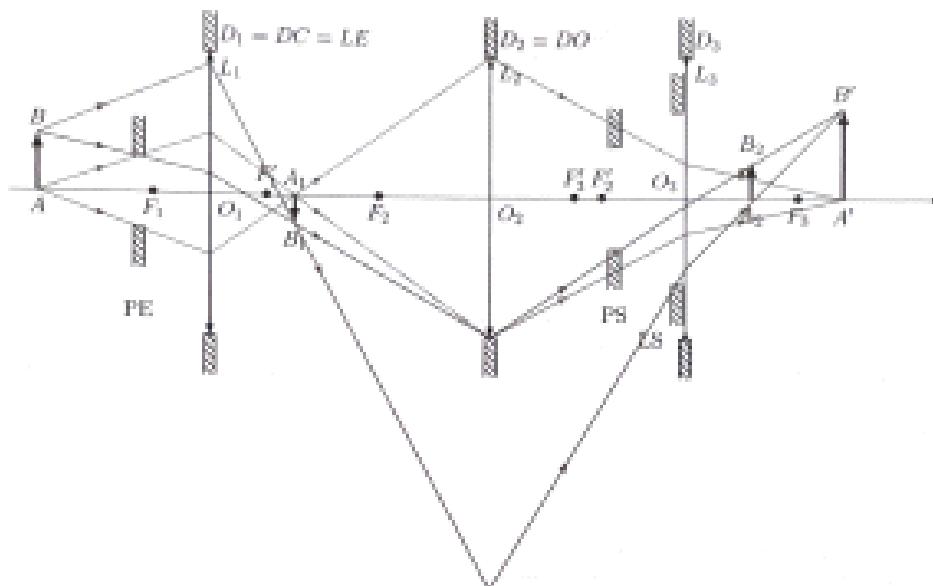


L'antécédent du diaphragme de champ s'appelle lucarne d'entrée. L'image du diaphragme de champ (par "ce qui reste" du système optique) s'appelle lucarne de sortie. Sur le schéma précédent, la lucarne d'entrée et le diaphragme de champ sont confondus, et correspondent à D_1 , et la lucarne de sortie est appelée "image de D_1 par L_2 puis L_3 ".

Remarque. On notera que le diaphragme de champ, ainsi que les lucarnes d'entrée et de sortie, dépendent de la position de l'objet A .

Vignettage

Si la lucarne d'entrée ne coïncide pas avec le plan objet, il existe alors des points du plan objet qui envoient des faisceaux lumineux qui sont partiellement arrêtés par la lucarne d'entrée. La luminosité dans le plan image, pour un plan objet de luminosité uniforme, n'est alors pas uniforme. On parle alors de champ de pleine lumière, de champ de contour, et plus généralement de vignettage.



Afin d'avoir des bords d'image "nets" (au sens courant), on s'appliquera à supprimer le champ de contour en faisant coïncider la lucarne d'entrée avec le plan objet (et donc la lucarne de sortie avec le plan image).

§VII.4 Quelques exemples

Ce paragraphe n'a pas pour objectif de présenter dans le détail l'application à des situations réelles des concepts généraux décrits précédemment, mais plutôt de donner quelques pistes de réflexions ainsi que quelques références utiles. Le lecteur est invité à les consulter de son côté, notamment dans la perspective d'être amené un jour à exposer tel ou tel instrument d'optique...

Télescopes et lunettes astronomiques

L'invention de la lunette astronomique, système aocal constitué de deux lentilles convergentes, remonte à la fin du XVI ou au début du XVII. Galilée perfectionne¹⁵ le système en remplaçant la lentille convergente de l'oculaire par une lentille divergente, ce qui permet d'avoir une image droite, mais surtout, est le premier à l'utiliser dans un contexte astronomique pour découvrir en 1610 les quatre satellites "galiliens" de Jupiter. Si elle permet d'illustrer très facilement [ouais] de nombreux aspects¹⁶ relatifs à la formation d'images, son utilisation dans un contexte astronomique est désormais très marginale car la fabrication d'une lentille de grand diamètre (qui plus est dans un verre présentant le moins d'aberration chromatique possible) est extrêmement coûteuse. On lui préfère donc très généralement le télescope¹⁷ pour lequel l'objectif est constitué non pas d'une lentille mais d'un miroir réfléchissant. Il est important de connaître au moins l'existence d'autres télescopes que celui dit "de Newton", qui s'en distinguent notamment par la forme de leur miroir primaire : parabolique (Newton), hyperbolique (Schwarschild), sphérique (Schmidt) ; de leur miroir de renvoi : plan

¹⁵Galilée a construit de nombreuses lunettes, de qualité très variable. Deux d'entre elles sont conservées au Musée Galilée de Florence.

¹⁶En tant qu'instrument aocal, tout comme le télescope, la discussion de la profondeur de champ dans ce contexte n'est pas pertinente.

¹⁷L'invention du télescope (ou plus précisément la construction du premier prototype fonctionnel) est attribuée à Newton en 1672. Ce sont les difficultés de réalisation et de polissage des miroirs, alors en bronze, qui ont ralenti son essor, jusqu'à l'invention, par Foucault au milieu du XIX, des procédés chimiques de dépôt argenté sur des surfaces en verre.

(Newton), elliptique (Gregory), hyperbolique (Cassegrain), absent (Herschel !) ; de l'utilisation éventuelle de lames correctrices (Schmidt). Chacun d'eux présente ses avantages et ses inconvénients (champ, aberrations, rapport f/D , compactité, accessibilité du foyer...) à considérer en fonction de l'utilisation envisagée ! Références utiles : [Derr]

Objectifs photographiques

De part les dimensions du capteur (historiquement une pellicule 24 x 36 mm², désormais une matrice de capteurs CMOS légèrement plus petite en général), il est facile de se convaincre que les conditions d'utilisation d'un objectif photographique s'éloignent sensiblement des conditions de Gauss. Un tel objectif correspond donc à l'association artificielle de plusieurs lentilles (ce qui permet de limiter les aberrations après le nécessaire travail d'ingénierie optique) et constitue à l'évidence un système centré qui ne peut être assimilé à un système infini. Certains aspects relatifs à la formation des images et à leur qualité peuvent très facilement être illustrés avec cet instrument [Derr], notamment les diaphragmes et leurs rôles en terme d'éclairement¹² ou de profondeur de champ.

Références utiles : [Derr]

Microscopes

Références utiles : [Derr]

Microscopies "non-conventionnelles" : à effet tunnel, à force atomique, à transmission, à balayage, fluorescent, confocal, à contraste de phase, ... avec pour la plus récente un prix Nobel ! [Arnaud]

Oeil

Du point de vue de l'opticien, l'œil est loin d'être l'instrument parfait, et la formation d'une image sur la rétine ne ressemble en rien à une situation idéale... Mais l'analyse de cette image (malgré tous ses défauts) effectuée par le cerveau, elle, est extraordinaire, et permet d'en extraire l'information pertinente, faisant de l'œil un organe exceptionnel.

Références utiles : [Derr] [tsi] (très intéressant, notamment dans le traitement de l'œil comme système centré, avec (pour l'œil humain), une vergence de 600, correspondant à une focale objet de 17 mm et une focale image de 22 mm, ce qui permet de trouver, après discussion des plans principaux, une distance cornée-rétine de 34 mm compatible avec les données anatomiques)

Références

- [tsi] Optical Glass Data Sheets. Schott. 2015. url: <https://refractiveindex.info/download/data/2015/schott-optical-glass-collection-datasheets-july-2015-us.pdf>.
- [tsi] N-BK7 Windows. Uncoated. Thorlabs. 2022. url: https://www.thorlabs.com/images/TabsImages/Uncoated_N-BK7_Transmission.xls.
- [Arnaud] L. AICOUV et Y. de WILDE. Les nouvelles microscopies. À la découverte du nanomonde. Échelles. Humensis, 2015. isbn : 9782701185460.
- [BornWolf] Max Born and Emil Wolf. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light (3th Edition)*. Pergamon Press, 1975. isbn: 9780080180182.
- [Derr] Luc DETHWILLER. *Les instruments d'optique : étude théorique, expérimentale et pratique*. Ellipses, 1997. isbn : 2-7298-5701-X.
- [Durr] R. DURRANT. *Expériences d'optique - Agrégation de sciences physiques*. Bréal, 1994.

¹²Attention à ne pas confondre nombre d'ouverture et ouverture numérique..

- [24] D. Gatinel, Acuité visuelle, résolution et pouvoir séparateur. <https://www.gatinel.com/recherche-formation/acuite-visuelle-definition/acuite-visuelle-resolution-et-pouvoir-separateur-de-l-oeil>



CHAPITRE Trois

Optique géométrique : exercices

§I Du côté de l'agreg

Épreuve A, 2023	...	Gradient d'indice, dioptrie
Épreuve A, 2022	...	Goniomètre
Épreuve C, 2016	...	Fermat, fibre
Épreuve A, 2015	...	Microscopie
Épreuve A, 2007	...	Fermat, fibres
Épreuve A, 2003	...	Fibres optiques (en électromagnétisme)
...

§II Exercices élémentaires

§II.1 Lois de Snell-Descartes

Déviation d'un rayon lumineux par un prisme

On considère un prisme droit, d'angle au sommet A , d'indice n , plongé dans l'air, éclairé par une onde plane dont le vecteur d'onde est orthogonal à l'arête du prisme (dit autrement, le rayon lumineux incident est contenu dans le plan orthogonal à son arête). On appelle i (resp. i') l'angle que fait l'onde avec la normale au plan d'entrée (resp. de sortie) du prisme.

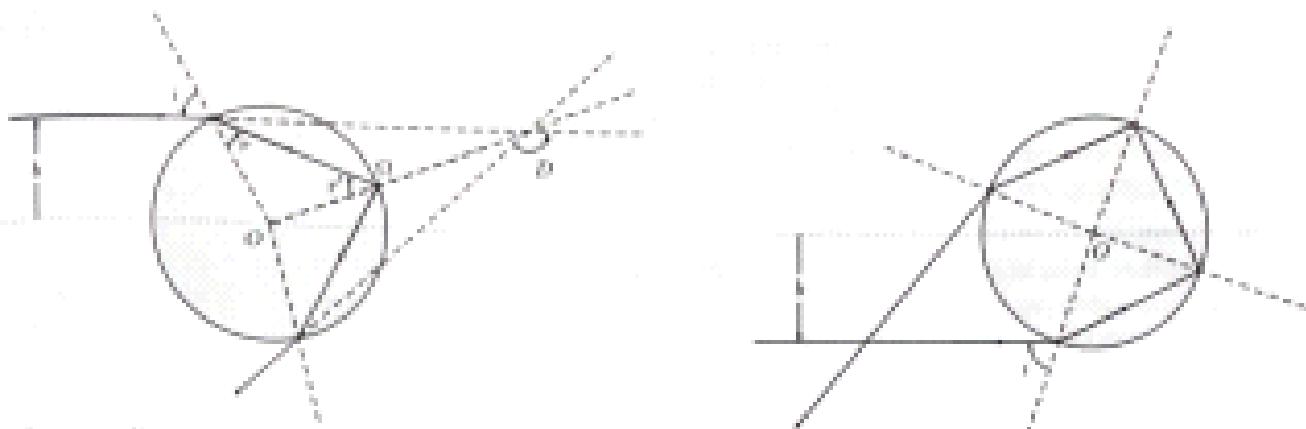
1. Déterminer à quelle(s) condition(s) existe un rayon émergent, qui sera la situation considérée dans la suite de l'exercice.
2. Établir la relation entre l'angle de déviation D et les angles i , i' et A .
3. Montrer que le calcul du chemin optique entre deux surfaces d'ondes effectué de deux manières différentes correspond à l'application des lois de Snell-Descartes sur les faces d'entrée et de sortie du prisme.
4. Démontrer que l'angle de déviation présente un minimum D_m pour une incidence particulière, et établir la relation entre l'indice n du verre et D_m . En profiter pour expliciter le pouvoir de résolution d'un tel prisme.

Remarque. L'existence du minimum de déviation est bien évidemment la propriété exploitée dans les expériences mettant en œuvre un goniomètre. Il permet également de justifier l'apparition de halos lumineux se formant autour du soleil ou de la lune lorsque le ciel est voilé par des nuages de haute altitude dans lesquels se forment des cristaux de glace (avec de façon générique une symétrie d'ordre 6). Avec $n = 1.31$ pour l'indice de la glace, les deux angles caractéristiques de ces halos, 22° et 46° , apparaissent très naturellement.

Arc-en-ciel

On considère une goutte d'eau sphérique, de centre O , de rayon a , placée dans l'air. L'indice de l'air est assimilé à 1, celui de l'eau est noté n . On considère un rayon lumineux associé à une onde plane monochromatique (de longueur d'onde dans le vide λ) arrivant sur la goutte d'eau avec un "paramètre d'impact" $b = ax$, tel qu'ilustré ci-dessous (dans le cas d'une unique réflexion interne à gauche, et de deux réflexions à droite). Les angles sont comptés positivement dans le sens trigonométrique.

qu'il illustre ci-dessous (dans le cas d'une unique réflexion interne à gauche, et de deux réflexions à droite). Les angles sont comptés positivement dans le sens trigonométrique.



On considère tout d'abord le cas d'une unique réflexion interne (schéma de gauche).

1. Déterminer l'angle de déviation D que subit le rayon lumineux incident en fonction de i et r .
2. Après avoir explicité $i = i(x)$ et $r = r(x)$, montrer qu'il existe une valeur x_0 telle que $D'(x = x_0) = 0$. Interpréter et évaluer numériquement $D_0 \equiv D(x = x_0)$ pour $n \approx 4/3$.
3. On introduit, par abus de langage, la "section efficace différentielle de diffusion" (bien qu'il ne s'agisse que d'un phénomène de réfraction) par :

$$s \equiv \left| \frac{\delta}{\sin D \frac{di}{dD}} \right|, \quad \text{avec } \delta \geq 0.$$

Établir l'expression à l'ordre 2 de $s(x)$ au voisinage de $x = x_0$ et en déduire si un arc-en-ciel observé à travers un filtre sélectionnant une unique longueur d'onde λ est plus lumineux vers l'intérieur ou vers l'extérieur de l'arc associé à D_0 .

4. C'est évidemment le caractère dispersif de l'eau qui est à l'origine du caractère polychromatique de l'arc-en-ciel. Dans le domaine visible, l'indice de l'eau, centré autour de la valeur $n = 4/3$, présente une variation $\Delta n = 1.3 \cdot 10^{-3}$. En déduire l'extension angulaire d'un arc-en-ciel ΔD_0 , et déterminer "l'ordre des couleurs" (i.e. si le rouge est à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc-en-ciel).
5. Reprendre l'ensemble des questions dans le cas d'une deuxième réflexion interne (schéma de droite), et en déduire l'existence d'un second arc-en-ciel, ainsi que d'un intervalle $[D_1, D_2]$ pour lequel aucun rayon lumineux subissant une ou deux réflexions ne contribue à la luminosité.

Remarque. Le point clé est de discuter l'existence d'un extrémum de déviation lorsque le rayon lumineux subit une (ou deux) réflexion(s) au sein d'une goutte sphérique. Seul cet extrémum justifie "l'accumulation" de lumière dans une direction donnée (une caustique donc). La symétrie de révolution autour de l'axe soleil-observateur (le soleil dans le dos !) se traduit par l'apparition d'un arc " primaire" (vu sous un angle $\sim 42^\circ$) et d'un arc "secondaire", moins lumineux (vu sous un angle $\sim 51^\circ$), les deux étant séparés par "la bande sombre d'Alexandre" (du nom d'Alexandre d'Aphrodise qui la décrit le premier (vers l'an 200 avant JC)). C'est la présence du sol qui limite l'extension maximale des arcs (qui peuvent donc être des "cercles" complets s'ils sont observés depuis un avion par exemple). L'irisation des arcs est associée au caractère dispersif de l'indice de l'eau (pour l'arc primaire, le bleu est à l'intérieur de l'arc et le rouge à l'extérieur ; c'est l'inverse pour l'arc secondaire). C'est à Descartes qu'on attribue l'explication en terme de réflexion à l'intérieur d'une goutte (même si la même justification est avancée par Thierry de Freiberg dès le XIII^e siècle) et à Newton la diffraction et l'irisation de la lumière blanche. Si l'on tient compte du diamètre apparent du soleil (0.5°

pour l'arc secondaire). C'est à Descartes qu'on attribue l'explication en terme de réflexion à l'intérieur d'une goutte (même si la même justification est avancée par Thierry de Prelberg dès le XIII^e siècle) et à Newton la discussion de la décomposition de la lumière blanche. Si l'on tient compte du diamètre apparent du soleil (0.5° soit $30'$ d'arc), chaque arc est "élargi" du même demi-degré, ce qui décale légèrement les couleurs sans le faire disparaître.

Remarque. À ces phénomènes d'optique géométrique peuvent s'ajouter des considérations d'optique ondulatoire, pour peu que les gouttes soient essentiellement toutes la même taille (alors que cet aspect est totalement absent de la discussion précédente) et soient suffisamment petites. Dans ces conditions, des arcs supernumériques,

associés à des considérations d'interférences constructives apparaissent. C'est à Young qu'on doit le premier de cette discussion, reprise et corrigée ensuite par Airy. Si les gouttes sont de dimensions trop diverses (et notamment s'il existe beaucoup de très petites gouttes), alors même l'arc primaire finit par disparaître et seul subsiste un halo blanc, le "ring bow". On pourra consulter à ce sujet les épreuves de physique X-MP 2008 ou ENS-BCPST 2013.

Remarque. Les réflexions / réfractions que subit le rayon lumineux induisent une forte polarisation du phénomène, exacerbée par le fait que les angles mis en jeu ($\sim 40^{\circ}$ et $\sim 46^{\circ}$ pour les arcs primaire et secondaire) sont voisins de l'incidence de Brewster eau-air [sectan($n_{\text{air}}/n_{\text{eau}}$) $\sim 36^{\circ}$, à ne pas confondre avec l'incidence de Brewster air-eau...].

Fibres optiques à cœur d'indice

On considère une fibre à cœur d'indice, à symétrie cylindrique (axe Oz), constituée d'un cœur en verre d'indice n_c , de diamètre $2a$, entouré d'une gaine d'indice n_g légèrement inférieur à n_c . Un rayon situé dans le plan de symétrie de la fibre et provenant de l'air (indice 1) pénètre la fibre avec un angle θ par rapport à la normale au plan d'entrée. La fibre a une longueur L .

- Montrer que le rayon reste confiné dans la fibre si l'angle d'incidence est inférieur à un angle limite θ_1 .
- Donner l'expression de "l'ouverture numerique" de la fibre $O.N. \equiv \sin \theta_1$ en fonction des indices n_c et n_g .
- Déterminer les temps de parcours minimal et maximal de la fibre, et l'intervalle de temps Δt entre ces deux temps. Expliciter le résultat précédent dans la limite $\Delta \ll 1$ où l'on a posé $2\Delta \equiv 1 - n_g^2/n_c^2$.
- Représenter schématiquement la forme du signal obtenu à la sortie de la fibre lorsque l'on injecte à l'entrée une impulsion lumineuse de largeur typique t_0 formée d'un faisceau de rayons ayant des angles d'incidence répartis entre 0 et θ_1 .
- Une fibre optique peut être utilisée pour transmettre une information, que l'on aura au préalable "préparée" sous la forme d'un ensemble d'impulsions lumineuses ("bits") injectées de façon périodique (à la fréquence correspondante F) dans la fibre. Déterminer l'expression de la bande passante de la fibre $B \equiv L_{\text{max}} F$, où L_{max} correspond à la longueur maximale de la fibre permettant d'éviter le recouvrement possible des impulsions mis en évidence à la question précédente.
- A.N. Déterminer L_{max} pour $n_c = 1.50$, $n_g = 1.47$ et $F = 100$ Mbits/s = 100 MHz, et commenter.

Remarque. Compte tenu des domaines d'utilisation très variés des fibres optiques (mesure, métrologie, télécommunications...), leurs spécifications peuvent être très différentes. Pour ce qui est des télécommunications, c'est évidemment l'aspect atténuation qui est l'un des caractéristiques critiques. La technologie actuelle permet de fabriquer des fibres en silice très pure (les imperfections principales étant des ions OH⁻ et des ions métalliques), présentant des pertes de 0.2 dB/km autour du minimum d'absorption! www.10001.com ... Ainsi, la

c'est évidemment l'aspect atténuation qui est l'une des caractéristiques critiques. La technologie actuelle permet de fabriquer des fibres en silice très pur (les impuretés principales étant des ions OH⁻ et des ions métalliques), présentant des pertes de 0.2 dB/km autour du minimum d'absorption¹, vers 1550 nm. Avec de telles fibres, 99 % de la puissance du signal est perdue après seulement 100 km de propagation, ce qui est peu par rapport aux distances à parcourir, mais à comparer à l'eau pure : 200 dB/km au minimum d'absorption, vers 0.5 μm, soit des pertes identiques au bout de 100 m !

Remarque. Atténuation et dispersion imposent que les signaux transmis sur de longues distances soient régulièrement régénérés et remis en forme à l'aide de dispositifs adéquats ("répéteurs"), insérés à l'aide de coupleurs de fibres sur la ligne.

Remarque. Une approche d'optique géométrique pour décrire une fibre optique de télécommunications (diamètre : ~ 100μm, longueur d'onde : 800, 1300 ou 1550 nm) est évidemment plus que discutable...

¹La discussion de l'absorption basique d'une fibre optique est l'occasion d'évoquer la diffusion Rayleigh dans un contexte différent du bleu du ciel ou du soleil couchant... [Voir la section 10.2](#)

L'approche électromagnétique permet de discuter la problématique en terme de propagation guidée, avec la possibilité éventuelle d'avoir un seul mode de propagation. Dans ce cas, la fibre ne présente pas de dispersion intermodale, mais uniquement de la dispersion chromatique. La gaine (et plus précisément son épaisseur) joue alors un rôle important en permettant l'existence d'une onde émanante en son sein. En introduisant le paramètre adimensionné $V = 2\pi O.N.a/\lambda_0$, où $O.N = \sqrt{n_g^2 - n_c^2}$ désigne l'ouverture numérique de la fibre, a au rayon du cœur et λ_0 à la longueur d'onde (dans le vide), on peut montrer qu'une fibre à cœur d'indice est monomode si $V < 2.405$; cela correspond donc à des fibres avec une différence entre les indices de cœur et de gaine faible et/ou un cœur suffisamment petit.

§11.2 Équation des rayons lumineux

Mirages

On modélise l'atmosphère terrestre comme un milieu plan, dont l'indice varie avec l'altitude z suivant la relation $n = n_0(1 + 2z/z_0)^{1/2}$, où n_0 et z_0 sont deux constantes.

- Déterminer les surfaces équi-indices et la direction du vecteur ∇n . En déduire l'angle i que fait la tangente à un rayon lumineux avec l'axe Oz .
- On considère un observateur O (posé à l'origine des coordonnées) et un point A situé à l'altitude z_A , et séparés d'une distance horizontale ℓ . Montrer qu'il peut exister deux rayons lumineux reliant A à O , qui font avec l'axe Oz des angles i_1 différents.
- En faisant varier l'altitude du point A (à distance fixe et observateur fixe), montrer que s'il existe deux tels rayons, un objet situé en A possède deux images, l'une droite et l'autre inversée.

Remarque. Attention aux trois des rayons correspondants ! Quelque soit le rayon considéré, la courbure est toujours dans le même sens, "vers" les régions de plus fort indice : vers le haut donc dans le cas où le sol est plus chaud que l'atmosphère (ex : route en plein soleil, mirage intérieur), vers le bas dans le cas inverse (ex : ciel froid surmonté d'air plus chaud, mirage supérieur). Dans ce régime de mirage, c'est le gradient de température qui est à l'origine de la variation de l'indice optique de l'air (cf. loi de Gladstone : $n = 1 + a + ECOS(GP) +$

chaud que l'atmosphère (en : route en plein soleil, mirage inférieur), vers le bas dans le cas inverse (en : ciel froid surmonté d'air plus chaud, mirage supérieur). Dans ce régime de mirage, c'est le gradient de température qui est à l'origine de la variation de l'indice optique de l'air (cf. loi de Gladstone : $n = 1 + \rho + \text{EOS GP} + \text{équilibre hydrostatique}$), contrairement à la situation envisagée dans l'exercice sur la réfraction atmosphérique.

Remarque. Si le profil d'indice est plus compliqué que la forme fonctionnelle envisagée ici, on peut bien entendu chercher à intégrer numériquement l'équation des rayons lumineux pour rendre compte de phénomènes rares tels que l'effet Novaya Zemlya ou les fuites morganas.

Remarques. La problématique des mirages peut être transposée dans d'autres domaines de la physique, notamment en acoustique, dans une approche géométrique. Un exemple est donné dans l'épreuve X-PC 2024, où était étudiée la propagation d'un "rayon acoustique" dans un océan ; la vitesse de l'onde acoustique dépend de la profondeur à cause des variations de température et de pression (et légèrement de la salinité).

Réfraction atmosphérique

On considère un milieu à symétrie sphérique (centre O), dont l'indice n se dépend donc que de la distance r , une source lumineuse S située en $r = R_s$ et un observateur A situé en $r = R_A$.

1. Démontrer que "le" rayon lumineux émis par S qui atteint A est contenu dans le plan $\Pi_{S,A}$, en déduire l'"invariant de Bouguer" :

$$I_S \equiv n(r) r \sin \alpha = \text{const le long du rayon lumineux.} \quad (3.1)$$

où α est l'angle entre le vecteur unitaire tangent au rayon lumineux \mathbf{n} et ∇n , et donner l'équation du rayon lumineux à l'aide des coordonnées polaires.

2. En définissant la "déviation du rayon lumineux" comme l'angle entre la direction apparente de S pour A et la direction qui correspondrait à une trajectoire rectiligne par :

$$\chi = \int_{R_s}^{R_A} \frac{ds}{R}, \quad (3.2)$$

où R désigne le rayon de courbure (on suppose pour simplifier qu'il conserve le même signe sur l'ensemble du rayon lumineux), établir la formule de Taylor (le même que celui des développements limités !) :

$$\chi = \int_{R_s}^{R_A} \frac{\tan \alpha \, ds}{n} \approx \frac{\tan \alpha}{n}, \quad (3.3)$$

3. Dans le cas de l'observation d'une étoile pas trop proche de l'horizon, et en considérant que l'épaisseur de l'atmosphère (transversale) est suffisamment faible pour pouvoir négliger la courbure de la trajectoire du rayon lumineux sur l'estimation de la déviation, montrer que l'on obtient la formule approchée :

$$\chi \approx (n_0 - 1) \tan Z, \quad (3.4)$$

où Z est la distance séthérale (i.e. l'angle entre le zenith et la direction apparente de l'étoile).

4. A.N. Sachant qu'au niveau du sol, l'indice de l'air vaut ~ 1.0000 (fonction de la température, de la pression et de la composition chimique), estimer "Tétreur" connue sur la position angulaire d'une étoile située à $Z = 45^\circ$ si l'on ne tenait pas compte de cet effet, et discuter sa pertinence dans un contexte astronomique.

4. A.N. Sachant qu'au niveau du sol, l'indice de l'air vaut ~ 1.0000 (fonction de la température, de la pression et de la composition chimique), estimer "Terre" comme sur la position singulière d'une étoile située à $Z = 45^\circ$ si l'on ne tenu pas compte de cet effet, et discuter sa pertinence dans un contexte astronomique.

Remarque. Dans le contexte historique où la supériorité maritime était synonyme de domination mondiale, mais nécessitait d'être capable de se repérer très précisément à partir d'observations astronomiques, les grandes puissances de l'époque n'ont pas manqué leurs efforts pour modifier le calcul précédent, que ce soit sur des aspects physiques (comment évolue l'indice en fonction de l'altitude, de l'humidité de l'air, ...) ou mathématiques (avec des changements de variable pour le calcul de l'intégrale, et des discussions sur la convergence plus ou moins rapide de certains développements, ...).

Remarque. La discussion peut se poursuivre pour décrire la déformation d'un objet étendu (le Soleil !) lorsqu'il est bas sur l'horizon (le disque solaire prend une forme elliptique, avec une excentricité pouvant atteindre $\sim 0.6\%$), voire discuter des couchers de soleil (en "aurore étrusque", en Omega) magnifiques lorsqu'ils sont associés à la formation de mirages.

Fibres optiques à gradient d'indice

On considère une fibre optique à gradient d'indice, i.e. dont l'indice est une fonction dépendant de la distance r à l'axe de la fibre. Le profil d'indice (profil) est de la forme :

$$n(r) = \begin{cases} n_0 \sqrt{1 - 2\Delta \left(\frac{r}{a}\right)^2} & \text{si } r < a, \\ n_0 \sqrt{1 - 2\Delta} \equiv n_0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.5)$$

Le but du problème est de déterminer l'indice η permettant d'optimiser la bande passante de la fibre.

1. Justifier qualitativement qu'un tel profil d'indice continu peut effectivement améliorer la bande passante.
2. Montrer que la quantité $m = n \cos \theta$ est un invariant de la propagation, où θ désigne l'angle que fait la tangente au rayon lumineux avec l'axe de la fibre. À quelle condition sur m le rayon est-il confiné dans le cœur de la fibre ?
3. On note r_m et z_m les coordonnées du premier point tournant T du rayon lumineux (i.e. là où le rayon

lumineux présente pour la première fois une tangente parallèle à l'axe Oz de la fibre), et L_m le chemin optique entre O et T . Déterminer z_m et L_m sous la forme de deux intégrales :

$$z_m = \int_0^{r_m} L(n(r), m) dr \quad \text{et} \quad L_m = \int_0^{r_m} \mathcal{L}(n(r), m) dr. \quad (3.6)$$

4. Démontrer que le temps τ que met un rayon lumineux pour parcourir une distance D de O très grande devant z_m est proportionnelle à D en explicitant le coefficient de proportionnalité en fonction de z_m et L_m .
5. Démontrer que τ s'écrit sous la forme :

$$\tau = \frac{D}{c} \left(\frac{1}{2+q} \right) \left(2m + q \frac{z_m^2}{m} \right). \quad (3.7)$$

On donne pour cela le formulaire suivant :

$$\frac{J_2}{J_1} = 1 - \frac{2p}{q+2} \quad \text{où} \quad J_1 = \int_a^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{et} \quad J_2 = \int_a^1 \frac{1-pu^2}{\sqrt{1-u^2}} du. \quad (3.8)$$

$$\frac{J_3}{J_1} = 1 - \frac{2p}{q+2} \quad \text{où} \quad J_1 = \int_{\alpha}^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \text{et} \quad J_2 = \int_{\alpha}^1 \frac{1-pu^2}{\sqrt{1-u^2}} du. \quad (3.8)$$

6. Déterminer la valeur de q qui permet de minimiser $\delta\tau$, où $\delta\tau$ correspond à l'intervalle de temps séparant les temps de parcours minimal et maximal de la fibre.
 7. En déduire le facteur d'amélioration correspondant de la bande passante de la fibre.

Remarque. Avec un indice si $\sqrt{1-2\Delta(r/a)^2}$ pour $r < a$, et si $\Delta \ll 1$, on peut effectuer un DL et trouver les cas limites : un profil d'indice linéaire (i.e. un gradient constant) si $a = 1$, parabolique (i.e. un gradient linéaire) si $a = 2$ [la situation la plus fréquente en pratique], et retrouver une fibre à saut d'indice dans la limite $a \rightarrow +\infty$.

Remarque. Au delà des aspects "calculatoires" de l'exercice, il est intéressant de relever les éléments importants de la discussion : la dispersion (modale et chromatique) à l'origine de la limitation de la bande passante ; l'ouverture numérique associée à l'ouverture angulaire maximale du faisceau que l'on peut injecter, et donc de la puissance lumineuse.

§II.3 Formules de conjugaison et instruments

Formules de conjugaison

- On considère un dioptrre sphérique de rayon de courbure $R = \overline{SC}$ séparant deux milieux d'indice n et n' . Retrouver la formule de conjugaison d'un tel dioptrre en exploitant, dans les conditions de Gauss, les lois de la réfraction et la linéarisation des relations qui apparaissent.
- En déduire la relation de conjugaison d'une lentille mince.
- Montrer que l'on peut déterminer les rayons de courbure des dioptries d'une telle lentille en exploitant la position de l'image réfléchie d'une source suffisamment lointaine (et brillaute compte tenu du faible coefficient de réflexion, de l'ordre de $((n_2 - n_1)/(n_2 + n_1))^2 \sim 4\%$).

Aquariophilie

- Déterminer le grandissement transversal de l'image d'un poisson situé au centre d'un aquarium sphérique rempli d'eau (!!!). On négligera l'effet de la paroi en verre, supposée suffisamment mince.
- Déterminer le grandissement transversal de l'image d'un poisson situé au centre d'un aquarium parallélépipédique de longueur $L = 60$ cm rempli d'eau (!!). On négligera l'effet de la paroi en verre, supposée suffisamment mince. Effectuer la construction géométrique correspondante.
- Un homme qui a une vision normale dans l'eau est-il myope ou hypermorphe ?

Points de Weierstrass

- On considère un dioptrre sphérique séparant deux milieux homogènes d'indice n_0 et n_1 . En exploitant la stationnarité du chemin optique entre deux points conjugués, retrouver les caractéristiques des points de Weierstrass, puis, dans l'approximation de Gauss, la formule de conjugaison d'un dioptrre sphérique.

Lentille de Fresnel

Lentille de Fresnel

- Déterminer l'équation de la surface non-triviale d'une lentille plan-convexe qui conjugue rigoureusement le foyer F et le "point" A' situé à l'infini sur l'axe optique.
- En pratique, une lentille de Fresnel consiste à ne conserver que la partie "nette" des surfaces qui induisent les différentes réfractions, et à les assembler sous la forme d'anneaux concentriques pour former une "lentille à échelons". On considère donc un tel dispositif, avec, au centre, une lentille plan convexe (de rayon $r = 10$ cm, de rayon de courbure $R = 1$ m), et $N = 5$ anneaux concentriques joints de section prismatique (de "hauteur" $\delta r = 2$ cm). L'indice du verre est $n = 1.5$. Déterminer les cinq angles A_i des sections prismatiques.

Remarque. Dans le contexte historique où elles ont été inventées par Fresnel (alors directeur du "Service des phares et balises"), ces dispositifs présentent l'avantage, par rapport à une lentille "mono-bloc", d'être beaucoup plus légères et également "lumineuses" (car la lumière n'a à traverser qu'une beaucoup plus faible épaisseur de verre). Ce sont ces mêmes lentilles qui équipent les rétroprojecteurs que l'on peut encore trouver dans quelques salles de cours, mais également les caisses au supermarché pour vérifier le contenu d'un emballage (supposé vide) ou certaines centrales solaires thermiques.

Instrumentations

- On considère un rétroviseur constitué par un miroir sphérique convexe, limité par un support circulaire de rayon 4 cm. Sa distance focale est, en valeur absolue, égale à 60 cm. Déterminer les caractéristiques (position, taille) de l'image d'un objet réel de taille 1 m placé à 10 m du sommet du miroir. Un œil est placé sur l'axe optique du miroir, à 1 m de son sommet. Déterminer le rayon r de la partie circulaire visible du plan perpendiculaire à l'axe situé à 100 m du sommet du miroir, et le comparer à celui qui donnerait un miroir plan porté par le même diaphragme.
- Une lunette astronomique est constituée de deux lentilles minces convergentes, L_1 de focale image 16 cm, et L_2 de focale image 4 cm. Schématiser la lunette lorsque celle-ci est réglée à l'infini, et faire le tracé des rayons correspondant. Déterminer le grossissement angulaire ainsi que le grossissement. Déterminer le diaphragme d'ouverture, et les pupilles d'entrée et de sortie (également appelée "cercle oculaire" dans ce contexte) correspondantes.
- Une lunette de Galilée est constituée de deux lentilles minces, l'une convergente L_1 de focale image 50 cm et l'autre divergente L_2 de focale image -6 cm. Schématiser la lunette lorsque celle-ci est réglée à l'infini, et faire le tracé des rayons correspondant. Déterminer le grossissement angulaire ainsi que le grossissement. Quel est le grossissement angulaire de cette lunette si l'utilisateur se trompe et regarde par le gros bout de la lunette ?

Remarque. Évidemment, lunettes astronomiques et dioriseurs de faisceau correspondent aux "vieux" instruments (lunettes), utilisés dans un sens ou dans l'autre.

Profondeur de champ

Pour un système centré qui réalise l'image paraxiale A' d'un objet ponctuel A , on appelle profondeur de champ la plage de distance (longitudinale) pour laquelle, compte tenu de la limite de résolution du capteur utilisé, l'image d'un second objet B apparaît également comme nette dans le plan contenant A' . Il s'agit donc d'une

notion qui prend explicitement en compte les caractéristiques (et plus précisément la taille) du photorécepteur utilisé : grain du film photographique, pixel du capteur CCD, cellule rétinienne.

- En considérant une lentille convergente de distance focale image f' et diaphragmée par un iris de diamètre D , qui forme l'image (réelle) A' d'un objet (réel) A , déterminer les dimensions de la tache lumineuse qui se forme dans le plan contenant A' lorsque l'on place un objet B au voisinage de A .
- En considérant que l'unité élémentaire du photorécepteur a une dimension g , en déduire la profondeur de champ correspondante, et discuter l'influence de f' et D .
- Justifier la possibilité (désormais désuette) de vendre des appareils photo jetables, sans réglage de mise au point, et l'intérêt de plisser des yeux.

Doublet achromatique

- Retrouver la loi de composition de deux lentilles minces de focales images f_1 et f_2 séparées d'une distance d (sans utiliser les matrices de transfert) :

$$\frac{1}{f_{\text{tot}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \quad (3.10)$$

- En exploitant la formule de Galström, expliciter la relation (liant les indices optiques, la distance d et les aspects géométriques propres aux deux lentilles) qui doit être satisfaite pour que la distance focale du doublet soit identique pour les longueurs d'onde "rouge" et "bleu".
- Montrer que dans le cas particulier $d = 0$ où les 2 lentilles sont donc en contact l'une avec l'autre, la relation précédente prend la forme suivante :

$$A_1 f_1^D + A_2 f_2^D = 0, \quad (3.10)$$

où l'on a introduit les constraincences A des deux verres et les focales f^D pour la longueur d'onde intermédiaire "jaune". Expliciter alors les focales images f_1 et f_2 en fonction des constraincences et de la distance focale image f_{tot} de l'achromat.

Remarque. Cette relation montre que pour un doublet de lentilles serrées puisse constituer un achromat, il faut que l'une des deux lentilles soit convergente et l'autre divergente (car les nombres d'Abbe sont positifs). En pratique, la plupart de tels doublets sont constitués d'une lentille biconvexe en verre crown, et d'une lentille plan-concave (ou presque) en verre flint. Cette configuration permet de minimiser les aberrations sphériques (avec un choix approprié des verres et des rayons de courbure), et de disposer d'un achromat "solide" en faisant en sorte que les deux lentilles possèdent une surface avec le même rayon de courbure ce qui permet de les coller ensemble.

- Dans le cas où les deux lentilles sont taillées dans le même verre, montrer que l'on peut malgré tout obtenir des distances focales identiques pour le "rouge" et le "bleu" en choisissant de manière adéquate la distance séparant les deux lentilles. Préciser si une telle situation correspond à la correction de l'aberration chromatique longitudinale ou latérale.

- Une démonstration alternative (et instructive) de la situation où l'achromat est constitué par deux lentilles accolées consiste à s'appuyer sur l'expression de la distance focale du système, et à exploiter le fait que cette vergence V doit dépendre aussi peu que possible de la longueur d'onde. Montrer qu'effectivement, le calcul de $dV/d\lambda$ permet de retrouver la condition explicitée ci-dessus.

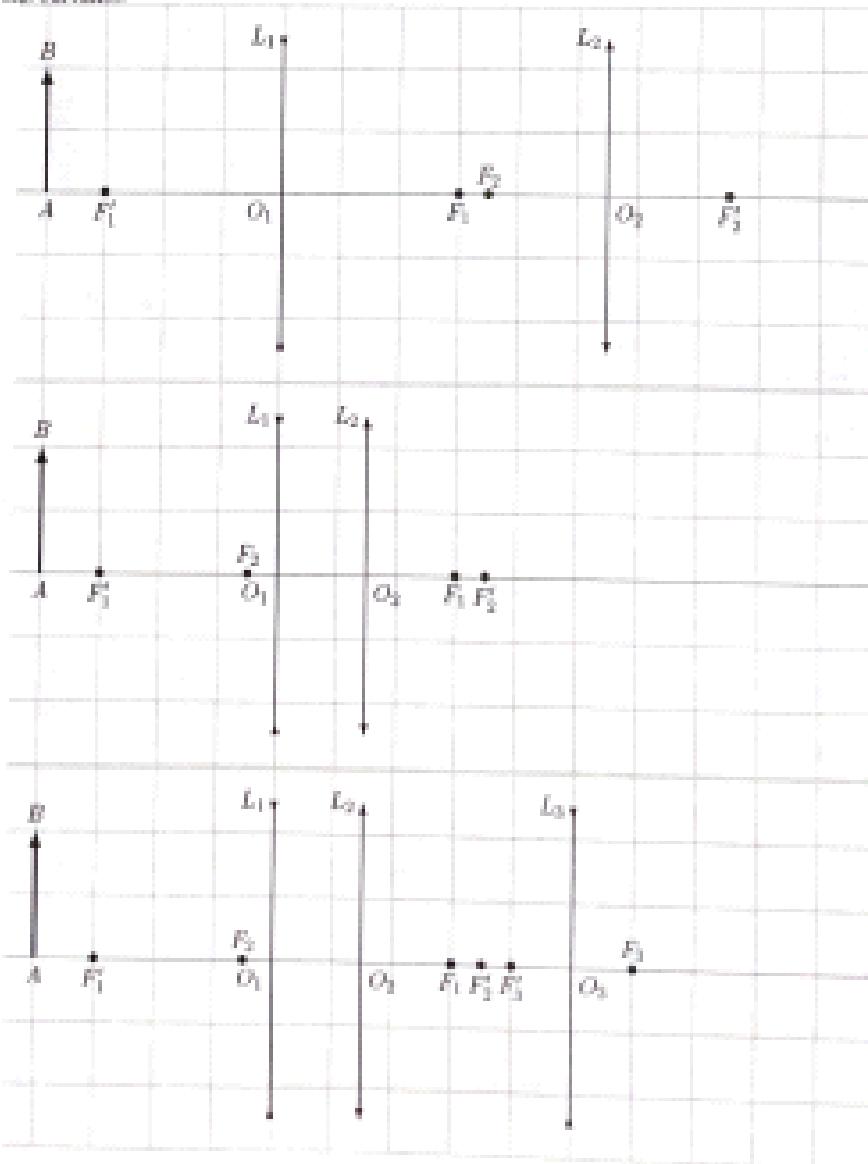
Constructions géométriques

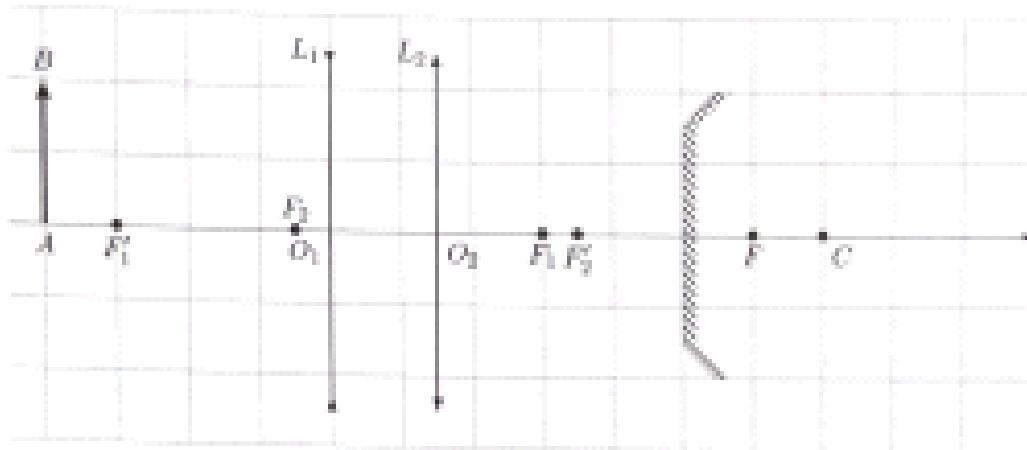
0. Se convaincre, à l'aide des constructions géométriques appropriées, de la possibilité ou non de réaliser, à l'aide d'une unique lentille (convergente ou divergente) les couples (objet, image) suivants.

lentille convergente			lentille divergente		
image	réelle	virtuelle	image	réelle	virtuelle
objet			objet		
réel	v'	v''	réel	x	v'
virtuel	v'	x	virtuel	v''	v''

Remarque. On s'insistera probablement jamais assez sur cet exercice, qui pourrait sembler élémentaire : les constructions géométriques correspondantes ne doivent souffrir d'aucune hésitation, en particulier si le jury vous demande de former à l'aide d'une lentille l'image virtuelle d'un objet (réel) et de l'observer...

1. Effectuer les constructions géométriques de l'image $A'B'$ que fait le système optique de l'objet AB dans les différents cas suivants.





2. Discuter diaphragmes, pupilles et lucarnes dans chacun des cas.

§III Exercices d'approfondissement

§III.1 Principe variationnel

- On considère un dioptrre définissant le plan Π_{Oxy} séparant deux milieux d'indice n_1 et n_2 , ainsi que deux points $A_1(x_1, y_1, z_1)$ et $A_2(x_2, y_2, z_2)$ (avec $z_1 > 0 > z_2$). En estimant le temps de parcours de la lumière pour aller de A_1 à A_2 en passant par le point $M \in \Pi_{Oxy}$, retrouver les lois de Snell-Descartes.
- On considère le plan Π_{Oxy} , et deux points particuliers $E(x, f)$ et $H(g, h)$, avec $x \neq g$ (et même $|x| \neq |g|$ pour alléger la démonstration de ce cas particulier). Établir qu'il existe une infinité de paraboles de la forme $y = ax^2 + bx + c$ passant par ces deux points, paramétrées par le seul facteur b (en donnant l'expression de $a = ag_{EH}(b)$ et $c = C_{E,H}(b)$), puis calculer la longueur $L = L(b)$ de l'arc de parabole joignant E à H . Montrer qu'une variation infinitésimale de b induit très généralement une variation du même ordre de $L(b)$ sauf dans le cas où l'arc tend vers le segment de droite.
- Montrer que les équations d'Euler-Lagrange découlent du principe de moindre action, i.e. du fait d'imposer (dans un contexte de mécanique classique) que la trajectoire physique parcourue entre les instants t_i et t_f extrémise la fonctionnelle suivante appelée "action" :

$$S \equiv \int_{t_i}^{t_f} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt. \quad (3.11)$$

Sous certaines hypothèses de régularité, l'implication est une équivalence...

- Retrouver les discussions des cas déjà présentés (mirage, fibre à gradient d'indice, réfraction atmosphérique) à partir des équations d'Euler-Lagrange.
- Les principes variationnels apparaissent dans de très nombreux champs de la physique, et méritent que l'on s'y attarde (c'est un sujet qui apparaît de façon récurrente au concours...). Principe de Fermat et principe de moindre action sont les exemples élémentaires. On peut également évoquer le fait qu'un état d'équilibre mécanique correspond à un extrémum d'énergie potentielle. Exploiter cette remarque dans les deux situations suivantes :
 - le cas d'un ressort massif, dont l'une des extrémités est fixe, mais qui s'allonge sous l'effet de son propre poids, pour déterminer son allongement au repos ;
 - le cas d'un système de charges électriques statiques, pour obtenir l'équation de Poisson.

- le cas d'un système de deux lentilles minces, pour déterminer son allongement au repos ;
- le cas d'un système de charges électriques statiques, pour obtenir l'équation de Poisson.

§III.2 Aberrations

Aberrations chromatiques : généralisation

1. Montrer que la relation de conjugaison d'un dioptrre sphérique peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{n' - n}{R} y = -n'n' + u, \quad (3.12)$$

où u et u' désignent les angles que fait un rayon lumineux (issu de A et passant par A') interceptant le dioptrre à une distance y de l'axe optique.

2. En déduire la distance focale image d'un système centré correspondant à une combinaison de dioptres, et établir ainsi que pour une combinaison de k lentilles minces, on a :

$$V = \frac{1}{f_{\text{tot}}} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{f_i}, \quad (3.13)$$

où f_i désigne la focale de la $i^{\text{ème}}$ lentille.

3. Pour une seule lentille, un objet A (resp. image A') droit (resp. droit) sur l'axe admet deux images $A'(\lambda_F)$ et $A'(\lambda_C)$ (resp. deux antécédents $A(\lambda_F)$ et $A(\lambda_C)$), et on note $\text{ACL}' = \overline{SA'(\lambda_F)} - \overline{SA'(\lambda_C)}$ (resp. $\text{ACL} = \overline{SA(\lambda_F)} - \overline{SA(\lambda_C)}$). À partir de la relation de conjugaison d'une lentille mince, montrer que l'on a :

$$\text{ACL}' = \text{ACL} \frac{u'^2}{u^2} - \frac{y^2}{u'^2 f' A}, \quad (3.14)$$

où A correspond au nombre d'Abbe.

4. Exploiter alors l'expression du grandissement longitudinal pour établir la relation suivante :

$$\text{ACT}' = \text{ACT} \frac{u'^2}{u^2} - \frac{y^2}{u'^2 f' A}. \quad (3.15)$$

5. Retrouver à partir de la relation précédente le cas du doublet constitué de deux lentilles en contact l'une avec l'autre, et, plus intéressant, établir les équations qui doivent être satisfaites (et en donner la solution) pour qu'un système de 3 lentilles puissent constituer un achromat (triplet de Cooke, inventé à la fin du XIX).

Aberration sphérique

- On considère un dioptrre sphérique de nappe de courbure $R = \overline{SC}$ séparant deux milieux d'indice n et n' , et deux points A et A' conjugués dans les conditions de Gauss. Déterminer la correction (à l'ordre le plus bas) à apporter à la relation de conjugaison en fonction de la distance r à l'axe à laquelle le rayon lumineux intercepte le dioptrre.
- En déduire (au même ordre) la modification de la relation de conjugaison d'une lentille mince.
- Justifier alors la règle des 4P.
- En considérant un faisceau incident parallèle à l'axe optique, établir l'équation de la nappe tangentiale au voisinage du foyer image paraxial, et justifier l'existence du cercle de moindre confusion.

des conditions aux limites nécessaires pour que ce soit équivalent, donner l'équation de la mappe tangentielle au voisinage de l'hyperbole parabolique, et justifier l'existence du cercle de moindre confusion.

Remarque. De la même façon que l'on peut développer des approches perturbatives en mécanique Lagrangienne, adopter une approche Hamiltonienne reposant sur l'exploitation du principe de Fermat fournit un cadre extrêmement fécond pour le traitement quantitatif des observations.

§III.3 Eikonales

Première démonstration

L'objectif de cet exercice est de montrer comment le traitement perturbatif des équations de Maxwell permet d'établir l'équation de Tricoma², de laquelle se déduisent très naturellement les fondements de l'optique géométrique (principe de Fermat, équation des rayons lumineux, loi de Snell-Descartes). On supposera les milieux transparents, non-magnétiques et (localement) isotropes.

1. Rappeler la forme que prennent les équations de Maxwell portant sur les amplitudes complexes $E(r)$ et $B(r)$ pour des champs supposés monochromatiques en l'absence de sources extérieures.
2. Développer ce que deviennent ces équations en écrivant (à ce stade, de manière purement formelle) le champ électrique sous la forme $E(r) = a(r) \exp(ik_0 S(r))$ et une forme similaire pour $B(r)$, où l'on a introduit le nombre d'onde (dans le vide) $k_0 \equiv \omega/c = 2\pi/\lambda_0$, et la fonction $S(r)$ appelée eikonalement.

C'est ici que se joue le raisonnement : on suppose que l'écriture précédente des champs E et B à l'aide de l'eikonal permet de rendre compte d'une enveloppe lentement variable (sur une échelle spatiale $\gg \lambda_0$) au sein de laquelle existe une modulation rapide (sur une échelle $\sim \lambda_0$).

3. Montrer que les équations précédentes se simplifient alors, de façon approchée, sous la forme suivante :

$$\nabla S \times b + \frac{c_r}{c} a = 0, \quad \nabla S \times a - cb = 0, \quad \nabla S \cdot a = 0, \quad \nabla S \cdot b = 0. \quad (3.16)$$

4. Après avoir justifié que seules les deux premières équations sont pertinentes, démontrer que le système ne peut admettre une solution différente de celle sans intérêt $a = 0 = b$ que si la condition suivante est satisfaite (avec $n^2 \equiv \epsilon_r$) :

$$(\nabla S)^2 = n^2 \quad \text{équation de l'eikonal.} \quad (3.17)$$

5. Après avoir justifié que a, b et ∇S forment un trièdre direct (ce qui établit que localement, on a une structure d'onde plane avec un vecteur d'onde parallèle à ∇S), il est naturel de chercher à établir le lien entre "rayon lumineux" et "eikonal" à l'aide de considérations énergétiques. À cette fin, établir les relations suivantes portant sur les valeurs moyennes temporelles d'une part du vecteur de Poynting, et d'autre part de la densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$(II)_T = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}^*}{\mu_0} = \frac{c \epsilon_r}{2} \operatorname{Re}(a a^*) \nabla S, \quad (3.18)$$

$$(n)_T = \frac{c \epsilon_r c_r}{4} \operatorname{Re}(a a^*) + \frac{1}{4 \mu_0} \operatorname{Re}(b b^*) = \frac{c \Omega n^2}{2} \operatorname{Re}(a a^*). \quad (3.19)$$

6. Démontrer ainsi le théorème de Malus, où les "surfaces d'onde" correspondent donc aux surfaces d'équation $S(r) = \text{const.}$

7. En notant que le vecteur unitaire correspondant à la normale à la surface $S(r) = \text{const.}$ est confondu avec le vecteur (unitaire) qui porte le rayon lumineux, $d\mathbf{r}/ds$ (en ayant introduit l'abscisse curviligne convenable), retrouver l'équation du rayon lumineux :

7. En notant que le vecteur unitaire correspondant à la normale à la surface $S(r) =$ celle est confondu avec le vecteur (unitaire) qui porte le rayon lumineux, dr/ds (en ayant introduit l'abscisse curviligne convenable), retrouver l'équation du rayon lumineux :

$$\frac{d(su)}{ds} = \nabla s \text{ avec } u = dr/ds \text{ vecteur unitaire le long du rayon lumineux.} \quad (3.20)$$

8. Retrouver également le principe de Fermat à l'aide du théorème de Stokes.

Seconde démonstration

La démonstration précédente repose sur une manipulation des équations (du 1er ordre) de Maxwell. Une démonstration alternative exploite les équations de propagation (du second ordre) des champs E et B .

¹Sans être helioliste, on remarquera la racine grecque $\sqrt{\epsilon_0}$ qui signifie *rayon*.

Afin d'alléger les calculs, on considère le cas simple où les milieux sont homogènes, et on ne traite pas les complications dues à l'aspect vectoriel des champs ; les deux équations sont alors similaires, et correspondent à l'équation de Helmholtz (écrite ici pour E , sur laquelle on développera le raisonnement) :

$$(\nabla^2 + k^2) E = 0. \quad (3.21)$$

1. Après avoir introduit l'elévation de la même manière que précédemment, i.e. en écrivant le champ électrique sous la forme $E(r) = e(r) \exp(i k_0 S(r))$, montrer que la limite $k_0 \rightarrow 0$ ne pose pas de problème pourvu que les deux équations suivantes soient satisfaites :

$$(\nabla E)^2 = n^2 \quad \text{et} \quad \frac{\nabla^2 S}{\lambda} + \nabla \ln n \nabla S = 0. \quad (3.22)$$

2. Interpréter la seconde équation.

§IV Exercices potentiels

Fibre monomode

Retrouver le critère concernant le caractère monomode d'une fibre à sort d'indice.

Éléments-clés du raisonnement : en coordonnées cylindriques, à partir de l'équation de Helmholtz (scalaire) sur la composante (longitudinale) $D_z(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$, obtenir une équation de Bessel portant sur $R(r)$; développer la solution sur les fonctions de Bessel de première espèce J_n pour $r < a$ (régulières en 0) et de seconde espèce Y_n pour $r > a$ (qui divergent en 0 mais se comportent à grande distance comme $e^{-r}\sqrt{r}$) ; faire de même avec la composante longitudinale du champ magnétique H_z ; en déduire les expressions des composantes transverses $D_r, D_\varphi, H_r, H_\varphi$; exploiter les relations de passage à l'interface située en $r = a$ pour obtenir que l'existence de champs non nuls impose la nullité d'un déterminant. Le calcul du déterminant permet d'obtenir l'"équation caractéristique" de la fibre, dont la discussion en terme de modes (TE, TM ou hybrides) montre que la fréquence de coupure pour le mode TE₀₁ correspond au premier zéro de la fonction de Bessel J_0 , à savoir ~ 2.404825658 .

Fibre et courbure

Discuter les conséquences de la courbure éventuelle d'une fibre, en terme de contraintes qui modifient les taux de transmission (méthode de la matrice de transfert).

Fibre et courbure

Discuter les conséquences de la courbure éventuelle d'une fibre, en terme de contraintes qui modifient les indices, ainsi que des pertes (méthode de la matrice de transfert).



$$\text{Et } n_1 \cdot n_{\text{air}} = n \sin(n_i)$$

$$= n \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

On a donc

$$n_i = n \Rightarrow \arcsin\left(n \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$n = \frac{\sin(n_i)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad n = n_i \text{ et } D_m = 2n_i - 1 \rightarrow n = \frac{D_m + 1}{2}$$

$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + 1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

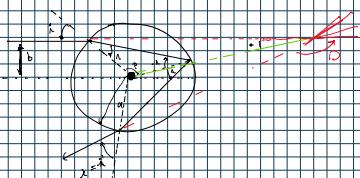
$$\text{On différencie: } \frac{dn}{dx} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{d(D_m + 1)}{dx} \cos\left(\frac{D_m + 1}{2}\right)$$

$$\text{Soit } \frac{dD_m}{dx} = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{D_m + 1}{2}\right)} \frac{dn}{dx}$$

Rq: si le angle: ordre de phase =



Angle en rad:



Par principe de
l'onde interne:
 $i = r$

$$\begin{aligned} 1) \quad \text{D} &= \pi - 2\alpha \\ \pi &= \alpha + \beta + \gamma \\ \gamma &= \pi - 2\alpha \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{D} &= \pi - 2(\pi - \alpha - \beta) \\ &= -\pi + 2\alpha + 2\beta - 4\pi \end{aligned} \quad \boxed{\text{D} = \pi + 2\alpha - 4\pi}$$

$$2) \quad \left| \frac{b}{a} - \alpha = n \cdot i \right| \quad \left| \sin \alpha = n \cdot \sin i \right|$$

$$|\text{D}| = 2 \cdot dx - 4 \cdot da$$

$$dx \cdot \cos i = dx$$

$$dx \cdot \cos i = n \cdot da \cdot \cos i$$

$$\frac{dD}{dx} = \frac{2 \frac{di}{dx} - 4 \frac{da}{dx}}{dx}$$

$$= \frac{2}{\tan i} - 4 \frac{\cos i}{n \cos i} \frac{1}{\cos i}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - 4 \frac{1}{n \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}} = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{4}{\sqrt{n^2 - x^2}}$$

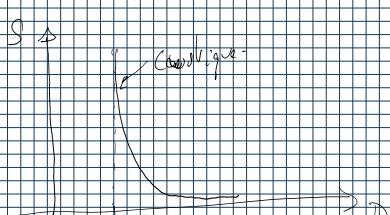
$$D'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{4}{\sqrt{n^2 - x^2}}$$

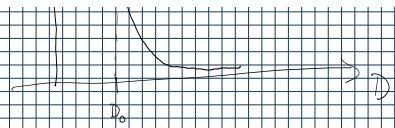
$$\Leftrightarrow \frac{1 - x^2}{2} = \frac{n^2 - x^2}{4} \Leftrightarrow 1 - x^2 = \frac{n^2 - x^2}{4} \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4} + \frac{n^2}{4} - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{4 - n^2}{3} \quad \text{et } n < 2$$

$$\text{A.N.: } x_0 = 0,86 \quad \rightarrow \text{intensité importante (formule dure constante)}$$

(bonne)





$$3) S = \left| \frac{b}{\sin D} \quad \frac{db}{dD} \right| \text{ avec } b > 0$$

$$\begin{aligned} D(x) &\sim D(x_0) + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \frac{d^2 D}{dx^2} \Big|_{x=x_0} \\ \frac{d^2 D}{dx^2} &= -\frac{1}{2} \times \frac{e^{-x^2} x}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{1}{2} \frac{4x e^{-x^2} x}{(n^2-x^2)^{3/2}} \\ &= \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}} - \frac{4x}{(n^2-x^2)^{3/2}} \\ \frac{d^2 D}{dx^2} \Big|_{x_0} &= \frac{2 \sqrt{\frac{2x_0}{n^2-x_0^2}}}{1 + \left(\frac{4x_0^2}{n^2-x_0^2}\right)^{1/2}} - \frac{4 \sqrt{\frac{2x_0}{n^2-x_0^2}}}{\left(\frac{n^2}{2} - \frac{4x_0^2}{n^2-x_0^2}\right)^{1/2}} \\ &= \frac{2}{2} \sqrt{\frac{(n^2-x_0^2)}{(n^2-x_0^2)^2}} \\ S &= \frac{a^2}{S+2a} \sqrt{\frac{1}{2 \sqrt{\frac{(n^2-x_0^2)}{(n^2-x_0^2)^2}}}} \quad \text{formule finale} \end{aligned}$$

$D = D(x_0)$

$$4) n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \quad A, B > 0 \quad \text{Formule de Cauchy}$$

$$\lambda_{\text{blue}} < \lambda_{\text{orange}} \Rightarrow n_{\text{blue}} > n_{\text{orange}}$$

$$\frac{dD}{dn} = -4 \frac{dx}{da}$$

$$\sin i = \frac{\sin a}{n} \Rightarrow dx = -\frac{\sin a}{\cos a} \frac{1}{n^2} da$$

$\sqrt{n^2 - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}}$

$$\frac{dD}{dn} = \frac{4 \sin a}{\sqrt{n^2 - \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}}} \frac{1}{n^2} = -\frac{4 \sin a}{n^2 (n^2 - 1)}$$

$$\frac{dD}{dn} \Big|_{x=x_0} = \frac{4 \sqrt{\frac{1-n^2}{n^2-1}}}{n \sqrt{1+\frac{4n^2}{n^2-1}}}$$

$$= \frac{4}{n^2 - 1} \sqrt{\frac{4 - n^2}{\frac{5n^2}{2} - \frac{1}{3}}}$$

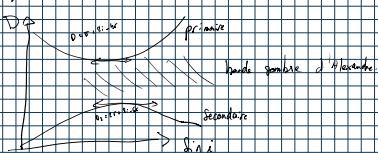
$$= \frac{2}{n} \sqrt{\frac{4 - n^2}{n^2 - 1}}$$

$$\Delta D_2 = \frac{dD}{dn} \Delta n$$

$$\text{A.N. } \Delta D_2 = 1.3^\circ$$

$$\Rightarrow D_{\text{blue}} < D_{\text{orange}} \text{ ou } \frac{dD}{dn} \Big|_{x=x_0} >$$

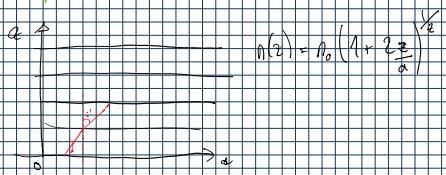
$$5) D_0 = n \pi + q = 5 \pi$$



Égalité des rayons lumineux

1.4 "Echantillon des rayons limites"

Rayon



$$1) \vec{r}n = \frac{n_0}{n(1 + \frac{2z}{\alpha})^{1/2}} \vec{k}$$

1p kufe

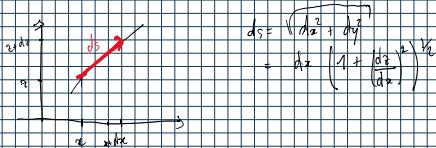
$$n(z) \sin(\alpha(z)) = n(z + dz) \sin(\alpha(z + dz))$$

$$\frac{d}{dz} (n(z) \sin(\alpha(z))) = 0 \quad \Rightarrow \vec{v}_n = \frac{d}{dz} (n \vec{k}), \quad \vec{k} = \frac{dx}{ds} \vec{e}_x + \frac{dz}{ds} \vec{e}_z$$

$$2) \vec{e}_z: \quad 0 = \frac{d}{ds} (n \vec{k} \cdot \vec{e}_z)$$

$$0 = \frac{d}{ds} (n \cos(\alpha)) = \frac{d}{ds} (n \sin \alpha) \quad \text{soit } n \sin \alpha = C = n_0 \sin \alpha_0 = n \frac{dx}{ds} \quad \Rightarrow \frac{dx}{ds} = \frac{C}{n}$$

$$3) \vec{e}_x: \quad \vec{v}_n \vec{e}_x = \frac{d}{ds} (n \vec{k} \cdot \vec{e}_x)$$



$$\frac{n_0}{n(z)} = \frac{d}{ds} (n \cos \alpha)$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dz^2} \\ = dz \left(1 + \left(\frac{dx}{dz} \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{n_0}{n(z)} = \frac{dx}{ds} \frac{d}{dz} \left(n \frac{dx}{dz} \right)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dx}{dz} \frac{ds}{dx}$$

$$= \frac{dx}{ds} \frac{d}{dx} \left(n \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} \right) = \frac{d}{ds} \left[\frac{d}{dx} (n \frac{dx}{dz}) + \frac{d^2 x}{dx^2} \cdot n \frac{dx}{ds} \right]$$

$$\Rightarrow C \left(\frac{dx}{ds} \right) \frac{d^2 x}{dx^2} = C \cdot \frac{C}{n^2} \frac{d^2 x}{dx^2}$$

$$\text{D'où } \frac{d^2 x}{dx^2} = \frac{n_0^2}{n^2} \frac{1}{C^2} \quad \text{avec } C = n_0 \sin \alpha_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 x}{dx^2} = -\frac{1}{n_0^2 \sin^2 \alpha_0}} \quad \Rightarrow x(z) = \frac{1}{2n_0^2 \sin^2 \alpha_0} \frac{z^2}{2} + Bz + D$$

$$) x(0) = 0 = S$$

$$\boxed{x'(0) = x_B = \frac{1}{2n_0^2 \sin^2 \alpha_0} \frac{l^2}{2} + Bl + D}$$

$$\boxed{D = 0}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2n_0^2 \sin^2 \alpha_0} \frac{l^2}{2} + Bl = B}$$

$$\text{Or } \frac{dE}{dx} = B \quad \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2n_0^2 \sin^2 \alpha_0} = \frac{d^2 x}{dx^2}}$$

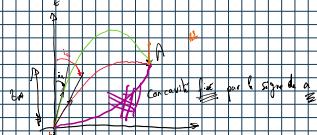
$$\Rightarrow \boxed{x(z) = \frac{1}{2n_0^2 \sin^2 \alpha_0} \frac{z^2}{2} + \frac{1}{2n_0^2 \sin^2 \alpha_0}}$$

Ensuite on obtient $x(l) = x_B$

$$x(l) = \frac{1}{2n_0^2 \sin^2 \alpha_0} l^2 + \frac{1}{2n_0^2 \sin^2 \alpha_0} l - x_B = 0$$

$$\text{On pose } k = \frac{1}{\tan \alpha_0} \quad \text{avec } \sin^2 \alpha_0 = 1 - \cos^2 \alpha_0$$

$$1 = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\tan^2 \alpha_0} \Rightarrow \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\tan^2 \alpha_0}$$



$$\text{On pose } k = \frac{1}{\tan^2 \alpha} \quad \text{avec} \quad \tan^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{\tan^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + k$$

$$\frac{k^2}{2^2} t^2 + k t - 2_0 + \frac{k^2}{2^2} = 0$$

$$\Delta = t^2 - \frac{4k^2}{2^2} \times \left(-\frac{k^2}{2^2} - 2_0 \right)$$

$$= t^2 - \frac{4k^4}{4^2} + \frac{4k^2}{2^2} 2_0$$

Supposons $\Delta > 0$

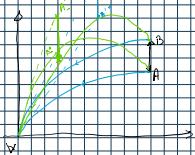
$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{\sqrt{1 \pm \sqrt{\Delta}}}{2^2} = \frac{1}{\cos(\alpha_{1,2})}$$

$$\text{3). } \frac{dt_{1,2}}{dE_A} = \frac{\frac{d}{dt} (\pm \sqrt{\Delta})}{v^2 \sin^2 \alpha} \quad (2) \quad \frac{1}{\cos(\alpha_{1,2})}$$

$$= \mp \frac{1}{2 \sqrt{\Delta}} \frac{d\Delta}{dt} = \mp \frac{1}{2 \sqrt{\Delta}} \frac{-4k^4}{2^2} = \mp \frac{k^2}{2 \sqrt{\Delta}}$$

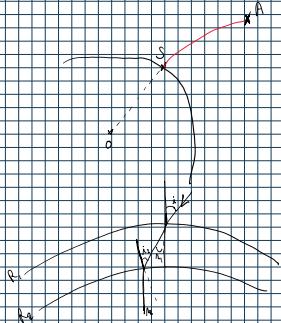
Si $k > 0$, $\sqrt{1 + k^2} > k \Rightarrow \tan \alpha < k$

Rayon bleu T
Rayon rouge ↓



Refraction atmosphérique

Snell-Descartes



$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

$$\frac{\sin(i_1)}{n_2} = \frac{\sin(i_2)}{n_1} \quad \rightarrow \text{horizontale}$$

$$R_1 \sin(i_1) = R_2 \sin(i_2)$$

$$n_1 R_1 \sin(i_1) = n_2 R_2 \sin(i_2)$$

$$l = n_1 \sin(i_1)$$

Autre méthode:

$$\frac{d}{ds} (\vec{n} \times \vec{n} \vec{u}) \quad \vec{u} = \frac{d\vec{s}}{ds}$$

$$\frac{d\vec{a}}{ds} \times \vec{n} \vec{u} + \vec{n} \times \frac{d\vec{a}}{ds} = \vec{u} \times \vec{n} \vec{u} = 0$$

$$\vec{l} = \vec{n} \times \vec{n} \vec{u} = c ds \text{ horiz}$$

$$\|\vec{l}\| = n \lambda \sin(i)$$

avantage avec la méthode
qui possède plus de sens.

$$\vec{n}^2 = n_x n \vec{u}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt} \frac{ds}{dt} = n_x \frac{d(n \vec{u})}{dt} \frac{ds}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{a}}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{u} \frac{ds}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{ds}{dt} = v_n n$$

$$\text{Donc } \frac{d\vec{a}}{dt} = n_x n \vec{V} n$$

$$-\vec{V} = -\vec{a} \cdot \frac{\vec{a}}{a^2} \Rightarrow \left| \frac{d\vec{a}}{dt} \right| = -\vec{V} V'$$

$$X = T - V$$

$$X = \frac{C_0^2}{2} + \frac{C_0^2 R^2}{2}$$

$$\Rightarrow S = \int_{s_0}^{s_1} d\tau dt = \int_{s_0}^{s_1} C_0 n dt = \int_{s_0}^{s_1} C_0 n ds$$

$$\boxed{\int S = C_0 \int n ds \quad \text{principe de Fermat}}$$

$$c) X = \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{R}$$

$$\left(\text{Rapide Fermat: } \frac{d\vec{T}}{ds} = \vec{V} \vec{N} \quad \frac{d\vec{V}}{ds} = -\vec{N} \quad \vec{N} = \frac{1}{R} \right)$$

$$\vec{V}_n = \frac{d(\lambda \vec{N})}{ds}$$

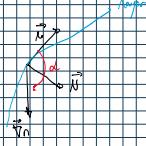
$$= \frac{d\lambda}{ds} \vec{N} + \lambda \frac{d\vec{N}}{ds}$$

$$\text{avec Fermat: } \frac{d\vec{n}}{ds} < \frac{1}{n} \left[\vec{V}_n - \frac{d\lambda}{ds} \vec{N} \right]$$

$$= \frac{1}{R} \vec{N}$$

$$\frac{\vec{N}}{R} = \frac{1}{n} \left[\vec{V}_n - \frac{d\lambda}{ds} \vec{N} \right]$$

$$\vec{E} \cdot \vec{N} = 0 \quad \text{car } \vec{N} = \vec{T}$$



$$X = \int ds \frac{|\vec{V}_n|}{n} \sin(\alpha)$$

$$\text{Or } \frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{1}{n} \left[\vec{V}_n - \frac{d\lambda}{ds} \vec{N} \right] = \frac{\vec{N}}{R}$$

$$\theta = |\vec{V}_n| \quad \text{or} \quad \frac{d\lambda}{ds}$$

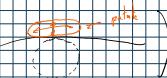
$$\text{Donc } |\vec{V}_n| = \frac{1}{\cos(\theta)} \frac{d\lambda}{ds}$$

$$\Rightarrow X = \int_{s_0}^{s_1} \frac{d\lambda}{ds} \frac{d\lambda}{ds} ds$$

3) On suppose $\frac{d\lambda}{ds} \neq \text{const}$ (λ donc $\theta \neq \text{const}$)

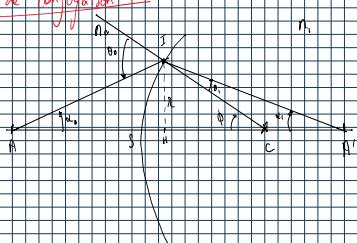
$$X = \frac{(\tan(\lambda))'}{n} \int_{s_0}^{s_1} \frac{d\lambda}{ds} ds = \tan(\lambda_1) (\lambda_2 - \lambda_1) \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$4) \boxed{X = 1.3 \cdot 10^{-3} = 1' \quad \text{en longueur d'onde de 1 m}}$$



Next: formules de conjugaison / profondeur de champ / construction geo / principe variational / Aberrations sphériques

Formules de conjugaison



$$\text{1o: } \tan \theta_0 = n_1 \sin \theta_1$$

$$\theta_0 = \theta_1 - \phi \quad (\phi < 0)$$

Exemple: $E(A')$

$$\pi + \phi + \theta_0 - \theta_1 = \pi \rightarrow \theta_0 = \theta_1 - \phi$$

$$\tan \phi = - \frac{n_1}{n_2} \sim \phi \quad (|\phi| \ll 1 \text{ rad})$$

$$\tan \phi = -\frac{\pi}{\sqrt{R^2 - c^2}}$$

$$\tan d_0 = \frac{H_0}{AH} = \frac{R}{RS + RH}$$

$$\tan d_1 = -\frac{H_1}{FH} = -\frac{H_1}{RH + SH}$$

On pose $\rho_0 = \sqrt{R^2 - c^2}$

$$p_1 = \frac{\rho_0}{SH} > 0$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{c}{\sqrt{R^2 - c^2}} \right) \quad \text{et} \quad x = \frac{c}{R}, \quad R = \sqrt{c^2 + p_0^2}$$

$$= \arctan \left(\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$= \arctan \left(-x \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4) \right) \right) \Rightarrow \phi = -x + O(x^3)$$

$$\phi_0 = \arctan \left(\frac{c}{\sqrt{p_0^2 + R^2 - c^2}} \right) = \arctan \left(\frac{x}{-\frac{p_0^2}{R} + 1 + \frac{1}{2}x^2} \right) = -\frac{xR}{p_0^2}$$

$$\phi_1 = \arctan \left(\frac{-x}{\frac{p_0^2 + R^2}{R^2} - 1} \right) \quad \phi_1 = -\frac{xR}{p_0^2}$$

$$\sin(\phi_0) = \sin(\phi_0 - \phi)$$

$$= \sin \left(\frac{-xR}{p_0^2} + O(x^3) + x \right)$$

$$= x \left(1 - \frac{R}{p_0^2} \right) + O(x^3)$$

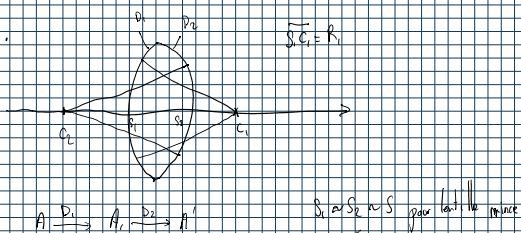
$$\sin(\phi_1) = \sin \left(-\frac{2xR}{p_0^2} + O(x^3) \right)$$

$$= x \left(1 - \frac{R}{p_0^2} \right) + O(x^3)$$

$$\Rightarrow \text{Snell-Darboux: } n_0 \left(1 - \frac{R}{p_0^2} \right) = n_1 \left(1 - \frac{R}{p_1^2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_1 - n_0}{p_1} = \frac{n_1 - n_0}{R}} \quad \text{ou} \quad R = \sqrt{c^2} > 0$$

2.



$S_1 S_2 \sim S$ pour la limite nulle

$$\text{A traverse: } \frac{n_1}{S_1 A_1} - \frac{1}{S_1 H_1} = \frac{n_1 - 1}{S_1 C_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{S_1 A_1} = \frac{1}{S_1 C_1} = \frac{n_1 - 1}{S_1 H_1}$$

$$D_1: \quad \frac{1}{S_1 A_1} - \frac{n_1}{S_1 H_1} = \frac{1 - n_1}{S_1 C_1} = \frac{1}{S_1 A_1} - \frac{1}{S_1 H_1} = \frac{1 - n_1}{S_1 C_1}$$

En sommant les relations de conjugaison des deux droites

$$\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_1} = (n_1 - 1) \left(\frac{1}{S_1 C_1} - \frac{1}{S_1 H_1} \right)$$

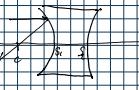
$$\boxed{\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_1} = (n_1 - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}$$

a) Relation de conjugaison du vitrage:

$$n_1 \rightarrow -n_2 \quad (n_1 \rightarrow +n)$$

$$\Rightarrow -\frac{P_0}{P_1} \sim \frac{n_0}{P_0} = -\frac{n_0 + n_0}{R}$$

méthode du convergent



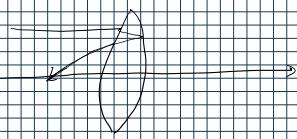
$$\Rightarrow -\frac{p_0}{f} - \frac{p_0}{f'} = -\frac{p_0 + p_0}{R}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} = \frac{2}{R} \right] \quad (2) - \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} = -\frac{2}{R}$$

pour retrouver f en $C \Rightarrow f' = C$

tutu fait pour le cas concave

pour le cas convexe



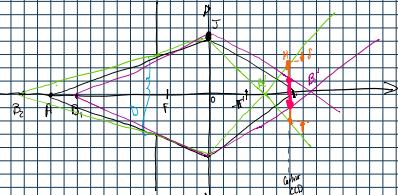
On combine les relations de conjugaison pour ce dioptrie

(entrée de la lentille) puis un miroir (réflexion sur la surface de la lentille)

puis le 1^{er} dioptrie en sens inverse

$$\frac{1}{f'} = \frac{f' R_2}{2(f' + R_2)} \rightarrow \text{nécessite de connaître } f'$$

Propriétés du champ



Dans les triangles:

$$B'_A'M \sim O B'_J$$

$$\text{Thales: } \frac{d}{D} = \frac{B'A'}{OB}$$

$$\therefore \frac{1}{f'} = \frac{1}{D} = \frac{1}{f}$$

$$\text{à droite } \rightarrow \frac{dO}{f'} + \frac{dO}{f} = 0$$

$$\text{On pose } dO = z', \quad dO = z$$

$$\frac{B'A'}{OB} = \frac{B'O + z'}{OB} \quad \text{avec } \frac{1}{f'} - \frac{1}{D} = \frac{1}{f} \quad \text{et} \quad \frac{1}{D} - \frac{1}{OB} = \frac{1}{f}$$

$$\text{donc } \frac{B'A'}{OB} = \frac{z'}{OB} \quad \text{et} \quad \frac{O A'}{OB} = \frac{O B f'}{OB + f}$$

$$\text{Alors: } \frac{B'A'}{OB} = \frac{O B f'}{OB + f} \cdot \left(-\frac{OB f'}{OB + f} + \frac{OB f'}{OB + f} \right)$$

$$= -1 + \frac{O B f' (OB + f)}{(OB + f)^2} = -1 + \frac{O B (OB + f)}{OB (OB + f)} \quad \checkmark$$

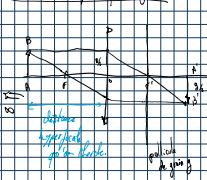
$$\Rightarrow \frac{O B}{OB} = \frac{\left(f' + \frac{f' f}{D} \right)}{\left(f' + \frac{f' f}{D} \right)} \quad \text{avec } \frac{f' f}{D} = -f^2$$

→ propriétés du champ

$$|O B - \bar{O B}| = \frac{2 f^2}{D} \left| f' + \frac{f' f}{D} \right|$$

$$\frac{f^2}{D} \approx \frac{2 f^2}{f'} \cdot \frac{f}{f'} = \frac{2 f^2}{f^2} = \frac{2}{f}$$

Le résultat apparaît dans le tableau



$$\frac{D}{f} = \frac{f'}{f' f} = -\frac{f}{f'}$$

formule de conjugaison: $\bar{F} A \bar{F} = f^2$

$$\frac{D}{f} = \frac{\bar{F} A}{f' f} = -\frac{\bar{F} A}{f'}$$

$$= -1 + \frac{S A}{f'}$$

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{D} = \frac{1}{f} \quad \frac{A}{f'} = \frac{A}{D} + \frac{1}{f} \quad \bar{F} A = -\frac{f' f}{f' + f}$$

Propriété fondamentale

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\text{Mais } \frac{d}{dx} f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right) = \frac{1}{\Delta x} \frac{d}{dx} f(x + \Delta x)$$

$$\frac{d}{dx} f'(x) = \frac{1}{\Delta x} \frac{d}{dx} f(x + \Delta x) \quad (\Rightarrow f''(x) = \frac{1}{\Delta x})$$

$$\frac{d}{dx} f'(x) = \frac{1}{\Delta x} \left(f'(x + \Delta x) - f'(x) \right) = f''(x)$$

Hyperfonction $\frac{d}{dx} f'(x)$

$$\frac{1}{dx} = \frac{1}{dx} = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{d}{dx} f'(x) = 1 + \frac{1}{f'(x)}$$

$$= \frac{f'(x)}{f'(x) + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{f'(x)}}$$

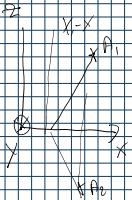
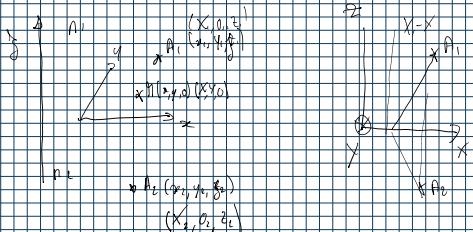
$$\frac{d}{dx} f'(x) = \left(1 + \frac{1}{f'(x)} \right) \left(f''(x) \right)$$

$$\frac{d}{dx} f'(x) = -\frac{1 + \frac{1}{f'(x)}}{f'(x)^2}$$

$$\left(1 + \frac{1}{f'(x)} \right)^2 + \frac{1}{f'(x)^2} = 0$$

→ à faire principe variationnel

III.1 Principe variationnel



1) On prend la projection de (A_1, A_2) dans (0_{xy}) comme nouvelle axe, noté X

$$\Rightarrow A_1(x_1, 0, z_1) \text{ et } A_2(x_2, 0, z_2)$$

On cherche la position de γ .

Calculons la longueur de parcours

$$\Delta s = \sqrt{\frac{A_1 X + A_2 X}{c_v}} = \sqrt{\frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{c_v}} = \frac{A_1 + A_2}{c_v} \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Le principe de Fermat donne que ce Δs (le chemin optique) est stationnaire, c'est à dire qu'il existe une variation $(X, Y) = (x + \delta x, y + \delta y)$ dans une direction d'ordre 2.

$$\text{On peut donc chercher } \frac{\partial(\Delta s)}{\partial x} = 0 \quad (1) \text{ et } \frac{\partial(\Delta s)}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$c \Delta s (x + \delta x) = c \Delta s (x) + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial c \Delta s}{\partial x} dx + O(\delta x)$$

$$= c \Delta s (x) + O(\delta x^2)$$

$$(1) \frac{\partial(\Delta s)}{\partial x} = \frac{n_1 \frac{\partial(x - x)}{\partial x} + n_2 \frac{\partial(x - x)}{\partial x}}{c \sqrt{(x - x)^2 + (\frac{\partial x}{\partial x})^2}} = 0$$

$$(2) \frac{\partial(\Delta s)}{\partial y} = \frac{n_1 \frac{\partial y}{\partial y} + n_2 \frac{\partial y}{\partial y}}{c \sqrt{(x - x)^2 + (\frac{\partial y}{\partial y})^2}} = 0$$

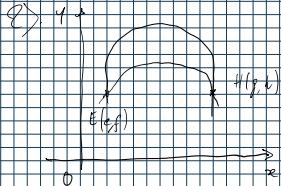
$$\Rightarrow y = 0 \quad (\text{en factorisant pour } y) \quad \rightarrow \text{on retrouve une partie du Snell-Descartes} \\ (\text{incident et refracté } \in \text{ au même plan}).$$

Donc dans (1) on a:

$$0 = \frac{a_1(x-x_1)}{\sqrt{(x-x_1)^2 - \frac{x^2}{g_1}}}, \quad \frac{a_2(x-x_2)}{\sqrt{(x-x_2)^2 - \frac{x^2}{g_2}}}$$

On note $\theta_1 = (\widehat{g_1, M_1})$ et $\theta_2 = (\widehat{g_2, M_2})$

$$\text{Donc } \boxed{a_1 \sin \theta_1 = a_2 \sin \theta_2}$$



Une parabole $y = ax^2 + bx + c$ passant par E et H satisfait

$$\begin{cases} f = a\dot{e}^2 + b\dot{e} + c & (1) \\ h = a\dot{g}^2 + b\dot{g} + c & (2) \end{cases}$$

On a donc a, b fixe, c est à déterminer.

$$(1) - (2) \quad f - h = a(\dot{e}^2 - \dot{g}^2) + b(\dot{e} - \dot{g})$$

$$\text{hyp } e \neq g \text{ donc } a = \frac{f-h(\dot{e}-\dot{g})}{\dot{e}^2-\dot{g}^2} = \frac{fh}{\dot{e}-\dot{g}} - b(\dot{e}+\dot{g}) \quad (3)$$

Puis (3) dans (1) pour avoir c

On cherche l'aire $L(b)$ de la parabole entre E et H

$$\begin{aligned} L(b) &= \int_C ds \quad \text{où } ds = \left(dx^2 + dy^2 \right)^{1/2} = dx \left(1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right)^{1/2} \quad \text{et } y = ax^2 + bx + c \\ &= \int_C dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} = \int_C dx \sqrt{1 + (2ax+b)^2} = \boxed{L(b)} = \frac{1}{2a} \left(F(z_2) - F(z_1) \right) \quad \text{où } g = 2ax + b \\ &\quad \text{et } F(x) = \frac{1}{2} \left(2 \sqrt{1+x^2} + \ln(2x + \sqrt{1+x^2}) \right) \end{aligned}$$

Pour trouver le nombre extrémale de L , on fait $\frac{dL}{db} = 0$ (graphiquement $\frac{da}{db} = 0$)

$$3. \quad \boxed{L(g)} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

$\delta S = 0$ sur la trajectoire suivie (Principe de moindre action)

$\delta S = S[g + \delta g] - S[g]$ indépendant de δg ($\# \nabla g$) mais avec $\delta g(t_i) = 0$: $\delta g(t_f)$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} (q, \dot{q}, t) \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} (q, \dot{q}, t) \delta \dot{q} + \mathcal{O}(\delta q^2, \delta \dot{q}^2, \delta q \delta \dot{q}) \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt$$

$$\approx \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right] dt \quad \text{car } \delta q = \frac{d}{dt} \delta \dot{q}$$

$$\approx \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \delta q \right] dt + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right]_{t_1}^{t_2}$$

Dans avec $\oint S = 0$, on trouve

$$\frac{\partial \Psi}{\partial p} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial q} \right) = 0 \quad (\text{Euler-Lagrange}) : \quad \text{Si } p \text{ est une variable cyclique} \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial p} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial q} \text{ est une intégrale primitive du mouvement} \Rightarrow \text{quantité conservée.}$$

4) On veut faire le lien avec le principe de Fermat

$$S[L] = 0 \quad \text{ou} \quad L = \int_{t_1}^{t_2} L ds$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot n(x, y, z) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}$$

$n(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$

Donc on a obtenu les équations de Lagrange :

Application au cas des ondes :

$$n = n(t^2)$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot n(x, t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}$$

$n(x, t, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ou $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$

x est cyclique

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} = \text{const}$$

$$n(t) \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{x}} = \text{const} \quad \text{On peut écrire } \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = \sin i$$

$\sin i = \text{const}$

Application à la réfraction atmosphérique :

$$n(\lambda, \theta) = n(\lambda)$$

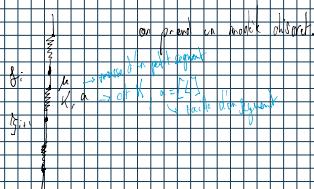
$$L = \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot n(\lambda, \theta) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}$$

θ variable cyclique donc :

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(n(\lambda) \sqrt{\dot{x}^2 + (\dot{\theta})^2} \right) = 0$$

$$n(\lambda) \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \dot{\theta}} = n(\lambda) \frac{\dot{\theta}}{(\dot{x}^2 + (\dot{\theta})^2)^{1/2}} = \boxed{n(\lambda) \sin(i) = \text{const}}$$

Si i varie dans son propre intervalle



$$T_{\text{eff}} = - \sum_{i=1}^N \frac{1}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \quad (\text{ép. de temps total})$$

$$T_{\text{eff}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} K \left((\beta_{i+1} - \beta_i) - 1 \right)^2$$

$$\approx \sum \frac{(\beta_{i+1} - \beta_i)^2}{2} \left(\frac{\beta_{i+1} - \beta_i}{2} - 1 \right)^2$$

On note $y = k_0 + N \alpha l = k_0$

$$\lambda = \frac{m_{\text{par}}}{l_0} \quad (\text{la longueur visee des rayons})$$

$$\lambda = \frac{l_0}{N} \quad \mu = \frac{m_{\text{par}}}{N}$$

$$E_{p,\text{tot}} = \sum_{z=0}^N \left[- \left(\frac{N \lambda z}{N} \right)^2 + \frac{y}{l} \left(\frac{b_{\text{par}} - b_{\text{par}} - 1}{l} \right) \right]$$

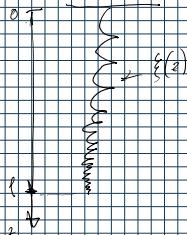
À la limite continue

$$\alpha \rightarrow d\beta \quad \beta \rightarrow \xi$$

$$\frac{\beta_{j+1} - \beta_j}{l} \rightarrow \frac{d\xi}{l}$$

$$\text{donc } E_{p,\text{tot}} = \int_0^l dz \left[\frac{1}{l} \left(\frac{d\xi}{l} - 1 \right)^2 - \lambda \xi \right]$$

$$\equiv E_{p0} [\xi] - \lambda \xi \Big|_{\xi=0}^{l=0}$$



→ on voit que Euler-Lagrange n'a pas de sens car il faut une condition initiale sur ξ pour faire un calcul de variation

→ ξ doit être pris évidemment à l'origine

Il nous manque une CL pour fixer ξ à l'origine

Il faut rajouter de l'action ...

$$\delta E_{p0} = 0$$

$$E_p (\xi + d\xi) - E_p (\xi) - \delta E_p$$

$$= \int_0^l dz d\xi \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} \right) \right] + \left[\frac{d\xi}{dz} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} \right]_0^l = 0$$

Indép de $\delta \xi$ avec $d\xi$ (évidem)

mais on a une condition sur $\xi'(z=l)$

$$\text{donc on doit avoir } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} (z=l) = 0$$

$$\text{à } \mathcal{L} (\xi, \dot{\xi}, z) = \frac{1}{2} \left(\dot{\xi} - 1 \right)^2 - \lambda \xi \dot{\xi}$$

$$\text{donc } 0 = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} \right) (z=l) \quad \text{à } z=l$$

$$\text{donc } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} (z=l) = 1$$

Rq à l'horizontale $\dot{\xi} = 0 \Rightarrow$ coline

C'est la CL manquante, on peut résoudre complètement

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} - \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}} \right) = 0 \quad \begin{cases} \xi (z=l) = 1 \\ \xi (z=0) = 0 \end{cases}$$

$$-\lambda \xi + \frac{1}{2} \dot{\xi}^2 = 0$$



B

Optique ondulatoire

Interférences et cohérence

§1 Caractérisation d'une source lumineuse

§1.1 Photodétecteurs

Tous les photodétecteurs (travaillant dans le domaine visible, proche UV et proche IR) donnent un signal proportionnel (pour les photodétecteurs linéaires) à l'énergie lumineuse captée par leur surface durant un certain intervalle de temps, appelé temps de réponse du photodétecteur. Ces temps de réponse varient très fortement d'un photodétecteur à l'autre.

<u>Exemples :</u>	œil	~ quelques 10^{-3} s (cf. 25 images/s ~ impression d'un continuum)
	film photographique	~ quelques 10^{-3} s (cf. temps typique d'obturation des "vieux" reflex)
	photomultiplicateur	~ quelques 10^{-9} s
	photodiode	~ quelques 10^{-12} s (limitation de l'électronique)

Dans tous les cas, ces temps de réponse sont très longs comparés à la période temporelle typique d'une onde électromagnétique dans le visible $T = \lambda/c \sim 10^{-15}$ s.

D'autre part, l'énergie transportée par une onde électromagnétique est associée au vecteur de Poynting, qui s'écrit, dans les milieux non-magnétiques :

$$\Pi = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}. \quad (4.1)$$

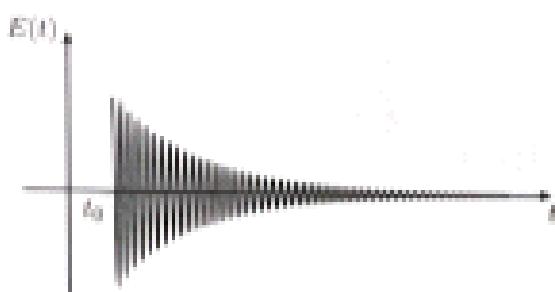
Pour une onde plane, mais également pour une onde quasi-plane (c'est-à-dire dans un milieu faiblement inhomogène, avec des rayons de courbure de l'ordre grand et des amplitudes des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} à variation lente comparée à λ), on a donc $|\Pi| \propto |\mathbf{E}|^2$ (ou, plus précisément, $\propto (\text{Re}(\mathbf{E}))^2$). Ainsi, la réponse d'un photodétecteur s'écrit :

$$R(t) = k \frac{1}{T_d} \int_t^{t+T_d} |\mathbf{E}(t')|^2 dt'. \quad (4.2)$$

§1.2 Sources lumineuses : modèle du train d'ondes

L'étude de la désexcitation spontanée d'un atome (ou ion, molécule, ...), que ce soit dans le cadre de la mécanique quantique (difficile...) ou du modèle empirique de l'électron élastiquement lié (beaucoup plus facile...) montre qu'il est raisonnable d'associer à ce processus l'émission d'une onde électromagnétique dipolaire (avec éventuellement une moyenne sur les orientations qui "isotropise" le résultat), dont l'amplitude peut s'écrire, dans la zone de rayonnement, dans le référentiel de l'atome, sous la forme :

$$\mathbf{E}(t) = \begin{cases} A \exp\left(-\frac{t-t_0}{2\tau_0}\right) \cos(2\pi\nu_0(t-t_0)) & \text{si } t \geq t_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.3)$$



$\hbar\nu_0$ correspond à l'énergie de la transition ΔE (dans le référentiel de l'atome), et τ_0 est associé à la largeur naturelle de la raie (elle-même associée aux durées de vie des niveaux haut et bas). Les ordres de grandeurs "typiques" pour une transition optique sont $\nu_0 = 10^{15}$ Hz et $\tau_0 = 10^{-9}$ s.

Remarque. En fait, l'écriture de E à l'aide de $A \equiv A\hat{A}$ correspond à la situation d'une polarisation rectiligne. On peut également écrire E à l'aide de $A \equiv A_x\hat{x} + iA_y\hat{y}$ pour traiter les polarisations circulaires. Rien ne change dans les raisonnements.

Un autre atome, qui effectuerait la même transition, produirait un champ électrique similaire, dans son référentiel propre, avec comme uniques mais cruciales différences une origine de l'émission $t'_0 \neq t_0$ et une orientation $\hat{A}' \neq \hat{A}$. Les équations de Maxwell étant linéaires, le champ électrique dans le référentiel du laboratoire est la somme des champs émis par chacun des atomes qui constituent la source. Pour le déterminer, il faut prendre en compte :

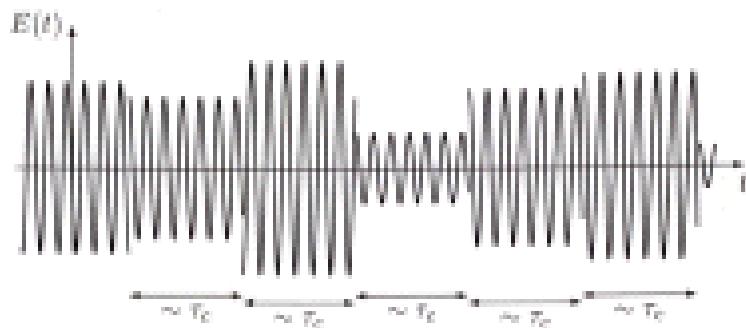
- le fait que les phases à l'origine (t_0) sont aléatoires et décorrélées ;
- le fait que les directions des champs (\hat{A}) sont aléatoires et décorrélées ;
- le fait que les fréquences centrales (ν_0) sont décalées par effet Doppler (élargissement Doppler) ;
- le fait que les fréquences centrales (ν_0) sont modifiées à cause d'éventuelles interactions inter-atomiques, qui perturbent les niveaux électroniques mis en jeu (élargissement (et parfois rétrécissement) collisionnel).

La théorie des processus aléatoires permet alors d'évaluer le champ électrique total, dans le référentiel de la source lumineuse (qui coïncide souvent avec le référentiel du laboratoire, en particulier sur une palette d'optique...), et qu'on peut l'écrire (en donnant un sens précis à chacun des termes) sous la forme suivante :

$$\mathbf{E}(t) = A(t) \cos(2\pi\nu_0 t + \varphi(t)) \hat{\mathbf{a}}(t), \quad (4.4)$$

où le vecteur unitaire $\hat{\mathbf{a}}(t)$ ainsi que $A(t)$ et $\varphi(t)$ sont des fonctions de t qui varient, toutes, sur des temps caractéristiques $\tau_c \gg 1/\nu_0$. Dit autrement, sur un intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, si $\Delta t \ll \tau_c$, alors $|\Delta A/A| \ll 1$, $|\Delta\varphi/\varphi| \ll 1$ et $|\Delta\hat{\mathbf{a}}| \ll 1$. À l'inverse, si $\Delta t \gg \tau_c$, alors $|\Delta A/A| \sim 1$, $|\Delta\varphi/\varphi| \sim 1$ et $|\Delta\hat{\mathbf{a}}| \sim 1$. Cette expression correspond au modèle dit "de l'enveloppe lentement variable".

Pour peu que l'on ne se soit pas trop concerné par certains aspects quantitatifs, on peut simplifier cette représentation pour aboutir au modèle dit "du train d'ondes": le signal associé à une source lumineuse est alors assimilé à une juxtaposition de portions de signaux sinusoidaux, d'amplitude, de phase et de polarisation parfaitement définies sur des intervalles $\sim \tau_c$, mais qui varient de façon totalement aléatoire d'une portion à l'autre. Seule la pulsation ν_0 est identique pour tous. Ce modèle permet de rendre compte, au moins qualitativement (mais de manière très graphique), des conséquences des propriétés des sources lumineuses sur l'observation éventuelle de phénomènes de type "interférences" ou "diffraction".



τ_c dépend de la physique de la source lumineuse, mais les valeurs typiques sont les suivantes :

$\tau_c \sim 10^{-10} \text{ s}$ élargissement collisionnel d'une lampe spectrale haute-pression

$\tau_c \sim 10^{-9} \text{ s}$ élargissement Doppler d'une lampe spectrale

$\tau_c \sim 10^{-8} \text{ s}$ élargissement collisionnel d'une lampe spectrale basse-pression (\sim élargissement naturel des raies "usuelles")

Remarque. Pour un laser, source lumineuse pour laquelle l'émission stimulée joue un rôle clef, le modèle du train d'ondes est plus difficile à justifier, mais reste néanmoins intéressant dans la mesure où certaines perturbations macroscopiques (par exemple les fluctuations thermiques qui modifient la longueur de la cavité, les vibrations mécaniques) ainsi que les désexcitations spontanées qui soit initient l'émission stimulée, soit se superposent à l'émission laser proprement dite, sont inévitables. La longueur de cohérence $c\tau_c$ est cependant beaucoup plus grande que pour une source classique en général.

§III Interférences

On se place dans ce paragraphe dans la situation (pas si restrictive) d'ondes planes (ou quasi-planes) émises par des sources ponctuelles (quasi-) monochromatiques.

§III.1 Terme d'interférence

Considérons une partie de l'espace dans laquelle, pour une raison quelconque, se superposent deux ondes émises par des sources lumineuses indépendantes ou non. Les équations de Maxwell étant linéaires et les photorécepteurs sensibles au flux d'énergie, l'intensité détectée par un photorécepteur ponctuel placé en un point M de cette partie de l'espace s'écrit :

$$\begin{aligned} I_{\text{tot}} &= k \frac{1}{T_d} \int_0^{t+T_d} \|E_1(t') + E_2(t')\|^2 dt' \equiv k \langle (E_1(t') + E_2(t'))^2 \rangle_{T_d} \quad \text{où } \langle \dots \rangle_{T_d} \equiv \frac{1}{T_d} \int_0^{t+T_d} \dots \\ &= \underbrace{k \langle E_1^2 \rangle_{T_d}}_{\equiv I_1} + \underbrace{k \langle E_2^2 \rangle_{T_d}}_{\equiv I_2} + \underbrace{2k \langle E_1 \cdot E_2 \rangle_{T_d}}_{\text{terme d'interférence}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

On a donc *a priori* $I_{\text{tot}} \neq I_1 + I_2$ à cause du terme d'interférence, qui fait apparaître la moyenne sur le temps de réponse du photorécepteur du produit scalaire $E_1 \cdot E_2$.

Pour ce qui concerne l'aspect "produit scalaire", on peut considérer deux cas extrêmes :

- soit les deux ondes ont une polarisation parfaitement définie (par exemple à cause de la présence de polariseurs dans le montage optique) auquel cas $\langle e_1 \cdot e_2 \rangle_{T_d} = e_1 \cdot e_2 = \text{cte.}$, qui est nulle si les polarisations sont orthogonales, non nulle sinon ;
- soit les deux ondes sont non-polarisées, auquel cas on peut montrer que l'on peut décrire chacune d'entre elles comme la superposition de deux ondes polarisées totalement indépendantes. On est alors ramené au cas précédent, avec $\langle e_1^{(ij)} \cdot e_2^{(lj)} \rangle_{T_d} = \delta_{ij}$.

On retiendra de cette discussion la nécessité, pour qu'il puisse exister un terme d'interférence non nul, que les polarisations soient "compatibles", et l'on considérera dans toute la suite que les ondes lumineuses peuvent être décrites dans le cadre du modèle scalaire. On écrit alors :

$$I_{\text{tot}} = \langle s_1^2 \rangle_{T_d} + \langle s_2^2 \rangle_{T_d} + 2 \langle s_1 s_2 \rangle_{T_d}. \quad (4.6)$$

En se plaçant dans le modèle de l'enveloppe lentement variable pour chacune des sources, on écrit alors :

$$s_i = A_i(t) \cos(2\pi\nu_i t + \varphi_i(t)), \quad (4.7)$$

et l'on calcule :

$$\begin{aligned} \langle s_i^2 \rangle_{T_d} &= \frac{1}{T_d} \int_t^{t+T_d} A_i^2(t') \cos^2(2\pi\nu_i t' + \varphi_i(t')) dt' = \frac{1}{T_d} \int_t^{t+T_d} A_i^2(t') \left(\frac{1 + \cos(2 \times (2\pi\nu_i t' + \varphi_i(t')))}{2} \right) dt' \\ &= \underbrace{\frac{1}{T_d} \int_t^{t+T_d} \frac{A_i^2(t')}{2} dt'}_{= I_0(t)} + \underbrace{\frac{1}{T_d} \int_t^{t+T_d} A_i^2(t') \frac{\cos(4\pi\nu_i t' + 2\varphi_i(t'))}{2} dt'}_{= 0 \text{ car } \nu_i \gg 1/T_d}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \langle s_1 s_2 \rangle_{T_d} &= \frac{1}{T_d} \int_t^{t+T_d} A_1(t') A_2(t') \cos(2\pi\nu_1 t' + \varphi_1(t')) \cos(2\pi\nu_2 t' + \varphi_2(t')) dt' \\ &= \frac{1}{T_d} \int_t^{t+T_d} A_1(t') A_2(t') \frac{\cos(2\pi(\nu_1 + \nu_2)t' + \varphi_1(t') + \varphi_2(t')) + \cos(2\pi(\nu_1 - \nu_2)t' + \varphi_1(t') - \varphi_2(t'))}{2} dt' \\ &= \underbrace{\frac{1}{T_d} \int_t^{t+T_d} A_1(t') A_2(t') \frac{\cos(2\pi(\nu_1 + \nu_2)t' + \varphi_1(t') + \varphi_2(t'))}{2} dt'}_{= 0 \text{ car } \nu_1 + \nu_2 \gg 1/T_d} \\ &\quad + \frac{1}{T_d} \int_t^{t+T_d} A_1(t') A_2(t') \frac{\cos(2\pi(\nu_1 - \nu_2)t' + \varphi_1(t') - \varphi_2(t'))}{2} dt'. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Si ν_1 est sensiblement différent de ν_2 , par exemple si $\nu_1 = 1.001\nu_2$ (ou plus), alors $\nu_1 - \nu_2 \sim 10^{12}$ Hz (ou plus), et le dernier terme est nul (car la moyenne se fait sur le temps de réponse du photodétecteur, beaucoup plus long). On se place donc, pour simplifier la discussion, dans le cas où $\nu_1 = \nu_2$. On a alors :

$$\langle s_1 s_2 \rangle_{T_d} = \frac{1}{T_d} \int_t^{t+T_d} A_1(t') A_2(t') \frac{\cos(\varphi_1(t') - \varphi_2(t'))}{2} dt'. \quad (4.10)$$

On arrive ainsi à : $I_{\text{tot}} = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} \left(\frac{A_1(t) A_2(t)}{2\sqrt{I_0 I_0}} \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \right)_{T_d}. \quad (4.11)$

Dans le cas où $A_1(t) = A_1 = \text{const}$ et $A_2(t) = A_2 = \text{const}'$, i.e. si seules les phases φ_i présentent une dépendance temporelle (en sautant abruptement d'une valeur à une autre sur des temps caractéristiques $\sim \tau_c$), on a :

$$I_{\text{tot}} = I_0 + I_0 + 2\sqrt{I_0 I_0} (\cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)))_{T_d}, \quad (4.12)$$

et c'est sur cette équation que se portera désormais la suite de la discussion.

$\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ sont *a priori* quelconques, et varient sur des temps caractéristiques τ_c . Si (φ_1, φ_2) constitue un

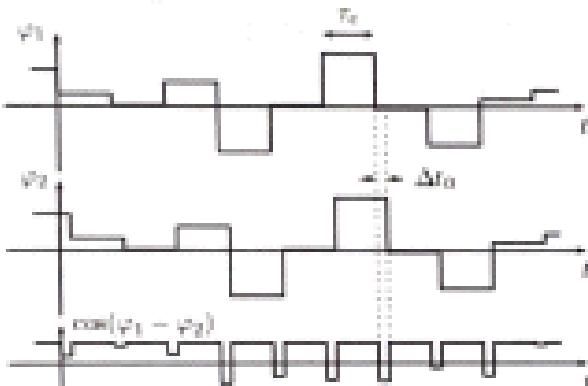
et c'est sur cette équation que se portera désormais la suite de la discussion.

$\varphi_1(t)$ et $\varphi_2(t)$ sont *a priori* quelconques, et varient sur des temps caractéristiques r_c . Si (φ_1, φ_2) constitue un couple de variables aléatoires indépendantes uniformément réparties sur l'intervalle $[0; 2\pi]$, alors $\varphi_1 - \varphi_2$ est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0; 2\pi]$ variant sur un temps caractéristique $r_c \ll T_d$.

La valeur moyenne $\langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle_{T_d}$ est alors nulle. Par contre, si $\varphi_2(t) = \varphi_1(t + \Delta t_0)$ avec $\Delta t_0 = \text{cste}$, on a :

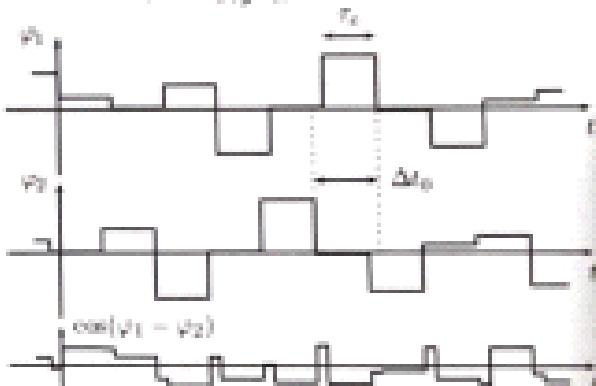
$$\begin{aligned} \langle \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \rangle_{T_d} &= \frac{1}{T_d} \int_t^{t+T_d} \cos(\varphi_1(t') - \varphi_2(t')) dt' = \frac{1}{T_d} \sum_{n=0}^{T_d/\tau_c-1} \int_{t+n\tau_c}^{t+(n+1)\tau_c} \cos(\varphi_1(t+n\tau_c) - \varphi_2(t'+\Delta t_0)) dt' \\ &= \frac{1}{T_d} \sum_{n=0}^{T_d/\tau_c-1} \int_{t+n\tau_c}^{t+(n+1)\tau_c} \cos(\varphi_1(t+n\tau_c) - \varphi_1(t+n\tau_c + \Delta t_0)) dt' \\ &= \frac{\tau_c}{T_d} \sum_{n=0}^{T_d/\tau_c-1} \cos(\varphi_1(t+n\tau_c) - \varphi_1(t+n\tau_c + \Delta t_0)). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Si $\Delta t_0 \ll \tau_c$, on est dans la situation suivante :



et la moyenne $\langle \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \rangle_{T_d}$ est très proche de 1.

À l'inverse, si $\Delta t_0 \gtrsim \tau_c$, on a :



et la moyenne $\langle \cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) \rangle_{T_d}$ est nulle, les φ_i étant décorrélés au-delà d'un temps caractéristique $\sim \tau_c$.

Conclusion : le terme d'interférence est non nul si et seulement si $\varphi_2(t) = \varphi_1(t + \Delta t_0)$ avec $\Delta t_0 \lesssim \tau_c$. C'est la raison (ou au moins l'une d'elle) pour laquelle les phénomènes d'interférences sont si rares dans la nature. Le phénomène d'interférence "matérialise" la cohérence mutuelle des deux ondes superposées.

§II.2 Phase et chemin optique

On ne considère que des milieux linéaires homogènes isotropes non-magnétiques. Le cas des milieux anisotropes peut se faire essentiellement de la même façon, mais il faut décomposer les champs sur des directions de polarisations particulières, et l'on obtient (éventuellement) des phénomènes "extraordinaires", par exemple l'existence de deux rayons réfractés (à partir d'un unique rayon incident) pour lesquels on verrait bien en peine de définir une surface équi-chemin optique.

Soit une source ponctuelle (quasi-) monochromatique. Le théorème de Malus-Dupin assure que les rayons lumineux sont normaux aux surfaces équi-chemin optique. Dans la région où l'onde lumineuse peut être considérée comme une onde (quasi-) plane, l'électromagnétisme des milieux diélectriques linéaires homogènes isotropes ("DLHI") non-magnétiques permet de montrer que le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\Pi = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \frac{(Re(\mathbf{E}))^2}{\mu_0 \omega} \mathbf{k}, \quad (4.14)$$

où

$$\mathbf{k} = \nabla \Psi, \quad \text{avec: } \begin{cases} \mathbf{E}(r, t) = \mathbf{E}_0(r) e^{-i\omega t} e^{i\Phi(r)}, \\ \mathbf{B}(r, t) = \mathbf{B}_0(r) e^{-i\omega t} e^{i\Phi(r)}, \end{cases} \quad \mathbf{E}_0 \text{ et } \mathbf{B}_0 \text{ à variation lente par rapport à } \nabla \Psi, \quad (4.15)$$

et avec la relation de dispersion suivante :

$$k^2 = \epsilon_r \epsilon_0 \omega^2 c^2 = \frac{n^2 \omega^2}{c^2}, \quad (4.16)$$

Pour un déplacement infinitésimal dr le long d'un rayon lumineux, la variation de chemin optique s'écrit donc, k étant parallèle au rayon lumineux (car $\Pi \parallel k$) :

$$d\ell = n ds = n \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} dr = \frac{n}{|\mathbf{k}|} \nabla \Psi dr = \frac{c}{\omega} d\Psi. \quad (4.17)$$

Conclusion : les surfaces équi-chemin optique coïncident donc (pour les ondes (quasi-) planes (quasi-) monochromatiques) avec les surfaces équiphases, soit aussi :

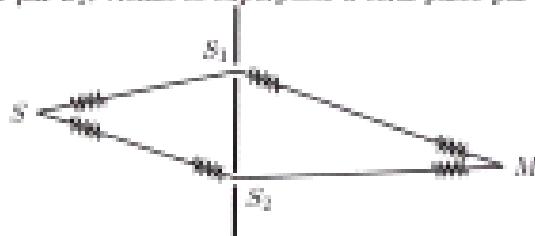
$$d\mathcal{L}(MM') = \int_{\text{entre les}}_{MM'} n ds = \frac{c}{\omega} (\Psi(M') - \Psi(M)). \quad (4.18)$$

§II.3 Condition d'obtention d'interférences

On a démontré que deux conditions (toutes les deux très restrictives) doivent être satisfaites pour que le terme d'interférence puisse être non-nul :

- $\nu_1 = \nu_2$, et plus précisément, $|\nu_1 - \nu_2| \ll 1/T_d$.
- $\varphi_2(t) = \varphi_1(t + \Delta t_0)$ avec $\Delta t_0 \lesssim \tau_c$.

Dans un premier temps, nous ne discuterons que les sources classiques, c'est-à-dire toutes sauf les lasers. L'aspect (quasi-) monochromatique d'une source lumineuse peut être aisément satisfait en faisant intervenir des filtres (interférentiels) suffisamment sélectifs. On peut alors imaginer saisir la première condition $\nu_1 = \nu_2$ en utilisant deux sources lumineuses technologiquement identiques, par exemple en mettant en jeu le même élément chimique excité de la même façon (par exemple deux lampes spectrales identiques). Cependant, ces deux sources émettraient des trains d'ondes pour lesquels la deuxième condition ne sera pas satisfait, car il n'y a aucune raison pour que les phases au moment de l'émission de chaque train d'ondes obéissent à une quelconque relation : $\varphi_2(t_0)$ et $\varphi_1(t_0)$ sont totalement décorrélées, et quelque soit le chemin optique séparant M (le point d'observation) des deux sources S_1 et S_2 , $\varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ est une variable aléatoire variant sur un temps caractéristique $\sim \tau_c$. Aucun phénomène d'interférences ne peut donc être détecté, et l'on parle de sources mutuellement incohérentes. La seule solution pour résoudre ce problème de "phase à l'émission" consiste à construire, d'une manière ou d'une autre, à partir d'une unique source primaire, deux sources secondaires au niveau desquelles les "phases à l'émission" effectives seront (plus ou moins) parfaitement corrélées. Il reste alors à satisfaire la condition qu'au niveau du point d'observation M, $\varphi_2^H(t) = \varphi_1^H(t + \Delta t_0)$, i.e. que l'éventuelle différence de marche $|S_2M| - |S_1M|$ soit suffisamment faible pour que les phases restent corrélées. En d'autres termes, pour pouvoir observer un phénomène d'interférences, il faut que ce soit le même train d'onde émis par la source primaire qui, passant par S_2 , vienne se superposer à celui passé par S_1 .



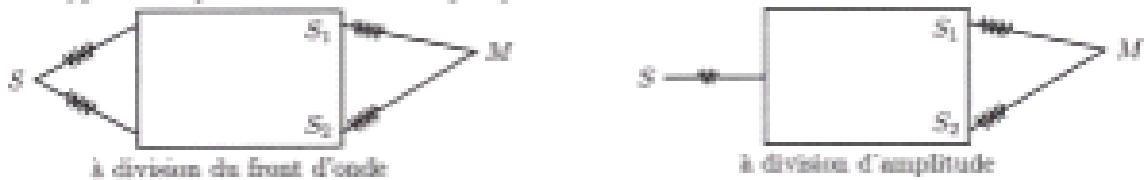
Remarque. Au niveau du vocabulaire, on emploie indifféremment l'expression "différence de chemin optique" et "différence de marche".

La réalisation pratique de deux sources secondaires (plus ou moins) corrélées à partir d'une unique source primaire amène à distinguer deux types de dispositifs : les dispositifs à division d'amplitude, et les dispositifs à division du front d'onde.

En ce qui concerne les lasers, la discussion est similaire à la différence près que les temps de cohérence τ_c peuvent être considérablement plus grands que pour les sources classiques. Ce sont les contraintes technologiques (aspects mécaniques [vibrations], thermiques [fluctuations thermiques de la position des miroirs] et optiques [finesse de la cavité ↔ limitation de l'influence de l'émission spontanée qui "refait démarrer" le laser ou se superpose en sortie]) qui déterminent τ_c , et on peut donc imaginer le rendre "aussi grand" qu'on veut en soignant ces aspects (stabilisation du laser, asservissement, refroidissement des miroirs, ...). Dans ce cas là, avec deux lasers asservis, il existera une relation de phase parfaitement définie sur des temps $\sim \tau_c \gg T_d$. Si l'on veut observer des interférences, il suffira alors de satisfaire la condition $\nu_1 - \nu_2 \ll 1/T_d$, et c'est possible, en contrôlant de façon suffisamment précise les deux fréquences ν_1 et ν_2 , et en prenant le photodétecteur (et son électronique) adapté. On peut également, à partir d'un unique laser (pas forcément stabilisé) construire un second laser fictif, légèrement désaccordé (par exemple en décalant la fréquence à l'aide d'un dispositif acousto-optique). Les "phases à l'émission" sont parfaitement corrélées, et malgré une photodétection appropriée, on peut voir "battre ces deux lasers" tout comme on entend "battre deux disques" légèrement désaccordés. La première réalisation d'une telle expérience remonte à 1963 [Jedamzik] (sans laser, et en exploitant l'effet Zeeman). Elles sont désormais monnaie courante, en particulier dans les laboratoires de métrologie où elles permettent de comparer des lasers de référence qui eux-mêmes sont ensuite utilisés dans les horloges atomiques.

§III Interféromètres à deux ondes

Les deux types de dispositifs interférométriques peuvent être schématisés sous la forme suivante :

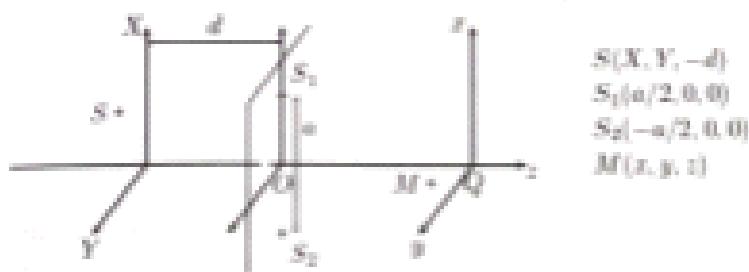


Ils se distinguent par la réponse à la question : faut-il un ou deux rayons lumineux pour obtenir les deux sources secondaires S_1 et S_2 ? Les interféromètres à division du front d'onde ont joué un rôle clef dans l'histoire de l'optique (et de l'enseignement), mais on leur préfère désormais les interféromètres à division d'amplitude, pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement.

§III.1 Interféromètres à division du front d'onde

Trous d'Young

Ce dispositif, inventé par Grimaldi (~ 1630) et amélioré par Young (1802) est la drosophile de l'optique ondulatoire. Il est constitué d'une source primaire ponctuelle monochromatique éclairant deux trous ponctuels percés dans un écran opaque, qui constituent les deux sources secondaires S_1 et S_2 . Sans se préoccuper de la dépendance de l'intensité vis-à-vis des angles, on regarde quelle doit être la position du point d'observation M pour que la condition d'interférence constructive soit satisfaite.



La condition d'interférences totalement constructives s'écrit :

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = 2\pi n, \quad \text{avec } |n| \in \mathbb{N} \text{ "pas trop grand" pour satisfaire une différence de marche } \leq x_0. \quad (4.19)$$

On considère alors des ondes sphériques émises par S , S_1 et S_2 , qui sont localement planes pourvu que l'on ne soit pas trop près de S , ni de S_1 et S_2 du côté de M . On calcule alors la différence de phase entre un "rayon" parcourant le trajet $S - S_1 - M$ et un "rayon" parcourant le trajet $S - S_2 - M$. À l'évidence, ces rayons ne sont pas des "rayons lumineux physiques" pour lesquels on pourrait appliquer directement la formule $\mathcal{E}(MM') = c/\omega(\Phi(M') - \Phi(M))$, mais sont constitués de deux portions de "rayons lumineux physiques" chacun. On écrit donc $[SM]_1 = [SS_1] + [S_1M]$ et $[SM]_2 = [SS_2] + [S_2M]$, et l'on a pour chacun :

$$[S_1M] = \frac{c}{\omega} (\varphi_1(M) - \varphi_1(S_1)) \quad \text{et} \quad [S_2M] = \frac{c}{\omega} (\varphi_2(M) - \varphi_2(S_2)), \quad (4.20)$$

sous finalement :

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{\omega}{c} ([S_2M] - [S_1M]) + \varphi_2(S_2) - \varphi_1(S_1). \quad (4.21)$$

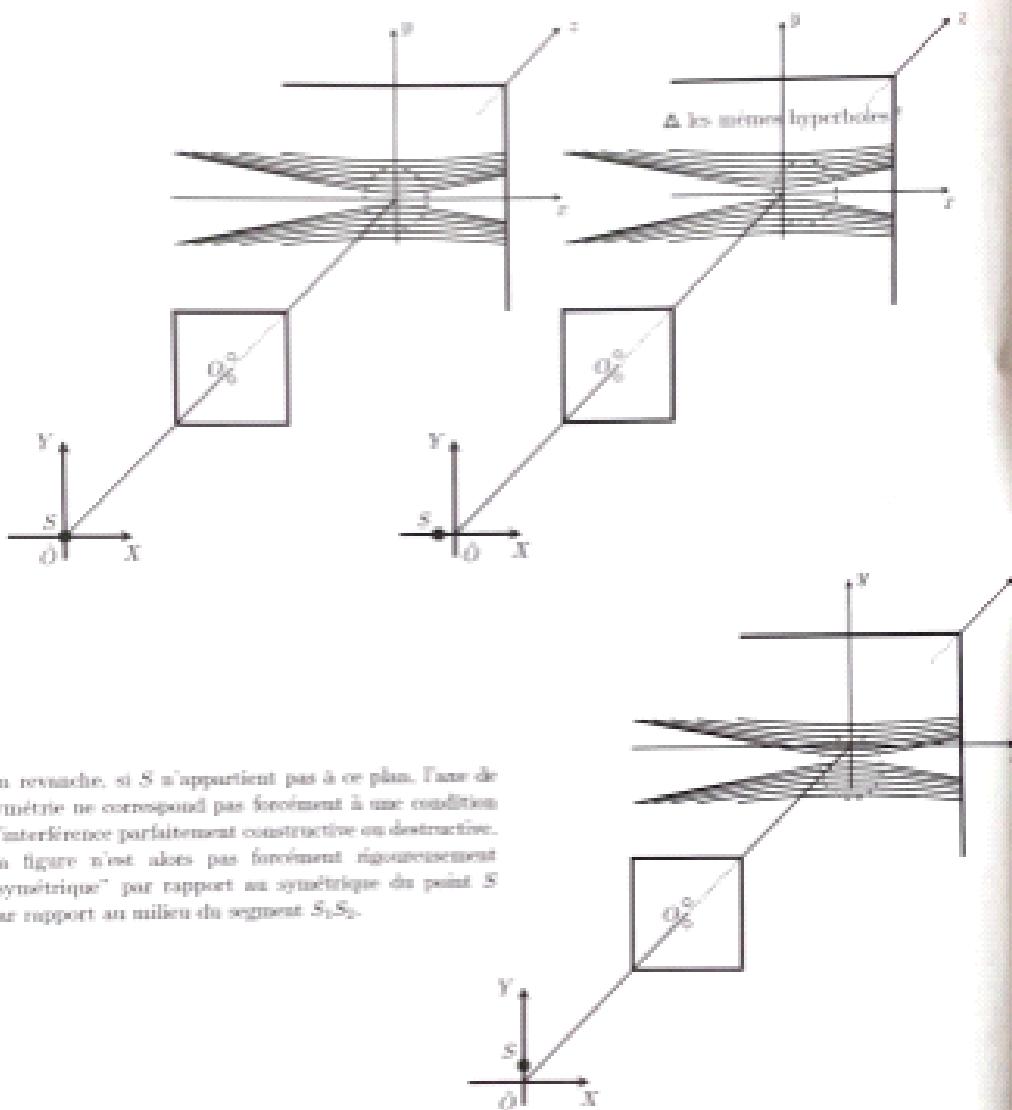
L'équation $\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = 2\pi n$ correspond donc à :

$$[S_2M] - [S_1M] = \frac{c}{\omega} (2\pi n - \underbrace{(\varphi_2(S_2) - \varphi_1(S_1))}_{\text{reste}}). \quad (4.22)$$

Il s'agit de l'équation d'un hyperbololoïde à deux nappes, de foyers S_1 et S_2 , pour $|n|$ fixé. La trace de cet hyperbololoïde dans tout plan dont la normale est perpendiculaire à S_1S_2 est une hyperbole, et un cercle dans un plan de normale $\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2$ (sauf cas dégénéré). La condition d'interférences constructives est donc satisfaite, dans un plan de normale à sur un ensemble d'hyperboles, indiquées par n . La figure d'interférence correspond par conséquent à une répartition de l'intensité lumineuse restant à déterminer modulée, dans la "zone de recouvrement" des deux ondes, par une alternance de "franges" sombres (interférences destructives) et brillantes (interférences constructives). Il faut cependant par "franges" des segments d'hyperboles, qui peuvent apparaître, si la répartition d'intensité n'est pas trop étendue (ce qui est le cas en pratique) comme des franges rectilignes. Reste à déterminer l'axe de symétrie de la figure. Elle s'obtient en considérant le cas $n = 0$ de l'équation précédente. On doit alors avoir, pour la fringe centrale :

$$[S_2M] - [S_1M] = -\frac{c}{\omega} (\varphi_2(S_2) - \varphi_1(S_1)) = -\frac{c}{\omega} (\varphi_2(S_2) - \varphi_2(S) - \varphi_1(S_1) - \varphi_1(S)) = -\frac{c}{\omega} ([SS_2] - [SS_1]). \quad (4.23)$$

Cela correspond au fait que le retard de phase entre S_1M et S_2M compense celui accumulé entre SS_1 et SS_2 . Dans le cas où S appartient au plan bissecteur de S_1S_2 , la fringe centrale appartient alors également à ce même plan :



En revanche, si S n'appartient pas à ce plan, l'axe de symétrie ne correspond pas forcément à une condition d'interférence parfaitement constructive ou destructive. La figure n'est alors pas forcément rigoureusement "symétrique" par rapport au symétrique du point S par rapport au milieu du segment S_1S_2 .

On peut développer un peu les calculs en se plaçant dans la limite $OQ \gg x, y$. Le cas où S est hors axe n'est pas plus compliqué à traiter. Il faut juste ne pas oublier la différence de chemin optique entre SS_1 et SS_2 . Cela ne fait qu'allonger les formules, et l'on se place donc dans le cas où S est situé sur l'axe Oz . La condition d'interférences constructives s'écrit :

$$[S_2M] - [S_1M] = \frac{c}{\omega} 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (4.24)$$

sous réserve, avec λ_0 la longueur d'onde dans le vide :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} ([S_2M] - [S_1M]) = 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \text{ mais pas trop grand quand même...} \quad (4.25)$$

Or on a :

$$\begin{aligned} |\mathbf{S}_1 M| &= |\mathbf{S}_1 \mathbf{O} + \mathbf{OQ} + \mathbf{QM}| = (|\mathbf{S}_1 \mathbf{O} + \mathbf{OQ} + \mathbf{QM}|^2)^{1/2} \\ &= (\mathbf{S}_1 \mathbf{O}^2 + \mathbf{OQ}^2 + \mathbf{QM}^2 + 2 \underbrace{\mathbf{S}_1 \mathbf{O} \cdot \mathbf{OQ}}_{=0} + 2 \mathbf{S}_1 \mathbf{O} \cdot \mathbf{QM} + 2 \underbrace{\mathbf{OQ} \cdot \mathbf{QM}}_{=0})^{1/2} \\ &= |\mathbf{OQ}| \left(1 + 2 \frac{\mathbf{S}_1 \mathbf{O} \cdot \mathbf{QM}}{|\mathbf{OQ}|^2} + \frac{\mathbf{S}_1 \mathbf{O}^2 + \mathbf{QM}^2}{|\mathbf{OQ}|^2} \right)^{1/2} \\ &\approx |\mathbf{OQ}| \left(1 + \frac{\mathbf{S}_1 \mathbf{O} \cdot \mathbf{QM}}{|\mathbf{OQ}|^2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{x^2, r^2, y^2}{z^2}\right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

On calcule alors le produit scalaire :

$$\mathbf{S}_1 \mathbf{O} \cdot \mathbf{QM} = \begin{vmatrix} -a/2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 0 \end{vmatrix} = -\frac{ax}{2}. \quad (4.27)$$

d'où

$$|\mathbf{S}_1 M| \approx z \left(1 - \frac{ax}{2z^2} \right) \quad \text{et} \quad |\mathbf{S}_2 M| \approx z \left(1 + \frac{ax}{2z^2} \right) \quad \text{de la même façon.} \quad (4.28)$$

On en déduit finalement (où n désigne l'indice du milieu) :

$$|\mathbf{S}_2 M| - |\mathbf{S}_1 M| = n(|\mathbf{S}_2 M| - |\mathbf{S}_1 M|) \approx n \frac{ax}{z}. \quad (4.29)$$

La condition d'interférences constructives s'écrit donc :

$$\frac{2\pi n ax}{\lambda_0 z} = 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}, \quad \text{soit} \quad \frac{2\pi ax}{\lambda_0 z} = 2k\pi, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}, \quad (4.30)$$

où λ est la longueur d'onde dans le milieu considéré. On retrouve des franges rectilignes (dans la limite de validité des développements limités), orthogonales à l'axe Ox (i.e. orthogonales à $\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2$), avec comme position des franges brillantes :

$$x_{\text{interf. const.}} = k \frac{\lambda_0}{a}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.31)$$

L'interfrange $\Delta x \equiv x_{\text{interf. const.}}^{k+1} - x_{\text{interf. const.}}^k$ est constant et vaut :

$$\Delta x = \frac{\lambda_0}{a}, \quad \propto \lambda, \propto z, \propto 1/a. \quad (4.32)$$

On note que cet interfrange est proportionnel à λ (conséquence pratique : utiliser λ_{long} plutôt que λ_{short} [sans discuter la réponse chromatique de l'œil]), proportionnel à z (conséquence pratique : éloigner l'écran d'observation [en notant que cela va dans le sens de la validité du DL]), et inversement proportionnel à a (conséquence pratique : "rapprocher" les trous d'Young).

⚠ On gardera toujours à l'esprit qu'à ce stade du cours, la répartition d'intensité sur l'écran d'observation n'est pas connue. La seule chose que l'on sait est l'existence de cette modulation d'intensité due à la satisfaction (ou non) de la condition d'interférences constructives dans la zone de recouvrement des ondes.

Remarque. On a obtenu des équations (que ce soit des hyperboles ou des franges rectilignes dans le cadre du développement limité) qui pourraient faire penser que le phénomène d'interférence s'étend sur tout le plan d'observation. Ce n'est pas correct car, sans préjuger de la dépendance de l'intensité lumineuse vis-à-vis de l'angle par rapport à l'axe optique, pour un $|k|$ suffisamment grand, la différence de chemins optique $|\mathbf{S}_2 M| - |\mathbf{S}_1 M|$ est supérieure à $\sim \pi r$, et les deux trains d'ondes qui se superposent sont alors totalement décorrélés, annulant ainsi le terme d'interférence. Cela est également vrai si la source primaire est trop "hors axe" parallèlement à $\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2$.

Conclusion

D'autres dispositifs existent (miroir de Lloyd, miroirs de Fresnel, bi-prisme de Fresnel, bilentilles de Babinet, ...). Tous les calculs pour établir la condition d'interférences constructives se ramènent au calcul de la différence entre les chemins optiques suivant les deux trajets possibles, puis à la comparaison à la longueur d'onde de la lumière utilisée (car les sources ont toujours été considérées, à ce stade, comme (quasi-) monochromatiques (et cf. cohérence temporelle, § V.2)). On notera également que l'on a toujours considéré une source primaire (et des sources secondaires) ponctuelle(s) ; on verra ultérieurement l'influence d'une extension spatiale finie de la source (cf. cohérence spatiale, § V.3).

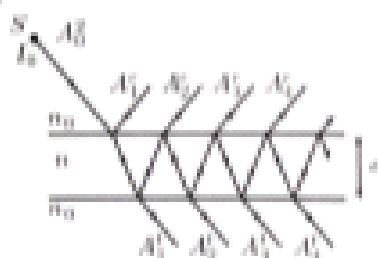
Remarque. D'avantuels déphasages (constants) peuvent apparaître dans certaines situations, notamment lors de certaines réflexions, expliquant le fait que l'on observe parfois des franges sombres là où l'on attendait des franges brillantes et inversement. C'est notamment le cas pour le miroir de Lloyd. Ces déphasages se justifient dans le cadre de l'électromagnétisme mais ne changent essentiellement rien pour ce qui est du problème d'optique associé.

§III.2 Interféromètres à division d'amplitude

Tous ces interféromètres reposent sur le fait qu'il existe une (au moins) surface sur laquelle s'effectue une réflexion partielle de la lumière, ce qui permet d'obtenir deux rayons lumineux (cohérents) à partir d'un seul. Toutes les situations se ramènent à celle d'un rayon lumineux arrivant sur une lame à faces parallèles, ou faisant un angle α l'avec l'autre.

Lame à faces parallèles

On considère un rayon lumineux d'intensité I_0 émis par une source ponctuelle S tombant sur une lame à faces parallèles d'épaisseur a et d'indice n .



Suite aux réflexions/refractions au niveau des deux dioptres apparaissent une infinité de rayons, dont on peut donner les intensités (relativement à l'intensité incidente) à l'aide des coefficients de Fresnel. Les formules générales font intervenir la polarisation ainsi que l'angle d'incidence, mais on ne retiendra pour notre discussion que la situation de l'incidence normale (auquel cas il n'y a plus de polarisation à discuter). Les coefficients de Fresnel en amplitude s'écrivent :

* pour le passage de $n_0 \rightarrow n$:

$$r_1 = \frac{n_0 - n}{n_0 + n} \text{ en réflexion}, \quad t_1 = \frac{2n_0}{n_0 + n} \text{ en transmission}; \quad (4.19)$$

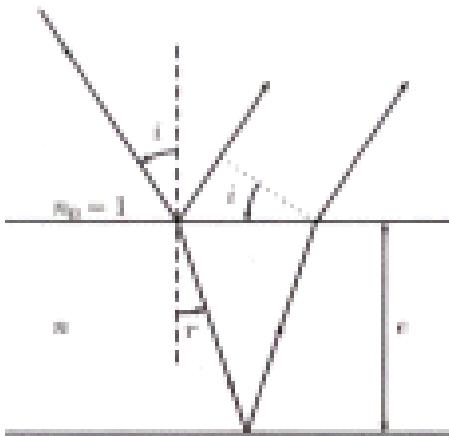
* pour le passage de $n \rightarrow n_0$:

$$r_2 = \frac{n - n_0}{n_0 + n} \text{ en réflexion}, \quad t_2 = \frac{2n}{n_0 + n} \text{ en transmission}. \quad (4.20)$$

On a alors, les applications numériques étant données pour $n_0 = 1, n = 1.5$ (i.e. pour une lame de verre plongée dans l'eau) :

$$\begin{aligned} A_1'/A_0 &= r_1 = -0.2 ; \quad A_2'/A_0 = t_1 t_2 r_2 = 0.192 ; \quad A_3'/A_0 = t_1 t_2 r_2^3 = 0.0076 ; \dots \\ A_1''/A_0 &= t_1 t_2 = 0.96 ; \quad A_2''/A_0 = t_1 t_2 r_2^2 = 0.038 ; \quad A_3''/A_0 = t_1 t_2 r_2^4 = 0.0015 ; \dots \end{aligned}$$

Dans le contexte des interférences, si l'on veut que le terme d'interférence puisse modifier A_{tot} par rapport à $t_1 + t_2$, il faut que les amplitudes des deux ondes lumineuses qui se superposent soient similaires. Dans notre cas, cela revient à ne conserver dans l'étude que les deux premières ondes réfléchies A_1' et A_2' , et donc à observer le phénomène en réflexion. Les deux rayons, associés à A_1' et A_2' , sont parallèles et interfèrent donc à l'infini (qu'on peut ranger à distance finie en observant dans le plan focal image d'une lentille). On peut aisément faire le calcul de la différence de marche entre ces deux rayons lumineux.



On a donc :

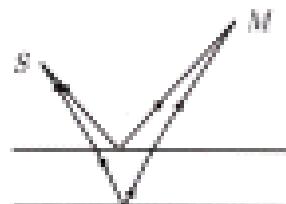
$$\delta = 2 \frac{n e}{\cos r} - 2e \tan r \sin i = 2e \left(\frac{n}{\cos r} - \frac{\sin r \sin i}{\cos r} \right) = 2e \left(\frac{n}{\cos r} - \frac{n \sin^2 r}{\cos r} \right) = 2ne \cos r. \quad (4.35)$$

Sans discuter d'éventuel déphasage à la réflexion, la condition d'interférences constructives à l'infini est donc :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} 2ne \cos r = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.36)$$

La source étant ponctuelle, le système est à symétrie cylindrique par rapport à la normale à la lame passant par S . On observe donc à l'infini, ou dans le plan focal image d'une lentille placée perpendiculairement à l'axe de symétrie, des anneaux brillants correspondant aux angles r satisfaisant $4\pi n e \cos r / \lambda = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (tant que k n'est pas trop grand pour ne pas dépasser une différence de marche $\sim e\tau_c$). Un anneau particulier est associé à une valeur parfaitement définie de r , et donc de i , c'est-à-dire correspond aux interférences des rayons qui arrivent sur la lame selon une certaine incidence. On parle alors d'anneaux d'égale inclinaison, ou anneaux d'Haidinger.

Remarque. Pour une source ponctuelle et une observation à distance finie, on peut également développer le calcul, et trouver une figure d'interférence similaire, les rayons des anneaux dépendant des distances de S et M à la lame ("franges de Pohl").

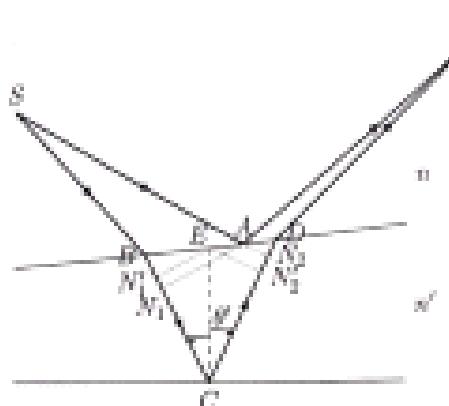


Remarque. On peut exploiter cette configuration "à l'envers", en cherchant à quelle condition une lame d'indice n séparant deux milieux d'indice n_0 et n_1 permet de satisfaire une condition d'interférences destructives (à l'infini). C'est le principe des couches anti-reflets. Évidemment, la condition ne peut être satisfaite que pour "une" longueur d'onde et "une" incidence données, d'où les reflets colorés bleus-violets visibles par exemple lorsque l'on observe des verres de lunettes ainsi traités.



Lame en coin

Discussion générale. On considère un rayon lumineux d'intensité I émis par une source ponctuelle S tombant sur une lame d'indice n' dont les surfaces ne sont pas parallèles, placée dans un milieu d'indice n .



On calcule la différence de marche pour les deux rayons qui interfèrent en P . Le calcul exact (i.e. pour toute configuration de lame) peut être compliqué, mais se simplifie dans l'hypothèse d'une lame mince. On a alors :

$$\delta = [SBCDP] - [SAP] = n(SB + DP - SA - AP) + n'(BC + CD). \quad (4.37)$$

Si la lame est mince, B , A et D sont suffisamment proches pour qu'on puisse assimiler les surfaces d'onde aux plans tangents, et donc :

$$nSA \approx nSB + n'BN_1 \text{ où } AN_1 \perp BC, \text{ et } nAP \approx n'N_2D + nDP \text{ où } N_2D \perp CD. \quad (4.38)$$

Si l'angle entre les deux surfaces est suffisamment faible, alors $N_1C + CN_2 \approx N'_1C + CN'_2$, où N'_1 et N'_2 sont les projets orthogonaux de E sur BC et CD , et où E est la projection de C sur la face supérieure de la lame. Avec $N'_1C = CN'_2 = h \cos \theta'$, on a :

$$\delta = n'(BC + CD) - n'BN_1 - n'N_2D = n'(N_1C + CN_2) = 2n'h \cos \theta'. \quad (4.39)$$

Sous discuter d'éventuel déphasage à la réflexion, la condition d'interférences constructives est donc :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} 2n'h \cos \theta' = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.40)$$

En général, pour S et P quelconque, $n'h$ (i.e. l'épaisseur optique de la lame au point E) et θ' varient, et l'on ne peut pas dire grand chose. Par contre, si pour une raison ou une autre, on arrive à limiter le domaine de variation de θ' (par exemple en éclairant la lame avec un faisceau parallèle, ou en plaçant P très proche de la lame), la condition d'interférences constructive $4n \cos \theta' n'/\lambda_0 = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ correspond donc à obtenir des franges brillantes (ou sombres) là où l'épaisseur optique de la lame $n'h$ est constante. On parle alors de franges d'épaisseur. C'est ce que l'on observe avec des bulles de savon, de l'huile sur une flaque d'eau, des surfaces légèrement oxydées, une aile de papillon, ...

Remarque. Si la lame forme un coin d'angle α constant, alors, en introduisant la coordonnée x correspondant à la distance de C à l'arête du coin, on a $h = x \tan \alpha \approx x_0$ si $\alpha \ll 1$. La figure d'interférence correspond donc à des franges parallèles à l'arête de la lame. En éclairage parallèle (pour n'avoir qu'un seul θ' à considérer), l'interfrange s'écrit :

$$\frac{4\pi}{\lambda_0} \cos \theta' n' \alpha \Delta x = 2\pi, \quad \text{soit} \quad \Delta x = \frac{\lambda_0}{2n' \cos \theta' \alpha} \quad (\propto 1/\alpha). \quad (4.41)$$

Remarque. L'expérience des "anneaux de Newton" correspond à cette situation "en coin d'air" avec une géométrie axisymétrique.

Interféromètre de Michelson

Tous les interféromètres à division d'amplitude reproduisent l'une et/ou l'autre des configurations précédentes "lame d'air/coin d'air", avec des configurations particulières présentant certains avantages. Le prototype d'un tel interféromètre est l'interféromètre de Michelson (1881), mais il en existe d'autres, parmi lesquels on peut citer par exemple l'interféromètre de Mach-Zehnder (1891) ou celui de Twyman-Green (1916). L'idée est toujours de séparer un rayon incident en deux rayons auxiliaires à l'aide d'une surface semi-réfléchissante : la "séparatrice", de leur faire parcourir des chemins optiques différents, puis de les superposer à nouveau à l'aide de miroirs auxiliaires. Le point chef dans le raisonnement consiste encore et toujours à déterminer, en fonction de la position des miroirs, quels sont les chemins optiques parcourus par chacun des deux rayons pour savoir s'ils interfèrent de façon constructive ou non ; quant à la structure générale de la figure d'interférence, il suffit de reconnaître dans le dispositif une lame d'air ou un coin d'air.

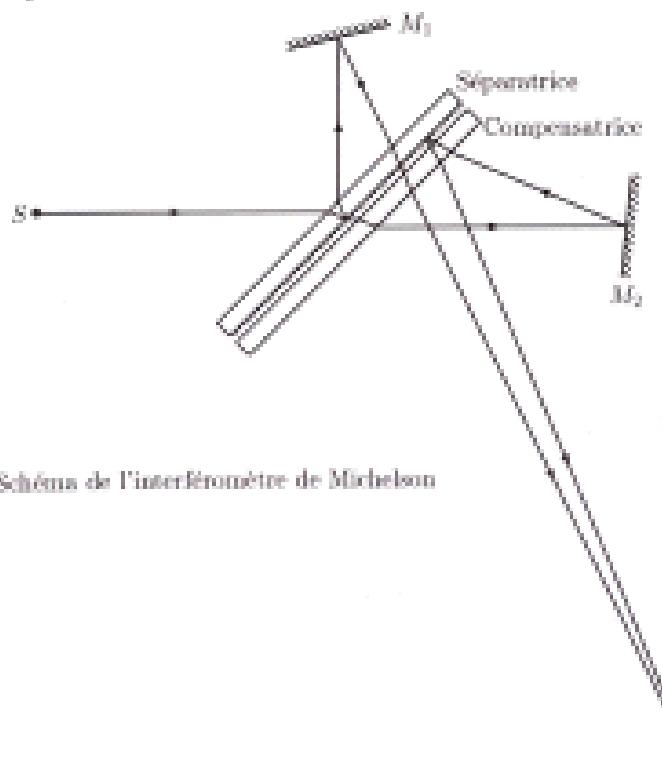
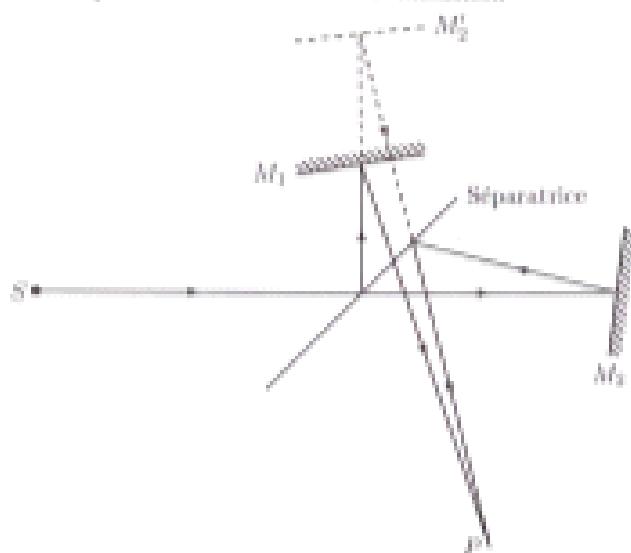


Schéma de l'interféromètre de Michelson

La séparation du faisceau incident en deux faisceaux auxiliaires se fait sur la face postérieure de la séparatrice (dont le traitement de surface assure une répartition 50% - 50% en énergie entre le rayon transmis et le rayon réfléchi). En l'absence de compensatrice, le faisceau réfléchi par M₁ traverse trois fois le milieu dispersif que constitue la lame de verre qu'est la séparatrice, alors que celui réfléchi par M₂ une seule et unique fois. Avec une source polychromatique, cela peut s'avérer gênant (à cause du caractère dispersif) pour équilibrer les bras de l'interféromètre. On introduit donc une lame de verre identique à la séparatrice, mais dont aucune des faces n'est traitée de façon semi-réfléchissante. Les deux rayons passent alors tous les deux quatre fois dans le milieu d'indice n avant de se recombiner.

Schéma simplifié de l'interféromètre de Michelson



M'_2 est l'image de M_2 par la séparatrice.

Construction des sources auxiliaires :

- faire l'image S'_1 de S par la sép.
- faire l'image S_1 de S'_1 par M_1
- faire l'image S'_2 de S par M_2
- faire l'image S_2 de S'_2 par la sép.

On reconnaît un coin d'air en général. Si $M_2 \perp M_1$, et donc $M'_2 \parallel M_1$, on reconnaît une lame d'air. Si M'_2 est confondu avec M_1 , on dit alors qu'on est au contact optique. Tout se passe comme si on avait un unique miroir, et l'éclairage est alors uniforme.

Remarque. Dans le cas de l'interféromètre de Michelson, l'indice de la "lame" n'est rien d'autre que l'indice du milieu dans lequel est plongé l'interféromètre, en général l'air. Les formules se simplifient donc (sans discuter d'éventuels déphasages supplémentaires) en :

- lame d'air : $\Delta\Phi = 2\pi/\lambda \times 2r \cos i = 2kr$ (car $r = i$)
- coin d'air : $\Delta\Phi = 2\pi/\lambda \times 2h \cos\theta' = 2kr$.

§III.3 Remarque sur les déphasages additionnels

On montre à partir des coefficients de Fresnel qu'apparaît un déphasage supplémentaire de π dans les cas suivants :

- réflexion sur un milieu transparent plus réfringent (par exemple dans le cas air \rightarrow verre) (qui correspond au signe "-" du rapport $A_1^r/A_0 = r_1 = -0.2$ dans l'exemple de la lame de verre plongée dans l'air) ;
- réflexion sur un conducteur parfait.

Un déphasage de π apparaît également lors du passage d'un rayon lumineux à un point de convergence, appelé phase de Gouy.

Il est nécessaire d'envisager ces déphasages pour justifier pourquoi, dans certaines situations, des franges sombres apparaissent là où l'on a prédit des franges brillantes et vice versa. C'est très souvent le cas pour les interféromètres à division d'amplitude, où de nombreuses réflexions sont mises en œuvre. Ainsi, même si la réalité est plus complexe que cela, en oubliant l'éventuel traitement métallique de la séparatrice de l'interféromètre de Michelson, on justifie le fait que, en coin d'air et en contact optique, la fringe centrale est sombre et non brillante car l'un des faisceaux subit une réflexion verre \rightarrow air alors que l'autre subit une réflexion air \rightarrow verre.

§IV Interféromètres à N ondes

On a discuté jusqu'à présent l'intensité résultant de la superposition de deux ondes lumineuses. La situation se généralise de façon immédiate au cas où l'on superpose N ondes (avec $N > 2$). On écrit pour cela :

$$s_{\text{tot}}(M) = \sum_i s_i(M), \quad (4.42)$$

et

$$I_{\text{tot}}(M) = \langle s_{\text{tot}}^2(M) \rangle_{T_0} = \left\langle \left(\sum_i s_i(M) \right)^2 \right\rangle_{T_0} = \sum_i \left(\langle s_i^2 \rangle_{T_0} + \sum_{j \neq i} \langle s_i s_j \rangle_{T_0} \right). \quad (4.43)$$

La discussion est similaire sur la nécessité de superposer des trains d'ondes cohérents pour que les termes d'interférence soient non nuls.

§IV.1 Interféromètres à division du front d'onde

La généralisation immédiate du dispositif des trous d'Young consiste à éclairer un écran opaque percé par N trous (avec $N > 2$), et à réaliser ainsi un interféromètre à division du front d'onde à N ondes. Évidemment, le calcul de l'intensité va dépendre de façon critique de la répartition de ces trous sur l'écran : présente-t-elle par exemple des propriétés d'invariance (par rotation ou translation) particulières, ou, à l'inverse, un caractère aléatoire. Sans plus de précision, il n'y a pas de conclusion générale. Un exemple de calcul est proposé en exercice pour le "réseau de Soret", pour lequel les trous ont été remplacés par des couronnes circulaires. Évidemment, tout comme pour les trous d'Young, on peut généraliser la situation des fentes d'Young, où les 2 fentes (éclairées par une même source) sont remplacées par une succession de fentes parallèles. Pour peu que la répartition des fentes corresponde à la reproduction périodique d'un même motif, un tel dispositif constitue un réseau de diffraction qui sera discuté en détail dans le chapitre suivant.

§IV.2 Interféromètres à division d'amplitude

Filtres interférentiels

Un traitement de surface peut modifier drastiquement les coefficients de transmission et de réflexion de Fresnel. Ainsi, pour une lame de verre argenteée des deux côtés, en incidence normale, on peut avoir $r_2 = -r_1 = 0.95$ et $t_1 t_2 = 0.01$. Avec le même schéma que précédemment :

$$A_1'/A_0 = r_1 = -0.95; \quad A_2'/A_0 = t_1 t_2 r_2 = 0.0095; \quad A_3'/A_0 = t_1 t_2 r_2^2 = 0.0086; \dots$$

$$A_1'/A_0 = r_1 t_2 = 0.01; \quad A_2'/A_0 = t_1 t_2 r_2^2 = 0.009; \quad A_3'/A_0 = t_1 t_2 r_2^3 = 0.0081; \dots$$

On est donc amené à considérer, en transmission, la superposition de N ondes d'amplitudes similaires, qui peuvent interférer. Seul le cas où M est à l'infini présente un intérêt.



Sans détailler l'influence potentielle de la longueur de cohérence (finie) de la source, l'amplitude de l'onde transmise correspond à la série géométrique suivante :

$$s_{\text{tot}}(M) = s_1'(M) + s_2'(M) + s_3'(M) + \dots = A_0 \left(t_1 t_2 + t_1 t_2 r_2^2 e^{i\phi} + t_1 t_2 r_2^4 e^{2i\phi} + \dots \right) \quad (4.44)$$

$$= A_0 t_1 t_2 \frac{1 - (r_2^2 e^{i\phi})^{N+1}}{1 - r_2^2 e^{i\phi}} \underset{N \rightarrow +\infty}{=} A_0 t_1 t_2 \frac{1}{1 - r_2^2 e^{i\phi}} \quad (\text{car } r_2^2 < 1), \quad (4.45)$$

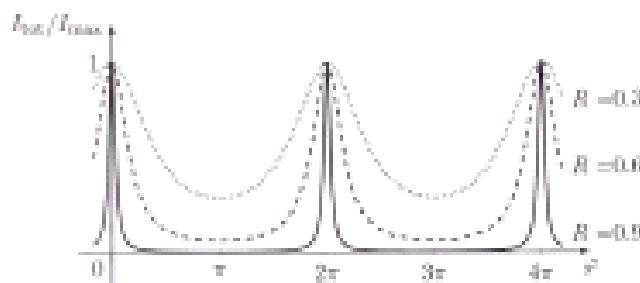
où ϕ correspond au déphasage associé à la différence de marche d'une lame à faces parallèles :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2nr \cos r. \quad (4.46)$$

En posant $R \equiv r_2^2$ et en exploitant la relation trigonométrique $\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$, on en déduit l'expression de l'intensité transmise (à l'infini) :

$$I_{\text{tot}}(M) = \langle I_{\text{tot}}^2(M) \rangle_{T_2} \propto \frac{1}{|1 - Re^{i\phi}|^2} = \frac{1}{(1 - R\cos\phi)^2 + R^2\sin^2\phi} \propto I_{\text{max}} \frac{1}{1 + \frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\phi/2)}, \quad (4.47)$$

appelée fonction d'Airy¹, représentée ci-dessous.



Il s'agit donc d'une fonction paire, périodique de période $\Delta\phi = 2\pi$, présentant des pics d'autant plus marqués que R est proche de 1. La (demi-) largeur à mi-hauteur d'un pic s'obtient en résolvant l'équation :

$$\frac{4R}{(1-R)^2} \sin^2(\phi/2) = 1, \quad (4.48)$$

soit, pour la largeur à mi-hauteur :

$$\delta\phi_{1/2} = 2 \times 2 \sin^{-1} \left(\frac{1-R}{2\sqrt{R}} \right) \underset{R \rightarrow 1}{\approx} 2 \frac{1-R}{\sqrt{R}}. \quad (4.49)$$

Pour une incidence donnée, et pourvu que le coefficient de réflexion R soit suffisamment élevé, un tel filtre ne transmet donc que les longueurs d'onde satisfaisant la condition d'interférences constructives $\phi = 2\pi/\lambda_0 \times 2ne \cos r = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Si r est suffisamment faible, on peut donc imaginer sélectionner en transmission une unique longueur d'onde dans tout le spectre optique (les autres étant totalement réfléchies) ; d'un point de vue pratique, un tel dispositif serait trop fragile à manipuler, et il est donc associé en général à d'autres filtres (coloris-vitre interférentiels). La dépendance en $\cos r$ de la longueur d'onde transmise met en évidence l'importance d'éclairer en incidence normale le filtre si l'on souhaite retrouver les spécifications du constructeur.

Illustrée avec une courbe de Melles Griot (part of IDEX Health & Science)

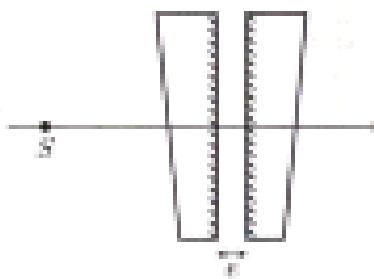
Interféromètre de Fabry-Pérot

C'est un dispositif inventé en 1890, reposant sur la superposition de N ondes créées dans une lame² d'air ($n \approx 1$) d'épaisseur e contrôlable.

¹ Il s'agit "bien évidemment" du même Airy. Sir George Biddell Airy, que celui de la tache d'Airy, ou encore des "fonctions d'Airy" qui apparaissent (entre autres) dans l'étude des arcs-en-ciel.

² Cette lame est généralement obtenue à l'aide de deux lames de verre traitées en surface, avec, pour les deux surfaces en regard, un traitement optimisant le coefficient de réflexion R , et, pour les deux surfaces extérieures, un traitement anti-reflet. Ces deux dernières surfaces font également un "petit angle" avec l'axe optique pour éviter d'avoir à prendre en compte les réflexions sur ces dioptrices dans le calcul d'interférences.





Les aspects théoriques sont identiques à ceux présentés ci-dessus pour les filtres interférentiels, et conduisent donc à une intensité transmise correspondant à l'équation Eq(4.47). C'est l'exploitation qui en diffère : le dispositif est en général éclairé par une source large (et donc des angles d'incidence variés), la symétrie de révolution imposant alors que la figure d'interférence dans un plan orthogonal à l'axe optique soit constituée d'anneaux. L'observation se fait à l'infini, en pratique dans le plan focal image d'une lentille, et on a donc l'équivalent des anneaux d'Haidinger (i.e. d'égale inclinaison) à N ondes. Le fait qu'on puisse avoir $N \gg 1$ en traitant raisonnablement les surfaces, i.e. en augmentant la finesse de la cavité Fabry-Pérot (cavité plans-parallèles) permet d'atteindre des résolutions extrêmement élevées (permettant par exemple de résoudre des raies Zeeman), et justifie le fait que ce dispositif est utilisé très généralement comme spectromètre de précision, avec une lumière incidente associée à quelques raies (étroites) et non pas un spectre large. En effet, à partir de l'expression de l'intensité transmise Eq(4.47), pour une longueur d'onde λ et pour une lentille de projection de focale f données, il est facile de déterminer les épaisseurs de la cavité pour lesquelles l'incidence normale satisfait la condition d'interférences constructives (et donc un "anneau" brillant de rayon nul sur l'axe optique) et les rayons des anneaux visibles hors axe :

- sur l'axe, on doit avoir $2\pi/\lambda \times 2c = 2p\pi$, $p \in \mathbb{N}$, soit $c = p\lambda/2$ (et donc $p \gg 1$ très généralement) ;
- pour le premier anneau brillant en dehors de l'axe, en effectuant le développement limité correspondant à $i \ll 1$: $2(p-1)\pi = \frac{2\pi}{\lambda} 2c(1 - i_1^2/2)$, soit $p\lambda^2/2 = 1$ et plus généralement $p\lambda^2/2 = q$ pour le $q^{ème}$ anneau brillant ; avec $p = 2c/\lambda$, le rayon du $q^{ème}$ anneau brillant s'écrit $R = f\sqrt{q\lambda/c}$.

Pour un champ d'observation donné (limité par exemple par le diaphragme qui constitue le support de la lentille), le nombre d'anneaux visibles est donc d'autant plus grand que c est élevé ; inversement, en diminuant l'épaisseur, on fait "rentrer les anneaux" (puisque il y en a de moins en moins de visibles), ce qui ne devrait surprendre personne ayant déjà réglé un Michelson en lame d'air, et qui n'est donc dans cette configuration qu'un (très très) mauvais Fabry-Pérot.

La généralisation de la formule donnant le rayon du $q^{ème}$ anneau brillant pour une épaisseur quelconque $c = (p + \varepsilon)\lambda/2$ est immédiate (et sans réel intérêt) :

$$R_q = f\sqrt{(q-1+\varepsilon)\frac{\lambda}{c}}. \quad (4.50)$$

En tant que spectromètre, la résolution spectrale de l'appareil, i.e. essentiellement la réponse à la question "Quel est le plus petit intervalle de longueurs d'onde que l'on peut séparer", est une caractéristique importante du dispositif.

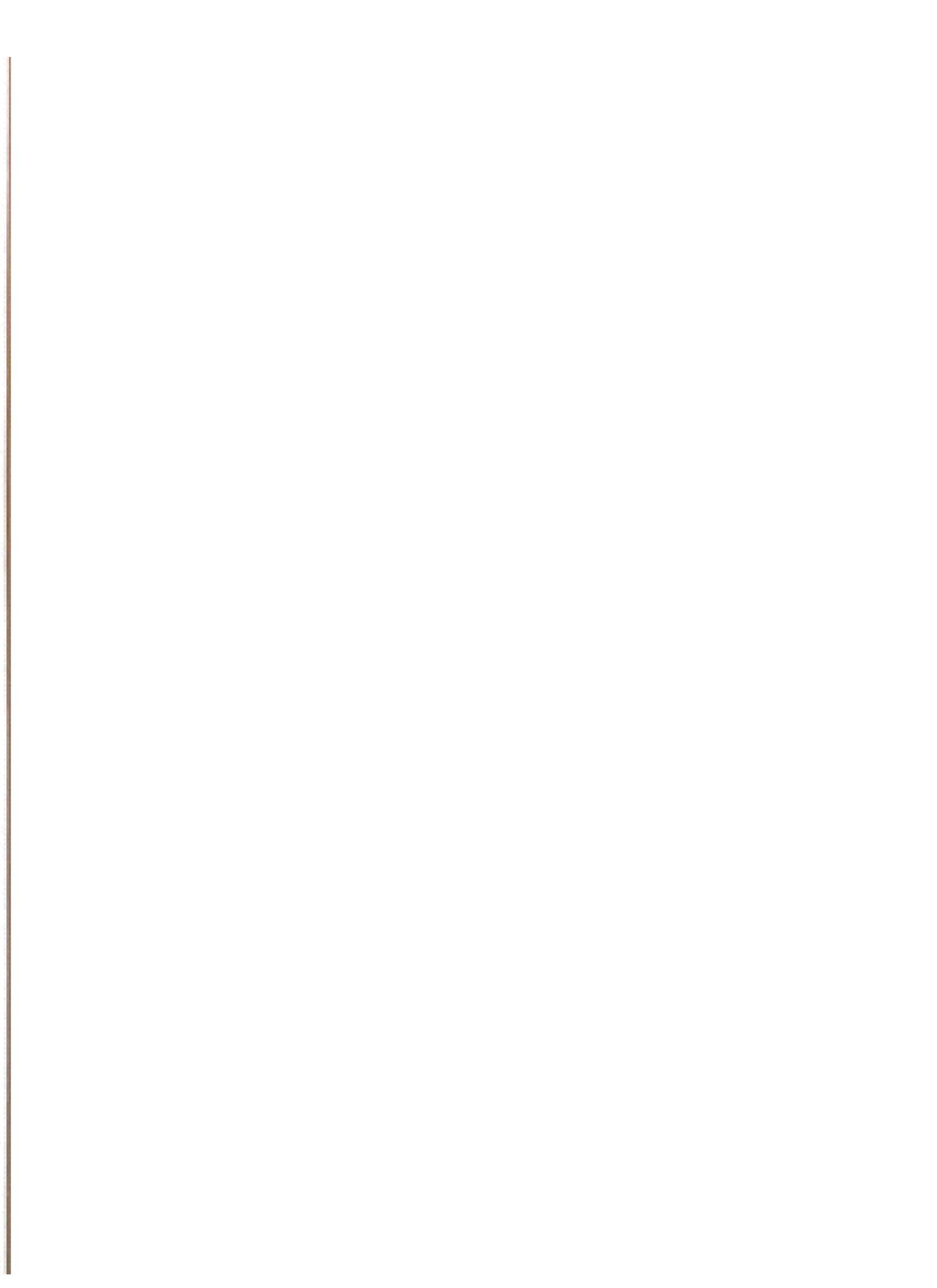
Définition. On appelle pouvoir de résolution d'un spectromètre le rapport suivant :

$$PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \quad (4.51)$$

où $\Delta\lambda$ correspond au plus petit écart de longueurs d'onde séparables au voisinage de λ .

Dans le cas du Fabry-Pérot, il s'obtient directement en considérant d'une part la relation entre la différence de phase et la longueur d'onde :

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2c \cos i, \quad \text{et donc } d\phi = \frac{-2\pi d\lambda}{\lambda^2} 2c \cos i, \quad (4.52)$$





et d'autre part la largeur à mi-hauteur d'un pic d'intensité, $\delta\phi_{1/2}$. De façon conventionnelle, on considère que l'on peut distinguer deux longueurs d'onde à partir du moment où les pics correspondants sont au moins séparés d'une largeur à mi-hauteur, soit, dans la limite où R est suffisamment proche de 1 :

$$\delta\phi_{1/2} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} = \frac{2\pi\Delta\lambda}{\lambda^2} 2c \cos i. \quad (4.53)$$

La condition d'interférences constructives impose de son côté de satisfaire $2\pi/\lambda \times 2c \cos i = 2k\pi$, ce qui établit finalement l'expression du pouvoir de résolution :

$$PR = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = k\mathcal{F}, \quad \text{avec } \mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}. \quad (4.54)$$

\mathcal{F} est la finesse de la cavité, d'autant plus élevée que R est proche de 1, et k correspond à l'ordre d'interférence.

Remarque. Cette expression est évidemment à comparer à celle du pouvoir de résolution des réseaux, où l'on retrouve les mêmes idées : le pouvoir de résolution croît avec :

- l'ordre d'interférence, qui contrôle l'aspect "dispersif" du dispositif. Dans le cas du Fabry-Perot, c'est l'épaisseur c qui joue ce rôle, en imposant à la longueur d'onde de devoir établir une onde stationnaire au sein de la cavité satisfaisant $c = k\lambda/2$. Plus k est élevé, et plus une petite "erreur" sur la valeur de λ considérée va se traduire par un écart significatif à la condition de stationnarité ;
- N , le nombre d'ondes que l'on superpose et qui doivent au fait satisfaire la condition d'interférences constructives. Dans le cas du Fabry-Perot, c'est la finesse de la cavité qui contrôle ce paramètre, en imposant à l'onde incidente de devoir faire (en moyenne) $N \sim \mathcal{F}$ allers-retours avant de ressortir ; dans le cas du réseau, il s'agit du nombre de traits illuminés (cf. chap. suivant).

On peut également remarquer que pour une cavité de longueur donnée, la condition d'interférences constructives sur l'axe $2\pi/\lambda \times 2c = 2p\pi$, $p \in \mathbb{N}$ peut être satisfaite pour différentes fréquences (associées à différentes valeurs de p). L'intervalle fréquentiel séparant deux telles fréquences de résonance vaut :

$$2c \times \frac{2\pi}{\lambda} (\nu + \Delta\nu - \nu) = 2\pi(p+1-1), \quad \text{soit } \Delta\nu = \frac{c}{2L}, \quad (4.55)$$

et est appelé "intervalle spectral libre" (ISL). Il s'agit évidemment du pendant de la problématique du recouvrement d'ordre que l'on discute en général dans le contexte des réseaux. Si la source est spectralement large (comparativement à l'ISL), la finesse des anneaux ne correspond plus à la fonction d'Airy mais est fortement dégradée.

§V Cohérence

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des sources ponctuelles (quasi-) monochromatiques. Ce paragraphe discute l'influence sur la figure d'interférence de la taille finie de la source réelle, et de son contenu spectral. **Remarque.** On gardera cependant toujours en mémoire que l'on ne discute pas ici la répartition d'intensité que l'on peut observer, mais uniquement les modifications (dues aux propriétés de la source) de la modulation de celle-ci par les effets d'interférences. Le dispositif interférentiel considéré sera donc supposé "idéal", en l'occurrence des trous d'Young de diamètre infiniment petit.

§V.1 Contraste / visibilité

Définition. Pour une figure d'interférence présentant un interfinge local Δx , on définit le contraste (ou visibilité) par :

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (4.56)$$

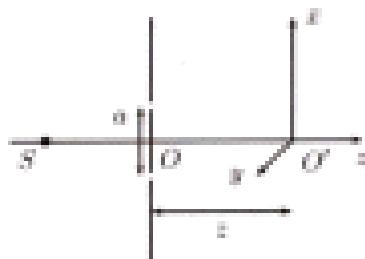
où I_{\max} et I_{\min} sont définis localement autour du point M , "autour" étant relatif à l'interfinge Δx .

§V.2 Cohérence temporelle

Sont regroupés sous ce terme tous les effets dus au caractère polychromatique d'une source.

Discussion qualitative

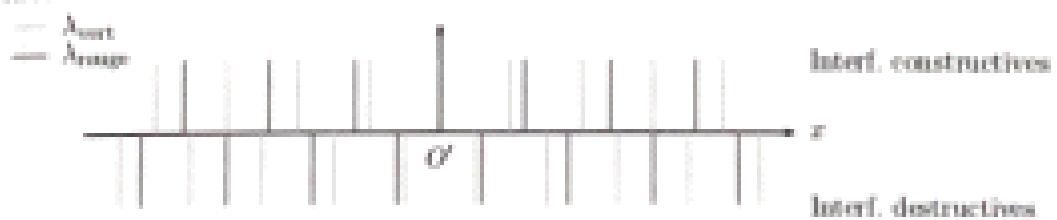
On considère le dispositif des trous d'Young, éclairé par une source ponctuelle émettant deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 , incohérentes. On suppose pour simplifier que la source est située sur l'axe.



Dans le cadre du développement limité exposé précédemment, on a vu que l'intensité dans le plan $O'xy$ est modulée par des franges rectilignes parallèles à $O'y$, et que l'interfinge vaut :

$$\Delta x = \frac{\lambda z}{a}, \quad (4.57)$$

qui dépend donc de λ . En O' , la condition d'interférence constructive est satisfaite quelque soit λ . On a donc, schématiquement, la figure d'interférence suivante, où les pics représentent les abscisses correspondant aux conditions d'interférences constructives et destructives :



Ainsi, là où la condition d'interférence est constructive pour $\lambda = \lambda_{\text{min}}$, elle peut être plus ou moins constructive voire destructive pour $\lambda = \lambda_{\text{max}}$; les franges apparaissent trisées, et ne sont plus séparées par des bandes noires.

Discussion quantitative

En $M \in \Pi_{O'xy}$ point d'observation, l'amplitude de l'onde lumineuse s'écrit :

$$s_{\text{tot}}(M) = s_1^{\lambda_1}(M) + s_2^{\lambda_1}(M) + s_1^{\lambda_2}(M) + s_2^{\lambda_2}(M). \quad (4.58)$$

$$s_{tot}(M) = s_1^{h_1}(M) + s_2^{h_1}(M) + s_1^{h_2}(M) + s_2^{h_2}(M). \quad (4.58)$$

Chapitre 4. Interférences et cohérence

85

et l'intensité totale s'écrit :

$$\begin{aligned} I_{tot}(M) = \langle s_{tot}^2(M) \rangle_{T_d} &= \left\langle (s_1^{h_1}(M))^2 + (s_2^{h_1}(M))^2 + (s_1^{h_2}(M))^2 + (s_2^{h_2}(M))^2 \right\rangle_{T_d} \\ &+ 2 \langle s_1^{h_1}(M)s_2^{h_1}(M) \rangle_{T_d} + 2 \langle s_1^{h_2}(M)s_2^{h_2}(M) \rangle_{T_d} \\ &+ 2 \langle s_1^{h_1}(M)s_1^{h_2}(M) \rangle_{T_d} + 2 \langle s_1^{h_2}(M)s_2^{h_1}(M) \rangle_{T_d} \\ &+ 2 \langle s_2^{h_1}(M)s_1^{h_2}(M) \rangle_{T_d} + 2 \langle s_2^{h_2}(M)s_2^{h_1}(M) \rangle_{T_d}. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Les quatre derniers termes sont nuls, non pas parce que $\nu_1 - \nu_2 \gg 1/T_d$ (aucune hypothèse n'a été faite en ce sens), mais à cause des phases décorrélées à l'émission. On a donc :

$$I_{tot} = I_1^{h_1} + I_2^{h_1} + 2\sqrt{I_1^{h_1}I_2^{h_1}} \langle \cos(\varphi_1^{h_1} - \varphi_2^{h_1}) \rangle_{T_d} + I_1^{h_2} + I_2^{h_2} + 2\sqrt{I_1^{h_2}I_2^{h_2}} \langle \cos(\varphi_1^{h_2} - \varphi_2^{h_2}) \rangle_{T_d}, \quad (4.60)$$

ce qui correspond à la superposition en intensité des figures d'interférence produites par chacune des longueurs d'onde.

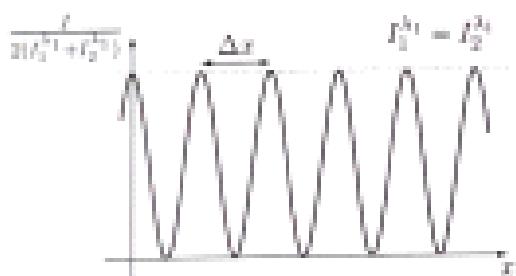
Pour discuter l'influence sur le contraste de la figure d'interférence, rapide retour au cas où une seule longueur d'onde est présente, par exemple λ_1 . Dans le cadre de validité du développement limité, et si l'on suppose qu'autour de O' les trains d'onde sont toujours cohérents par rapport à la moyenne $\langle \dots \rangle_{T_d}$, alors :

$$I_{tot} = I_1^{h_1} + I_2^{h_1} + 2\sqrt{I_1^{h_1}I_2^{h_1}} \cos(\varphi_1^{h_1} - \varphi_2^{h_1}) = I_1^{h_1} + I_2^{h_1} + 2\sqrt{I_1^{h_1}I_2^{h_1}} \cos \frac{2\pi ax}{\lambda_1 - z}, \quad (4.61)$$

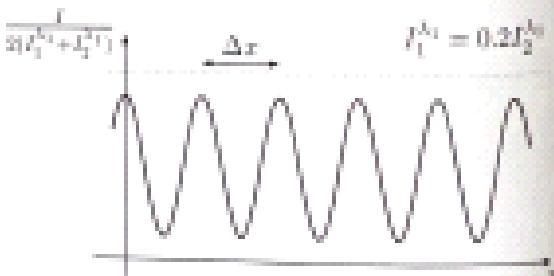
où $M(x, y, z)$ est le point d'observation. Le contraste vaut alors :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \frac{2\sqrt{I_1^{h_1}I_2^{h_1}}}{I_1^{h_1} + I_2^{h_1}}. \quad (4.62)$$

Si $I_1^{h_1} = I_2^{h_1}$, ce qu'on ne peut pas savoir sans avoir traité la diffraction par un trou, on a alors $C = 1$, ce qui correspond à :



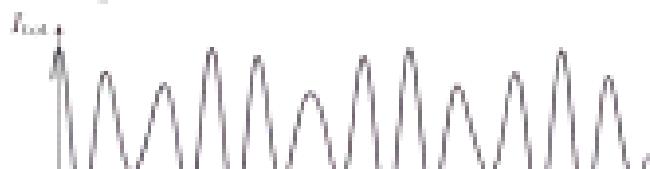
Dans le cas "général", où $I_1^{h_1} \neq I_2^{h_1}$, $C \neq 1$ (mais l'on notera que le "dééquilibre" des deux sources secondaires n'est pas "catastrophique") :



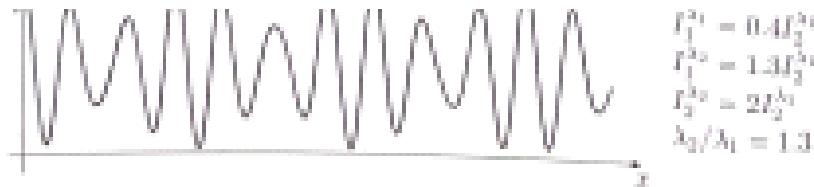
Avec deux longueurs d'onde, on a :

$$I_{tot} = I_1^{h_1} + I_2^{h_1} + 2\sqrt{I_1^{h_1}I_2^{h_1}} \cos \frac{2\pi ax}{\lambda_1 - z} + I_1^{h_2} + I_2^{h_2} + 2\sqrt{I_1^{h_2}I_2^{h_2}} \cos \frac{2\pi az}{\lambda_2 - z}, \quad (4.63)$$

ce qui correspond, en toute généralité, à :



$$\begin{aligned} I_1^{h_1} &= 0.4I_2^{h_1} \\ I_1^{h_2} &= 1.3I_2^{h_2} \\ I_2^{h_2} &= 0.2I_2^{h_1} \end{aligned}$$



Si $I_1^{21} = I_2^{21}$ (et donc $I_1^{22} = I_2^{22}$), et aussi $I_1^{21} = I_2^{21}$ (et donc $I_2^{21} = I_2^{22}$), on a :

$$I_{\text{tot}} = 2I \left(2 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda_1 z} + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda_2 z} \right) = 4I \left[1 + \cos \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} + \frac{2\pi}{\lambda_2} \right) \frac{ax}{z} \right) \cos \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} - \frac{2\pi}{\lambda_2} \right) \frac{ax}{z} \right) \right], \quad (4.64)$$

soit finalement :

$$I_{\text{tot}} = 4I \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi ax}{\lambda z} \right) \cos \left(\frac{\pi(\lambda_2 - \lambda_1)ax}{\lambda_1 \lambda_2 z} \right) \right], \quad \text{où } \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}. \quad (4.65)$$

La figure d'interférence correspond donc (en intensité) à ce que donnerait une figure d'interférence obtenue avec une source monochromatique associée à $\bar{\lambda}$, modulée par le facteur $\cos(\pi(\lambda_2 - \lambda_1)/(2\lambda_1\lambda_2)(ax/z))$. L'œil, qui distingue les couleurs, détectera, lui, des franges irisées. La figure d'interférence présentant un interfrange associé à $\bar{\lambda}$, le contraste vaut (sous les hypothèses d'équi-intensité) :

$$C = \left| \cos \left(\frac{\pi(\lambda_2 - \lambda_1)ax}{\lambda_1 \lambda_2 z} \right) \right|. \quad (4.66)$$

Remarque. Il est important de se souvenir à cette étape que l'on ne discute pas la répartition complète d'intensité dans le plan d'observation mais uniquement la modulation de celle-ci associée au contenu spectral de la source. Le préfacteur $4I$ qui apparaît dans l'expression Eq.(4.65) n'est donc pas constant *a priori*, mais on suppose qu'il varie de sensiblement que sur une distance caractéristique \gg interfrange.

L'extension de l'étude au cas du spectre continu (ce qui est toujours le cas en réalité) est directe. On considère pour cela des bandes infinitésimales de fréquence $d\nu$, chacune formant sa propre figure d'interférence, et on ajoute les intensités, chaque bande étant incohérente avec une autre bande. On obtient ainsi l'expression suivante :

$$I_{\text{tot}} = \int_0^{+\infty} 2I_\nu(\nu) \left(1 + \cos \frac{2\pi\nu d}{c} \right) d\nu, \quad \text{où } d = \frac{ax}{z} \text{ dans notre cas.} \quad (4.67)$$

Aller plus loin en toute généralité demande un peu d'effort (définition de $I_\nu(\nu)$, notion de signal analytique, ...) mais pour illustrer le lien intime entre le contraste de la figure d'interférence et le contenu spectral de la source (ce qui correspond au théorème de Wiener-Kintchine), les cas particuliers correspondant aux cas d'un profil de raie rectangulaire, gaussien, ou d'une raie double symétrique sont particulièrement instructifs.

Applications

On peut montrer que le contraste correspond au module de la transformée de Fourier de la "densité spectrale de puissance" $I_\nu(\nu)$: c'est le théorème de Wiener-Kintchine. L'étude de l'évolution du contraste permet donc de remonter au contenu spectral de la source, pourvu que celui-ci ne soit pas modifié à cause d'un autre facteur, par exemple l'extension spatiale de la source ! C'est ce qui est mis en œuvre dans l'interféromètre de Michelson réglé en lame d'air ; l'observation du contraste des aménus à l'infini permet alors d'obtenir des informations sur le contenu spectral de la source ; on parle de spectroscopie par transformée de Fourier. C'est ainsi que Michelson, en 1892, a pu séparer le doublet (14 pm) de "la raie" rouge à 656.3 nm de l'Hydrogène (structure fine de la raie Hα).

Conclusion

La figure d'interférence est une figure moyennée et échantillonnée, et c'est pourquoi la **visibilité de la figure d'interférence**

Conclusion

Pour une source polychromatique (même ponctuelle), et c'est toujours le cas, la visibilité de la figure d'interférence est modifiée par le contenu spectral de la source, qui tend à "brouiller la figure d'interférence". Cela peut être une difficulté (\rightarrow nécessité de mettre des filtres) expérimentalement, mais aussi une source d'informations (théorème de Wiener-Kintchine). Le contraste des franges est modulé par une enveloppe qui permet de déduire de façon heuristique la longueur de cohérence temporelle d'une source. On retiendra que plus l'étendue spectrale d'une source est grande, et plus la longueur de cohérence temporelle est faible, et si l'on tient à avoir une formule, où τ_c désigne la longueur de cohérence temporelle et $\Delta\nu$ la largeur spectrale de la source :

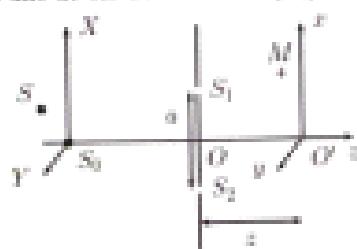
$$\Delta\nu\tau_c \approx 1. \quad (4.68)$$

§V.3 Cohérence spatiale

Sont regroupés sous ce terme tous les effets dus à l'extension spatiale finie de la source.

Discussion qualitative

On considère le dispositif des trous d'Young, éclairés par deux sources ponctuelles monochromatiques identiques, mais incohérentes l'une avec l'autre. L'une de ces deux sources (S_0) est située sur l'axe, l'autre pas forcément.



Chacune des deux sources forme sa figure d'interférence qui correspond, dans le cadre du DL développé précédemment, à un ensemble de franges rectilignes parallèles à $O'y$, et l'interfrange vaut $\Delta x = \lambda z/a$. L'intensité totale dans le plan d'observation est la somme des intensités correspondant à chacune des deux sources.

En O' , la condition d'interférence est constructive pour S_0 . Si la seconde source S est située elle aussi sur l'axe Oz , i.e. si les coordonnées de S sont $S(0, 0, Z_S)$, la condition d'interférence est également constructive en O' . De même si S a pour coordonnées $S(X, 0, Z_S)$ (et se trouve donc dans le plan OS_0Y bissecteur du segment S_1S_2), la condition d'interférence constructive en O' est également satisfaite car les chemins optiques $[SS_1]$ et $[SS_2]$ sont identiques. Par contre, si les coordonnées de S sont $S(X, 0, Z_S)$ (avec $X \neq 0$), les chemins optiques $[SS_1]$ et $[SS_2]$ sont différents ; un retard de phase est introduit entre S_1 et S_2 par le déplacement de la source parallèlement à S_1S_2 . Les chemins optiques $[S_1O']$ et $[S_2O']$ étant identiques, la condition d'interférence constructive n'est plus nécessairement satisfaite en O' . Elle peut même être parfaitement destructive. Si c'est le cas, alors la où la condition d'interférence est constructive pour S_0 , elle est destructive pour S , et là où elle est destructive pour S_0 , elle est constructive pour S (car l'interfrange est identique pour S_0 et S) ; la figure d'interférence est donc brouillée, et le contraste diminue.

Dans le cas où la distance entre le plan Π_{S_0XY} (qui contient les sources S_0 et S) et le plan des trous est identique à celle du plan des trous au plan d'observation $\Pi_{O''Z}$, la symétrie du dispositif permet de dire directement que l'anticoincidence des franges est obtenue dès lors que $S_0S\hat{X} = (k + 1/2)\Delta x$, et que la coïncidence l'est dès que $S_0S\hat{X} = k\Delta x$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $\Delta x = \lambda z/a$ désigne l'interfrange.

Discussion quantitative

Le calcul complet avec deux sources ponctuelles $S_0(0, 0, -d)$ et $S(X, Y, -d)$ est direct dans le cadre de validité du développement limité, i.e. avec $a/d \ll 1$, $X/d \ll 1$, $Y/d \ll 1$, $x/z \ll 1$, $y/z \ll 1$ (pour un point d'observation $M(x, y, z)$). On obtient la superposition de deux systèmes de franges, parallèles à $O'y$, qui s'écrivent (en ne tenant pas compte des effets de diffraction qui peuvent moduler l'intensité, et en supposant les deux sources de même intensité) :

$$I_{\text{tot}} = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{z} \right) \right) + 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ay}{z} + \frac{aX}{d} \right) \right) \right) \quad (4.69)$$

$$= 4I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{z} + \frac{aX}{d} \right) \right) \right) \cos \left(\frac{\pi a Y}{\lambda d} \right) \quad (4.70)$$

La figure d'interférence présente donc un interf fringe toujours égal à $\Delta x = \lambda d/a$, mais la visibilité est réduite (en général) par le facteur $\cos(\pi a X/\lambda d)$. Le contraste vaut :

$$C = \left| \cos\left(\frac{\pi a X}{\lambda d}\right) \right|. \quad (4.71)$$

Remarque. On retrouve le fait que $C = 0$ lorsque $X = (k + 1/2) \times \lambda d/a$, qui correspond à la situation discutée dans le paragraphe précédent avec $d = z$.

Remarque. À nouveau, il est important de se souvenir à cette étape que l'on ne discute pas la répartition complète d'intensité dans le plan d'observation mais uniquement la modulation de celle-ci associée l'extension spatiale de la source. Le préfacteur $4I_0$ qui apparaît dans l'expression Eq.(4.70) (tout comme dans l'expression Eq.(4.72)) n'est donc pas constant a priori, mais on suppose qu'il ne varie sensiblement que sur une distance caractéristique \gg interf fringe. Il est même facile de se convaincre que le diamètre fini des trous d'Young (ou la largeur finie des fentes d'Young) doit affecter, d'une manière ou d'une autre, non seulement le préfacteur $4I_0$, mais également la visibilité des franges [réf. 10] [réf. 11].

On peut généraliser ce calcul au cas plus réaliste où la source primaire n'est pas constituée de deux sources ponctuelles identiques, mais par une source "continue". Chaque élément de surface infinitésimal se comporte alors comme une source, tous les éléments étant deux à deux incohérents. C'est une hypothèse réaliste car, sauf cas très particuliers, chacun des éléments fait intervenir des atomes émetteurs totalement décorrélés de leurs voisins au-delà de quelques distances interatomiques (pour l'émission spontanée). Le calcul complet fait intervenir l'intensité surfacique (pas forcément constante), et ne présente pas d'intérêt dans le cadre de ce cours (mais cela peut être le cas, par exemple en astrophysique, pour tenir compte des effets d'assombrissement contre-hors par exemple). On considère donc pour simplifier la situation où la source primaire correspond à une fente source d'intensité surfacique constante. La dimension spatiale de la fente selon la direction $\vec{Y} \perp S_1 S_2$ ne joue pas de rôle, et l'on se place donc, pour simplifier, dans la situation où la fente, de largeur b , est parallèle à \vec{Y} . On a alors :

$$\begin{aligned} I_{\text{tot}} &= \iint_{\text{source}} ds \frac{2I_0}{S} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{z} + \delta(X, Y) \right) \right) \right) = \frac{2I_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} dX \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{ax}{z} + \frac{aX}{d} \right) \right) \right) \\ &= 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi ab^2}{\lambda d}\right) \right) \quad \text{où } \operatorname{sinc}(x) = \frac{\sin x}{x}. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Le contraste vaut donc :

$$C = \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi ab^2}{\lambda d}\right) \right|. \quad (4.73)$$

La première annulation de visibilité est obtenue pour $\pi ab/\lambda d = \pi$, i.e. pour $b = \lambda d/a$. En introduisant l'angle $\Delta\theta = b/d$ sous lequel est vue la fente depuis le dispositif interférentiel, on définit la longueur de cohérence spatiale de la source par :

$$L_c \equiv \frac{\lambda}{\Delta\theta}. \quad (4.74)$$

Ce n'est pas, à proprement parler, une propriété intrinsèque de la source (sauf via λ) mais plutôt de "l'éclairage" qui produit la source au niveau du dispositif interférentiel (via d qui intervient dans $\Delta\theta$). La condition de "bonne visibilité" du système de franges correspond à :

$$a \ll L_c. \quad (4.75)$$

Remarque. Le rapport de L_c dans le cas de la fente source délivrant des trous d'Young fait apparaître la

Remarque. Le calcul de I_{tot} dans le cas de la fente source éclairant des trous d'Young fait apparaître la fonction "sinus-cardinal", qui peut être négative. Ainsi, la frange centrale ($x = 0$), qui est brillante et encadrée par deux franges noires dans le cas d'une fente source infiniment fine, peut devenir plus sombre que ses

Chapitre 4. Interférences et cohérence

50

voisines pour certaines tailles de la fente source. C'est ce qui est illustré dans l'expérience dite "de l'inversion de contraste", le contraste global, lui, diminuant.

Remarque. Le fait qu'à dispositif interférentiel donné, la source primaire incohérente spatialement étendue viole en général la condition $a \ll L_c$ justifie le fait que l'on observe si peu d'effets d'interférence dans la vie courante, et que l'on doive apporter autant de soin dans la réalisation expérimentale d'une telle expérience (ex : pour le soleil, on a $\Delta\theta = 30'$, ce qui impose d'avoir $a \leq 0.06 \text{ mm}$ à $\lambda = 500 \text{ nm}$). Néanmoins, la largeur de cohérence spatiale n'étant pas une propriété intrinsèque de la source mais dépendant de la façon dont est éclairé le dispositif interférentiel, on peut chercher à augmenter par des combinaisons de lentilles (ou un simple condenseur) L_c , ce qui permet en contrepartie, de relâcher la contrainte portant sur la dimension spatiale (b) de la source proprement dite, et donc d'augmenter l'intensité totale arrivant sur le plan d'observation, ce qui facilite l'observation visuelle du phénomène.

Remarque. La largeur de cohérence spatiale justifie l'utilisation de fentes plutôt que de trous dans l'expérience des "trous d'Young", afin d'améliorer le confort d'observation tout en utilisant les résultats démontrés avec des trous (cf. discussion dans le chap. suivant).

Aller plus loin en toute généralité demande un peu d'effort, mais on a vu, au moins sur les deux exemples développés (deux sources ponctuelles, une fente source) qu'il existe un lien intime entre le contraste de la figure d'interférence et la distribution spatiale d'intensité de la source éclairant le dispositif interférentiel ; c'est ce qui correspond au théorème de van Cittert-Zernike.

Applications

On peut montrer que le contraste correspond au module de la transformée de Fourier de l'intensité surface $dI(P \text{ si source})/dS$. L'étude de l'évolution du contraste permet donc de renoncer à la distribution spatiale d'intensité d'une source (monochromatique). C'est ce qui a permis à Michelson et Pease de mesurer en 1920 le diamètre angulaire ($0.047''$) de Bételgeuse (une des étoiles les plus brillantes de la constellation d'Orion), puis d'obtenir des séparations angulaires d'étoiles doubles ou d'autres mesures de diamètres angulaires (jusqu'à $0.001''$ avec l'interféromètre de Labeyrie).

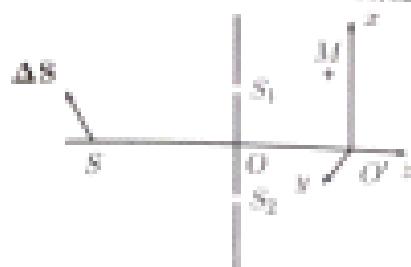
Surface de localisation

La modification du contraste d'une figure d'interférence par l'extension spatiale de la source peut dans certains cas présenter un intérêt (cf. paragraphe précédent), mais est également rédhibitoire si l'on veut accéder au contenu spectral de celle-ci par spectroscopie. La question qui se pose est donc de déterminer s'il existe une région de l'espace où placer le plan d'observation pour que le contraste soit le moins possible affecté par l'augmentation de la taille de la source. Si c'est le cas, on pourra alors travailler avec une source "raisonnablement étendue", condition nécessaire pour avoir une visibilité "acceptable" dans le plan d'observation.



appelée par l'augmentation de la taille de la source. Si c'est le cas, on pourra alors travailler avec une source "raisonnablement étendue", condition nécessaire pour avoir une visibilité "acceptable" dans le plan d'observation.

Pour développer le raisonnement, on reprend l'exemple des trous d'Young éclairés par une source ponctuelle et l'on détermine l'influence du déplacement de la source sur la différence de phase au point d'observation M .



On a :

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \frac{2\pi}{\lambda_0} (|(S + \Delta S)S_1| - |SS_1| - |(S + \Delta S)S_2| + |SS_2|) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left(\sqrt{|S_1 S + \Delta S|^2} - \sqrt{S_1 S^2} - (\sqrt{|S_2 S + \Delta S|^2} - \sqrt{S_2 S^2}) \right) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left(-\Delta S \cdot \frac{S S_1}{S S_1} + \Delta S \cdot \frac{S S_2}{S S_2} + O\left(\frac{\Delta S^2}{S S_1}, \frac{\Delta S^2}{S S_2}\right) \right) \approx \frac{2\pi}{\lambda} \Delta S (u_3 - u_1),\end{aligned}\quad (4.76)$$

où les u_i désignent les vecteurs unitaires associés à $S S_i$. Ainsi, au moins à l'ordre le plus bas, un déplacement de la source (et donc une éventuelle extension spatiale) perpendiculaire à $u_3 - u_1$ n'affecte pas la figure d'interférence, car il n'introduit pas de déphasage supplémentaire. En revanche, une extension spatiale de la source parallèle à $u_3 - u_1$ se traduit par un déphasage supplémentaire d'une façon linéaire, ce qui peut rapidement déteriorer la visibilité de la figure d'interférence.

Remarque. On retrouve les résultats de la discussion qualitative précédente : comme $u_3 - u_1$ est parallèle à $S_1 S_2$, on peut donc déplacer / étendre la source perpendiculairement à $S_1 S_2$ sans modifier (au moins à l'ordre le plus bas du DL) la (visibilité de la) figure d'interférence.

C'est à cette endroit qu'apparaît la justification de distinguer les deux types d'interféromètres, à division du front d'onde ou à division d'amplitude. Pour ces derniers, et pour ces derniers seulement, u_1 et u_2 sont colinéaires ! Par conséquent, à l'ordre le plus bas du DL, $\Delta\Phi \propto \Delta S (u_3 - u_1) = 0 \quad \forall \Delta S$. On peut donc s'autoriser, pour ces interféromètres, l'emploi de sources étendues (au moins à l'ordre linéaire). La surface de localisation (qui n'est donc un concept pertinent que pour les interféromètres à division d'amplitude) correspond à la région du champ d'interférence pour laquelle la visibilité de la figure d'interférence est "le moins" affectée par l'extension spatiale finie de la source. Sa détermination correspond à l'étude de la contribution des termes suivants du DL, et doit se faire dispositif interférentiel par dispositif interférentiel. Le calcul est pénible, et l'on retiendra (avec une dénomination de type Michelson, mais c'est général) :

- en configuration "coin d'air" : les franges sont localisées sur une surface à proximité du coin d'air ;
- en configuration "lame d'air" : les franges sont localisées à l'infini.

On peut même démontrer que pour la configuration "lame d'air", tous les termes du DL s'annulent sur la surface de localisation, et l'on peut donc utiliser une source aussi étendue que l'on veut (mais ce n'est pas le



On peut même démontrer que pour la configuration "lame d'air", tous les termes du DL s'annulent sur la surface de localisation, et l'on peut donc utiliser une source aussi étendue que l'on veut (mais ce n'est pas le cas en "coin d'air"). Seule la cohérence temporelle module alors la visibilité des maxima. Avec une source ponctuelle, et ce quelque soit le dispositif interférentiel utilisé, la figure d'interférence est visible dans tout le domaine de l'espace où se recouvrent les ondes lumineuses émises par les sources secondaires, i.e. le champ d'interférence. On dit alors que la figure d'interférence est délocalisée.

Remarque. On peut avoir en général une très bonne "intuition" de la position de la surface de localisation en se contentant, de manière graphique, du premier ordre du DL : elle se situe là où s'intersectent les rayons lumineux émergant de l'interféromètre (à division d'amplitude) issus d'un même rayon incident. En configuration "lame d'air", pour chaque rayon incident, les 2 rayons lumineux émergents sont parallèles et la surface de location est située à l'infini. En configuration "coin d'air", pour chaque rayon incident, les 2 rayons lumineux émergents s'intersectent au voisinage du coin d'air (mais ni sur l'un ni sur l'autre des miroirs). La trace de la surface de localisation dans le plan de normale parallèle à l'arête du coin d'air est un arc de cercle, contrairement à ce que laisse entendre le raccourci doublement incorrect "dans le plan des miroirs".

Conclusion

On retiendra de cette discussion le fait que l'extension spatiale finie d'une source éclairant un dispositif interférentiel affecte la visibilité de la figure d'interférence, et cela d'autant plus que l'on se situe loin de l'éventuelle surface de localisation. Cela peut présenter des avantages comme des inconvénients. D'un point

Chapitre 4. Interférences et cohérence

de vue expérimental, pour lequel on recherche le maximum de confort visuel, cela à des implications très importantes quel que soit le dispositif interférentiel utilisé : s'il est à division du front d'onde (pour lequel il n'y a pas de surface de localisation), on agrandira la source "dans la bonne direction" ($\Delta S \perp v_2$) – on cherchera à augmenter la largeur de cohérence spatiale à l'aide de lentilles et/ou de condenseur ; s'il est à division d'amplitude, on tâchera d'observer la figure d'interférence au niveau de la surface de localisation (pourra aussi se souvenir de la définition de la largeur de cohérence spatiale : $L_c = \lambda/\Delta\theta$).

Références

- [ReGut65] A. Theodore Forrester, Richard A. Gudmundsen, and Philip O. Johnson. "Photoelectric Measurement of Incoherent Light". In: *Phys. Rev.* 99 (6 Sept. 1965), pp. 1691–1700.
- [MarPol84] A. S. Marathay and D. B. Pollock. "Young's interference fringes with finite-sized source apertures". In: *J. Opt. Soc. Am. A* 1.10 (Oct. 1984), pp. 1057–1059.
- [ThiSud84] B. J. Thompson and R. Sudol. "Finite-aperture effects in the measurement of the degree of coherence". In: *J. Opt. Soc. Am. A* 1.6 (June 1984), pp. 608–604.



atiques
esquels
 w_1), et
il est à
on. On

Mixing

ampling

gree of

CHAPITRE Cinq

Diffraction et formation des images

La diffraction, dont la racine latine *diffringere* signifie “brisier en mèches morceaux”, correspond aux phénomènes où la lumière (et plus généralement une onde) est éparpillée du fait de la limitation matérielle du milieu dans lequel elle se propage. Elle ne doit en aucun cas être confondue avec le phénomène de dispersion, associé à la

La diffraction, dont la racine latine *diffringere* signifie "brisier en mèches-morceaux", correspond aux phénomènes où la lumière (et plus généralement une onde) est épargnée du fait de la limitation matérielle du milieu dans lequel elle se propage. Elle ne doit en aucun cas être confondue avec le phénomène de dispersion, associé à la dépendance de l'indice vis-à-vis de la longueur d'onde. Les premières observations de ce phénomène en optique sont portées au crédit de Léonard de Vinci (XV^e siècle) [il aurait même fait figurer dans certains tableaux ce type de phénomène], mais c'est à Grimaldi, dans son œuvre posthume "Physico mathesis de lumine, coloribus et iride, aliisque aeris libri duo" (1665), qu'il incombe d'en avoir donné une description précise. L'explication théorique n'émergera que lentement, probablement à cause d'une part de la réticence à accepter une description ondulatoire de la lumière par la figure tutélaire qu'est Newton, et d'autre part de la nécessité d'avoir intégré le concept d'interférence.

§1 Principe de Huygens-Fresnel

§1.1 Contribution de Huygens

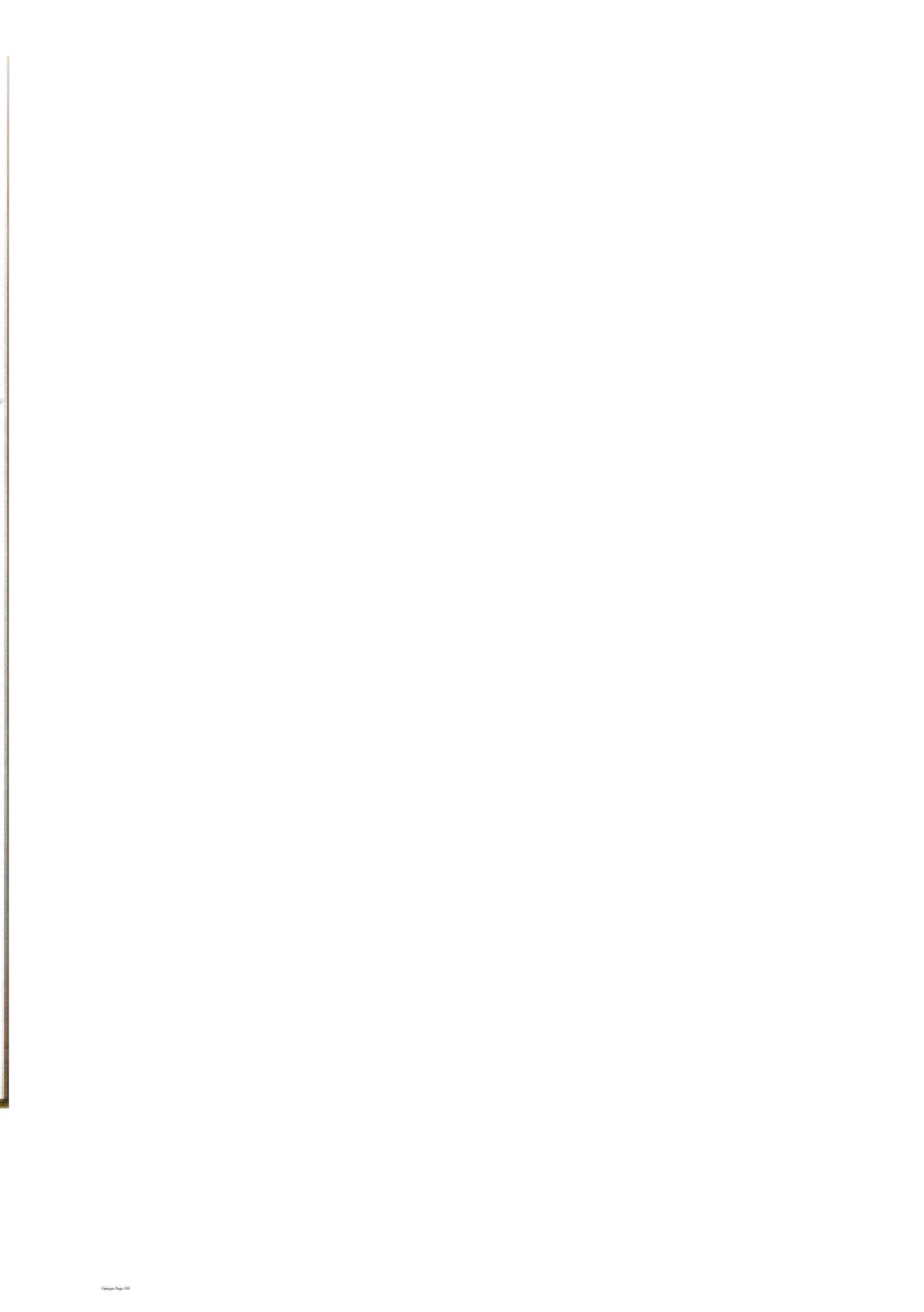
Dans son ouvrage de 1678, publié en 1690, "Traité de la lumière" (sous-titre : *Où sont expliquées les causes de ce qui lui arrive dans la réflexion et dans la réfraction, et particulièrement dans l'étrange réfraction du cristal d'IJslande*"), Huygens considère qu'une source lumineuse produit une perturbation se propagant de proche en proche à vitesse finie (qui dépend du milieu). À un instant t , cette perturbation a atteint tous les points d'une certaine surface Σ_t , appelée "front d'onde". Huygens postule alors que tous les points du front d'onde se comportent comme des sources secondaires à l'origine de perturbations à symétrie sphérique : le front d'onde à un instant $t' > t$ correspond à l'enveloppe de toutes ces perturbations ; à tout instant, les rayons lumineux sont orthogonaux au front d'onde.

Remarque. On trouve souvent, dans l'expression de la contribution de Huygens, des termes comme "ondes", "ondelettes", ... Nous n'y faisons exception qu'à la marge vue l'utilisation de l'expression "front d'onde". Il faut cependant garder à l'esprit que pour Huygens, une onde lumineuse ressemble plus à un "pulse" très localisé (une "onde de choc") qu'à une onde telle que nous la définissons désormais, où il est question d'amplitude et de phase. C'est en fait une description très géométrique de la propagation de la lumière, où l'on s'attache exclusivement à trouver l'enveloppe des perturbations émises par les sources secondaires. Elle suffit cependant pour retrouver les lois de Snell-Descartes, et même pour traiter la propagation de la lumière dans les milieux anisotropes tels que le spath d'Islande.

§1.2 Contribution de Fresnel

En 1815, Fresnel, opposé à la conception (newtonienne) corpusculaire de la lumière, a l'idée d'appliquer le "principe des interférences" développé par les travaux de Young (dont il n'a, semble-t-il, pas connaissance) aux "ondelettes de Huygens". Il corrige son manuscrit en 1816, le soumet à l'Académie des Sciences, et gagne le Grand Prix¹ de l'Académie des Sciences en 1819. La contribution de Fresnel consiste donc à dire que

¹Le Grand Prix des Sciences mathématiques, pour lequel seules deux contributions seraient déposées cette année-là, avait pour sujet : "I^e Déterminer par des expériences précises tous les effets de la diffraction des rayons lumineux directs et réfléchis, lorsqu'ils passent séparément, ou simultanément près des extrémités d'un ou de plusieurs corps, d'une étendue soit finie, soit infinie,

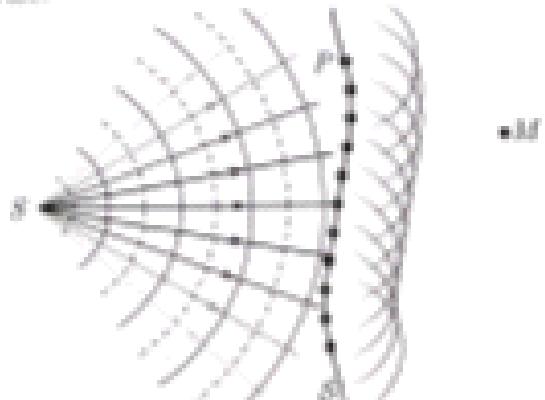


la lumière se propage comme une onde, que chaque point du front d'onde se comporte comme une source secondaire émettant une onde sphérique, et que l'amplitude (et la phase) de la perturbation lumineuse en un point M de l'espace est donnée par la somme des perturbations dues à toutes les sources secondaires.

Remarque. L'apport de Fresnel par rapport à Huygenne a donc été d'envisager la perturbation lumineuse comme une "onde" au sens moderne du terme, i.e. une vibration périodique avec une phase et une amplitude, qui permet d'envisager des phénomènes de type interférences.

§1.3 Énoncé

Soit une surface S (pas forcément plane) ouverte séparant l'espace \mathbb{R}^3 en deux régions, l'une où se trouve une source lumineuse, et une autre où se trouve un point M au niveau duquel on cherche à déterminer l'amplitude (et la phase) de l'onde lumineuse.



Le principe de Huygens-Fresnel dit que l'amplitude (et la phase) de l'onde lumineuse est donnée par :

$$A(M) = \iint_S A(P) K(P, M) \frac{e^{i k r}}{r} dS, \quad (1.1)$$

où $r = \|PM\|$, $k = 2\pi/\lambda$, et $K(P, M)$ est le facteur d'obliquité. $K(P, M)$ est homogène à l'inverse d'une longueur. Il dépend de l'angle θ_1 entre la normale n à S en point P et la normale au front d'onde incident au point P , ainsi que de l'angle θ entre n et PM .

Les considérations heuristiques qui ont amené Fresnel à proposer cette formule ne lui permettaient pas de déterminer la forme théorique de $K(P, M)$. Mais l'analyse de certaines expériences l'ont amené à poser :

$$K(P, M) = -\frac{i}{\lambda} Q(\theta_1, \theta), \quad (1.2)$$

avec $Q(0, 0) = 1$ et $Q(0, \pi/2) = 0$.

Le principe de Huygens-Fresnel s'écrit donc finalement :

$$A(M) = -\frac{i}{\lambda} \iint_S A(P) Q(\theta_1, \theta) \frac{e^{i k r}}{r} dS. \quad (1.3)$$

L'interprétation de cette formule est immédiate : l'amplitude et la phase de l'onde en aval de la surface S correspond à la superposition des ondes sphériques² provenant de chaque élément infinitésimal dS , chacun

en ayant regard aux intervalles de ces corps, ainsi qu'à la distance du foyer lumineux d'où les rayons émanent ; 2° Conclure de ces expériences, par les inductions mathématiques, les mouvements des rayons dans leur passage près des corps". Poisson, membre du jury, est convaincu que la théorie de Fresnel est fausse ; il développe ses calculs pour montrer que d'après Fresnel, un point lumineux est seul apparaître en centre de l'ellipse géométrique d'un disque opaque, ce qui lui semble absurde. Arrive l'expérience, observée effectivement le "point de Poisson", et tous les trois passent à la positivité... .

²Dans le but d'alléger les notations, la dépendance temporelle (sans laquelle l'appellation "onde" est à l'évidence doublante) n'est pas explicitée dans les expressions présentées (sauf exception) dans ce chapitre. Bien évidemment, elle est présente, et se traduit de

rayonnant avec une amplitude proportionnelle à celle de l'onde incidente $A(P)$ au point P considéré (au facteur géométrique $Q(\theta_i, \theta)$ près).

§1.4 Justification du principe de Huygens-Fresnel

Le principe de Huygens-Fresnel peut être justifié dans le cadre de l'approximation du modèle scalaire de la lumière, qui satisfait alors l'équation de Helmholtz $\Delta A + k^2 A = 0$. Sous certaines hypothèses, dites de Kirchhoff, dans la limite $r \gg \lambda$, et avec une discussion sur les fonctions de Green à considérer en fonction des conditions limites à l'infini choisies, on retrouve l'expression précédente avec :

$$Q(\theta_i, \theta) = (\cos \theta_i + \cos \theta)/2 \quad \text{Fresnel-Kirchhoff (dern.: Kirchhoff 1882),} \quad (5.4)$$

$$Q(\theta_i, \theta) = \cos \theta \quad \text{Rayleigh-Sommerfeld I,} \quad (5.5)$$

$$Q(\theta_i, \theta) = \cos \theta_i \quad \text{Rayleigh-Sommerfeld II.} \quad (5.6)$$

aucune de ces expressions n'est meilleure que les autres, toutes les trois sont acceptables, la plus grosse source d'erreur résidant dans le modèle scalaire adopté. En outre, dans la majorité des montages expérimentaux, les angles θ_i et θ sont en général petits, et les trois formules coïncident alors : $Q(\theta_i, \theta) \approx 1$. On notera que l'hypothèse de Fresnel $Q(0, 0) = 1$ est toujours satisfaite, mais que $Q(0, \pi/2) = 0$ n'est valable que si l'on considère la formule de Rayleigh-Sommerfeld I.

Aller au-delà revient à résoudre les équations de Maxwell en conservant les conditions limites à considérer. La complexité est telle que seules des situations très simples peuvent être résolues analytiquement. Le cas le plus couru est un demi-plan constitué par un conducteur parfait éclairé par une onde plane, pour lequel Sommerfeld a donné la solution en 1896. La solution "renommée fortement" à ce que donne la théorie de Fresnel¹, même si le problème n'est pas strictement identique (dans le cas de Sommerfeld, l'écran est composé d'un conducteur parfait, dans le cas de Fresnel, l'écran est opaque).

§1.5 Limite de l'optique géométrique

Supposons pour simplifier que la surface \mathcal{S} à considérer soit un plan opaque percé d'une ouverture transparente Ω , qu'une source ponctuelle éclaire ce diaphragme, et que l'on veuille déterminer l'amplitude de l'onde lumineuse en un point M tel que la droite SM intersecte \mathcal{S} en un point P_{geo} situé dans la zone transparente du diaphragme. Le principe de Huygens-Fresnel s'écrit alors :

$$A(M) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\mathcal{S}} A(P) Q(\theta_i, \theta) \frac{e^{i k r}}{r} dS \quad \text{avec } r = |PM| \quad (5.7)$$

$$= -\frac{i}{\lambda} \iint_{\Omega} A(P) Q(\theta_i, \theta) \frac{e^{i k r}}{r} dS. \quad (5.8)$$

Supposons, sans justification à ce niveau du raisonnement, que sur la surface Ω considérée, les variations de $A(P)$ et de $Q(\theta_i, \theta)/r$ soient négligeables par rapport à celles de $e^{i k r}$. Alors :

$$A(M) \approx -\frac{i}{\lambda} A(P_{\text{geo}}) \frac{Q(P_{\text{geo}})}{|P_{\text{geo}} M|} \iint_{\Omega} e^{i k r} dS \quad (5.9)$$

$$\approx -\frac{i}{\lambda} A(P_{\text{geo}}) \frac{Q(P_{\text{geo}})}{|P_{\text{geo}} M|} \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} (PM - P_{\text{geo}} M)\right) \iint_{\Omega} \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} (PM - P_{\text{geo}} M)\right) dS. \quad (5.10)$$

Lorsque $P \in \Omega$ s'éloigne progressivement de P_{geo} , la variation de chemin optique $|PM| - |P_{\text{geo}} M|$ est initialement faible car le chemin optique est stationnaire pour le rayon lumineux correspondant à l'optique géométrique ;

remarque triviale (car on peut la "sortir" de l'intégrale), qui en suit pour une onde monochromatique (avec une dépendance en $e^{i k z}$) et dans le cas polychromatique avec l'introduction de la valeur moyenne $\langle \dots \rangle_{\Omega}$ dans le calcul de l'intensité, la discussion étant alors ramenée à celle de la superposition en intensité des figures de diffraction obtenues pour chacune des différentes longueurs d'onde présentes dans la source.

¹Le lecteur avancé notera qu'il s'agit dans ce cas-là de diffraction de Fresnel et non de Fresnelien.

toutes les valeurs de l'intégrande coïncident, et donnent une forte contribution à l'intégrale (ce qui correspond à des interférences constructives). Par contre, dès que l'on s'éloigne trop de P_{geo} , on ne bénéficie plus de la stationnarité du chemin optique, donc la phase $\varphi = 2\pi/\lambda_0([PM] - [P_{\text{geo}}M])$ varie rapidement, et les contributions à l'intégrale se compensent (interférences destructives). Il existe donc un lien intime entre optique géométrique (stationnarité) et diffraction (interférences) qu'on ne peut pas rompre si l'on veut rendre compte de la "trajectoire de la lumière".

Remarque. C'est ce même type de considérations qui a amené Feynman à reformuler la mécanique quantique en terme "d'intégrales de chemin".

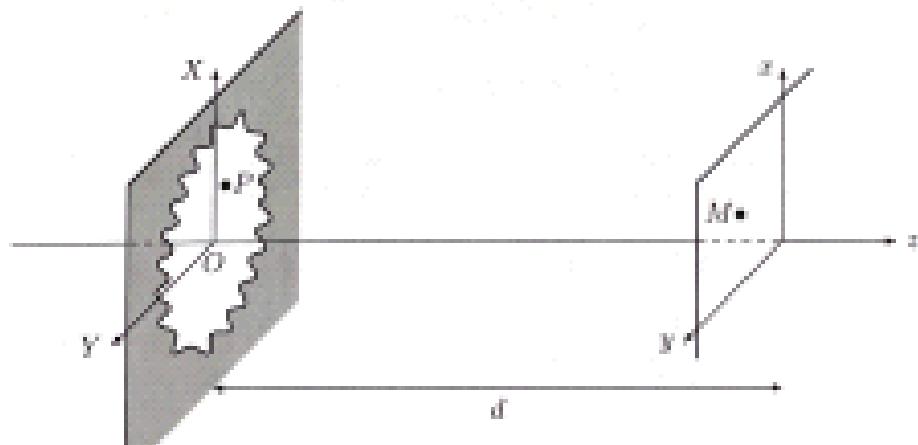
§I.6 Remarque théorique

Le principe de Huygues-Fresnel consiste, comme on l'a vu précédemment, à donner une solution intégrale au problème de la propagation d'une onde scalaire correspondant à l'équation de Helmholtz. Une autre approche envisageable est celle consistant à rechercher les modes propres de cette équation, associés aux conditions limites correspondant au problème envisagé, puis à s'appuyer sur la linéarité de l'équation. Dans cette approche apparaît dans toute son évidence le rôle joué par les conditions limites. Cela la rend de fait peu pratique (il faut refaire tout le travail dès qu'en change les conditions limites), sauf dans les cas où les conditions limites se réduisent à la nullité d'un champ sur une surface simplement connexe ("sans trou"). On peut trouver alors, par exemple, les modes gaussiens d'une cavité (dans l'approximation paraxiale) qui sont ceux associés à la structure d'une onde lumineuse produite par un laser.

§II Diffraction de Fraunhofer

Dans tout ce paragraphe, et dans la suite de ce chapitre, on ne considère plus que des diaphragmes plans.

§II.1 De Fresnel à Fraunhofer





L'amplitude (et la phase) de l'onde lumineuse au point M s'écrit :

$$A(M) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\Omega^2} A(P) Q(\theta_1, \theta_2) \frac{e^{i k P M}}{P M} dS. \quad (5.11)$$

Sans préjuger de la forme du facteur d'obliquité, on fait quelques calculs :

$$PM = \sqrt{(PO + OM)^2} = \sqrt{PO^2 + OM^2 + 2PO \cdot OM} = OM \sqrt{1 + 2 \frac{PO \cdot OM}{OM^2} + \frac{PO^2}{OM^2}}, \quad (5.12)$$

$$\cos \theta = \frac{d}{PM} = \frac{d}{OM} \left(1 + 2 \frac{PO \cdot OM}{OM^2} + \frac{PO^2}{OM^2} \right)^{-1/2}, \quad (5.13)$$

$$\frac{\cos \theta}{PM} = \frac{d}{OM^2} \left(1 + 2 \frac{PO \cdot OM}{OM^2} + \frac{PO^2}{OM^2} \right)^{-1}, \quad (5.14)$$

puis on effectue les développements limités naturels :

$$\frac{\cos \theta}{PM} = \frac{d}{OM^2} \left(1 - 2 \frac{PO \cdot OM}{OM^2} - \frac{PO^2}{OM^2} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{PO \cdot OM}{OM^2} \right)^2, \left(\frac{PO^2}{OM^2} \right)^2 \right) \right), \quad (5.15)$$

$$\frac{PM}{\lambda} = \frac{OM}{\lambda} \left(1 + \frac{PO \cdot OM}{OM^2} + \frac{1}{2} \frac{PO^2}{OM^2} + \mathcal{O} \left(\left(\frac{PO \cdot OM}{OM^2} \right)^2, \left(\frac{PO^2}{OM^2} \right)^2 \right) \right), \quad (5.16)$$

$$\exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} PM \right) = \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} OM \right) \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{PO \cdot OM}{OM} + \frac{PO \cdot PO}{OM} + \mathcal{O}(...) \right) \right). \quad (5.17)$$

Dans la limite où $\|OP\| \ll \|OM\|$, on a :

$$\frac{\cos \theta}{PM} = \frac{d}{OM^2} \left(1 + \mathcal{O} \left(\frac{\|PO\|}{\|OM\|} \right) \right), \quad (5.18)$$

$$\exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} PM \right) = \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} OM \right) \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} PO \cdot \left(\frac{OM}{OM} + \mathcal{O} \left(\frac{PO}{OM} \right) \right) \right). \quad (5.19)$$

L'approximation de Fraunhofer (1823) consiste à truncuer le développement limité à l'ordre le plus bas. On a alors :

$$A(M) = -\frac{i}{\lambda} \iint_{\Omega^2} A(P) Q(\theta_1, \theta_2) \frac{e^{i k P M}}{P M} dS \quad (5.20)$$

$$= -\frac{i}{\lambda} \iint_{\Omega^2} A(P) \underbrace{\left(\frac{\cos \theta_1}{2OM} + \frac{d}{2OM^2} \right)}_{\text{facteur d'obliquité choisi}} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} PO \cdot OM} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{PO \cdot PO}{OM}} dS. \quad (5.21)$$

Remarque. Un choix différent pour la forme du facteur d'obliquité conduit à $\cos \theta_1 / OM$ ou à d / OM^2 , mais cela ne change rien à la suite du raisonnement.



cela ne change rien à la suite du raisonnement.

En supposant que $\cos\theta_i/2OM$ peut lui aussi être assimilé à $\cos\theta_i^0/2OM$ indépendant du point $P \in \Omega$ considéré (cela dépend a priori de la position de la source par rapport à Ω), le facteur d'obliquité (quelle que soit sa forme), ainsi que le facteur de phase $\exp(i2\pi OM/\lambda)$ peuvent être "sortis" de l'intégrale car ils ne dépendent plus de P . On arrive alors à :

$$A(M) \approx -\frac{i}{\lambda} K(S, O, M) e^{i\frac{2\pi}{\lambda} OS \cdot OM} \iint_{\mathbb{R}^2} A(P) e^{i\frac{2\pi}{\lambda} PO \cdot OM} dS. \quad (5.22)$$

Ce raisonnement correspond à "l'approximation de Fraunhofer", et la dernière expression à la "formule de diffraction de Fraunhofer", ou "formule de diffraction à l'infini".

Remarque. En général, $K(S, O, M)$ est assimilé à 1, sans même se préoccuper de quelque considération dimensionnelle que ce soit...

§II.2 Validité de l'approximation de Fraunhofer

Le point clef dans l'approximation de Fraunhofer est la trouéeure du DL à l'ordre le plus bas. Pour discuter sa validité, il faut faire attention au fait qu'il ne faut pas comparer OM/OM à PO/OM comme pourrait le laisser penser le DL de PM/λ mais PO^2/OM^2 à 2r comme cela apparaît de façon plus évidente sur l'écriture suivante :

$$\exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda} PM\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda} OM\right) \times \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{PO \cdot OM}{OM}\right) \times \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda} O\left(\frac{PO^2}{OM}\right)\right). \quad (5.23)$$

Avec $\lambda = 600$ nm et un diaphragme de taille caractéristique 0.1 mm, on a :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \frac{PO^2}{OM} < 10^{-2} \text{ pour } OM > 10 \text{ m!} \quad (5.24)$$

Avec une taille caractéristique de 1 mm, la condition de validité devient $OM > 1$ km ! C'est donc une approximation très restrictive. Cependant, on verra pourquoi, dans de très nombreux cas, c'est bien la figure de diffraction de Fraunhofer qu'on peut observer...

§II.3 Transmittance

Pour un diaphragme plan contenu dans le plan Π_{Oxy} éclairé par une onde Ψ provenant du demi-espace $z < 0$, on définit la transmittance du diaphragme par :

$$t(x, y) = \frac{\Psi(x, y, 0^+)}{\Psi(x, y, 0^-)}. \quad (5.25)$$

$t(x, y) \in \mathbb{C}$ a priori, et $|t(x, y)| \leq 1$.

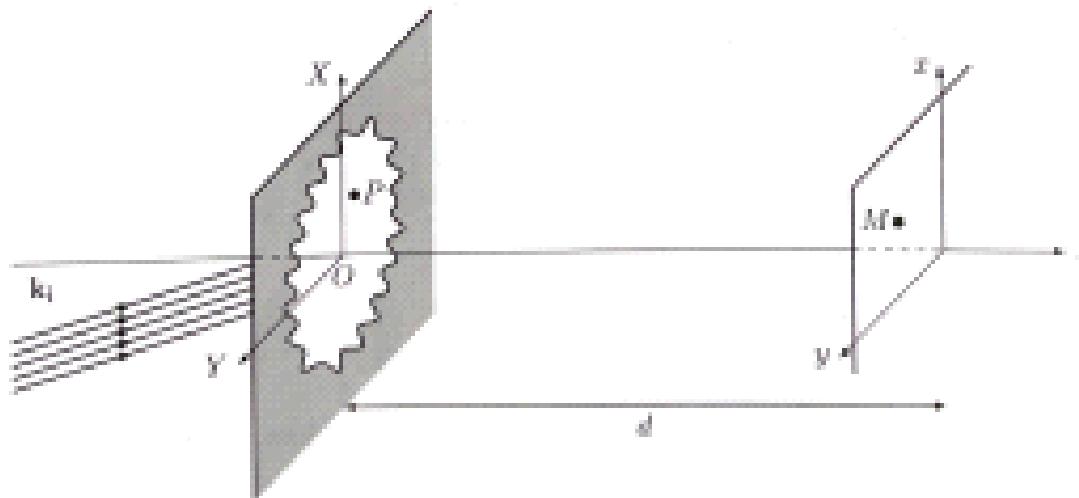
Exemples :
 - goutte de largeur b orientée suivant Oy : $t(x, y) = 1$ si $-b/2 < x < b/2$, 0 sinon,
 trou circulaire centré en O de rayon R : $t(x, y) = 1$ si $x^2 + y^2 < R^2$, 0 sinon,
 barrière d'une surface fine cellule : $t(x, y) = t_{\text{base}} \times e^{i2\pi r}$ là où se trouve la cellule, t_{base} être



<u>Exemples :</u>	fente de largeur b orientée suivant Oy :	$t(x, y) = 1$ si $-b/2 \leq x \leq b/2$, 0 sinon.
	trou circulaire centré en O de rayon R :	$t(x, y) = 1$ si $x^2 + y^2 \leq R^2$, 0 sinon,
	lampe de verre avec une cellule :	$t(x, y) = t_{\text{base}} \times e^{i\omega x}$ là où se trouve la cellule, t_{base} sinon.

§II.4 Deux éclairages canoniques

Diaphragme éclairé par une onde plane



Sur la face antérieure ($z = 0^+$) du diaphragme, on a :

$$A^-(P) = A(O) \exp(i k_1 \cdot OP) \quad (5.26)$$

car $A(O) \propto \exp(ik_1 SO - i\omega t)$ et $A(P) \propto \exp(ik_1 SP - i\omega t)$. Par conséquent, sur la face postérieure du diaphragme, on a :

$$A^+(P) = t(P)A^-(P) = A(O)t(P) \exp(ik_1 \cdot OP). \quad (5.27)$$

La formule de Fraunhofer s'écrit alors :

$$A(M) = -\frac{i}{\lambda} K(S, O, M) e^{i k_1 \cdot OM} A(O) \iint_{\mathbb{R}^2} t(X, Y) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} OP \cdot \left(-\frac{k_1}{k_0} + \frac{OM}{OM}\right)\right) dX dY. \quad (5.28)$$

En introduisant les coordonnées cartésiennes $OP = (X, Y, 0)$ et les fréquences spatiales

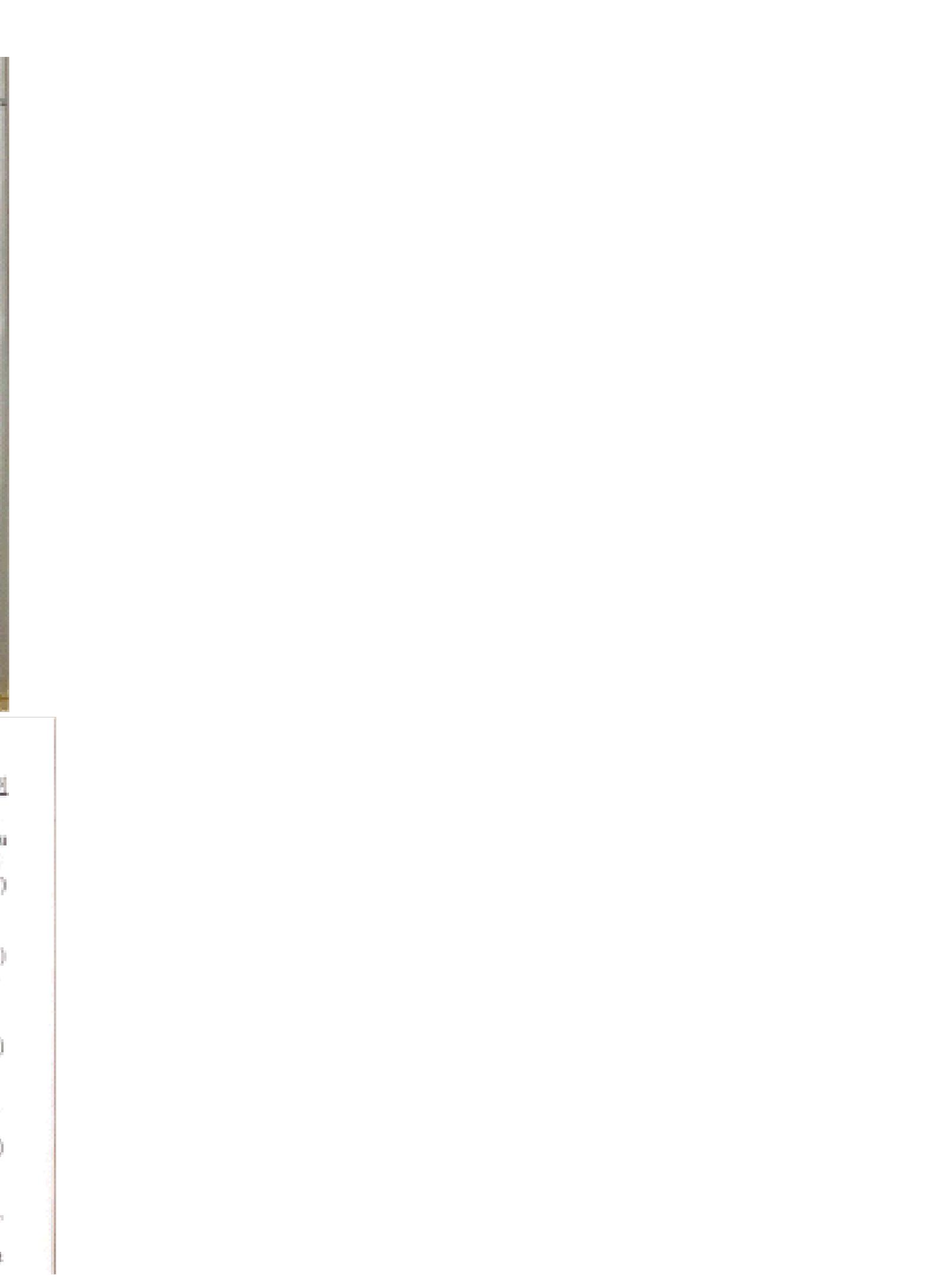
$$u = \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{k_1}{k_0} + \frac{OM}{OM}\right) X \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{k_1}{k_0} + \frac{OM}{OM}\right) Y, \quad (5.29)$$

la formule prend la forme suivante :

$$A(M) = -\frac{i}{\lambda} K(S, O, M) e^{i k_1 \cdot OM} A(O) \iint_{\mathbb{R}^2} t(X, Y) \exp(-i 2\pi(uX + vX)) dX dY. \quad (5.30)$$

expression dans laquelle on reconnaît la transformée de Fourier $\tilde{t}(u, v)$ de $t(X, Y)$. L'intensité au point M proportionnelle au carré du module de $A(M)$ fait donc apparaître le carré du module de la TF de $t(X, Y)$.

Remarque. À cause de $K(S, O, M)$, le rapport des intensités en deux points d'observation M et M' n'est



proportionnelle au carré du module de $A(M)$ fait donc apparaître le carré du module de la TF de $\delta(X, Y)$. Remarque. À cause de $K(S, O, M)$, le rapport des intensités en deux points d'observation M et M' n'est pas, *a priori*, strictement dans le rapport des carrés des modules. Cette remarque disparaît si l'on assimile $K(S, O, M)$ à 1.

En négligeant la dépendance du facteur d'obliquité par rapport à M , on arrive alors à :

$$I(M) = I_0 \left| \iint_{\mathbb{R}^2} t(X, Y) \exp(-i2\pi(uX + vX)) \, dX dY \right|^2 \text{ où } \begin{cases} u = \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{k_1}{k_0} + \frac{\Omega M}{OM} \right) \hat{X}, \\ v = \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{k_1}{k_0} + \frac{\Omega M}{OM} \right) \hat{Y}. \end{cases} \quad (5.31)$$

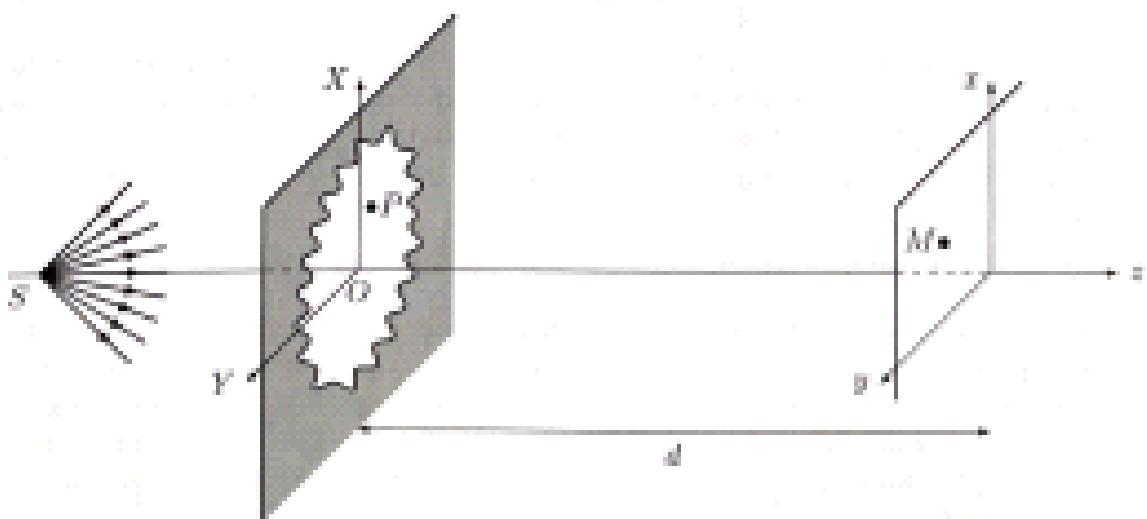
En introduisant les angles $\theta_1^X, \theta_1^Y, \theta_X$ et θ_Y par

$$k_0 \hat{X} = k_1 \sin \theta_1^X, \quad k_0 \hat{Y} = k_1 \sin \theta_1^Y, \quad OM \hat{X} = OM \sin \theta_X, \quad OM \hat{Y} = OM \sin \theta_Y, \quad (5.32)$$

l'expression précédente devient :

$$I(M) = I_0 \left| \iint_{\mathbb{R}^2} t(X, Y) \exp \left(-i \frac{2\pi}{\lambda} (X(-\sin \theta_1^X + \sin \theta_X) + Y(-\sin \theta_1^Y + \sin \theta_Y)) \right) \, dX dY \right|^2. \quad (5.33)$$

Daphragme éclairé par une source ponctuelle



On considère pour simplifier que la source S est placée sur l'axe optique, i.e. que SO est orthogonale au plan du diaphragme. Alors, pour tout point $P \in \Pi_{OXY}$, on a :

$$A^-(P) = \frac{A_0}{SP} e^{i k SP}. \quad (5.34)$$

La formule de Fraunhofer s'écrit alors :

$$I(M) = \left| \iint_{\mathbb{R}^2} t(X, Y) \exp(i k \delta(X, Y)) \, dX dY \right|^2 = \left(\frac{2\pi \Omega P}{OM} \right)^2 \sin^2 \theta_X \sin^2 \theta_Y$$



on obtient alors l'expression de cette intégrale :

$$A(M) = -\frac{i}{\lambda} K(S, O, M) e^{ikOM} A(O) \iint_{\mathbb{R}^2} t(X, Y) \frac{e^{ikSP}}{SP} \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\text{OP.OM}}{OM}\right) dXdY, \quad (5.35)$$

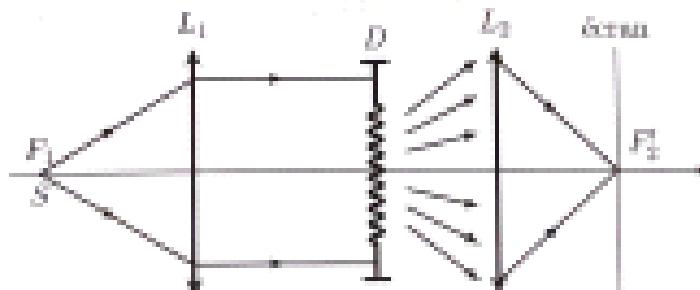
avec $SP = \sqrt{SO^2 + X^2 + Y^2}$. Si $SO \gg X_{\text{max}}, Y_{\text{max}}$ associés à $t(X, Y)$, alors on peut "sortir" $1/SP$ de l'intégrale, mais le terme supplémentaire e^{ikSP} fait que l'on n'a pas la TF de $t(X, Y)$!

Remarque. C'est uniquement l'écriture de SP sous la forme $\sqrt{SO^2 + X^2 + Y^2}$ qui nécessite de placer S sur l'axe optique. Tout ce qui est dit dans ce paragraphe reste vrai même si S est hors axe optique.

Remarque. En revanche, si l'on repart de l'expression complète Eq.(5.3) [correspondant donc à la diffraction de Fresnel] et que l'on considère, pour éclairer le diaphragme, une onde sphérique convergente (dont le centre S est donc situé après le diaphragme, à l'abscisse $z > 0$), on peut montrer (cf. TD) que la répartition d'intensité dans le plan contenant S est associé à la TF de $t(X, Y)$, i.e. que l'on observe, dans ce plan, la figure de diffraction de Fraunhofer (au sens de "la TF de $t(X, Y)$ ", mais il s'agit bien ici de diffraction de Fresnel) !

Effet d'une lentille

Considérons le montage suivant :

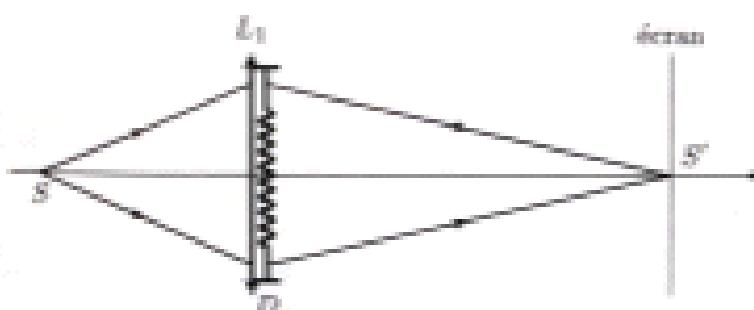


À la sortie de L_1 , la source ponctuelle S étant placée au foyer objet de L_1 , on a (approximativement) une onde plane. En l'absence de L_2 , la figure de diffraction obtenue à l'infini correspond à celle calculée au paragraphe § II.4. En observant dans le plan focal image de L_2 , on ramène donc cette figure de diffraction à distance finie, et l'on observe donc, dans le plan conjugué de la source, la figure de diffraction de Fraunhofer due au diaphragme D .

Remarque. Tout ce raisonnement suppose que L_1 et L_2 ne diaphragme pas le faisceau.

La position relative de D vis-à-vis de L_1 et L_2 est indifférente, pourvu que D soit situé entre L_1 et L_2 , orthogonal à l'axe optique, et que L_2 (notamment) ne diaphragme pas le faisceau. On peut donc imaginer la situation où l'on a "collé" D à L_1 et à L_2 , voire la situation à une lentille L où D est collé à L , qui joue à la fois le rôle de L_1 et L_2 . L'observation à distance finie dans le plan conjugué de la source nécessite que S ne soit plus située dans le plan focal objet de L . On peut néanmoins montrer que dans les conditions de Gouy, la répartition d'intensité dans le plan conjugué de la source correspond à celle donnée au paragraphe § II.4.





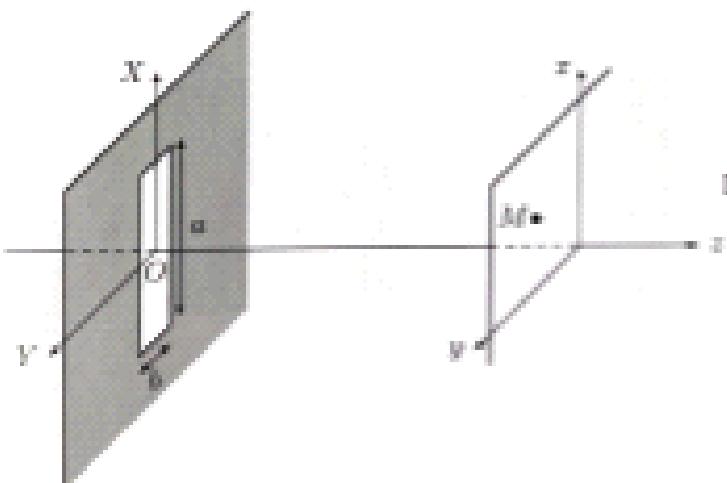
Remarque. Si le diaphragme n'est pas collé à L , on obtient, dans le plan conjugué de la source, une répartition d'intensité homothétique de celle correspondant à la figure de diffraction de Fraunhofer, i.e. la figure de diffraction de Fraunhofer affectée par un certain grossissement. Cette situation correspond bien évidemment au cas où le diaphragme est éclairé par une onde convergente et où l'observation se fait dans le plan qui contient le centre S , discuté ci-dessus !

§II.5 Quelques cas particuliers

Dans tous les exemples qui suivent, on considère une onde plane illuminant un diaphragme en incidence normale. Les fréquences spatiales u et v , associées à un point d'observation $M(x, y)$ prennent donc la forme suivante, où O désigne le centre du diaphragme :

$$u = \frac{1}{\lambda} \frac{\text{OM}}{|\text{OM}|} \hat{x} \quad \text{et} \quad v = \frac{1}{\lambda} \frac{\text{OM}}{|\text{OM}|} \hat{y}. \quad (5.36)$$

Diaphragme rectangulaire



La transmittance du diaphragme s'écrit :

$$t(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |X| < a/2, |Y| < b/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.37)$$

La transformée de Fourier se calcule :

$$\text{TF}(t(X, Y)) = \int_{-a/2}^{a/2} dX \int_{-b/2}^{b/2} dY e^{-i2\pi(uX+vY)} = ab \left(\frac{\sin(\pi u a)}{\pi u a} \right) \left(\frac{\sin(\pi v b)}{\pi v b} \right) \quad (5.38)$$

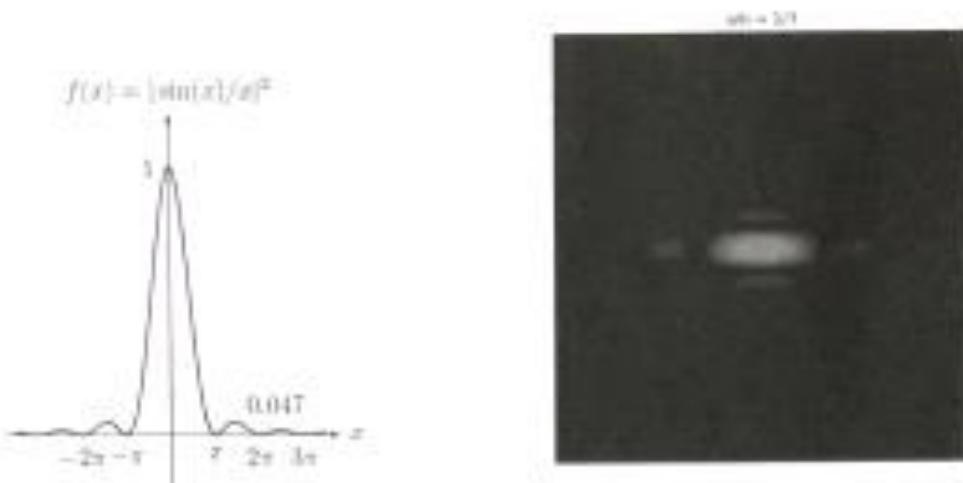
$$= ab \sin(\pi u a) \sin(\pi v b) \quad \text{où } \sin(x) = \frac{\sin x}{x}. \quad (5.39)$$

On en déduit l'intensité en un point M du plan d'observation :

$$I(u, v) = I_0 \sin^2(\pi u a) \sin^2(\pi v b). \quad (5.40)$$



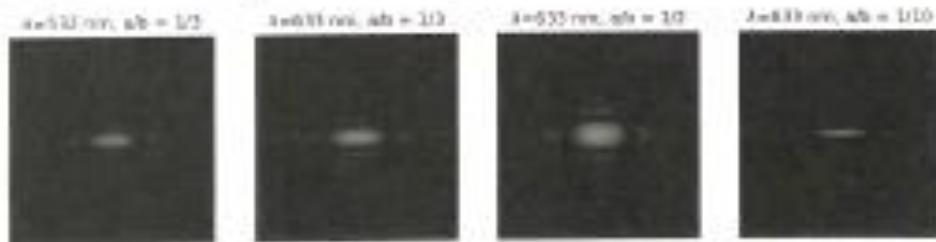
illustrée ci-dessous.



On notera l'annulation de l'intensité pour $\pi ab = k\pi, k \in \mathbb{Z}^*$ et $\pi ab = k'\pi, k' \in \mathbb{Z}^*$, ainsi que le premier maximum secondaire d'intensité $I = 0.047I_0$ où I_0 désigne l'intensité maximale. L'ouverture typique du pô principal correspond donc à :

$$\begin{cases} \sin \theta_0 \approx \lambda/a, \\ \sin \theta_k \approx \lambda/b, \end{cases} \quad (5.41)$$

i.e. le pô est d'autant plus étalé que λ est grand et a (ou b) petit, comme cela est illustré sur la figure ci-après (où les échelles spatiales sont identiques sur les 4 images et selon les 2 axes).



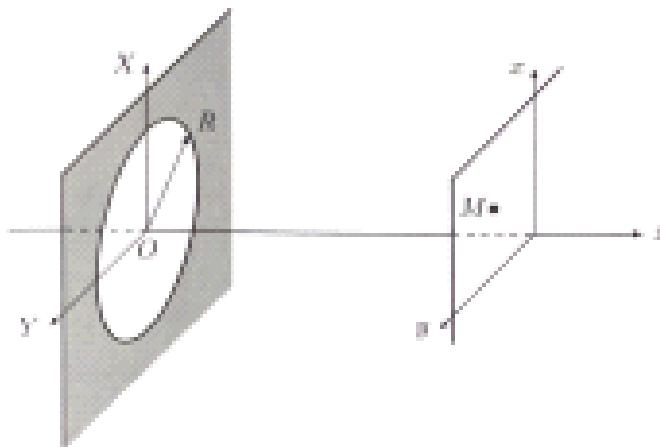
Fente rectiligne

Cette situation correspond à prendre la limite $a \rightarrow +\infty$ (ou $b \rightarrow +\infty$ pour une orientation différente de la fente) du cas du diaphragme rectangulaire. Seul subsiste alors une intensité non nulle pour $a=0$ (ou $b=0$), c'est-à-dire :

$$\text{TF}[t(X, Y)] = b \sin(\pi b) \delta(u) \quad \text{et} \quad I(u, v) = I_0 \sin^2(\pi bv) \delta(v). \quad (5.42)$$

On ne saurait trop insister sur ce point : prétendre illustrer la figure de diffraction de Fraunhofer d'une fente rectiligne en simulant une répartition d'intensité ressemblant à celle du cas $a/b = 1/3$ présenté ci-dessus est une grossière erreur, trop souvent commise...

Diaphragme circulaire



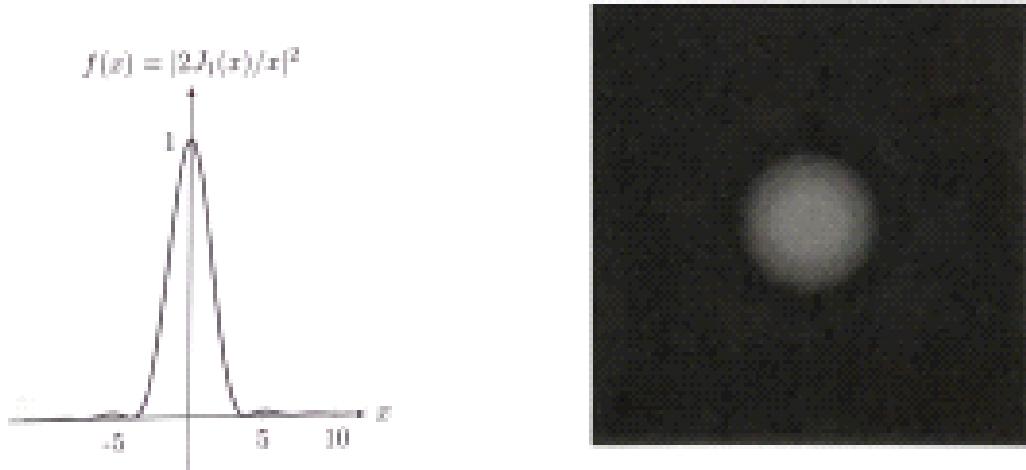
La transmittance du diaphragme s'écrit :

$$t(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } X^2 + Y^2 \leq R^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.43)$$

Le calcul a été effectué par Airy, astronome royal, en 1838, et correspond à la "figure de diffraction d'Airy". Celle-ci apparaît très naturellement lorsque l'on observe une étoile au foyer d'un télescope ou d'une lunette astronomique (instruments d'optique très généralement à symétrie de résolution), c'est-à-dire dans le plan conjugué de la source... La figure est invariante par rotation et ne dépend que de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, et plus précisément de l'angle $\theta = \rho/z$. L'intensité lumineuse (illustrée ci-dessous) s'écrit :

$$I(\rho, z) = I_0 \left| \frac{2J_1(2\pi R\rho/\lambda z)}{2\pi R\rho/\lambda z} \right|^2, \quad (5.44)$$

où J_1 désigne la fonction de Bessel du premier ordre.



On notera l'annulation de l'intensité pour les différents zéros (non-nul) de J_1 , et en particulier pour le premier :

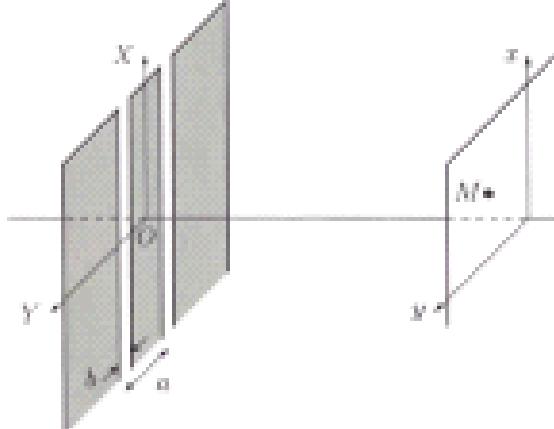
$$f = 0 \quad \text{pour} \quad \frac{2\pi R(\rho_0)}{\lambda z} = 3.83, \quad \text{soit} \quad \rho_0 = 1.22 \frac{\lambda z}{D}, \quad (5.45)$$

où l'on a posé $D \geq 2R$. Quant au premier maximum secondaire d'intensité, il correspond à $f = 0.017I_0$ où I_0 désigne l'intensité maximale. L'ouverture typique du pic principal correspond donc à $\sin \theta \approx 1.22\lambda/D$, et est donc d'autant plus grande que λ est grand et R (ou D) petit.



Fentes d'Young

On considère deux fentes rectilignes, infinitésimement longues, parallèles à OY , de largeur identique b , et séparées d'une distance a .



La transmittance du diaphragme s'écrit :

$$\delta(X, Y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |Y - a/2| < b/2 \text{ ou } |Y + a/2| < b/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} = t_1 \text{fente}(X, Y) * (\delta(Y - a/2) + \delta(Y + a/2)),$$

où l'on a introduit, dans la dernière expression, le produit de convolution.

La transformée de Fourier se calcule directement :

$$\text{TF}(t(X, Y)) = \left(\int_{a/2-b/2}^{a/2+b/2} dY e^{-i2\pi u Y} + \int_{-a/2-b/2}^{-a/2+b/2} dY e^{-i2\pi u Y} \right) \delta(u), \quad (5.46)$$

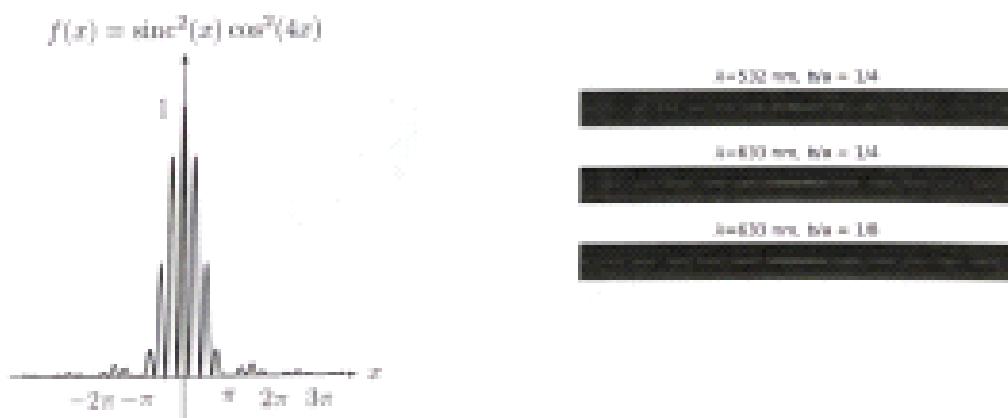
ou en s'appuyant sur les propriétés de la transformée d'un produit de convolution, et l'on trouve (dans les deux cas...) :

$$\text{TF}(t(X, Y)) = b \operatorname{sinc}(\pi u b) (e^{-i\pi u a} + e^{i\pi u a}) \delta(u) = 2b \operatorname{sinc}(\pi u b) \cos(\pi u a) \delta(u). \quad (5.47)$$

On en déduit l'intensité en un point M du plan d'observation :

$$I(u, v) = I_0 \cos^2(\pi u v) \operatorname{sinc}^2(\pi v b) \delta(u) = \frac{I_0}{2} \operatorname{sinc}^2(\pi v b) \delta(u) \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi a v}{\lambda} \right) \right), \quad (5.48)$$

illustrée ci-dessous.



On retrouve l'interférence prévue par un calcul d'interférence (à l'infini), qui se "superpose" à la figure de diffraction d'une simple fente ; l'intensité dans le plan d'observation est maintenant totalement connue, mais ce uniquement à l'infini (alors que le calcul d'interférence seul, et de l'interfrange correspondante, est valable quelque soit la distance mais on ne connaît alors, non pas la distribution complète d'intensité mais uniquement la modulation).

Remarque. On notera la différence entre cette situation, où la bilente est éclairée de façon cohérente sur toute sa hauteur, et l'expérience traditionnelle d'illustration du phénomène d'interférence pour laquelle on utilise une forte source (parallèle à la bilente) pour laquelle la longueur de cohérence selon l'axe parallèle à la bilente est très faible comparée à la longueur de cohérence selon l'axe orthogonal à la bilente.

Trous d'Young

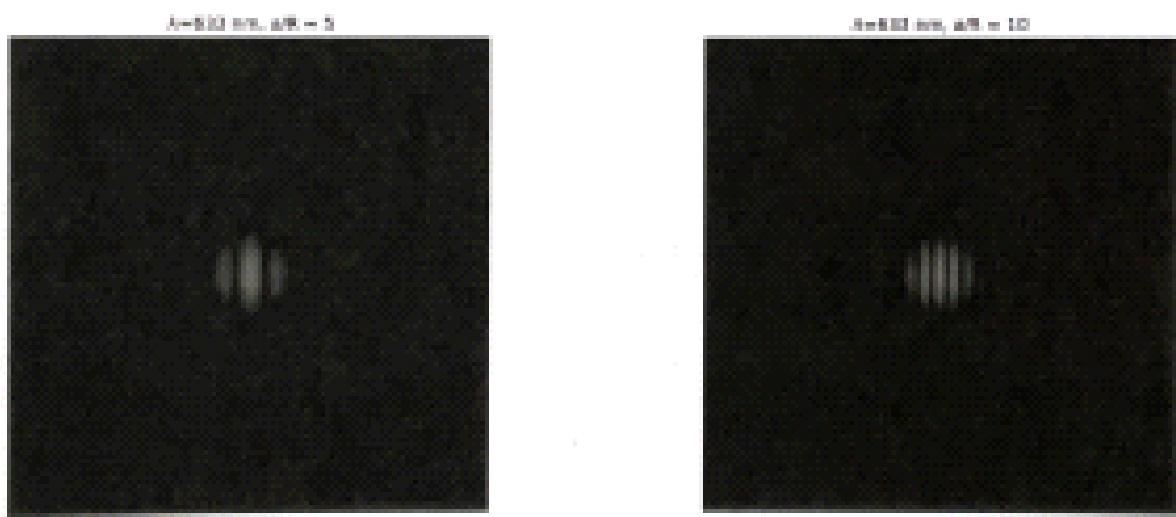
On considère deux trous identiques, de rayon R_0 , et dont les centres sont situés sur l'axe OY et séparés d'une distance a . La transmittance du diaphragme s'écrit :

$$t(X, Y) = t_0 \operatorname{tron}(X, Y) * (\delta(Y - a/2) + \delta(Y + a/2)). \quad (5.49)$$

Le calcul, similaire aux cas déjà envisagés, conduit à l'expression de l'intensité (avec des notations explicitées pour le cas du diaphragme circulaire) :

$$I(u, v) = I_0 \left| \frac{2J_1(2\pi R_0 u / \lambda z)}{2\pi R_0 u / \lambda z} \right|^2 \cos^2(\pi av), \quad (5.50)$$

illustrée ci-dessous :



Réseaux

On considère un réseau, c'est-à-dire la reproduction périodique selon une direction (OY) de période b d'un motif caractérisé par une transmittance $t_m(X, Y)$. La transmittance du réseau s'écrit :

$$t(X, Y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} t_m(X, Y - mb) = t_m(X, Y) * \text{III}_b^T, \quad (5.51)$$

où l'on a introduit la convolution du motif par le peigne de Dirac (de pas b) $\text{III}_b^T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kb)$. On en déduit :

$$\text{TF}(t(X, Y)) = \text{TF}(t_m(X, Y)) * \text{III}_{b, b}^T \quad \text{car} \quad \text{TF}(\text{III}_b^T) = \text{III}_{b, b}^T, \quad (5.52)$$

et finalement :



$$\text{TF}(i(X, Y)) = \text{TF}(t_m(X, Y)) \times \text{III}_{1/b}^m \quad \text{car } \text{TF}(\text{III}_b^m) = \text{III}_{1/b}^m. \quad (5.52)$$

et finalement :

$$I(u, v) = I_0 |\text{TF}(t_m(X, Y))|^2 \text{III}_{1/b}^m. \quad (5.53)$$

On trouve donc une intensité nulle partout sauf en $v = k/b$, i.e. pour tous les angles θ_Y tels que $\sin \theta_Y = k\lambda/b$ (ce qui correspond à la "formule des réseaux" avec $\theta_1 = 0$, i.e. dans le cas d'un éclairage en incidence normale), le tout étant modulé par l'enveloppe $|\text{TF}(t_m(X, Y))|^2$.

Il est intéressant d'effectuer le calcul "à la main" de la situation où l'on éclaire par une onde plane "seulement" $N = 2n + 1$ fentes identiques, parallèles à OY , situées en $y_i = ia$ avec $i \in \{-n, \dots, n\}$, avec la transmittance d'une fente nulle sauf sur une largeur a :

$$i(X, Y) = i_{\text{base}} * \sum_{m=-n}^n \delta(Y - ma). \quad (5.54)$$

On calcule :

$$\begin{aligned} \text{TF}(i(X, Y)) &= \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i2\pi u Y} dY \right) \times \left(\sum_{m=-n}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i2\pi u Y} \delta(Y - ma) dY \right) \times \delta(u) \\ &= \text{sinc}(\pi u a) \times \sum_{m=-n}^n e^{i2\pi u ma} \times \delta(u) = \text{sinc}(\pi u a) e^{-i2\pi u a} \frac{1 - (e^{i2\pi u a})^N}{1 - e^{i2\pi u a}} \times \delta(u) \quad (5.55) \end{aligned}$$

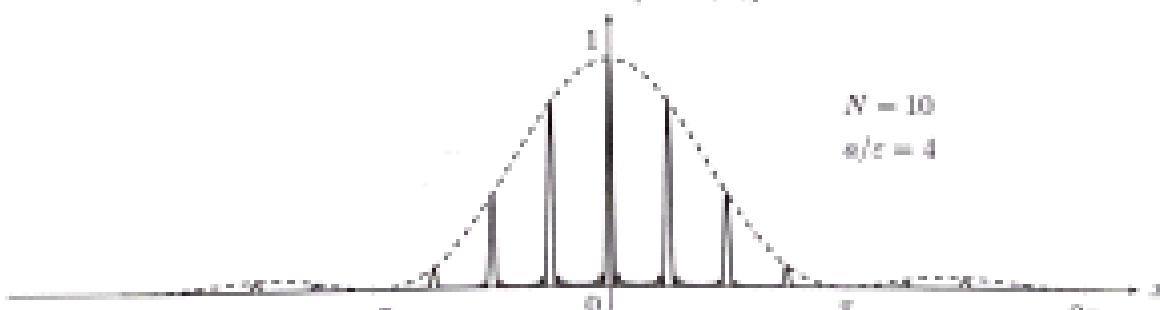
$$= N \varepsilon \text{sinc}(\pi u a) \frac{\sin N\pi u a}{N \sin \pi u a} \delta(u), \quad (5.56)$$

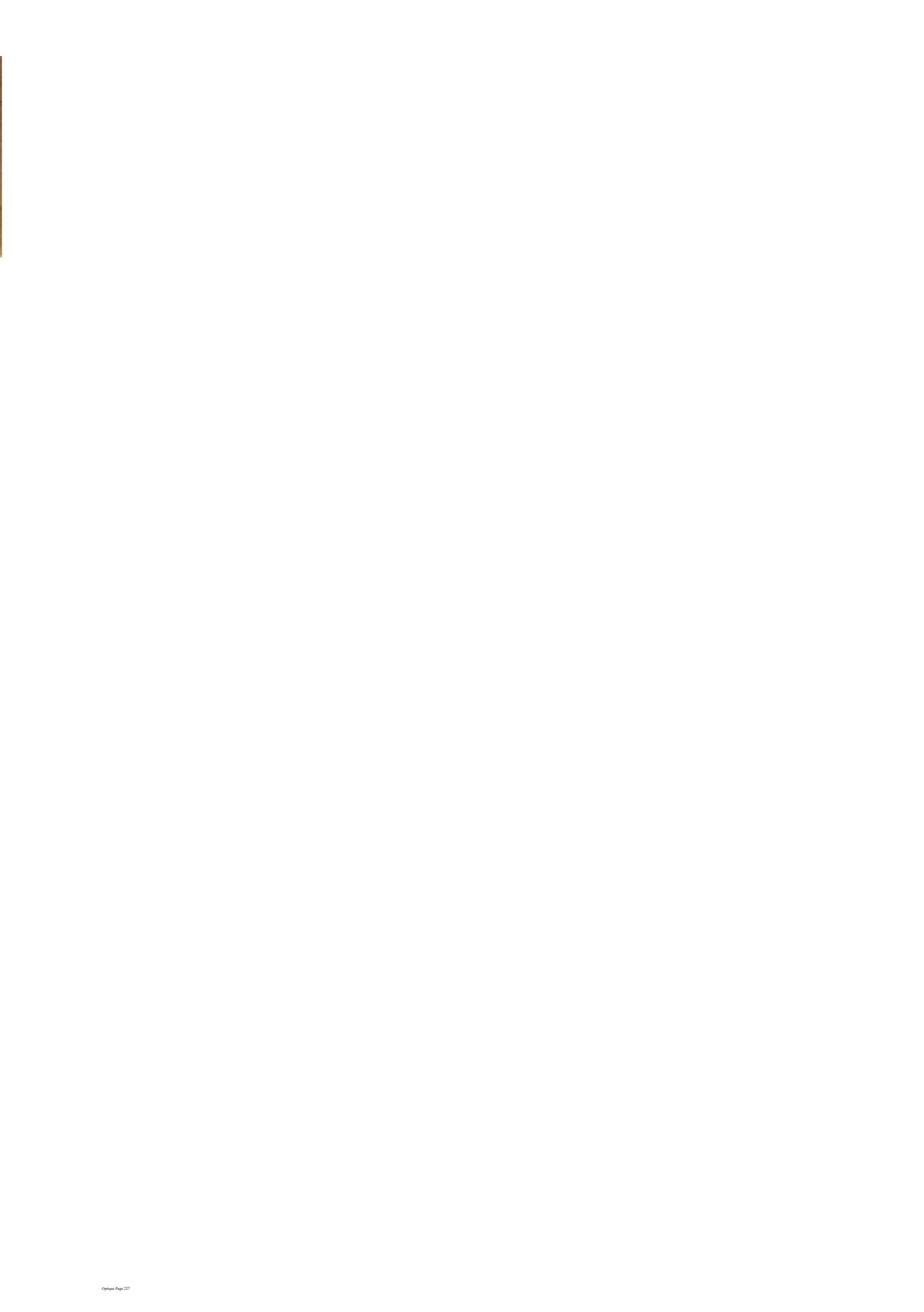
et l'on en déduit :

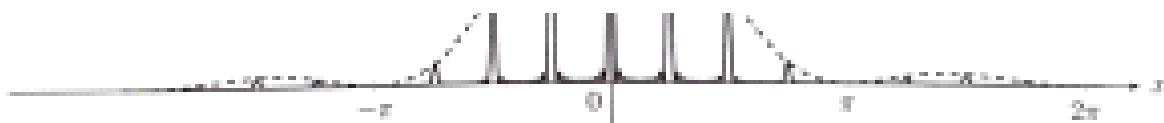
$$I(u, v) = I_0 \text{sinc}^2(\pi u a) \left(\frac{\sin N\pi u a}{N \sin \pi u a} \right)^2 \delta(u), \quad (5.57)$$

où l'on a réintroduit un facteur N devant $\sin \pi u a$ par commodité. Le premier terme, en sinc^2 , correspond à la figure de diffraction de Fraunhofer d'une fente simple, qui module donc globalement l'intensité. Quant au second terme, $(\sin N\pi u a / N \sin \pi u a)^2$, il redonne la fonction $\text{III}_{1/a}$ lorsque $N \rightarrow +\infty$.

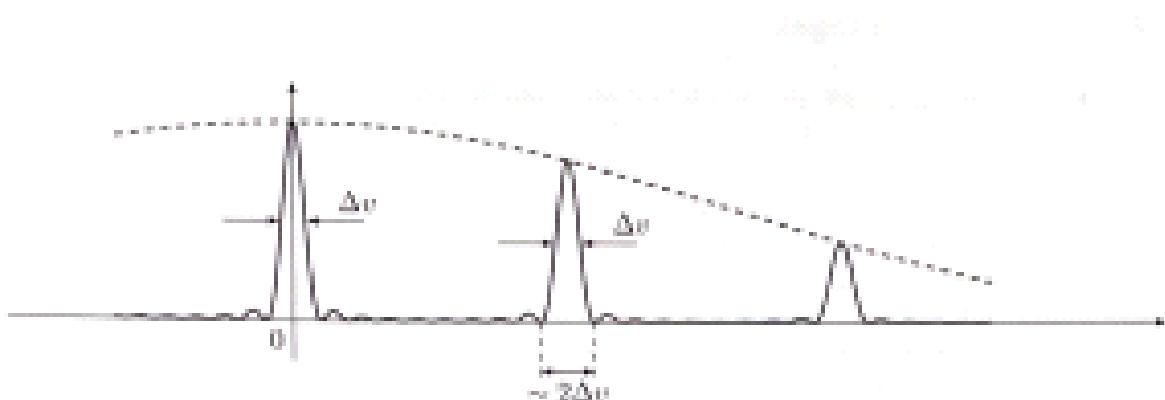
$$f(x) = \text{sinc}^2(x) \left(\frac{\sin(10\pi 4x)}{10 \sin(\pi x)} \right)^2$$







Ce calcul est intéressant car non seulement il permet (heureusement) de retrouver la "formule des réseaux" en transmission ($a(\sin \theta - \sin \theta_0) = k\lambda$, $k \in \mathbb{Z}$ avec les angles θ repérés par rapport à la normale $n_{1,2}$), et donc la dispersion singulière $D_a = d\theta/d\lambda$, l'existence d'un minimum de déviation $dD_a/d\theta_0 = 0$ avec $D = \theta - \theta_0$, ... mais aussi de définir le pouvoir de résolution du réseau. Pour cela, on note que la "largeur à mi-hauteur" d'un pic principal est (à un facteur numérique proche de 1) égale à l'abscisse du premier zéro, soit $\Delta v \approx 1/(N\alpha)$.



La question est donc de déterminer quel est l'écart $\Delta\lambda$ à considérer entre deux longueurs d'onde λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ pour que si la figure de diffraction fait apparaître un pic à l'abscisse v pour λ_1 , elle en fasse apparaître un en $v + \Delta v$ pour λ_2 , auquel cas, conventionnellement, on considère que ces deux pics peuvent être distingués et donc les longueurs d'ondes différenciées. La "formule des réseaux" donne directement :

$$D_a = \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{k}{a \cos \theta}. \quad (5.58)$$

On note en passant que $D_a = 0$ pour $k = 0$, i.e. le pic central ne dispense pas les longueurs d'onde. La différentiation de l'expression de la fréquence spatiale $v = \sin \theta/\lambda$ donne $\Delta v = \Delta\theta \cos \theta / \lambda$. On en déduit :

$$\Delta\lambda = \frac{1}{D_a} \Delta\theta = \frac{1}{D_a \cos \theta} = \frac{\lambda_0}{k} \Delta v, \quad (5.59)$$

et donc, avec $\Delta v_{\min} = 1/N\alpha$, on a à la limite de résolution :

$$\Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda}{kN}. \quad (5.60)$$

On définit enfin le pouvoir de résolution du réseau par :

$$\text{P.R.} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda_{\min}} = kN. \quad (5.61)$$

Le pouvoir de résolution croît avec N (\rightarrow éclairer le plus de traits possibles), et avec k (\rightarrow travailler dans l'ordre le plus élevé possible).

Remarque. Plus l'ordre est élevé (i.e. $|k|$ grand), et plus l'intensité diminue (en général) à cause de la

l'ordre le plus élevé possible).

Remarque. Plus l'ordre est élevé (i.e. $|k|$ grand), et plus l'intensité diminue (en général) à cause de la contribution associée à la figure de diffraction du motif. La solution consiste à dissymétriser la figure de diffraction, en favorisant un ordre particulier $k \neq 0$. Pour cela il faut choisir un motif de façon adéquate : c'est ce qui est fait pour les réseaux dits "échelle", ou "blâts".

Remarque. Graver un réseau peut être difficile : en 1880, Rowland a gravé un réseau de 1700 traits par millimètre. Michelson, dix ans plus tard, a gravé un réseau de 500 traits/mm sur 30 cm, soit 150000 traits au total ! À l'époque, il s'agissait de graver une surface de verre à l'aide d'un diamant. De nos jours, on se sert de résines photosensibles exposées dans un champ d'interférences. La résine polymérisé là où les franges sont brillantes. On obtient alors un réseau mère, que l'on peut ensuite dupliquer par application de résines thermosensibles.

§III Formation des images

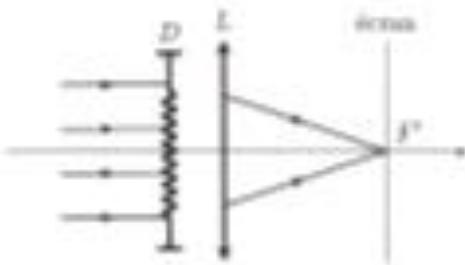
§III.1 Propriétés de la figure de diffraction de Fraunhofer

Rappel

La figure de diffraction de Fraunhofer s'observe à l'infini (très rarement le cas en pratique), ou dans le plan conjugué de la source par un système optique. La figure de diffraction est associée à la transformée de Fourier de la transmittance : dans le cas d'une observation à l'infini, attention à ne pas oublier les différences de phase éventuelles (onde sphérique, onde plane "nichée", ...), sur la face avant du diaphragme ; dans le cas d'une observation dans le plan conjugué de la source, on observe par contre $|TF(t(X, Y))|^2$, éventuellement modifié par un facteur de grossissement si la lentille (non-diaphragmée) n'est pas accolée au diaphragme.

Propriété de la figure de diffraction de Fraunhofer

On considère un diaphragme éclairé par une onde plane, et l'on observe la figure de diffraction dans le plan focal image d'une lentille ; on observe donc la figure de diffraction de Fraunhofer, car l'observation se fait dans le plan conjugué de la source.



L'intensité lumineuse dans le plan focal image s'écrit donc :

$$I(u, v) = I_0 |TF(t(X, Y))|^2. \quad (5.62)$$

On translate maintenant le diaphragme parallèlement au plan qui le contient. La transmittance devient alors $t(X, Y) \approx t(X - X_0, Y - Y_0)$. On en déduit :

$$TF(t'(X, Y)) \approx TF(t(X - X_0, Y - Y_0)) = e^{-i(2\pi(X_0 + Y_0) + \phi)} TF(t(X, Y)). \quad (5.63)$$

$$\text{TF}(f(X, Y)) = \text{TF}(f(X - X_0, Y - Y_0)) = e^{-i\theta(X_0, Y_0)} \text{TF}(f(X, Y)). \quad (5.63)$$

et donc :

$$f(u, v) = I_0 [\text{TF}(f(X, Y))]^2 = I_0 [\text{TF}(f(X, Y))]^2 = I(u, v). \quad (5.64)$$

Ainsi, la figure de diffraction (en intensité) est inchangée !

Conclusion : Dans un montage de diffraction de Fraunhofer, le diaphragme diffractant est la dernière chose à placer dans le montage ! À l'inverse, la première chose à faire est de déterminer le plan conjugué de la source.

Remarque. Il n'en va pas de même lorsque le diaphragme est incliné par rapport à l'axe optique : on peut montrer que la figure de diffraction est dilatée d'un facteur $1/\cos\alpha$ dans la direction orthogonale à l'axe de rotation, si l'angle de rotation est noté α .

Propriété générale associée à l'aspect "TF" de la figure de diffraction de Fraunhofer

Si la transmittance du diaphragme fait apparaître une longueur caractéristique a , la figure de diffraction de Fraunhofer fait apparaître une longueur caractéristique $a \geq 1/a$, i.e. un angle caractéristique $\sin \theta \geq \lambda/a$. Si le diaphragme est éclairé par une onde plane et que l'on observe dans le plan focal image d'une lentille de焦距 f' , cet angle caractéristique (dans la limite $\sin \theta \geq \theta$) apparaît à une distance $f'\theta = f'\lambda/a$ de

l'axe optique.

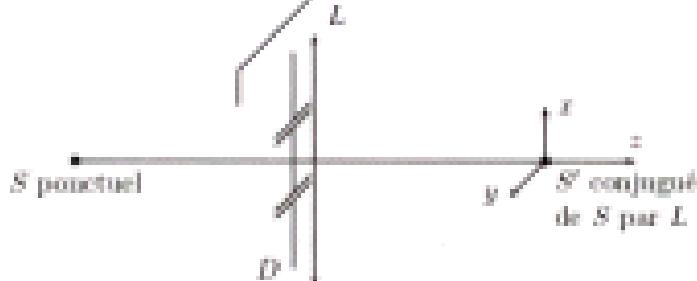
Conclusion : on a donc intérêt, dans les montages, à utiliser la plus grande longueur d'onde λ possible, la plus grande focale f' possible (mais l'intensité surfacique diminue en conséquence...), et le plus petit a possible pour avoir la figure de diffraction de Fraunhofer la plus aisément observable.

§III.2 Éclairage cohérent ou incohérent

Le point clé dans le calcul de l'intensité diffractée par un diaphragme est de dire qu'il existe une relation de phase parfaitement définie entre tout point P et P' du diaphragme, et que cette relation de phase perdure jusqu'au point M d'observation. Si tel est le cas, alors il faut sommer les amplitudes des ondes avant d'en prendre le carré pour obtenir l'intensité. Si ce n'est pas le cas, il faut directement sommer les intensités.

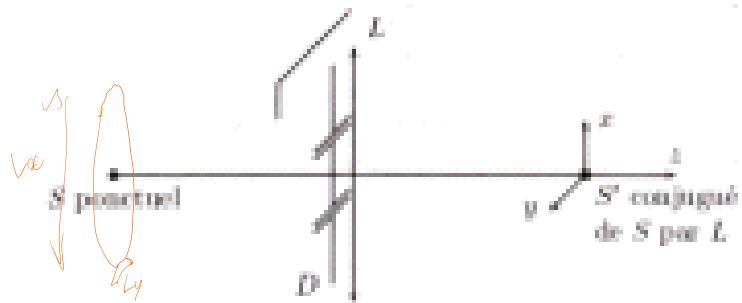
Conclusion : il faut déterminer le caractère cohérent ou incohérent de la source avant tout calcul !

Considérons les situations typiques suivantes :



Au niveau de D , S étant ponctuelle, l'éclairage est parfaitement cohérent, et l'on observe donc une figure de diffraction en $\text{sinc}^2(\dots)$ modulée par l'interfrange d'Young selon Ox et un δ selon Oy .



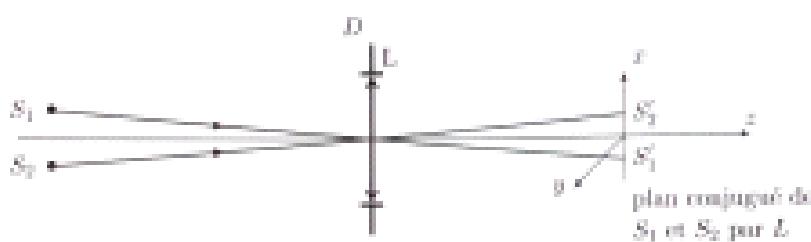


Selon l'axe X , la longueur de cohérence spatiale vaut $L_c^X = \lambda/\Delta\theta^X$ avec $\Delta\theta^X = L_X/d$; si $a \ll L_c^X$, on a des interférences, sinon non ! Selon l'axe Y , la longueur de cohérence spatiale vaut $L_c^Y = \lambda/\Delta\theta^Y$ avec $\Delta\theta^Y = L_Y/d$; on a donc des interférences pour chacune des deux fentes sur une longueur caractéristique $\lesssim \lambda d/L^Y$.

Cette discussion permet de donner des explications naturelles à des situations très souvent mises en œuvre :

- 1 fente source + 2 fentes d'Young, toutes les trois étant parallèles : on observe un \sin^2 suivant Ox , modulé par l'interfrange, centré sur S' , le tout étant invariant suivant Oy , et non pas un δ selon $Oy\dots$;
- 1 source étendue + 1 fente (par étendue, il faut entendre que l'ouverture de la fente c ne satisfait pas $c \ll L_c^X$) : aucun phénomène d'interférence n'est détectable, et l'on récupère l'image de la source, avec moins d'intensité que sans la fente, c'est tout !
- 1 source étendue + 2 fentes : si c ne satisfait pas $c \ll L_c^X$, *a fortiori*, a ne satisfait pas non plus $a \ll L_c^X$: on récupère donc l'image de la source avec une intensité double par rapport au cas précédent !

Cas particulier : on considère deux sources ponctuelles, incohérentes, éclairant un système optique de révolution, et l'on observe dans le plan conjugué de la source (par exemple deux étoiles voisines observées au foyer image d'un télescope).



Les dimensions finies de l'instrument d'optique font qu'il existe un diaphragme d'ouverture, qui diaphragme le faisceau, de diamètre D . L'image est donc constituée de deux tâches d'Airy, centrées sur les images géométriques de S_1 et S_2 . La répartition d'intensité selon l'axe Oz est illustrée ci-contre, dans le cas de deux sources d'intensité égale. Bien évidemment, il n'y a pas de franges "à la Young".

L'expression de l'intensité pour une seule tache d'Airy est :

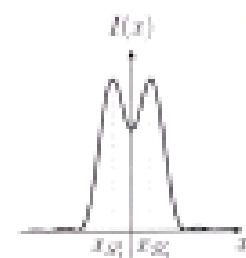
$$I(\rho, z) = I_0 \left| \frac{2J_1(\pi D \theta / \lambda)}{\pi D \theta / \lambda} \right|^2, \quad (5.65)$$

où J_1 désigne la fonction de Bessel du premier ordre, et un premier zéro en $\theta = 1.22\lambda/D$. De façon conventionnelle, on considère que l'on ne peut distinguer les deux images des deux sources que si les deux tâches sont suffisamment distantes l'une de l'autre, le "suffisamment distantes" correspondant au critère de Rayleigh :

$$\theta \geq \theta_c \equiv \frac{1.22\lambda}{D}. \quad (5.66)$$

A.N. Avec $\lambda = 0.55 \mu\text{m}$, pour un télescope d'amateur, $D = 20 \text{ cm}$ et $\theta_c = 0.7''$. Pour un observatoire scientifique, $D = 8 \text{ m}$ et $\theta_c = 0.02''$. Dans la "vraie vie", c'est la turbulence atmosphérique qui limite le pouvoir séparateur (sauf pour les observatoires en orbite). Sans optique adaptative, on ne descend pas en-dessous d'un "seeing" de $0.25''$, et encore, uniquement dans les meilleurs sites d'observation (La Silla, Hawaii). L'intérêt des "gross" télescopes sur les petits tient qu'ils collectent beaucoup plus de lumière en un temps d'observation donné.

Remarque. Il faut garder à l'esprit le caractère conventionnel du critère de Rayleigh. Ce n'est pas parce que ce dernier est satisfait que l'on arrive forcément à résoudre ces deux sources lumineuses. C'est particulièrement vrai lorsque les deux sources sont d'intensité très différente, comme c'est le cas par exemple dans la planétologie des exoplanètes.



CHAPITRE SIX

Optique ondulatoire : exercices

§I Du côté de l'agreg

Épreuve A, 2023	Mach-Zehnder
Épreuve A, 2020	Diffractio, optique adaptative
Épreuve A, 2019	Fabry-Pérot, Mach-Zehnder, Bistabilité
Épreuve A, 2016	Polarisation, Mach-Zehnder
Épreuve A, 2015	Microscopie
Épreuve C, 2014	Diffractio de Bragg
Épreuve C, 2009	Fabry-Pérot
Épreuve A, 2007	Diffringence, optique non-linéaire
Épreuve A, 2006	Cohérence
Épreuve C, 2004 BUP n°834 (2) et n°849 (2)	Michelson, bruit de photons, Fabry-Pérot, laser
Épreuve A, 2000 BUP n°824 (2) et n°838 (2)	Michelson
...	...

§II Exercices élémentaires

§II.1 Interférences

Expérience de Wiener

En 1890, Otto Wiener réalise une série d'expériences³ pour mettre en évidence, notamment, que l'impression d'un film photographique était due au champ électrique (avec le vocabulaire moderne). Pour cela, il illumine une surface métallique (assimilée à un conducteur parfait) plane avec une onde plane monochromatique en incidence normale. Il place, sur le trajet de la lumière, un (très) mince film photosensible (transparent) faisant un angle α avec le plan du miroir. Après développement, il observe l'apparition de bandes claires et sombres régulièrement espacées, et que là où le film est au contact du miroir, la bande est sombre.

1. Justifier l'apparition des bandes, et montrer que le fait que "sur la surface même du miroir l'action photographique est nulle" [Potier] permet de conclure que c'est le champ électrique qui est responsable de l'impression du film argentique (on rappelle qu'en incidence normale, sur un métal parfait, le déphasage à la réflexion vaut π pour le champ électrique et 0 pour le champ magnétique).
2. Estimer l'épaisseur maximale admissible pour le film photosensible à interposer, sachant que la longueur d'onde utilisée correspond à celle des "rayons les plus réfringents du spectre de l'arc voltaïque" [Potier] (estimée à 0,56 nm, une raie intense du spectre de C_2 faisant partie des raies de Swan).
3. Reprendre la discussion dans le cas d'une incidence à 45° .



à une émission correspondante à une raie rouge dans le spectre des opérations de la source lumineuse à 0,56 nm, une raie intense du spectre de C_2 faisant partie des raies de Swan).

3. Reprendre la discussion dans le cas d'une incidence à 45°.

¹Les résultats sont publiés dans la plus ancienne revue de physique, *Annalen der Physik*, alors dirigée par Wiedemann (collège de la loi de Wiedemann et Franz), sous le titre "Sichende Lichtwellen und die Schwingungsrichtung polarisierten Lichtes" [Ondes stationnaires de lumière et orientation de la vibration dans la lumière polarisée]. Le lecteur intéressé trouvera dans le volume 10 du *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 1891, des commentaires très intéressants de Bloch et Potier, qui soulignent qu'à l'époque, il n'allait pas de soi que les résultats obtenus par Hertz dans le domaine des ondes électromagnétiques s'appliquent également dans le domaine optique, et que le débat sur l'orientation de la "vibration lumineuse" (assimilée à la "vibration d'ether") par rapport au plan de polarisation était vif.

Chapitre 6. Optique ondulatoire : exercices

Miroir de Lloyd

On considère le dispositif suivant : une source lumineuse ponctuelle S , monochromatique ($\lambda = 0,6 \mu\text{m}$) placée à une distance h d'un miroir plan, de côté $\ell \equiv AB = 24 \text{ cm}$. La distance $d \equiv HA$ vaut 1 cm et $h < d$. L'observation s'effectue dans le plan orthogonal à AB contenant B .



1. Déterminer l'interfrange et le champ d'interférence du dispositif.

2. On forme sur un écran de projection l'image du plan perpendiculaire à AB contenant M à l'aide d'une lentille mince convergente, de distance focale image 10 cm, placée à 12 cm de B . L'interfrange sur l'écran d'observation vaut 1,5 mm. En déduire h , ainsi que le nombre de franges brillantes observées, sachant qu'un déphasage supplémentaire de π doit être pris en compte à cause de la réflexion sur la surface métallique qui constitue le miroir.

Miroirs de Fresnel

On considère le dispositif suivant : une source lumineuse ponctuelle S , monochromatique, éclaire deux miroirs plans qui font entre eux un angle $\alpha \ll 1$.



1. Déterminer l'interfrange et le champ d'interférence du dispositif.

2. A.N. Déterminer l'interfrange avec $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-3}$, $SC = 1 \text{ m}$, $CM = 1,4 \text{ m}$ et $\lambda = 633 \text{ nm}$.

Anneaux de Newton

On considère une lentille plan-convexe en contact (via sa face convexe) avec un miroir plan, éclairée à incidence normale par un faisceau de lumière parallèle monochromatique.

1. Justifier que la surface de localisation se situe à l'infini (c'est à dire que

11
10
9
8
7
6

111

1 est
 $\ll d$.

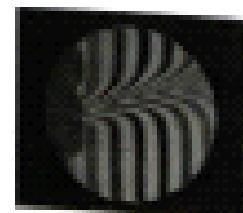
Une
tran
s'ou
que

voies

évolue

- qui renvoie une surface plan-concave en contact (de sa face convexe) avec un miroir plan, éclairée en incidence normale par un faisceau de lumière parallèle monochromatique.
- Justifier que la surface de localisation se situe à proximité de la surface convexe de la lentille, et qu'il s'agit d'une figure d'interférence correspondant à une succession d'anneaux sombres et brillants.
 - Établir l'expression des rayons des anneaux brillants au niveau de la surface de localisation.
 - A.N. Calculer les rayons des quatre premiers anneaux sombres si le rayon de courbure de la face convexe de la lentille vaut $R = 2$ m et $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$.

Michelson en coin d'air



Déterminer à partir de la photo ci-dessus (©L. Dettwiler, [Dett]) l'indice optique du gaz contenu dans le biquet.

Réseau de Soret

Un réseau de Soret est un masque constitué d'anneaux concentriques de même surface (fixée par celle du disque central de rayon r_0^2) alternativement transparents ou opaques.

- Déterminer la loi suivie par les rayons des bords de ces anneaux, et représenter la transmittance du diaphragme.
- Montrer que lorsqu'un tel réseau est éclairé en incidence normale par une onde plane monochromatique, il apparaît sur l'axe du dispositif une succession de points lumineux dont on précisera la distance d entre ceux contenant le masque.
- Proposer une méthode pour "graver" un tel réseau.

Remarque. Il n'aura échappé à personne qu'il s'agit de la "généralisation" du point de Poisson (dans lequel le disque central est opaque).

Remarque. Un tel réseau peut être considéré comme une lentille (convergente) à foyers multiples, leurs défauts (en particulier la très forte aberration chromatique, avec une dépendance en $f' \propto 1/\lambda$ à comparer à celle d'une lentille en verre "classique" $f' \propto n + B/\lambda^2$), ce sont de telles lentilles qui sont utilisées par exemple dans l'imagerie dans le domaine X (alors qu'il n'existe pas, dans le domaine X, de matériau transparent). L'indice serait substantiellement différent de 1, il est facile de jouer sur le caractère transparent ou opaque

sous
e la
ve de
s le

24.09.06

un disque

ce de ce

matique,
au plan

le cas

Malgré
mparer
ur faire
nt dont
ue d'un

de l'imagerie dans le domaine X (alors qu'il n'existe pas, dans le domaine X, de matériau transparent). L'indice serait substantiellement différent de 1, il est facile de jouer sur le caractère transparent ou opaque support en y déposant de fines couches d'un métal).

Remarque. En anglais, un réseau de Soret est désigné sous l'appellation "Fresnel zone plate", ce qui évidemment le lien entre la disposition des anneaux et les nombres de Fresnel qui peuvent leur être associés.

Remarque. Évidemment, plutôt qu'une telle transmittance "binnaire", on peut imaginer une dépendance radiale différente. Ainsi, on peut montrer qu'un diaphragme associé à une transmittance $t(r) = (1 + \cos(kr))$ reproduit le comportement d'une lentille usuelle.

Antenne Yagi-Uda

On considère une antenne Yagi-Uda, plus communément appelée antenne nasse, constitué de N antennes élémentaires (dont les dimensions sont adaptées à la longueur d'onde souhaitée mais ce n'est pas l'objet de l'exercice), identiques, parallèles, et disposées de manière à ce que les plans médiateurs de chacune se coincident et constituent donc un plan de symétrie Π de l'ensemble. Chaque antenne élémentaire est située au centre de sa (ou ses) plus proche(s) voisine(s) d'une distance d . On admet qu'un calcul d'électromagnétisme permet de justifier que sous certaines conditions, chaque antenne élémentaire est à l'origine d'un champ rayonné dipolaire.

1. Déterminer, dans le plan de symétrie de l'antenne, et en supposant les courants alimentant chaque antenne élémentaire en phase, la ou les directions dans lesquelles le champ rayonné est maximal. Préciser l'influence de N sur ces directions.

2. Exploiter la possibilité d'introduire un déphasage entre les différents courants pour modifier la direction du maximum discuté à la question précédente.

§II.2 Diffraction

Principe du sténopé

Un sténopé, ancêtre de l'appareil photographique, est constitué d'une boîte dont une des faces est percée d'un trou de diamètre D . Sur la face opposée (parallèle à la face percée et située à une distance L de celle-ci), on place un papier photo qui va être impressionné par la lumière passant par le trou. On considère dans l'exercice que le sténopé est éclairé en incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde λ .

d'onde λ .

1. Déterminer le comportement asymptotique de la taille d de la zone éclairée dans la limite $D \rightarrow +\infty$.
2. Déterminer le comportement asymptotique de la taille d de la zone éclairée dans la limite $D \rightarrow 0$.
3. En déduire qu'il existe une taille du trou optimale D_{opt} permettant d'avoir l'image la plus nette possible sur le papier photo.
4. A.N. Déterminer D_{opt} pour $\lambda = 650\text{nm}$ et $L = 30\text{cm}$.

Diffraction par quatre trous au sommet d'un carré

On considère un diaphragme opaque percé de quatre trous identiques situés au sommet d'un carré de côté a .
1. Préciser la nature de la diffraction de Fraunhofer de ce diaphragme.

$$F = \frac{D^2}{\lambda z}$$

discuté dans le
Frushard

Σ

réflectrices et réflecteurs

l'objet de l'étude sera séparé en deux parties : une partie polaire, une partie non-polaire, et une partie d'interférence.

tion du

de l'onde d'un fil. Celle-ci est la somme de tout les ondes d'ondes s'annulant sur la longueur

Diffraktion par quatre trous au sommet d'un carré

On considère un diaphragme opaque percé de quatre trous identiques situés au sommet d'un carré de côté a .

1. Déterminer l'expression de l'intensité correspondant à la figure de diffraction de Fraunhofer de ce diaphragme.
2. Proposer un schéma optique permettant d'observer cette figure de diffraction sur un écran.

Diffraktion par une tri-fente

On considère un diaphragme constitué de trois fentes parallèles, de largeur a et séparées par une distance d . Ces fentes sont éclairées par une fente source infiniment fine, parallèle aux trois fentes, et placée dans le plan focal objet d'une lentille. L'observation s'effectue dans un plan placé dans le plan focal image d'une lentille (de focale f'). Le système est symétrique par rapport au plan contenant l'axe optique et la fente centrale du diaphragme.

1. Déterminer l'expression de l'intensité observée en un point M du plan d'observation, en supposant que la distance de M à l'axe optique est très inférieure à f' .
2. Représenter l'intensité dans le plan d'observation.
3. Préciser comment est modifié le résultat précédent si la fente centrale est désormais deux fois plus large que les deux autres.

Interférences par 3 trous d'Young

On considère un écran opaque percé de trois trous carrés (de côté a) disposé aux sommets d'un triangle équilatéral (de côté b). Les carrés sont "parallèles" entre eux (ou, dit plus proprement, pour chaque paire de trous, il existe une translation transformant l'un des carrés en l'autre), et l'un des côtés du triangle est parallèle à certains côtés des carrés.

1. Déterminer l'intensité de la figure de diffraction de Fraunhofer, et la représenter.
2. En admettant que l'on peut introduire un déphasage sur l'amplitude en plaçant au niveau de chaque trou une lame d'épaisseur convenablement choisie, donner la condition pour que l'intensité soit nulle au centre de la figure de diffraction.

Apodisation

On considère un diaphragme dont la transmittance s'écrit :

$$t(X, Y) = \begin{cases} \cos(\pi X/a) & \text{si } |X| < a/2, |Y| < b/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.1)$$

1. Déterminer l'expression de l'intensité correspondant à la figure de diffraction de Fraunhofer de ce diaphragme.
2. Représenter l'intensité dans le plan d'observation.
3. Proposer un schéma optique permettant d'observer cette figure de diffraction sur un écran.

Diffraktion par un diaphragme absorbant

On considère un diaphragme dont la transmittance s'écrit :

$$t(X, Y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \cos(2\pi X/a)) & \text{si } |X| < a/2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.2)$$

1. Déterminer l'expression de l'intensité correspondant à la figure de diffraction de Fraunhofer de ce diaphragme.
2. Proposer un schéma optique permettant d'observer cette figure de diffraction sur un écran.

Réseau échelette

On considère un réseau échelette, constitué d'une lame à faces parallèles (d'indice n) sur laquelle a été gravé, parallèlement à l'axe Oy et de manière périodique, un motif au profil triangulaire, dont la trace dans le plan Oxz constitue un triangle rectangle (avec une profondeur du trait de gravure f , et un angle au sommet $\theta \ll 1$). L'hypothèse de ce triangle constitue donc le dioptrre séparant le milieu d'indice n de l'air dans lequel le réseau est placé ; le dispositif est éclairé sous incidence normale par une onde plane monochromatique.

- Déterminer la figure de diffraction de Fraunhofer d'un tel réseau, et discuter la condition pour laquelle toute la lumière est concentrée dans un unique ordre de diffraction.

Analyseur de front d'onde de Shack-Hartmann

- On considère une lentille convergente (de focale f , de diamètre a) placée dans le plan Oxy , éclairée par une onde plane monochromatique. Rappeler les caractéristiques de la figure de diffraction de Fraunhofer. Préciser quelle est la plus petite variation mesurable de la pente du front d'onde en admettant que l'on peut détecter un déplacement du centre de la tache focale égal au dixième de son diamètre.
- On place juste devant la lentille une lame d'épaisseur e et d'indice variable $n(x)$, que l'on éclaire par une onde plane monochromatique sous incidence normale. On suppose que les variations de l'indice se font sur des distances caractéristiques grandes devant le diamètre de la lentille. Justifier que cette situation est assimilable à la précédente, i.e. à celle d'une lentille éclairée par une onde plane sous une incidence β en l'absence de lame, en précisant le lien entre l'angle β et les propriétés de $n(x)$.
- On considère désormais non plus une lentille, mais un réseau de lentilles identiques (focale f , diamètre a) dont les centres optiques sont situés aux coordonnées $(x_n = nh, y_n = 0, z_n = 0)$, toujours précédé par la lame d'épaisseur e , d'indice $n(x)$ et éclairée sous incidence normale. Montrer que la mesure de la position de l'ensemble des tâches focales que forme le dispositif permet de remonter à la forme du front d'onde (à une constante près, et sous des hypothèses de continuité et dérivable) à l'entrée du réseau de lentilles.

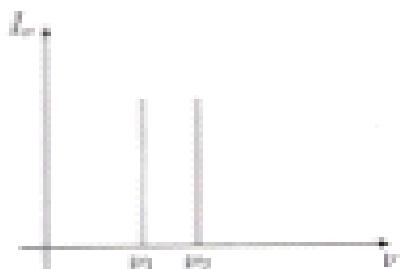
Remarque. Ce dispositif, appelé "analyseur de front d'onde de Shack-Hartmann", est utilisé en métrologie (pour caractériser une optique), en chirurgie ophtalmologique (corne, cristallin et lunette vitreuse constituent "la lame"), ainsi qu'en optique adaptative (c'est l'atmosphère qui déforme le front d'onde : un algorithme permet alors de modifier, à l'aide d'actuateurs, la surface du miroir du télescope pour "attraper" ces déformations).

§II.3 Cohérence

Cohérence temporelle : raie double symétrique

On considère des trous d'Young éclairés par une source ponctuelle dont "le spectre" $I_\nu(\nu)$ correspond à deux raies de même intensité.

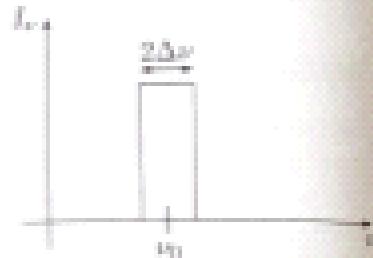
- Déterminer l'expression de l'intensité dans le plan d'observation (ou, plus précisément, la modulation de l'intensité sans considération aucune sur le phénomène de diffraction qu'il faut nécessairement invoquer pour justifier le fait que les deux trous se comportent comme des sources secondaires).
- En déduire le facteur de contraste correspondant à ce profil.



Cohérence temporelle : raie rectangulaire

On considère des trous d'Young éclairés par une source ponctuelle dont "le spectre" $I_s(\nu)$ correspond à une raie "rectangulaire" centrée sur ν_0 et de largeur $2\Delta\nu$.

- Déterminer l'expression de l'intensité dans le plan d'observation (ou, plus précisément, la modulation de l'intensité sans considération aucune sur le phénomène de diffraction qu'il faut nécessairement invoquer pour justifier le fait que les deux trous se comportent comme des sources secondaires).
- En déduire le facteur de contraste correspondant à ce profil.



Cohérence temporelle : raie gaussienne

On considère des trous d'Young éclairés par une source ponctuelle dont "le spectre" $I_s(\nu)$ correspond à une raie dont le profil est le suivant :

$$I_s = K \exp \left(-\frac{m c^2 (\nu - \nu_0)^2}{2 k_B T_0^2} \right). \quad (6.3)$$

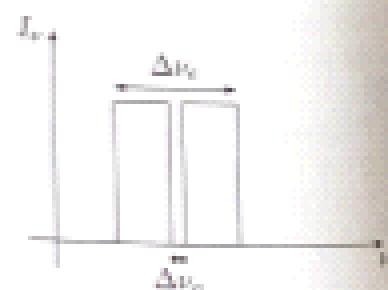
Un tel profil correspond à l'élargissement Doppler d'une raie spectrale centrée sur ν_0 dont la largeur naturelle est supposée négligeable.

- Déterminer l'expression de l'intensité dans le plan d'observation (ou, plus précisément, la modulation de l'intensité sans considération aucune sur le phénomène de diffraction qu'il faut nécessairement invoquer pour justifier le fait que les deux trous se comportent comme des sources secondaires).
- En déduire le facteur de contraste correspondant à ce profil.

Cohérence temporelle : raie d'absorption

On considère un interféromètre de Michelson négé en lame d'air, éclairé par une source dont "le spectre" $I_s(\nu)$ correspond à un spectre "large" sur lequel se creuse une "fine" raie d'absorption, tel que schématisé ci-contre. Par large et fine, il faut bien évidemment comprendre qu'en terme de nombre d'ondes $\sigma \equiv 1/\lambda$, on considère la limite $e\Delta\sigma_a \ll 1 < e\Delta\sigma_l$, où e est l'épaisseur de la lame d'air.

- Déterminer le facteur de contraste des anneaux observés dans ces conditions.
- Préciser à quelle(s) condition(s) la raie d'absorption peut être détectée.



§III Exercices d'approfondissement

§III.1 Miroir ondulé

On considère un miroir "presque-plan", dont la surface réfléchissante obéit à l'équation suivante :

$$z(x) = a_0 + a_1 \cos(2\pi x/a), \quad (6.4)$$

éclairé par une onde plane monochromatique de vecteur d'onde $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}$.

- Déterminer les directions n_α (représées par rapport à l'axe Ox) dans lesquelles la condition d'interférence constructive est réalisée et préciser les amplitudes correspondantes.
- Justifier le fait que le résultat d'optique géométrique correspondant à la réflexion spéculaire est retrouvé dans la limite $\lambda \ll a$.



§III.2 Transmittance d'une lentille mince

On considère une lentille mince caractérisée par l'indice n du verre utilisé et les rayons de courbure des deux faces R_1 et R_2 , placée dans l'air.

- En assimilant cette lentille à une lame d'épaisseur variable, montrer que la transmittance prend la forme suivante :

$$t(x, y) = \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)x\right) \exp\left(-i\pi\frac{x^2+y^2}{\lambda}(n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right). \quad (6.5)$$

- Interpréter l'expression de amplitude sur la face de sortie de la lentille lorsque celle-ci est éclairée par une onde plane.
- Justifier qu'un diaphragme accolé à une lentille (mince) donne une figure de diffraction de Fraunhofer lorsque l'observation s'effectue dans le plan conjugué de la source lumineuse.

§III.3 Transmittances aléatoires

Dans cet exercice, tous les éclairages sont supposés cohérents (obtenus par exemple en considérant une onde plane monochromatique), et les conditions de Fraunhofer satisfaites.

- On considère un diaphragme constitué de $N \gg 1$ motifs identiques répartis aléatoirement dans un plan (par exemple une plaque percée d'un grand nombre de trous de même diamètre). Discuter l'intensité associée à la figure de diffraction de Fraunhofer.
- On considère un diaphragme constitué de $N \gg 1$ motifs de phase répartis aléatoirement dans un plan (par exemple un dépoli de grain g). Déterminer l'amplitude de l'onde au point P d'observation, en séparant parties réelle et imaginaire. En déduire la densité de probabilité d'observer en P une intensité lumineuse I en supposant que la distribution des phases induites par les motifs du diaphragme est uniforme sur $[0; 2\pi]$. Déterminer le "grain" du speckle observé.

§III.4 Transformation de Fourier-Fresnel

- On considère une onde plane monochromatique d'amplitude complexe $\psi(r)$, de vecteur d'onde \mathbf{k} quelconque, se propageant dans le sens des z croissants. Le vecteur unitaire associé à \mathbf{k} admet comme coordonnées cartésiennes (α, β, γ) . Établir le lien entre l'amplitude complexe dans le plan $z = z_1$ et celle dans le plan $z = z_2 > z_1$ lorsque l'onde se propage dans un milieu homogène. Généraliser le résultat au cas d'une somme discrète d'ondes planes monochromatiques (de même fréquence) associées à des vecteurs d'onde différents \mathbf{k}_n et justifier enfin que pour une onde quelconque, l'amplitude complexe dans le plan de cote z s'exprime à l'aide de celle dans le plan $z = 0$ sous la forme suivante :

$$f_z(x, y) = \frac{1}{\lambda^2} \iint_S f_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \exp\left(i\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right) dx dy. \quad (6.6)$$

- En exploitant le fait que dans l'approximation paraxiale, $\gamma = \sqrt{1 - \alpha^2 - \beta^2} \approx 1 - (\alpha^2 + \beta^2)/2$, montrer que la relation précédente prend la forme du produit de convolution suivant :

$$f_z(x, y) = e^{i k z} f_0(x, y) * \frac{1}{i k z} \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{k z}\right). \quad (6.7)$$

$$f_r(x, y) = e^{ikx} f_0(x, y) * \frac{1}{ikz} \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{kz}\right). \quad (6.7)$$

3. Interpréter cette relation, et expliciter le produit de convolution pour obtenir l'expression suivante, appelée "transfomée de Fourier-Prestel" :

$$f_r(x, y) = \frac{e^{ikx}}{ikz} \exp\left(i\pi \frac{x^2 + y^2}{kz}\right) \text{TF}_{x/kz, y/kz} [f_0(x', y') \exp\left(i\pi \frac{x'^2 + y'^2}{kz}\right)] \quad (6.8)$$

Chapitre 6. Optique ondulatoire : exercices

Application

On considère un diaphragme placé dans le plan $z = 0$ dont la transmittance est nulle partout sauf sur la droite d'équation $x = 0$, éclairé sous incidence normale par une onde plane monochromatique d'amplitude A ($\in \mathbb{R}$) dans le plan $z = 0^+$.

4. Déterminer l'amplitude puis de l'intensité dans le plan d'équation $z = D$.

5. On réalise un dispositif permettant de superposer à cette onde une autre plane de même fréquence, se propageant selon l'axe Oz, et dont l'amplitude s'écrit, dans le plan $z = 0^+$: $B e^{-ikz/D}$ (avec $B \in \mathbb{R}$). Characteriser l'intensité dans le plan $z = D$ dans le cas où $B \gg A$, et montrer que celle-ci permet de déterminer (à une constante près) la phase de l'onde ayant traversé le diaphragme.

Remarque. Ce résultat illustre le principe de l'holographie : l'observation de la figure d'interférence (en intensité) entre une onde "sonde" et une onde de référence convenablement choisie permet de renseigner à des propriétés sur la phase de l'onde sonde.

§III.5 Filtrage

Dans toutes ces questions, les lentilles sont supposées de diamètre suffisamment grand pour ne pas diaphragmer les faisceaux.

1. On considère un diaphragme de transmission $t(x, y)$ placé dans le même plan qu'une lentille convergente de focale f_1 , éclairé par une onde plane monochromatique en incidence normale. Déterminer l'amplitude de l'onde focalisée f_1 dans le plan d'équation $z = D$, et préciser l'intensité dans le plan focal image de la lentille.

2. On considère un diaphragme de transmission $t(x, y)$ placé dans le plan focal objet d'une lentille convergente de focale f_1 , éclairé par une onde plane monochromatique en incidence normale. Déterminer amplitude et intensité dans le plan focal image de la lentille.

3. On considère un montage constitué de deux lentilles convergentes (de focale respectivement f_1 et f_2), éclairé par une onde plane monochromatique en incidence normale. Le plan focal image de L_1 coïncide avec le plan focal objet de L_2 . Un diaphragme de transmission $t_1(x, y)$ est placé dans le plan focal objet de L_2 , et un second, appelé filtre, est placé dans le plan focal image de L_1 (et donc dans le plan focal objet de L_2). Déterminer l'amplitude de l'onde dans le plan focal image de L_2 , et justifier l'appellation "filtre" du second diaphragme.

§IV Exercices potentiels

Diffraction par un bord d'écran

Remarque. L'intérêt de cet exercice est de permettre de corriger la phrase trop souvent entendue : "les phénomènes de diffraction apparaissent lorsque la taille de l'objet diffractant est similaire à la longueur d'onde". Ce n'est pas la taille de l'objet qui importe, mais l'échelle spatiale sur laquelle s'effectue des variations notables de la transmittance (l'indice en général, mais cela peut être également la phase). La diffraction par une fente

phénomènes de diffraction apparaissent lorsque la taille de l'objet émettant est similaire à la longueur d'onde. Ce n'est pas la taille de l'objet qui importe, mais l'échelle spatiale sur laquelle s'effectue des variations notables de la transmittance (l'indice en général, mais cela peut être également la phase). La diffraction par une fente pourrait être interprétée comme le résultat des interférences associées à la diffraction par deux bords d'écran.

Remarque. C'est aussi un joli exemple où les raisonnements à l'aide de considérations dimensionnelles sont à la peine...

Diffraktion de Fresnel

Fente rectangulaire, pour discuter la limite et mettre en garde sur le fait que "ça peut ressembler" ... ou non circulaire (pour démythifier Airy).

Montage 4f de stroboscopie

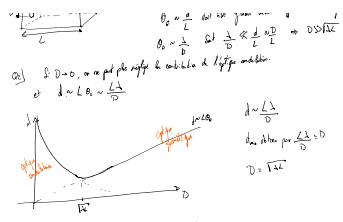
Holographie

Interférométrie de speckle

Interféromètre de Hanbury Brown et Twiss

Références

- [De15] Luc Deitzwiller, "Analyse quantitative des petits déviants de parallélisme d'une lame de verre à l'aide d'un interféromètre de Michelson". In: *Bulletin de l'Union des Professeurs de Physique et de Chimie* 109.975 (June 2015), pp. 879-896.



Chirisme temporel : rame double spectre

Aj Incidence impulsionnelle : $I_{\text{inc}} = I_{\text{max}} - I_{\text{min}}$

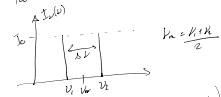
Def de g

$$I_{\text{inc}} = \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \, 2J_0(\nu) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right)$$

(steiner-kotkin).

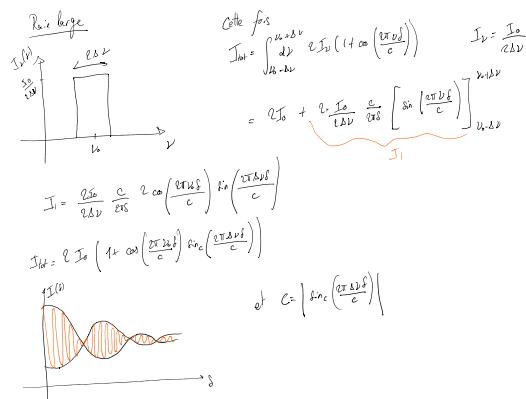
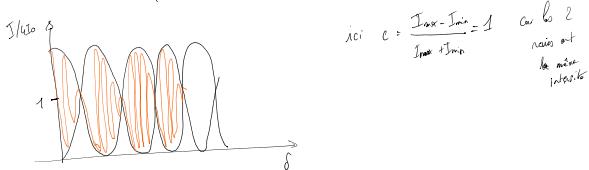
g la difference de marche

Pour le rame double



$$I_D(\nu) = I_0 \left(g(\nu - \nu_1) + g(\nu - \nu_2) \right)$$

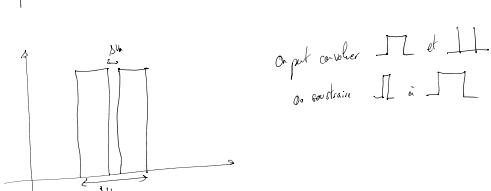
$$\begin{aligned} I_{\text{inc}} &= 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu_1\delta}{c}\right) + 1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu_2\delta}{c}\right) \right) \\ &= 4I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \cos\left(\frac{\pi D\delta}{c}\right) \right) \end{aligned}$$



$$\text{Grosse fréq} \quad I_{\text{inc}} = \int_{\Delta\nu - \Delta\nu}^{\Delta\nu + \Delta\nu} d\nu \, 2J_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right) \quad J_0 = \frac{I_0}{\pi\Delta\nu}$$

$$= 2I_0 + 2 \cdot \frac{I_0}{\pi\Delta\nu} \cdot \frac{c}{2\delta} \left[\sin\left(\frac{2\pi\nu_1\delta}{c}\right) - \sin\left(\frac{2\pi\nu_2\delta}{c}\right) \right]$$

$$g(\nu) = \left| \sin\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right|$$



$$\begin{aligned} I_{\text{inc}} &= I_{\text{LL}} - I_{\text{RR}} \\ &= 2I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu_1\delta}{c}\right) \sin\left(\frac{2\pi\nu_1\delta}{c}\right) - \frac{\Delta\nu}{\Delta k} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi\nu_1\delta}{c}\right) \sin\left(\frac{2\pi\nu_1\delta}{c}\right) \right) \right) \end{aligned}$$

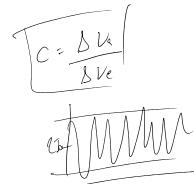
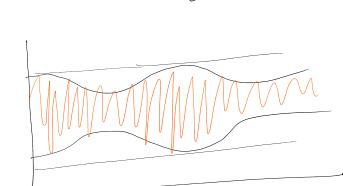
Pour avoir le même double spectre change par l'angle de 12.

$$I_{\text{tot}} = 2I_0 \left[1 - \frac{\Delta\nu}{\Delta k} + \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \left(\sin\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) - \frac{\Delta\nu}{\Delta k} \sin\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \right) \right]$$

$$\nu \quad C = |\nu|$$

$\Delta k \ll \Delta\nu$

$$\hookrightarrow I_{\text{tot}} \approx 2I_0 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi\nu\delta}{c}\right) \frac{\Delta\nu}{\Delta k} \right]$$

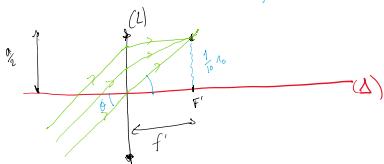


$$\begin{aligned} \Gamma &\approx \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{\nu}{c} \end{aligned}$$

$e^{\Delta\nu/c} \gg 1 \gg e^{\Delta k \alpha}$
 $\hookrightarrow \frac{2\pi\delta\Delta\nu}{c} \gg 1 \quad \text{inversément} \quad \text{sinc}(\dots\Delta\nu) \sim 1$
 $\Rightarrow \text{sinc}(\dots\Delta k \alpha) \sim 0$

Analyse du front d'onde

fauchefor : image géométrique de la source



telle tâche centrale donnée par le premier zero de la fct de Besal

$$\lambda_0 = 1.22 \frac{f'}{a}$$

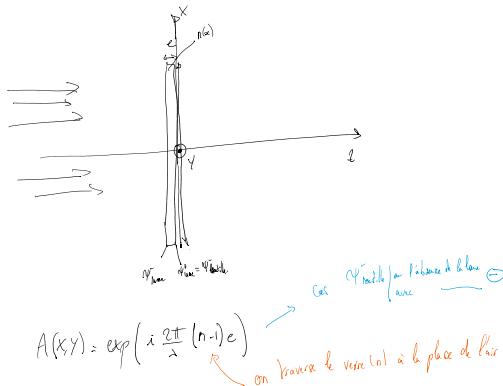
La tache centrale est centré sur l'image géométrique de la source.

$$\text{On peut mesurer } \delta x = \frac{x_0}{10}$$

$$\tan \theta = \frac{y_{p0}}{f} \quad \tan \theta' = \tan(\theta + d\theta) = \frac{y'_{p0}}{f'}$$

On prend $\theta = 0$

$$d \tan \theta' = \tan(\theta') d\theta \Rightarrow d\theta_{\text{new}} = \frac{0.244}{\alpha}$$



La transmittance de la lame.

A solucao para onda plana: $\Psi_{\text{plane}} = \exp(i(kz - \omega t))$

On éclaire avec une onde plane: $\hat{A}(x, y)$ à l'instant t .

Comme la place est arbitraire
 (x_1, x_2, \dots, x_n) est également

Si $\eta(x) = Ax + b$, alors η' associe à x le vecteur $\frac{d\eta}{dx}$.

On associe une onde plane de vecteur d'onde \vec{k} associé à la dérivée $\frac{d\alpha}{dx}$

$$\begin{aligned} \text{ap}_{\text{Bach}}(X_1) &= \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} \left[(A_0 + \omega_0 t) C + \frac{1}{2} \right] \right) \exp(-i\omega_0 t) \\ &= e^{-i\omega_0 t} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \left[(A_0 + \omega_0 t) C + \frac{1}{2} \right]} \quad (\text{caractère de temps constant}) \\ \text{donc } X_1 &= \frac{e^{i \frac{2\pi}{\lambda} \left[(A_0 + \omega_0 t) C + \frac{1}{2} \right]}}{e^{-i\omega_0 t}} \end{aligned}$$

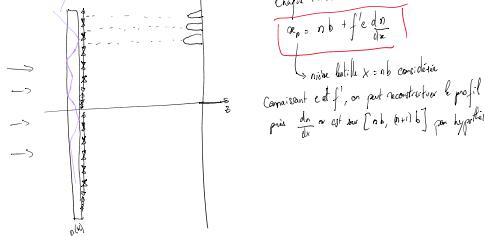
$$\sin \beta = \frac{d e}{\sqrt{(e^2 + d^2)}} \quad \text{with } \begin{array}{l} \overrightarrow{e} \\ \overrightarrow{d} \end{array}$$

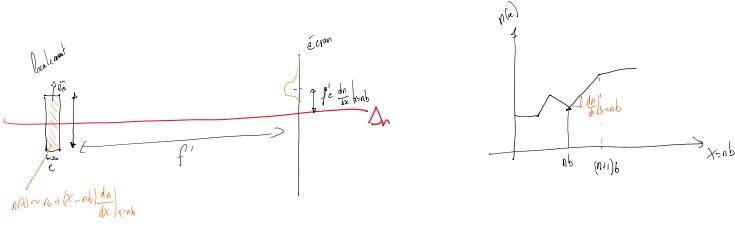
Topique adaptative

$$\boxed{\alpha_p = n b + f' c \frac{dn}{dx}}$$

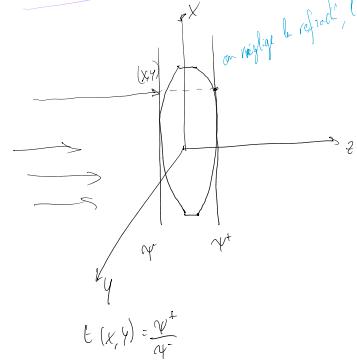
$$\alpha_p = nb + f'c \frac{dn}{dx}$$

Comme f est \mathcal{C}^1 , on peut reconstruire le profil de n à une constante près : $n(x) = nb + (k+1)x$ par hypothèse.





Transfert d'une lentille mince



On néglige la réfraction:

$$t(x,y) = \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) e(x,y)\right)$$

$$f_1(x,y) = R_1 - \sqrt{R_1^2 - (x^e - x^i)^2}$$

$$\text{et } e_1(x,y) = \Delta O_1 - S_1(x,y)$$

$$= \Delta O_1 \cdot R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^e + y^e}{R_1^2}}\right)$$

$$e_2(x,y) = \Delta O_2 - S_2(x,y)$$

$$\approx \Delta O_2 \cdot |R_2| \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^e + y^e}{R_2^2}}\right)$$

$$t(x,y) = \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) (e_1 + e_2 + e_3)\right)$$

$$= \exp(i\psi) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^e + y^e}{R_1^2}}\right)\right) \times \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) |R_2| \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^e + y^e}{R_2^2}}\right)\right)$$

$$t(x,y) \approx \exp(i\psi) \exp\left[-i \frac{2\pi}{\lambda} (n-1) \frac{(x^e + y^e)}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{|R_2|}\right)\right] = -\frac{1}{|R_2|}$$

① On éclaire avec une OPPH

$$n^e = \exp(i(k_e - \omega t))$$

$$n^i = t(x,y) n^e$$

$$= e^{i\psi} e^{i\omega t} \exp\left(i(k_i - k(n-1)) \frac{x^e + y^e}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{|R_2|}\right)\right)$$

On doit retrouver une onde sphérique convergente vers F'

$$\frac{e^{i(k_e - \omega t)}}{n} = \text{onde sphérique centrée à } O = \text{onde sortante}$$

centre en $F' \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - f')^2} \rightarrow \text{onde sortante avec } \frac{1}{r^2} e^{i(k_e - \omega t)}$

DL avec $x^e + y^e \ll (k - f')^2$

$$r \approx |z - f'| \left(1 + \frac{x^e + y^e}{2(z - f')} \right)$$

$$r \approx |z - f'| \exp[ik \left(|z - f'| + \frac{x^e + y^e}{2(z - f')} \right)]$$

$$a \sim |z \cdot f| \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2|z \cdot f|^2} \right)$$

$$\text{Soit } \Psi_{\text{sphérique}} = \exp(iwt) \exp(ik \left(|z \cdot f|^2 + \frac{x^2 + y^2}{2|z \cdot f|^2} \right))$$

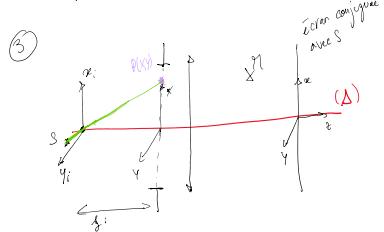
Dans le plan $z=0$

$$\Psi_0 = \frac{e^{iwt}}{\pi} \exp \left(ik \left(f' + \frac{x^2 + y^2}{2f'^2} \right) \right)$$

$$(n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f'}$$

On retrouve $\Psi_0 = \Psi^+$ au signe près.

Le rayon est de ce fait que Ψ_0 part de F' alors qu'il converge vers F' .



La tâche est diaphanaire soit en $z=0$

$$SP = \left(\|\overrightarrow{SP} \|^2 \right)^{1/2} \sim_{x \ll y \ll z} |f'_0|^{-1} \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2|f'_0|}$$

$$A(P) = \frac{1}{SP} e^{iwt} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} SP}$$

$$A^-(P) = \frac{e^{iwt}}{|f'_0|} \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} \left(|f'_0| + \frac{x^2 + y^2}{2|f'_0|} \right) \right) \exp \left(i \frac{2\pi}{2|f'_0|} (x^2 + y^2) \right) \exp \left(i \frac{2\pi}{2|f'_0|} (-x_0 X - y_0 Y) \right)$$

$$A^+(P) = E_{\text{diaph}}(x, y) A^-(P)$$

$$A^{\pm L}(P) = E_{\text{diaph}} E_L A^-(P)$$

$$A(Q) = -i \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{A^{\pm L}(P) Q}{|PQ|} e^{-iwt} e^{i \frac{2\pi}{\lambda} SP} dS$$

$$SP = \sqrt{1 + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2|f'_0|}}$$

$$A(Q) \propto \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-iwt) \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} \left(|f'_0| + \frac{x^2 + y^2}{2|f'_0|} \right) \right) \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(x^2 + y^2)}{2|f'_0|} \right) \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} \left(x - \frac{x_0 X - y_0 Y}{|f'_0|} \right) \right) \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} \left(x + \frac{x^2 + y^2}{2|f'_0|} \right) \right) \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2|f'_0|} \right)$$

$$A(Q) \propto \iint_{\mathbb{R}^2} dX dY E_{\text{diaph}}(x, y) \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} \left(|f'_0| + \frac{1}{2} - \frac{1}{f'} \right) \right) \exp \left(i \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{-x_0}{|f'_0|} - \frac{x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta}{f'} \right) + Y(\theta) \right) = -\frac{\Delta \omega}{\omega}$$

$$\Rightarrow A(Q) \propto \iint_{\mathbb{R}^2} dX dY E_{\text{diaph}}(x, y) \exp \left(-i \frac{2\pi}{\lambda} (X \Delta \omega + Y \Delta \theta) \right)$$

Le voisinage de l'image géométrique (x_0, y_0) est l'écart à la figure géométrique.
et de la transmittance du diaphragme.

$$e_c(x, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(y-x)} \exp\left(-i\pi \left(\frac{x^2+y^2}{\lambda}\right)^{\frac{1}{f}}\right) d\lambda \right) dy$$

pour x
pour y

$$\Rightarrow H(u, v) = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy f(x, y)$$



Au voisinage de l'image géométrique (x_0, y_0) est l'écart à la figure géométrique.
on observe la TF de la transmittance du diaphragme.

Appliquer :

$$I(u, v) = I_0 \left| \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy f(x, y) \exp(-i2\pi(ux + vy)) \right|^2 \text{ avec}$$

$$u = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\vec{t}_i}{\|\vec{t}_i\|} + \frac{\vec{o_i}}{\|\vec{o_i}\|} \right) \cdot \vec{u_x}$$

$$v = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\vec{t}_i}{\|\vec{t}_i\|} + \frac{\vec{o_i}}{\|\vec{o_i}\|} \right) \cdot \vec{u_y}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right), & |x| < a/2, |y| < \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\text{TF}(f(x, y)) = \int_{-a/2}^{a/2} dx \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \exp(-i2\pi ux) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dy \exp(-i2\pi vy)$$

$\delta(v)$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} dx \left(\frac{e^{i\frac{\pi x}{a}} + e^{-i\frac{\pi x}{a}}}{2} \right) e^{-i2\pi ux} \cdot \delta(v)$$

$$= \int_{-a/2}^{a/2} dx \underbrace{\frac{e^{i\frac{\pi}{a} - 2\pi ux} + e^{-i\frac{\pi}{a} + 2\pi ux}}{2}}_{\mathcal{E}} e^{-i\frac{\pi}{a} + 2\pi vu} \delta(v)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{e^{i\frac{\pi}{a} - 2\pi ux}}{i\left(\frac{\pi}{a} - 2\pi u\right)} \right]_{-a/2}^{a/2} + \left[\frac{-e^{-i\frac{\pi}{a} + 2\pi ux}}{i\left(\frac{\pi}{a} + 2\pi u\right)} \right]_{-a/2}^{a/2} \right\} \delta(v)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{e^{(i\frac{\pi}{a} - 2\pi\omega)x}}{i(\frac{\pi}{a} - 2\pi\omega)} \right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} + \left[\frac{-e^{-(i\frac{\pi}{a} + 2\pi\omega)x}}{i(\frac{\pi}{a} + 2\pi\omega)} \right]_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \right\} \cdot f(x)$$

$$= \frac{e^{i(\frac{\pi}{a} - 2\pi\omega)\frac{d}{2}} - e^{-i(\frac{\pi}{a} - 2\pi\omega)\frac{d}{2}}}{2i(\frac{\pi}{a} - 2\pi\omega)} + \frac{e^{-i(\frac{\pi}{a} + 2\pi\omega)\frac{d}{2}} - e^{i(\frac{\pi}{a} + 2\pi\omega)\frac{d}{2}}}{2i(\frac{\pi}{a} + 2\pi\omega)}$$

$$= \left(\frac{\sin((\frac{\pi}{a} - 2\pi\omega) \times \frac{d}{2})}{\frac{\pi}{a} - 2\pi\omega} + \frac{\sin((\frac{\pi}{a} + 2\pi\omega) \times \frac{d}{2})}{\frac{\pi}{a} + 2\pi\omega} \right) f(x)$$

$$= \left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \pi\omega a)}{\frac{\pi}{a} - 2\pi\omega} + \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \pi\omega a)}{\frac{\pi}{a} + 2\pi\omega} \right) f(x)$$

$$= \left(\frac{\cos(\pi\omega a)}{\frac{\pi}{a} - 2\pi\omega} + \frac{\cos(\pi\omega a)}{\frac{\pi}{a} + 2\pi\omega} \right) f(x)$$

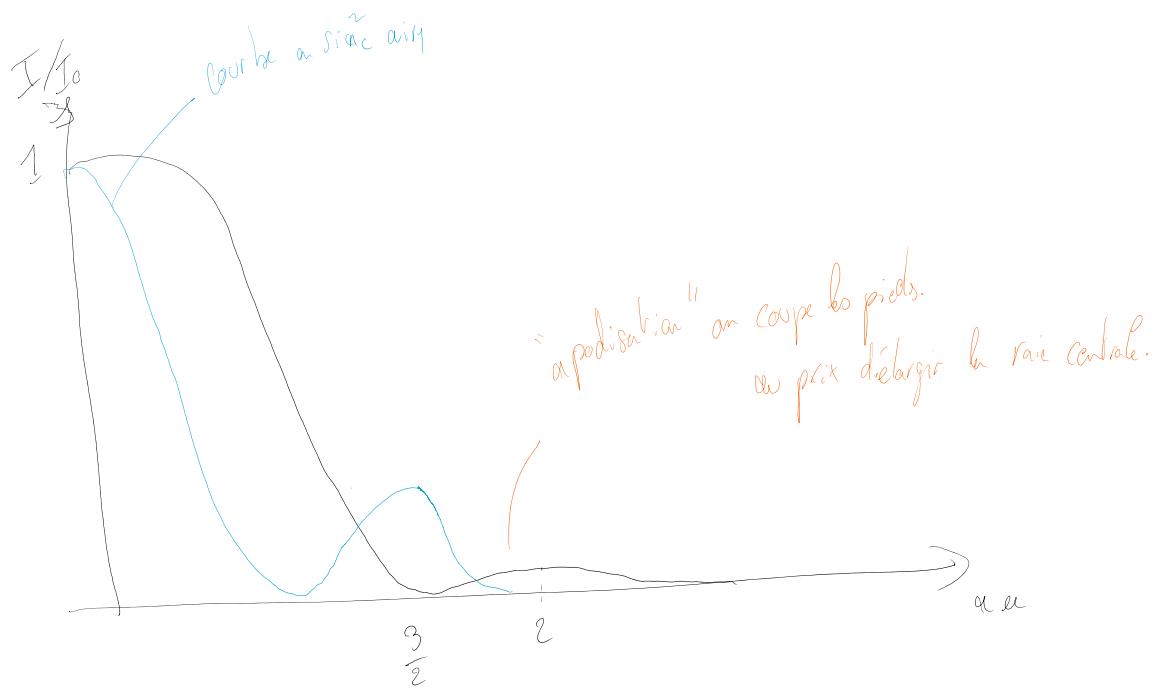
$$= f(x) \cos(\pi\omega a) \left(\frac{1}{\frac{\pi}{a} - 2\pi\omega} + \frac{1}{\frac{\pi}{a} + 2\pi\omega} \right)$$

$$\left. \frac{d}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} \mathcal{S}(\nu)$$

$$= f(v) \cdot \cos(\pi u a) \times \frac{2\pi}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - (2\pi u a)^2}$$

$$= f(v) \cdot \cos(\pi u a) \frac{2 \frac{\pi}{a}}{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \left[1 - (2\pi u a)^2\right]} = f(v) \cos(\pi u a) \frac{2a}{\pi \left(1 - (2\pi u a)^2\right)}$$

$$\Rightarrow I(u, v) = I_0 \times f(v) \left(\frac{\cos(\pi u a)}{1 - (2\pi u a)^2} \right)^2$$



$$\text{Si } u a = \frac{1}{2} - \varepsilon, \text{ le dénom : } 1 - (2ua)^2 = 1 - (1 + 2\varepsilon)^2$$

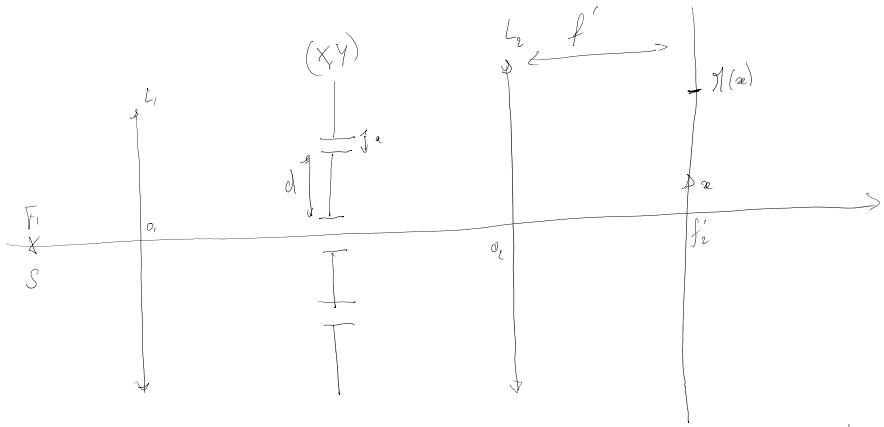
$$\Rightarrow \text{dénom} = 1 - (1 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2) \\ \sim 4\varepsilon + O(\varepsilon^2)$$

$$\cos(\pi u a) = \cos\left(\pi\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi\varepsilon\right) = \sin(\pi\varepsilon) \sim \pi\varepsilon + O(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(\pi u a)}{1 - (2ua)^2} \sim \frac{\pi\varepsilon}{4\varepsilon} \rightarrow \text{pas de divergence.}$$

Diffraktion par une tri-fente

Euren



On observe la diffraction de Fraunhofer (écran dans le plan image de L_2 et source dans le plan objet de L_1)

→ on calcule donc la TF ($\hat{t}(x,y)$)

$$1) \quad t(x,y) = t_{\text{fente},x}(x=0) + t_{\text{fente},x}(x=d) + t_{\text{fente},x}(x=d)$$

$$\text{ou } t_{\text{fente},x} = \begin{cases} 1 & |x| \leq \frac{a}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hat{t} = \text{TF}(t(x,y)) &= \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy t(x,y) e^{-2\pi i (ux+vy)} \\ &= \delta(0) \times \left(\int_{-d-\frac{a}{2}}^{d+\frac{a}{2}} dx \times 1 \times e^{-2\pi i ux} + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \times 1 \times e^{-2\pi i ux} + \int_{\frac{a}{2}}^{d-\frac{a}{2}} dx \times 1 \times e^{-2\pi i ux} \right) \end{aligned}$$

I_1 fente en $x=d$
 I_2 fente en $x=0$
 I_3 fente en $x=-d$

$$I_2 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx e^{-2\pi i ux} = -\frac{1}{2\pi u} \left[e^{-2\pi i ux} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} = -\frac{1}{2\pi u} \left[e^{-i\pi ua} - e^{i\pi ua} \right]$$

$$= \frac{a}{i\pi u a} \sin(\pi ua) = a \sin_c(\pi ua)$$

$$I_1 : x' = x+d, \quad dx' = dx \quad I_3 = e^{-2\pi i ud} a \sin_c(\pi ua)$$

$$I_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx' e^{-2\pi i ux'} e^{-2\pi i ud}$$

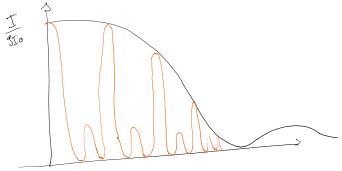
$$= e^{-2\pi i ud} \times a \sin_c(\pi ua)$$

$$\text{D'où } \hat{t} = \delta(v) a \sin_c(\pi ua) (1 + 2 \cos(2\pi ud))$$

$$\text{D'où } \hat{t} = f(v) \propto \sin(\pi ka) [1 + 2 \cos(2\pi ad)]$$

$\text{et } I = I_0 S(v) \sin^2(\pi ka) [1 + 2 \cos(2\pi ad)]$

Interférence

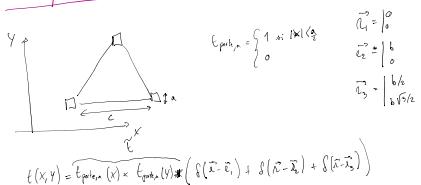


En fait: $t(x,y) \propto t_{\text{fond}} * (f(x,d) + f(x) + f(x+d))$

$\text{Si } t = t_{\text{fond}} (e^{2\pi ad} + 1 + e^{-2\pi ad}) \rightarrow \text{interférence}$ Formule des rives
à N=3
(fond d'origine)

3) Faisceau: largeur $a \gg \lambda$
 $I = I_0 S(v) (2 \sin(\pi ka) + 2 \sin(\pi ad) (2 \cos(\pi ad))) \propto I_0 t^2$

Interférence à 3 arêtes



$$t(x,y) = t_{\text{pôle}}(x) \times t_{\text{pôle}}(y) * (f(\vec{x}, \vec{\epsilon}_1) + f(\vec{x}, \vec{\epsilon}_2) + f(\vec{x}, \vec{\epsilon}_3))$$

$$\text{TF}(t(x,y)) = \alpha \sin(\pi ad) \propto \sin(\pi ad)$$

$$\text{avec } a = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \vec{d}}{\partial \theta} \cdot \vec{\epsilon}_1 \quad \text{et } d = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \vec{d}}{\partial \theta} \cdot \vec{y}$$

$$\text{TF}(f(x, \vec{\epsilon}_i)) = \int_{\mathbb{R}^2} dx dy \exp(-i \vec{k} \cdot (\vec{x} + \vec{y})) f(x, \vec{\epsilon}_i)$$

$$= \exp(-i \vec{k} \cdot (\vec{x} + \vec{y})) = \exp\left(-\frac{i \pi}{\lambda} \frac{\partial \vec{d}}{\partial \theta} \cdot \vec{\epsilon}_i\right)$$

$$\text{Soit } \frac{\partial \vec{d}}{\partial \theta} = \lambda \vec{\epsilon}_1 + \lambda \vec{\epsilon}_2 + \lambda \vec{\epsilon}_3 = \hat{\delta}$$

$$\text{TF}(f(x, \vec{\epsilon}_i)) = e^{-i \frac{\pi}{\lambda} \hat{\delta} \cdot \vec{\epsilon}_i}$$

$$\text{TF}(t(x,y)) = \alpha^3 \sin^3(\pi ad) \propto \left(e^{-i \frac{\pi}{\lambda} \hat{\delta} \cdot \vec{\epsilon}_1} + e^{-i \frac{\pi}{\lambda} \hat{\delta} \cdot \vec{\epsilon}_2} + e^{-i \frac{\pi}{\lambda} \hat{\delta} \cdot \vec{\epsilon}_3} \right)$$

$$I = I_0 \sin^3(\pi ad) \sin^3(\pi av)$$

$$\text{Soit } \vec{r}_1 = \vec{\epsilon}_1, \vec{r}_2 = \vec{\epsilon}_2, \vec{r}_3 = \vec{\epsilon}_3$$

$$I \propto \left(e^{-i \frac{\pi}{\lambda} \hat{\delta} \cdot \vec{r}_1} + e^{-i \frac{\pi}{\lambda} \hat{\delta} \cdot \vec{r}_2} + e^{-i \frac{\pi}{\lambda} \hat{\delta} \cdot \vec{r}_3} \right) \left(e^{-i \frac{\pi}{\lambda} \hat{\delta} \cdot \vec{r}_1} + e^{-i \frac{\pi}{\lambda} \hat{\delta} \cdot \vec{r}_2} + e^{-i \frac{\pi}{\lambda} \hat{\delta} \cdot \vec{r}_3} \right)$$

$$I \propto 3 + 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{\lambda} \hat{\delta} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} \hat{\delta} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} \hat{\delta} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)\right) \right)$$

$$\text{Soit } \vec{p} = 0$$

$$I = I_0 \sin^3(\pi ad) \underbrace{\left(3 + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} ad\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} ad\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} ad\right) \right)}_{3 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} ad\right) + 4 \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} ad\right)}$$

3) $\text{TF}(t(x,y)) = 3 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} ad\right) + \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{\lambda} ad\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} ad\right) + \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} ad\right)}_{= 3}$

$$= a^2 \left(e^{i \frac{\pi}{\lambda} ad} + e^{-i \frac{\pi}{\lambda} ad} + 3 \right)$$

$$Q_x = \frac{ad}{\lambda} \cdot Q_y \text{ et } Q_y = \frac{ad}{\lambda} \cdot Q_x \quad [\text{racine carrée de l'ordre}]$$

$$\geq \alpha^2 \left(\frac{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + e^{i\theta_3}}{3} \right)$$

$\theta_1 = \frac{\pi}{3} \cdot \theta_0$ et $\theta_2 = \frac{2\pi}{3} \cdot \theta_0$ [minimise de l'entropie]

Transfert d'onde

$$t(x,y) = t_{\text{fw}} * \left(\sum_{n=1}^N g(x-x_n) f(y-y_n) \right)$$

$A(x,y) = A_0 \text{TF}(t_{\text{fw}}) \sum_{n=1}^N e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x-x_n}{\lambda}} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \frac{y-y_n}{\lambda}}$

$$I = \int_0^L |\text{TF}(t_{\text{fw}})|^2 \sum_{n=1}^N e^{-\frac{4\pi}{\lambda^2} (x-x_n)(y-y_n)}$$

$$= \int_0^L \left(\sum_{n=1}^N e^{-\frac{4\pi}{\lambda^2} (x-x_n)(y-y_n)} \right)^2 \sum_{n=1}^N e^{-\frac{4\pi}{\lambda^2} (x-x_n)(y-y_n)}$$

$$= I_{\text{fw}} \left[N + \sum_{p=1}^N \sum_{q=p+1}^N 2 \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} [(x_p - x_q) + y(y_p - y_q)] \right) \right]$$

Le phénomène est inversé par relation des conditions à x et y :

$$|x_p - x_q| \leq L \quad (p)M - (q)N = (p)M - (q)N$$

$$= \frac{k_x}{2} - \left(\frac{k_y}{2} \right) = \frac{Qk}{2}$$

$$\delta Q = \frac{Qk}{\lambda} \frac{k_x k_y}{2}$$

Si $\delta Q \gg \delta k \Rightarrow$ interférences destructives $\Rightarrow I \approx N \text{Io}$ pour $\gg \frac{\lambda^2}{L^2}$

$$\text{si } x, y = 0 \quad I = \text{Io} \left(N + \sum_{p=1}^N \sum_{q=p+1}^N 2 \cos(0) \right)$$

$$= \text{Io} \left(N + (N-1) + (N-2) + \dots + 1 \right) \times 2$$

$$= \text{Io} \left(N + \frac{N(N-1)}{2} \right) \approx \text{Io} N^2$$

Transmittance aléatoire

$$I = I_0 \left| T F(t_{\text{élect}}) \right|^2 \sum_{p=1}^N e^{-i2\pi(x_p f_x + y_p f_y)} \quad f_x = \frac{x}{\lambda z}, \quad f_y = \frac{y}{\lambda z}$$

↳ Symétries cycliques évidentes sur le moyen d'ensemble (c'est à dire pour la réalisation de diaphragmes statiques, aléatoirement).

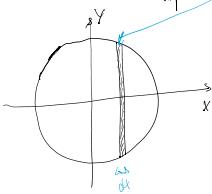
$$\hookrightarrow \langle I(f_x, f_y) \rangle \propto \langle |E(t)|^2 \rangle$$

$$\begin{aligned} & \langle \left| \sum_{p=1}^N e^{-i2\pi(x_p f_x + y_p f_y)} \right|^2 \rangle \text{ avec } \omega_p = 2\pi(f_x x_p + f_y y_p) \in \mathbb{R} \\ & = \left\langle \left(\sum_{p=1}^N \cos(\omega_p) - i \sin(\omega_p) \right)^2 \right\rangle \text{ donc } i \langle 1 \rangle = 0 \\ & = \left\langle \left| \sum_{p=1}^N \left(\cos(\omega_p) \cos(\omega_p) + \sin(\omega_p) \sin(\omega_p) \right) \right|^2 \right\rangle + 0 \\ & = \left\langle \sum_{p=1}^N \cos^2(\omega_p) + \sin^2(\omega_p) \right\rangle + \sum_{p=1}^N \left[\cos(\omega_p) \cos(\omega_p) + \sin(\omega_p) \sin(\omega_p) \right] \end{aligned}$$

$$= N + N(N-1) \left(\langle \cos^2(\omega) \rangle + \langle \sin^2(\omega) \rangle \right)$$

Diaphragme de rayon R, densité de trous $\mu = \frac{N}{\pi R^2}$

$$\langle \cos(\omega) \rangle = \frac{1}{N} \int_{\text{diaph}} \cos(\omega) dN \quad \omega = 2\pi f_x x$$



$$\langle \cos(2\pi f_x x) \rangle = \frac{1}{N} \int_{-R}^R \cos(\omega) \mu 2\sqrt{R^2 - x^2} dx$$

$$\text{et } J_1(t) = \frac{t}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \cos(t) dt$$

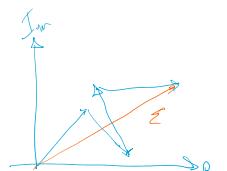
$$\langle \sin(\omega) \rangle^2 = 0 \text{ car } \int_{-R}^R \sin(\omega) \sqrt{R^2 - x^2} dx \text{ nul par symétrie}$$

$$I_{\text{tot}} = I_0 \text{ et } \left(N + N(N-1) \left[\frac{2J_1(2\pi f_x)}{2\pi R f_x} \right]^2 \right)$$

$$\text{Si } 2\pi R f_x \approx 1$$

$$\hookrightarrow f_x = \frac{1}{2\pi R} = \frac{x_c}{\lambda z} \quad \text{donc } x_c = \frac{\lambda z}{2\pi R}$$

$$\Rightarrow A(f_x, f_y) = \sum_{p=1}^N A_p \exp(i2\pi p) \quad \text{avec } d_p = \frac{2\pi}{\lambda} (\text{PA}) + \varphi_p \quad \text{à cause de ça on a une marche aléatoire (marche)} \quad \text{marche aléatoire}$$



$$= \sum_{p=1}^N A_p \underbrace{\cos(d_p)}_{A_{px}} + \underbrace{i \sin(d_p)}_{A_{py}} \quad \text{avec } \langle A_x^2 \rangle = \langle A_y^2 \rangle = \frac{\langle I \rangle}{2}$$

$$\langle I \rangle = \langle |E A_{px}|^2 \rangle + \langle |E A_{py}|^2 \rangle \quad \sum A_{px} = A_x$$

$$= N A_0^2 \quad (\text{marche aléatoire sur } \mathbb{D})$$

$$\rho(A_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A_x^2}} \exp\left(-\frac{A_x^2}{2A_x^2}\right) \quad \rho(A_y) = \text{idem.} \quad A_x, A_y \text{ indép}$$

$$\hookrightarrow \rho(A_x A_y) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{\langle A_x^2 \rangle \langle A_y^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{\langle A_x^2 + A_y^2 \rangle}{2\langle A_x^2 \rangle}\right)$$

$$= \frac{2}{2\pi I} \exp\left(-\frac{I}{2I}\right)$$

$$(A_x, A_y) \rightarrow (I, \theta) \quad \rightarrow \rho(A_x, A_y) dA_x dA_y = \rho(I, \theta) dI d\theta$$

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x}$$

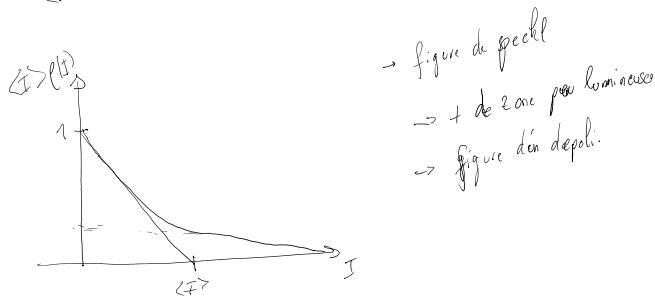
$$I = A_x^2 + A_y^2$$

$$\rightarrow \rho(I) dI = \rho(A_x, A_y) 2\pi R dR \quad \text{avec } R = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{I}$$

$$\rho(I) dI = \rho(A_x, A_y) 2\pi \sqrt{I} \frac{dI}{2\pi I}$$

$$= \rho(A_x, A_y) \pi dI$$

$$\rho(I) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{I}{2I}\right)$$



→ si taille grain g , faible doppli: L

→ taille figure de diffraction $\frac{L}{g}$

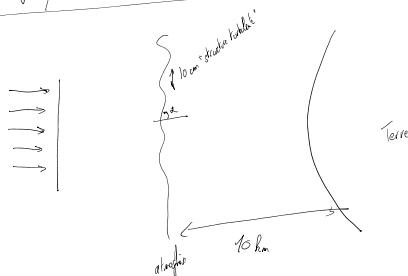
$$\left(\begin{array}{l} f = (P_1 \eta_1) - (P_2 \eta_2) = \frac{(P_1 \eta_1)}{2} \\ \text{différence} \\ \Delta = P_1 \eta_1 - P_2 \eta_2 - (P_1 \eta_2 - P_2 \eta_1) = \frac{\vec{P}_1 \vec{P}_2 \cdot \vec{\eta}_1 \vec{\eta}_2}{pn} \end{array} \right) \quad \text{pour trou d'Young}$$

→ grain du Speckle: $|P_1 \eta_1|$

$$\text{par paire de luminosité similaire (ou l'inverse) → rend double de } T$$

$$T \approx \frac{2R \eta_1 \eta_2}{2} \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{donc } \eta_1 \eta_2 = \frac{\pi \lambda}{4R}$$

Pourquoi les étoiles scintillent et pas la planète?



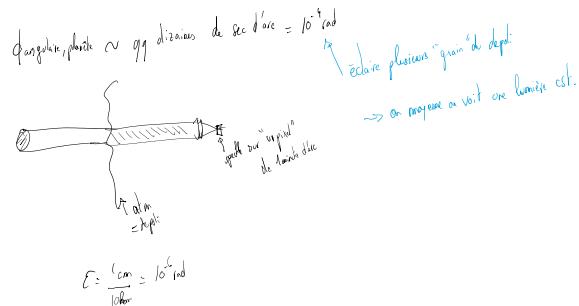
Si taille typique $\approx 10 \text{ cm}$

$$\Delta \delta \approx \lambda \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{\lambda}{0.1} = \frac{0.6 \cdot 10^{-6}}{0.1} = 10^{-5} \text{ rad} = 8 \text{ sec d'arc} = \text{angle front d'arc/horizont}$$

La résolution $\Delta\theta_{\text{sol}} = 1^{\text{mrad}}$
 mais turbulence floue dans l'œil \rightarrow ça correspond à "dépasser le déph." et donc la figure de spotte \rightarrow scintillant

$$\rightarrow \text{au plan}$$

$$\Delta\theta_{\text{sol}} = \frac{10\text{cm}}{10\text{km}} = 10^{-3}\text{rad}$$



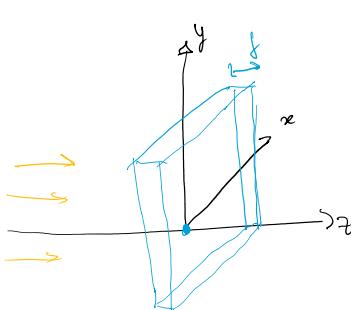
$$E = \frac{r}{L} = 10^{-3}\text{rad}$$

Interprétation du spot de Tardieu

TD Polarisation

26 September 2024 15:09

Filtre de Lyot

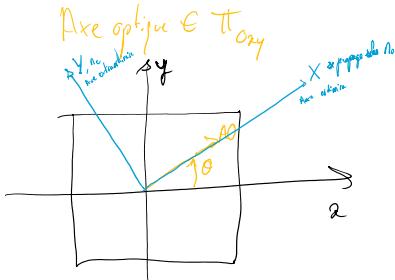


On considère une onde plane :

$$\vec{E} = E_0 \exp(i(hz - \omega t))$$

En $z=0$, on rentre dans la lame

Pour $z \in [0, d]$



$$\vec{E}_i(z=0) = E_{ix} \hat{e}_x + E_{iy} \hat{e}_y$$

(homméogramme): rotation des (X, Y) \rightarrow regard à prop $\rightarrow (x, y) \rightarrow$ grégor.

$$\hat{e}_x = \cos \theta \hat{e}_X - \sin \theta \hat{e}_Y$$

$$\hat{e}_y = \cos \theta \hat{e}_Y + \sin \theta \hat{e}_X$$

$$\vec{E}_i = E_{ix} \hat{e}_x + E_{iy} \hat{e}_y$$

$$\text{avec: } E_{ix} = \cos \theta E_{iX} + \sin \theta E_{iY}$$

$$E_{iy} = -\sin \theta E_{iX} + \cos \theta E_{iY}$$

$$\begin{pmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{iX} \\ E_{iY} \end{pmatrix}$$

Polarisation associée aux lignes neutres qui s'avèrent être les axes principaux car la lame est taillée parallèles

$$\begin{pmatrix} E_{out,x} \\ E_{out,y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{\lambda} n_d} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{\lambda} n_d \delta} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} e^{i\Delta \phi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\Delta \phi_y} \end{pmatrix}$$

On revient dans le base (e_x, e_y)

$$\begin{pmatrix} E_{out,x} \\ E_{out,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{out,x} \\ E_{out,y} \end{pmatrix}$$

Il vient:

$$(E_{out,x}) / (\cos \theta - \sin \theta) \left| \begin{pmatrix} e^{i\Delta \phi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\Delta \phi_y} \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} E_{ox} \\ E_{oy} \end{pmatrix} \right|$$

$$\begin{pmatrix} E_{\text{out},x} \\ E_{\text{out},y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\Delta\phi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\Delta\phi_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\text{in},x} \\ E_{\text{in},y} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_{\text{out},x} \\ E_{\text{out},y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\Delta\phi_x} \cos^2 \theta + e^{i\Delta\phi_y} \sin^2 \theta & \left(e^{i\Delta\phi_x} - e^{i\Delta\phi_y} \right) \cos \theta \sin \theta \\ e^{i\Delta\phi_y} \cos^2 \theta + e^{i\Delta\phi_x} \sin^2 \theta & e^{i\Delta\phi_y} \cos \theta + e^{i\Delta\phi_x} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\text{in},x} \\ E_{\text{in},y} \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(k_2 - \omega t)} \quad \vec{E}_0 = \begin{cases} E_{\text{in},x} \\ E_{\text{in},y} \end{cases}$$

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E})$$

$$= \begin{cases} E_{\text{in},x} \cos(\omega t) \\ E_{\text{in},y} \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

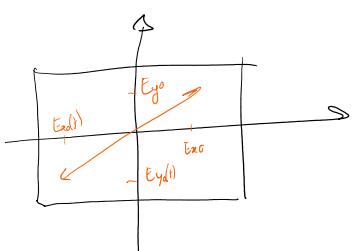
$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{\text{in},x} e^{i(k_2 - \omega t)} \\ E_{\text{in},y} e^{i(k_2 - \omega t + \varphi)} \end{pmatrix} = e^{i(k_2 - \omega t)} \begin{pmatrix} E_{\text{in},x} \\ E_{\text{in},y} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \|E\| e^{i(k_2 - \omega t)} \underbrace{\begin{pmatrix} E_{\text{in},x} \\ E_{\text{in},y} e^{i\varphi} \end{pmatrix}}_{\text{vector normalization}}$$

$$E_{\text{pd},\text{ret}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

$$E_{\text{ret},x} \text{ selon } \Omega_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_{\text{pol. elliptique}} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ i \sin \theta \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} a \cos \omega t = x \\ b \sin \omega t = y \end{array} \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \sin \omega t = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \omega t \right)$$

$$E_{\text{pol. circ.}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \pm \sin \omega t \end{pmatrix}$$



Cas particulier: pol. real selon Ω_2

$$\vec{E}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cherchons \vec{E}_{out}

$$|E_{\text{out},x}| = \left| e^{i\Delta\phi_x} \cos^2 \theta + e^{i\Delta\phi_y} \sin^2 \theta \right|$$

polarisation rectiligne
 $\vec{E}_x(t) = E_{\text{in},x} e^{i(k_2 - \omega t)}$ associé au vecteur $\vec{E}_{\text{pol},\text{ret}} = \frac{1}{\sqrt{E_{\text{in},x}^2 + E_{\text{in},y}^2}} \begin{pmatrix} E_{\text{in},x} \\ E_{\text{in},y} \end{pmatrix}$
 $E_x(t) = E_{\text{in},x} e^{i(k_2 - \omega t)}$

Observations loc

$$\begin{pmatrix} E_{\text{out},x} \\ E_{\text{out},y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\Delta\phi_x} \cos^2 + e^{i\Delta\phi_y} \sin^2 & E_{ix} \\ (e^{i\Delta\phi_x} - e^{i\Delta\phi_y}) \cos \sin & E_{iy} \end{pmatrix}$$

A priori: $\frac{E_{\text{out}y}}{E_{\text{inx}}}$ est C, on obtient une polarisation elliptique.

Cas de la lame $\frac{1}{z}$

$$\text{Généralis } \Delta\phi_y - \Delta\phi_x = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_0 - n_e) \delta = \pi$$

$$\text{Et } \begin{pmatrix} E_{\text{out}x} \\ E_{\text{out}y} \end{pmatrix} = e^{i\Delta\phi_x} \begin{pmatrix} \cos^2 - \sin^2 & a_{12} = a_{21} \\ (1 - (-1)) \cos \sin & \sin^2 - \cos^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{ix} \\ E_{iy} \end{pmatrix}$$

$$M_{\frac{1}{z}} = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} = \text{matrice de réflexion par rapport à l'axe optique}$$

$$M_{\frac{1}{z}, \text{base propre}} = e^{i\Delta\phi_x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cas de la lame $\frac{1}{z}$

$$\Delta\phi_y - \Delta\phi_x = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_0 - n_e) \delta = \frac{\pi}{z} \quad \begin{cases} \text{ici } n_0 > n_e \Rightarrow \frac{\pi}{z} \\ \text{si } n_0 < n_e \Rightarrow -\frac{\pi}{z} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} n_e = \text{axe optique ?} \\ \dots \end{array} \right\}$$

$$\text{Et } M_{\frac{1}{z}, \text{base propre}} = \begin{pmatrix} e^{i\Delta\phi_x} & 0 \\ 0 & e^{i\Delta\phi_y} \end{pmatrix}$$

$$\text{On pose } \Psi = \frac{1}{2} (\Delta\phi_x + \Delta\phi_y) \quad \rightarrow \quad \Delta\phi_y = \frac{2\Psi - \Phi}{2}$$

$$\Phi = \Delta\phi_x - \Delta\phi_y \quad \rightarrow \quad \Delta\phi_x = \frac{2\Psi + \Phi}{2}$$

$$M = e^{i\Psi} \begin{pmatrix} e^{i\frac{\Phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\Phi}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= e^{i\Psi} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\Phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\Phi}{2}} \end{pmatrix}$$

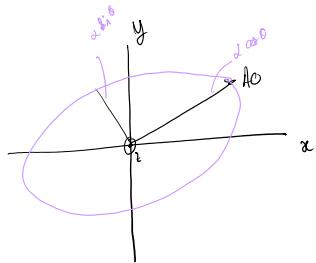
$$M = e^{i(\Psi - \frac{\pi}{4})} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

Soit $\vec{E}_x = E_x \hat{e}_x$

$$\vec{E}_x = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}_{\{x,y\}}$$

$$\vec{E}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -i \sin \theta \end{pmatrix}_{\{x,y\}} \quad \text{polarisation elliptique}$$

et les axes de l'ellipse sont les axes principaux de la lame.



Duffait p 188.

$$y_{\text{lam}} = n \lambda + \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad n \lambda + \frac{3}{4}$$

AO à droite fois.

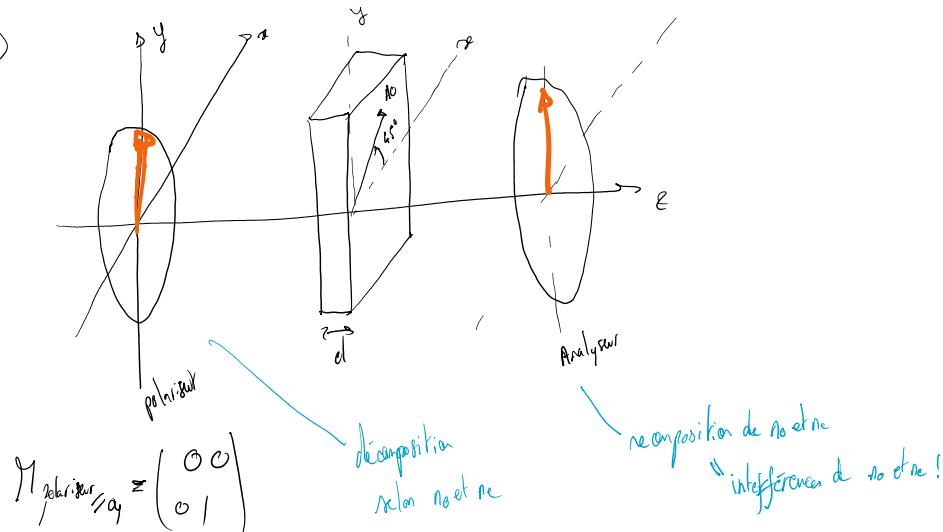
Pour avoir une lame Δd épaisse.

Mais la lame ne marche pas pour avoir une lame de longueur Δd précis sans aspect dispersif. En vrai on fait des sandwichs $(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}) \times n + \frac{1}{2}$

$$\Delta \phi(\lambda) = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta n(\lambda) \delta$$

dispersion de l'indice pour Δd petit comme c'est le cas

4)



$$\text{ici } \cos \lambda = \sin \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix} E_{x \text{ out}} \\ E_{y \text{ out}} \end{pmatrix} = e^{i\Psi} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\Psi}{2}) + i \sin(\frac{\Psi}{2}) \cos(2\theta) \\ i \sin(\frac{\Psi}{2}) \sin 2\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Psi}{2} - i \sin \frac{\Psi}{2} \cos 2\theta \\ i \sin \frac{\Psi}{2} \sin 2\theta \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \frac{1}{2} (\Delta d_x + \Delta \phi_y)$$

$$\Psi = \Delta \phi_y - \Delta \phi_x$$

$\rightarrow I_{\text{out}}$ après l'analyseur

$$\left| \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \cos(2\theta) \right|^2 / |E_{\text{in}}|^2 = I_{\text{out}}$$

Avec $\theta = 45^\circ$ contrast max

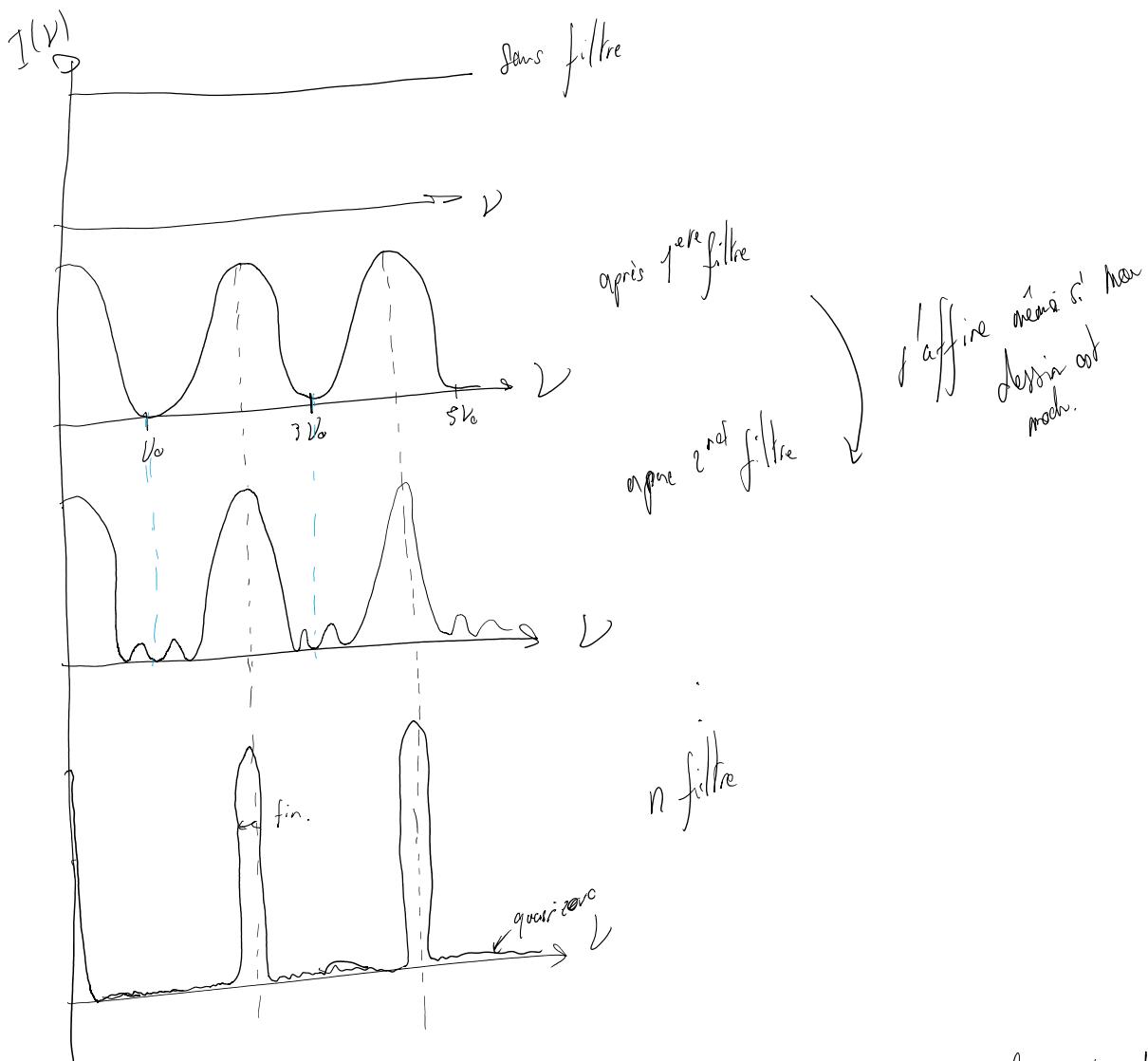
$$I_{\text{out}} = I_0 \cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right) = I_0 \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi(n_o - n_e)}{\lambda} d\right)\right)$$

On cherche λ donnant extinction

$$\frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d = \pi + 2p\pi \quad p \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Après } q^{\text{ème}} \text{ filtre} \quad f_2 = 2f_1 \rightarrow V_i = \frac{2(p+1)}{q(n_o - n_e)d} f_1 \dots$$

$$\lambda = \frac{2(n_o - n_e)d}{2p+1} \quad \lambda = \frac{c}{2} = \frac{c(2p+1)}{2(n_o - n_e)d}$$



Le premier filtre f_1 ($\ell \oplus f_1$) définit l'intervalle spectral libre \rightarrow ie la période des répétitions des impulsions

(ℓ_1 ℓ_2 \dots ℓ_n) et le filtre f_n ($\ell_n \oplus f_n$) définit la finesse \rightarrow ie la finesse des pics

Le devenir filtre, de $V_{n,0}$ et faible ($\Delta \theta$) définit la finesse \rightarrow ie la finesse des pics

Avec $V_{n,0} = \frac{V_{c,0}}{2^n}$ et $\delta_n = 2^n \delta_1$

