

# Intro

jeudi 23 janvier 2025 08:08

## Qu'est-ce qu'une onde ?

- Propagation d'une perturbation sans transport global de matière ?
  - Quid méca Q ?
- Phénomène de propg régis par des edp linéaire à coeff constant
  - Pas de variation du milieu
  - Exclus les phénomènes non linéaires
- Propag d'une perturbation qui produit à son passage une variation réversible du milieu. Elle se déplace à une vitesse donnée
  - Quid dispersion ? Diffusion ?
- Champ dont les dépendances spatiales et temporelles sont couplées par des edp
  - Trop général, tout est une onde

Dans le cours:

Déplacement, dans le temps et l'espace, d'une perturbation autour d'une position d'équilibre, avec transport d'énergie et sans transport macroscopique de matière

# Chapitre 1: Propagation d'ondes dans des milieux non dispersifs

jeudi 23 janvier 2025 08:14

## I - Quelques exemples

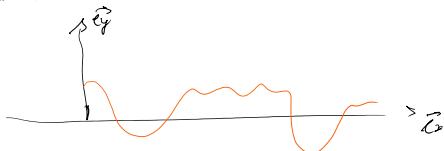
### 1) Corde vibrante

Positionnement de l'étude :

Mouvement d'oscillations d'une corde homogène et de masse linéaire  $\rho$ .

Tendue par une tension  $T_0$ , à repos elle est confondue avec l'axe  $\vec{z}$

Excitation dans une direction transversale  $\vec{y} \Rightarrow$  oscillations dans le plan  $(\vec{x}, \vec{y})$



Quelques hypothèses:

(i) Corde inextensible

Pour un élément de corde de longueur au repos  $dx$

Elongation due au mouvement

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \approx dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Donc inextensible revient à se restreindre au premier ordre en  $|dy|$

Donc oscillations de faible amplitude, et mouvement selon  $\vec{y}$  seulement.

$\Rightarrow$  on paramètre les oscillations par

$$y = y(x, t)$$

avec  $x$  la position de l'élément de corde au repos

(ii) Corde sans poids

$\Rightarrow$  pas de résistance à la flexion

Donc les forces internes (tension) entre les éléments adjacents est tangente à la corde

(iii) Pas de source de dissipation (interne, rayonnement acoustique, frottement) et poids négligeable.

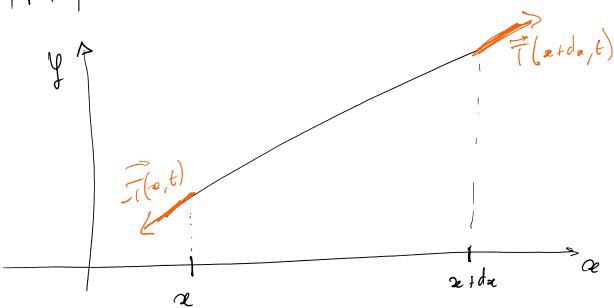
Prise en équation:

On note  $\vec{T}(x, t)$  la tension exercée à  $t$  en un point  $X(x, y)$  par la partie droite de la

corde ( $x > 0$ ) sur la partie gauche ( $x < 0$ )

PF D pour un élément de corde de longueur  $dx$  (dans ref de lab appeler galilien)

$\vec{T}(x, t) = \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t)$



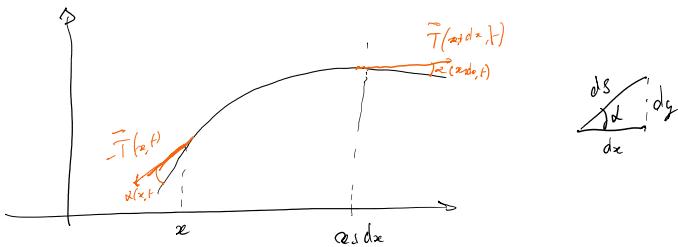
$$\therefore \nabla \cdot \vec{T} = \frac{1}{dx} (\vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t))$$

$$\int_x^{x+dx} \mu dx \partial_t \vec{\sigma}(x + \frac{dx}{2}, t) = \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t)$$

au premier ordre :

$$\mu dx \partial_t \vec{\sigma}(x, t) = dx \partial_x \vec{T}(x, t)$$

$$\text{donc } \boxed{\mu \partial_t \vec{\sigma} = \partial_x \vec{T}} \quad (1)$$



d'angle définissant la tangente à la corde :

$$\tan(\alpha) = \frac{dy}{dx} \quad dy = y(x+dx, t) - y(x, t) \approx \frac{dx}{\lambda} \partial_x y(x, t)$$

donc au premier ordre

$$\tan(\alpha) = \partial_x y \text{ est inversible}$$

$$\text{donc } (\partial_x y) \ll 1 \Rightarrow \tan \alpha \approx \partial_x y.$$

$$d\vec{T} \cdot \vec{e}_x = T_0 \cos(\alpha) \approx T_0$$

$$\vec{T} \cdot \vec{e}_y = T_0 \sin(\alpha) \approx T_0 \partial_x y$$

$$\text{d'où (1)} \Rightarrow \begin{cases} \mu \partial_t \vec{\sigma}_x = 0 \\ \mu \partial_t \vec{\sigma}_y = T_0 \partial_x^2 y \end{cases}$$

On retrouve bien qu'il n'y a pas de mouvement relatif

et équation de propagation

$$\boxed{\partial_t^2 y - \frac{T_0}{\mu} \partial_x^2 y = 0} \quad \rightarrow \text{éq de d'Alembert.} \quad (2)$$

Aspects énergétiques :

Bilan de puissance par élément  $[x, x+dx]$

$$P = \vec{T}(x+dx, t) \cdot \vec{\sigma}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t) \cdot \vec{\sigma}(x, t)$$

$$\left( \vec{P} = \epsilon P_{\text{grande onde}} \quad P = \vec{T} \cdot \vec{\sigma} \quad F = T - T - T \dots \right)$$

Donc puissance linéaire :

$$P = \frac{\partial(\vec{T} \cdot \vec{\sigma})}{\partial x} = T_0 \partial_x \left( \partial_x y \partial_t y \right)$$

$$\text{donc } P = T_0 \left( \partial_x^2 y \partial_t y + \partial_x y \partial_x \partial_t y \right)$$

$$(2) \quad P = \mu \partial_t^2 y \partial_t y + T_0 \partial_x y \partial_x \partial_t y$$

$$(2) \rho = \mu \partial_t^2 y \partial_y^2 y + T_0 \partial_x^2 y \partial_x^2 \partial_y^2 y$$

$$p = \partial_t \left( \frac{\mu}{2} (\partial_y^2 y)^2 + \frac{T_0}{2} (\partial_x^2 y)^2 \right)$$

bilan d'énergie avec  $E = \frac{\mu}{2} (\partial_y^2 y)^2 + \frac{T_0}{2} (\partial_x^2 y)^2$

énergie cinétique linéaire      énergie potentielle élastique linéaire.

Conservation de la densité d'énergie:

$$\partial_t E + \partial_x \Pi_T = 0$$

$$\text{où } \Pi_T = -T_0 \partial_x y \partial_y p \quad \text{densité de flux d'énergie}$$

## Ondes acoustiques

Positionnement de l'onde:

propagation due à successions de compressions et dilatations

Hypothèses:

(i) fluide parfait (pas de viscosité) et pesanteur négligeable  
unique force: force de pression

(ii) fluide continu, tel que au repos il est homogène et à l'équilibre thermodynamique global  
 $\Rightarrow$  il est possible de définir pression  $p_0$ , masse volumique  $\rho_0$ , uniformes et constantes, et pas de mouvement au repos.

Ondes induisent une perturbation  $\tilde{A}, \tilde{x}, t$ :

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, t) = \tilde{\rho}_0(\tilde{x}, t), \quad \tilde{p}(\tilde{x}, t) = p_0 + p_1(\tilde{x}, t)$$

$\{$  surpression ou pression acoustique.

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, t) = \rho_0 + \rho_1(\tilde{x}, t)$$

$\rho_0, \rho_1$  et  $\tilde{\rho}_0$  de moyennes temporelles nulles.

Hypothèses supplémentaires:

(iii) Approximation acoustique:

$\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1$  et  $\tilde{p}_1$  sont faibles en valeurs relatives, infiniment petits d'ordre 1 (tous du même ordre).  
ainsi que leurs dérivées.

$\rightarrow$  on se limite à l'ordre 1 (linéarisation).

(iv) À tout instant il y a éq thermodynamique local

$\rightarrow$  on peut définir une équation d'état (relatifs entropie, masse volumique, pression)

$\rightarrow$  on suppose absence de transfert thermique (hypothèse isentropique).

(v) Evolution isentropique des particules de fluide (comp et détentes adiabatique réversibles). [on suppose absence de transfert thermique (hypothèse isentropique)].

Mise en équation:

Eq d'Euler et conservation de la masse:

$$\partial_t \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \partial_x \tilde{A} = -\tilde{\nabla} \tilde{p} \quad (\text{Euler sur fluide parfait})$$

Eq d'Euler et conservation de la masse:

$$\rho \left( \partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p \quad (\text{Euler sur fluide parfait})$$

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\text{Avec (iii)}: \begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial t} = -\vec{\nabla} p_i \\ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t f_i + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i = 0 \end{cases}$$

4 eq pour 5 inconnues, on utilise (iv) l'équation d'état pour former le système  
eq d'état  $f = \rho(S, P)$

Alors au cours de la transformation

$$\frac{df}{dt} = \partial_S \rho \Big|_P \frac{ds}{dt} + \partial_P \rho \Big|_S \frac{dp}{dt}$$

avec (V):

$$\frac{df}{dt} = \partial_P \rho \Big|_S \frac{dp}{dt}$$

$\frac{df}{dp} \Big|_S$  est une caractéristique propre du fluide, reliée à la compressibilité, son tropique

$$\chi_s = -\frac{1}{\rho} \partial_P V \Big|_S$$

$$= \frac{1}{\rho} \partial_P \rho \Big|_S$$

$$\text{donc } \frac{df}{dt} = \rho \chi_s \frac{dp}{dt}$$

$$\Rightarrow \partial_t \rho + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho = \rho \chi_s (\partial_t p + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) p)$$

linéarisation avec (iii):

$$\partial_t \rho_i = \rho_0 \chi_s \partial_t p_i$$

Ansatz (3) devient

$$\boxed{\begin{cases} \rho_0 \partial_t \vec{v}_i = -\vec{\nabla} p_i & (4) \\ \chi_s \partial_t p_i + \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i = 0 & (5) \end{cases}} \quad | \quad \text{à découpler.}$$

$$\vec{v} \cdot (4) \quad \rho_0 \partial_t \left[ \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i \right] = -\Delta p_i$$

$$\text{et avec (5)} \quad \boxed{\Delta p_i - \rho_0 \chi_s \partial_t^2 p_i = 0} \quad | \quad \text{d'Alembert 3D.}$$

De manière analogue:

$$\vec{v} \times (4) : \quad \rho_0 \partial_t (\vec{v} \times \vec{v}_i) = -\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} p_i = \vec{\sigma}$$

$\vec{v} \times \vec{v}_i$  est une constante

$\vec{v} \times (\vec{v}) : \rho_0 \partial_t (\vec{v} \times \vec{v}_i) = - \nabla \times \vec{v} p_i = 0$

donc  $\vec{v} \times \vec{v}_i$  est une constante  
et  $\vec{v}_i$  est de moyenne nulle donc  $\vec{v} \times \vec{v}_i = \vec{0}$   
(car quantité constante confondue avec sa moyenne).

avec  $\vec{v}(s)$  on montre:

$$\boxed{\Delta \vec{v}_i = \rho_0 \chi_s \partial_t^2 \vec{v}_i = \vec{0}}$$

### Aspects énergétiques:

Onde induit un mouvement, donc énergie cinétique

Par unité de volume:

$$e_c = \frac{1}{2} \rho_0 |\vec{v}_i|^2 = \frac{1}{2} \rho_0 (\vec{v}_i)^2 \quad (\text{premier ordre non nul})$$

Aussi variation d'énergie interne (car variation de pression)

Isentropique ( $V$ ), donc

$$dV = -pdV = \chi_e V p dp$$

$$\text{car } dV = \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_s dp = -\chi_e V p dp$$

$$\text{donc } dU = \frac{\chi_e V}{2} dp^2$$

En supposant que les variations de volume de la particule fluide sont négligeables, la variation d'énergie interne due à  $p_0 \rightarrow p_0 + p_i$  est

$$\Delta U = \frac{\chi_e V}{2} (p_0 + p_i)^2 - p_0^2 = \frac{\chi_e V}{2} p_i^2 + \chi_e V p_0 p_i$$

Le terme  $\chi_e V p_0$  est de moyenne temporelle nulle, il ne contribue pas à l'énergie transportée par l'onde.

Donc densité volumique d'énergie acoustique

$$\boxed{\mu_{ac} = \frac{1}{2} \rho_0 |\vec{v}_i|^2 + \frac{1}{2} \chi_e p_i^2}$$

Bilan de puissance pour un volume délimité par surface  $d\vec{S}$  (normale sortante)

Bilan de puissance pour un volume délimité par surface  $d\vec{S}$

Volume déformé aux variations de pression  $-p d\vec{S}$

donc puissance réçue:

$$P_r = \oint_S \vec{v} \cdot (-p d\vec{S}) = - \int_V d\vec{v} \cdot \vec{v} \cdot (-p \vec{v})$$

Puissance réçue par unité de volume:

$$\vec{v} \cdot (-p \vec{v}) = -\vec{v} \cdot p \vec{v} - p \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$\downarrow$   $\vec{v} \cdot \vec{v}$  et  $-\vec{v} \cdot p \vec{v}$  sont à l'ordre 1

L'ordre 1:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot (-p \vec{v}) &\approx -p_0 \vec{v} \cdot \vec{v} - \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \\ &= +\chi_e p_0 \partial_t p_0 + \rho_0 \vec{v}_i \cdot \partial_t \vec{v}_i \\ &\quad (\text{SA}) \\ &= \partial_t \left( \frac{1}{2} \chi_e p_0^2 + \frac{1}{2} \rho_0 |\vec{v}_i|^2 \right) \end{aligned}$$

$$(SAC)$$

$$= \partial_t \left( \frac{1}{2} \chi_s \rho_i^2 + \frac{1}{2} \rho_c (\vec{v}_i^2) \right)$$

Donc :

$$\boxed{\frac{\partial \text{mac}}{\partial t} + \vec{J} \cdot \vec{T}_{ac} = 0}$$

avec  $\vec{T}_{ac} = \rho_i \vec{n}_i$  le vecteur densité volumique de flux d'énergie

### 3) Ondes EIT dans le vide

$\vec{E}$  et  $\vec{B}$  couplés par Maxwell dans le vide

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \text{ et } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0} \quad \text{avec } \vec{\nabla} = \delta - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t$$

$$\text{et } \boxed{\frac{\partial \text{vac}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{T} = 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{avec } \text{vac} = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 \\ \text{et } \vec{T} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \end{array} \right\}$$

### 4) Caractéristiques communes

a) Couplage des variations de deux grandeurs physiques (scalaires, vectorielles, tensorielles)

Exemples:

- Ondes acoustiques  $\rho_i, \vec{v}_i$
- Onde EIT :  $\vec{E}, \vec{B}$
- Corde :  $v_x = \partial_t y$  et  $F_y = -T_0 \partial_x y$  (vitesse et force selon  $y$ )
- Couplage caractérisé par des éq'd p d'ordre 1 mêlant temps et espace
- Couplage caractérisé par des éq'd p d'ordre 1 mêlant temps et espace et décoупlage donne la même équation d'ordre 2 pour chaque grandeur

Exemples

- ondes acoustiques

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{v}_i = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \rho_i \\ \partial_t \rho_i = -\frac{1}{x_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i \end{array} \right.$$

- ondes EIT

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} \\ \partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \end{array} \right.$$

- corde

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v_y = -\frac{1}{\rho} \partial_x F_y \quad (\text{PFD}) \\ \partial_t F_y = -T_0 \partial_x v_y \quad (\text{expression de la force}). \end{array} \right.$$

✓ hier:

$$\zeta \partial_t v = -\frac{1}{\rho} \partial_x F_x$$

Sur hier:

. corde vibrante

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v = -\frac{1}{T} \partial_x F_x \\ \partial_t F_y = -T_0 \partial_x \bar{v}_y \end{array} \right.$$

$$\partial_x^2 \bar{v}_y - \frac{\mu}{T_0} \partial_t^2 \bar{v}_y = 0, \quad \partial_t \left( \frac{\mu}{T} \bar{v}_y^2 + \frac{1}{T_0} \bar{F}_y^2 \right) + \partial_x (\bar{v}_y F_y) = 0$$

. Ondes acoustiques:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{v}_i = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p_i \\ \partial_t p_i = -\frac{1}{X} \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_i \end{array} \right.$$

$$\partial_t p_i - \frac{1}{\rho_0 X} \partial_t^2 \vec{v}_i = 0, \quad \partial_t \left( \frac{\rho_0}{2} |\vec{v}_i|^2 + \frac{X_0}{2} p_i^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \rho_i \vec{v}_i \right) = 0$$

. Onde em:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \\ \partial_t \vec{E} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} \end{array} \right.$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad \partial_t \left( \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2 \mu_0} |\vec{B}|^2 \right) + \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \right) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Retour sur appret acoustique:

variation de pression  $\Rightarrow$  variation de volume (compressibilité  $\chi$ )

freinée par effets inertiel (masse volumique  $\rho_0$ )

dépendance du milieu. Compétition entre ces effets

analyse dimensionnelle:  $\left[ \chi \right] \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \text{m}^{-5} \right]$

$$\left[ f \right] \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^3} \right] \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}} = \text{vitesse}$$

Suite:

Couplage: compétition entre effets inertIELS et de raideur



Exemple de dépot:  $\int \rho u_i = 0$  pour  $u_i$ : grandeur capte

Mais pas général! (voir chap 2).

Pour l'absorbeur:  $u_i^2 \rightarrow$  énergie et  $u_1 u_2$ : puissance transportée par unité de surface.

## Hapitre 2: Ondes propagatives.

vendredi 24 janvier 2025 08:13

### Onde Propriétés de l'Équation de l'Amplitude

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u = 0$$

- linéaire  $\rightarrow$  principe de superposition
- invariante par renversement du temps:  $t \rightarrow -t$ 
  - $\hookrightarrow$  pas de dissipation
- invariante par translations
  - temporelles:  $t \rightarrow t + t_0$ 
    - $\hookrightarrow$  milieus visqueux
  - spatiales:  $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{\alpha}$ 
    - $\hookrightarrow$  milieu homogène
- invariante par rotation:  $\vec{x} \rightarrow R \vec{x}$ 
  - avec  $R \in SO(3)$  ( $R R^T = I_3$ )
  - $\hookrightarrow$  milieu isotrope.
- pas invariant sous transformation de Galilée
  - $\vec{x} \rightarrow \vec{x} - \vec{v}t$ ,  $\vec{v} = \text{cste}$
  - $\rightarrow$  pour une onde méca: existence d'une ref privilégiée (celui où le système est au repos).
  - $\rightarrow$  pour une onde EM: signe que phénomène relativiste.
  - ... mto sous Lorentz (à la vitesse  $c$ ).

- invariante sous Lorentz (à la vitesse  $c$ ).

## II Solutions.

Définition. Une surface d'onde est une surface continue (sans trou) de l'espace où l'état vibratoire de l'onde est le même à tout instant

On distingue plusieurs cas:

Ondes planes: Les surfaces d'ondes sont des plans « entre eux » (plans d'ondes).

Le vecteur  $\vec{n}$  normal aux plans d'onde définit la direction de propagation.

Le vecteur  $\vec{n}$  normal aux plans d'onde définit la direction de propagation.

L'état vibratoire ne dépend alors que de la coordonnée  $\vec{x} \cdot \vec{n}$ . On la note  $\alpha$ .

$$\text{Alors: } \partial_x^2 u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u = 0$$

Résolution  
Changement de variable:  $\begin{cases} \mu = \alpha - ct \\ \nu = \alpha + ct \end{cases}$

$$\text{alors, } \partial_x^2 = \partial_\mu^2 \partial_\mu + \partial_\nu^2 \partial_\nu = \partial_\mu^2 + \partial_\nu^2$$

$$\begin{aligned} \partial_t^2 &= \partial_\mu^2 \partial_\mu + \partial_\nu^2 \partial_\nu \\ &= -c \partial_\mu^2 + c \partial_\nu^2 = c(\partial_\nu^2 - \partial_\mu^2) \end{aligned}$$

$$\partial_x^2 = \partial_\mu^2 + \partial_\nu^2 + 2 \partial_\mu \partial_\nu$$

$$\partial_t^2 = c^2 (\partial_\mu^2 + \partial_\nu^2 - 2 \partial_\mu \partial_\nu)$$

Eq de d'Alembert devient

$$\partial_\mu \partial_\nu u = 0$$

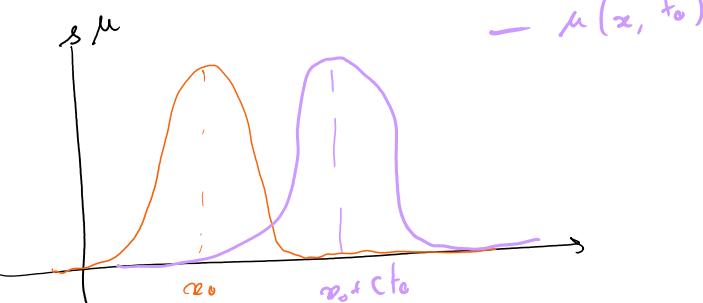
$$\Rightarrow u(\mu, \nu) = f(\mu) + g(\nu) \quad \text{avec } f \text{ et } g \text{ fonctions arbitraires (gentilles).}$$

$$u(\mu, \nu) = f(\mu) + g(\nu)$$

$$\text{Finlement: } \boxed{u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)}$$

Interpretation physique:

pour  $u(x,t) = f(x-ct)$



—  $u(x,0)$   
—  $u(x, t_0)$

La forme de l'onde est répétée dans la propagation de autour de  $x = x_0$  à  $t = 0$   
avec  $x = x_0 + ct$  à  $f = t_0$

L'onde se propage à la vitesse  $c$ , sans déformation

Replaçant vers les  $x$  croissants  $\rightarrow$  on parle d'ondes planes progressives (OPP<sup>+</sup>)

Pour  $u(x,t) = g(x+ct)$ , propagation à  $c$  sans déformation cette fois vers les  $x$  décroissants

→ onde planes regressives (OPP<sup>-</sup>)

Solution générale : somme de OPP<sup>+</sup> et OPP<sup>-</sup>

Pour une surface d'onde de normale  $\vec{n}$ :

$$\boxed{u(\vec{x},t) = f(\vec{x}, \vec{n} - ct) + g(\vec{x}, \vec{n} + ct)}$$

Le vecteur  $\vec{n}$  donne la direction de propagation, à vitesse  $c$  et sans déformation  
→ caract d'Alambert.

Exemples:

(1) Cordes vibrantes :  $c = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$

• d'abord plus rapide que  $T_0$  est grande et que faible inertie

(1)  $\omega \rightarrow$   
 $\rightarrow$  de l'ordre plus rapide que  $T_0$  est grande et que faible inertielle  
 Obj: corde en coton ( $\rho \approx 1 \text{ g.} \cdot \text{m}^{-3}$ ) tendue avec une masse  $m = 100 \text{ g}$   
 $(T_0 \approx 1 \text{ N}), c \approx 3 \times 10^3 \text{ m.} \cdot \text{s}^{-1}$

- cordes de piano de  $R = 1 \text{ mm}$  en acier  
 $(\rho \approx 7 \times 10^3 \text{ kg.} \cdot \text{m}^{-3})$  alors  $\mu = \pi R^2 \rho \approx 1 \cdot 10^2 \text{ kg.} \cdot \text{m}^{-1}$
- si  $T_0 = 3000 \text{ N}, c \approx 4 \times 10^3 \text{ m.} \cdot \text{s}^{-1}$

(2) Ondes acoustiques:  $c \approx \frac{1}{\sqrt{\chi_s \rho}}$   
 Pour un gaz parfait, transfo adiabatique réversible donc loi de Leylace  $pV^\gamma = \text{const}$

$$\chi_s = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial p}{\partial V} \Big|_S = \frac{1}{\gamma p_0}$$

$$\text{donc } c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{p_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \quad \text{avec } p_0 = \frac{f_0 R T_0}{\pi}$$

avec  $R = 8.314 \text{ J.} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $M$  la masse moléculaire du gaz

Obj: air sec:  $\gamma = 1.4 \text{ g.} \cdot \text{mol}^{-1}$  à  $T_0 = 300 \text{ K}$

ca  $347 \text{ m.} \cdot \text{s}^{-1}$   
 dépendance en  $\sqrt{T_0}$  avec fude de Kundt (cf FLT Ch 12 adiab Fréchard)

Pour un liquide, grande po compressé par très faible  $\chi_s$   
 vitesse d'ordre de  $1.5 \times 10^3 \text{ m.} \cdot \text{s}^{-1}$

gaz réel dans BFR Ondes

$$(3) EM: c = \ell \cdot 99792458 \times 10^8 \text{ m.} \cdot \text{s}^{-1}$$

### → Ondes sphériques

Surface d'onde sont des sphères concentriques. on place l'origine au centre des sphères.  
 ... et noter c'est de la distance à l'origine.

ou ] des sphères.

→ l'onde dépend juste de la distance  $r$  à l'origine.

D'Alembert devient:

$$\frac{1}{r} \partial_r^2 (r u(r, t)) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 r^2 u = 0$$

C'est l'éq de d'Alembert 1d "en cartésien" pour la fonction  $R(r, t) = r u(r, t)$

$$\partial_r^2 R - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 R = 0$$

donc  $\boxed{u(r, t) = \frac{1}{2} (f(r - ct) + g(r + ct))}$  |  $\forall f, g$  suffisamment régulières.

Somme d'ondes divergente (terme en  $f$ ) et convergente (terme en  $g$ )

Somme d'ondes divergente (terme en  $f$ ) et convergente (terme en  $g$ )

Signe: - pas de direction de propagation  $\Rightarrow$  ni progressive ni régressive.

Rg: - en  $\frac{1}{r}$  mais pas de diminution de l'énergie, qui se répartit sur des surfaces de  $r$  et grande

$$4\pi r^2 |u(r, t)|^2 \text{ dk conservé} \Rightarrow |u| \approx \frac{1}{r}$$

### III. Ondes planes progressives harmoniques et puçot d'onde

Une onde plane  $f(\vec{r}, t \pm ct)$  peut-être décomposée en composantes sinusoidales avec la TF

Donc la famille de solutions:

$$A(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

permet de reconstruire toute les solutions (comme continue avec TF + principe de superposition)

A est une onde plane progressive harmonique (OPPH)

Dans (1): •  $\omega$  est la pulsation

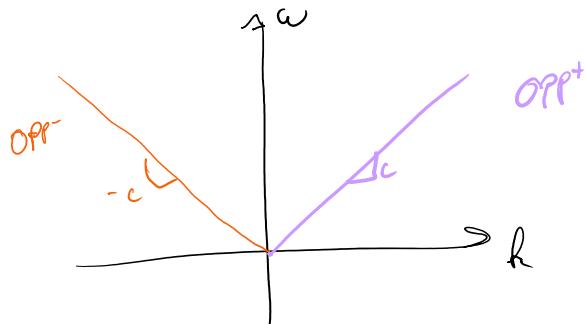
•  $\vec{k}$  le vecteur d'onde

•  $A_0$  l'amplitude

•  $\varphi$  la phase

•  $A_0$  l'amplitude  
 •  $\varphi$  la phase  
 Pour que  $A$  soit solution de d'Alambert, il faut:  
 $c^2 |\vec{k}|^2 = \omega^2$  relation de dispersion.

$$\Rightarrow |\vec{k}| = \pm \frac{\omega}{c}$$



On utilisera parfois la notation complexe:

$$A(c, t) = A_0 \exp(i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})) , \quad A_0 = A_0 e^{i\varphi}$$

alors  $\text{Re}(A) = A$

### Remarques:

- OPPH avec double périodicité
  - spatiale, de période  $\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$  la longueur d'onde, ( $\sigma = \frac{1}{\lambda} = \text{nombre d'onde}$ )
  - temporelle, de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  (fréquence  $\nu = \frac{1}{T}$ )

- Retour sur l'apprécier acoustique.

On veut  $\left| \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{v}) \vec{\omega}}{\partial_t \vec{\omega}} \right| \ll 1$

Pour une OPPH  $\vec{v} \sim \frac{1}{\lambda}$ ,  $\partial_t \vec{\omega} \sim \frac{1}{T}$

donc  $\left| \frac{(\vec{\omega} \cdot \vec{v}) \vec{\omega}}{\partial_t \vec{\omega}} \right| \sim \frac{|\vec{\omega}|}{\lambda/T} = \frac{|\vec{\omega}|}{c}$

donc on veut bien  $||\vec{v}_i|| \ll c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 k_3}}$

## Notion de paquet d'onde

OPPH a des extensions spatiales et temporelles infinies  $\rightarrow$  pas physique.

C'est outil mathématique très utile

↳ on les utilisent pour construire un paquet d'onde

$$A(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} a(k) \exp(i(\omega(k) \pm k \cdot \vec{r}))$$

où  $\omega(k)$  la relation de dispersion

(c'est comme une TF en 4D avec un факт  $\rightarrow$  contraint par relation de dispersion).

Solution de l'Éuler avec principe de superposition.

Pour que  $A$  soit réelle :  $a(-k) = \overline{a(k)}$  complexe conjugué (symétrie hermitienne).

Par propriété de la TF :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Delta_x \Delta_k \sim 1$$

extension  
spatial                  extension  
fréquentielle

$\rightarrow$  donc extensions finies.

$$\text{Rq. } \underset{\approx 1\text{d}}{\omega} : A(\vec{r}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{i(\omega(k)t - k \cdot \vec{r})}$$

## V. Structure des ondes planes progressives

Pour une OPPH :

$$\partial_t = i\omega, \vec{\nabla} = -ik$$

Donc contraintes imposées par les équations de couplage

### I) Ondes acoustiques

$$\text{couplage} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\omega}_i = \vec{0}$$

OPPH :  $ik \times \vec{\omega}_i = \vec{0} \rightarrow$  les ondes acoustiques sont longitudinales.

couplage

Pour une OPPH:  $i\vec{k} \times \vec{\omega}_1 = \vec{0}$   $\Rightarrow$  les ondes acoustiques sont longues  
donc  $\vec{\omega}_1$  doit être collinaire à  $\vec{k}$   $\Rightarrow$  les ondes acoustiques ont la même direction de propagation  
Vrai également pour les OPP<sup>±</sup>, qui sont des superpositions de OPPH de même direction de propagation  
(seule la norme de  $k$  qui change)

## Onde EM:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{pour OPPH} \quad \begin{cases} k \cdot \vec{E} = 0 \\ k \cdot \vec{B} = 0 \end{cases}$$

$\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont transverses à la direction de propagation.

Maxwell - Faraday  $\partial_t \vec{B} = - \vec{\nabla} \times \vec{E} \underset{\text{OPPH}}{\Rightarrow} \vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{c}$

donc  $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$  forment un trièdre orthogonal direct.

Et  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  oscillent en phase.

Relation de dispersion  $\Rightarrow \|\vec{E}\| = c \|\vec{B}\|$

Se généralise aussi aux OPP<sup>±</sup> (comme acoustique).

Polarisation:

Pour des ondes transverses il reste à donner la direction du champ dans le plan

transverse

$\rightarrow$  polarisation

# Notion d'Impédance propégativer

vendredi 24 janvier 2025 09:37

Les grandeurs couplées sont solution d'Alembert, mais ces solutions ne sont pas indépendantes  
→ relation de structure imposée par les eq. de couplage

## I. Grandeurs couplées scalaires

Exemple pour la corde vibrante

↪ couplage de  $\ddot{v}_y$  et  $F_y$

$$\text{soit } \ddot{v}_y = f(x \mp ct), \text{ une OPP}^{\pm}$$

$$\text{couplage: } \partial_t F_y = -T_0 \partial_x \ddot{v}_y$$

$$\Rightarrow \partial_t F_y = -T_0 f'(x \mp ct)$$

$$\text{donc } F_y = \pm \frac{T_0}{c} f(x \mp ct) + h(x)$$

$F_y$  solution d'Alembert  $\Rightarrow h$  affine

et CL  $\Rightarrow h=0$ .

$$\text{donc si } \ddot{v}_y = f(x \mp ct), \quad F_y = \pm \frac{T_0}{c} f(x \mp ct)$$

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

$$\text{donc } \boxed{F_y = \pm \sqrt{T_0 \mu} \ddot{v}_y = \pm Z \ddot{v}_y}$$

$Z = \sqrt{T_0 \mu}$  est l'impédance propégative

Pour des OPP $^{\pm}$ , la relation de structure est une relation de proportionnalité (facteur  $\pm Z$ )

solution générale:

$$\ddot{v}_y(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

$$\text{donc } \boxed{F_y = Z(f(x - ct) - g(x + ct))}$$

→ plus proportionnalité

$Z$  et  $c$  sont propres au milieu et caractérisent la propagation des ondes.

On peut réécrire les eq de couplage à

$$\boxed{\begin{cases} \partial_t \ddot{v}_y = -\frac{c}{Z} \partial_x F_y \\ \partial_t F_y = -Zc \partial_x \ddot{v}_y \end{cases}}$$

$$\boxed{(\partial_t u_2 = -c \cdot \nabla u_1)}$$

Généralisation:

Si deux grandeurs couplées sont  $u_1$  et  $u_2$ , le couplage prend la forme

$$\partial_t u_1 = -\frac{c}{z} \vec{\nabla} u_2, \quad \partial_t u_2 = -c z \vec{\nabla} u_1$$

avec  $z, c$  propres au milieu

Relation de structure:

$$\begin{cases} u_1(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \\ u_2(x, t) = z(f(x - ct) - g(x + ct)) \end{cases}$$

### II - Grandeur couplée scalaire et vectorielle.

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}_1 = -\frac{c}{z} \vec{\nabla} \vec{u}_2 \\ \partial_t \vec{u}_2 = -cz \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_1 \end{cases}$$

Alors pour OPP $\pm$ , la relation de structure

$$\vec{u}_2 \vec{n} = \pm z \vec{u}_1$$

$\vec{n}$ : vecteur unitaire normal au plan d'onde

Impédance acoustique:

$$Z = \sqrt{\frac{\rho_0}{x_s}}$$

### III - Grandeur couplée vectorielles

$$\begin{cases} \partial_t \vec{u}_1 = -\frac{c}{z} \vec{\nabla} \times \vec{u}_2 \\ \partial_t \vec{u}_2 = -cz \vec{\nabla} \times \vec{u}_1 \end{cases}$$

Pour des OPP $\pm$ , relation de structure

$$\vec{u}_2 = \pm z \vec{u}_1 \times \vec{n}$$

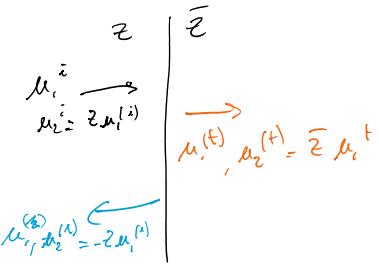
Pour des ondes EM, on couple  $\vec{E}$  et  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$   
et impédance de vide  $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega$

Rq : Discussion ici  
↳ propre à d'Alembert

## IV - Interface et adaptation d'impédance

Par continuité à l'interface :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i^{(t)} = \mu_i^{(i)} + \mu_i^{(x)} \\ \bar{z} \mu_i^{(i)} = z \mu_i^{(i)} \end{array} \right.$$



$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_i^{(t)} = \mu_i^{(i)} + \mu_i^{(x)} \\ \bar{z} (\mu_i^{(i)} + \mu_i^{(x)}) = z (\mu_i^{(i)} - \mu_i^{(x)}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mu_i^{(t)} = \mu_i^{(i)} + \mu_i^{(x)} \\ \mu_i^{(x)} = \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}} \mu_i^{(i)} \end{array} \right.$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_i^{(x)} = \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}} \mu_i^{(i)} \\ \mu_i^{(t)} = \left( \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}} + 1 \right) \mu_i^{(i)} = \frac{2z}{z + \bar{z}} \mu_i^{(i)} \end{array} \right.$$

(coefficients de transmission et réflexion en amplitude)

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{\mu_i^{(t)}}{\mu_i^{(i)}} = \frac{2z}{z + \bar{z}} \\ r = \frac{\mu_i^{(x)}}{\mu_i^{(i)}} = \frac{z - \bar{z}}{z + \bar{z}} \end{array} \right.$$

D'où transfert optimal si,  
 $z = \bar{z} \Rightarrow t = 0, r = 1 \Rightarrow$  adaptation d'impédance

On peut montrer que

$$\frac{\mu_i^{(x)}}{\mu_i^{(i)}} = \frac{\bar{z} - z}{z + \bar{z}}, \quad \frac{\mu_i^{(t)}}{\mu_i^{(i)}} = \frac{2\bar{z}}{z + \bar{z}}$$

Transmission et réflexion en énergie:

puissance transportée par unité :  $\mu_i \mu_i^{(i)}$

$$\text{donc } R = \left| \frac{\mu_i^{(x)} \mu_i^{(x)}}{\mu_i^{(i)} \mu_i^{(i)}} \right| = \frac{(z - \bar{z})^2}{(z + \bar{z})^2}$$

$$\text{done } R = \left| \begin{array}{cc} u_1^{(1)} & u_2^{(2)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(1)} \end{array} \right| = \frac{(z - \bar{z})^2}{(z + \bar{z})^2}$$

$$T = \left| \begin{array}{cc} u_1^{(1)} & u_2^{(1)} \\ u_1^{(2)} & u_2^{(2)} \end{array} \right| = \frac{4z\bar{z}}{(z + \bar{z})^2}$$

conservation de l'énergie :  $R + T = 1$

et si  $z = \bar{z}$ ,  $T = 1, R = 0$

$\rightarrow$  énergie totalement transmise en impédances adaptées.

## IV- Ondes stationnaires

### 1. Définition et propriétés

Définition Une onde stationnaire est une solution de l'éq d'onde par laquelle les dépendances en les coordonnées spatiales  $\vec{x}$  et temporelle  $t$  sont dé-couplées :

$$u(x, t) = f(\vec{x}) \cdot g(t)$$

$$\text{A 1D: } u(x, t) = X(x) T(t)$$

$$\text{d'Alambert } \boxed{T_{xx}=0} \Rightarrow X''(x) T(t) - \frac{1}{c^2} X(x) T''(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)}$$

$$\text{donc } \exists K \in \mathbb{R} / \begin{cases} X''(x) - K X(x) = 0, \\ T''(t) - K c^2 T(t) = 0 \end{cases}$$

$K \geq 0 \rightarrow$  divergence en  $\pm \infty \rightarrow$  pas physique

$$\text{donc } K < 0 : K = -k^2, k \in \mathbb{R}$$

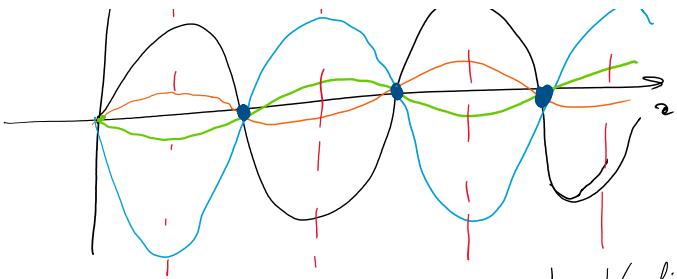
$$\text{donc: } T(t) = T_0 \cos(\omega t - \Phi_t); X(x) = X_0 \cos(kx + \Phi_x)$$

$$\omega = kc.$$

$$\text{Donc: } \boxed{u(x, t) = X_0 T_0 \cos(\omega t - \Phi_t) \cos(kx + \Phi_x), \omega = kc}$$



Couleurs =  $\neq$  temps.  
• nœuds.



Couleurs =  $\neq$  temps.

- nœuds.
- ventres (plan ventre)

En chaque  $x$ , oscillation transversale ont d'amplitude  $|X_0 T_0 \cos(k_x + \varphi_x)|$   
dans le temps  $x$  oscillations en phase ou en opposition de phase.

$\Rightarrow$  Il n'y a pas de propagation.

Points qui n'oscillent pas :  $u(x_n, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$   
i.e.  $k_x x_n + \varphi_x = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$  Ce sont des nœuds

Points pour lesquels l'ail est extrémal :  $\partial_x u(x_n, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$   
i.e.  $k_x x_n + \varphi_x = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$  Ce sont ventres.

En développant  $\cos(a)\cos(b)$

$$u(x, t) = X_0 T_0 \cos(\omega t + \varphi_r) \cos(k_x + \varphi_x) \\ = \frac{X_0 T_0}{2} \left[ \cos(\omega t + k_x + \varphi_r + \varphi_x) + \cos(\omega t - k_x + \varphi_r - \varphi_x) \right]$$

$\rightarrow$  décomposition en sommes de deux OPHI

Inversement : OPHI décomposition en onde stationnaire

$$\mu_0 \cos(\omega t - k_x + \varphi) = \mu_0 \left[ \cos(\omega t + \varphi) \cos(k_x) + \sin(\omega t + \varphi) \sin(k_x) \right]$$

D'où les OPHI et les ondes stationnaires forment deux bases distinctes des solutions de l'éq d'ond.

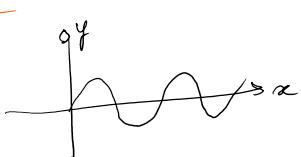
Si milieu infini, généralement recherche de sol en OPHI

si CL imposent des modes = stationnaires.

## 2) Oscillations libres en présence de conditions aux limites

Décomposition en modes propres.

Exemple de la corde vibrante



Extremités fixes  $y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$   
(Corde de Golde)

Extrémités fixes  $y(0,t) = y(L,t) = 0$

(Corde de Helde)

Recherche de solution sous la forme d'ondes stationnaires

$$y(x,t) = y_0 \cos(kx + \varphi_x) \cos(\omega t + \varphi_t) \quad \text{avec } \omega = kc$$

$$\text{CL: } y(0,t) = 0 = y_0 \cos(\varphi_x) \cos(\omega t + \varphi_t)$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi_x = \frac{\pi}{2}}$$

$$y(L,t) = 0 = y_0 \sin(kL) \cos(\omega t + \varphi_t)$$

$$\Rightarrow kL = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}, n \in \mathbb{N}^*$$

→ quantifications des pulsations admissibles, imposées par les conditions aux limites

→ défint des modes propres de systèmes

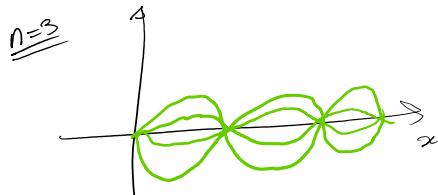
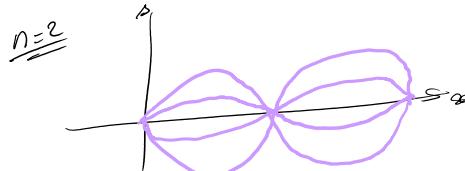
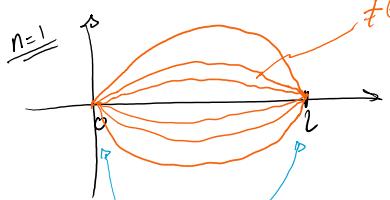
Definition: Un mode propre d'un système est une solution des équations du mouvement compatible avec les conditions aux limites et dont les dépendances sont sinusoidales en temps.

Solution générale par combinaison linéaire des modes propres:

$$y(x,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} y_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t + \varphi_n\right) \quad (1)$$

→ Solutions non stationnaires

$y_{0,n}$  et  $\varphi_n$  → obtenus avec les CL



Mode n:  
2 noeuds (aux bords) + (n-1) noeuds  $\Rightarrow$  1 + n noeuds  
n ventre

Aspects énergétiques

Dans le mode n:

$$E_n = \int_0^L dx \left[ \frac{1}{2} \mu \left( \partial_x y_n \right)^2 + \frac{1}{2} T_e \left( \partial_x y_n \right)^2 \right]$$

$$\int_0^L \Gamma_e / (n\pi c) \left| y_{0,n} \right|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L} + \varphi_n\right)$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{U^-}{=} \int_0^L dx \left[ \frac{\mu}{2} \left( \frac{n\pi c}{L} \right)^2 y_{0,n}^2 \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \sin^2 \left( \frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{T_0}{2} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 y_{0,n}^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \cos^2 \left( \frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n \right) \right] \\
 & = \frac{n^2 \pi^2}{2L} y_{0,n}^2 \left[ \mu c^2 \sin^2 \left( \frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n \right) + T_0 \cos^2 \left( \frac{n\pi ct}{L} + \varphi_n \right) \right] \\
 & = \frac{T_0 n^2 \pi^2}{4L} y_{0,n}^2 \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}
 \end{aligned}$$

Energie dans le mode  $n$ : 
$$E_n = \frac{n^2 T_0 \pi^2}{4L} y_{0,n}^2$$

constante: énergie constante dans le mode croissante en  $n$

Pour oscillation génératrice (1)

$$E = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n \quad (\text{modes normaux})$$

En l'absence de dissipation, pas de transfert d'énergie entre les modes.

### 3) Oscillations forcées et résonances

Excitation imposée à une des extrémités de la corde (ici sinusoidale)

$$y(0,t) = A \cos(\omega_f t), \quad y(L,t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

En cherchant les solutions en ondes stationnaires on obtient

$$y(x,t) = \frac{A}{\sin(k_F L)} \cos(\omega_f t) \sin(k_F(L-x)) \quad \text{avec } k_F = \frac{\omega_f}{c}$$

Oscillations possibles toute pulsation  $\omega_f$  imposée par l'excitation

La pulsation  $\omega_f = k_F c$  impose également l'amplitude des ondes:  $\frac{|A|}{\sin(k_F L)}$

$$\text{L'amplitude diverge en } k_F = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}$$

→ on parle de résonance

elle se fait exactement aux pulsations propres des oscillations libres.

C'est un résultat général: un système est résonnant une fois excité à une de ses fréquences propres

C'est un résultat général: un système est résonnant aux fréquences propres

→ correspondance entre modes propres (osc. libres) et résonances (osc. forcés)

En terme énergétique: résonance correspond à une excitation permettant un transfert de puissance optimale entre l'excitation et le système

- Remarques:
- à la résonance, dissipation et non-linéarités ne sont plus négligeables.
  - Le modèle n'est plus valide, il n'y a pas de divergence en pratique.
  - si le forçage n'est pas harmonique, l'onde n'est pas stationnaire.

# Chapitre 2: Propagation d'ondes dans des milieux dispersifs.

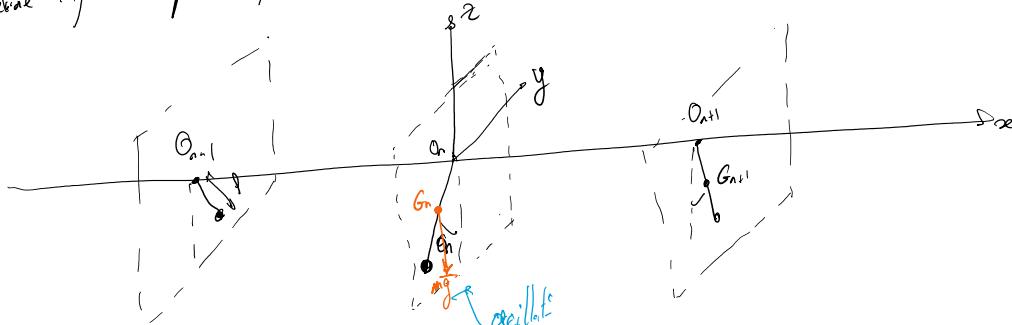
lundi 27 janvier 2025 09:17

Jusqu'à présent: d'Alambert, où  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$   
Ici: cos à relation de disp est  $\neq$ : milieux dispersifs.

## I. Quelques exemples

### 1) Chaînes d'oscillateurs couplés en torsion

- Chaîne infini de pendules pesants: homogènes, masse  $m$ , et longueur  $l$ . placés à  $x = n\alpha$ ,  $n \in \mathbb{N}$



- Oscillateurs dans  $(O_n, y, z)$ , paramétrés par  $\theta_n$  couplés en torsion (fil de torsion confondu avec  $O_x$ )  
→ couple de rappel proportionnel à l'écart angulaire (prop C)

- Néglige dissipation

- Poids de moment en  $O_n$ :

$$\overrightarrow{O_n G_n} \times mg \stackrel{\text{barycentre du pendule}}{=} \frac{l}{2} \left( -\cos(\theta_n) \hat{e}_z + \sin(\theta_n) \hat{e}_y \right) \times (-mg \hat{e}_x)$$

$$\overrightarrow{O_n G_n} \times mg = -\frac{lmg}{2} \sin(\theta_n) \hat{e}_x$$

- Couplage en torsion à  $n_1$  et  $n_1$
- $$\vec{f} = -C (\theta_n - \theta_{n+1}) \hat{e}_x - C (\theta_n - \theta_{n-1}) \hat{e}_x$$

TRC en  $\theta_n$  (newtonien) selon  $\hat{e}_x$ :

$$\frac{ml^2}{3} \ddot{\theta}_n = -\frac{mg l}{2} \sin(\theta_n) + C(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n) \quad (1)$$

Limite continue  
on suppose  $\alpha$  suffisamment faible. (a posteriori:  $\alpha \ll \lambda$ )

Limite continue

on suppose  $\alpha$  suffisamment faible. (a posteriori:  $\alpha \ll \lambda$ )

donc pendules très proches et dans un champ continu

$$\theta(x,t) / \theta(na,t) = \Theta(t)$$

DL autour de  $x=na$

$$\theta_{n+1} = \theta(x \pm a, t) \approx \theta(x, t) \pm a \partial_x \theta(x, t) + \frac{a^2}{2} \partial_x^2 \theta(x, t)$$

) terme ordre 0 et 1 s'annulent.

Dans (1):

$$\frac{n l^2}{3} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} (x, t) = - \frac{m g}{l} \sin(\theta(x, t)) + a^2 \left( \partial_x^2 \theta(x, t) \right)$$

D'où, dans la limite des oscillations de faible amplitude ( $|\theta| \ll 1$ )

$$\partial_x^2 \theta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \theta - \frac{\omega_c^2}{c^2} \theta(x, t) = 0$$

$$\text{avec } C = \sqrt{\frac{3Ca^2}{ml^2}} \quad \text{et } \omega_c = \sqrt{\frac{3g}{Cl}}$$

### Eg de Klein-Gordon.

• pour  $\omega_c = 0$ , on retrouve d'Alembert

• propagation réversible dans un milieu homogène et isotrope (pas de dissipation)

• linéaire

• plus de simplification pour  $\begin{cases} k = x - ct \\ \omega = x + ct \end{cases} \Rightarrow$  on ne peut plus interpréter  $c$  comme une vitesse de propagation.

Remarque:

$$KG \text{ en 3D: } \Delta u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \frac{\omega^2}{c^2} u = 0$$

pour plats de domaines: ondes ER dans un plasma dilué

pour pleins de domaines: ondes ER dans un plasma dilué  
 $(\partial_t \vec{E} = \frac{n_0 e^2}{me} \vec{E})$ , particule massive de spin 0--

Aspects énergétiques..

Bilan énergie linéaire

$$\partial_t E + \partial_x \Pi = 0$$

$$\int E = \frac{ml^2}{6a} \left( (\partial_t \theta)^2 + c^2 (\partial_x \theta)^2 + \omega_c^2 \theta^2 \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{\omega c}{6\alpha} (\partial_x^{-1}) \\ H = -\frac{m l^2 \epsilon}{3\alpha} \partial_x \partial_t \theta \end{array} \right.$$

Ondes monochromatiques

Recherche de solutions sous la forme

$$\Theta(x, t) = \Theta_0 \exp(i(\omega t - kx))$$

Solution de KG si:

$$k^2 = \frac{1}{c^2} (\omega^2 - \omega_c^2)$$

→ relation de dispersion de l'équation de KG.

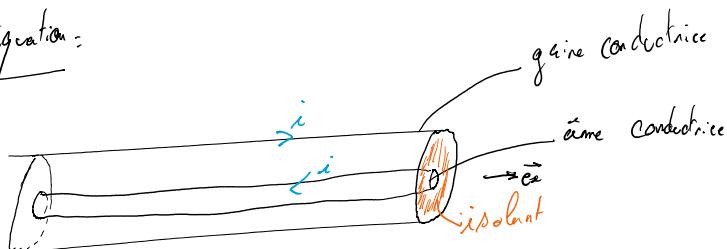
$k$  dépend de  $\omega$  de matière non-linéaire

→ onde de vitesse  $\frac{k}{\omega}$  → donc pas constant, la vitesse de l'onde dépend de  $\omega$

→ caractéristique d'un milieu dispersif.

## 2. Modélisation d'un câble coaxial

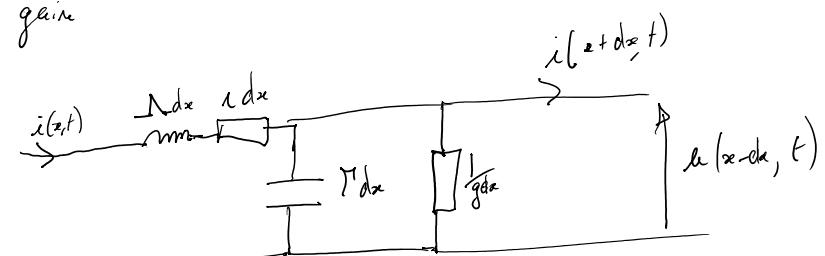
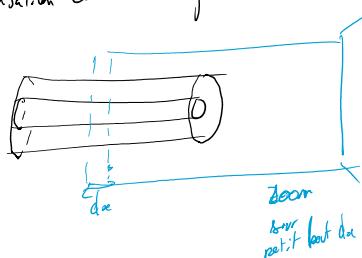
Rise en équation:



Deux conducteurs cylindriques de même axe séparés par un isolant

Courants en sens contraires dans l'âme et la gaine

Modélisation "conducteurs répartis"



- conducteurs forment une capacité de capacité linéique  $C$
- effets induits donnent inductance linéique  $L$

- effets induits donnent inductance linéaire  $\lambda$
- dissipation par effet Joule: résistance linéaire  $\gamma$
- courant de fuite dans l'isolant modélisé par conductances linéaires  $g$ .

Loi des mailles et des nœuds:

$$\begin{cases} u(x,t) = u(x+dx,t) + \lambda dx \partial_x i(x,t) + g dx i(x,t) \\ i(x,t) = i(x+dx,t) + g dx u(x,t) + \gamma dx \partial_x u(x+dx,t) \end{cases}$$

Y. limite  $dx \rightarrow 0$ : (ordre 1 en  $dx$ )

$$\begin{cases} \partial_x u(x,t) = -\lambda \partial_x i(x,t) - \gamma i(x,t) \\ \partial_x i(x,t) = -\gamma \partial_x u(x,t) - g u(x,t) \end{cases}$$

Découplage:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 u &= -\lambda \partial_x \partial_x i - \gamma \partial_x^2 i \\ &= \lambda \partial_x (\gamma \partial_x u + g u) + \gamma (\gamma \partial_x u + g u) \end{aligned}$$

donc  $\boxed{\partial_x^2 u - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u = (\lambda g + \gamma^2) \partial_x u + \gamma g u}$

avec  $c = \sqrt{\lambda \gamma}$ , idem pour  $i$

*Équations des télégraphistes.*

On retrouve d'Alambert pour  $\gamma = 0$ ,  $g = 0$  (conducteur et isolant parfait) avec  $c = \frac{1}{\sqrt{\lambda \gamma}}$

• Résultats toujours homogènes et isotropes mais pas invariant par renversement du temps ! (dissipation).

• Comme pour KG,  $C \neq$  vitesse de propag.

Remarques:

• Valeurs typiques (ligne téléphonique)

$$\begin{array}{ll} \gamma = 4 \times 10^{-11} \text{ F.m}^{-1} & \lambda = 4 \times 10^2 \text{ H.m}^{-1} \\ \lambda = 3 \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} & g = 2 \cdot 10^8 \text{ S.m}^{-1} \end{array} \quad \text{donc } c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

• En l'absence de dissipation, couplage  $u$  et  $i$ , milieu d'impédance propag  $Z = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} = 3 \cdot 10^2 \Omega$

• Modèle justifié dans le chap 3, valable que pour certaines ondes (dites "TER")

• Un exemple  
Modèle justifié dans le chap 3, valable que pour certaines ondes (dites "TEM")

Aspects énergétiques :

$$\begin{aligned} \partial_t E + \partial_x T &= -g \omega^2 - 2i^2 \\ \left\{ \begin{array}{l} E = \frac{\gamma}{2} u^2 + \frac{\Delta}{2} i^2 \\ T = \omega i \end{array} \right. &\rightarrow \text{pertes en puissance} \\ &\quad \text{énergie pas conservée.} \end{aligned}$$

Ondes monochromatiques :

Cherchons sol de la forme  $\underline{u}(x,t) = \underline{A}_0 e^{i(\omega t - kx)}$

$$\text{Solv : } \boxed{k^2 = \Delta \gamma \omega^2 - i \omega (\lambda + \gamma)} - 2g \quad \text{relation de dispersion.}$$

Une nouvelle fois  $k$  n'est pas une fonction linéaire de  $\omega$  (banc vitesse dépend de  $\omega$ )  
et  $k$  est complexe!  
↳ synonyme de dissipation

## II - Dispersion et atténuation

Lié au dimensionnel avec eq de propagation linéaire.

Avec les exemples, on voit qu'il va y avoir des solutions harmoniques

$$\underline{A}(x,t) = \underline{A}_0 e^{i(\omega t - \underline{k}(\omega)x)}, \quad \underline{k}(\omega) \in \mathbb{C}$$

↳ Pas ODEH car  $\underline{k}$  est complexe.

On parle d'onde planes pseudo-progressives harmoniques.

La relation  $\underline{k} = \underline{k}(\omega)$  est la relation de dispersion.

Dans la suite on note :  $\underline{k}(\omega) = \underline{k}'(\omega) + i\underline{k}''(\omega)$

Alors :  $\underline{A}(x,t) = \operatorname{Re}(\underline{A}(x,t))$

$$\underline{A}(x,t) = A_0 e^{\underline{k}''(\omega)x} \cos(\omega t - \underline{k}'(\omega)x + \varphi); \quad \underline{A}_0 = A_0 e^{i\varphi}$$

Differences par rapport à OPPH :

(i) si  $k'(\omega) \neq 0$ , toujours une onde propulsive à la vitesse dite vitesse de phase

$$v_p = \frac{\omega}{k'(\omega)}$$

(propagation des surfaces équiphasées)

Comme  $k'(\omega)$  n'est pas forcément linéaire

$v_p = v_p(\omega)$ , la vitesse de phase peut dépendre de la pulsation

⇒ propagation avec dispersion (milieu dispersif)

si  $k'(\omega) = 0$ , la vitesse n'est pas définie car il n'y a pas de propagation

(ii) Facteur  $e^{k(\omega)x}$ : variation de l'amplitude de l'onde. Si  $k''(\omega) < 0$ , onde amortie quand elle se propage vers les  $\omega$  croissants ; si  $k''(\omega) > 0$  amplification

On parle d'atténuation, Echelle caractéristique  $\left| \frac{1}{k''(\omega)} \right|$  (épaisseur de passe)

Dispersion et atténuation sont des concepts a priori indépendants

Exemples

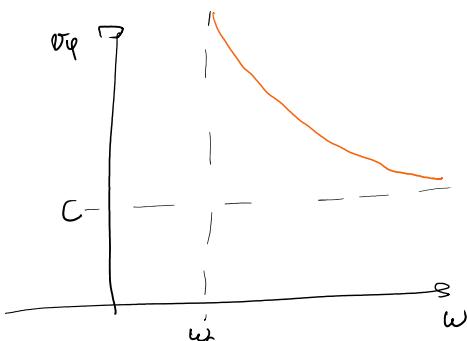
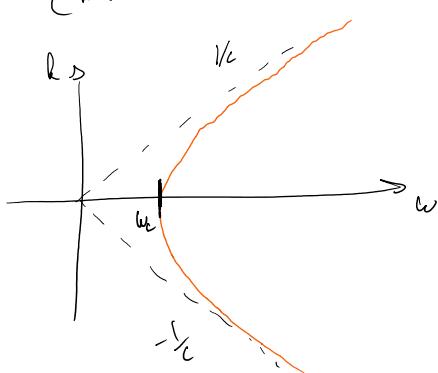
(1) Propagation sans dispersion ni atténuation

↪ milieu décrit par d'Alibert

(2) Propagation sans atténuation mais dispersion  
↪ KG pour  $\omega > \omega_c$  :  $k(\omega) = \pm \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}$

$$\begin{cases} k'(\omega) = \pm \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c} & (\text{pas linéaire}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} k''(\omega) = 0 \end{cases}$$



$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$

$\omega_c$ , caract du milieu  
réaction forte à l'excitation proche de  $\omega_c$ , si  $\omega \gg \omega_c$  milieu inert.

$$\omega_p = \pm \sqrt{\frac{c}{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}}$$

$\omega_c$ , carac du milieu  
réaction forte si excitation proche de  $\omega_c$ , si  $\omega \gg \omega_c$  milieu inert.

(3) Propagation dispersive et atténuation

→ ex des télégraphistes,  $R'(\omega)$  non-linéaire.  $\neq R''(\omega)$  non nul

(4) Atténuation sans propagation

KG si  $\omega < \omega_c$ :

$$k(\omega) = \pm i \sqrt{\frac{\omega_c^2 - \omega^2}{c}}$$

$k$  imaginaire pour onde stationnaire

$$A(x,t) = A_0 e^{k''(\omega)x} \cos(\omega t + \varphi)$$

→ onde evanescente

Vi ventre à nous et décrissance exponentielle  
Décroissante pas due à une perte d'énergie au profit du milieu !

Pour les particules de la sec 1.1:

$$\Theta(x,t) = \Theta_0 e^{k''(\omega)x} \cos(\omega t + \varphi)$$

La densité de flux d'énergie:

$$\Pi(x,t) = -\frac{m \ell c}{2a} \partial_x \Theta(x,t) \partial_x \Theta(x,t)$$

$$\propto e^{2k''(\omega)x} \sin(2\omega t + 2\ell)$$

Donc  $\langle \Pi \rangle = 0$

L'onde evanescente ne transporte pas d'énergie en moyenne

L'énergie est entièrement réfléchie vers le milieu d'où vient l'excitation

Une onde se propageant vers un milieu de  $k$  imaginaire pure est totalement réfléchie.

Il n'y a pas de dissipation en moyenne aucune énergie ne rentre ou ne sort du milieu

Milieu où  $kG$  se comporte comme passe-haut de pulsation  $\omega_c$ .

(5) Propagation non-dispersive avec atténuation

(5) Propagation non-dispersive avec atténuation

Câble coaxial dans les conditions de Heaviside:

$$\frac{g}{f_c} = \frac{\lambda}{\Delta}$$

$$\text{Alors } k(\omega) = \pm \frac{\omega}{c} + i \frac{2}{c\Delta}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{\lambda \Gamma}}$$

$$\text{donc } k'(\omega) = \pm \frac{\omega}{c} \rightarrow \text{pas de dispersion}$$

$$v_p = \pm c = \text{cst} \Rightarrow \text{bien la vitesse de propagation.}$$

$$, k''(\omega) = \mp \frac{2}{c\Delta}, \quad \text{il y a atténuation.}$$

$$= \mp \sqrt{2g} \rightarrow \text{source est la dissipation}$$

Lei de l'énergie est cédée au milieu

$\rightarrow$  on parle d'absorption (variate de l'amplitude due à énergie cédée au milieu)

$$\text{Si } E_0(t) = E_0 e^{\frac{-2x}{c\Delta}} \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c} + \phi\right)$$

Les pertes linéaires de puissance sont :

$$-g u^2 - \lambda i^2 \propto e^{-2x/c\Delta} \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega x}{c} + \phi\right)$$

Dans puissance non nulle en moyenne.

De l'énergie est perdue au cours de la propagation

Puissance transportée :

$$P = \alpha d e^{-\frac{4x}{c\Delta}} \cos^2\left(\omega t - \frac{\omega x}{c} + \phi\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle P \rangle \neq 0}$$

Dans énergie cédée au milieu.

Remarque :

$$\text{En SD : } \overrightarrow{v_p} = \frac{\omega}{|k|} \frac{\overrightarrow{k'}}{|k'|}$$

. En présence de dispersion, on ne peut plus définir l'impédance de prop comme au chap 1

S'il y a deux grandeurs complexes on peut definir impédance pour ondes prop stadi-harmoniques qui sera complexe

$$\text{soit : } Z_{\text{prop}} = \Delta + Z_{\text{di}} - \lambda_i$$

$$\text{Coax: } \partial_t u = -k \partial_t i - i$$

$$\Rightarrow Z(\omega) = \frac{\underline{i}(\omega)}{\underline{i}(\omega)} = \frac{\omega k - i\epsilon}{k(\omega)}$$

## II - Propagation d'un paquet d'onde

Étudions la propagation d'un paquet d'onde

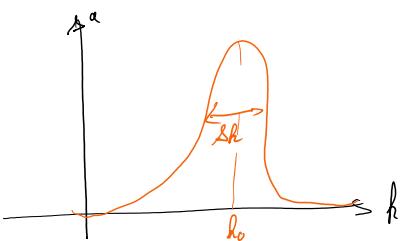
$$A(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} a(k) \exp(i(\omega(k)t - kx))$$

(chaque composante harmonique a une vitesse différente  $\rightarrow$  déformation du paquet d'onde)

Il n'y a pas d'atténuation  $\alpha''(\omega) = 0$  donc  $a(k)$  reste

On va se concentrer sur paquet d'onde d'extension spectrale limitée :

Fond. on  $a(k)$  entière autour de  $k_0$ , de largeur  $\Delta k \ll k_0$



Étude la dispersion faible avec un DL:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk}(k_0) + \frac{(k - k_0)^2}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2}(k_0) + O\left(\frac{(\Delta k)^2}{k_0}\right)$$

### 1) Dispersion au premier ordre : glissement de phase

$$\text{Premier ordre: si } \Delta k \frac{d\omega}{dk}(k_0) \gg \frac{\Delta k^2}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2}(k_0)$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega(k_0)}{dk} \gg \Delta k \frac{d^2\omega}{dk^2}(k_0)$$

Donc soit dispersion faible ( $\frac{d^2\omega}{dk^2}$  petit) soit paquet d'onde étroit ( $\Delta k$  faible)

$$\begin{aligned} \text{Alors: } A(x, t) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} a(k) \exp\left[i\left(\omega(k_0) + (k - k_0) \frac{d\omega}{dk}(k_0)\right) t - kx\right] \\ &= e^{i(\omega(k_0) + kx)} \times \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{i(k - k_0) \left(\frac{d\omega}{dk}(k_0) + -x\right)} \end{aligned}$$

$$= e^{i(\omega(k_0) + -kz)} \times \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{ik(k-k_0)(\frac{d\omega}{dk}(k_0) + -z)}$$

Onde portante modulée par enveloppe

$$\text{Alors } \left[ \frac{d\omega(k_0)}{dk} + -z \right] = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} a(k) e^{ik(k-k_0)(\frac{d\omega}{dk}(k_0) + -z)}$$

L'onde portante est harmonique et se déplace à  $\bar{\omega}_g(k_0) = \frac{\omega(k_0)}{k_0}$

L'enveloppe se déplace à la vitesse de groupe (vitesse du paquet)

$$\boxed{\bar{\omega}_g = \frac{d\omega}{dk} \star} \quad \begin{array}{l} \text{(évaluer en } k_0 \\ \text{en toute généralité si } g \text{ a衍化)} \end{array}$$

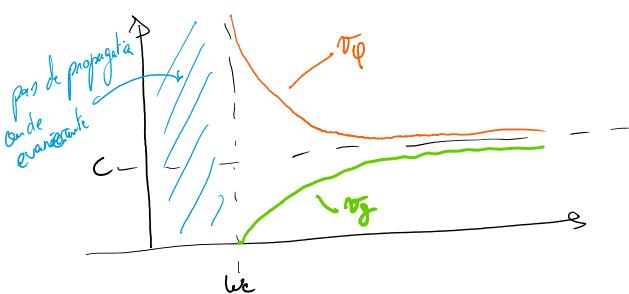
Le paquet d'onde se déforme au cours de la propagation. L'enveloppe reste la même mais il a un glissement de phase: la portante glisse à l'intérieur de l'enveloppe.

### Exemples

(1) Eg de d'Alambert  $\omega_g = \bar{\omega}_g = \pm c$   
↳ caractéristique de l'absence de dispersion

(2) Klein-Gordon  $\omega > \omega_c$ :

$$\bar{\omega}_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$$



Remarque:

$$\text{Soit } \bar{\omega}_g = \sqrt{\mu^2 + \omega^2}$$

Méthode plus efficace pour avoir  $\bar{\omega}_g$ : phase stationnaire

• Méthode plus efficace pour avoir  $v_g$  : phase stationnaire

$$A(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} |a(k)| \exp \left[ i(\omega(k)t - kx + \phi(ak)) \right]$$

"interférence constructive" en phase stationnaire

$$\partial_k (\omega(k)t - kx + \phi(ak)) = 0$$

$$\Rightarrow x = \left( \frac{d\omega}{dk} \right) t + cst$$

position au cours du temps de max du paquet d'onde.

## 2) Régimes de dispersion

• Si  $\sigma_q > v_g$  : dispersion normale

• Si  $\sigma_q < v_g$  : dispersion anormale

Exemple:

• KG : normale

• Schrödinger:  $\omega(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_q = \frac{\hbar k}{2m} \\ v_g = \frac{\hbar k}{m} \end{cases} \rightarrow \text{anormale}$

Notons que  $\sigma_q(k') = \frac{\omega(k')}{k'}$

Donc  $\frac{d\sigma_q}{dk'} = \frac{\sigma_q(k')}{k'} - \frac{\sigma_q(k)}{k'}$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_g = \sigma_q + k' \frac{d\sigma_q}{dk'}}$$

Plus naturel exprimer en la longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k'}$

$$\boxed{\sigma_g = \sigma_q - \lambda \frac{d\sigma_q}{d\lambda}} \quad \text{Formule de Rayleigh}$$

disp normale si  $\sigma_q$  est croissante de  $\lambda$   
et décroissante de  $\lambda$

disjonction normale si  $v_g$  est croissante de  $k$   
anormale si  $v_g$  décroissante de  $k$

### 3.3 Rédiffusion au deuxième ordre - équation d'enveloppe

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) v_g(k_0) + \frac{(k - k_0)^2}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2}(k_0)$$

Factorisation en perturbation et enveloppe:

$$A(x, t) = \exp(i(\omega(k_0) - k_0 x)) A_e(x, t)$$

$$\text{avec } A_e(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dk}{2\pi} a(k) \exp\left[i(k - k_0)(v_g(k_0)t - x) + \frac{it}{2} (k - k_0)^2 \frac{d^2 \omega}{dk^2}(k_0)\right]$$

$$\text{donc } \partial_t A_e = \left[ i(k - k_0) v_g(k_0) + \frac{i}{2} (k - k_0)^2 \frac{d^2 \omega}{dk^2}(k_0) \right] A_e$$

$$\partial_x A_e = \left[ -i(k - k_0) \right] A_e$$

donc l'enveloppe vérifie l'éq:

$$\boxed{i \left( \partial_t A_e + v_g(k_0) \partial_x A_e \right) = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2}(k_0) \partial_x^2 A_e}$$

/ Équation d'enveloppe

changement de variable (vers ref évoluant à  $v_g(k)$ )

$$\begin{cases} \xi = x - v_g(k_0) t \\ \varphi = t \end{cases}$$

$$\text{alors (1)} \Rightarrow \boxed{i \partial_\varphi A_e = p \partial_\xi^2 A_e} \quad \text{avec } p = \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2}(k)$$

Équation de Schrödinger!

Résolution avec TF (spatiale).

$$\begin{cases} F[\partial_k](q, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} dk \partial_k A_e(\xi, \varphi) e^{-iq\xi} \\ A_e(\xi, \varphi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} F(q, \varphi) e^{iq\xi} \end{cases}$$

donc l'eq devient

$$\rightarrow M[\partial_\varphi] - q^2 ? F[\partial_k]$$

donc l'og devient

$$i \frac{d}{dq} F[\alpha_k] = -q^2 ? F[\alpha_k]$$

$$\text{donc } F[\alpha_k](q, z) = F[\alpha_k](q, 0) e^{iq^2 z}$$

donc par TF inverse :

$$A_k(\xi, z) = \int_{\mathbb{R}} dq F[\alpha_k](q, 0) \exp(i q p z + i q \xi)$$

Pour un paquet d'onde gaussien de largeur spectrale  $\Delta k$  à  $z=0$

$$F[\alpha_k](q, 0) = A_0 \exp\left(-\frac{q^2}{2\Delta k^2}\right)$$

$$A_k(\xi, 0) = A_0 \sqrt{\frac{\Delta k^2}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2 \Delta k^2}{C}\right)$$

$$\text{alors } A_k(\xi, z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{dq}{2\pi} A_0 \exp\left(q^2 \left(i p z - \frac{1}{2\Delta k^2}\right) + i q \xi\right)$$

Intégrale gaussienne :

$$\int_{\mathbb{R}} dq \exp\left(-\left(\frac{q^2 + b^2}{a}\right)\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}$$

$$\text{donc } A_k(\xi, z) = A_0 \sqrt{\frac{\Delta k^2}{2\pi(1 - 2i p \Delta k^2 z)}} \exp\left[-\frac{\xi^2 \Delta k^2}{2(1 - 2i p \Delta k^2 z)}\right]$$

et en particulier :

$$|A_k(\xi, z)| = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi \sigma(z)^2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma(z)^2}\right), \quad \sigma(z) = \sqrt{1 + (2p \Delta k^2 z)^2}$$

$$\text{donc } |A_k(x, t)| = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi \sigma(t)^2}} \exp\left[-\frac{(x - v_f(t))}{2\sigma(t)^2}\right] \quad \text{avec } \sigma(t) = \frac{1}{\Delta k} \sqrt{1 + (2p \Delta k^2 t)^2}$$

enveloppe gaussienne qui reste gaussienne avec  $t > 0$  mais qui s'étale.

Le paquet d'onde reste gaussien, mais sa largeur évolue au cours du temps  
↳ étirement du paquet d'onde.

Sur un temps caractéristique

$$\tau_1 = \frac{1}{\omega^2 d\omega(k_0)}$$

Sur un temps caractéristique

$$\tau_{\text{disp}} = \frac{1}{2^p \Delta h} = \frac{1}{\Delta h^2 \frac{d^2 w}{dt^2}(t_0)}$$

Etant d'autant plus rapide que la dispersion est forte ( $\frac{d^2 w}{dt^2}$  grand) et que le peigne d'au est large spectralement (loin de monochromatique).

#### 4) Limites des notions en présence d'atténuation

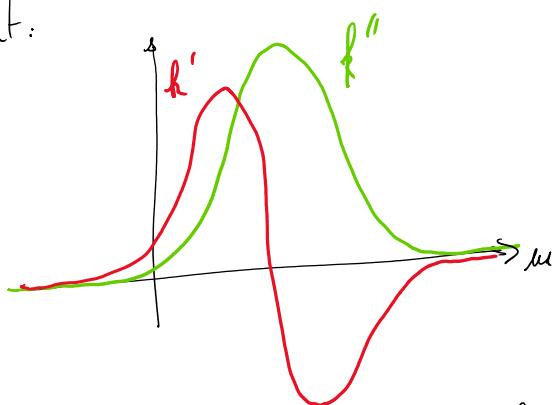
En pratique  $h'$  et  $h''$  peuvent être tous les deux non nuls, mais pas indépendants  
Si la relation est suffisamment régulière:

Relations de Kramers-Krönig:

$$h'(\omega) = \frac{1}{\pi} \text{vp} \int_R d\xi \frac{h''(\xi)}{(\xi - \omega)}$$

$$h''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{vp} \int_R d\xi \frac{h'(\xi)}{(\xi - \omega)}$$

Typiquement:



$h'$  a des faibles variations longue que  $h''$  est faible, alors les not. des 3.1 et 3.3 sont valables  
si  $R''$  est non négligeable  $\rightarrow$  fortes variations de  $h'$   
 $\rightarrow$  not. plus valables.

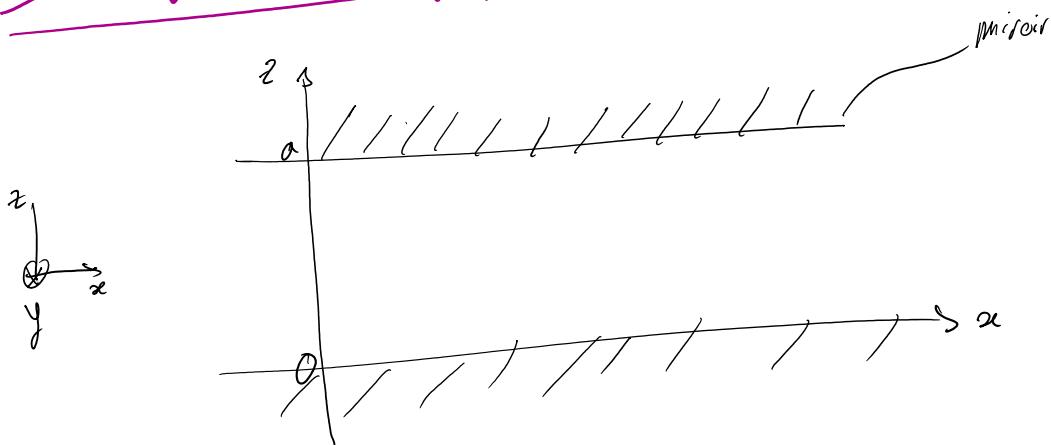
# Chapitre 3: Propagation guidée des ondes

mardi 28 janvier 2025 10:55

Guidage: confinement d'une onde dans le but de canaliser son énergie dans un domaine donné de l'espace

On va voir que ça induit de la dispersion

## I. Guidage d'ondes électromagnétiques entre deux plans métalliques.



- . Vide avec mirroir  $\perp$  à  $\vec{e}_z$  en  $z=0$  et  $z=a$
- . Propagation dans la direction  $\vec{e}_x$
- . Conducteurs infinis selon  $\vec{e}_y$

Condition aux limites:

composante tangentielle de  $\vec{E}$  continue

$$E_{ax}(x, y, 0, t) = E_a(x, y, a, t) = 0$$

$$E_y(x, y, 0, t) = E_y(x, y, a, t) = 0$$

Composante de  $\vec{B}$  normale aux plans continues:

$$B_z(x, y, 0, t) = B_z(x, y, a, t) = 0$$

## 1) Structures des ondes: modes TE et TM

Invariance par translation selon  $\vec{e}_y$ , pas de dépendance en  $y$ .

Équation de Maxwell:

$$\boxed{\nabla^2 \vec{B} + \partial_t \vec{B} = 0}$$

Équation de l'onde

$$\partial_x E_{xz} + \partial_z E_{zx} = 0$$

$$\partial_z E_{xz} - \partial_x E_{zx} = -\partial_t B_y$$

$$-\partial_z B_y = \frac{1}{c^2} \partial_t E_{xz}$$

$$\partial_x B_y = \frac{1}{c^2} \partial_t E_{xz}$$

$$\partial_x B_{xz} + \partial_z B_{zx} = 0$$

$$-\partial_z E_y = -\partial_t B_{xz}$$

$$\partial_x E_y = -\partial_t B_{xz}$$

$$\partial_z B_{xz} - \partial_x B_{zx} = \frac{1}{c^2} \partial_t E_y$$

→ champs  $E_{xz}, E_{zx}, B_y$

= mode transverse magnétique

(TM)

→ 2 groupes d'éq découpés TM (E selon direction de prop), TE (B selon direction de prop)

B ⊥

on peut résoudre séparément

Ensemble des solutions des équations peut-être recomposé partir de combinaisons linéaires de modes TE et TM

Remarque:  
Cette décomposition en mode TE et TM est valable pour tous les guides uniques (prop selon un seul axe).

## 2) Analyse du mode TE

Résolution des équations.

La connaissance de  $E_y$  donne  $B_{xz}$  et  $B_{zx}$

et  $E_y$  est solution de l'éq de d'Alambert:

$$\partial_x^2 E_y + \partial_z^2 E_y - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 E_y = 0 \quad (1)$$

On veut une prop selon  $\vec{x}$  → onde PI en  $x$   
et confinement selon  $\vec{z}$  → onde stat. normale selon  $z$

$$e^{i(\omega t - k_x z)}$$

$$\text{Ansatz: } E_y(x, z, t) = \underline{E(z)} e^{i(\omega t - k_x z)}$$

↑  $\underline{E}$  n'est pas un vecteur d'onde car l'onde n'est pas plane

$\vec{k}_g$  n'est pas un vecteur d'onde car l'onde n'est pas plane

On injecte dans (1):

$$\boxed{\frac{d^2 \underline{E}(z)}{dz^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 \right) \underline{E}(z) = 0}$$

Il existe des solutions non nulles satisfaisant la CL seulement si  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_g^2 > 0$

$$\text{Si c'est le cas } \exists A, B / \underline{E}(z) = A \cos(kz) + B \sin(kz)$$

$$\text{Constantes fixes par CL: } \underline{E}(0) = \underline{E}(a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ \sin(ka) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ k = \frac{n\pi}{a}, n \in \mathbb{N}^*$$

Finalement:

$$\boxed{\underline{E}_n(x, z, t) = E_{0,n} \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos\left(\omega t - k_g n z + \phi_n\right) \vec{e}_y}$$

$$\text{avec } k_{g,n}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

Et avec Maxwell-Faraday

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B}_n(x, y, t) &= E_{0,n} \frac{n\pi}{wa} \cos\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \sin\left(\omega t - k_g n z + \phi_n\right) \vec{e}_x \\ &+ E_{0,n} \frac{k_{g,n}}{w} \sin\left(\frac{n\pi}{a} z\right) \cos\left(\omega t - k_g n z + \phi_n\right) \vec{e}_z \end{aligned}}$$

CL  $\rightarrow$  quantification des solutions en mode

$\rightarrow$  mode  $TE_n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$

Remarque:

Dans le vide mais l'onde n'est pas transverse!

C'est des conditions aux limites (les résultats du chap 1 sont valables dans un espace infini)

Aspects énergétiques =

$E_{0,n}$  modes  $TE_n$ :

Aspects énergétiques :

Vecteur de Poynting moyen dans modes TE<sub>n</sub>:

$$\langle \vec{P}_n \rangle = \left\langle \frac{\vec{E}_n \times \vec{B}_n}{\mu_0} \right\rangle = \frac{E_{0,n}^2 k_{g,n}}{\epsilon_0 \omega} \sin^2 \left( \frac{n\pi}{a} z \right) \hat{e}_z$$

→ propagation de l'énergie selon  $\hat{e}_z$  grâce au guidage.

Décomposition en ondes planes:

$$\vec{E}_n(x, y, t) = \frac{E_{0,n}}{2} \sin \left( \omega t - k_{g,n} x + \frac{n\pi}{a} z + \phi_n \right) \hat{e}_y$$

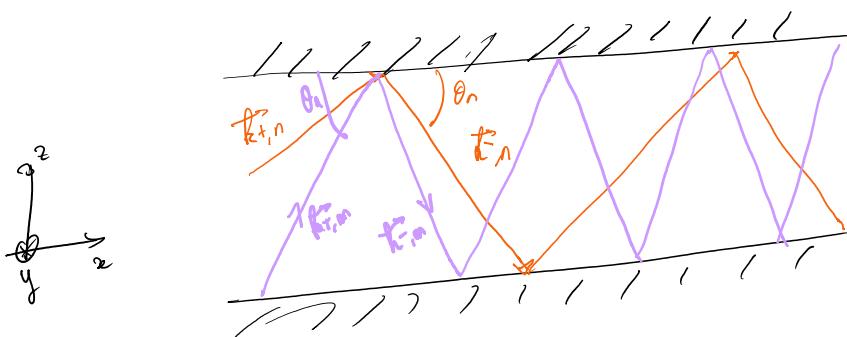
$$- \frac{E_{0,n}}{2} \sin \left( \omega t - k_{g,n} x - \frac{n\pi}{a} z + \phi_n \right) \hat{e}_x$$

au y? ou y? peut être...

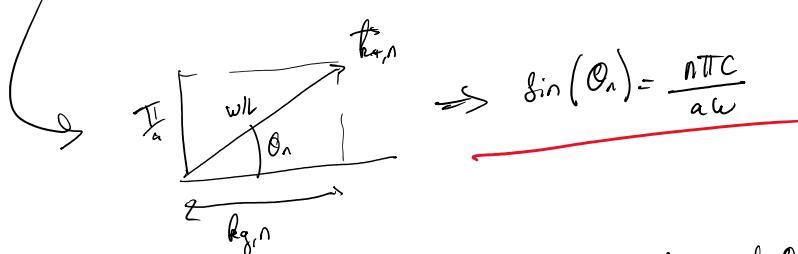
se propagent selon la longueur d'onde:

$$\vec{k}_{t,n} = k_{g,n} \hat{e}_x \pm \frac{n\pi}{a} \hat{e}_z$$

$$|\vec{k}_{t,n}| = \frac{\omega}{c}$$



Propagation en rebonds successifs sur les conducteurs



Les ondes se déplacent à la vitesse c, mais avec des réflexions de On qui dépend du mode  
... ∵ ... dépend du mode.

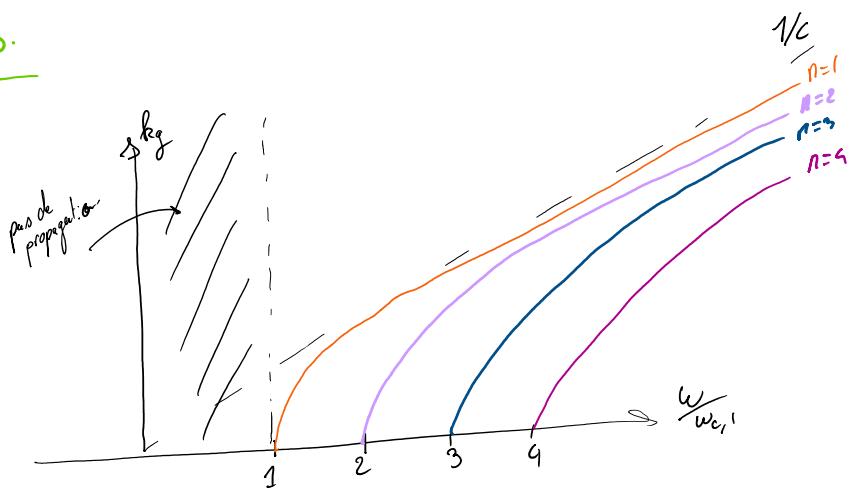
Les ondes se déplacent à la vitesse  $c$ , mais avec des réflexions.  
La propagation de l'énergie dépend du mode.

### 3) Dispersion due aux conditions aux limites.

Les CL imposent la relation de dispersion

$$\omega_{\text{min}}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2 \pi^2}{a^2}$$

→ analogie à cel disp de Klein-Gordon.  
mais pas due au milieu mais seulement aux CL



(i) Seules les ondes de  $\omega > \omega_{c,n} = \frac{n \pi c}{a}$  peuvent se propager dans le mode  $TE_n$   
→ guide agit comme un filtre passe-haut

(ii) Pour  $n$  donné, la vitesse de phase est

$$v_{\phi,n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{c,n}}{\omega}\right)^2}}$$

propagation dans chaque mode est dis perse.  
→ dispersion intramode

(iii) Dispersion intermode : une onde de  $\omega$  peut se propager dans tout le mode  $TE_n$   
tel que  $\omega_{c,n} < \omega$ . Ces différentes composantes se propagent à des vitesses différentes  
donc l'onde est déformée.

Si  $\omega_{c,1} < \omega < \omega_{c,2} \Rightarrow$  propagation seulement dans  $TE_1$   
→ on parle de guide monomode

Si on veut transmettre une onde à  $\lambda$  donné, il faut choisir un guide monomode

$$\omega_{c,1} < \frac{c\pi}{\lambda} < \omega_{c,2} \Rightarrow \alpha < \lambda < 2a$$

Donc écart entre les plans  $a$  de l'ordre de  $\lambda$  → ord valide même si guide pas plan

Donc écart entre les plans a de l'ordre de

Odg : si  $a \approx 1\text{cm}$  l'entre 1 et 2 cm  
 ici  $15\text{GHz} < f < 30\text{GHz}$   
 → micro-onde

### 4) Modes transverses magnétique et mode TE<sub>n</sub>

Résolution pour TM analogique : TM<sub>n</sub>,  $n \in \mathbb{N}$  ↪ ici n peut être nul contrairement au mode TE<sub>n</sub> !

$$\vec{B}_n(x, z, t) = B_{0,n} \cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \cos(wt - k_{g,n}x + \phi_n) \vec{e}_y$$

$$\vec{E}_n(x, z, t) = B_{0,n} \frac{i\pi c^2}{wa} \sin\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \sin(wt - k_{g,n}x + \phi_n) \vec{e}_x$$

$$- B_{0,n} \frac{k_{g,n}c^2}{w} \cos\left(\frac{n\pi}{a}z\right) \cos(wt - k_{g,n}x + \phi_n) \vec{e}_z$$

avec  $k_{g,n}$  vérifie la loi relative de dispersion.

Pour  $n=0$

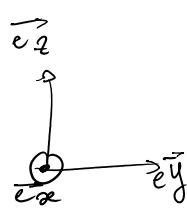
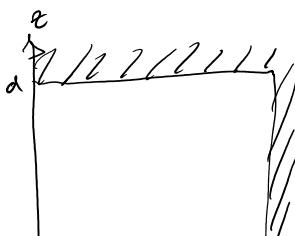
$$\begin{cases} \vec{B}_0 = B_{0,0} \cos\left(wt - \frac{w}{c}x + \phi_0\right) \vec{e}_y \\ \vec{E}_0 = -B_{0,0} \cos\left(wt - \frac{w}{c}x + \phi_0\right) \vec{e}_z \end{cases}$$

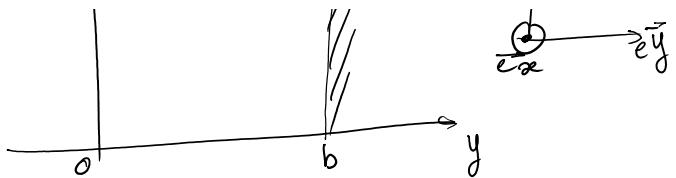
Transverse elec et mag → TE<sub>0</sub>

$k_{g,0}^2 = \left(\frac{w}{c}\right)^2 \Rightarrow$  propagation sans dispersion

→ mode idéal pour  $f^{10}f^{ag}$   
 → existence de mode TE<sub>0</sub> = critique de "bar guide"

### 5) Cas réel : guide d'onde rectangulaire





→ encore modes TE et TM

→  $(TE)_{m,n}$  avec  $m, n \in \mathbb{N}^* \setminus \{0, 0\}$

$(TM)_{m,n}$  avec  $m, n \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$

→ double quantification car confinement selon  $y$  et  $z$

Dispersion:

$$k_{g,n,m}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

polarisation de coupure :  $\omega_{c,n,m}^2 = \left(\frac{n\pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi c}{b}\right)^2$

Guide monomode si

$$\min(\omega_{c,00}, \omega_{c,10}) < \omega < \omega_{c,11}$$

Par contre  $(0,0)$  exclu → pas de mode TEM.

Remarque:

Chap 1: impedance propage  $\neq \infty$

$$\vec{E} = Z \vec{H} \times \vec{e}_x$$

pour  $\vec{H}^P$  & propage  $\vec{k}_{00} \parallel \vec{e}_x$

$$\text{Dens vide } Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

Chap 2: dispersion, impedance (complexe), pour les ondes pseudo-propagant

équation dispersion du guide

Avec Maxwell-Ampère:

$$\text{imp} \underline{\epsilon}_0 \underline{\vec{E}} = -i \vec{k}_g \times \vec{B}, \quad \vec{k}_g = k_g \vec{e}_x$$

$$\text{Dens } \Rightarrow \underline{\vec{E}} = \frac{k_g}{\epsilon_0 \omega} \vec{H} \times \vec{e}_x$$

$$Z_0 = \frac{h_g c}{\epsilon_0 \omega}$$

$$\Rightarrow Z = \frac{h_g c}{\epsilon_0 \omega} = Z_0 \frac{h_g c}{w}$$

Pour guide d'onde rectangulaire mode  $(n, m)$

$$Z_{n,m} = Z_0 \sqrt{1 - \frac{\omega_{c,n,m}}{\omega^2}}$$

$Z_{n,m} \rightarrow$  impédance de guidage due au CL pas propre du milieu

$Z_{n,m} \rightarrow Z_0 \propto a, b \rightarrow \infty$  (pas de guide)

Donc besoin d'adapter l'impédance en sortie du guide

$\rightarrow$  adaptation géométrique

## II. Recherche d'un mode TE<sub>11</sub> - cable coaxial

### 1) Existence d'un mode TE<sub>11</sub>

Condition d'existence d'un mode TE<sub>11</sub> (propagation selon  $\vec{e}_x$ ):

ie de la forme:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(y, z) e^{i(\omega t - h_g z)}$$

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \vec{B}_0(y, z) e^{i(\omega t - h_g z)}$$

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{e}_x = 0 \quad \vec{B}_0 \cdot \vec{e}_x = 0$$

Il doit vérifier les eq de Maxwell:

$$\text{MF: } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{f} \vec{A}) = \vec{f} \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \vec{f} \times \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 - i h_g \vec{e}_x \times \vec{E}_0 = -i \omega \vec{B}_0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 - (\partial_y E_{0x} - \partial_z E_{0y}) \vec{e}_x$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = (\partial_y E_{0z} - \partial_z E_{0y}) \hat{e}_x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = \vec{0} \\ \vec{B}_0 = \frac{k_0}{\omega} \hat{e}_x \times \vec{E}_0 \end{cases}$$

¶ der 91 A:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = 0 \\ \vec{E}_0 = -\frac{c^2 k_0}{\omega} \hat{e}_x \times \vec{B}_0 \end{cases}$$

Compatibilité:

$$\vec{E}_0 = -\frac{c^2 k_0}{\omega} \hat{e}_x \times \left( \frac{k_0}{\omega} \hat{e}_x \times \vec{E}_0 \right)$$

$$= \frac{c^2 k_0^2}{\omega^2} \vec{E}_0$$

$$\Rightarrow \boxed{k_0^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Donc propagation d'un mode TE11 dans le vide  $\rightarrow$  sans dispersion

Comme  $\vec{\nabla} \times \vec{E}_0 = 0$ ,  $\exists V_0 / \vec{E}_0 = -\vec{\nabla} \text{grad } V_0$

$$\text{Et } \forall \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 - i k_0 \hat{e}_x \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta V_0 = 0}$$

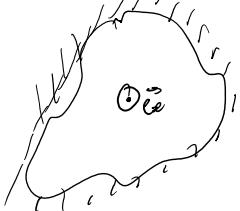
$\vec{E}_0$  d'un mode TE11 dérive d'un potentiel qui vérifie l'eq de Laplace.

Qui est défini par la présence de conducteurs où le champ  $\vec{E}_0 = \vec{0}$ , donc  $\boxed{V_0 = \text{ct.}}$

... soit la limite des solutions de l'eq de Laplace en CC donnée.

Or il y a unicité des solutions de l'éq de Laplace in CC donné.

(i) Si guide fait par un unique conducteur où  $V_0$  est partout est solution de Laplace  $\rightarrow$  c'est la seule solution



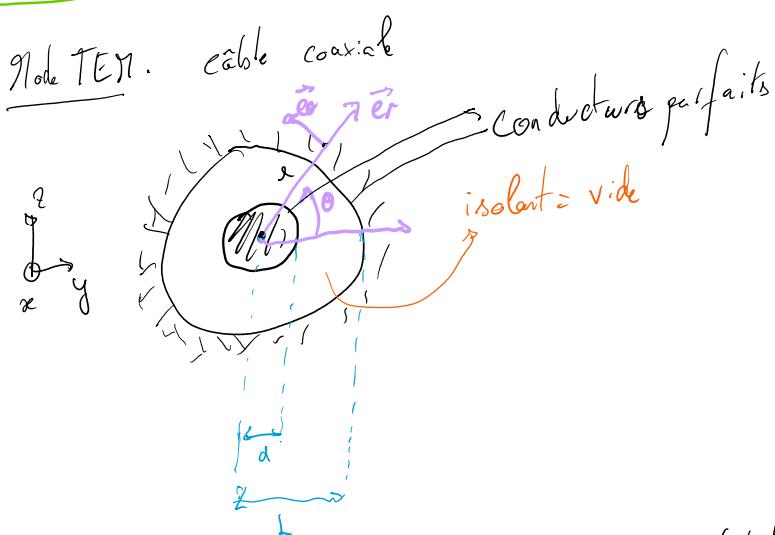
$\rightarrow$  pas de mode TE01 (cas de guide rectangulaire!).

(ii) Guide délimité par deux conducteurs, porté à des potentiels différents  
 $V_0$  est pas solution  $\rightarrow$  possibilités d'un mode TE01



(cas de guide plan!)

### ⇒ Mode TE01 d'un guide d'onde cylindrique



Champ de la forme :  $\vec{E}(x, r, \theta, t) = \vec{E}_0(r, \theta) e^{i(\omega t - k_r x)}$

$$\vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0 = 0$$

idem  $\vec{B}$

Et  $\vec{F} = -\vec{\nabla}V_0$  et  $\Delta V_0 = 0$

$$\text{Et } \vec{E}_0 = -\vec{\nabla}V_0 \quad \text{et} \quad \Delta V_0 = 0$$

En coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \partial_r \left( r \partial_r V_0 \right) + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 V_0 = 0$$

(L'invariance par rotation en  $\theta$  dans solution invariante par rotation en  $\theta$ )

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_0}{dr} \right) = 0$$

donc  $V_0(r) = A \ln(r) + B$

et  $V_0(a) = V_a$  et  $V_0(b) = V_b$

$$\Rightarrow \boxed{V_0(r) = V_a + \frac{V_b - V_a}{\ln(b/a)} \ln\left(\frac{r}{a}\right)}$$

$\rightarrow$  existence d'un mode TEI

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{V_a - V_b}{\ln(b/a)} e^{i\omega(t - \frac{r}{c})} \vec{e}_r \\ \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{V_a - V_b}{c \ln(b/a)} e^{i\omega(t - \frac{r}{c})} \vec{e}_\theta \end{array} \right.$$

Mode électrique (Garing, onde TEI, ... p61)

$\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  et  $u(x,t) = V(a) - V(b)$

$$\boxed{u(x,t) = (V_a - V_b) e^{i\omega(t - \frac{x}{c})}}$$

n Relation de passage pour  $\vec{B}$  sur les conducteurs  
discontinuité des composantes tangentielles induit courant surface

$$\vec{B}(x, a^+, \theta, t) - \underbrace{\vec{B}(x, a^-, \theta, t)}_{0 \text{ dans le conducteur}} = \mu_0 \vec{E} \times \vec{e}_r$$

$$\vec{J}^S = \frac{V_a - V_b}{\omega_0 c \ln(b/a)} e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} \hat{e}_x$$

$$\text{donc } i(z, t) = \int_0^{2\pi} \vec{J}^S \cdot (\alpha d\theta) \hat{e}_x \\ = \frac{8\pi}{\omega_0 c} \frac{(V_a - V_b)}{\ln(b/a)} e^{i\omega(t - \frac{z}{c})}$$

Capacité et inductance

$$E_{\text{elec}} = \int_a^b 2\pi r dr \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2} \mathcal{M} \alpha^2$$

$$E_{\text{mag}} = \int_a^b 2\pi r dr \frac{1}{2\mu_0} |\vec{B}|^2 = \frac{1}{2} \Lambda \alpha^2$$

élec stockée dans capacité, mag stockée dans inductance

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln(b/a)}, \quad \Lambda = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(b/a)$$

→ dépendant de la géométrie uniquement

$$\text{caractéristique : } \frac{1}{\sqrt{\Lambda \mathcal{M}}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c.$$

### 3) Autres modes et sources de pertes

Même résolution dans le cas général → fonctions de Bessel  
polarisation du couple pour les premiers modes TE et TM

$$\boxed{w_{c, TE} = \frac{\pi c}{b-a}}$$

$$\boxed{w_{c, TM} = \frac{2c}{b+a}}$$

Ex TP:  $a \approx 0.5 \text{ mm}$ ,  $b \approx 1.5 \text{ mm}$

$$f_{\text{cut}} \approx 100 \text{ GHz}$$

→ donc TE01 si  $f < 100 \text{ GHz}$

$\rightarrow$  donc TEM si  $f < 100 \text{ GHz}$

Câble réel: • conducteur non parfait  
 $\rightarrow$  pertes joules (à la modélisation électrocinétique)

• isolant pas parfait (diélectrique)  
 $\rightarrow$  courant de fuite (g à la modélisation électrocinétique).