

# ONDES

NOTES DE COURS. LU2PY421



CLÉMENT SAYRIN

2 mars 2025

# TABLE DES MATIÈRES

<b>1 Ondes : Introduction</b>	<b>3</b>
1.1 Les ondes : de multiples natures . . . . .	3
1.1.1 Ondes mécaniques . . . . .	3
1.1.2 Ondes électromagnétiques . . . . .	4
1.1.3 Ondes gravitationnelles . . . . .	5
1.1.4 Ondes de matière . . . . .	5
1.1.5 Beaucoup d'autres exemples . . . . .	5
1.2 Définition et propriétés . . . . .	5
1.2.1 Définition . . . . .	5
1.2.2 Propriétés principales . . . . .	6
1.2.3 Avant de commencer... . . . . .	8
<b>2 Propagation à 1D – Équation de propagation</b>	<b>9</b>
2.1 Propagation le long d'une corde vibrante . . . . .	9
2.1.1 Description de la corde et hypothèses . . . . .	9
2.1.2 Onde progressive à vitesse constante . . . . .	10
2.1.3 Équation d'onde sur la corde vibrante . . . . .	12
2.2 Solutions de l'équation de d'Alembert . . . . .	15
2.2.1 Expression et solutions générales . . . . .	15
2.2.2 Ondes périodiques et sinusoïdales . . . . .	18
2.2.3 Ondes progressives sinusoïdales . . . . .	19
2.2.4 Ondes progressives et impédance . . . . .	23
2.3 Propagation de l'énergie . . . . .	24
2.3.1 Aspects énergétiques . . . . .	24
2.3.2 Ondes progressives : puissance et impédance . . . . .	26
<b>3 Ondes acoustiques</b>	<b>29</b>
3.1 Ondes acoustiques dans les fluides . . . . .	29
3.1.1 Qu'est-ce que le son ? . . . . .	29
3.1.2 Description du fluide . . . . .	30
3.1.3 Équation de propagation . . . . .	30
3.1.4 Célérité du son . . . . .	32
3.2 Propagation d'ondes à 3D . . . . .	33
3.2.1 Équation d'onde à 3D . . . . .	33
3.2.2 Ondes sinusoïdales – Surfaces d'ondes . . . . .	34
3.3 Aspects énergétiques . . . . .	38
3.3.1 Impédance acoustique . . . . .	38
3.3.2 Puissance acoustique . . . . .	38
3.3.3 Intensité acoustique et niveau sonore . . . . .	39

<b>4 Battements, Interférences, Résonance</b>	<b>42</b>
4.1 Superposition de deux ondes – ondes stationnaires . . . . .	42
4.1.1 Interférences temporelles : battements . . . . .	42
4.1.2 Interférence d'ondes planes – ondes stationnaires . . . . .	44
4.1.3 Vitesse de groupe – Paquets d'onde . . . . .	45
4.2 Confinement des ondes – résonances . . . . .	49
4.2.1 Conditions aux limites . . . . .	49
4.2.2 Conditions de résonance . . . . .	50
4.2.3 Décomposition spectrale . . . . .	52
4.2.4 Aspects énergétiques . . . . .	53
4.3 Réflexion et transmission à une interface . . . . .	54
<b>5 Ondes électromagnétiques</b>	<b>56</b>
5.1 Propagation des ondes électromagnétiques . . . . .	56
5.1.1 Ondes électromagnétiques dans le vide . . . . .	56
5.1.2 Aspects énergétiques . . . . .	58
5.1.3 Champ proche et champ rayonné . . . . .	58
5.1.4 Potentiels retardés . . . . .	59
5.1.5 Application : dipôle oscillant . . . . .	60
5.2 Ondes planes progressives monochromatiques . . . . .	62
5.2.1 Relation de dispersion . . . . .	62
5.2.2 Structure des ondes planes . . . . .	62
5.2.3 Aspects énergétiques . . . . .	64
5.2.4 Polarisation des ondes planes . . . . .	64
5.3 Propagation dans un diélectrique : indice optique et dioptres . . . . .	68
5.3.1 Milieux diélectriques LHI . . . . .	68
5.3.2 Réflexion et transmission sur un dioptre . . . . .	69
<b>A Corrigé des exercices d'application</b>	<b>71</b>
A.1 Chapitre 1 . . . . .	71
A.2 Chapitre 2 . . . . .	71
A.2.1 Exercices d'application 1 . . . . .	71
A.2.2 Exercices d'application 2 . . . . .	72
A.2.3 Exercices d'application 3 . . . . .	72
A.2.4 Exercices d'application 4 . . . . .	73
A.3 Chapitre 3 . . . . .	73
A.3.1 Exercices d'application 1 . . . . .	73
A.3.2 Exercices d'application 2 . . . . .	74
A.4 Chapitre 4 . . . . .	74
A.4.1 Exercices d'application 1 . . . . .	74



A.4.2 Exercices d'application 2 . . . . .	75		A.5.1 Exercices d'application 1 . . . . .	76
A.5 Chapitre 5 . . . . .	76			

# 1 ONDES : INTRODUCTION

La partie *Électromagnétisme* de ce cours est consacrée à l'étude des champs électriques et magnétiques créés par des distributions de charges et de courants. Ces champs décrivent l'action à distance de distributions de charges et courants sur d'autres distributions de charges et courants. Une charge  $q_1 > 0$ , sous l'action du champ électrique  $E_2$  créé par une autre charge  $q_2 < 0$ , qui apparaîtrait spontanément à un instant initial, est ainsi irrémédiablement attirée vers elle. Mais après quel intervalle de temps après l'apparition de  $q_2$  la charge  $q_1$  ressent-elle le champ  $E_2$ ? La théorie de la relativité interdit à cet intervalle d'être nul puisque l'information, l'énergie, ne peuvent pas se propager infiniment rapidement. Il nous faut donc décrire comment se propage le champ électrique de sa source  $q_2$  à la charge cible  $q_1$ .

Cette propagation se fait sous la forme d'*ondes électromagnétiques*. Les champs électriques et magnétiques se propagent à une vitesse constante, la vitesse de la lumière  $c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}^{-1} = 299\,792\,358 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Nous verrons plus tard dans ce cours et dans le cours d'*électromagnétisme* que l'équation permettant de décrire cette propagation est l'*équation de d'Alembert*:

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (1.1)$$

Le concept d'*ondes* s'étend en fait bien au-delà de l'*électromagnétisme* et se rencontre dans de très nombreux domaines de la physique : les ondes sonores émises par un instrument de musique ou simplement notre voix, les ondes que produisent un objet à la surface de l'eau, les ondes sismiques de la croûte terrestre... Pourtant, toutes, dans un régime que l'on précisera, peuvent être décrites par l'*équation de d'Alembert*.

Dans ce cours, nous décrirons plusieurs types d'*ondes* en s'attardant sur deux exemples particuliers, les ondes se propageant sur une corde vibrante et les ondes acoustiques dans les fluides (liquides ou gaz). Ils nous permettront de mettre en évidence les principales propriétés et comportement des ondes. Dans ces deux exemples, ce sont les lois de la mécanique et les propriétés connues des milieux (la corde ou le fluide) qui nous permettront d'établir l'*équation de propagation des ondes*. Nous nous attacherons, en particulier, à faire ressortir les similitudes entre les diverses ondes rencontrées. Nous serons alors armés pour l'étude des ondes électromagnétiques elles-mêmes, au chapitre 5.

Nous nous restreindrons essentiellement aux phénomènes linéaires, c'est-à-dire que nous considérerons que les perturbations induites par les ondes sont « petites ».

L'étude poussée des phénomènes non-linéaires va au-delà du cadre de ce cours et sera laissée en ouverture.

## 1.1 LES ONDES : DE MULTIPLES NATURES

Avant de donner une définition d'une onde et d'en identifier les principales caractéristiques, il est utile de se donner des exemples connus d'*ondes*, de natures aussi diverses que possibles. Nous avons déjà évoqué les ondes électromagnétiques et les ondes sonores. Ces deux phénomènes portent le même nom mais sont pourtant de natures fondamentalement différentes : les premières se propagent dans le vide sans milieu matériel, quand les secondes ont besoin de ce milieu pour se propager. Il existe en fait quelques catégories principales d'*ondes*, que nous listons maintenant. On retiendra seulement et pour le moment, à leur lecture, qu'une onde se manifeste par la propagation de « quelque chose » sans qu'il y ait de déplacement d'ensemble du système physique concerné.

### 1.1.1 ONDES MÉCANIQUES

Les ondes mécaniques se manifestent par une perturbation d'un *milieu matériel*. Les lois de la mécanique sont au cœur de la description de leur comportement.

- Les *ondes de vibration* d'une corde tendue : elles se manifestent par un déplacement d'un élément de la corde perpendiculairement à la direction d'équilibre de la corde (voir figure 1.1). Ces ondes, dites alors *transverses* ou *transversales*, sont à l'origine du son émis par les cordes des instruments de musique (guitare, piano, violon...). De par leur nature, elles ne peuvent se propager que dans une seule direction de l'espace : la direction de la corde tendue. On dit que leur propagation est à une dimension, ou plus simplement qu'il s'agit d'*ondes unidimensionnelles*;
- Les *ondes acoustiques* ou *ondes sonores* dans les fluides : elles correspondent à un déplacement autour d'une position d'équilibre des particules (atomes ou molécules) du fluide. Ce déplacement s'accompagne d'une modification locale de la vitesse des particules et de la pression du fluide. Contrairement aux vibrations d'une corde vibrante, le déplacement des particules se fait dans le sens de propagation de l'onde. L'onde est ainsi dite *longitudinale*. Enfin, elles peuvent se propager dans n'importe quelle direction de l'espace : ce sont des ondes à trois dimensions (voire figure 1.2);
- Les *ondes acoustiques* dans les solides sont de nature assez similaire aux précédentes, la différence tenant au fait que les constituants du milieu sont maintenant reliés entre eux par une maille cristalline. La forme de la maille cristalline elle-même, l'existence possibles d'axes privilégiés dans le solide, influent sur la propagation des ondes dont la description est d'autant plus complexe. Contrairement



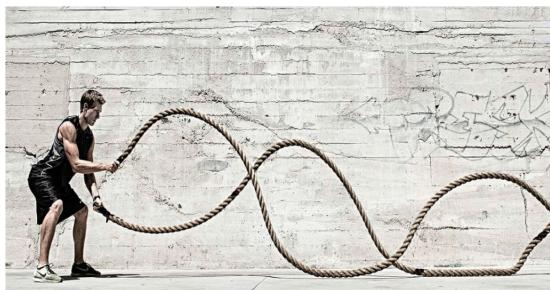


FIGURE 1.1 – Un exercice sportif consiste à secouer une corde (relativement lourde) fixée à l'une de ses extrémités. On observe comme une vague se déplacer le long de la corde : c'est une onde de vibration, unidimensionnelle et transverse.

au fluide, les atomes ou ions qui constituent le solide peuvent se déplacer aussi bien perpendiculairement que le long de la direction de propagation de l'onde. Les ondes acoustiques dans les solides peuvent donc aussi bien être transversales que longitudinales ;

- Les *ondes de surface* regroupent tout autant les ondulations observées à la surface de l'eau quand on y lâche une pierre que les vagues déferlantes sur les plages de Biarritz (voir figure 1.3). Elles se retrouvent, de façon générale, à l'interface entre deux fluides, et leur comportement est dicté par les forces de gravitation et/ou par la tension de surface. On parle ainsi d'*ondes de gravité* ou d'*ondes capillaires* selon lequel de ces deux phénomènes est dominant. Ces ondes sont intrinsèquement à deux dimensions. Elles sont un exemple type d'ondes qui ne sont ni transversales ni longitudinales ;
- Les *ondes inertielles* sont également des ondes dans des fluides mais pour lesquelles le mouvement est généré par des forces d'inertie, c'est-à-dire par l'accélération du milieu dans lequel se propagent les ondes. Cela peut être, notamment, la rotation du milieu sur lui-même et la force de Coriolis qui en résulte. On rencontre ces ondes aussi bien dans l'atmosphère ou les océans de notre planète qu'à la surface du Soleil.

Ces multiples types d'ondes mécaniques se rencontrent dans notre vie de tous les jours sous de nombreuses formes et dans moult applications :

- En médecine, les échographies exploitent les ondes sonores et les propriétés de propagation dans les tissus pour l'imagerie médicale. Les échographies Doppler permettent de surcroît de mesurer la vitesse de déplacement des fluides dans le corps ;

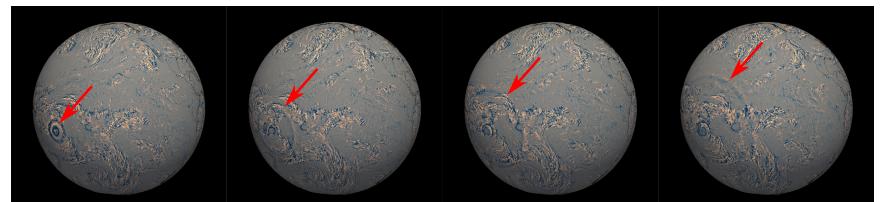


FIGURE 1.2 – L'éruption du volcan Hunga Tonga le 15 janvier 2022 a créé une impressionnante onde acoustique qui s'est propagée dans l'atmosphère. Les particules se déplacent sous l'effet de l'onde dans la direction de propagation de l'onde : l'onde est longitudinale. Mais il n'y a pas de déplacement d'ensemble : les molécules d'air au niveau des îles Tonga au moment de l'éruption ne se sont pas retrouvées en Europe sous l'effet de l'onde (crédits M. A. Barlow, U. Mass. Lowell).

- En musique, les vibrations des cordes d'un instrument, de la membrane d'un tambour ou de notre tympan, de l'air dans un instrument à vent correspondent toutes à des ondes mécaniques. On pourrait aussi citer les vibrations transmises par nos os à notre oreille interne dans des technologies d'écoute récentes ;
- Les tremblements de terre produisent des ondes acoustiques, appelées *ondes sismiques*. Ces ondes se retrouvent aussi bien dans la roche (solide) que dans le manteau (fluide) terrestre. Leur étude a notamment permis de reconstruire la structure interne de la Terre.

Il existe beaucoup d'autres exemples d'ondes mécaniques. Elles ont en commun le fait qu'elles ont toutes besoin d'un *support matériel* pour se propager<sup>1</sup>. Comme nous le verrons dans les chapitres suivants, les propriétés du milieu matériel influent notablement sur la façon dont les ondes se propagent, et en premier lieu à quelle vitesse elles le font<sup>2</sup>.

### 1.1.2 ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Les ondes électromagnétiques décrivent la propagation, à trois dimensions, des champs électriques et magnétiques créés par des distributions de charges et de courants électriques. La grandeur propagée par l'onde est donc ici vectorielle. Contrairement aux ondes mécaniques<sup>3</sup>, les ondes électromagnétiques n'ont pas besoin de milieu matériel pour se propager<sup>4</sup>. C'est pour cela que nous recevons le rayonnement du

1. Dans l'espace, personne ne vous entendra crier..

2. Par exemple, le son se propage plus vite dans le rail du chemin de fer qui nous sépare du train que dans l'air environnant.

3. Et contrairement à ce qui a été cru à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle avec la théorie de l'éther.

4. Dans l'espace, personne ne vous entendra crier... mais on vous verra le faire !



FIGURE 1.3 – Le mascaret, apprécié des surfeurs d'eau douce, est une onde de surface qui se produit dans certaines embouchures de fleuves : une vague se propage le long d'un fleuve à contre-courant. C'est un exemple percutant qui met en évidence le fait que la propagation de l'onde n'est pas un déplacement d'ensemble du milieu : alors que l'onde remonte le fleuve, le fleuve lui continue de s'écouler vers la mer.

Soleil ou que nous pouvons observer les étoiles lointaines. Dans le vide, leur vitesse de propagation est constante égale à  $c$ . Les ondes électromagnétiques se propagent également dans les milieux matériels, milieux qui peuvent influer sur la façon dont elles se propagent, voire les absorber.

Les ondes électromagnétiques les plus courantes correspondent à des variations périodiques des champs électriques et magnétiques. Elles sont alors elles-mêmes subdivisées en plusieurs sous-catégories selon la fréquence à laquelle elles oscillent. On parle d'ondes radio, micro-ondes, infra-rouges, optiques, ultra-violettes, de rayons X ou encore de rayons gamma. Toutes ces ondes sont de natures rigoureusement identiques.

### 1.1.3 ONDES GRAVITATIONNELLES

Les ondes gravitationnelles sont un exemple tout à fait particulier d'ondes. Ici, c'est l'espace-temps lui-même qui est perturbé. Plus précisément, les ondes gravitationnelles correspondent à une modification de la courbure de l'espace-temps sous l'influence de masses accélérées. Elles se propagent à la vitesse de la lumière et ne sont pas arrêtées par la matière. Prédites par la relativité générale d'Einstein, elles n'ont été observées pour la première fois qu'en septembre 2015, par la collaboration LIGO, suite à la coalescence de deux trous noirs. De nombreuses autres ondes gravi-

tationnelles ont été détectées depuis, par les collaborations LIGO et Virgo notamment, ouvrant la voie à une toute nouvelle façon d'observer l'espace. Fin 2017, la première détection multi-messagers était ainsi réalisée : la collision de deux étoiles à neutrons fut observée aussi bien par les détecteurs d'ondes gravitationnelles que par les détecteurs, plus « classiques », d'ondes électromagnétiques.

### 1.1.4 ONDES DE MATIÈRE

En passant de l'infiniment grand à l'infiniment petit, nous rencontrons des ondes de nature tout à fait distincte. Les ondes de matière sont une des manifestations les plus spectaculaires de la physique quantique : les particules peuvent prendre une nature ondulatoire. On parle de dualité onde-corpuscule. Cette onde, aussi appelée fonction d'onde, traduit le fait qu'une particule peut occuper plusieurs points de l'espace simultanément. Son amplitude permet d'obtenir la probabilité de trouver une particule en un point quelconque de l'espace. L'onde de matière est la particule elle-même.

Le concept de fonction d'onde englobe en fait bien plus que les ondes de matière à proprement parler. Les ondes électromagnétiques ou les ondes acoustiques dans les solides peuvent elles-mêmes être décrites dans le cadre de la théorie quantique. Les ondes gravitationnelles, et la théorie de la gravitation dans son ensemble, échappent encore au grand tout quantique, au grand dam des physiciens.

### 1.1.5 BEAUCOUP D'AUTRES EXEMPLES

Il existe en fait beaucoup d'autres phénomènes qui se trouvent parfaitement bien décrits par des ondes, au-delà du cadre de la physique *stricto sensu*. Ainsi, la modélisation de beaucoup de nos comportements emprunte le formalisme des théories ondulatoires. On pourra citer la dynamique des embouteillages ou des files d'attente, des olas dans les stades, voire de la rumeur qui se propage de ville en ville...

## 1.2 DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

### 1.2.1 DÉFINITION

Dans tous les exemples d'ondes mécaniques cités dans la partie précédente, le passage de l'onde dans le milieu de propagation induit un mouvement des constituants de ce milieu. Quand nous parlons, nous mettons en mouvement les particules de l'air et c'est ce mouvement qui, lorsqu'il se produit dans notre oreille, est capté par notre tympan.

Ce mouvement correspond à un déplacement autour d'une *position d'équilibre*, à la façon d'une masse au bout d'un ressort qui oscille quand on lui donne une impulsion. En ce sens, le concept d'onde est intimement relié à celui des oscillateurs.

### Remarque 1

La notion d'équilibre est cruciale dans la définition de l'onde : l'onde est une perturbation par rapport à un état d'équilibre. En particulier, la propagation d'une onde mécanique est toujours associée à une *force de rappel* qui ramène le milieu vers son état d'équilibre après le passage de l'onde. Si le phénomène observé ne fait que modifier l'état d'équilibre du milieu, c'est-à-dire si la perturbation induite par l'onde fait passer le système d'un état d'équilibre à un autre, on ne parle pas d'*onde stricto sensu*. À titre d'exemple, la propagation d'un front de température dans un barreau chauffé par une flamme à l'une de ses extrémités n'est pas une onde. Le phénomène en question est en l'occurrence celui de la diffusion. On parle parfois d'*onde thermique*, mais dans des cas très particuliers seulement.

L'ingrédient supplémentaire apporté par les ondes est que ces oscillations ne sont pas seulement des oscillations dans le temps en un lieu donné mais que, de surcroît, ces oscillations se déplacent !

### Définition

*Une onde correspond au déplacement, dans le temps et dans l'espace, d'une perturbation d'un système physique autour d'une position d'équilibre, sans mouvement d'ensemble des constituants du système.*

Tous les termes sont importants dans cette définition, et il est important de bien comprendre ce qu'est et ce que n'est pas une onde :

- *perturbation d'un système physique autour d'une position d'équilibre* : on considère un système physique initialement à l'équilibre, par exemple la surface parfaitement lisse d'un lac. Le passage d'une onde se manifeste par la modification de cet état d'équilibre. Dans notre exemple, cela peut-être une déformation de la surface induite par le passage d'une vague. Cette surface modifiée n'est pas un nouvel état d'équilibre (voir Remarque 1), et le système retournera vers son état initial après le passage de l'onde ;
- *déplacement, dans l'espace et dans le temps* : la perturbation induite par l'onde doit varier aussi bien dans le temps que dans l'espace. Par exemple, la baisse du niveau du lac par évaporation n'est pas une onde : puisque le niveau du lac est le même en tout point du lac, la perturbation ne dépend pas de l'espace bien qu'elle dépende du temps. Au passage d'une vague en revanche, la déformation de la surface du lac n'est pas la même en tout point du lac : la perturbation dépend bien de l'espace et du temps, puisque la vague se déplace.

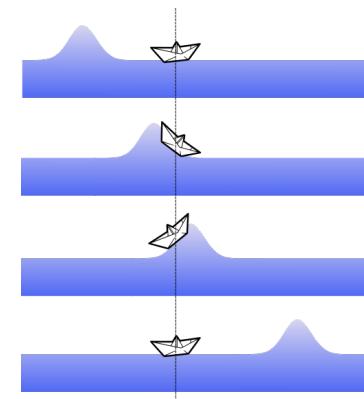


FIGURE 1.4 – Au passage d'une vague, un bateau posé sur l'eau monte et descend en suivant le profil de l'onde mais revient à sa position initiale après le passage de la vague. Il n'y a pas de mouvement d'ensemble de l'eau qui le supporte, seule la perturbation se propage.

Par ailleurs, une « vague » qui par un effet mystérieux resterait sur place ne serait pas considérée comme une onde. Dans ce cas en effet, la perturbation de la surface est statique. De même, pincer une corde de guitare sans la relâcher ne génère pas d'onde, et donc pas de son. Il faut bien relâcher la corde, et donc rendre la déformation dépendante du temps, si on veut faire de la musique !

- *sans mouvement d'ensemble des constituants* : la propagation d'une onde ne correspond pas au déplacement d'une partie du système physique, seule la *perturbation* elle-même se déplace. Une feuille posée sur le lac oscille au passage d'une vague mais ne suit pas la vague dans son mouvement d'une rive à l'autre du lac (voir figure 1.4). Seule la vague, la déformation de la surface, se déplace. Les molécules d'eau reviennent à leur position d'équilibre après le passage de l'onde. De la même façon, une onde sonore n'a pas besoin de vent (déplacement d'ensemble des molécules d'air) pour se propager. Les supporters dans un stade ne courrent pas à toute vitesse dans les gradins pour que la ola se propage...

### 1.2.2 PROPRIÉTÉS PRINCIPALES

Toutes les ondes que nous étudierons, aussi bien mécaniques qu'électromagnétiques, partagent un certain nombre de caractéristiques. Nous ne cherchons pas, ici, à en donner des définitions mathématiques rigoureuses. Nous construirons plutôt le

formalisme adéquat au fur et à mesure des chapitres.

Considérons donc une onde engendrée par une source en un lieu donné de l'espace.

**Grandeur physique** La *perturbation* induite par l'onde correspond toujours à la modification d'une propriété physique du milieu. Cela peut être la vitesse des particules, la pression locale ou encore le champ électrique. En général, une onde est en fait associée à la modification de plusieurs grandeurs physiques. Une onde sonore, par exemple, se traduit simultanément par une modification de la position des particules, de leur vitesse et de la pression de l'air.

**Fonction d'onde** La fonction d'onde est la fonction qui permet de décrire formellement la perturbation d'une grandeur physique donnée, dans l'espace et dans le temps, induite par l'onde. Il s'agit donc d'une fonction de l'espace et du temps que nous écrirons, de façon générale et en l'absence de précision,  $\chi(\mathbf{r}, t)$ . Cette fonction  $\chi$  peut être un nombre réel, complexe ou encore un vecteur. Par exemple la variation de pression de l'air au passage d'une onde sonore est décrite par une fonction d'onde scalaire  $P(\mathbf{r}, t)$  alors que la modification de la vitesse des molécules d'air l'est par une fonction vectorielle  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ .

Par un abus de langage courant, on identifie onde et fonction d'onde et l'on parlera ainsi souvent de « l'onde  $\chi(\mathbf{r}, t)$  ».

**Direction de propagation** L'onde peut se propager à partir de la source dans une direction unique, comme c'est le cas pour un faisceau laser, ou dans plusieurs directions simultanément, comme les ondes engendrées par un caillou qui tombe dans l'eau. Cette ou ces directions sont les directions de propagation de l'onde.

**Dimensionnalité** Le déplacement de l'onde à partir de sa source peut se faire à une ou plusieurs dimensions. La dimensionnalité de l'onde correspond au nombre de directions orthogonales dans lesquelles l'onde peut se propager. Elle est contrainte par la dimension du milieu lui-même dans lequel l'onde se propage. Ainsi, une onde sur une corde vibrante est unidimensionnelle : l'onde ne peut se propager que dans la direction de la corde. Une onde à la surface de l'eau est bidimensionnelle, elle ne peut se propager que dans le plan formé par cette surface. Une onde sonore dans un fluide ou électromagnétique dans le vide est tridimensionnelle : elle peut se déplacer dans toutes les directions de l'espace. Il est à noter que, dans certaines conditions, la forme du milieu peut en fait contraindre l'onde à se propager dans une plus faible dimensionnalité que celle du milieu. Par exemple, une onde sonore dans un tuyau se comporte comme une onde à une dimension, tout comme une onde lumineuse dans une fibre optique : la lumière ne se propage que dans la direction de la fibre, l'onde sonore que dans la direction du tuyau.

**Direction de la perturbation** La perturbation induite par l'onde engendre, dans le cas d'une onde mécanique, un déplacement local des constituants du milieu.

Au passage d'une onde sonore, les molécules d'air sont agitées, elles se déplacent autour d'une position d'équilibre. Si ce déplacement se fait parallèlement à la direction de propagation de l'onde, l'onde est dite *longitudinale*. Si ce déplacement se fait perpendiculairement à la direction de propagation, on dit au contraire que l'onde est *transversale*. Une onde peut toutefois n'être ni longitudinale ni transversale.

Dans le cas d'une onde électromagnétique, c'est l'orientation relative des vecteurs champs électriques et magnétiques vis-à-vis de la direction de propagation de l'onde qui importe.

**Vitesse de propagation** Il s'agit de la vitesse de déplacement de la perturbation induite par l'onde. Cette vitesse dépend en général du milieu de propagation mais aussi des propriétés de l'onde (transverse ou longitudinale par exemple). Cette notion est en fait plus subtile qu'il n'y paraît, et nous aurons l'occasion d'y revenir dans les prochains chapitres.

**Structure de l'onde** ou *géométrie* de l'onde : elle traduit la « forme » que prend l'onde, les symétries qu'elle présente. Par exemple, une pierre qui chute dans l'eau engendre une onde qui prend la forme de cercles concentriques. On dit que l'onde est *circulaire*. À trois dimensions, on parle d'*onde sphérique*. L'autre exemple courant est celui de l'*onde plane* obtenue quand l'onde se propage dans une seule direction. De façon générale, la structure de l'onde dépend de la source mais peut être contrainte par le milieu dans lequel l'onde se propage.

**Ondes périodiques** Si en un point de l'espace, la perturbation induite par l'onde est une fonction périodique du temps, on dit de l'onde qu'elle est *périodique*. On peut définir la période  $T$  et la fréquence  $\nu$  de l'onde comme celles des oscillations temporelles de la perturbation. Cette périodicité temporelle s'accompagne d'une périodicité spatiale : la perturbation se reproduit à l'identique régulièrement le long de la direction de propagation. La période spatiale est appelée *longueur d'onde* et notée  $\lambda$ .

**Attention :** Dans le cas général, une onde n'est pas périodique ! On ne peut donc le plus souvent pas définir la fréquence de l'onde ou la longueur d'onde.

**Dispersion** Lorsque la forme de la perturbation change au cours de la propagation de l'onde, on dit que la propagation est *dispersive*. Le caractère dispersif ou non de la propagation dépend en général du milieu de propagation. Par exemple, la propagation de la lumière dans l'air est peu dispersive : on voit de la même façon une ampoule qui brille à 1 m ou à 10 m de nous. Si on intercale un prisme en verre en revanche, on peut voir des irisations apparaître. Le phénomène de dispersion correspond en fait à un comportement différent de l'onde selon sa fréquence. Nous y reviendrons au chapitre 4.



Il est par ailleurs à noter que la dispersion d'une onde s'accompagne systématiquement de l'absorption : un milieu dispersif est un milieu qui absorbe, même faiblement, l'onde qui s'y propage.

### 1.2.3 AVANT DE COMMENCER...

Notre étude des ondes commencera par l'étude des ondes mécaniques. Nous nous intéresserons dans un premier temps à la propagation d'onde unidimensionnelle sur une corde vibrante (chapitre 2). Nous étendrons ensuite notre étude aux ondes sonores dans les fluides (chapitre 3). Dans chaque cas, nous nous attacherons à décrire la façon dont l'énergie se propage. En particulier, nous verrons la façon dont la propagation d'une onde est modifiée à une interface entre deux milieux et l'importance de phénomènes de résonance (chapitre 4).

Dans toute cette étude, nous supposerons toujours que la perturbation induite par l'onde est de suffisamment faible amplitude pour s'affranchir de tout phénomène non-linéaire. Ainsi, nous supposerons toujours que deux ondes dans un même milieu se croisent sans interagir. Quel que soit le contexte, il faudra toujours nous assurer que nous restons dans le domaine de validité de cette approximation. De façon générale, la propagation des ondes mécaniques n'est en effet pas linéaire. Par exemple, une onde sur une corde vibrante de trop forte amplitude peut venir briser la corde... la propagation d'une autre onde sur cette même corde s'en trouve nécessairement modifiée !

Nous n'aurons en revanche pas à faire ce type d'approximations quand nous étudierons la propagation d'ondes électromagnétiques dans le vide<sup>5</sup> (chapitre 5). Nous nous intéresserons en particulier aux ondes lumineuses et au phénomène d'interférences.

### Exercices d'application 1

1. Les phénomènes suivant peuvent-ils être décrits par une onde ? Pour chacune des ondes identifiées, préciser la dimensionnalité de l'onde et déterminer une ou plusieurs grandeurs physiques modifiées à son passage.

- oscillation d'un pendule,
- vibrations de la membrane d'un tambour,
- tremblements de terre,
- café qui monte dans un morceau de sucre,
- écoulement d'un fleuve,
- lumière dans une fibre optique,

<sup>5</sup>. La propagation d'une onde électromagnétique dans les milieux matériels peut, en revanche, être non-linéaire.

- son produit par un claquement de doigts,
  - signal nerveux,
  - battements de cœur.
2. Quelles sont les ondes qui interviennent lorsque la foudre s'abat sur le sol ? Sont-elles toutes mécaniques ? Quelles sont leurs dimensionnalités et leurs vitesses de propagation ?
3. Préciser si les ondes suivantes sont longitudinales ou transverses, en précisant pour chaque cas la direction de propagation et la direction de la perturbation.
- vibrations d'une corde de guitare,
  - sonar d'un bateau,
  - ola dans un stade.

## 2 PROPAGATION À 1D – ÉQUATION DE PROPAGATION

Nous étudions dans ce chapitre la propagation d'une onde mécanique unidimensionnelle. L'objectif est de retrouver l'équation de d'Alembert dans ce contexte. Il s'agit ici d'une situation typique où la dérivation de l'équation est tout aussi importante que l'étude de ses solutions. Nous faisons cette dérivation sur l'exemple de la corde vibrante. Il nous servira de base pour analyser les solutions générales de l'équation de d'Alembert à une dimension.

### 2.1 PROPAGATION LE LONG D'UNE CORDE VIBRANTE

#### 2.1.1 DESCRIPTION DE LA CORDE ET HYPOTHÈSES

On considère une corde de longueur  $L$ , de masse  $M$ , telle que dessinée figure 2.1. La corde est fixée à ses deux extrémités pour empêcher tout mouvement d'ensemble de la corde. Nous supposons pour le moment que nous sommes toujours suffisamment loin des extrémités pour en négliger les effets sur la dynamique de la corde.

Nous supposons par ailleurs que :

1. la corde est *inextensible* : sa longueur  $L$  est constante,
2. la section  $S$  de la corde est constante et uniforme,
3. sa masse volumique  $\rho$  est uniforme,
4. le diamètre de la corde est toujours beaucoup plus petit que  $L$  ( $\sqrt{S} \ll L$ ).

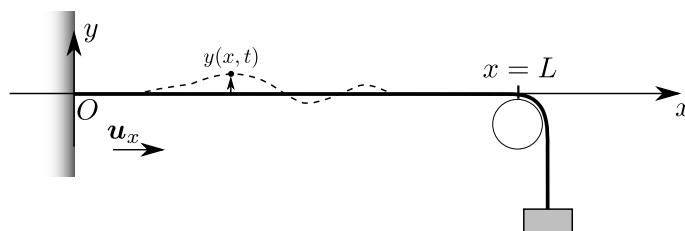


FIGURE 2.1 – Corde de longueur  $L$  tendue par une masselotte et fixée à ses deux extrémités. On étudie les mouvements transverses de la corde, dessinés en pointillés.

Les hypothèses 1 – 3 permettent de nous assurer que le milieu de propagation de l'onde est identique en tout lieu et à tout instant<sup>1</sup>. L'hypothèse 4 nous permet de négliger les dimensions transverses de la corde : la corde peut être vue comme un objet purement *unidimensionnel*. Dans ce cas, il est plus commode de travailler avec la *masse linéique* de la corde, ou masse par unité de longueur.

#### Définition : masse linéique

*La masse linéique  $\mu$  est définie de façon à ce qu'un élément de longueur  $d\ell$  ait pour masse  $dm = \mu d\ell$ . Son unité SI est le  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1}$ .*

Pour une corde *homogène* de masse  $M$ , de longueur  $L$ , de section  $S$  et de masse volumique  $\rho$ , la masse linéique est donnée par

$$\mu = \frac{M}{L} = \rho S. \quad (2.1)$$

On munit l'espace du repère  $(O, x, y)$ , où  $O$  est une des extrémités de la corde. La position d'équilibre de la corde correspond à la corde parfaitement tendue dans la direction  $(Ox)$ . L'onde que nous cherchons à décrire se manifeste par un déplacement d'éléments de la corde dans la direction  $(Oy)$ . Pour décrire la *perturbation* de cette *grandeur physique*, nous donnons à la *fonction d'onde*  $\chi(x, t)$  la valeur de la coordonnée  $y$  prise à un instant  $t$  du point de la corde d'abscisse  $x$  :

$$\chi(x, t) = y(x, t). \quad (2.2)$$

On appelle cette onde *l'onde de déplacement*.

Pour représenter graphiquement la fonction d'onde  $\chi(x, t)$ , fonction de deux variables, on se restreint le plus souvent au tracé du profil spatial et du profil temporel de l'onde. Pour l'onde de déplacement,

- le *profil spatial* de l'onde est l'allure instantanée de la corde que l'on obtiendrait en en prenant une « photo » de la corde à un instant  $t_0$  donné. Cela revient à tracer la fonction de l'espace  $\chi_0(x) = \chi(x, t = t_0)$ ;
- le *profil temporel* de l'onde est le signal enregistré au cours du temps en observant en une position  $x_0$  donnée le mouvement de la corde. Cela revient à tracer la fonction du temps  $\tilde{\chi}_0(t) = \chi(x = x_0, t)$ .

1. Nous verrons dans les prochains chapitres seulement les conséquences de l'inhomogénéité du milieu de propagation.

### Remarque 1

La situation où la vitesse de propagation d'une onde ne dépend pas du détail de la fonction d'onde elle-même est très courante. C'est le cas des ondes électromagnétiques dans le vide ou, en très bonne approximation, dans l'air : on ne voit pas la lumière rouge d'un flash lumineux arriver avant le bleu. C'est aussi le cas du son dans l'air en conditions normales : si la vitesse de propagation peut dépendre des conditions « climatiques » (humidité, température) qui modifient le milieu de propagation, on n'entend pas (heureusement) le chant des basses d'un chœur avant celui des sopranos !

Un corollaire est que l'onde qui se déplace à vitesse constante se déplace *sans se déformer*. Nous verrons plus tard que l'on dit dans ce cas que la propagation s'effectue sans *dispersion*.

### 2.1.2 ONDE PROGRESSIVE À VITESSE CONSTANTE

Avant d'établir l'équation qui régit l'évolution de  $\chi(x, t)$ , étudions la situation particulière où l'onde se propage dans une direction bien définie, par exemple de  $x = 0$  à  $x = L$ . On dit que l'onde est une *onde progressive*.

On suppose par ailleurs que la propagation se fait à *vitesse constante*. Autrement dit, on suppose que la **vitesse de propagation ne dépend pas de la forme de l'onde**<sup>2</sup>, elle n'est fixée que par les propriétés du milieu de propagation, ici la corde (voir Remarque 1).

Considérons donc que  $\chi(x, t)$  est une onde qui se déplace le long de la corde à vitesse constante que l'on note  $c$ . À l'instant  $t = 0$ , on note  $\chi_0(x)$  le profil spatial, aussi appelé *motif*, de l'onde le long de la corde :

$$\chi(x, t = 0) = \chi_0(x). \quad (2.3)$$

Pour simplifier, on suppose par la suite que l'onde correspond à une perturbation qui occupe une longueur de corde bien plus faible que la longueur de la corde,  $L$ . On dit aussi que *l'extension spatiale* de l'onde est petite devant  $L$ . Cela nous permet d'ignorer pour le moment ce qui peut se passer aux extrémités de la corde. Mathématiquement, cela veut dire que  $\chi_0(x)$  ne prend de valeurs significatives que sur un intervalle de longueur petit devant  $L$ .

On a supposé que l'onde se déplace sur la corde dans le sens de  $\mathbf{u}_x$  à la vitesse  $c$ . À un instant ultérieur  $t = \delta t$ , on doit donc retrouver le même motif sur la corde, mais

2. Pour une onde périodique, par exemple, on verra que cela revient à supposer que la vitesse de propagation ne dépend pas de la fréquence de l'onde.

déplacé de  $\delta x = c\delta t > 0$ . Le profil spatial de l'onde sur la corde, à l'instant  $t = \delta t$ , est alors  $\chi_0(x - \delta x)$ , ce que l'on peut écrire comme

$$\chi(x, t = \delta t) = \chi_0(x - \delta x) = \chi_0(x - c\delta t). \quad (2.4)$$

On constate ainsi que l'onde  $\chi(x, t)$  à tout instant prend une forme très simple :

$$\chi(x, t) = \chi_0(x - ct). \quad (2.5)$$

L'onde ne dépend de  $x$  et de  $t$  que via  $(x - ct)$ .

### DÉFINITION : ONDES PROGRESSIVES

#### Définition

*Lorsque le motif de l'onde se retrouve identique à lui-même, après un certain temps, déplacé d'une certaine distance dans une direction bien définie, on dit que l'onde est une **onde progressive**.*

- Si l'onde se déplace dans le sens de  $\mathbf{u}_x$ , on dit que l'onde se propage **dans le sens des  $x$  croissants**. L'onde s'écrit dans ce cas

$$\chi(x, t) = \chi_+(x - ct), \quad (2.6)$$

où l'indice «+» indique que l'onde se propage dans le sens de  $+\mathbf{u}_x$ .

- Si l'onde se propage dans le sens opposé, on dit que l'onde se propage **dans le sens des  $x$  décroissants**. L'onde s'écrit dans ce cas

$$\chi(x, t) = \chi_-(x + ct), \quad (2.7)$$

où l'indice «-» indique que l'onde se propage dans le sens de  $-\mathbf{u}_x$ .

### PROFILS SPATIAL ET TEMPOREL

Réintéressons-nous à l'onde progressive  $\chi(x, t) = \chi_+(x - ct)$  qui se propage le long de la corde dans le sens des  $x$  croissants. On a tracé figure 2.2 le profil spatial de l'onde à un instant  $t = t_0$  donné ainsi que le profil temporel de l'onde enregistré à une position de l'espace fixée ( $x = x_0 = L/2$ ). Nous traçons donc dans un cas la fonction de l'espace

$$f(x) = \chi(x, t = t_0) = \chi_+(x - ct_0), \quad (2.8)$$



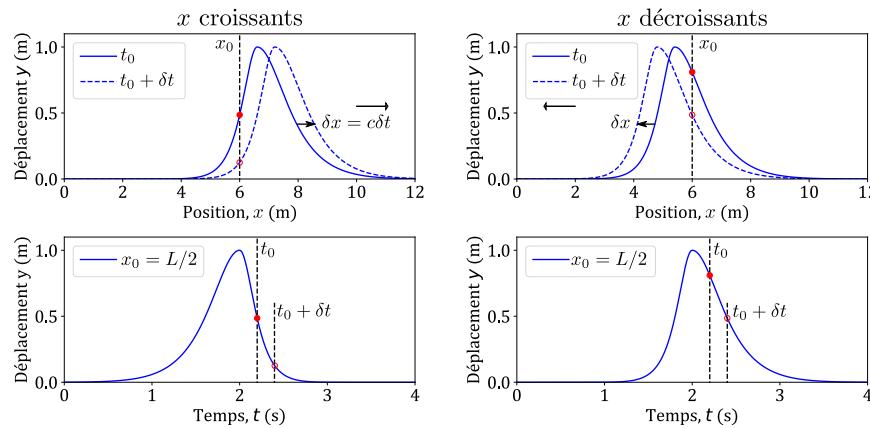


FIGURE 2.2 – Profils d'une onde se propageant vers les  $x$  croissants (gauche) ou décroissants (droite). Les fonctions d'onde sont tracées dans l'espace à un temps donné  $t_0$  ou  $t_0 + \delta t$  (haut) et en fonction du temps  $t$  à une position donnée  $x_0 = L/2$  (bas). La flèche indique le sens de propagation. L'onde se propage avec une célérité  $c = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  sur une corde de longueur  $L = 12 \text{ m}$ , et on choisit  $t_0 = 2,2 \text{ s}$  et  $\delta t = 0,2 \text{ s}$ . Les ronds rouges indiquent la valeur de l'onde en  $x = x_0$  et  $t = t_0$  (plein) ou  $t = t_0 + \delta t$  (ouvert).

et dans l'autre cas la fonction du temps

$$g(t) = \chi(x = x_0, t) = \chi_+(x_0 - ct). \quad (2.9)$$

En fait, on constate sur la figure que les deux profils spatial et temporel sont identiques à un facteur d'échelle près. Ce facteur d'échelle, qui transforme l'axe des temps en axe des positions, n'est autre que  $-c < 0$ , l'opposé de la vitesse de propagation. On constate en effet que

$$g(t) = f[-c(t - \Delta t)],$$

où  $\Delta t = t_0 + x_0/c$  est un décalage constant. Pour une onde se propageant dans le sens des  $x$  décroissants, on obtient

$$g(t) = f[+c(t - \Delta t')],$$

avec  $\Delta t' = t_0 - x_0/c$ . Le facteur d'échelle entre axe des temps et axe des positions est maintenant  $+c > 0$ . On constate figure 2.2 que, pour l'onde se propageant dans le sens des  $x$  croissants, le profil spatial apparaît inversé par rapport au profil temporel alors qu'ils sont identiques quand l'onde se propage dans le sens des  $x$  décroissants.

### Attention

Pour distinguer les ondes se propageant selon les  $x$  croissants et décroissants, on utilise souvent les termes d'onde progressive et d'onde régressive, respectivement. Dans ce cas, l'adjectif « progressive », par opposition à « régressive », qualifie le sens de la propagation. Il ne faut donc pas oublier que les ondes « progressives » comme « régressives » sont bien toutes deux des ondes progressives au sens de la définition donnée plus haut.

Par ailleurs, « progressive » et « régressive » dans ce sens ne sont pas des propriétés intrinsèques de l'onde : si l'on change le sens de l'axe ( $Ox$ ), une onde « régressive » devient « progressive » et inversement. Une onde progressive au sens donné dans la définition ci-dessus est en revanche toujours progressive, quel que soit le repère choisi : c'est une propriété *intrinsèque* de l'onde.

On retiendra donc que, pour une onde progressive, le profil temporel de l'onde enregistré en un point  $[\chi(x = x_0, t)]$  et le profil spatial de l'onde enregistré à un instant donné  $[\chi(x, t = t_0)]$  sont identiques, à un facteur près entre l'échelle des temps et l'échelle des positions, dont la norme est la vitesse de propagation de l'onde. Le signe du facteur d'échelle dépend du sens de propagation de l'onde. Finalement, la connaissance du profil spatial de la fonction d'onde à un instant quelconque permet, la vitesse et la direction de propagation de l'onde étant connues, de calculer la fonction d'onde en tout point et à tout instant et en particulier le profil temporel en un point quelconque. Inversement, la connaissance du profil temporel de la fonction d'onde en un point quelconque permet de calculer le profil spatial à un instant quelconque.

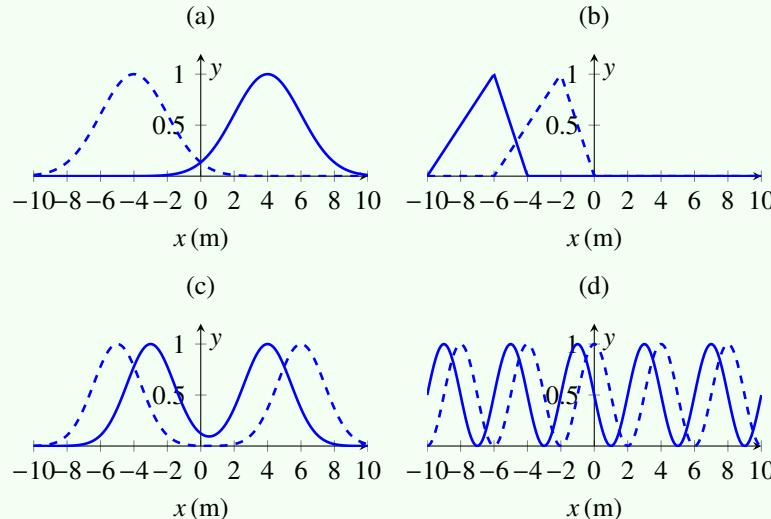
### Exercices d'application 1

1. Les fonctions suivantes correspondent-elles à des ondes progressives ? Si oui, préciser dans quel sens l'onde se propage et à quelle vitesse.

- |   |   |
|---|---|
| (a) $\chi(x, t) = kx + \omega t,$<br>(b) $\chi(x, t) = \cos(kx) \sin(\omega t),$<br>(c) $\chi(x, t) = e^{ikx} \sin[k(x + ct)],$ | (d) $\chi(x, t) = \cos(2x + 3ct),$<br>(e) $\chi(x, t) = e^{i\omega t} + kx,$<br>(f) $\chi(x, t) = \exp\left[-\frac{(kx + \omega t)^2}{2\sigma^2}\right].$ |
|---|---|

2. Les figures suivantes représentent la fonction d'onde de déplacement  $y(x, t)$  au temps  $t = 0$  (trait plein) et  $t = 1 \text{ s}$  (pointillés). Déterminer dans chaque

cas si l'onde est progressive ou non. Dans les cas où elle est progressive, déterminer dans quelle direction elle se propage et sa vitesse de propagation.



3. Pour l'onde du cas (b) de la question précédente, tracer en fonction du temps le profil de l'onde  $y(x = 0, t)$  telle qu'elle est vue par un observateur placé en  $x = 0$ . On tracera l'onde entre les instants  $t = 0$  et  $t = 10$  s.
4. À  $t = 0$ , le motif d'une onde sur une corde est donné par  $y_0(x) = \frac{y_1}{1+4(x/x_1)^2}$  où  $y_1 = 1$  cm et  $x_1 = 5$  cm. Donner l'expression de la fonction d'onde  $y(x, t)$  qui permet de calculer le déplacement de la corde en tout point et à tout instant, sachant que l'onde se propage dans le sens des  $x$  croissants à la vitesse  $c = 2$  cm · s<sup>-1</sup>. Dessiner l'impulsion aux instant  $t = 0$ ,  $t = 1$  s et  $t = 2$  s puis, en fonction du temps, le déplacement enregistré en  $x = 0$ .

### 2.1.3 ÉQUATION D'ONDE SUR LA CORDE VIBRANTE

On souhaite maintenant établir l'équation d'évolution que doit vérifier la fonction d'onde  $\chi(x, t)$ . On considère un élément infinitésimal de la corde, centré sur le point  $P$  de la corde d'abscisse  $x$ , de longueur  $ds$ , compris entre les cotes  $x - \frac{dx}{2}$  et  $x + \frac{dx}{2}$  (voir figure 2.3), et de masse  $dm = \mu ds$ . Avant d'écrire les lois de la mécanique qui régissent la dynamique de cet élément de corde, nous allons faire quelques hypothèses supplémentaires.

**Hypothèse sur les forces** L'élément de corde est a priori soumis à deux types de forces :

- son poids,  $\mathbf{P} = dm \mathbf{g}$ ,
- les forces imposées par les éléments de corde situés juste avant et juste après lui : on nomme ces forces *tension* de la corde.

La corde est supposée initialement tendue, par exemple en lui accrochant une masquette à l'une de ses extrémités (voir figure 2.1). Nous supposerons alors la tension de la corde toujours suffisamment grande pour négliger l'action de la pesanteur<sup>3</sup>.

Nous supposons aussi que la corde est *sans raideur*. Autrement dit, elle ne résiste pas à la déformation, contrairement à un ressort qui impose une force dans le sens opposé à sa déformation. Ici, le déplacement transverse de la corde n'entraîne donc pas l'apparition d'une force orthogonale à la direction de la corde. La tension dans la corde peut toujours être supposée *tangente* à la corde.

**Onde de faible amplitude** Nous allons dans toute la suite supposer que l'amplitude des oscillations est faible. Afin de traduire cette hypothèse mathématiquement, nous utilisons l'angle  $\alpha(x)$  que fait la tangente à la corde avec l'axe ( $Ox$ ), l'axe selon lequel est initialement tendue la corde. Nous supposons qu'en tout point et en tout temps,  $|\alpha|$  est faible :

$$|\alpha(x, t)| \ll 1. \quad (2.10)$$

Dans la suite, nous ferons systématiquement un **développement limité** des expressions trouvées *au premier ordre en  $\alpha$* .

**Abscisse curviligne** L'onde que nous étudions se traduit par un déplacement de la corde le long de l'axe ( $Oy$ ). Mais rien n'interdit a priori que ce mouvement s'accompagne d'un déplacement des éléments de corde le long de l'axe ( $Ox$ ). La coordonnée  $x$  n'est alors pas bien adaptée pour identifier un élément de corde. Nous préférons associer à chaque élément infinitésimal de la corde une coordonnée unique et constante. Nous utilisons pour cela l'*abscisse curviligne*, notée  $s$ , qui a la dimension d'une distance. Si on considère un point  $P$  de la corde de coordonnées  $(x, y)$ , son abscisse curviligne  $s$  correspond à la longueur de corde qui sépare  $P$  de l'origine  $O$  des axes. Puisque la corde est inextensible, l'abscisse curviligne  $s$  du point  $P$  est bien une constante.

Quand la corde est parfaitement tendue, alors  $s = x$ . Au passage de l'onde, le point  $P$  peut a priori se déplacer aussi bien le long de l'axe ( $Ox$ ) que de l'axe ( $Oy$ ). On notera

3. Ça n'est jamais rigoureusement vrai, mais c'est d'autant plus faux que la tension est faible. On pourrait aussi supposer que la corde est posée sur un support horizontal (les directions  $x$  et  $y$  sont dans ce plan horizontal) sur lequel elle peut glisser sans frotter : la réaction du support compense alors intégralement le poids.

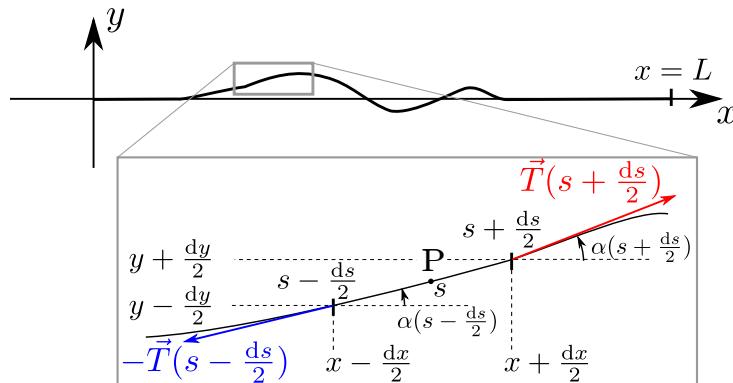


FIGURE 2.3 – Bilan des forces sur un élément de longueur de la corde.

ainsi  $x(s, t)$  et  $y(s, t)$  les coordonnées cartésiennes du point  $P$  d'abscisse curviligne  $s$  à l'instant  $t$ . Dans toute la suite, la fonction d'onde que nous étudierons sera ainsi

$$\chi(s, t) = y(s, t).$$

### MÉCANISME DE PROPAGATION DE L'ONDE

Comment se propage une onde le long de la corde ? Nous étudierons plusieurs types d'onde mécaniques dans ce cours. Nous pourrons systématiquement identifier trois étapes successives qui se répètent pour décrire la propagation de ces ondes. En ce qui concerne la corde vibrante à proprement parler, supposons qu'un élément de la corde se soit écarté de l'axe d'équilibre ( $Ox$ ) sous l'effet de l'onde.

1. Le déplacement de l'élément de corde selon ( $Oy$ ) modifie la force de tension qu'elle applique aux éléments voisins ;
2. La modification de la force induit une accélération des éléments voisins ;
3. L'accélération des éléments voisins se traduit par leur déplacement : ils se rapprochent ou s'écartent de l'axe ( $Ox$ ).

Le processus se répète et se poursuit alors vers les éléments de corde suivants. Pour trouver l'équation de propagation de l'onde, il nous faudra mettre en équation ces différentes étapes.

### ÉQUATIONS DU MOUVEMENT

On note  $\mathbf{T}(s, t)$  la tension de la corde au point d'abscisse curviligne  $s$ , à l'instant  $t$ , définie telle que  $\mathbf{T}(s, t)$  est la force appliquée par l'élément de corde qui débute en  $s$  à

l'élément de corde « précédent » qui termine en  $s$ . L'élément de corde centré en  $s$  est donc soumis à

- la force  $\mathbf{T}(s + \frac{ds}{2}, t)$  appliquée par l'élément de corde suivant,
- la force  $-\mathbf{T}(s - \frac{ds}{2}, t)$  appliquée par l'élément précédent.

On utilise le *principe fondamental de la dynamique* appliqué au centre d'inertie de l'élément de corde centré en  $s$  :

$$dm \mathbf{a}(s, t) = \mathbf{T}(s + \frac{ds}{2}, t) - \mathbf{T}(s - \frac{ds}{2}, t). \quad (2.11)$$

En projetant cette équation sur les axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ), et avec  $dm = \mu ds$ , on obtient

$$\begin{cases} \mu ds a_x(s, t) = T(s + \frac{ds}{2}) \cos \alpha(s + \frac{ds}{2}, t) - T(s - \frac{ds}{2}) \cos \alpha(s - \frac{ds}{2}, t), \\ \mu ds a_y(s, t) = T(s + \frac{ds}{2}) \sin \alpha(s + \frac{ds}{2}, t) - T(s - \frac{ds}{2}) \sin \alpha(s - \frac{ds}{2}, t), \end{cases}$$

soit

$$\textcircled{2} \begin{cases} \mu a_x(s, t) = \frac{\partial T(s, t) \cos \alpha(s, t)}{\partial s}, \\ \mu a_y(s, t) = \frac{\partial T(s, t) \sin \alpha(s, t)}{\partial s}. \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \mu a_x(s, t) = \frac{\partial T(s, t) \cos \alpha(s, t)}{\partial s}, \\ \mu a_y(s, t) = \frac{\partial T(s, t) \sin \alpha(s, t)}{\partial s}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Nous avons ici mis en équation l'étape 2 ci-dessus en reliant force de tension et accélération des éléments de la corde.

La mise en équation de l'étape 3 est immédiate. Le lien entre accélération est position est

$$\textcircled{3} \begin{cases} a_x(s, t) = \frac{\partial^2 x(s, t)}{\partial t^2}, \\ a_y(s, t) = \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} a_x(s, t) = \frac{\partial^2 x(s, t)}{\partial t^2}, \\ a_y(s, t) = \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (2.15)$$

Il reste à relier le déplacement d'un élément de la corde à la modification de la force de tension (étape 1). Il faut ici utiliser le fait que la force de tension  $\mathbf{T}$  est toujours et en tout point tangente à la corde, et donc que l'angle que fait  $\mathbf{T}(s, t)$  avec ( $Ox$ ) est le même angle que celui fait par la tangente à la corde au point  $s$  avec ( $Ox$ ). L'angle  $\alpha(s, t)$  dans les équations du mouvement est donc l'angle qui vérifie

$$\textcircled{1} \quad \tan \alpha(s, t) = \frac{y(s + \frac{ds}{2}, t) - y(s - \frac{ds}{2}, t)}{x(s + \frac{ds}{2}, t) - x(s - \frac{ds}{2}, t)} = \frac{\partial y}{\partial x}(s, t). \quad (2.16)$$

**Remarque 2**

En toute rigueur, l'intégration de l'équation (2.19) fait apparaître un terme supplémentaire indépendant de  $s$  mais dépendant du temps dans l'expression de  $x$  :

$$x(s, t) = s + \delta x(t).$$

Ce déplacement longitudinal  $\delta x(t)$  ne correspond en fait pas à la contribution d'une onde puisqu'il ne dépend *que* du temps et pas de l'espace. Il s'agit d'un mouvement d'ensemble de la corde que nous pouvons donc omettre dans notre étude de l'onde. En outre, nous avons précisément interdit ce mouvement d'ensemble en fixant la corde à chacune de ses extrémités. On a donc ici  $\delta x(t) = 0$ .

Nous pouvons écrire de même

$$\cos \alpha(s, t) = \frac{\partial x}{\partial s} ; \quad \sin \alpha(s, t) = \frac{\partial y}{\partial s}. \quad (2.17)$$

Nous avons presque terminé ici. Il nous reste à utiliser le fait que  $|\alpha(s, t)| \ll 1$ . Nous allons en fait ne garder que les termes du premier ordre en  $\alpha$ . Un développement limité de  $\cos \alpha(s, t)$  donne

$$\frac{\partial x}{\partial s} \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} + o(\alpha^2). \quad (2.18)$$

Au premier ordre en  $\alpha$ , on a donc (voir Remarque 2)

$$\frac{\partial x}{\partial s} = 1 \Rightarrow x(s, t) = s. \quad (2.19)$$

Finalement,  $x(s, t)$  est une constante : **il n'y a pas de mouvement le long de la corde.**

En associant les équations (2.12), (2.14) et le fait que  $x(s, t)$  est indépendant du temps, on peut alors écrire

$$\frac{\partial T(s, t) \cos \alpha(s, t)}{\partial s} = 0, \quad (2.20)$$

cette dernière équation n'étant, encore une fois, valable qu'*au premier ordre en  $\alpha$* . Autrement dit,  $T(s, t) \cos \alpha(s, t)$  est une constante :

$$T(s, t) \cos \alpha(s, t) = T_0. \quad (2.21)$$

**Remarque 3**

Tel que nous avons fait notre calcul, et par exemple équation (2.21),  $T_0$  a été introduit comme la grandeur *algébrique*

$$T_0 = \mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{u}_x.$$

La tension  $T_0$  pourrait donc a priori être aussi bien positive que négative. Toutefois, nous avons défini cette tension comme étant la force subie par un élément de corde et créée par l'élément qui lui succède *dans le sens de  $\mathbf{u}_x$* . Dans ce cas, supposer que la corde est initialement tendue suppose implicitement que  $T_0 > 0$ . Il n'y a que si la corde était initialement comprimée (ce qui n'est pas si simple à faire avec une corde...) qu'on pourrait avoir  $T_0 < 0$ . Il n'y a donc pas de problème à avoir  $T_0$  sous une racine dans la définition de la célérité.

Comme  $\cos \alpha(s, t) = 1$  au premier ordre en  $\alpha$ , on peut en fait écrire  $T(s, t) = T_0$  : **la norme de la tension est constante et uniforme le long de la corde.**

L'équation (2.21) permet également d'écrire que  $T(s, t) \sin \alpha(s, t) = T_0 \tan \alpha(s, t)$ . En insérant cette équation et (2.15) dans (2.13), on obtient finalement

$$\mu \frac{\partial^2 y(s, t)}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \tan \alpha(s, t)}{\partial s} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}(s, t), \quad (2.22)$$

où nous avons utilisé l'équation (2.16) pour la dernière relation.

En utilisant finalement le fait que  $x(s, t) = s$  et la définition  $\chi(s, t) = y(s, t)$ , nous retrouvons **l'équation de d'Alembert** :

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 ; \quad c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}. \quad (2.23)$$

**TENSION DE LA CORDE**

Nous avons montré que la norme de la tension de la corde est uniforme. Il suffit donc de la connaître en un point quelconque de la corde pour la connaître partout. Si l'on considère le dispositif dessiné figure 2.1, le tension de la corde est alors le poids de la masselotte  $m$  qui y est attachée :

$$T_0 = mg. \quad (2.24)$$



## CÉLÉRITÉ $c$

Faisons une analyse dimensionnelle de la grandeur  $c$  trouvée. La tension  $T_0$  a la dimension d'une force, elle s'exprime en newton, c'est-à-dire en  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Sa dimension est donc  $\text{MLT}^{-2}$ . La densité linéique de masse  $\mu$  a pour dimension  $\text{ML}^{-1}$ . On en déduit que

$$[c] = \sqrt{\frac{\text{MLT}^{-2}}{\text{ML}^{-1}}} = \text{L} \cdot \text{T}^{-1}. \quad (2.25)$$

Il s'agit bien d'une vitesse. Cette vitesse, aussi appelée *célérité*, est en fait la vitesse de propagation de l'onde le long de la corde (voir section suivante).

Considérons par exemple une corde en acier inoxydable de diamètre  $d = 1,0 \text{ mm}$ . C'est typiquement une corde que l'on pourrait trouver sur une guitare<sup>4</sup>. La densité volumique de l'acier inoxydable est de  $\rho = 8,0 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . La densité linéique de masse de la corde est donc

$$\mu = \rho \times \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 = 6,3 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (2.26)$$

Si l'on tend cette corde avec une masse<sup>5</sup>  $m = 8,0 \text{ kg}$ , la tension dans la corde est  $T_0 = mg = 78 \text{ N}$  et la vitesse de propagation d'une onde sur la corde est

$$c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = 1,1 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (2.27)$$

## D'AUTRES ONDES SUR LA MÊME CORDE

Nous avons donné l'équation de propagation de l'onde de déplacement transverse  $\chi(x, t) = y(x, t)$ . Il y a en fait d'autres grandeurs qui vérifient la même équation d'onde que  $\chi(x, t)$ .

**Vitesse de déplacement** En dérivant par rapport au temps l'équation de d'Alembert (2.23), on obtient

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = 0, \quad (2.28)$$

où  $v_y(x, t) = \partial y(x, t)/\partial t$  est la vitesse de déplacement de la corde le long de ( $Oy$ ). La vitesse  $v_y$  est donc aussi solution de l'équation d'onde.

4. En simplifiant beaucoup.

5. On n'utilise pas de masselottes pour une guitare, évidemment, mais la tension calculée est typique.

**Tension de la corde** En utilisant l'équation (2.16), nous pouvons par ailleurs récrire  $T_y(x, t) = T_0 \tan \alpha(x, t)$  sous la forme

$$T_y(x, t) = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}(x, t). \quad (2.29)$$

En dérivant par rapport à  $x$  l'équation de d'Alembert sur  $y(x, t)$ , on vérifie que  $T_y(x, t)$  est aussi solution de l'équation d'onde (2.23) :

$$\frac{\partial^2 T_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T_y}{\partial t^2} = 0, \quad (2.30)$$

Notons enfin que  $\chi$ ,  $v_y$  et  $T_y$  ont toutes la même vitesse de propagation,  $c = \sqrt{T_0/\mu}$ .

### À retenir : Section 2.1

- Définition d'une onde progressive et formes générales de sa fonction d'onde, connaissant sa direction de propagation,
- Savoir tracer/calculer  $\chi(x_0, t)$  connaissant  $\chi(x, t_0)$  et inversement, la vitesse de propagation de l'onde étant connue,
- Hypothèses permettant d'établir l'équation d'onde sur la corde : hypothèses sur la corde, sur les forces et sur l'amplitude de l'onde,
- Conséquences de l'hypothèse de faible amplitude : absence de mouvement selon l'axe de la corde, la norme de la tension est constante égale à la tension initiale,
- Expression de la célérité d'une onde sur une corde,
- Connaître les différentes ondes qui co-existent sur la corde, toutes solutions de la même équation d'onde, et leurs relations.

## 2.2 SOLUTIONS DE L'ÉQUATION DE D'ALEMBERT

### 2.2.1 EXPRESSION ET SOLUTIONS GÉNÉRALES

Nous avons vu au paragraphe précédent que trois ondes,  $y$ ,  $v_y$  et  $T_y$ , se propagent le long de la corde et sont solutions de l'équation de d'Alembert :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi = 0. \quad (2.31)$$



En introduisant l'opérateur d'Alembertien  $\square$ , on peut récrire cette équation sous la forme

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} ; \quad \square \chi = 0. \quad (2.32)$$

C'est l'équation fondamentale des ondes, dont nous chercherons les solutions générales au prochain paragraphe. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, le seul coefficient intervenant dans l'équation étant le paramètre  $c$ . Une analyse dimensionnelle de cette équation nous donne

$$\frac{1}{[c]^2} \frac{[\chi]}{T^2} = \frac{[\chi]}{L^2} \quad \text{soit} \quad [c] = L \cdot T^{-1}. \quad (2.33)$$

Le paramètre  $c$  a la dimension d'une vitesse. On l'appelle *célérité* de l'onde et nous verrons au paragraphe suivant qu'elle correspond à la vitesse de propagation des ondes progressives.

### ONDES PROGRESSIVES

Les ondes progressives que nous avons écrites au paragraphe 2.1.2 sont-elles bien solution de l'équation de d'Alembert ? Considérons par exemple une onde progressive se propageant selon les  $x$  croissants. D'après sa définition (2.6),  $\chi(x, t) = \chi_+(x - ct)$ . On en déduit que

$$\frac{\partial}{\partial t} \chi(x, t) = -c \frac{\partial}{\partial x} \chi(x, t). \quad (2.34)$$

En dérivant cette équation par rapport au temps, on obtient alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi(x, t) = -c \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial t} \chi(x, t) \right] = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \chi(x, t). \quad (2.35)$$

L'onde  $\chi_+(x - ct)$  est donc solution de l'équation de d'Alembert. On vérifie de même que l'onde  $\chi_-(x + ct)$  qui se propage vers les  $x$  décroissants est aussi solution de cette équation. Il faut alors noter que le coefficient  $c$  qui intervient dans l'équation (2.32) est bien le même que celui dans l'argument de  $\chi_+(x - ct)$  et de  $\chi_-(x + ct)$ , c'est-à-dire la vitesse de propagation des ondes progressives.

On constate enfin équation (2.34) que les ondes progressives  $\chi_{\pm}$  vérifient une équation plus puissante que l'équation de d'Alembert, qui fait intervenir les dérivées simples plutôt que les dérivées secondes, et qui dépend du sens de propagation de

### Remarque 4

Les équations (2.36) et (2.37) traduisent le fait que, si l'on suit l'onde progressive dans son mouvement, la forme de la fonction d'onde est inchangée. Si la fonction d'onde prend la valeur  $\chi(x, t)$  à un instant  $t$  en un point  $x$  et si l'onde se propage à la vitesse  $c$  dans le sens des  $x$  croissants, à l'instant  $t + dt$ , on doit retrouver la même valeur pour la fonction d'onde en se déplaçant de  $c dt$  par rapport au point  $x$ , c'est-à-dire en se déplaçant autant que l'onde :

$$\chi(x + c dt, t + dt) = \chi(x, t).$$

On développe alors au premier ordre en  $dt$  le terme de gauche :

$$\begin{aligned} \chi(x + c dt, t + dt) &= \chi(x + c dt, t) + dt \frac{\partial \chi}{\partial t}(x + c dt, t) + o(dt) \\ &= \chi(x, t) + c dt \frac{\partial \chi}{\partial x}(x, t) + dt \frac{\partial \chi}{\partial t}(x, t) + o(dt), \\ \text{dont on déduit} \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x} \right) \chi(x, t) &= \frac{\chi(x + c dt, t + dt) - \chi(x, t)}{dt} = 0. \end{aligned}$$

On retrouve bien l'équation (2.36) et on constate que l'opérateur  $\partial_t + c \partial_x$  correspond en fait à une dérivée par rapport au temps « en suivant » l'onde dans sa propagation. On peut en fait récrire les deux équations (2.36) et (2.37) sous une unique forme en utilisant la *dérivée particulière*,  $D/Dt$ , très utilisée en mécanique des fluides :

$$\frac{D}{Dt} \chi = 0, \quad \text{où} \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{grad},$$

et où  $\mathbf{c}$  est le vecteur vitesse qui donne la direction de propagation de l'onde :  $\mathbf{c} = \pm c \mathbf{u}_x$ .

l'onde :

$$\text{sens des } x \text{ croissants : } \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \chi_+ = 0 , \quad (2.36)$$

$$\text{sens des } x \text{ décroissants : } \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \chi_- = 0 . \quad (2.37)$$

Nous verrons plus tard que ces deux équations permettent d'identifier des propriétés intéressantes et spécifiques aux ondes progressives.

## SOLUTIONS GÉNÉRALES

Nous voyons par les équations (2.36) et (2.37) que les ondes progressives jouent un rôle particulier parmi les solutions de l'équation de d'Alembert. Remarquons de surcroît que l'opérateur d'Alembertien se factorise sous la forme

$$\square = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \times \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad (2.38)$$

c'est-à-dire comme le produit des opérateurs des équations (2.36) et (2.37). On peut en fait trouver les solutions générales de l'équation de d'Alembert à partir de cette constatation (voir Remarque 5).

### Solutions de l'équation de d'Alembert

*La solution générale de l'équation de d'Alembert à une dimension est la somme de deux ondes quelconques se propageant en sens opposés : une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants  $\chi_+(x - ct)$  et une onde progressive dans le sens des  $x$  décroissants  $\chi_-(x + ct)$  :*

$$\chi(x, t) = \chi_+(x - ct) + \chi_-(x + ct). \quad (2.39)$$

## PRINCIPE DE SUPERPOSITION

L'équation de d'Alembert (2.32) est une équation différentielle linéaire. Ainsi, quels que soient  $\chi_1(x, t)$  et  $\chi_2(x, t)$ , deux ondes solutions de l'équation (2.32), et quel que soit  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha\chi_1 + \beta\chi_2$  est aussi solution de l'équation de d'Alembert.

C'est une propriété fondamentale de l'équation d'onde. Elle peut être reformulée sous la forme du *principe de superposition* :

### Principe de superposition

*Si deux ondes ou plus se propagent dans un milieu, en tout point, la fonction d'onde résultante est la somme algébrique des fonctions d'onde de chaque onde individuelle.*

Par un nouvel abus de langage, les ondes qui vérifient le principe de superposition sont appelées *ondes linéaires*.

### Remarque 5

Pour trouver les solutions générales de (2.32), on introduit  $u$  et  $v$  les arguments des ondes  $\chi_+$  et  $\chi_-$ , respectivement :

$$\begin{cases} u &= x - ct \\ v &= x + ct \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{u+v}{2} \\ t &= \frac{v-u}{2c} \end{cases}. \quad (2.40)$$

Les dérivées par rapport à  $u$  et  $v$  sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \end{cases} \quad (2.41)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right), \end{cases} \quad (2.42)$$

ce qui nous permet de récrire le d'Alembertien sous la forme simple

$$\square = 4 \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial}{\partial v}. \quad (2.43)$$

Écrivons l'onde  $\chi(x, t)$  comme une fonction de  $u$  et de  $v$  :  $\chi(x, t) = \tilde{\chi}(u, v)$ . L'onde  $\chi(x, t)$  est solution de l'équation (2.32) si et seulement si  $\tilde{\chi}(u, v)$  est solution de

$$\frac{\partial^2 \tilde{\chi}(u, v)}{\partial u \partial v} = 0. \quad (2.44)$$

Intégrons d'abord cette équation par rapport à  $u$  :

$$\frac{\partial}{\partial u} \left[ \frac{\partial \tilde{\chi}(u, v)}{\partial v} \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tilde{\chi}(u, v)}{\partial v} = \tilde{g}(v), \quad (2.45)$$

où  $\tilde{g}(v)$  est une fonction quelconque de  $v$ , qui ne dépend pas de  $u$ . En intégrant cette dernière équation par rapport à  $v$ , on peut alors écrire

$$\tilde{\chi}(u, v) = \int^v \tilde{g}(v') dv' + \tilde{h}(u), \quad (2.46)$$

où  $\tilde{h}(u)$  est une fonction quelconque de  $u$ , qui ne dépend pas de  $v$ . Finalement, on peut écrire  $\tilde{\chi}(u, v)$  comme la somme d'une fonction de  $v$  seulement et d'une fonction de  $u$  seulement :

$$\tilde{\chi}(u, v) = \tilde{f}_+(u) + \tilde{f}_-(v). \quad (2.47)$$

En repassant aux coordonnées  $(x, t)$ , on trouve que  $\chi(x, t)$  est la somme d'une fonction de  $x - ct$  et d'une fonction de  $x + ct$  :

$$\chi(x, t) = \chi_+(x - ct) + \chi_-(x + ct). \quad (2.48)$$



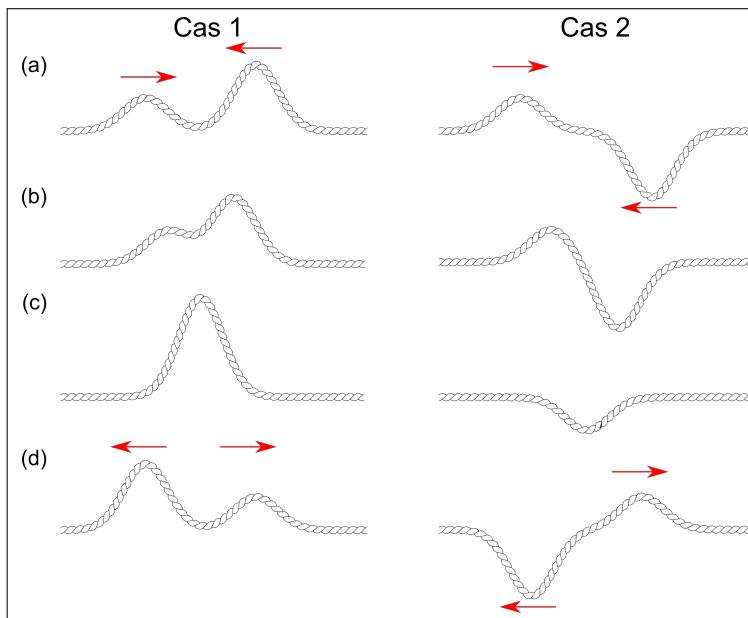


FIGURE 2.4 – Interférences de deux ondes contra-propageantes sur une corde. Les deux impulsions déplacent la corde dans le même sens (cas 1) ou en sens opposés (cas 2). Les flèches indiquent les directions de propagation.

Le principe de superposition des ondes a deux conséquences majeures :

- Deux ondes linéaires peuvent se traverser l'une l'autre sans être détruites ou même altérées. Si une personne parle dans une pièce, le fait qu'une autre personne prenne la parole en même temps ne modifie pas la façon dont la voix de la première personne se propage<sup>6</sup>. Si deux faisceaux laser se croisent... on n'aura toujours que deux faisceaux laser inchangés<sup>7</sup> ;
- Dans la région où les ondes se croisent, l'onde résultante peut avoir un profil très différent des ondes individuelles. On parle de phénomène d'*interférences*, que l'on analysera plus en détails au chapitre 4, et on appelle l'onde résultante *interférences* des deux ondes (incidentes).

On trace figure 2.4 le profil spatial de deux impulsions contra-propageantes sur une corde. On constate tout d'abord, qu'après s'être croisées, chaque impulsion conserve

6. Même si elle aura sans doute plus de mal à se faire entendre.

7. Quoi qu'en disent les films de science fiction.

le même motif qu'elle avait avant le croisement : la propagation d'une onde n'a pas été modifiée par la rencontre avec l'autre onde.

On constate aussi que lorsqu'elles se croisent, si les deux impulsions déplacent la corde dans le même sens, l'impulsion ou l'onde résultante a une amplitude plus grande que chacune des impulsions incidentes : on parle d'**interférences constructives**. En revanche, quand les deux impulsions déplacent la corde en sens opposés, l'interférence a une amplitude plus faible que chacune des impulsions incidentes : on parle d'**interférences destructives**. De façon extrême, si les deux impulsions avaient eu la même amplitude, au signe près, la résultante aurait été d'amplitude nulle. Autrement dit, la somme de deux ondes peut donner une absence d'ondes. C'est notamment ce qui est utilisé dans les systèmes actifs de réduction de bruit des casques audio. Nous verrons plus loin l'importance de ce phénomène à l'interface entre deux milieux ou aux limites de la corde par exemple.

## 2.2.2 ONDES PÉRIODIQUES ET SINUSOÏDALES

Nous étudions maintenant des solutions particulières de l'équation de d'Alembert, les *ondes progressives sinusoïdales*. Il s'agit d'un exemple d'onde périodique qui joue un rôle extrêmement important dans la théorie des ondes comme nous le verrons par la suite.

### ONDES PÉRIODIQUES

#### Définition

*Une onde est dite périodique quand sa fonction d'onde est une fonction périodique du temps et de l'espace. Autrement dit, l'onde est périodique si on peut définir à la fois une période temporelle  $T$  et une période spatiale  $\lambda$ , aussi appelée longueur d'onde.*

Par définition, la période temporelle de l'onde est le plus petit intervalle de temps  $T$  au bout duquel l'onde se répète. C'est la plus petite solution de l'équation

$$\forall x \forall t \quad \chi(x, t + T) = \chi(x, t). \quad (2.49)$$

On définit alors la fréquence de l'onde, exprimée en Hz, par

$$\nu = \frac{1}{T}. \quad (2.50)$$

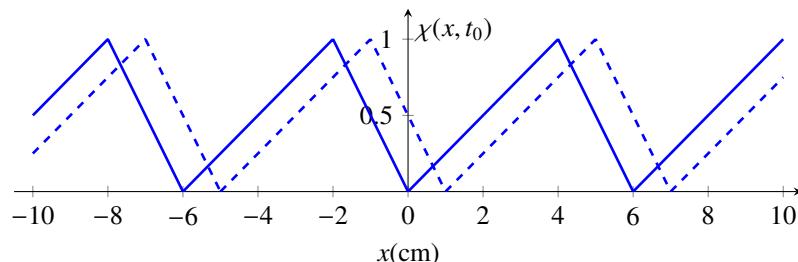


FIGURE 2.5 – Profil spatial d'une onde périodique progressive dans le sens des  $x$  croissants de longueur d'onde  $\lambda = 6 \text{ cm}$  représenté à l'instant  $t = 0$  (trait plein) et  $t = 2 \text{ s}$  (pointillés). Elle se propage à  $c = 0,5 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Sa période temporelle est  $T = 12 \text{ s}$ .

De même, on définit la longueur d'onde comme la plus petite distance au bout de laquelle l'onde se répète. C'est la plus petite solution de l'équation

$$\forall x \forall t \quad \chi(x + \lambda, t) = \chi(x, t). \quad (2.51)$$

On pourrait, à l'instar de la fréquence temporelle, définir une fréquence spatiale  $1/\lambda$  mais nous n'utiliserons pas beaucoup ce concept dans ce cours.

Dans le cas où l'onde périodique est aussi progressive, à la célérité  $c$ , la période  $T$  et la longueur d'onde  $\lambda$  sont reliées. Pour une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants par exemple, on sait que  $\chi(x, t) = \chi_+(x - ct)$ . Auquel cas, les équations (2.49) et (2.51) se réécrivent

$$\chi_+[x - c(t + T)] = \chi(x, t + T) = \chi(x, t) = \chi(x - \lambda, T) = \chi_+(x - \lambda - ct), \quad (2.52)$$

dont on déduit

$$\lambda = c \times T = \frac{c}{\nu}. \quad (2.53)$$

## ONDES SINUSOÏDALES

Un cas particulier d'onde périodique est l'*onde sinusoïdale*.

### Définition

Une onde est dite sinusoïdale si sa fonction d'onde en tout point est une fonction sinusoïdale du temps et si, en tout temps, elle est une fonction sinusoïdale de l'espace.

$$\exists T \forall x_0 \exists \varphi_0 \quad \chi(x = x_0, t) = \mathcal{A} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right), \quad (2.54)$$

$$\exists \lambda \forall t_0 \exists \phi_0 \quad \chi(x, t = t_0) = \mathcal{A} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x + \phi_0\right), \quad (2.55)$$

où  $\varphi_0$  et  $\phi_0$ , appelés *déphasage*, dépendent de  $x_0$  et de  $t_0$ , respectivement. Le coefficient  $\mathcal{A}$  est l'*amplitude* de l'onde. L'amplitude  $\mathcal{A}$ , la période  $T$  et la longueur d'onde  $\lambda$  sont indépendants de  $x_0$  et  $t_0$ .

Dans ce cas, on définit la pulsation  $\omega$  de l'onde, exprimée en  $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , par

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.56)$$

La fréquence et la pulsation sont toujours choisies positives par convention.

On définit aussi le *nombre d'onde*  $k$ , exprimé en  $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$ , et équivalent spatial de la pulsation, par

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.57)$$

### 2.2.3 ONDES PROGRESSIVES SINUSOÏDALES

Intéressons-nous finalement au cas particulier des ondes sinusoïdales qui sont aussi progressives. Une *onde progressive sinusoïdale* à une dimension s'écrit de façon générale sous la forme

$$\chi(x, t) = \mathcal{A} \cos[\underbrace{\omega t - kx + \phi}_{\Phi(x, t)}]. \quad (2.58)$$

On identifie dans l'expression (2.58) :

- l'*amplitude*  $\mathcal{A}$  qui quantifie « l'ampleur » de la perturbation. Sa dimension est celle de  $\chi$ ;
- la *phase de l'onde*  $\Phi(x, t) = \omega t - kx + \phi$  : elle s'exprime en radians et est définie modulo  $2\pi$ .

La pulsation  $\omega$  est le taux d'accroissement temporel de la phase  $\Phi$ , alors que  $k$  en est le taux d'accroissement spatial. Le *déphasage*  $\phi$ , exprimé en radians, donne une référence de phase. En particulier, il fixe la valeur de la phase  $\Phi$  en  $t = 0$  et  $x = 0$  :  $\phi = \Phi(x = 0, t = 0)$ .

### RELATION DE DISPERSION

L'onde exprimée en (2.58) doit être solution de l'équation de d'Alembert. Cela impose une relation entre  $\omega$  et  $k$ . Les doubles dérivées partielles de  $\chi(x, t)$  s'écrivent

$$\frac{\partial^2 \chi(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \mathcal{A} \cos(\omega t - kx + \phi) = -\omega^2 \chi(x, t), \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial^2 \chi(x, t)}{\partial x^2} = -k^2 \mathcal{A} \cos(\omega t - kx + \phi) = -k^2 \chi(x, t). \quad (2.60)$$

L'équation de d'Alembert impose alors

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k = \pm \frac{\omega}{c}. \quad (2.61)$$

La relation entre  $k$  et  $\omega$  est ce qu'on appelle la **relation de dispersion**. Ici, elle prend une forme très simple : le nombre d'onde  $k$  est proportionnel à  $\omega$ . On voit que  $k$  peut ici prendre deux valeurs de signes opposés.

- Si  $k = \omega/c$ , nous pouvons récrire l'équation (2.58) sous la forme

$$\chi(x, t) = \mathcal{A} \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{c} \right) + \phi \right] = \chi_+(x - ct). \quad (2.62)$$

On reconnaît la forme prise par une *onde progressive* se propageant dans le sens des *x croissants* ;

- Si  $k = -\omega/c$ , nous pouvons récrire l'équation (2.58) sous la forme

$$\chi(x, t) = \mathcal{A} \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) + \phi \right] = \chi_-(x + ct). \quad (2.63)$$

On reconnaît la forme prise par une *onde progressive* se propageant dans le sens des *x décroissants*.

### VECTEUR D'ONDE

Le signe de  $k$  indique le sens de propagation de l'onde. On définit **le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$**  comme le vecteur de direction la direction de propagation et d'amplitude  $k$ . Pour des ondes progressives le long de la direction ( $Ox$ ),

$$\mathbf{k} = k \mathbf{u}_x. \quad (2.64)$$

Si  $k > 0$ ,  $\mathbf{k}$  pointe dans le sens de  $\mathbf{u}_x$ , l'onde se propage vers les  $x$  croissants. Si  $k < 0$ ,  $\mathbf{k}$  pointe dans le sens de  $-\mathbf{u}_x$ , l'onde se propage vers les  $x$  décroissants. On peut en fait récrire l'onde progressive sinusoïdale sous une forme faisant explicitement intervenir le vecteur d'onde :

$$\chi(x, t) = \mathcal{A} \cos (\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi), \quad (2.65)$$

où  $\mathbf{r}$  est le vecteur position du lieu où l'onde est évaluée. Nous verrons que cette forme est bien adaptée aux ondes à plusieurs dimensions.

**Remarque** Le nombre d'onde  $k$  est parfois défini comme la norme du vecteur d'onde, auquel cas  $k$  est toujours positif et seule la direction du vecteur d'onde indique la direction de propagation. Ici nous avons choisi de prendre  $k$  comme une grandeur algébrique. Nous pouvons en revanche maintenant récrire sous une forme « plus correcte » la relation entre  $k$  et la longueur d'onde, à savoir

$$\|\mathbf{k}\| = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (2.66)$$

La longueur d'onde est, elle, toujours définie comme positive.

### VITESSE DE PHASE

Considérons maintenant la phase  $\Phi(x, t)$  de l'onde progressive sinusoïdale, telle que définie équation (2.58). Nous pouvons la récrire sous la forme

$$\Phi(x, t) = -k \left( x - \frac{\omega}{k} t \right) + \phi. \quad (2.67)$$

À l'instar d'une onde progressive,  $\Phi(x, t)$  ne dépend donc de  $x$  et de  $t$  que via le terme  $(x - v_\phi t)$ , où  $v_\phi$  est appelée *vitesse de phase* : la phase  $\Phi$  est elle-même une onde progressive.

**Définition**

*La vitesse de phase est définie comme la vitesse de propagation de la phase  $\Phi(x, t)$  d'une onde progressive sinusoïdale. Sa valeur dépend de la pulsation  $\omega$  via la relation*

$$v_\phi = \frac{\omega}{k}. \quad (2.68)$$

Nous traçons figure 2.6 le profil spatial d'une onde sinusoïdale progressive ainsi que la fonction d'onde  $\Phi(x, t)$  à deux instants. La vitesse de phase est la vitesse de propagation de cette onde. On peut aussi mesurer cette vitesse en observant le déplacement des maxima, minima ou des zéros de l'onde  $\chi(x, t)$ . En effet, les maxima de l'onde, par exemple, correspondent aux lieux où la phase  $\Phi(x, t)$  prend une valeur particulière :  $\Phi(x, t) = 2n\pi$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Ils se déplacent donc à la même vitesse que  $\Phi(x, t)$ , c'est-à-dire à la vitesse de phase. Les minima et les zéros de  $\chi(x, t)$  correspondent à  $\Phi(x, t) = (2n + 1)\pi$  et  $\Phi(x, t) = (2n + \frac{1}{2})\pi$ , respectivement, avec  $n \in \mathbb{Z}$ .

La relation de dispersion (2.61) nous permet d'écrire enfin

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \pm c. \quad (2.69)$$

Nous sommes donc ici dans **un cas particulier où la vitesse de phase ne dépend pas de la pulsation**. On dit que l'équation d'onde est *non dispersive* : deux ondes progressives sinusoïdales de pulsations différentes se propagent à la même vitesse, elles ne se « dispersent » pas. Par abus de langage, on dit aussi que la propagation ou que l'onde elle-même est non dispersive. Si au contraire la vitesse de phase dépend de la pulsation  $\omega$ , l'onde est dite *dispersive*.

On notera également que, pour une onde non dispersive, la vitesse de phase est égale à la célérité. Ce n'est pas le cas pour une onde dispersive, comme nous aurons l'occasion de le voir plus tard.

**À retenir**

Pour résumer, les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- L'équation d'onde est non-dispersive ;
- La relation de dispersion s'écrit sous la forme  $k^2 = \omega^2/c^2$  (ou  $k = \pm\omega/c$ ) ;
- La vitesse de phase est égale à la célérité quelle que soit la pulsation.

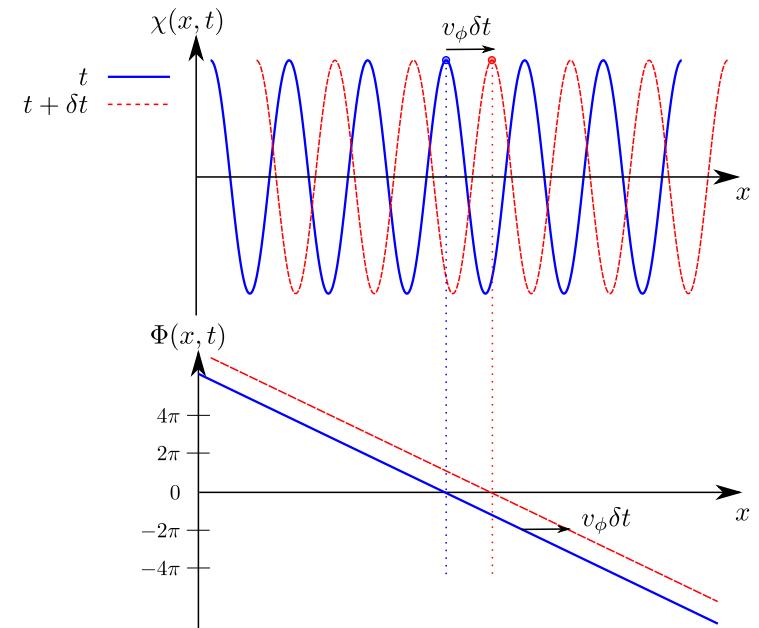


FIGURE 2.6 – Profil spatial d'une onde progressive sinusoïdale  $\chi(x, t)$  et de sa phase  $\Phi(x, t) = \omega t - kx + \phi$  à deux instants  $t$  et  $t + \delta t$ . Les extrema et les zéros de  $\chi(x, t)$  et la phase  $\Phi$  se déplacent à la vitesse de phase  $v_\phi$ .

**REPRÉSENTATION COMPLEXE**

Il est souvent commode, quand nous étudions des ondes sinusoïdales, de passer en *notations complexes*. Plutôt que de manipuler la fonction réelle  $\chi(x, t)$ , on introduit sa représentation complexe  $\underline{\chi}(x, t)$  définie comme suit.

**Définition**

*La représentation complexe d'une fonction d'onde  $\chi(x, t)$  est la fonction complexe  $\underline{\chi}(x, t)$  telle que*

$$\chi(x, t) = \text{Re} [\underline{\chi}(x, t)]. \quad (2.70)$$

La quantité physique étudiée est bien la **quantité réelle**  $\chi(x, t)$  mais nous la remplaçons par l'objet mathématique équivalent  $\underline{\chi}(x, t)$ . Les quantités complexes ne sont

qu'un **intermédiaire de calcul**.

Pour une onde progressive sinusoïdale  $\chi(x, t) = \mathcal{A} \cos \Phi(x, t)$ , on choisit (voir remarque 6) pour représentation complexe l'onde complexe sinusoïdale progressive qui s'écrit sous la forme

$$\underline{\chi}(x, t) = \underline{\mathcal{A}} e^{i\Phi(x, t)}, \quad \text{où} \quad \Phi(x, t) = \omega t - kx + \phi. \quad (2.71)$$

On choisit parfois d'inclure la phase  $\phi$  dans l'amplitude  $\mathcal{A}$  pour écrire

$$\underline{\chi}(x, t) = \underline{\mathcal{A}} e^{i(\omega t - kx)}. \quad (2.72)$$

L'*amplitude complexe*  $\underline{\mathcal{A}}$  s'écrit alors

$$\underline{\mathcal{A}} = \mathcal{A} e^{i\phi}. \quad (2.73)$$

L'amplitude  $\mathcal{A}$  de l'onde réelle est le module de l'amplitude complexe  $\underline{\mathcal{A}}$ , le déphasage  $\phi$  de l'onde réelle est la phase de l'amplitude complexe.

La puissance des notations complexes tient en ce qu'elles remplacent les dérivées partielles par rapport au temps et à l'espace en de simples produits. Ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \underline{\chi} = i\omega \underline{\chi} \\ \frac{\partial}{\partial x} \underline{\chi} = -ik \underline{\chi} \end{array} \right. \quad (2.74)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \underline{\chi} = i\omega \underline{\chi} \\ \frac{\partial}{\partial x} \underline{\chi} = -ik \underline{\chi} \end{array} \right. \quad (2.75)$$

Elles rendent la résolution des équations (différentielles) de propagation plus simples. En revanche, on se restreint alors à la recherche de solutions sinusoïdales.

**Attention** Les notations complexes ne peuvent être utilisées que pour des opérations *linéaires*. On ne peut par exemple pas calculer la représentation complexe de  $\chi^2$  en écrivant  $\underline{\chi}^2$ ... tout simplement parce que  $\text{Re}[\underline{\chi}]^2 \neq \text{Re}[\underline{\chi}^2]$ .

## Exercices d'application 2

1. Des vagues à la surface de l'océan se propagent avec une célérité de  $1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Elles se succèdent avec une fréquence égale à  $1,5 \text{ Hz}$ .
  - (a) Quelle est leur longueur d'onde ?
  - (b) On assimile ces vagues à des ondes sinusoïdales. À un instant donné, quelle est la distance entre deux points présentant une différence de phase de  $\pi/3, \pi/2, \pi$  et  $2\pi$ . Exprimer ces distances en fonction de la longueur d'onde.

## Remarque 6

Le choix de la représentation complexe pour une fonction  $\chi(x, t)$  donnée n'est pas unique. En particulier, si  $\underline{\chi}(x, t)$  est une représentation complexe de  $\chi(x, t)$  alors  $\underline{\chi}^*(x, t)$  l'est aussi.

Pour les ondes sinusoïdales progressives, cela implique que nous pouvons choisir comme représentations complexes

$$\underline{\mathcal{A}} e^{i(\omega t - kx)} \quad \text{ou} \quad \underline{\mathcal{A}} e^{i(kx - \omega t)}.$$

Il s'agit d'un pur choix de convention, mais il est important de **toujours** choisir la même convention. Ces deux choix reviennent en effet à choisir comme représentation

$$\mathcal{A} e^{i\Phi(x, t)} \quad \text{ou} \quad \mathcal{A} e^{-i\Phi(x, t)}.$$

Pour pouvoir comparer les phases relatives de deux ou plusieurs ondes à partir de leurs représentations complexes, il est indispensable de toujours choisir le même signe dans l'équation ci-dessus.

- (c) Quelle est la différence de phase, en un point donné, entre deux instants séparés de  $0,5 \text{ s}$  ?
2. On considère une onde  $\chi(x, t) = 3 \sin(8,8\pi \cdot 10^2 t - 2,6\pi x + 0,3\pi)$  où  $t$  est exprimé en secondes et  $x$  en mètres. Calculer l'amplitude, la pulsation, la fréquence, le nombre d'onde, le vecteur d'onde, la phase et la vitesse de phase de cette onde.
3. Une onde sinusoïdale progressive se propage le long de l'axe ( $Ox$ ) dans le sens des  $x$  décroissants à la célérité  $c$ . Au point d'abscisse  $x_0$ , la fonction d'onde s'écrit  $\chi(x_0, t) = \mathcal{A} \cos(\omega t)$ . Déterminer l'expression de  $\chi(x, t)$ . Représenter  $\chi(x_0, t)$  et  $\chi(x_1, t)$  sur un même graphe, avec  $\omega(x_1 - x_0)/c = \pi/2$ .
4. Reprendre la question précédente en supposant que l'onde se propage dans le sens des  $x$  croissants.
5. Une onde progressive sinusoïdale de pulsation  $\omega$  se propage sur une corde vibrante de masse linéaire  $\mu$  et initialement tendue avec la tension  $T_0$  le long de l'axe ( $Ox$ ). L'onde entraîne un déplacement  $y(x, t)$  des éléments de corde le long de l'axe ( $Oy$ ).
  - (a) Quelle est la vitesse de propagation de l'onde sur la corde ? Donner l'expression de  $y(x, t)$ .



- (b) Quelle est l'expression de la vitesse de déplacement  $v_y(x, t)$  des éléments de corde ?  
(c) Quelle est l'expression de la tension  $T_y(x, t)$  de long de la corde ?  
(d) Reprendre les questions précédentes dans le cas où l'onde sur la corde est une gaussienne : au point  $x = 0$ ,  $y(0, t) = \mathcal{A} \exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right)$ . Tracer le profil spatial de  $y(x, t)$ ,  $v_y(x, t)$  et  $T_y(x, t)$  sur un même graphe à  $t = 0$ .
6. Reprendre les questions (a) – (c) de l'exercice précédent en utilisant uniquement des notations complexes : exprimer  $\underline{y}(x, t)$  puis en déduire  $v_y(x, t)$  et  $T_y(x, t)$ . Retrouver alors les expressions de  $v_y(x, t)$  et  $T_y(x, t)$

#### 2.2.4 ONDES PROGRESSIVES ET IMPÉDANCE

Dans le cas particulier des ondes progressives, il est possible d'écrire une relation simple et générale entre les ondes de vitesse et de tension, qui ne fait intervenir qu'une caractéristique nouvelle du milieu de propagation, et que nous introduisons dans cette section, son *impédance*.

Pour établir cette relation, il nous faut exploiter l'équation (2.36) ou (2.37), équation différentielle plus simples que l'équation de d'Alembert vérifiée par une onde progressive seulement :

$$\frac{\partial \chi_{\pm}}{\partial x} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \chi_{\pm}}{\partial t} = 0. \quad (2.76)$$

Nous obtenons alors la relation entre la tension  $T_y$  de la corde et la vitesse de déplacement  $v_y$  :

$$T_{y,\pm} = T_0 \frac{\partial y_{\pm}}{\partial x} = \mp T_0 \frac{1}{c} \frac{\partial y_{\pm}}{\partial t} = \mp \frac{T_0}{c} v_{y,\pm} = \mp Z v_{y,\pm}. \quad (2.77)$$

Nous avons ici introduit un nouveau coefficient,  $Z$ , caractéristique du milieu de propagation, appelé *impédance* ou *impédance mécanique* de la corde :

$$Z = \frac{T_0}{c} = \mu c = \sqrt{T_0 \mu}. \quad (2.78)$$

On obtient une forme unifiée en considérant la force  $\mathbf{F}_{\text{aval} \rightarrow \text{amont}}$  due à l'onde et exercée par un élément de corde en aval (dans le sens de propagation de l'onde) sur un élément de corde en amont. Elle s'écrit en effet  $\mathbf{F}_{\text{aval} \rightarrow \text{amont}} = \pm T_{y,\pm} \mathbf{u}_y$  et donc

$$\mathbf{F}_{\text{aval} \rightarrow \text{amont}} = -Z \mathbf{v}_y. \quad (2.79)$$

L'impédance mécanique du milieu est donc une mesure de la **résistance opposée au mouvement** du milieu : si l'onde met en mouvement un élément de corde, lui conférant une vitesse non nulle  $v_y$ , alors la corde « réagit » pour s'opposer à ce mouvement. L'élément de corde en aval impose une force qui tend à s'opposer au mouvement créé par l'onde :  $\mathbf{F}_{\text{aval} \rightarrow \text{amont}}$  est toujours opposée à  $\mathbf{v}_y$ .

#### Remarque 7

Toutes les équations obtenues dans cette section sont directement analogues à celles rencontrées en électrocinétique. Il y a ici une analogie directe entre :

- l'impédance de la corde  $Z$  et l'impédance électrique réelle, ou résistance,  $R$ ,
- la vitesse de la corde  $v_y = \partial y / \partial t$  et le courant électrique  $i = \partial q / \partial t$ ,
- la tension de la corde  $T_y$  et la tension électrique  $u$ .

L'équation (2.79) est l'équivalent mécanique de la loi d'Ohm  $u = Ri$ .

#### À retenir : Section 2.2

- Équation de d'Alembert et ses solutions générales, équations différentielles vérifiées par les ondes progressives,
- Principe de superposition,
- Définition, écriture et propriétés des ondes périodiques, sinusoïdales et progressives sinusoïdales,
- Relation de dispersion pour une propagation non-dispersive,
- Vitesse de phase,
- Utilisation des notations complexes,
- Définition et expression de l'impédance d'une corde,
- Cas particulier des ondes progressives : relations entre tension et vitesse.

### Exercices d'application 3

1. On considère une corde de piano faite d'acier, de masse volumique  $\rho = 7,8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , de rayon  $R = 0,55 \text{ mm}$  et tendue sous une force de  $850 \text{ N}$ .
  - (a) Quelle est la vitesse de propagation d'une onde sur cette corde ? Calculez l'impédance mécanique de la corde.
  - (b) Quelle est la longueur d'onde d'une onde sinusoïdale de fréquence  $262 \text{ Hz}$  ?
  - (c) À longueur d'onde donnée, comment faut-il modifier la tension de la corde pour augmenter la fréquence de l'onde ? Même question sur le rayon de la corde.
2. À une onde sur une corde de masse linéique  $\mu$  est associée l'onde de vitesse  $v_y(x, t) = v_0 \exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{2\sigma^2}\right)$ . Donner l'expression de l'onde de tension  $T_y(x, t)$ .
3. À une onde sur une corde de masse linéique  $\mu$  est associée l'onde de déplacement  $y(x, t) = y_0 \left[ \exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+ct)^2}{2\sigma^2}\right) \right]$ . Cette onde est-elle progressive ? Calculer l'expression de l'onde de vitesse  $v_y(x, t)$ . En constatant que  $v_y(x, t)$  est la somme de deux ondes progressives contra-propageantes et en utilisant l'impédance  $Z$  de la corde dont on appellera l'expression en fonction des données du problème, donner l'expression de l'onde de surtension.

## 2.3 PROPAGATION DE L'ÉNERGIE

Une onde lors de sa propagation transporte de l'énergie. Sur une corde vibrante, ce transport d'énergie se matérialise par exemple en accrochant des petites masses le long de la corde. Au passage de l'onde, les masses se déplacent : il y a donc eu un travail associé. L'énergie a été apportée par l'onde elle-même. Le mouvement successif des petites masses ou des éléments de corde indique d'ailleurs que les énergies cinétiques et potentielles semblent elles aussi se propager sur la corde. C'est ce que nous étudions dans les prochains paragraphes.

### 2.3.1 ASPECTS ÉNERGÉTIQUES

#### DENSITÉS D'ÉNERGIE

Considérons à nouveau une onde sur une corde vibrante comme dans les sections précédentes. L'énergie cinétique, l'énergie potentielle et l'énergie mécanique sont a

priori réparties sur toute la corde, et de façon non homogène. À l'instar de la masse, il convient donc de définir des *densités linéiques d'énergie*. Nous notons  $e_c$ ,  $e_p$  et  $e_m$  les densités linéiques d'énergies cinétique, potentielle et mécanique, respectivement. Ainsi, l'élément de corde de longueur  $ds$  et d'abscisse curviligne  $s$  possède

- l'énergie cinétique  $dE_c(s, t) = e_c(s, t) ds$ ,
- l'énergie potentielle  $dE_p(s, t) = e_p(s, t) ds$ ,
- l'énergie mécanique  $dE_m(s, t) = e_m(s, t) ds$ .

#### ÉNERGIE CINÉTIQUE

Pour estimer l'énergie cinétique, il nous faut calculer la vitesse de l'élément infinitésimal de la corde d'abscisse curviligne  $s$  et de masse  $dm = \mu ds$ . On la note  $\mathbf{v}(s, t) = (v_x(s, t), v_y(s, t))$ . Nous écrivons

$$dE_c(s, t) = \frac{1}{2} \mu ds [v_x(s, t)^2 + v_y(s, t)^2] = \frac{1}{2} \mu ds \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right]. \quad (2.80)$$

Nous avions fait dans la première section l'approximation des petits angles pour obtenir l'équation de d'Alembert. Nous avions alors montré équation (2.18) que l'onde  $x(s, t)$  n'a qu'un terme au second ordre en  $\alpha$  alors que  $y(s, t)$  possède un terme de premier ordre. À l'ordre le plus bas du développement<sup>8</sup>, seul  $\partial y / \partial t$  contribue donc à la densité d'énergie cinétique :

$$e_c(s, t) = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2. \quad (2.81)$$

Pour calculer l'énergie cinétique totale de la corde, on calcule l'intégrale sur toute la corde de  $e_c$  :

$$E_c(t) = \int_0^L e_c(s, t) ds = \frac{\mu}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 ds. \quad (2.82)$$

#### ÉNERGIE POTENTIELLE

L'énergie potentielle correspond à l'excès de tension dans la corde induite par le passage de l'onde. En effet, en l'absence d'onde, la corde est supposée initialement tendue sous la tension  $T_0$ . En présence de l'onde, la tension  $T(s)$  est légèrement modifiée. Or, nous avions montré page 14 que, au premier ordre en  $\alpha$ ,  $T(s) = T_0 \dots$  Un développement au premier ordre en  $\alpha$  ne suffit donc pas pour estimer  $e_p$ .

<sup>8</sup> Ici, il s'agit de l'ordre 2 en  $\alpha$ .



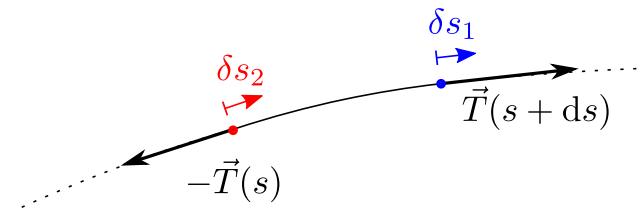


FIGURE 2.7 – Estimation de l'énergie potentielle : travaux des forces de tension lors d'un transformation d'un élément de corde.

On peut aussi s'en convaincre en constatant que  $e_c$  est elle-même du second ordre en  $\alpha$ . On s'attend à ce que l'énergie potentielle soit donc aussi d'ordre 2 en  $\alpha$ .

Pour simplifier<sup>9</sup>, nous allons **supposer** ici qu'il n'y rigoureusement **aucun mouvement longitudinal** associé à l'onde :  $x(s, t) = s$  à tout ordre<sup>10</sup> en  $\alpha$  alors que nous ne l'avions démontré qu'au premier ordre en  $\alpha$  équation (2.19).

Sous cette hypothèse, nous pouvons écrire, via l'équation (2.21), et toujours au second ordre en  $\alpha$  :

$$T(s) = \frac{T_0}{\cos \alpha} = T_0 \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \tan^2 \alpha\right). \quad (2.83)$$

En utilisant alors l'équation (2.16), il vient

$$T(s) - T_0 = \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2. \quad (2.84)$$

La surtension  $T(s) - T_0$  correspond à la contribution de l'onde à la tension de la corde. L'énergie potentielle portée par l'onde est donc associée à cette surtension seulement : on ne prend pas en compte la contribution de la tension à l'équilibre  $T_0$ .

Pour estimer l'énergie potentielle contenue dans un élément de corde, considérons la transformation représentée figure 2.7. L'extrémité aval de l'élément de corde est déplacé le long de la corde de  $\delta s_1$ , l'extrémité amont de  $\delta s_2$ . Le travail de la surtension est alors

$$\delta E_p = [T(s + ds) - T_0]\delta s_1 - [T(s) - T_0]\delta s_2 \approx [T(s) - T_0]\delta s, \quad (2.85)$$

9. Une étude dans le cas général, même limité à l'ordre 2 en  $\alpha$ , est loin d'être simple. On ne peut en fait pas négliger le mouvement longitudinal de la corde dans l'estimation de l'énergie potentielle. Voir par exemple [D. Rowland, Eur. J. Phys. 32, 1475 (2010)].

10. En fait supposer la mouvement nul à l'ordre 2 en  $\alpha$  suffirait.

où  $\delta s = \delta s_1 - \delta s_2$  est la variation de longueur de l'élément de corde. Puisque, par ailleurs,  $\delta E_p = e_p(s, t)\delta s$ , on en déduit la densité linéique d'énergie potentielle

$$e_p(s, t) = \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2. \quad (2.86)$$

## ÉNERGIE MÉCANIQUE

La densité linéique d'énergie mécanique est donnée par la somme de  $e_c$  et  $e_p$  :

$$e_m(s, t) = e_c(s, t) + e_p(s, t) = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2. \quad (2.87)$$

Notons que nous pourrions tout aussi bien écrire  $e_m(x, t)$  puisque nous avons supposé que  $x(s, t) = s$  strictement. L'énergie mécanique totale sur la corde se calcule alors comme

$$E_m = \int_0^L \left[ \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \right] dx = \frac{T_0}{2} \int_0^L \left[ \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \right] dx \quad (2.88)$$

On peut montrer que  $E_m$  est bien une constante. On calcule dans un premier temps

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} = T_0 \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} \right] = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x} \right), \quad (2.89)$$

où on a utilisé l'équation d'onde pour écrire la dernière égalité. On peut alors écrire

$$\frac{dE_m}{dt} = \int_0^L \frac{\partial e_m}{\partial t} dx = T_0 \left[ \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right]_0^L. \quad (2.90)$$

L'intégrale fait donc intervenir les **conditions aux limites** du problème. Si nous supposons que la corde est fixée à ses extrémités, la vitesse  $v_y = \partial y / \partial t$  y est nécessairement nulle, rendant nul ce second terme et donc  $dE_m/dt$ . L'énergie mécanique totale est bien conservée.

Si une extrémité est reliée à un oscillateur, par exemple, et est donc mobile, un terme de source apparaît dans l'équation (2.90) : il est bien possible de fournir de l'énergie à la corde sous la forme d'une onde !

## ÉQUATION LOCALE DE CONSERVATION DE L'ÉNERGIE

La conservation de l'énergie mécanique, comme cela a été fait en électromagnétisme avec l'équation de conservation de la charge, peut s'écrire sous la forme d'une **équation locale de conservation** :

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (2.91)$$

où nous introduisons le courant d'énergie  $\mathbf{j}_m$ . Il faut pour cela noter

$$\mathbf{j}_m = -T_0 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (2.92)$$

et récrire l'équation (2.89) sous la forme

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} = -\frac{\partial j_m}{\partial x} = -\operatorname{div} (j_m \mathbf{u}_x). \quad (2.93)$$

On retrouve bien l'équation (2.91) avec  $\mathbf{j}_m = j_m \mathbf{u}_x$ .

En utilisant par ailleurs l'équation (2.29) et le fait que  $\mathbf{v} = v_y \mathbf{u}_y$  (il n'y a pas de mouvement selon ( $Ox$ )) pour la dernière égalité, on peut récrire le courant d'énergie sous la forme

$$j_m = -T_y v_y = -\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.94)$$

### À retenir

*La conservation de l'énergie mécanique au passage d'une onde sur une corde vibrante s'écrit*

$$\boxed{\frac{\partial e_m}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0,} \quad (2.95)$$

*où le courant d'énergie  $\mathbf{j}_m$  est défini par*

$$\boxed{\mathbf{j}_m = -T_y v_y \mathbf{u}_x = -(\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{u}_x.} \quad (2.96)$$

Le courant d'énergie  $\mathbf{j}_m$  est orienté dans le sens de propagation de l'onde. Sa norme est homogène à une puissance.

La quantité  $\mathbf{j}_m \cdot \mathbf{u}$  est la quantité d'énergie par unité de temps, ou puissance, qui traverse un élément de corde à chaque instant dans la direction de  $\mathbf{u}$ .

### Remarque 8

La forme prise par le courant d'énergie équation (2.96) semble dépendre du choix arbitraire de l'orientation de l'axe  $\mathbf{u}_x$ . Ce n'est, heureusement, pas le cas. La tension  $\mathbf{T}$  de la corde a en effet été définie comme la tension subie par un élément de la corde et créée par l'élément de la corde suivant *dans le sens de  $\mathbf{u}_x$* . Si l'on change le sens de  $\mathbf{u}_x$ , il faut alors aussi simultanément changer le signe de  $\mathbf{T}$ . La direction du vecteur  $\mathbf{j}_m$  est donc inchangée.

## ONDE D'ÉNERGIE

Il est aussi intéressant de calculer le gradient de la densité d'énergie mécanique  $\partial e_m / \partial x$ . En suivant un calcul similaire à celui de  $\partial e_m / \partial t$ , on trouve

$$\frac{\partial e_m}{\partial x} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial j_m}{\partial t}. \quad (2.97)$$

Avec l'équation (2.95), on peut alors montrer que

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) e_m = 0. \quad (2.98)$$

**La densité linéique d'énergie mécanique est solution de l'équation d'onde**, traduisant ainsi le fait que la propagation de l'onde s'accompagne bien d'une propagation d'énergie.

Notons que ce n'est en revanche pas le cas de façon générale pour les densités  $e_c$  et  $e_p$ . Ces deux énergies ne sont pas conservées individuellement, l'énergie cinétique au cours de la propagation peut se transformer en énergie potentielle, et inversement.

### 2.3.2 ONDES PROGRESSIVES : PUSSANCE ET IMPÉDANCE

Intéressons-nous maintenant au cas particulier des ondes progressives. Nous avions vu équation (2.79) que les ondes de tension et de vitesse de déplacement sont reliées par l'impédance  $Z$  de la corde dans ce cas :

$$T_{y,\pm} = \mp Z v_{y,\pm}. \quad (2.99)$$

On peut donc maintenant exprimer le courant d'énergie  $\mathbf{j}_m$  en utilisant l'impédance  $Z$  de la corde. On note pour cela  $\mathbf{u}_\pm = \pm \mathbf{u}_x$  la direction de propagation de l'onde  $\chi_\pm$ , ce qui permet d'écrire

$$\mathbf{j}_{m,\pm} = -T_{y,\pm} v_{y,\pm} \mathbf{u}_x = \mp T_{y,\pm} v_{y,\pm} \mathbf{u}_\pm. \quad (2.100)$$



En utilisant l'équation (2.77), on obtient alors les deux écritures

$$\mathbf{j}_{m,\pm} = Z v_{y,\pm}^2 \mathbf{u}_\pm = \frac{T_{y,\pm}^2}{Z} \mathbf{u}_\pm. \quad (2.101)$$

La puissance transmise d'un élément de corde en amont de l'onde vers un élément en aval, ou encore la puissance transmise dans le sens de propagation de l'onde ne dépend donc pas du sens de propagation de l'onde :

$$\mathcal{P}_{\text{amont}\rightarrow\text{aval}} = \mathbf{j}_{m,\pm} \cdot \mathbf{u}_\pm = Z v_{y,\pm}^2 = \frac{T_{y,\pm}^2}{Z}. \quad (2.102)$$

Remarquons enfin que la puissance  $\mathcal{P}_{\text{amont}\rightarrow\text{aval}}$  est toujours positive : l'énergie se propage bien toujours dans le même sens que l'onde progressive

#### Remarque 9

Ici encore, les équations obtenues sont directement analogues à celles rencontrées en électrocinétique. La puissance  $\mathcal{P}_{\text{amont}\rightarrow\text{aval}}$  est analogue à la puissance fournie à une résistance électrique  $R$  parcourue par un courant  $i$  avec une tension  $u$  à ses bornes :

$$\mathcal{P}_R = R i^2 = \frac{u^2}{R}. \quad (2.103)$$

#### ÉNERGIES CINÉTIQUE ET POTENTIELLES

Utilisons les résultats de l'équation (2.102) pour récrire les densités d'énergie cinétique et potentielle :

$$e_{c,\pm} = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial y_\pm}{\partial t} \right)^2 = \frac{\mu}{2Z} \mathcal{P}_{\text{amont}\rightarrow\text{aval}} = \frac{1}{2c} \mathbf{j}_{m,\pm} \cdot \mathbf{u}_\pm \quad (2.104)$$

$$e_{p,\pm} = \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial y_\pm}{\partial x} \right)^2 = \frac{Z}{2T_0} \mathcal{P}_{\text{amont}\rightarrow\text{aval}} = \frac{1}{2c} \mathbf{j}_{m,\pm} \cdot \mathbf{u}_\pm. \quad (2.105)$$

Pour une onde progressive, les énergies potentielles et cinétiques sont donc égales :

$$e_{c,\pm} = e_{p,\pm} = e_{m,\pm}/2 \quad ; \quad e_{m,\pm} = \frac{\mathbf{j}_{m,\pm} \cdot \mathbf{u}_\pm}{c} = \frac{\mathcal{P}_{\text{amont}\rightarrow\text{aval}}}{c}. \quad (2.106)$$

On peut enfin vérifier que  $e_m$ , et donc  $e_c$ ,  $e_p$  et  $j_m$  sont tous solutions de l'équation (2.76) : pour une onde progressive à la vitesse  $c$ , **les densités linéiques d'énergie et le courant d'énergie sont aussi des ondes progressives qui se propagent dans le même sens et à la même vitesse.**

#### ONDES PROGRESSIVES SINUSOIDALES

Regardons finalement le cas particulier des ondes progressives sinusoïdales :

$$y(x, t) = \mathcal{A} \cos(\omega t - kx + \phi) \quad ; \quad k = \omega/c. \quad (2.107)$$

En utilisant cette expression, la densité d'énergie mécanique s'écrit

$$\begin{aligned} e_m(x, t) &= -Z \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} = Z \omega k \mathcal{A}^2 \sin^2(\omega t - kx + \phi) \\ &= \mu \omega^2 \mathcal{A}^2 \sin^2(\omega t - kx + \phi). \end{aligned} \quad (2.108)$$

L'énergie est bien une onde progressive qui se propage dans le même sens que  $y(x, t)$ .

On s'intéresse le plus souvent à *la valeur moyenne* de l'énergie mécanique. Pour une fonction périodique de période  $T$ , la valeur moyenne est définie comme la moyenne sur une période :

$$\langle f \rangle_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t) dt. \quad (2.109)$$

Notons que nous pourrions calculer l'intégrale sur n'importe quel intervalle  $[t_0, t_0 + T]$  de longueur  $T$ . On utilise alors les moyennes suivantes :

$$\langle \cos \omega t \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t dt = 0 \quad (2.110)$$

$$\langle \sin \omega t \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega t dt = 0 \quad (2.111)$$

$$\langle \cos \omega t \sin \omega t \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt = 0 \quad (2.112)$$

$$\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2} \quad (2.113)$$

$$\langle \sin^2 \omega t \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} \quad (2.114)$$

On en déduit que

$$\langle e_m \rangle_T = \frac{1}{2} \mu \omega^2 \mathcal{A}^2 = \frac{Z}{2c} \omega^2 \mathcal{A}^2 \quad (2.115)$$



Pour une onde progressive sinusoïdale, les moyennes de l'énergie mécanique et de la puissance  $j_m$  sont indépendantes de la position. On notera également qu'elles sont toutes deux **proportionnelles à  $\mathcal{A}^2$ , le carré de l'amplitude, et à  $\omega^2$ , le carré de la pulsation.**

### À retenir : Section 2.3

- Équation de conservation et de propagation de l'énergie mécanique, courant d'énergie,
- Cas particulier des ondes progressives : relations entre tension/vitesse et courant/puissance,  $e_c$  et  $e_p$  sont aussi des ondes,
- Savoir calculer la densité d'énergie moyenne d'une onde progressive sinusoïdale, et connaître sa dépendance en  $\mathcal{A}$  et  $\omega$ .

### Exercices d'application 4

1. Une onde progressive sinusoïdale se propage sur une corde d'impédance mécanique  $Z = 8,7 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  et de rayon  $R = 1,8 \text{ mm}$ . Sa fréquence est de 28 Hz. Quelle est la puissance mécanique moyenne portée par une onde de déplacement dont l'amplitude serait  $R/10$ ? En déduire l'amplitude des ondes de vitesse et de surtension.
2. À une onde sur une corde de masse linéique  $\mu$  est associée l'onde de vitesse  $v_y(x, t) = v_0 \exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{2\sigma^2}\right)$ . Donner l'expression du vecteur courant d'énergie.
3. À une onde sur une corde de masse linéique  $\mu$  est associée l'onde de déplacement  $y(x, t) = y_0 \left[ \exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x+ct)^2}{2\sigma^2}\right) \right]$ . Donner l'expression des ondes de tension et de vitesse et en déduire celle du vecteur courant d'énergie  $j_m$ . Ces ondes sont-elles progressives ?

## 3 ONDES ACOUSTIQUES

Les ondes acoustiques font partie des exemples les plus importants d'onde mécanique. Elles se propagent dans n'importe quel milieu matériel, qu'il soit fluide ou solide, et sont en général subdivisées en trois catégories :

- Les ondes sonores ou audibles, qui correspondent à des fréquences comprises entre 20 Hz et 20 kHz. Ce sont les ondes auxquelles est sensible l'oreille humaine, générées par nos voix, des instruments de musique, des hauts-parleurs...
- Les ultrasons, de fréquences plus élevées que 20 kHz. Ils sont par exemple utilisés en médecine pour les échographies, dans l'industrie et la défense pour réaliser des sonars, ou par des animaux qui les utilisent pour détecter leurs proies (chauves-souris) ou communiquer et se repérer (cétacés). On peut les générer par exemple à l'aide de cales piézoélectriques, comme du quartz ;
- Les infrasons, de fréquences plus basses que les fréquences audibles. Elles sont le plus souvent générées par des sources de grande taille : des éléphants, qui s'en servent pour communiquer, aux mouvements violents de masses d'air (tempêtes, tornades) ou océaniques (vagues géantes, tsunamis). Les gros instruments de chantier, le passage de trains ou de camions sont aussi sources d'infrasons.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à la propagation d'ondes acoustiques dans les fluides. Les ondes sont alors exclusivement longitudinales. Nous verrons que la formulation mathématique de la propagation de ces ondes est identique à celles des ondes sur une corde vibrante. Toutefois, ces ondes peuvent se propager à plusieurs dimensions et nous devrons donc prendre en compte cette liberté nouvelle dans la description de l'onde.

### 3.1 ONDES ACOUSTIQUES DANS LES FLUIDES

#### 3.1.1 QU'EST-CE QUE LE SON ?

Avant de commencer la dérivation de l'équation d'onde, précisons ce qu'est une onde acoustique et quel est son mécanisme de propagation. Tout commence avec le déplacement d'un objet dans un fluide, par exemple l'air. Ce mouvement crée une perturbation dans l'air : un déplacement des particules d'air, une modification de la pression ou de la densité de particules. Si l'objet bouge « lentement », l'air s'écoule autour de l'objet tout aussi lentement, rééquilibrant la pression de part et d'autre de l'objet sans propager la perturbation. Nous nous intéresserons donc plutôt à une réponse du milieu à des mouvements « rapides » de l'objet : l'air n'a alors pas le temps

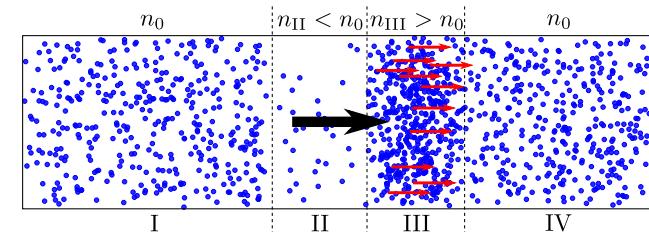


FIGURE 3.1 – Apparition de zones de dépression et de surpression où la densité  $n$  de l'air est plus faible ou plus élevée, respectivement, que la moyenne,  $n_0$ . La flèche noire indique le mouvement d'une membrane qui pourrait engendrer cette distribution, et les flèches rouges le surplus de vitesse conféré par cette membrane aux particules d'air. Ce surplus de vitesse est faible devant la vitesse thermique des particules.

de s'écouler. L'air est localement comprimé : on voit apparaître une zone de compression où la densité d'air est plus élevée qu'en moyenne.

Imaginons que suite à un tel mouvement, la répartition des particules d'air ressemble à celle de la figure 3.1. On peut imaginer qu'une membrane a entraîné les particules de la zone II vers la zone III, créant ainsi une zone de forte densité et une zone de faible densité. Le surplus de vitesse que les particules ont acquis, de l'ordre de quelques  $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ , est faible typiquement devant leur vitesse thermique (plusieurs centaines de  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  à température ambiante). D'un point de vue purement thermodynamique, on pourrait donc s'attendre à ce que les particules de la zone de forte densité finissent par se déplacer vers la zone de faible densité pour rétablir l'équilibre : une densité de particule uniforme dans tout le fluide. Mais alors... rien ne se passe.

Une onde acoustique correspondrait au contraire à la propagation dans le milieu de cette perturbation qu'est la surpression de la zone III, ou la dépression de la zone II. Pour ce faire, le mouvement des particules de la zone III doit entraîner le déplacement des particules de la zone IV pour que l'on y retrouve à un temps ultérieur une zone de forte densité. Cela ne peut se faire que par *collision* entre particules voisines. Il faut donc que les collisions entre particules aient lieu avant que les particules « n'aient eu le temps » de rétablir l'équilibre de densité de particules dans le milieu. Autrement dit, pour qu'une onde acoustique puisse être générée, il faut que la distance caractéristique au bout de laquelle une collision a lieu, appelée *libre parcours moyen*, soit plus petite que la taille caractéristique de la perturbation. Nous supposerons donc toujours que la taille caractéristique de l'onde, et en particulier sa longueur d'onde pour une onde sinusoïdale, est toujours plus grande que le libre parcours moyen des particules du fluide.

Dans les conditions normales de pression et de température, le libre parcours

moyen des molécules de l'air est de l'ordre de  $\ell_c = 100 \text{ nm}$ . Imposer une longueur d'onde  $\lambda \gg \ell_c$  revient à supposer que la fréquence  $v = c_s/\lambda$  de l'onde est plus faible que  $c_s/\ell_c$ , où  $c_s$  est la vitesse du son dans l'air, soit  $v \ll 3 \text{ GHz}$ . Cette condition n'est pas vraiment restrictive.

Nous étudierons donc la propagation de l'onde à des échelles suffisamment grandes pour que le comportement individuel des particules de l'air ne joue aucun rôle. Comme nous l'avions fait pour le traitement de la corde vibrante, où nous avions décrit le mouvement de la corde comme la succession de mouvements d'éléments de corde, sans atteindre le détail microscopique de la structure de la corde, nous traiterons le fluide comme une succession d'éléments mésoscopiques, les *éléments de fluide*.

### 3.1.2 DESCRIPTION DU FLUIDE

#### Définition

*On appelle élément de fluide un ensemble élémentaire de particules du fluide de taille  $\ell$  très petite devant l'échelle caractéristique  $\lambda$  des variations induites par l'onde, et très grande devant le libre parcours moyen des particules  $\ell_c$  :*

$$\ell_c \ll \ell \ll \lambda. \quad (3.1)$$

L'hypothèse ( $\ell \ll \lambda$ ) nous permet de considérer l'onde comme uniforme sur tout l'élément de fluide.

L'hypothèse ( $\ell_c \ll \ell$ ) nous permet de traiter le fluide comme un *milieu continu* : nous oublions la granularité intrinsèque du fluide.

Notons que la définition d'un élément de fluide n'est possible que grâce à l'hypothèse ( $\ell_c \ll \lambda$ ) énoncée à la partie précédente.

Grâce aux hypothèses (3.1), nous pouvons utiliser des grandeurs « macroscopiques » pour décrire les propriétés de l'élément de fluide. Ces grandeurs physiques dépendent a priori du temps mais sont uniformes sur tout l'élément de fluide. Elles sont donc toutes fonctions du temps et de la *position d'équilibre  $\mathbf{r}$*  du centre de masse de l'élément de fluide. On dit qu'il s'agit de *champs*. Les principaux champs que nous considérerons sont les suivants :

- Le champ de position  $\Psi(\mathbf{r}, t)$ , champ vectoriel qui donne le déplacement de l'élément de fluide par rapport à sa position d'équilibre  $\mathbf{r}$ ;
- Le champ de densité de particules  $n(\mathbf{r}, t)$  qui donne la densité de particules à l'instant  $t$  de l'élément de fluide dont la position d'équilibre est  $\mathbf{r}$ ;

- Le champ de densité de masse  $\rho(\mathbf{r}, t)$  qui donne la masse volumique de ce même élément de fluide. On utilisera aussi  $\delta\rho(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) - \rho_0$ , l'écart à la densité de masse à l'équilibre  $\rho_0$ , c'est-à-dire la densité de masse en l'absence d'onde;
- Le champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  qui donne la vitesse de déplacement de l'élément de fluide ;
- Le champ de pression  $P(\mathbf{r}, t)$  qui donne la valeur de la pression locale du fluide à la position  $\mathbf{r}$ . On introduira aussi la *surpression*  $\delta P(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}, t) - P_0$  définie comme l'écart à la pression d'équilibre  $P_0$  ;
- Le champ de température  $T(\mathbf{r}, t)$  qui donne la valeur de la température des particules contenues dans l'élément de fluide.

Insistons ici sur la différence entre l'argument  $\mathbf{r}$  de ces champs, *position d'équilibre* du centre de masse de l'élément de fluide, indépendante du temps, et sa *position instantanée  $\mathbf{R}(\mathbf{r}, t)$*  qui, elle, dépend du temps. L'écart à la position d'équilibre est le champ de déplacement  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  :

$$\mathbf{R}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{r} + \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.2)$$

Nous prenons les différents champs que nous avons listés comme fonctions de la *position d'équilibre  $\mathbf{r}$* . Le vecteur  $\mathbf{r}$  permet d'identifier *de façon unique* un élément de fluide, à l'instar de l'abscisse curviligne  $s$  sur la corde inextensible.

Remarquons enfin que le volume de l'élément de fluide est lui-même fonction du temps. Si deux éléments de fluide voisins se déplacent d'un quantité différente [ $\Psi(\mathbf{r}, t) \neq \Psi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, t)$ ], leurs volumes doivent nécessairement s'adapter pour qu'il n'y ait pas de « trous » entre eux dans le fluide.

### 3.1.3 ÉQUATION DE PROPAGATION

Pour établir l'équation de propagation, nous faisons l'hypothèse simplificatrice qui suppose que l'onde est à une dimension. Cela rend les écritures plus simples sans perdre en généralité dans l'établissement de l'équation d'onde. Cette situation correspond par exemple à une propagation dans un tuyau de petite section ou, comme nous le verrons ensuite, à la propagation de l'onde « suffisamment loin » de sa source.

Un élément de fluide est alors un élément de volume de section  $s$  et de longueur infinitésimale  $dx$  (voir figure 3.2). À l'équilibre, il est centré sur l'abscisse  $x$ . Le champ de déplacement se ramène à un scalaire  $\Psi(x, t) : \Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi(x, t) \mathbf{u}_x$ . Tous les champs décrivant l'état de l'élément de fluide ne sont fonctions que de  $x$  et de  $t$ . En particulier, ils sont uniformes dans les deux autres directions de l'espace.

Comme nous l'avions fait pour la corde vibrante, nous devons maintenant mettre en équation les différentes étapes de la propagation de l'onde dans le fluide :



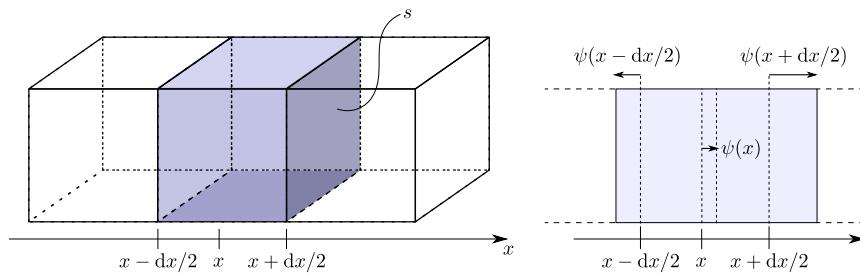


FIGURE 3.2 – Élément de fluide de section  $s$  et de longueur  $dx$  centré à l’abscisse  $x$  dans sa position d’équilibre (gauche). Au passage de l’onde (droite), les éléments de fluide se déplacent et changent de volume.

1. un élément de fluide se déplace ( $\Psi$  modifié), induisant un changement de la densité de masse  $\rho$ ;
2. le changement de densité  $\rho$  correspond à un changement de pression  $P$ ;
3. le changement de pression  $P$  induit lui-même un mouvement dans le fluide.

#### CONSERVATION DE LA MASSE

La quantité de particules  $dN(x)$  contenues dans un élément de fluide est conservée par définition de l’élément de fluide. La masse  $dM(x)$  qu’il contient prend donc la même valeur à l’équilibre et au passage de l’onde : elle ne dépend pas du temps. À l’équilibre, l’élément de fluide a une longueur  $\delta\ell = dx$  et une densité de masse  $\rho_0$ . La masse qu’il contient est

$$dM(x) = \rho_0 s \delta\ell = \rho_0 s dx. \quad (3.3)$$

Au passage de l’onde, le même élément de fluide voit sa longueur changée en (voir figure 3.2)

$$\delta\ell(x, t) = dx + \Psi\left(x + \frac{dx}{2}, t\right) - \Psi\left(x - \frac{dx}{2}, t\right) \quad \text{et} \quad dM(x) = \rho(x, t) s \delta\ell(x, t). \quad (3.4)$$

En écrivant  $\Psi(x \pm dx/2, t) = \Psi(x, t) \pm (\partial\Psi/\partial x) \times dx/2$ , on obtient finalement :

$$dM(x) = \rho_0 s dx = \rho(x, t) s \left(1 + \frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial x}\right) dx. \quad (3.5)$$

Comme au chapitre précédent, nous faisons l’hypothèse que **les perturbations induites par l’onde sont faibles**. Nous pouvons alors écrire les champs  $P(x, t)$  et

$\rho(x, t)$ , avec  $P_0$  et  $\rho_0$  la pression et la masse volumique à l’équilibre, sous la forme

$$\begin{cases} P(x, t) = P_0 + \delta P(x, t) & ; \quad |\delta P| \ll P_0 \\ \rho(x, t) = \rho_0 + \delta\rho(x, t) & ; \quad |\delta\rho| \ll \rho_0. \end{cases} \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

Nous verrons plus loin que ces hypothèses ne sont pas très restrictives. Par la suite, nous nous contenterons d’un développement au premier ordre de la perturbation, donc au premier ordre en  $\delta\rho/\rho_0$  ou  $\delta P/P_0$ . En insérant la définition de  $\delta\rho$  dans l’équation (3.5), nous pouvons alors écrire

$$\delta\rho(x, t) = -\rho_0 \frac{\partial\Psi(x, t)}{\partial x}. \quad (3.8)$$

Pour une onde tridimensionnelle, on obtiendrait de la même façon

$$\delta\rho(\mathbf{r}, t) = -\rho_0 \operatorname{div} \Psi(\mathbf{r}, t). \quad (3.9)$$

#### ÉQUATION DU MOUVEMENT

Écrivons maintenant les équations de la dynamique sur l’élément de fluide centré en  $x$ . Nous négligeons les forces de frottements dans le fluide et les forces de gravitation. L’élément de fluide est donc uniquement soumis aux forces de pression à ses extrémités. En ne conservant que les termes de premier ordre en la perturbation, le principe fondamental de la dynamique s’écrit

$$\rho_0 s dx \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = [P(x - dx/2, t) - P(x + dx/2, t)] s = -\frac{\partial\delta P}{\partial x} s dx, \quad (3.10)$$

soit

$$\rho_0 \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial\delta P}{\partial x}. \quad (3.11)$$

Pour une onde tridimensionnelle, on peut montrer de même que

$$\rho_0 \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -\operatorname{grad} \delta P. \quad (3.12)$$

#### ÉQUATION D’ÉTAT

Les équations (3.8) et (3.11) ne suffisent pas pour écrire une équation d’onde : il nous manque une relation entre les champs de surpression  $\delta P$  et de densité de masse

$\delta\rho$ . Cette relation est donnée par les propriétés *thermodynamiques* du fluide. Pour un gaz parfait, par exemple, l'équation d'état des gaz parfaits permet d'écrire

$$P = \rho \frac{k_B T}{m}, \quad (3.13)$$

où  $m$  est la masse d'une particule du gaz et  $k_B$  la constante de Boltzmann. Les champs  $\delta P$  et  $\delta\rho$  sont alors directement proportionnels.

De façon générale, la quantité à considérer est la *compressibilité*  $\chi_s$  définie par

$$\boxed{\chi_s = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S}. \quad (3.14)$$

La compressibilité quantifie la modification relative du volume du fluide sous l'effet d'une pression. Dans cette équation, l'indice  $S$  indique que nous considérons des transformations à entropie constante, dites *isentropiques*. Nous admettrons en effet ici que, étant donné l'hypothèse de faible perturbation induite par l'onde, l'évolution des propriétés du fluide est *adiabatique*. Il n'y a pas d'échange de chaleur, l'entropie est conservée.

La compressibilité isentropique ou adiabatique  $\chi_s$  est une propriété du fluide, c'est une constante du mouvement<sup>1</sup>. En utilisant une nouvelle fois le lien entre la masse  $dM$  d'un élément de fluide, constante elle aussi, et son volume infinitésimal  $dV = dM/\rho$ , nous pouvons écrire  $\chi_s$  comme

$$\chi_s = -\frac{1}{dV} \frac{\partial dV}{\partial P} = -\frac{\rho}{dM} \frac{\partial dM/\rho}{\partial P} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P}. \quad (3.15)$$

Au passage de l'onde, si la pression passe de  $P_0$  à  $P_0 + \delta P$ , la densité de masse passe alors de  $\rho_0$  à  $\rho_0 + (\partial\rho/\partial P)\delta P$ . On peut ainsi écrire :

$$\delta\rho = \frac{\partial\rho}{\partial P} \delta P = \chi_s \rho_0 \delta P. \quad (3.16)$$

En ne gardant une nouvelle fois que les termes au premier ordre de la perturbation, on peut remplacer  $\rho$  par  $\rho_0$  dans cette expression et ainsi obtenir

$$\boxed{\delta\rho = \chi_s \rho_0 \delta P.} \quad (3.17)$$

1. On suppose ici en fait que la perturbation du milieu induite par l'onde est suffisamment faible pour ne pas changer la nature du milieu, et donc en particulier pas sa compressibilité.

## ÉQUATION D'ONDE

Nous avons maintenant toutes les équations nécessaires pour écrire une équation d'onde. En insérant l'équation (3.17) dans l'équation (3.11), on peut écrire

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\frac{1}{\chi_s \rho_0} \frac{\partial \delta\rho}{\partial x} = \frac{1}{\chi_s} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad (3.18)$$

soit finalement

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi(x, t) = 0 \quad ; \quad c_s = \frac{1}{\sqrt{\chi_s \rho_0}}. \quad (3.19)$$

On obtient la même équation pour  $\delta\rho$  et  $\delta P$  : les champs de pression, de densité, de déplacement, de vitesse... sont tous solutions de l'équation de d'Alembert avec la célérité  $c_s$ . Notons pouvons aussi récrire la relation entre pression et densité de masse sous la forme

$$\delta P = c_s^2 \delta\rho \quad (3.20)$$

### 3.1.4 CÉLÉRITÉ DU SON

Faisons une analyse dimensionnelle de l'expression trouvée pour  $c_s$  :  $\chi_s$  est homogène à l'inverse d'une pression, il s'exprime en  $(\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2})^{-1}$ . La densité de masse s'exprime en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . On trouve ainsi

$$[c_s] = \frac{1}{\sqrt{[\chi_s \rho_0]}} = \sqrt{\frac{M}{LT^2}} \frac{L^3}{M} = L/T. \quad (3.21)$$

Il s'agit bien d'une vitesse.

### CÉLÉRITÉ DU SON DANS LES GAZ PARFAITS

Pour estimer la valeur de  $c_s$ , il faut connaître la valeur de la compressibilité du fluide. Pour un gaz parfait, il est possible d'exprimer  $\chi_s$  en fonction des paramètres thermodynamiques du gaz. Comme évoqué plus haut, la transformation subie par le gaz au passage de l'onde peut être considérée comme *adiabatique*. On peut alors utiliser les *lois de Laplace*. En particulier, nous pouvons écrire qu'au passage de l'onde

$$P V^\gamma = \text{constante}, \quad (3.22)$$

où  $\gamma = C_P/C_V$  est le coefficient de Laplace, défini comme le rapport des capacités thermiques isobare et isochore. La compressibilité adiabatique  $\chi_s$  se calcule alors



comme

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_S = \frac{1}{\gamma P}. \quad (3.23)$$

La compressibilité est inversement proportionnelle à la pression. Étant donné que nous avons supposé  $|\delta P| \ll P_0$ , on peut remplacer  $P$  par  $P_0$  dans le calcul de  $\chi_s$ . En utilisant alors l'équation des gaz parfaits, on obtient

$$\chi_s = \frac{m}{\gamma \rho_0 k_B T}. \quad (3.24)$$

La célérité du son est souvent donné en fonction de la masse molaire  $\mathcal{M}$  du gaz et de la constante des gaz parfaits  $R = N_A k_B$ , où  $N_A$  est le nombre d'Avogadro. On obtient

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mathcal{M}}}. \quad (3.25)$$

L'air est très bien décrit comme un gaz parfait de coefficient  $\gamma = 1,4$ . Sa masse molaire est  $\mathcal{M} = 28,95 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . À une température  $T = 293 \text{ K}$ , on obtient une célérité  $c_s = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### CÉLÉRITÉ ET VITESSE DES PARTICULES

Il est enfin intéressant de comparer la vitesse du son trouvée à une autre vitesse, celles des particules du fluide. Pour cela, on peut utiliser le lien entre énergie cinétique moyenne du gaz et température. En effet, pour un gaz à 3 dimensions,

$$\left\langle \frac{1}{2} m v_p^2 \right\rangle = \frac{3}{2} k_B T, \quad (3.26)$$

où la moyenne  $\langle \cdot \rangle$  est ici une moyenne statistique sur l'ensemble des particules et où l'indice  $p$  précise qu'il s'agit de la vitesse des particules individuelles, pas de la vitesse d'un élément de fluide. Il existe alors un lien simple entre  $c_s$  et la vitesse  $v_p$  :

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{\gamma}{3}} \sqrt{\langle v_p^2 \rangle} \approx 0,68 \sqrt{\langle v_p^2 \rangle}. \quad (3.27)$$

**La vitesse du son dans le gaz parfait  $c_s$  est sensiblement égale à la vitesse quadratique moyenne  $\sqrt{\langle v_p^2 \rangle}$  des particules du gaz.** C'est un résultat plutôt rassurant : l'onde se propage dans le gaz grâce au mouvement local des particules. Il ne s'agit pas d'un mouvement d'ensemble du gaz, mais le déplacement des particules est indispensable dans le mécanisme de propagation de l'onde. Le temps que met l'onde à passer

d'un élément de fluide à un autre correspond finalement au temps que mettent les particules en moyenne à atteindre l'élément de fluide voisin. La vitesse de propagation de l'onde doit être de l'ordre de celle des particules.

En revanche, la vitesse de déplacement d'un élément de fluide  $v = \partial \Psi / \partial t$  est bien plus faible que la célérité  $c_s$  et que la vitesse moyenne  $v_p$  des particules individuelles. Cette vitesse est le surplus de vitesse donné par l'onde aux particules. Supposer que  $\|v\| \ll v_p$  revient à notre hypothèse première que la perturbation induite par l'onde est supposée faible.

### À retenir : Section 3.1

- Définition d'un élément de fluide,
- Hypothèses permettant d'établir l'équation d'onde,
- Célérité des ondes sonores dans un fluide, cas du gaz parfait,
- Relation entre ondes de surpression et de densité,
- Savoir calculer la densité d'énergie moyenne d'une onde progressive sinusoïdale, et connaître sa dépendance en  $\mathcal{A}$  et  $\omega$ .

## 3.2 PROPAGATION D'ONDES À 3D

Nous n'avons jusqu'à présent considéré que la propagation d'onde à une dimension. C'est trop restrictif pour les ondes acoustiques qui se propagent de façon générale à trois dimensions. Nous réécrivons dans cette partie l'équation d'onde à trois dimensions et étudions certaines solutions particulières.

### 3.2.1 ÉQUATION D'ONDE À 3D

Nous considérons une fonction d'onde  $\chi(\mathbf{r}, t)$ , fonction du temps et de la position  $\mathbf{r}$  dans un espace à trois dimensions. L'équation de d'Alembert (3.19) ne fait intervenir que la dérivée seconde par rapport à la coordonnée cartésienne  $x$ . Elle se généralise naturellement en prenant également en compte les dérivées par rapport aux deux autres coordonnées cartésiennes,  $y$  et  $z$  :

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad ; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.28)$$

On pourrait aussi introduire l'opérateur d'Alembertien tridimensionnel :

$$\square \chi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad ; \quad \square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (3.29)$$

Quelles sont les solutions de cette équation d'onde ? La démonstration que nous avions suivie pour écrire la solution générale de l'équation 1D comme la somme de deux ondes progressives ne se généralise pas bien à plus qu'une dimension. Nous pouvons toutefois isoler des propriétés importantes de quelques solutions.

Notons que les ondes à 1D, pour lesquelles  $\chi(\mathbf{r}, t) = \chi(x, t)$  ne dépend que d'une coordonnée d'espace, sont bien solutions de l'équation (3.28). En fait, toutes les fonctions d'onde qui s'écrivent comme un produit de fonctions d'onde 1D, c'est-à-dire sous la forme

$$\chi(\mathbf{r}, t) = \chi_x(x, t) \chi_y(y, t) \chi_z(z, t), \quad (3.30)$$

où  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  et  $\chi_z$  sont solutions de l'équation 1D, sont bien solutions de (3.28). En particulier, on peut noter que  $\chi_x$ ,  $\chi_y$  et  $\chi_z$  sont aussi solutions de (3.28). Une onde unidimensionnelle est aussi une onde tridimensionnelle. En revanche, toutes les solutions de (3.28) ne s'écrivent pas sous la forme d'un produit (3.30).

### 3.2.2 ONDES SINUSOIDALES – SURFACES D'ONDES

Nous avons vu précédemment qu'une bonne façon de représenter une onde sinusoïdale est d'utiliser les notations complexes. À trois dimensions, nous pouvons écrire une onde sinusoïdale de pulsation  $\omega$  sous la forme

$$\underline{\chi}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A}(\mathbf{r}) e^{i\Phi(\mathbf{r}, t)} \quad ; \quad \Phi(\mathbf{r}, t) = \omega t + \phi(\mathbf{r}). \quad (3.31)$$

Pour caractériser la « forme » de cette onde, on s'intéresse en général à ses *surfaces d'onde*, aussi appelées *fronts d'onde*.

Définition : Surface d'onde

*Une surface d'onde, ou front d'onde, est une surface sur laquelle la phase de la fonction d'onde est uniforme.*

La surface  $\mathcal{S}$  est une surface d'onde si et seulement si

$$\exists \phi_0 \forall \mathbf{r} \in \mathcal{S} \quad \phi(\mathbf{r}) = \phi_0. \quad (3.32)$$

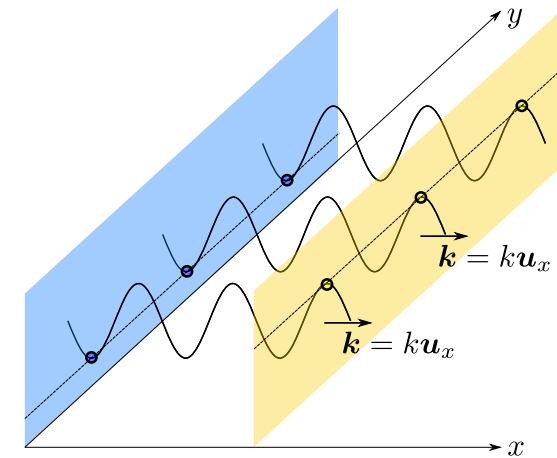


FIGURE 3.3 – Surfaces d'onde à un instant  $t_0$  d'une onde plane progressive  $\chi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A} \cos \Phi(\mathbf{r}, t)$  se propageant dans la direction de  $\mathbf{u}_x$ , avec  $\Phi(\mathbf{r}, t) = \omega t - kx$ . La phase de l'onde sur un de ces plans d'onde est uniforme. Ici,  $\Phi(\mathbf{r}, t_0) = -\pi$  sur le plan bleu et  $\Phi(\mathbf{r}, t_0) = 4\pi$  sur le plan jaune. Les plans d'onde sont parallèles entre eux. Le vecteur d'onde est uniforme et leur est orthogonal.

Les surfaces d'onde sont les surfaces « équi-phase ». Notons que *deux surfaces d'onde ne peuvent pas se croiser*, à l'instar des lignes de champ ou des équipotentielles tracées en électromagnétisme.

La forme des surfaces d'onde permet de classifier les ondes bi- ou tridimensionnelles. Nous étudions maintenant les deux plus importantes.

### ONDES PLANES

Nous considérons une première situation où les surfaces d'onde sont des plans. Ces plans sont parallèles entre eux, et on appelle ( $Ox$ ) la normale à ces plans d'onde. La phase  $\phi(\mathbf{r})$  ne peut, dans ce cas, dépendre que de l'abscisse  $x$ . On note  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_x$  le vecteur normal à ces plans.

Nous avons déjà rencontré ce type d'onde dans notre étude des ondes sinusoïdales progressives à une dimension. La phase d'une onde sinusoïdale qui se propage dans la direction ( $Ox$ ) s'écrit en effet  $\Phi(x, t) = \omega t - kx + \phi_0$ . Les surfaces d'onde sont donc bien des plans, en l'occurrence les plans de normale  $\mathbf{n} = \mathbf{u}_x$  (voir figure 3.3). En résumé, **les surfaces d'onde d'une onde sinusoïdale qui se propage dans la direction  $n$  sont les plans de normale  $n$** .

Si on suppose de surcroît que l'amplitude  $\mathcal{A}$  est elle-même uniforme sur les plans d'ondes, on dit alors que l'onde est une *onde plane*. Dans notre exemple précédent, cela implique que  $\mathcal{A}(\mathbf{r})$  ne dépend que de la variable  $x$ , elle ne dépend pas des deux autres coordonnées cartésiennes  $y$  et  $z$ .

#### Définition : Onde plane

*Une onde plane est une onde dont les surfaces d'onde sont des plans ET dont l'amplitude  $\mathcal{A}$  est uniforme sur un plan d'onde.*

*Autrement dit, une onde plane est une onde dont la fonction d'onde ne dépend que d'une coordonnée cartésienne et du temps.*

Une onde plane s'écrit de façon générale sous la forme

$$\underline{\chi}(x, t) = \mathcal{A}(x) e^{i[\omega t + \phi(x)]}. \quad (3.33)$$

### ONDES PLANES PROGRESSIVES

Nous supposons que l'onde plane (3.33) est progressive. Puisque  $\underline{\chi}$  ne dépend que de  $x$  et de  $t$ , nous savons alors qu'elle ne peut dépendre de la position et du temps que via un terme de la forme  $x - ct$ . En conséquence :

- Sa phase s'écrit  $\Phi(x, t) = \omega t - kx + \phi_0$  : l'onde se propage dans la direction orthogonale à ses plans d'onde ;
- Son amplitude  $\mathcal{A}$  ne dépend pas de l'espace : si elle dépendait de  $x$ , elle devrait le faire via un terme de la forme  $x - ct$  et donc dépendre du temps, ce qu'on s'était interdit.

Une onde plane progressive prend donc une forme très simple, en introduisant le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  :

#### Propriétés : Onde plane progressive

*On définit, pour une onde plane progressive qui se propage dans la direction  $\mathbf{n}$ , le vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ , où  $k$  est donné par la relation de dispersion, et qui permet d'écrire la phase de l'onde plane sous la forme*

$$\phi(x) = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_0 \quad ; \quad \mathbf{k} = k \mathbf{n} \quad , \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (3.34)$$

Une onde plane progressive de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  s'écrit

$$\underline{\chi}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_0)}. \quad (3.35)$$

Une *onde plane progressive* est aussi appelée *onde plane progressive monochromatique* (OPPM) pour insister sur le fait que sa fréquence  $\nu = \omega/2\pi$  est bien définie. On parle également d'*onde plane progressive harmonique* (OPPH).

### ONDES SPHÉRIQUES

Une autre situation importante correspond à celle où les surfaces d'onde sont des sphères. Ces sphères ne pouvant se croiser, elles sont concentriques, et on note  $O$  leur centre commun. Étant donné la symétrie des surfaces d'onde, on préfère dans ce cas travailler en coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  de centre  $O$ .

#### Définition : Onde sphérique

*On appelle onde sphérique une onde dont l'amplitude  $\mathcal{A}$  et la phase complexe  $\phi$  sont uniformes sur des sphères. Autrement dit, une onde sinusoïdale est sphérique si sa fonction d'onde ne dépend que de  $r$  et de  $t$ .*

En coordonnées sphériques, et sous cette hypothèse, l'équation de d'Alembert prend la forme

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r^2 \frac{\partial}{\partial r} \chi(r, t) \right] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \chi(r, t) = 0. \quad (3.36)$$

Pour résoudre cette équation, nous introduisons une fonction auxiliaire  $\psi(r, t) = r \times \chi(r, t)$ . En remplaçant  $\chi(r, t)$  par  $\psi(r, t)/r$  dans l'équation d'onde, on obtient

$$\frac{\partial^2 \psi(r, t)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(r, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.37)$$



Nous retrouvons une équation d'onde à une dimension dont nous connaissons les solutions générales :

$$\psi(r, t) = \psi_+(r - ct) + \psi_-(r + ct). \quad (3.38)$$

Une onde sphérique s'écrit donc de façon générale sous la forme

$$\chi(r, t) = \frac{1}{r} \psi_+(r - ct) + \frac{1}{r} \psi_-(r + ct). \quad (3.39)$$

Le premier terme correspond à une onde qui se propage dans les sens des  $r$  croissants : on dit que l'onde est *sortante*. L'onde semble en effet sortir du centre  $O$ . Cette situation correspond à la situation où l'onde est générée par une *source ponctuelle*, placée en  $O$ . Elle correspond en fait aussi à n'importe quelle source à symétrie sphérique.

Le second terme paraît plus étonnant. L'onde se propage dans le sens des  $r$  décroissants, on dit qu'elle est *entrante*. L'onde semble donc venir de toutes les directions de l'espace et converge vers un point  $O$  de l'espace. C'est une situation peu physique. Toutefois, elle permet par exemple de décrire, du moins localement, la focalisation d'une onde lumineuse derrière une lentille convergente.

Notons que l'écriture (3.39) est en fait valable pour n'importe quelle onde à symétrie sphérique. Pour une onde sinusoïdale, en notations complexes, on peut la récrire

$$\underline{\chi}(r, t) = \frac{1}{r} \mathcal{A}_+ e^{i(\omega t - kr)} + \frac{1}{r} \mathcal{A}_- e^{i(\omega t + kr)}. \quad (3.40)$$

On définit dans ce cas le vecteur d'onde comme

$$\mathbf{k} = \pm k \mathbf{u}_r \quad (3.41)$$

pour retrouver une écriture de la phase complexe sous la forme  $\Phi(r, t) = \omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ . Il faut alors noter que, contrairement aux ondes planes, le vecteur d'onde n'est pas uniforme : sa direction dépend du point d'observation. Sa norme est en revanche uniforme. Le signe, enfin, dans l'équation (3.41) détermine si l'onde sphérique est sortante ( $\mathbf{k} = +k \mathbf{u}_r$ ) ou entrante ( $\mathbf{k} = -k \mathbf{u}_r$ ).

Notons enfin dans l'équation (3.40) que l'amplitude complexe d'une onde sphérique dépend de la position : son amplitude décroît en  $1/r$ . Nous verrons par la suite que cette dépendance permet d'assurer la conservation de l'énergie.

### ONDE SPHÉRIQUE À GRANDE DISTANCE

Nous avons décrit une onde sphérique sortante comme une onde générée par une source ponctuelle placée au centre du repère  $O$ . Supposons maintenant que nous nous

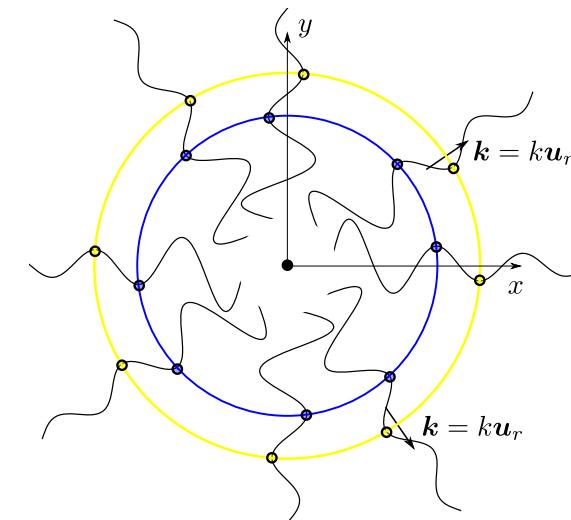


FIGURE 3.4 – Surfaces d'onde à un instant  $t_0$  d'une onde sphérique sortante  $\chi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A}/r \times \cos \Phi(\mathbf{r}, t)$  avec  $\Phi(\mathbf{r}, t) = \omega t - kr$ . Ces surfaces sont des sphères centrées sur la source de l'onde. La phase de l'onde sur une de ces sphères est uniforme. Ici,  $\Phi(\mathbf{r}, t_0) = 0$  sur la sphère bleue et  $\Phi(\mathbf{r}, t_0) = \pi$  sur la sphère jaune. Le vecteur d'onde est toujours orthogonal à ces sphères et dépend de  $\mathbf{r}$ .

plaçons « loin » de la source (voir fig. 3.5). Les surfaces d'onde sphériques nous apparaissent comme des plans tangents à la sphère au point d'observation. Une onde sphérique, vue de loin, ressemble à une onde plane.

Essayons de donner un critère quantitatif qui permette de déterminer quand cette hypothèse est valide. Plaçons donc un observateur en un point  $M$  situé à une distance  $R$  de  $O$ . La phase de l'onde au point  $M$  s'écrit

$$\phi(M) = -kOM + \phi_0 = -kR + \phi_0. \quad (3.42)$$

Supposons que cet observateur se déplace d'une distance une distance  $\delta\ell = MM' \ll R$  le long d'un axe orthogonal à  $(OM)$  pour se retrouver au point  $M'$ . Si l'onde était plane, la phase de l'onde en  $M'$  serait égale à celle de l'onde en  $M$ . La différence entre onde plane et onde sphérique tient donc à la différence de phase entre  $M$  et  $M'$ , c'est-à-dire à la différence entre  $OM = R$  et  $OM' = R + \delta R$  :

$$\delta\phi = \phi(M') - \phi(M) = -k\delta R \quad (3.43)$$

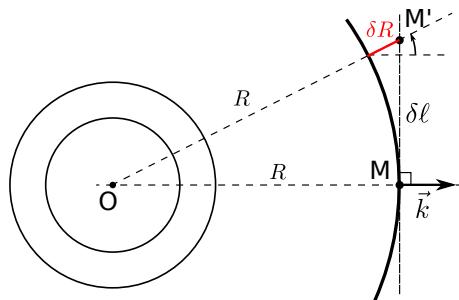


FIGURE 3.5 – Approximation d'une onde sphérique par une onde plane.

Si  $|\delta\phi| \ll 2\pi$ , cette différence de phase est négligeable, et on ne distingue plus l'onde sphérique de l'onde plane. Cette condition se récrit

$$\boxed{\delta R \ll \lambda}, \quad (3.44)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde de l'onde.

Notons que nous n'avons pas commenté la variation d'amplitude entre  $M$  et  $M'$ . Puisque l'amplitude décroît en  $1/r$ , la variation d'amplitude entre  $M$  et  $M'$  est négligeable si

$$\left| \frac{1/R}{1/(R + \delta R)} - 1 \right| \ll 1 \Rightarrow \delta R \ll R. \quad (3.45)$$

Cette condition sur l'amplitude est en général beaucoup plus facile à vérifier que la condition sur la phase (3.44) : à grande distance,  $R \gg \lambda$ .

On note enfin que la valeur de  $\delta R$  dépend du déplacement  $\delta\ell$ . On peut écrire

$$R^2 + \delta\ell^2 = (R + \delta R)^2 \approx R^2 + 2R\delta R \Rightarrow \delta\phi = -k \frac{\delta\ell^2}{2R}. \quad (3.46)$$

La condition (3.44) équivaut donc à :

$$\boxed{\delta\ell \ll \sqrt{\lambda R}}. \quad (3.47)$$

En conclusion, à grande distance ( $R \gg \lambda$ ), en se restreignant à un intervalle  $\delta\ell$  autour d'un point  $M$  tel que la condition (3.44) ou (3.47) soit vérifiée, **une onde sphérique à une structure d'onde plane** de vecteur d'onde  $\mathbf{k} = k \mathbf{e}_r = k \mathbf{OM}/OM$ . Le plan d'onde de cette onde plane est le plan tangent à la surface d'onde au point  $M$ .

### Exercices d'application 1

1. Une onde acoustique plane et progressive se propage dans la direction  $\mathbf{u}_x$ . Dans quelle direction les particules du fluide sont-elles mises en mouvement ? Écrire en notations réelles la forme générale de la fonction d'onde de l'onde déplacement.
2. Mêmes questions quand l'onde est une onde sphérique « sortante ».
3. On considère une onde acoustique dans l'air et dont l'onde de déplacement est  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A} \cos(\omega t - kz)$ . On note  $c_s$  la célérité du son.
  - (a) De quel type d'onde s'agit-il ? Est-elle progressive et si oui dans quelle direction ?
  - (b) Quelle est la relation entre  $k$  et  $\omega$  ? Donner l'expression du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Dépend-il de  $\mathbf{r}$  ?
  - (c) En supposant que la fréquence est fixée, la longueur d'onde diminue-t-elle ou augmente-t-elle quand la température augmente ?
  - (d) Donner l'équation de la surface d'onde  $\Phi(\mathbf{r}, t) = \pi/2$ . De quel type de surface s'agit-il ? Montrer qu'elle se déplace à la vitesse  $c_s$ .
4. On remplace l'onde précédente par l'onde  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A}/r \times \cos(\omega t - kr)$ .
  - (a) De quel type d'onde s'agit-il ? Donner l'expression du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . Dépend-il de  $\mathbf{r}$  ?
  - (b) Donner l'équation de la surface d'onde  $\Phi(\mathbf{r}, t) = \pi/2$ . De quel type de surface s'agit-il ? Montrer qu'elle se déplace à la vitesse  $c_s$ .

### À retenir : Section 3.2

- Équation d'onde à 3D,
- Notion de surface d'onde et de vecteur d'onde,
- Expression d'une onde plane et d'une onde sphérique,
- Structure d'onde plane à grande distance pour une onde sphérique.

### 3.3 ASPECTS ÉNERGÉTIQUES

Nous étudions maintenant la propagation de l'énergie associée à l'onde acoustique. Nous allons voir que, comme pour l'onde sur la corde, il est possible de définir l'impédance du milieu, ici une impédance acoustique.

#### 3.3.1 IMPÉDANCE ACOUSTIQUE

Nous considérons une onde sonore progressive unidimensionnelle qui se propage le long de l'axe ( $Ox$ ). L'onde de déplacement  $\Psi(x, t)$  s'écrit

$$\Psi(x, t) = \Psi_{\pm}(x \mp ct). \quad (3.48)$$

En utilisant les équations (3.8), (3.20) et (2.36), on trouve une relation entre l'onde de surpression  $\delta P_{\pm}$  et l'onde de vitesse  $\partial_t \Psi_{\pm}$  qui permet de définir *l'impédance sonore caractéristique du milieu*.

##### Impédance sonore caractéristique

*Les ondes de surpression et de vitesse d'une onde progressive unidimensionnelle sont proportionnelles. Le coefficient de proportionnalité, noté  $z$ , est l'impédance sonore caractéristique du milieu dans lequel l'onde se propage.*

$$\delta P_{\pm} = \pm z \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial t} \quad ; \quad z = \frac{1}{\chi_s c_s} = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}} = \rho_0 c_s. \quad (3.49)$$

Notons qu'un cas particulier d'onde progressive unidimensionnelle est l'onde plane progressive. Les équations (3.49) sont donc valables pour les ondes planes progressives, mais **elles ne le sont pas pour les ondes sphériques**.

La surpression  $\delta P_{\pm}$  est la force par unité de surface exercée par un élément de fluide sur son voisin. L'impédance sonore caractéristique du milieu relie donc la force entre éléments de fluide voisins et la vitesse de déplacement de l'élément de fluide, à l'instar de l'impédance mécanique de la corde vibrante introduite au chapitre précédent.

On peut récrire l'équation (3.49) sous une forme similaire à l'équation (2.79) écrite pour la corde vibrante. En notant  $\mathbf{u}_{\pm} = \pm \mathbf{u}_x$  le vecteur qui donne le sens de propagation de l'onde<sup>2</sup>, la force exercée par un élément de fluide de section  $S$  en aval de l'onde

2. Si l'onde est sinusoïdale, c'est-à-dire pour une onde plane,  $\mathbf{u}_{\pm} = \mathbf{k}/k$ .

sur un élément de fluide en amont est

$$\mathbf{F}_{\text{aval} \rightarrow \text{amont}} = -(P_0 + \delta P_{\pm})S \mathbf{u}_{\pm} = -P_0 S \mathbf{u}_{\pm} - z S \left( \frac{\partial \Psi_{\pm}}{\partial t} \mathbf{u}_x \right) \equiv \mathbf{F}_0 + \delta \mathbf{F}_{\text{aval} \rightarrow \text{amont}}, \quad (3.50)$$

où  $S$  est la section du milieu introduite au début du chapitre. Le premier terme,  $\mathbf{F}_0 = -P_0 S \mathbf{u}_{\pm}$  correspond à la force appliquée par l'élément de fluide en amont sur celui en aval à *l'équilibre*, c'est-à-dire quand il n'y a pas d'onde. Seul le second terme correspond donc à la force induite par le passage de l'onde acoustique. En notant que  $\mathbf{v}_{\pm} = (\partial_t \Psi_{\pm}) \mathbf{u}_x$  est la vitesse de déplacement d'un élément de fluide, on obtient finalement :

$$\delta \mathbf{F}_{\text{aval} \rightarrow \text{amont}} = -Z \mathbf{v}_{\pm} \quad ; \quad Z = z S. \quad (3.51)$$

On reconnaît l'équation définissant l'impédance du milieu,  $Z$ , valable, comme (3.49), pour une onde progressive unidimensionnelle *seulement*. L'impédance est proportionnelle à la section du fluide. Plus  $S$  est grande, plus il faut appliquer une force importante pour mettre en mouvement le fluide, comme on aurait pu s'y attendre. Par ailleurs, la force  $\delta \mathbf{F}_{\text{aval} \rightarrow \text{amont}}$  est bien une force opposée à  $\mathbf{v}_{\pm}$ , c'est-à-dire opposée au mouvement, comme nous l'avions vu pour la corde vibrante. C'est la force de rappel qui permet le retour à l'équilibre après le passage de l'onde.

Notons enfin que l'impédance caractéristique  $z = Z/S$ , contrairement à  $Z$ , ne dépend pas de la « géométrie » du milieu. Elle est bien *caractéristique* du milieu lui-même, elle ne dépend que de ses propriétés thermodynamiques.

#### 3.3.2 PUSSANCE ACOUSTIQUE

Pour déterminer la puissance transportée par l'onde, on peut calculer la puissance de la force  $\delta \mathbf{F}_{\text{amont} \rightarrow \text{aval}}$ . Puisque cette force s'applique sur l'élément de fluide de vitesse  $\mathbf{v}_{\pm}$ , sa puissance s'écrit

$$\mathcal{P}_{\text{amont} \rightarrow \text{aval}} = \delta \mathbf{F}_{\text{amont} \rightarrow \text{aval}} \cdot \mathbf{v}_{\pm} = -\delta \mathbf{F}_{\text{aval} \rightarrow \text{amont}} \cdot \mathbf{v}_{\pm}. \quad (3.52)$$

La puissance transportée dans le sens de propagation de l'onde s'écrit alors

$$\mathcal{P}_{\text{amont} \rightarrow \text{aval}} = z v_{\pm}^2 \times S = \frac{\delta P_{\pm}^2}{z} \times S = \pm (v_{\pm} \delta P_{\pm}) \times S. \quad (3.53)$$

Cette puissance, appelée *puissance acoustique*, calculée dans le sens de propagation de l'onde, est bien toujours positive.

On pourrait aussi utiliser les densités volumiques d'énergie pour retrouver ce résultat. La densité volumique d'énergie cinétique s'écrit

$$e_c(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)^2, \quad (3.54)$$



et on admet que la densité volumique d'énergie potentielle s'écrit

$$e_p(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \chi_s \delta P(\mathbf{r}, t)^2. \quad (3.55)$$

En utilisant les équations (3.9), (3.12) et (3.17), il est alors possible de montrer **l'équation de conservation locale de l'énergie mécanique**, avec  $e_m = e_c + e_p$  la densité volumique d'énergie mécanique :

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0 \quad ; \quad \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_\pm(\mathbf{r}, t) \delta P_\pm(\mathbf{r}, t). \quad (3.56)$$

Le vecteur  $\mathbf{j}_m$  est une *densité surfacique de puissance*. On l'appelle *intensité acoustique instantanée*.

La puissance  $\mathcal{P}_S$  transportée par l'onde à travers une surface orientée  $S$  est le **flux de l'intensité acoustique instantanée à travers  $S$**  :

$$\mathcal{P}_S = \int_S \mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.57)$$

On retrouve alors le résultat de l'équation (3.53) en calculant le flux de  $\mathbf{j}_m$  à travers la surface de section  $S$  et orientée dans le sens de propagation de l'onde, soit à travers la surface orientée  $S = S \mathbf{u}_\pm = \pm S \mathbf{u}_x$ .

À retenir

*La conservation de l'énergie mécanique pour une onde acoustique s'écrit*

$$\frac{\partial e_m}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_m = 0, \quad (3.58)$$

où le courant d'énergie  $\mathbf{j}_m$ , appelé intensité acoustique instantanée, est

$$\mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}_\pm(\mathbf{r}, t) \delta P_\pm(\mathbf{r}, t) = z v_\pm^2(\mathbf{r}, t) \mathbf{u}_\pm. \quad (3.59)$$

- Le courant d'énergie  $\mathbf{j}_m$  est toujours orienté dans le sens de propagation de l'onde, donné par  $\mathbf{u}_\pm$ . Sa norme est homogène à une puissance par unité de surface.
- La quantité  $\mathbf{j}_m \cdot d\mathbf{S}$  est la quantité d'énergie par unité de temps, ou puissance acoustique, qui traverse l'élément de surface  $d\mathbf{S}$ .

### 3.3.3 INTENSITÉ ACOUSTIQUE ET NIVEAU SONORE

Si l'on veut calculer la puissance acoustique, c'est-à-dire la puissance portée par l'onde dans le sens de propagation de l'onde,  $\mathbf{u}_\pm$ , il faut calculer le flux de  $\mathbf{j}_m$  à travers une surface  $d\mathbf{S}$  orientée dans le sens de  $\mathbf{u}_\pm$  :

$$\delta \mathcal{P}_{\text{amont} \rightarrow \text{aval}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} = \| \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) \| dS. \quad (3.60)$$

La norme de  $\mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t)$  est donc la puissance acoustique instantanée par unité de surface portée par l'onde au point  $\mathbf{r}$  et au temps  $t$ .

Pour une onde *périodique*, on s'intéresse plutôt aux *moyennes temporelles* des différentes grandeurs.

Définition : Intensité acoustique

On définit l'intensité acoustique d'une onde périodique comme la moyenne temporelle de la norme de l'intensité acoustique instantanée :

$$I(\mathbf{r}) = \langle \| \mathbf{j}_m(\mathbf{r}, t) \delta P_\pm(\mathbf{r}, t) \| \rangle_T. \quad (3.61)$$

- L'intensité acoustique est une puissance par unité de surface, elle s'exprime en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
- Pour une onde progressive, l'intensité acoustique  $I(\mathbf{r})$  est la puissance moyenne par unité de surface portée par l'onde au point  $\mathbf{r}$  dans sa direction de propagation. Elle s'écrit

$$I(\mathbf{r}) = z \langle v_\pm^2(\mathbf{r}, t) \rangle_T = \frac{\langle \delta P_\pm^2(\mathbf{r}, t) \rangle_T}{z}. \quad (3.62)$$

### ONDE PLANE SINUSOÏDALE

Considérons le cas particulier<sup>3</sup> d'une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation  $\omega$ . Le déplacement  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  s'écrit alors en notations complexes, en supposant que l'onde se propage dans le sens des  $x$  croissants,

$$\underline{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A} e^{i(\omega t - kx)}. \quad (3.63)$$

La vitesse  $v = \partial_t \Psi$  s'écrit alors  $\underline{v} = i\omega \Psi$ , soit en notations réelles

$$v(x, t) = -\omega \mathcal{A} \sin(\omega t - kx). \quad (3.64)$$

3. Mais si important.



On peut alors écrire

$$I_{\text{plane}} = \frac{1}{2} z \omega^2 \mathcal{A}^2. \quad (3.65)$$

L'intensité acoustique d'une onde plane progressive sinusoïdale est proportionnelle à  $\omega^2$  et  $\mathcal{A}^2$  et ne dépend pas de la position. En particulier, l'intensité acoustique est constante quand on se déplace le long de la direction de propagation de l'onde : l'énergie est bien conservée.

### ONDE SPHÉRIQUE SINUSOÏDALE

La situation est légèrement différente pour une onde sphérique. Dans ce cas en effet, nous avons vu que, pour une onde sortante,

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r} \mathcal{A} e^{i(\omega t - kr)}. \quad (3.66)$$

L'onde sphérique n'est pas stricto sensu une onde progressive, et les équations (3.62) ne sont donc pas utilisables. Loin de la source, l'onde sphérique a toutefois la « structure d'une onde plane », elle s'apparente à une onde progressive. À grande distance, on peut alors bien utiliser les équations (3.62) et en suivant les mêmes calculs que pour l'onde plane, on obtient

$$I_{\text{sphérique}} = \frac{1}{2} z \frac{\omega^2 \mathcal{A}^2}{r^2}. \quad (3.67)$$

On peut en fait montrer que cette formule est valable même proche de la source (voir les exercices d'application).

L'intensité acoustique, si elle est toujours proportionnelle à  $\omega^2$ , décroît maintenant en  $1/r^2$ . Plus on s'éloigne de la source, plus l'intensité diminue. Cela permet en fait d'assurer la conservation de l'énergie. On peut calculer la puissance totale portée par l'onde en calculant le flux de l'intensité acoustique instantanée à travers une surface fermée qui entoure le point source  $O$ . Le plus simple est bien sûr de considérer la sphère  $S$  de centre  $O$  et de rayon  $r$  : c'est une surface d'onde, elle est en tout point orientée dans le sens de propagation de l'onde acoustique. La puissance moyenne totale transportée par l'onde à une distance  $r$  de la source est alors directement donnée par l'intensité acoustique  $I_{\text{sphérique}}(r)$  :

$$\mathcal{P}_{\text{tot}} = \left\langle \iint_S j_m(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S} \right\rangle_T = I_{\text{sphérique}}(r) \times 4\pi r^2 = 2\pi z \omega^2 \mathcal{A}^2. \quad (3.68)$$

Cette puissance est bien indépendante de la distance à la source.

### NIVEAU SONORE

Lorsque l'on s'intéresse plus spécifiquement aux ondes sonores, et à la façon dont on les perçoit, l'intensité acoustique  $I$  n'est pas la grandeur la mieux adaptée. Il faut en effet tenir compte du fait que la réponse de notre système auditif est plus logarithmique que linéaire en  $I$ .

Définition : Niveau sonore

On définit le niveau sonore  $L$  par

$$L = 10 \log_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right), \quad (3.69)$$

où  $I_0$  est une intensité acoustique de référence prise par convention à  $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

- Le niveau sonore  $L$  est un nombre sans dimension que l'on exprime en décibels.
- L'intensité acoustique  $I_0$ , ou le niveau sonore  $L = 10 \text{ dB}$ , correspond au seuil de l'audible de l'oreille humaine pour un son de fréquence 1 kHz.

On donne quelques ordres de grandeur :

- 30 dB : le calme de la nature,
- 50 dB : une conversation courante,
- 70 dB : une rue très passante,
- 90 dB : le restaurant universitaire (aux heures de repas)
- 120 dB : décollage d'un avion à 100 m.

On qualifie en général de sons nocifs les sons de plus de 90 dB. Au-delà de 120 dB, l'oreille subit des dommages irréversibles.

Étant donné la relation entre  $I$  et  $\delta P$ , on peut aussi écrire

$$L = 20 \log_{10} \left( \frac{\delta P}{P_0} \right) \quad (3.70)$$

où  $P_0 = \sqrt{2zI_0}$  est la surpression équivalente à l'intensité de référence. L'impédance acoustique caractéristique de l'air dépend de la température, mais on peut retenir qu'elle est de l'ordre de

$$z_{\text{air}} \approx 4 \times 10^2 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}. \quad (3.71)$$



On obtient alors  $P_0 \approx 10^{-5} \text{ Pa} = 10^{-10} \text{ bar}$ . On calcule alors par exemple que la surpression engendrée par le décollage d'un avion à 100 m est de...  $10^{-4} \text{ bar}$  seulement ! Sachant que la pression atmosphérique est de l'ordre de 1 bar, on constate que dans toutes considérations pratiques  $|\delta P| \ll P_0$ . L'hypothèse de faible perturbation induite par l'onde que nous avions supposée au début du chapitre n'est donc pas contraignante et les équations trouvées décrivent très bien la propagation des ondes sonores.

### À retenir : Section 3.3

- Notion et expression de l'impédance sonore et de l'impédance sonore caractéristique,
- Lien entre ondes de pression et de vitesse pour les ondes progressives,
- Dépendance en  $1/r^2$  de l'intensité acoustique pour une onde sonore,
- Définition de la puissance et de l'intensité acoustique, niveau sonore,
- Savoir calculer un niveau sonore en dB.

### Exercices d'application 2

1. Le niveau sonore d'un avion au décollage est de 120 dB à 100 m. Comment varie le niveau sonore quand on multiplie la distance à l'avion par 10 ? À quelle distance l'onde sonore passe-t-elle sous le seuil de l'audible ?
2. Une onde plane progressive se propage dans un tube de section  $S = 1 \text{ cm}^2$  et d'axe ( $Ox$ ). On néglige les effets de bord et on note  $z = 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  l'impédance caractéristique du milieu. On suppose que l'amplitude de l'onde de déplacement est de  $1 \mu\text{m}$  et la fréquence de l'onde est de 1 kHz.
  - (a) Écrire la fonction d'onde de l'onde de déplacement en notations complexes puis donner l'expression de ondes de vitesse et de surpression. Calculer leurs amplitudes.
  - (b) Donner l'expression de la puissance acoustique de l'onde au point  $x$  et au temps  $t$  puis calculer sa moyenne temporelle.
  - (c) Calculer l'intensité acoustique de l'onde puis son niveau sonore. Dépend-il de la position dans le tube ?
3. Un haut parleur émet un son à une fréquence  $\nu = 240 \text{ Hz}$ . La masse volumique de l'air est  $\rho_0 = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et la vitesse du son est  $c_s = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
  - (a) Donner l'expression de l'onde de déplacement  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  en notations

réelles et en notations complexes. Donner la valeur de sa longueur d'onde.

- (b) À quelle distance faut-il se placer pour que l'onde émise par le haut-parleur ait la structure d'une onde plane ?
  - (c) On suppose que l'amplitude de l'onde de surpression est  $\delta P_0 = 10 \text{ Pa}$  à une distance  $d_0 = 1 \text{ m}$ . Écrire l'onde de surpression en notations complexes puis calculer l'amplitude de l'onde de déplacement à  $d_0$  et à  $d = 10 \text{ m}$  du haut-parleur.
  - (d) Calculer le niveau sonore de l'onde aux distances  $d_0$  et  $d$  du haut-parleur.
4. On considère une onde sphérique sortante dont l'onde de déplacement s'écrit

$$\underline{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathcal{A}}{r} e^{i(\omega t - kr)} \mathbf{u}_r.$$

- (a) Calculer l'onde de vitesse et l'onde de surpression associées à cette onde sphérique. On rappelle que l'onde de densité est donnée par  $\delta\rho(\mathbf{r}, t) = -\rho_0 \operatorname{div} \underline{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ .
- (b) Calculer, en notations réelles, l'intensité acoustique instantanée
- (c) En déduire l'intensité acoustique et retrouver le résultat (3.67).

## 4 BATTEMENTS, INTERFÉRENCES, RÉSONANCE

Jusqu'à présent, nous nous sommes concentrés sur l'étude de la propagation d'une onde unique dans un milieu infini. Nous nous sommes toujours placés « suffisamment loin » des bords pour ne pas avoir à en étudier les effets. Dans ce chapitre, au contraire, nous nous attacherons à comprendre quelles conséquences sur le comportement des ondes ont les *conditions aux limites* du milieu, ou plus généralement ce qu'il se passe quand le milieu de propagation n'est pas continu. Nous verrons que les multiples phénomènes étudiés impliquent la superposition de multiples ondes, phénomènes que l'on regroupe sous le terme général d'*interférences*.

### 4.1 SUPERPOSITION DE DEUX ONDES – ONDES STATIONNAIRES

Nous avons déjà énoncé au chapitre 2 le *principe de superposition* : si  $\chi_1(\mathbf{r}, t)$  et  $\chi_2(\mathbf{r}, t)$  sont deux solutions de l'équation d'onde, alors leur somme  $\alpha\chi_1(\mathbf{r}, t) + \beta\chi_2(\mathbf{r}, t)$  est aussi solution, quels que soient les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$ . Nous nous intéressons ici au cas particulier où les deux ondes  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont des ondes planes progressives sinusoïdales. Il nous permettra de mettre en évidence deux phénomènes importants : les *battements* et les *ondes stationnaires*.

On suppose pour simplifier que les deux ondes planes se propagent dans la même direction, mais pas nécessairement dans le même sens. On note ( $Ox$ ) cette direction de propagation commune et on écrit donc par la suite

$$\chi_1(x, t) = \mathcal{A}_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x + \phi_1), \quad \chi_2(x, t) = \mathcal{A}_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x + \phi_2). \quad (4.1)$$

Leur résultante est  $\chi(x, t) = \chi_1(x, t) + \chi_2(x, t)$ .

Supposons tout d'abord que les amplitudes des deux ondes sont égales,  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$ . Avec  $\Phi_i(x, t) = \omega_i t - k_i x + \phi_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  :

$$\chi = \mathcal{A} [\cos \Phi_1 + \cos \Phi_2]. \quad (4.2)$$

Il faut alors utiliser les relations trigonométriques à connaître :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right), \quad (4.3)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right), \quad (4.4)$$

$$\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right), \quad (4.5)$$

$$\sin a - \sin b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right). \quad (4.6)$$

Ici, on obtient donc pour la résultante

$$\chi = 2\mathcal{A} \cos\left(\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{2}\right). \quad (4.7)$$

#### 4.1.1 INTERFÉRENCES TEMPORELLES : BATTEMENTS

Supposons que l'on place en un point  $x_0$  de l'espace un récepteur qui enregistre l'évolution temporelle de la résultante  $\chi(x_0, t)$  des deux ondes. On écrit les phases  $\Phi_1(x_0, t)$  et  $\Phi_2(x_0, t)$  des deux ondes en ce point sous la forme

$$\Phi_i(x_0, t) = \omega_i t + \tilde{\phi}_i(x_0), \quad \tilde{\phi}_i(x_0) = \phi_i - k_i x_0 \quad i \in \{1, 2\}. \quad (4.8)$$

L'expression de la résultante fait intervenir

- la phase moyenne  $\Phi = (\Phi_1 + \Phi_2)/2$ ,
- la *différence de phase*  $\delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ .

**CAS  $\omega_1 = \omega_2$**

Si les deux ondes planes ont la même pulsation,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , la différence de phase  $\delta\Phi$  est constante et ne dépend plus que de la position. On note sa valeur  $\delta\phi(x_0)$  :

$$\delta\Phi(x_0, t) = \tilde{\phi}_2(x_0) - \tilde{\phi}_1(x_0) = \phi_2 - \phi_1 - (k_2 - k_1)x_0 \equiv \delta\phi(x_0). \quad (4.9)$$

La résultante  $\chi$  est alors elle-même une onde qui oscille à  $\omega$ , avec l'expression

$$\chi(x_0, t) = 2\mathcal{A} \cos\left[\frac{\delta\phi(x_0)}{2}\right] \cos[\omega t + \phi_0(x_0)], \quad (4.10)$$

où on a introduit la phase moyenne  $\phi_0 = (\tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_2)/2$ . On constate alors que **l'amplitude de l'onde résultante, au point  $x_0$ , ne dépend que de la différence de phase :**

$$\mathcal{A}_r(x_0) = 2\mathcal{A} \cos\left(\frac{\delta\phi}{2}\right). \quad (4.11)$$

**Ondes en phase – interférences constructives** Si les deux ondes sont en phase en  $x = x_0$ , c'est-à-dire si la différence de phase est nulle [ $\delta\phi(x_0) = 0 [2\pi]$ ], l'amplitude de la résultante est  $\mathcal{A}_r = 2\mathcal{A}$ . Les amplitudes des deux ondes s'additionnent pour donner une amplitude plus grande : on parle d'*interférences constructives*.

D'un point de vue énergétique, on note  $\mathcal{E}(x_0)$  l'énergie portée par l'onde résultante en  $x_0$  et  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$  les énergies portées par les ondes individuelles, qu'on a prises égales en supposant  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ . Puisque l'énergie  $\mathcal{E}$  portée par une onde est proportionnelle au carré de son amplitude, on déduit des relations précédentes que, si en  $x = x_0$  les ondes sont en phase,

$$\mathcal{E}(x_0) = 4 \times \mathcal{E}_1(x_0) = 2 \times [\mathcal{E}_1(x_0) + \mathcal{E}_2(x_0)]. \quad (4.12)$$

Aux positions  $x_0$  où il y a interférence constructive, ou encore aux lieux des interférences constructives, il y a plus d'énergie dans la résultante des ondes que la somme des énergies portées par chaque onde !

On parle en fait d'interférences constructives dès que  $\mathcal{E} > \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ , ce qui correspond à  $\delta\phi \in ]-\pi/2, \pi/2[$ .

**Ondes en opposition de phase – interférences destructives** On suppose maintenant que les deux ondes sont en opposition de phase en  $x = x_0$ , c'est-à-dire que  $\delta\phi(x_0) = \pi [2\pi]$ . L'amplitude de la résultante des deux ondes est maintenant nulle. Là où il y avait deux ondes, chacune avec une énergie  $\mathcal{E}_i \neq 0$ , il n'y a « plus rien » quand on somme les deux ondes. On parle d'*interférences destructives*.

On parle en fait d'interférences destructives dès que  $\mathcal{E} < \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ , ce qui correspond à  $\delta\phi \in ]\pi/2, 3\pi/2[$ .

### À retenir

L'amplitude de la résultante de deux ondes  $\chi_1$  et  $\chi_2$  de même pulsation est une onde qui a cette même pulsation et dont l'amplitude dépend de la différence de phase  $\delta\phi$  entre les deux ondes. On parle

- d'**interférences constructives** quand l'énergie de l'onde résultante  $\mathcal{E}$  est plus grande que la somme des énergies des ondes individuelles :

$$\mathcal{E} > \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

Cela correspond à  $\delta\phi \in ]-\pi/2, \pi/2[$ . L'interférence constructive est « maximale » quand les ondes sont en phase :  $\delta\phi = 0 [2\pi]$  ;

- d'**interférences destructives** quand l'énergie de l'onde résultante  $\mathcal{E}$  est plus faible que la somme des énergies des ondes individuelles :

$$\mathcal{E} < \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2.$$

Cela correspond à  $\delta\phi \in ]\pi/2, 3\pi/2[$ . L'interférence destructive est « maximale » quand les ondes sont en opposition de phase :  $\delta\phi = \pi [2\pi]$ . Dans ce cas,  $\mathcal{E} = 0$ .

### CAS $\omega_1 \approx \omega_2$

Supposons maintenant que les pulsations des deux ondes sont proches mais distinctes, soit

$$0 < |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2. \quad (4.13)$$

La résultante des deux ondes oscille à la pulsation moyenne,  $\bar{\omega}$  :

$$\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \approx \omega_1, \omega_2, \quad (4.14)$$

$$\Phi(t) = \frac{\Phi_1(t) + \Phi_2(t)}{2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \phi_0 = \bar{\omega}t + \phi_0. \quad (4.15)$$

Mais puisque  $\omega_1 \neq \omega_2$ , la différence de phase entre les deux ondes évolue lentement dans le temps à  $\omega_2 - \omega_1$  :

$$\delta\Phi(t) = \Phi_2(t) - \Phi_1(t) = (\omega_2 - \omega_1)t + \delta\phi(x_0). \quad (4.16)$$

Ainsi, en un point d'observation  $x_0$  donné, on passe régulièrement d'interférences constructives [ $\delta\Phi(x_0, t) = 0 [2\pi]$ ] à des interférences destructives [ $\delta\Phi(x_0, t) = \pi [2\pi]$ ].



Plus précisément, on peut écrire

$$\chi(x_0, t) = 2\mathcal{A} \cos \left[ \frac{\delta\omega t + \delta\phi(x_0)}{2} \right] \cos(\bar{\omega}t + \phi_0) ; \quad (4.17)$$

$$\delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad \bar{\omega} = (\omega_1 + \omega_2)/2$$

La résultante est une onde qui oscille à la pulsation moyenne  $\bar{\omega}$  et dont l'amplitude dépend du temps :

$$\mathcal{A}_r(x_0, t) = \left| 2\mathcal{A} \cos \left[ \frac{\delta\omega t + \delta\phi(x_0)}{2} \right] \right|. \quad (4.18)$$

Si l'on trace  $\chi(x_0, t)$  (voir figure 4.1), on observe bien une oscillation rapide à  $\bar{\omega}$  contenue dans une enveloppe définie par  $\mathcal{A}_r(x_0, t)$ . Puisque  $\mathcal{A}_r(x_0, t)$  est une fonction sinusoïdale du temps, on obtient une succession d'annulations et de maxima de l'amplitude de  $\chi$ , appelés respectivement *nœuds* et *ventres* d'oscillation.

Cette alternance de nœuds et de ventre est appelée *battements*. La période des battements, c'est-à-dire le temps entre deux nœuds ou deux ventres, est  $2\pi/\delta\omega$ . On dit aussi que la pulsation des battements est  $\delta\omega$ .

#### À retenir

L'interférence de deux ondes de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  proches donne lieu au phénomène de **battements** : l'amplitude  $\mathcal{A}_r$  de l'onde résultante, en un point donné, oscille à la pulsation  $\delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$ . On parle

- de **ventres des oscillations** quand l'amplitude  $\mathcal{A}_r$  est maximale. On obtient des ventres quand les deux ondes sont en phase :  $\delta\Phi = 0 [2\pi]$ ;
- de **nœuds des oscillations** quand l'amplitude  $\mathcal{A}_r$  s'annule. On n'obtient des nœuds que si les deux ondes ont la même amplitude ( $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ ) et qu'elles sont en opposition de phase :  $\delta\Phi = \pi [2\pi]$ .

#### 4.1.2 INTERFÉRENCE D'ONDES PLANES – ONDES STATIONNAIRES

Considérons un cas particulièrement important de la superposition d'ondes sinusoïdales. Les deux ondes  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont deux ondes planes de même amplitude, de même pulsation  $\omega$ , mais contra-propageantes. Autrement dit,

$$\Phi_i(x, t) = \omega t - k_i x, \quad (4.19)$$

avec  $k_1 = -k_2 = k$  qu'on suppose positif ( $k > 0$ ). On a choisi ici  $\Phi_i(x = 0, t = 0) = \phi_i = 0$  par souci de simplicité. Par un calcul similaire à la partie précédente, la

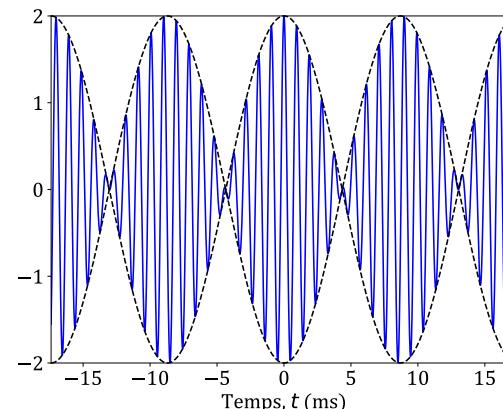


FIGURE 4.1 – Battements de deux ondes d'amplitude unité et de pulsation  $\omega_1 = 2\pi \times 1 \text{ kHz}$  et  $\omega_2 = \omega_1 + \delta\omega$  avec  $\delta\omega/(2\pi) = 115 \text{ Hz}$  et  $\delta\phi(x_0) = 0$ . En pointillés :  $\pm\mathcal{A}_r(x_0, t)$ .

résultante s'écrit alors, en notant que  $\delta\Phi(x, t) = -2kx$  et  $\bar{\omega} = \omega$ ,

$$\chi(x, t) = 2\mathcal{A} \cos(kx) \cos(\omega t). \quad (4.20)$$

La fonction d'onde de l'onde résultante est le produit de deux sinusoïdes, l'une fonction de l'espace et l'autre du temps.

La *séparation des variables* de temps et d'espace implique que l'onde résultante n'est plus une onde progressive : il s'agit d'une *onde stationnaire*.

#### Définition : onde stationnaire

On appelle onde stationnaire toute onde dont la fonction d'onde  $\chi(\mathbf{r}, t)$  dépend indépendamment du temps et de l'espace : il existe deux fonctions  $f$  et  $g$  de l'espace et du temps, respectivement, qui vérifient

$$\chi(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}) g(t). \quad (4.21)$$

Une onde plane (sinusoïdale) stationnaire s'écrit de façon générale sous une des deux formes suivantes (ici avec  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_x$ ) :

$$\chi(x, t) = \mathcal{A} \cos(kx + \phi') \sin(\omega t + \phi) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \sin(\omega t + \phi). \quad (4.22)$$

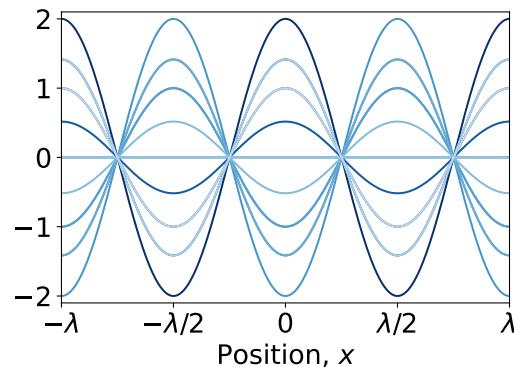


FIGURE 4.2 – Profil spatial d'une onde stationnaire enregistré à différents instants.

On trace le profil spatial de la fonction d'onde (4.20) à différents instants sur la figure 4.2. L'onde oscille en tout point avec la pulsation  $\omega$  mais son amplitude dépend de la position :

$$\mathcal{A}_r(x) = |2\mathcal{A} \cos(kx)|. \quad (4.23)$$

L'amplitude de l'onde stationnaire est donc ici une fonction périodique d'espace, de période la demi-longueur d'onde  $\pi/k = \lambda/2$ . On obtient, comme pour les battements de la partie précédente, une succession de nœuds et de ventres d'oscillations :

- si  $kx = 0 [\pi]$ , l'amplitude  $\mathcal{A}_r$  de l'onde est maximale, on a un ventre d'oscillations. Les interférences sont constructives ;
- si  $kx = \pi/2 [\pi]$ , l'amplitude  $\mathcal{A}_r$  de l'onde est nulle, on a un nœud d'oscillations. Les interférences sont destructives.

On passe ainsi d'un nœud à un ventre d'oscillation en se déplaçant de  $\lambda/4$ . La figure dessinée dans l'espace par l'interférence des deux ondes  $\chi_1$  et  $\chi_2$ , ici une alternance régulière de nœuds et de ventres, est ce qu'on appelle une *figure d'interférences*. Puisque  $\mathcal{A}_r$  ne dépend pas du temps, cette figure d'interférences est elle-même indépendante du temps : la « forme » que prend l'onde stationnaire est donc... stationnaire !

### INTERFÉRENCES ET DÉPHASAGE

Il est aussi possible de comprendre en quels points il y a interférence constructive ou destructive en reprenant le raisonnement de la section 4.1.1. En effet, le déphasage entre les deux ondes contrapropageantes s'écrit

$$\delta\Phi(x, t) = \Phi_2(x, t) - \Phi_1(x, t) = \delta\phi(x) = -2kx. \quad (4.24)$$

Les interférences constructives se retrouvent donc bien aux positions où les deux ondes individuelles sont en phase ( $kx = 0 [\pi] \Leftrightarrow \delta\phi(x) = 0 [2\pi]$ ) et les interférences destructives aux positions où les deux ondes sont en opposition de phase ( $kx = \pi/2 [\pi] \Leftrightarrow \delta\phi(x) = \pi [2\pi]$ ). Quand on se déplace de  $\lambda/4$  le long de l'axe ( $Ox$ ), le déphasage change de  $2k \times \lambda/4 = \pi$  : on passe bien d'une situation où les ondes sont en phase à une situation où elles sont en opposition de phase.

### ASPECTS ÉNERGÉTIQUES

Nous avons vu qu'aux lieux des interférences destructives, l'énergie de l'onde résultante est plus faible que la somme des énergies des ondes individuelles. Au contraire, aux lieux des interférences constructives, l'énergie de l'onde résultante est plus grande que la somme des énergies des ondes individuelles. Et sur l'ensemble de l'onde ?

L'énergie portée par les ondes individuelles est proportionnelle au carré de l'amplitude de ces ondes, soit  $\mathcal{A}_i^2$ . L'amplitude (4.23) de l'onde résultante dépendant de la position de façon périodique, on calcule la moyenne de son carré sur une de ses périodes, la longueur d'onde par exemple, pour estimer l'énergie qu'elle porte :

$$\langle \mathcal{A}_r^2 \rangle_\lambda = \langle 4\mathcal{A}^2 \cos^2 kx \rangle_\lambda = 2\mathcal{A}^2. \quad (4.25)$$

En moyenne, l'énergie portée par l'onde résultante est donc bien la somme des énergies des ondes individuelles. L'énergie est conservée dans le processus d'interférences entre les ondes. Au lieu d'être uniformément répartie comme dans le cas d'une onde sinusoïdale progressive, elle se retrouve inégalement répartie entre les zones d'interférences constructives et celles d'interférences destructives.

### 4.1.3 VITESSE DE GROUPE – PAQUETS D'ONDE

Supposons à nouveau que les deux ondes ont des pulsations différentes mais relativement proches ( $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$ ). Les deux ondes sont maintenant copropageantes, et nous pouvons écrire  $k_1 \approx k_2$ . On introduit comme précédemment la pulsation moyenne  $\bar{\omega}$  et la différence  $\delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ , ainsi que le vecteur d'onde moyen  $\bar{k} = (k_1 + k_2)/2$  et la différence  $\delta k = k_2 - k_1$ . On peut montrer que l'onde résultante s'écrit alors

$$\chi(x, t) = \mathcal{A}_r(x, t) \cos(\bar{\omega}t - \bar{k}x), \quad \mathcal{A}_r(x, t) = 2\mathcal{A} \cos\left(\frac{\delta\omega t - \delta k x}{2}\right). \quad (4.26)$$

Elle prend donc une forme similaire à celle de l'onde stationnaire (4.22) : elle est le produit

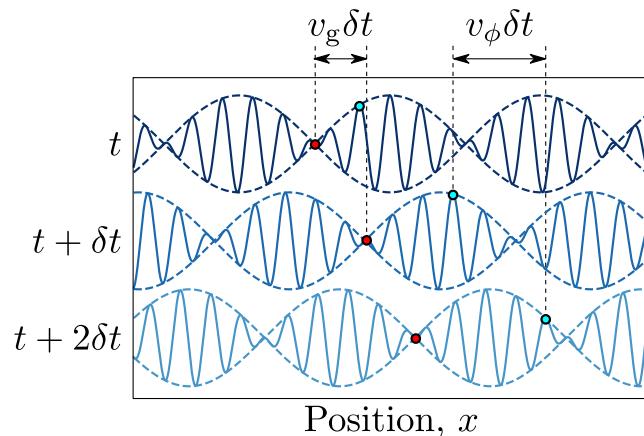


FIGURE 4.3 – Interférences de deux ondes planes sinusoïdales dans un milieu dispersif : les oscillations rapides et l'enveloppe se propagent à des vitesses différentes : le point rouge repère un nœud de l'enveloppe alors que le point bleu repère un maximum des oscillations rapides. Ces deux points ne se déplacent pas à la même vitesse.

- d'une onde  $\cos(\bar{\omega}t - \bar{k}x)$  qui oscille rapidement dans le temps et dans l'espace, quasi identique aux ondes individuelles, et qui se propage à la vitesse de phase moyenne,  $\bar{v}_\phi = \bar{\omega}/\bar{k}$ ,
- et d'une onde  $\mathcal{A}_r(x, t)$  qui oscille lentement dans le temps et dans l'espace et qui se propage à la vitesse

$$v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k}. \quad (4.27)$$

L'amplitude  $\mathcal{A}_r(x, t)$  prend donc la forme d'une onde progressive : les nœuds et ventres d'amplitude ne sont plus fixes mais se déplacent à la vitesse  $v_g$ . C'est la vitesse de déplacement de la résultante des ondes sinusoïdales  $\chi_1$  et  $\chi_2$ , la vitesse de déplacement du groupe<sup>1</sup> d'ondes sinusoïdales. Dans la limite où  $|\delta\omega| \ll \omega_1, \omega_2$  et  $|\delta k| \ll |k_1|, |k_2|$ ,  $v_g$  se récrit

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (4.28)$$

On appelle cette vitesse la *vitesse de groupe*.

1. Un petit groupe de deux ondes seulement mais un groupe tout de même.

## VITESSE DE GROUPE ET VITESSE DE PHASE

L'expression obtenue pour la vitesse de groupe  $v_g$  est analogue à celle de la vitesse de phase  $v_\phi$ . Supposons tout d'abord que la propagation de l'onde n'est pas dispersive, c'est-à-dire que  $v_\phi$  ne dépend pas de la pulsation  $\omega$  :  $v_\phi = \omega/k = c$ . Dans ce cas,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c = v_\phi. \quad (4.29)$$

**Dans un milieu non dispersif, les vitesses de groupe et de phase sont égales.**

Dans un milieu *dispersif* en revanche, la vitesse de groupe est a priori différente de la vitesse de phase. Si l'on trace le profil spatial de la résultante  $\chi(x, t)$  à différents instants (voir figure 4.3), on constate dans le temps un décalage entre l'enveloppe, qui se propage à  $v_g$ , et les oscillations rapides de l'onde, qui se propagent à  $v_\phi$ . Plus précisément, la vitesse de phase correspond à la vitesse de déplacement de maxima ou de minima locaux de l'onde, autrement dit la vitesse de déplacement de la phase  $\Phi(x, t) = \bar{\omega}t - \bar{k}x$ . La vitesse de groupe, à contrario, correspond à la vitesse de déplacement de l'amplitude  $\mathcal{A}_r(x, t)$  de l'onde résultante. Puisque l'énergie portée par l'onde est reliée à l'amplitude  $\mathcal{A}_r$ , la vitesse de groupe est aussi la vitesse de propagation de l'énergie.

### À retenir

Dans un milieu non-dispersif, la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont égales à la célérité des ondes dans le milieu :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = c = \frac{d\omega}{dk} = v_g. \quad (4.30)$$

Dans un milieu dispersif, où  $v_\phi$  dépend de  $\omega$ , les deux vitesses sont en général distinctes. On retient alors que

- la vitesse de phase  $v_\phi$  est la vitesse de propagation de la phase  $\Phi(x, t)$  de l'onde résultante ;
- la vitesse de groupe  $v_g$  est la vitesse de propagation de l'amplitude  $\mathcal{A}_r(x, t)$  de l'onde résultante et de son énergie.

## PAQUET D'ONDE

Un *paquet d'onde* est une superposition d'un nombre infini d'ondes sinusoïdales. Considérons par exemple la somme des ondes de pulsations  $\omega$  comprises entre  $\bar{\omega} -$

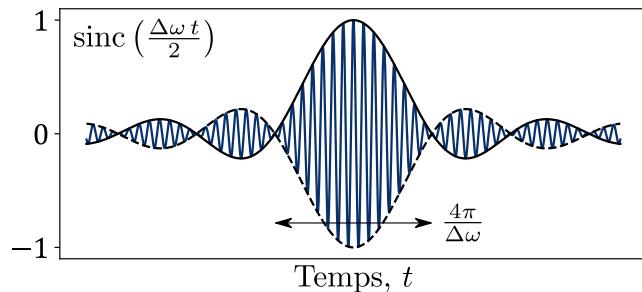


FIGURE 4.4 – Profil temporel d'un paquet d'onde d'amplitude un sinus cardinal.

$\Delta\omega/2$  et  $\bar{\omega} + \Delta\omega/2$ . En notations complexes, la résultante s'écrit

$$\underline{\chi}(x, t) = \int_{\bar{\omega} - \Delta\omega/2}^{\bar{\omega} + \Delta\omega/2} d\omega A e^{i[\omega t - k(\omega)x]}. \quad (4.31)$$

Dans un milieu non dispersif, pour lequel  $k(\omega) = \omega/c$ , on a alors

$$\underline{\chi}(x, t) = \mathcal{A} \operatorname{sinc} \left[ \frac{\Delta\omega(t - x/c)}{2} \right] e^{i\bar{\omega}(t - x/c)}, \quad (4.32)$$

où  $\mathcal{A} = A\Delta\omega$  et où l'on a introduit la fonction *sinus cardinal*

$$\operatorname{sinc} u = (\sin u)/u. \quad (4.33)$$

Cette fonction est maximale égale à 1 en  $u = 0$  et s'annule une première fois en  $u = \pm\pi$ . On dit que la largeur de son lobe principal est de  $2\pi$  (voir figure 4.4).

Ici, le paquet d'onde est donc une onde sinusoïdale à la pulsation moyenne  $\bar{\omega}$  modulée par une amplitude qui prend la forme d'un sinus cardinal de largeur temporelle  $\Delta t = 4\pi/\Delta\omega$ . L'amplitude du paquet d'onde, comme pour la somme de deux ondes vue au paragraphe précédent, est une onde progressive, ici à la vitesse  $c$ , dont la forme ne change pas au cours de la propagation. Dans un milieu non dispersif, le paquet d'onde se déplace sans se déformer.

Si les ondes sinusoïdales sont sommées avec des poids différents, c'est-à-dire que la paramètre  $A$  dans l'équation (4.31) est maintenant fonction de  $\omega$ , l'amplitude peut prendre d'autres formes qu'un sinus cardinal. On trace par exemple figure 4.5a un paquet d'onde gaussien, dont l'amplitude  $\mathcal{A}_r(x, t)$  est une fonction gaussienne qui se propage à la vitesse  $c$ .

Dans un milieu dispersif, on ne peut plus simplement remplacer  $k(\omega)$  par  $\omega/c$  dans l'équation (4.31). Nous pouvons toutefois faire un développement limité de  $k$  autour

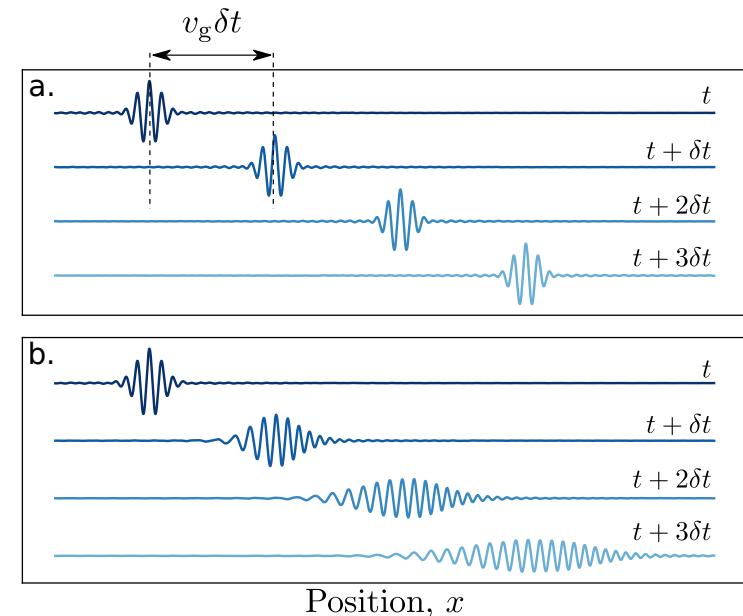


FIGURE 4.5 – Propagation d'un paquet d'onde gaussien dans un milieu peu dispersif (a.) et très dispersif (b.).

de  $\bar{\omega}$  :

$$\begin{aligned} k(\omega) &\approx k(\bar{\omega}) + \frac{dk}{d\omega}(\bar{\omega}) \times (\omega - \bar{\omega}) + \frac{1}{2} \frac{d^2k}{d\omega^2}(\bar{\omega}) \times (\omega - \bar{\omega})^2 \\ &\approx k(\bar{\omega}) + \frac{\omega - \bar{\omega}}{v_g(\bar{\omega})} - \frac{1}{2} \frac{dv_g}{d\omega}(\bar{\omega}) \times \left[ \frac{\omega - \bar{\omega}}{v_g(\bar{\omega})} \right]^2. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Dans un milieu *peu dispersif*, autrement dit si la vitesse de groupe dépend peu de  $\omega$ , on peut négliger le dernier terme dans la somme (4.34). En reprenant le calcul ci-dessus, on obtient alors

$$\underline{\chi}(x, t) = \mathcal{A} \operatorname{sinc} \left[ \frac{\Delta\omega(t - x/v_g)}{2} \right] e^{i\bar{\omega}(t - x/v_\phi)}, \quad (4.35)$$

où les vitesses de phase  $v_\phi$  et de groupe  $v_g$  sont calculées en  $\omega = \bar{\omega}$ . On retrouve bien ici le fait que le paquet d'onde (ou son amplitude) se propage à la vitesse de groupe, alors que les oscillations rapides à  $\bar{\omega}$  se propagent à la vitesse de phase. Dans un milieu peu dispersif, le paquet d'onde se propage sans se déformer.

Dans un milieu dispersif ou très dispersif, enfin, on ne peut plus négliger le terme en  $dv_g/d\omega$  dans (4.34). Autrement dit, la vitesse de groupe elle-même varie trop sur l'intervalle  $[\bar{\omega} - \Delta\omega, \bar{\omega} + \Delta\omega]$  pour pouvoir la considérer comme constante. Il faudrait subdiviser le paquet d'onde comme la somme de paquets d'onde sur des intervalles  $\delta\omega$  suffisamment petits pour que leurs propagations se fassent à vitesse (de groupe) constante. Tous ces sous-paquets se propagent à des vitesses différentes, menant à un *étalement du paquet d'onde* dans le temps (voir figure 4.5b).

#### À retenir : Section 4.1

- Calculer la résultante de deux ou plusieurs ondes, savoir calculer la figure d'interférences associée,
- Condition d'obtention d'interférences destructives ou constructives,
- Définition des battements entre deux ondes, savoir reconnaître les nœuds et les ventres,
- Définition et écriture d'une onde stationnaire, condition d'obtention,
- Définition des vitesses de phase et de groupe, connaître la différence entre ces deux vitesses.

#### Exercices d'application 1

1. Parmi les ondes suivantes, lesquelles sont stationnaires ?
  - (a)  $\chi(x, t) = \cos(\omega t - kx) + \sin(\omega t + kx)$
  - (b)  $\chi(x, t) = \cos(\omega t - kx) + \cos(5\omega t + 5kx)$
  - (c)  $\chi(x, t) = \cos(\omega t - kx) + \sin(5\omega t + kx)$
  - (d)  $\chi(x, t) = \mathcal{A} \cos(\omega t - kx) \frac{1}{1 + (kx)^2}$
  - (e)  $\chi(x, t) = \mathcal{A} \cos(\omega t) \frac{1}{1 + (kx)^2}$
  - (f)  $\chi(x, t) = \mathcal{A} \cos(kx) \sin^2(\omega t)$
2. On considère les deux ondes  $\chi_1(x, t) = 2,0 \times \cos(1,0\pi x - 2,0\pi t)$  et  $\chi_2(x, t) = 2,0 \times \cos(1,1\pi x - 2,2\pi t)$  où les positions sont en mètre et les temps en seconde.
  - (a) Calculer la résultante  $\chi(x, t)$  et donner l'expression de son amplitude  $\mathcal{A}_r(x, t)$ .
  - (b) Pourquoi peut-on dire que l'on obtient des battements ?
  - (c) Quelle est la période spatiale de  $\mathcal{A}_r(x, t)$ ? La comparer aux longueurs d'onde de  $\chi_1$  et  $\chi_2$ .
  - (d) L'amplitude  $\mathcal{A}_r(x, t)$  est-elle progressive ? Si oui à quelle vitesse ? Quelle est la vitesse de propagation des ondes  $\chi_1$  et  $\chi_2$  ?
  - (e) En quelles positions la fonction d'onde résultante s'annule-t-elle ? Montrer que ces positions se déplacent à la vitesse de phase que l'on calculera.
  - (f) Quelle est l'amplitude de l'onde résultante en ces points si l'amplitude de l'onde  $\chi_2$  est maintenant de 3,0 au lieu de 2,0 ?
  - (g) Tracer l'allure du profil spatial de  $\chi(x, t)$  à l'instant  $t = 0$  et à l'instant  $t = 5$  s.

## 4.2 CONFINEMENT DES ONDES – RÉSONANCES

Étudions maintenant des situations où des ondes stationnaires sont naturellement générées. Nous verrons alors comment elles sont intrinsèquement reliées au concept de résonance. Dans cette étude, nous reprendrons pour support l'exemple de la propagation d'onde sur une corde vibrante, mais les concepts introduits sont généralisables aux autres ondes et notamment aux ondes sonores décrites au chapitre précédent.

On considère une corde de longueur  $L$ , initialement tendue le long de l'axe ( $Ox$ ), entre les points  $x = 0$  et  $x = L$ , et une onde de déplacement  $y(x, t)$  sur cette corde.

### 4.2.1 CONDITIONS AUX LIMITES

Pour qu'une onde stationnaire puisse être observée, il faut que deux ondes contra-propageantes soient présentes sur la corde. Il faut donc qu'une onde progressive puisse se réfléchir « quelque part ». Ce quelque part est le plus souvent une *interface* : un changement soudain des propriétés du milieu, ou plus précisément de son impédance (liaison entre deux cordes de diamètres différents par exemple). C'est le cas notamment aux *limites* du milieu : arrivée au bout de la corde, l'onde ne peut plus continuer à avancer dans le même sens et ne peut que se réfléchir.

La façon dont l'onde se réfléchit à ces extrémités dépend de ce qu'on appelle les *conditions aux limites* :

- Si la corde est pincée à son extrémité  $x = L$  ou fixée à une paroi, le déplacement de la corde  $y$  est nécessairement nul. Les conditions aux limites s'écrivent

$$y(x = L, t) = 0. \quad (4.36)$$

Pour maintenir cette condition, la paroi exerce nécessairement une force transverse, pour s'opposer au mouvement de la corde induit par l'onde. La tension transverse  $T_y(x = L, t)$  n'est donc pas nulle.

- Si la corde est laissée libre de se déplacer à son extrémité, c'est au contraire  $T_y$  qui s'annule : il n'y a pas de force de rappel transverse qui impose une valeur au déplacement  $y(x = L, t)$ . Les conditions aux limites s'écrivent alors

$$T_y(x = L, t) = 0. \quad (4.37)$$

Pour comprendre le comportement de l'onde aux limites, nous utilisons le fait que la solution générale de l'équation de propagation s'écrit

$$y(x, t) = y_+(x - ct) + y_-(x + ct). \quad (4.38)$$

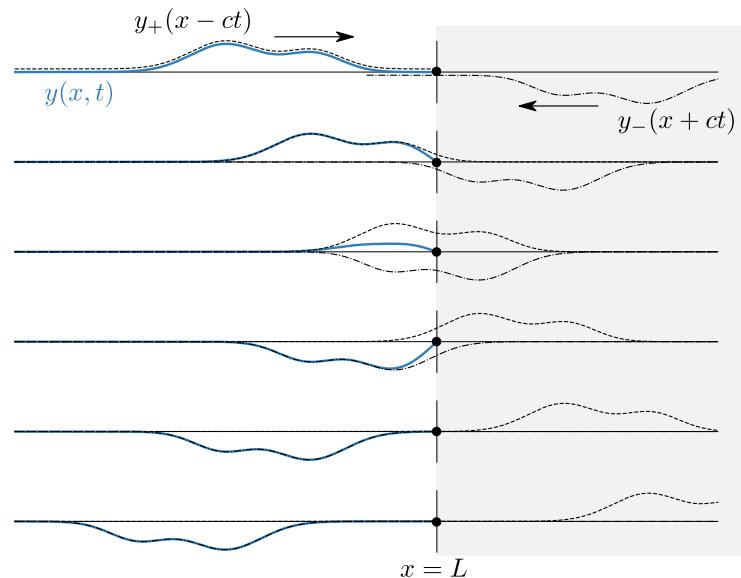


FIGURE 4.6 – Profil spatial d'une onde sur une corde d'extrémité  $x = L$  lors de sa réflexion sur une paroi fixe. La résultante  $y(x, t)$  est la somme de l'onde incidente  $y_+(x - ct)$  progressive dans le sens des  $x$  croissants et d'une onde réfléchie  $y_-(x + ct)$  progressive dans le sens des  $x$  décroissants qui semble sortir de la paroi. En  $x = L$ , on a toujours  $y_+(L, t) = -y_-(L, t)$  : la résultante  $y(L, t)$  est nulle.

Les conditions aux limites (4.36), par exemple, se réécrivent ainsi

$$y_-(L + ct) = -y_+(L - ct). \quad (4.39)$$

La fonction d'onde  $y_-$  se calcule donc en tout lieu et à tout instant par

$$\begin{aligned} y_-(x + ct) &= y_-\left\{L + c\left[t + \frac{x - L}{c}\right]\right\} = -y_+\left\{L - c\left[t + \frac{x - L}{c}\right]\right\} \\ &= -y_+(2L - x - ct). \end{aligned} \quad (4.40)$$

On en déduit que, pour une onde progressive  $y_+(x - ct)$  qui se propage vers les  $x$  croissant et en incidence sur l'extrémité  $x = L$ , avec les conditions aux limites (4.36),

- Une onde progressive  $y_-(x + ct)$  contra-propageante apparaît à l'arrivée de l'onde incidente aux limites de la corde. On dit que l'onde incidente est réfléchie à l'interface et que l'onde régressive est la *réflexion* de l'onde incidente sur la

paroi. Cette onde réfléchie apparaît comme une onde qui sort de la paroi (voir figure 4.6) alors que l'onde incidente  $y_+(x - ct)$  semble absorbée par la paroi ;

- Au niveau de la paroi, en  $x = L$ , l'onde réfléchie s'oppose exactement à l'onde incidente pour y annuler le déplacement de la corde [ $y(c = L, t) = 0$ ]. Le *coefficent de réflexion* pour l'onde de déplacement  $y(x, t)$ , défini par

$$r_y = \frac{y_-(L + ct)}{y_+(L - ct)}, \quad (4.41)$$

est alors  $r_y = -1$ .

On peut en fait définir un coefficient de réflexion pour les différentes ondes qui se propagent le long de la corde. Le coefficient de réflexion pour la vitesse  $v_y(x, t)$  est

$$r_{v_y} = \frac{v_{y,-}(L + ct)}{v_{y,+}(L - ct)} = r_y = -1, \quad (4.42)$$

et, en utilisant le fait que  $T_{y,\pm} = \mp Z v_{y,\pm}$  [voir eq. (2.77)], on montre que le coefficient de réflexion en tension est  $r_T$  est

$$r_T = \frac{T_-(L + ct)}{T_+(L - ct)} = -r_y = +1. \quad (4.43)$$

**La valeur du coefficient de réflexion dépend donc de la grandeur physique considérée.**

Avec les conditions aux limites (4.37), nous pouvons montrer de même que  $r_y = +1$  et  $r_T = -1$ . **La valeur des coefficients de réflexion dépend de la nature exacte des conditions aux limites.**

#### 4.2.2 CONDITIONS DE RÉSONANCE

Dans la section précédente, nous n'avons pris en compte qu'une seule condition aux limites, celle en  $x = L$ . Les ondes considérées étaient donc encore libres de se propager dans un milieu semi-infini  $x \leq L$ . On considère maintenant une corde maintenue à une paroi à ses deux extrémités, en  $x = 0$  et  $x = L$ . C'est une des situations les plus courantes, et qui correspond notamment à tous les instruments de musique à corde. Les conditions aux limites sont alors

$$\forall t \quad y(x = 0, t) = 0 \quad ; \quad y(x = L, t) = 0. \quad (4.44)$$

En reprenant le raisonnement précédent, on écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} y_+(L - ct) = -y_-(L + ct) \\ y_+(-ct) = -y_-(ct) \end{array} \right. \Rightarrow \quad \forall u \quad y_+(L - u) = -y_-(L + u), \quad (4.45)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_+(L - ct) = -y_-(L + ct) \\ y_+(-ct) = -y_-(ct) \end{array} \right. \Rightarrow \quad \forall u \quad y_+(-u) = -y_-(u). \quad (4.46)$$

On déduit des deux équations de droite que

$$\boxed{\forall x \quad y_\pm(x + 2L) = y_\pm(x)} \quad (4.47)$$

Les ondes  $y_\pm(x, t)$  sur la corde sont *nécessairement* des fonctions périodiques de période  $2L$ . D'un point de vue temporel, l'onde  $y_+(x - ct)$  et l'onde  $y_-(x + ct)$  sont périodiques de période  $2L/c$ , c'est-à-dire le temps de faire un aller-retour, de longueur  $2L$ , à la vitesse  $c$ .

#### FRÉQUENCES PROPRES ET MODES PROPRES

Intéressons-nous plus particulièrement aux solutions sinusoïdales. Si l'onde progressive  $y_+$  est une onde progressive sinusoïdale à la pulsation  $\omega$ , sa réflexion  $y_-$  sur l'extrémité  $x = L$  de la corde est aussi sinusoïdale à  $\omega$ . La résultante  $y = y_+ + y_-$  est alors, comme nous l'avons vu précédemment, une onde stationnaire :

$$y(x, t) = [A \cos kx + B \sin kx] \sin(\omega t). \quad (4.48)$$

Les conditions aux limites en  $x = 0$  imposent  $A = 0$ . En utilisant alors celles en  $x = L$ , on peut écrire

$$\boxed{\sin kL = 0 \quad \Leftrightarrow \quad kL = 0[\pi].} \quad (4.49)$$

Pour qu'une onde stationnaire harmonique puisse exister sur la corde, il faut donc qu'elle vérifie la condition particulière (4.49) dite *condition de résonance*. Les seules ondes sinusoïdales qui peuvent exister en *régime stationnaire* sur la corde pincée sont celles dont le vecteur d'onde s'écrit

$$k_n = n \frac{\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.50)$$

L'onde stationnaire associée s'écrit

$$\boxed{y_n(x, t) = \mathcal{A} \sin k_n x \sin \omega t.} \quad (4.51)$$

Traduite en termes de longueur d'onde, la condition de résonance s'écrit

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \Leftrightarrow \quad L = n \frac{\lambda}{2}. \quad (4.52)$$

La condition de résonance est donc remplie quand **la longueur de la corde est un multiple de la demi-longueur d'onde**.



La condition sur la longueur d'onde ou le vecteur d'onde impose enfin, via la relation de dispersion, une condition sur la pulsation  $\omega$  et la fréquence  $\nu$  :

$$\frac{\omega_n}{2\pi} = \nu_n = n \frac{c}{2L}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (4.53)$$

Les fréquences  $\nu_n$  sont appelées *fréquences propres* de la corde.

Les solutions stationnaires  $y_n(x, t)$  qui vérifient les conditions de résonance ci-dessus sont appelées *modes propres de vibration* de la corde. Elles présentent

- des nœuds aux positions  $x_p$  telles que

$$\sin k_n x_p = 0 \iff x_p = p \frac{L}{n}, \quad p \in \llbracket 0, n \rrbracket. \quad (4.54)$$

Le  $n^e$  mode propre présente donc  $n - 1$  nœuds en plus des deux nœuds aux limites ( $x = 0$  et  $x = L$ ). De façon générale, le nombre de nœuds d'un mode de vibration permet de classer les modes propres entre eux ;

- des ventres aux positions  $x_q$  telles que

$$|\sin k_n x_q| = 1 \iff x_q = \left(q + \frac{1}{2}\right) \frac{L}{n}, \quad q \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket. \quad (4.55)$$

Dans le cas particulier de la corde vibrante, l'intervalle entre deux fréquences est constant, égal à  $\Delta\nu = \nu_{n+1} - \nu_n = c/2L$ . On parle alors d'*échelle harmonique* de fréquence, et l'intervalle  $\Delta\nu$  est appelée *intervalle spectral libre*. On peut aussi dire que toutes les fréquences propres sont des multiples de la *fréquence fondamentale*, ou la fréquence du mode fondamental, c'est-à-dire le mode de plus faible fréquence :

$$\nu_n = n \times \nu_1, \quad \nu_1 = c/2L. \quad (4.56)$$

On dit que les modes sont des *harmoniques* du mode fondamental. Par exemple, le mode  $n = 2$  est la première harmonique, de fréquence double de la fréquence fondamentale, le mode  $n = 3$  la deuxième harmonique...

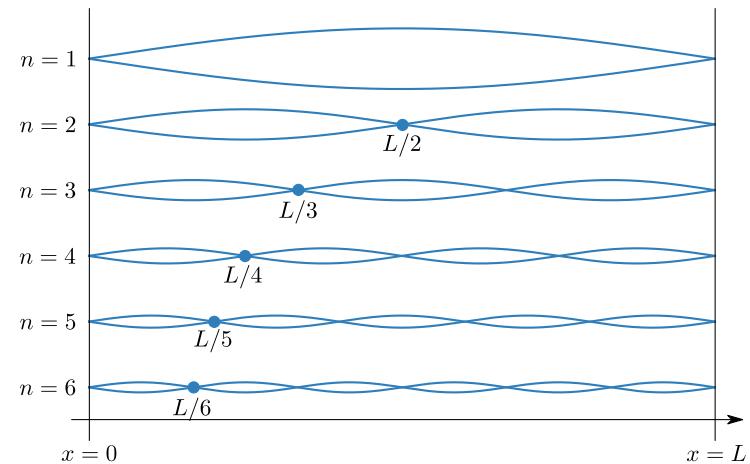


FIGURE 4.7 – Profils spatiaux des 6 premiers modes propres d'une corde vibrante pincée à ses extrémités. Le mode  $n$  présente  $n - 1$  nœuds sur la corde (hors conditions aux limites) et  $n$  ventres aux positions  $p \times L/n$  et  $(q + 1/2) \times L/n$ , respectivement.

#### À retenir : Modes propres de la corde vibrante

Les modes propres d'un résonateur sont les solutions stationnaires et harmoniques qui vérifient les conditions aux limites du résonateur. On repère les modes propres par un indice  $n$  entier.

Pour une corde pincée de longueur  $L$ , dont les conditions aux limites sont  $y(0, t) = y(L, t) = 0$ , la condition de résonance est vérifiée quand la longueur de la corde  $L$  est un multiple de la demi-longueur d'onde  $\lambda_n$  :

$$k_n = n \times \frac{\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}^* \iff L = n \times \frac{\lambda_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

La fonction d'onde d'un mode propre s'écrit de façon générale

$$y_n(x, t) = \mathcal{A} \sin k_n x \sin \omega_n t.$$

Pour un milieu non dispersif, les fréquences propres sont toutes multiples, ou des harmoniques, de la fréquence du fondamental

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \times \nu_1 = n \times \frac{c}{2L}.$$

### 4.2.3 DÉCOMPOSITION SPECTRALE

#### NOTES DE MUSIQUE

Le concept d'harmoniques est particulièrement important en musique et dans la définition des gammes. Par exemple, une octave est l'intervalle séparant une note donnée et sa première harmonique. Ainsi, comme la fréquence du « La3 » est de 440 Hz, la fréquence du « La4 » est de  $2 \times 440 = 880$  Hz. De façon générale, cette régularité dans les fréquences produites par la corde pincée est précisément ce qui distingue la musique... du bruit. Une note de musique correspond à un motif particulier qui se répète périodiquement, alors qu'une variation irrégulière de la position de la corde est qualifiée de bruit.

Une note de musique, toutefois, ne correspond pas nécessairement à un motif sinusoïdal parfait. On caractérise de façon générale une note par :

- sa *hauteur* : c'est la fréquence fondamentale de la note, la fréquence du motif périodique qu'est la note,
- son *intensité* : c'est l'amplitude du changement induit par l'onde, typiquement l'amplitude du changement de pression de l'air,
- son *timbre* : c'est la forme exacte du motif sonore. Si c'est une sinusoïde, on dit que la note est pure. Le timbre est ce qui distingue un instrument de musique d'un autre.

Ces trois caractéristiques dépendent non seulement des propriétés de la corde, c'est-à-dire du résonateur, et au premier chef de sa longueur  $L$ , mais aussi de la façon dont la note est jouée. Nous verrons au prochain paragraphe comment, à partir de la donnée des modes propres, nous pouvons retrouver l'évolution temporelle d'une onde sur la corde connaissant uniquement les conditions initiales, soit la façon dont nous avons excité la corde.

#### SÉRIE DE FOURIER

On considère une onde quelconque  $y(x, t)$  sur la corde pincée à ses extrémités. Nous savons que  $y(x, t) = y_+(x - ct) + y_-(x + ct)$  et que ces deux ondes sont nécessairement périodiques en espace de période  $2L$  et en temps de période  $T = 2L/c$ . En un point  $x$  quelconque de la corde,  $F(t) = y(x, t)$  est donc une fonction périodique de période  $T$ , dont nous pouvons écrire la *décomposition en série de Fourier* de fréquence fondamentale  $1/T$ .

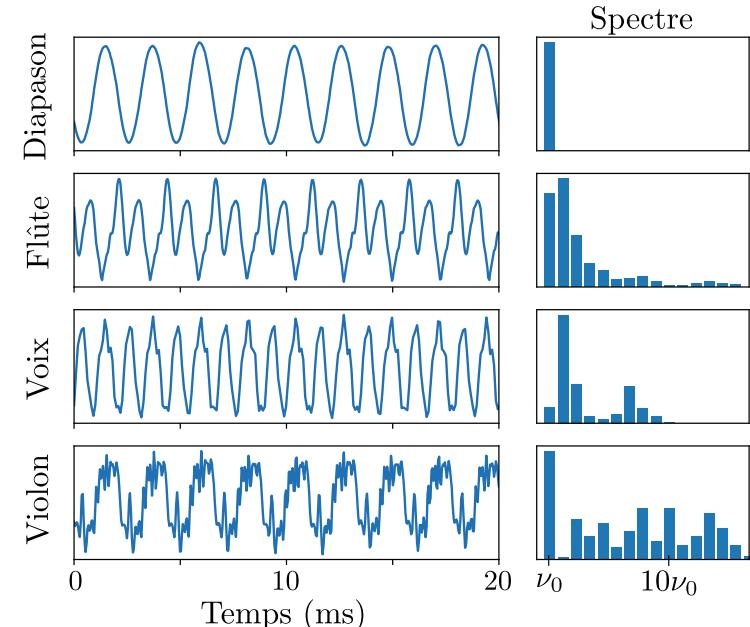


FIGURE 4.8 – Motif temporel et spectre d'un La3 ( $\nu_0 = 440$  Hz) produit par un diapason, une flûte, une chanteuse et un violon [d'après amath.colorado.edu (M. R. Petersen)].

#### Décomposition en série de Fourier

Toute fonction périodique (et physique, donc suffisamment de fois dérivable)  $F(t)$  de période  $T$  peut s'écrire comme une série, dite *série de Fourier*, de la forme

$$F(t) = a_0 + \sum_n b_n \cos(\omega_n t) + c_n \sin(\omega_n t), \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}. \quad (4.57)$$

La décomposition s'étend aux fonctions  $F(t)$  définies uniquement sur un intervalle de longueur  $T$ , par exemple  $[0, T]$ .

Les coefficients  $a_0$ ,  $b_n$  et  $c_n$  sont les *coefficients de Fourier* de  $F(t)$ . En utilisant les relations (2.114), on peut montrer que

$$\begin{cases} a_0 = \langle F(t) \rangle_T, \\ b_n = 2 \langle F(t) \times \cos(\omega_n t) \rangle_T \end{cases}; \quad c_n = 2 \langle F(t) \times \sin(\omega_n t) \rangle_T. \quad (4.58)$$

$$(4.59)$$

Les coefficients de décomposition de  $y(x, t)$  dépendent a priori de  $x$ , et on écrit

$$y(x, t) = a_0(x) + \sum_n b_n(x) \cos(\omega_n t) + c_n(x) \sin(\omega_n t), \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{T}. \quad (4.60)$$

Le coefficient  $a_0(x)$ , de fréquence nulle, correspond à la moyenne temporelle de  $y(x, t)$ , prise nulle pour une onde de façon générale. Les coefficients  $b_n(x)$  et  $c_n(x)$ , quant à eux, sont contraints par les conditions aux limites  $y(0, t) = y(L, t) = 0$ . Finalement, on obtient l'écriture générale de  $y(x, t)$  sous la forme

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t). \quad (4.61)$$

Les coefficients  $\mathcal{B}_n \sin k_n x$  et  $C_n \cos k_n x$  sont les *coefficients de Fourier* de  $F(t) = y(x, t)$ , le profil temporel de l'onde évalué en un lieu donné. On voit surtout ici réapparaître tous les modes propres de la corde vibrante ! L'écriture de  $y(x, t)$  sous la forme de cette série est appelée la *décomposition spectrale* de  $y(x, t)$ .

#### Décomposition spectrale des solutions de l'équation d'onde

*La solution générale de l'équation d'onde dans un résonateur s'écrit comme la somme pondérée (ou l'interférence) de tous ses modes propres.*

Pour la corde pincée, on obtient l'une des deux écritures suivantes :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n). \quad (4.62)$$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t). \quad (4.63)$$

Pour une note de musique, la fréquence  $\nu_1$  est la hauteur de la note produite et son timbre correspond à la donnée des coefficients  $\mathcal{A}_n$ . Si seul  $\mathcal{A}_1$  est non nul, la note ou le timbre est « pur ». Si au contraire plusieurs coefficients  $\mathcal{A}_n$  sont non nuls alors le timbre est dit « riche » (voir figure 4.8). La donnée des coefficients  $\mathcal{A}_n$  en fonction de la fréquence  $\nu_n$  est le *spectre* de la fonction d'onde.

Les coefficients  $\mathcal{A}_n$  et  $\phi_n$  ou  $\mathcal{B}_n$  et  $C_n$  sont donnés par les *conditions initiales*. On peut par exemple les retrouver à partir du déplacement  $y(x, t = 0)$  et de la vitesse de

déplacement  $\partial_t y(x, t = 0)$  de la corde à l'instant initial. Ils s'écrivent

$$y(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n \sin k_n x \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n C_n \sin k_n x. \quad (4.64)$$

Les coefficients  $\mathcal{B}_n$  et  $\omega_n C_n$  sont donc les coefficients de la décomposition en série de Fourier, de de fréquence (spatiale) fondamentale  $k_1/(2\pi) = 1/(2L)$ , des fonctions  $y(x, t = 0)$  et  $\partial_t y(x, t = 0)$ , respectivement :

$$\mathcal{B}_n = \frac{2}{L} \int_0^L y(x, t = 0) \sin k_n x \, dx, \quad \omega_n C_n = \frac{2}{L} \int_0^L \frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) \sin k_n x \, dx.$$

Si l'on préférerait l'écriture (4.62) et les coefficients  $\mathcal{A}_n$  et  $\phi_n$ , on utilise alors les relations

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{A}_n \cos \phi_n, \quad C_n = -\mathcal{A}_n \sin \phi_n. \quad (4.65)$$

#### 4.2.4 ASPECTS ÉNERGÉTIQUES

Finissons cette étude en nous intéressant à l'énergie portée par l'onde sur la corde. L'expression de la densité linéaire d'énergie mécanique s'exprime sur la corde comme [voir équation (2.87)]

$$e_m(x, t) = \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2. \quad (4.66)$$

Pour une onde sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $\mathcal{A} = 2\pi/T$ , nous avions montré que la moyenne de  $e_m$  se récrit

$$\langle e_m \rangle_T = \frac{1}{2} \frac{Z\omega^2}{c} \mathcal{A}^2. \quad (4.67)$$

Ici, plusieurs pulsations et donc plusieurs périodes  $T_n$  interviennent dans l'expression de la fonction d'onde (4.63). On calcule les moyennes  $\langle (\partial_t y)^2 \rangle_{T_1}$  et  $\langle (\partial_x y)^2 \rangle_{T_1}$  sur la plus longue de ces périodes, c'est-à-dire  $T_1$ . Ce calcul implique des termes proportionnels à  $\mathcal{B}_n^2$  ou  $C_n^2$  mais aussi des *termes croisés* en  $\mathcal{B}_n \mathcal{B}_m$ ,  $C_n C_m$  ou  $\mathcal{B}_n C_m$  avec  $m \neq n$ . On peut toutefois montrer que **tous les termes croisés sont de moyenne nulle**. Ainsi, l'énergie prend la forme simple

$$\langle e_m \rangle_{T_1} = \frac{1}{2} \frac{Z}{c} \sum_n \omega_n^2 \mathcal{B}_n^2 + \omega_n^2 C_n^2 = \frac{1}{2} \frac{Z}{c} \sum_n \omega_n^2 \mathcal{A}_n^2. \quad (4.68)$$

Pour calculer l'énergie portée par l'onde, il suffit donc de **sommer les énergies continues dans chacun des modes propres** de la corde.



## Exercices d'application 2

1. On joue une note sur une corde de piano pour laquelle la célérité des ondes est  $c = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . On obtient dans le spectre de la note jouée les fréquences 262 Hz, 524 Hz et 786 Hz. Quelle est la longueur de la corde ?
2. Une corde de guitare est désaccordée : la hauteur de la note jouée est trop faible. Faut-il augmenter ou réduire la tension de la corde pour accorder la guitare ?
3. Justifier pourquoi les cordes les plus fines d'une guitare sont celles qui jouent les notes les plus aiguës. Sur une harpe dont les cordes ont toutes des longueurs différentes, sur quelles cordes sont jouées les notes les plus graves ?
4. Calculer l'onde de tension  $T_{y,n}(x, t)$  des modes propres  $y_n(x, t)$  d'une corde fixée à ses deux extrémités, sachant que la corde a été tendue avec la tension  $T_0$ . Dessiner sur un même dessin le profil spatial de  $y_n(x, t)$  et de  $T_{y,n}(c, t)$  pour les trois premiers modes propres.
5. On joue une note sur une corde de longueur  $L$  fixée à ses deux extrémités. La célérité des ondes sur la corde est  $c$ , la tension de la corde est  $T_0$ . L'onde de déplacement  $y(x, t)$  prend la forme de l'équation (4.63).
  - (a) On enregistre le spectre de  $y(x_0, t)$  en différentes positions  $x_0$ . En quels endroits l'amplitude de la composante spectrale de fréquence  $\nu_3 = 3 \times \nu_1$  est-elle toujours nulle ?
  - (b) Calculer l'expression de l'onde de tension  $T_y(x, t)$ . Que peut-on dire de la composante spectrale de fréquence  $\nu_3$  pour l'onde de tension aux lieux trouvés à la question précédente ?
6. On suppose qu'une corde de longueur  $L$  est libre de se déplacer à ses deux extrémités. Écrire les conditions aux limites en  $x = 0$  et  $x = L$  sur l'onde de tension  $T_y(x, t)$  et en déduire, sans calcul, l'expression des modes propres  $T_{y,n}(x, t)$  pour ces conditions aux limites. Calculer ensuite l'expression de l'onde de déplacement  $y_n(x, t)$  pour ces modes propres.
7. On considère une corde de longueur  $L$  fixée à ses deux extrémités et pour laquelle la relation de dispersion s'écrit  $\omega(k) = k c + \beta(k c)^2$  où  $\beta$  est une constante. Quelles sont les longueurs d'onde  $\lambda_n$  et les fréquences  $\nu_n$  des modes propres de la corde ? L'échelle des fréquences est-elle harmonique ?

## 4.3 RÉFLEXION ET TRANSMISSION À UNE INTERFACE

Dans la partie précédente, les conditions aux limites étaient des conditions aux limites strictes, où le déplacement ou la tension de la corde s'annulaient. On s'intéresse maintenant à une situation plus générale : l'interface entre deux milieux de natures différentes. En l'occurrence, considérons une onde progressive sinusoïdale en incidence à la jonction entre deux cordes de masses linéaires  $\mu_1$  et  $\mu_2$  différentes. La célérité des ondes est donc a priori différente sur les deux cordes, on les note  $c_1$  et  $c_2$ . On note de même  $Z_1$  et  $Z_2$  les impédances caractéristiques des deux cordes.

Contrairement aux cas précédents, une onde dite *transmise* peut exister de l'autre côté de l'interface. Trois ondes sont donc à considérer :

- l'onde incidente  $y_i(x - c_1 t)$  progressive sur la corde de masse linéaire  $\mu_1$ ,
- l'onde réfléchie  $y_r(x + c_1 t)$  régressive sur la corde de masse linéaire  $\mu_1$ ,
- l'onde transmise  $y_t(x - c_2 t)$  progressive sur la corde de masse linéaire  $\mu_2$ .

Nous obtenons une première condition aux limites en écrivant l'égalité du déplacement de la corde de part et d'autre de l'interface, qu'on place en  $x = 0$  pour simplifier les écritures :

$$y_i(-c_1 t) + y_r(c_1 t) = y_t(-c_2 t). \quad (4.69)$$

On note par ailleurs, comme au chapitre 2,  $T_{1,2}(x, t)$  la tension de la corde définie comme la force exercée par l'élément de corde centré en  $x$  sur l'élément de corde précédent, donc centré en  $x - dx$ . La seconde condition aux limites traduit le principe d'action/réaction entre le dernier élément de corde 1 (en  $x = 0^-$ ) et le premier élément de la corde 2 (en  $x = 0^+$ ). Cela revient à écrire

$$T_1(0^-) = T_2(0^+), \quad (4.70)$$

où la tension  $T_1$  est engendrée par les ondes  $y_i$  et  $y_r$  et la tension  $T_2$  par l'onde  $y_t$  :

$$T_1(x, t) = T_i(x, t) + T_r(x, t) = T_{0,1} \mathbf{u}_x + [T_{y,i}(x, t) + T_{y,r}(x, t)] \mathbf{u}_y \quad (4.71)$$

$$T_2(x, t) = T_t(x, t) = T_{0,2} \mathbf{u}_x + T_{y,t}(x, t) \mathbf{u}_y. \quad (4.72)$$

La relation (4.70) implique, comme il se doit, que la tension en l'absence d'onde est la même dans les deux cordes :  $T_{0,1} = T_{0,2}$ . Le rapport des célérités est alors

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}. \quad (4.73)$$

On peut aussi utiliser la relation (2.79) entre surtension, impédance et vitesse pour trouver une autre relation sur les ondes de déplacement. En effet, pour une onde progressive, comme c'est le cas pour les trois ondes considérées ici,

$$\mathbf{F}_{\text{aval} \rightarrow \text{amont}} = -Z \mathbf{v}_y, \quad (4.74)$$



où  $\mathbf{F}_{\text{aval} \rightarrow \text{amont}}$  est la force de tension uniquement due à l'onde. Les ondes incidentes et transmises se propagent dans le sens de  $+u_x$  alors que l'onde réfléchit se propage dans le sens de  $-u_x$ . La relation précédente s'écrit donc pour les trois ondes :

$$+T_i(x, t) = -Z_1 \frac{\partial y_i}{\partial t}, \quad -T_r(x, t) = -Z_1 \frac{\partial y_r}{\partial t}, \quad T_t(x, t) = -Z_2 \frac{\partial y_t}{\partial t}. \quad (4.75)$$

On obtient finalement la relation sur les vitesses :

$$Z_1 \frac{\partial y_1}{\partial t} - Z_1 \frac{\partial y_r}{\partial t} = Z_2 \frac{\partial y_t}{\partial t}. \quad (4.76)$$

En passant en notations complexes pour les ondes, les deux conditions aux limites (4.69) et (4.76) prennent la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_i e^{i\omega t} + \mathcal{A}_r e^{i\omega t} = \mathcal{A}_t e^{i\omega t} \\ i\omega Z_1 [\mathcal{A}_i e^{i\omega t} - \mathcal{A}_r e^{i\omega t}] = i\omega Z_2 \mathcal{A}_t e^{i\omega t}. \end{array} \right. \quad (4.77)$$

$$(4.78)$$

La résolution du système d'équation permet d'obtenir les coefficients de réflexion et de transmission *en amplitude* pour l'onde de déplacement :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\mathcal{A}_r}{\mathcal{A}_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ \tau &= \frac{\mathcal{A}_t}{\mathcal{A}_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

La forme des coefficients ainsi trouvée est très générale, et nous la retrouverons dans beaucoup de situations physiques, qu'il s'agisse d'ondes sonores ou d'ondes électromagnétiques. On rappelle toutefois que ces coefficients dépendent de la grandeur physique considérée. Pour l'onde de tension  $T_y$ , par exemple, les coefficients de réflexion  $r_T$  et de transmission  $\tau_T$  s'écrivent :

$$r_T = -r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad \tau_T = \tau = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (4.80)$$

Les résultats (4.79) permettent de retrouver les coefficients de réflexion déjà obtenus avec les conditions aux limites strictes :

- Si la corde est fixée à son extrémité, le déplacement  $y(x, t)$  s'annule à l'interface ce qui correspond à une impédance  $Z_2$  infinie : la tension est non-nulle alors que la vitesse de déplacement s'annule. On en déduit  $r = -1$  ;
- Si au contraire la corde est libre de se déplacer, la tension est nulle alors que la vitesse de déplacement est non nulle : l'impédance  $Z_2$  s'annule. On en déduit  $r = +1$ .

Notons également que le coefficient de réflexion s'annule exactement quand  $Z_1 = Z_2$ . On dit alors qu'il y *adaptation d'impédance* : l'onde est dans ce cas parfaitement transmise  $t = 1$ . D'après l'équation (4.73), l'adaptation d'impédance implique l'égalité des célérités et, pour une corde vibrante, l'égalité des masses linéaires. Notons toutefois que ça ne veut pas dire que les deux cordes sont identiques : elles peuvent être de matériaux et de diamètres différents tout en satisfaisant  $\mu_1 = \mu_2$ .

Calculons enfin les coefficients de transmission  $T$  et de réflexion  $R$  *en énergie*, c'est-à-dire les coefficients de réflexion et transmission pour le courant d'énergie  $j_m$  ou encore pour la puissance portée par les ondes. On utilise pour cela le fait que la puissance moyenne portée par une onde plane monochromatique s'écrit  $Z/2 \omega^2 \mathcal{A}^2$ . On peut ainsi écrire :

$$R = \frac{(Z_1/2) \omega^2 \mathcal{A}_r^2}{(Z_1/2) \omega^2 \mathcal{A}_i^2} = |r|^2, \quad (4.81)$$

$$T = \frac{(Z_2/2) \omega^2 \mathcal{A}_t^2}{(Z_1/2) \omega^2 \mathcal{A}_i^2} = \left(\frac{Z_2}{Z_1}\right) |\tau|^2 = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}. \quad (4.82)$$

On vérifie alors qu'il y a bien **conservation de l'énergie à l'interface** :

$$R + T = 1. \quad (4.83)$$

La puissance incidente est bien égale à la somme de la puissance réfléchie et de la puissance transmise.

# 5 ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Nous sommes maintenant armés pour l'étude des ondes électromagnétiques. Ces ondes sont de nature radicalement différentes des ondes mécaniques sur lesquelles s'est concentrée notre attention jusqu'à présent. Notamment, ces ondes n'ont pas besoin de milieu matériel pour se propager. Toutefois, le formalisme utilisé dans les précédents chapitres sera largement ré-employé pour décrire la propagation des champs électrique  $E$  et magnétique  $B$  dans le vide puis dans certains milieux. Dans cette étude, nous aurons à prendre en compte la nature intrinsèquement vectorielle de ces champs et nous intéresserons donc plus particulièrement à la *structure* des ondes, c'est-à-dire le lien entre les directions de  $E$  et de  $B$  et la direction de propagation.

## 5.1 PROPAGATION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

### 5.1.1 ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LE VIDE

Les ondes électromagnétiques ne sont pas des ondes mécaniques. La dérivation de l'équation de propagation ne fait donc pas intervenir les lois fondamentales de la mécanique. Les équations fondamentales de l'électromagnétisme sont les équations de Maxwell :

$$\text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5.1)$$

$$\text{rot } B = \mu_0 j + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (5.2)$$

$$\text{div } B = 0 \quad (5.3)$$

$$\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (5.4)$$

Avant même de dériver l'équation de propagation des ondes, les équations de Maxwell nous permettent de comprendre le mécanisme de propagation des champs en suivant une approche similaire à ce que nous avions fait pour les ondes mécaniques aux paragraphes 2.1.3 et 3.1.3. Prenons l'exemple d'une charge électrique dont le mouvement entraîne une modification du champ électrique.

- La modification du champ électrique crée un courant de déplacement :

$$j_D = \epsilon_0 \partial_t E;$$

- Ce courant de déplacement modifie la valeur du champ magnétique :

$$\text{rot } B = \mu_0 j_D;$$

- La variation du champ magnétique modifie à son tour le champ électrique :  $\text{rot } E = -\partial_t B$ .

Rappelons ici la façon dont nous pouvons dériver l'équation d'onde pour  $B$  et  $E$ . On utilise la relation  $\text{rot}(\text{rot } \cdot) = \text{grad}(\text{div } \cdot) - \Delta \cdot$  en appliquant l'opérateur  $\text{rot}$  sur l'équation de Maxwell-Ampère (5.2) et sur l'équation de Maxwell-Faraday (5.4) pour obtenir

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad}(\text{div } B) - \Delta B = \mu_0 \text{rot } j + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \text{rot } E}{\partial t}, \\ \text{grad}(\text{div } E) - \Delta E = -\frac{\partial \text{rot } B}{\partial t}, \end{array} \right. \quad (5.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad}(\text{div } E) - \Delta E = -\frac{\partial \text{rot } B}{\partial t}, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

où nous avons introduit la célérité  $c$ ,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5.7)$$

En utilisant les deux équations de Maxwell restantes pour calculer  $\text{div } E$  et  $\text{div } B$ , on obtient finalement

$$\Delta B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = -\mu_0 \text{rot } j, \quad (5.8)$$

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad} \rho + \mu_0 \frac{\partial j}{\partial t}. \quad (5.9)$$

Dans le vide de charges et de courants, nous retrouvons alors, comme pour les ondes mécaniques, l'équation de d'Alembert :

$$\Delta B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0, \quad (5.10)$$

$$\Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0. \quad (5.11)$$

Ces équations portent sur les vecteurs  $E$  et  $B$ . Les trois composantes cartésiennes de ces vecteurs sont ainsi elles-mêmes solutions de l'équation de d'Alembert scalaire :

$$\forall \alpha \in \{x, y, z\} \quad \Delta E_\alpha - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial t^2} = 0 \quad (5.12)$$

$$\forall \alpha \in \{x, y, z\} \quad \Delta B_\alpha - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B_\alpha}{\partial t^2} = 0. \quad (5.13)$$

Nous savons déjà comment interpréter ces équations : les champs électrique et magnétique sont des ondes tridimensionnelles qui se propagent à la célérité  $c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}^{-1}$ ,



### Remarque 1

Quid des potentiels scalaire  $V(\mathbf{r}, t)$  et vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ ? La dérivation de l'équation de propagation de ces potentiels est moins immédiate que pour les champs en ce sens qu'elle requiert l'utilisation d'une condition supplémentaire dite *condition de jauge*. Cela tient au fait que les potentiels  $V$  et  $\mathbf{A}$  ne sont pas définis de façon absolue. Les couples de potentiels  $(V, \mathbf{A})$  et  $(V + \partial_t f(\mathbf{r}, t), \mathbf{A} - \mathbf{grad} f(\mathbf{r}, t))$  « créent » les mêmes champs électrique et magnétique. Une condition de jauge vient imposer une relation supplémentaire sur les potentiels  $V$  et  $\mathbf{A}$  et permet de lever l'ambiguité (au moins partiellement).

Une jauge particulièrement utile dans le cadre de l'étude de la propagation des ondes est la jauge de Lorenz, qui s'écrit

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Elle a notamment le bon goût de s'écrire de façon complètement covariante à partir du quadri-vecteur potentiel  $\mathcal{A}^\mu = (V/c, \mathbf{A})$  :

$$\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0.$$

À partir des équations de Maxwell, des relations  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V - \partial_t \mathbf{A}$  et  $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ , on peut alors montrer qu'avec le choix de la jauge de Lorenz,

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0.$$

Le potentiel scalaire et le potentiel vecteur sont eux-mêmes solutions de l'équation de d'Alembert avec la célérité  $c$ . Insistons-bien, ceci dit, sur le fait que ce résultat ne tient qu'au choix de la jauge de Lorenz. Avec la jauge dite de Coulomb,  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , on obtiendrait

$$\Delta V = 0,$$

soit une équation de propagation avec une vitesse infinie !

appelée par conséquent *vitesse de la lumière*. Contrairement aux ondes mécaniques, cette vitesse de propagation est invariante par changement de référentiel, le principe fondamental à la base de la relativité restreinte.

Notons également que nous n'avons à ce stade fait *aucune* approximation pour obtenir les équations de propagation, contrairement à notre étude des ondes mécaniques

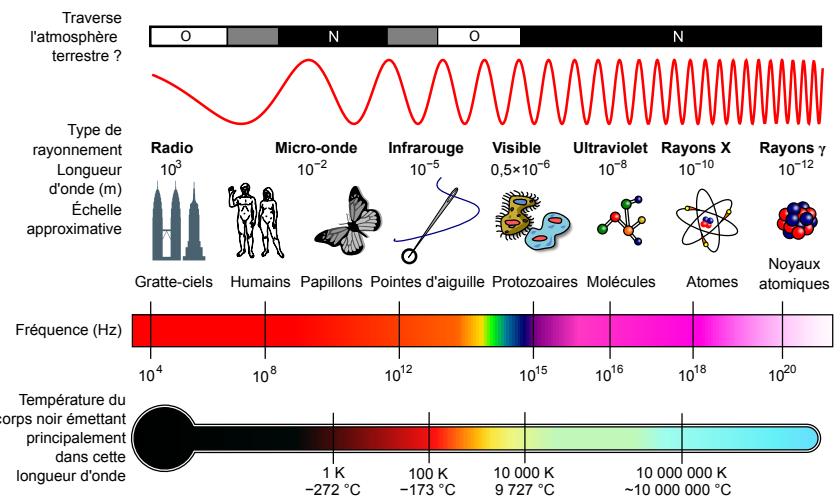


FIGURE 5.1 – Classement des ondes électromagnétiques sinusoïdales en fonction de leur longueur d'onde ou de leur fréquence. Extrait de Wikipedia.

pour lesquelles nous avions systématiquement dû supposer l'onde de *suffisamment faible* amplitude. La théorie de l'électromagnétisme de Maxwell est, dans le vide, une théorie intrinsèquement linéaire ! Nous verrons qu'il en va différemment dans l'étude de la propagation des ondes dans les milieux.

### DOMAINES DE FRÉQUENCES

À l'instar des ondes acoustiques, on classe en général les ondes électromagnétiques en fonction de la fréquence  $\nu$  d'oscillation ou de la longueur d'onde  $\lambda$  des ondes sinusoïdales. De façon générale, une onde n'est pas toujours sinusoïdale. On peut en revanche toujours décomposer l'onde comme une somme d'ondes sinusoïdales, ou comme un paquet d'onde (voir p. 46), et ainsi répartir ses composantes spectrales sur les différents domaines suivants

- Si  $1 \text{ m} < \lambda$ , soit  $\nu < 300 \text{ MHz}$  on parle d'ondes radio. Elles sont elles-mêmes divisées en sous-catégories (très haute fréquence, haute fréquence, basse fréquence...) et sont typiquement utilisées pour la radiodiffusion ou certains radars ;
- Si  $1 \text{ mm} < \lambda < 1 \text{ m}$ , soit  $300 \text{ GHz} < \nu < 300 \text{ MHz}$ , on parle plutôt d'ondes micro-onde, ou d'ondes hyperfréquence. Ces ondes sont souvent considérées comme un sous-catégorie des ondes radio. Elles sont utilisées pour la communication satellite,

la téléphonie mobile ou encore le Wi-Fi. Dans des systèmes physiques, ces fréquences correspondent souvent à des modes de rotation de molécules, précisément exploités dans les fours micro-ondes ;

- Si  $0,1 \text{ mm} < \lambda < 1 \text{ mm}$ , soit  $3 \text{ THz} < \nu < 300 \text{ GHz}$ , on entre dans le domaine des ondes terahertz. La spectroscopie terahertz et leur utilisation dans la vie courante sont aujourd’hui en plein essor. Récemment, par exemple, ces ondes ont été utilisées pour le développement de nouveaux scanners corporels utilisés dans les aéroports ;
- Si  $750 \text{ nm} < \lambda < 100 \mu\text{m}$ , soit  $3 \text{ THz} < \nu < 400 \text{ THz}$ , on parle d’ondes infra-rouges. Dans les systèmes physiques, ces fréquences sont typiquement celles des modes de vibration de particules ou de molécules, mais se rencontrent également dans des transitions entre niveaux d’énergies atomiques. Les corps noirs à température ambiante émettant largement dans le domaine de l’infrarouge, l’imagerie infrarouge permet la détection de corps chauds et est ainsi utilisée pour la vision nocturne, pour l’analyse thermique des bâtiments ;
- Si  $380 \text{ nm} < \lambda < 750 \text{ nm}$ , soit  $400 \text{ THz} < \nu < 790 \text{ THz}$ , les ondes sont dites visibles. Il s’agit de la gamme de fréquence à laquelle sont sensibles nos yeux. Il est difficile de citer une application plus importante que celle-ci. Notons qu’on entre dans le domaine de fréquences où les ondes sont dites énergétiques : l’énergie d’un photon  $E = h\nu$ , où  $h$  est la constante de Planck, est proche de l’électron volt (eV), soit l’énergie d’un électron dans un potentiel de 1 V. À ces échelles d’énergie, les rayonnements électromagnétiques peuvent commencer à modifier la structure de la matière et donc à devenir dangereux ;
- Si  $10 \text{ nm} < \lambda < 380 \text{ nm}$ , soit  $790 \text{ THz} < \nu < 30 \times 10^{15} \text{ Hz}$  ou  $4 \text{ eV} < E < 100 \text{ eV}$ , il s’agit d’ondes ultra-violettes. Ce rayonnement peut ioniser des atomes, dont l’énergie d’ionisation est typiquement de l’ordre de 10 eV. S’ils nous font bronzer, ils sont, pour les mêmes raisons, nocifs pour la peau ou pour les yeux. On peut les détecter par fluorescence et sont, par exemple, utilisés pour les lampes de « lumière noire » ;
- Si  $10 \text{ nm} < \lambda < 5 \text{ pm}$ , soit  $30 \times 10^{15} \text{ Hz} < \nu < 60 \times 10^{18} \text{ Hz}$  ou  $100 \text{ eV} < E < 0,2 \text{ MeV}$ , on parle de rayons X. Ces ondes peuvent traverser la matière en étant partiellement absorbées, selon la nature des corps, et sont utilisées pour effectuer des imageries médicales « radios » du corps. Leurs longueurs d’onde étant de l’ordre de la distance interatomique dans la matière, ils sont aussi utilisés pour l’étude des cristaux. Ce rayonnement est aussi dit ionisant, puisqu’il est suffisamment énergétique pour arracher les électrons des atomes qu’il rencontre ;
- Si  $\lambda < 5 \text{ pm}$ , soit  $6 \times 10^{19} \text{ Hz} < \nu$  ou  $0,2 \text{ MeV} < E$ , on parle enfin de rayons gamma. Ce sont les fréquences de transitions au sein des noyaux atomiques et typiquement émis dans des réactions nucléaires. Ils traversent très facilement la matière, et il

faut donc un blindage conséquent pour les stopper, en partie. C’est cette difficulté au blindage qui les rend particulièrement dangereux.

### 5.1.2 ASPECTS ÉNERGÉTIQUES

Les lois de conservation de l’énergie pour les champs électromagnétiques ont déjà été vues au chapitre 10. Nous rappelons ici simplement les résultats qui sont directement applicables à notre étude des ondes électromagnétiques. À l’instar de ce que nous avons fait pour la corde vibrante et pour les ondes acoustiques, nous définissons une densité locale d’énergie électromagnétique. Alors que nous avions séparé l’énergie mécanique en la somme d’une énergie cinétique ( $\propto v^2$ ) et d’une énergie potentielle ( $\propto T^2$  pour les ondes sur la corde ou  $\delta P^2$  pour les ondes acoustiques), l’énergie électromagnétique s’écrit comme la somme d’une énergie électrique ( $\propto E^2$ ) et d’une énergie magnétique ( $\propto B^2$ ) :

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m, \quad \text{où} \quad \mathcal{E}_e = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2, \quad \mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2. \quad (5.14)$$

En dehors des charges et des courants, l’équation locale de conservation de l’énergie s’obtient en introduisant l’équivalent du courant d’énergie  $j_m$  des ondes mécaniques, à savoir le vecteur de Poynting :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{\mu_0}, \quad \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{vol}}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{\Pi} = 0. \quad (5.15)$$

### 5.1.3 CHAMP PROCHE ET CHAMP RAYONNÉ

Les équations (5.8) et (5.9) permettent de faire le lien entre l’onde électromagnétique ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ) et les sources de ces ondes : les charges  $\rho$  et le courant électrique  $\mathbf{j}$ . En électromagnétostatique, nous avons déjà vu comment calculer alors directement les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  à partir de  $\rho(\mathbf{r})$  et de  $\mathbf{j}(\mathbf{r})$  :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} d^3 r', \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3 r'. \quad (5.16)$$

La situation est autrement plus complexe dans le cas général où les sources varient dans le temps, par exemple sous l’effet de mouvements de charges. La dérivation d’une expression générale des solutions sort très largement du cadre de ce cours. L’une des difficultés tient à la vitesse de propagation *finie* des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ . Il nous faut prendre en compte le temps de propagation nécessaire au champ pour rejoindre le point d’observation depuis la source. Ainsi, une charge en mouvement qui se trouvait

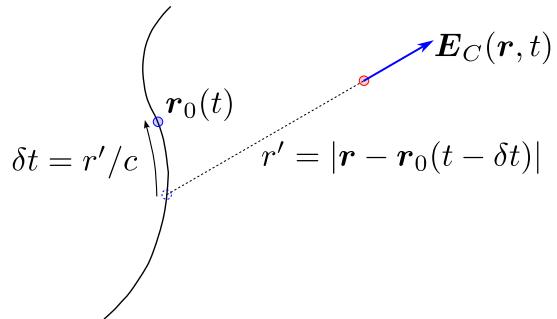


FIGURE 5.2 – Une charge suit une trajectoire  $\mathbf{r}_0(t)$ . Elle crée au point  $\mathbf{r}$  un champ électrique  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ . Le terme Coulombien,  $\mathbf{E}_C$ , de l'équation (5.18) est dans la direction apparente de la charge, à la position qu'elle occupait au temps  $t$  corrigé du temps de propagation des ondes à la vitesse  $c$ .

au point  $\mathbf{r}_0(t')$  au temps  $t'$  ne créerait de champ au point d'observation  $\mathbf{r}$  qu'au *temps retardé*

$$t = t' + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}. \quad (5.17)$$

On peut alors montrer que les champs générés par une charge  $q$  qui suit la trajectoire  $\mathbf{r}_0(t)$  sont donnés par

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mathbf{u}'_r}{r'^2} + \frac{r'}{c} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{u}'_r}{r'^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}'_r \right], \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{u}'_r \wedge \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{c}, \end{cases} \quad (5.18)$$

où  $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')$ ,  $\mathbf{u}'_r = \frac{\mathbf{r}'}{r'^2}$  et  $t' = t - \frac{r'}{c}$ . Nous ne commenterons la relation particulièrement simple entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  que plus tard. Essayons seulement de donner une interprétation aux trois termes de l'équation (5.18).

- Le premier terme de l'équation correspond à loi de Coulomb,  $\mathbf{E}_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'^2} \mathbf{u}'_r$ . Toutefois, le vecteur  $\mathbf{u}_r$  et la distance  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|$  sont évalués au temps  $t'$ . La direction de cette contribution au champ électrique est donc la direction apparente de la particule à la position  $\mathbf{r}_0(t')$  qu'elle occupait dans le passé, au temps  $t' = t - r'/c$  (voir figure 5.2);
- Le terme suivant prend la forme d'une correction au terme de Coulomb, qui prendrait en compte la variation temporelle de  $\mathbf{u}'_r/r'^2$ . On peut en effet l'écrire sous la

forme  $\partial_t \mathbf{E}_C \times \delta t$  où  $\delta t = t - t'$  est le temps de propagation entre la charge et le point d'observation.

Ces deux premiers termes décroissent au moins en  $1/r^2$ . Le vecteur de Poynting  $\mathbf{P}$  décroît donc au moins en  $1/r^4$ . Son flux à travers une sphère centrée sur la charge, de rayon  $r$ , décroît alors au moins en  $1/r^2$  : à l'infini, il n'y a plus d'énergie. C'est notamment très différent de ce que nous avions obtenu pour les ondes sphériques, p. 39 : la décroissance en  $1/r^2$  du courant d'énergie permettait d'assurer la conservation de l'énergie. La puissance qui traverse une sphère centrée sur la source ne dépendait pas du rayon de la sphère. Les deux premiers termes dans l'expression de  $\mathbf{E}$  ne correspondent donc pas à du *rayonnement*, à l'émission d'une onde électromagnétique qui se propagerait à l'infini sans perte d'énergie ;

- Seul le dernier terme permet d'obtenir une dépendance en  $1/r$  pour les champs et donc en  $1/r^2$  pour le vecteur de Poynting. On constate qu'il dépend de la dérivée *seconde* de  $\mathbf{u}'_r$ . Un calcul complet ferait apparaître qu'il faut  $\partial_t^2 \mathbf{r}_0 \neq 0$  pour obtenir un terme en  $1/r$  : seules les charges *accélérées* sont source de rayonnement électromagnétique !

Remarquons enfin que les trois termes dans l'expression de  $\mathbf{E}$  sont par ordre croissant en puissance de  $1/c$ . En fait, ces trois termes sont essentiellement en puissances de  $(v/c)$  où  $v$  est la vitesse de déplacement de la charge. Pour une particule non-relativiste, on s'attend donc à ce que le premier terme domine sur les suivants. Toutefois, l'analyse précédente nous montre que plus l'on s'éloigne de la charge, plus le dernier terme domine par rapport aux autres : c'est le seul qui a une contribution non nulle à l'énergie à l'infini. On sépare donc en général l'espace en deux parties :

- Proche de la source ( $r \ll \lambda$  pour un champ sinusoïdal), les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  sont ceux calculés en électromagnétostatique, en remplaçant simplement la position des sources  $\mathbf{r}_0$  par  $\mathbf{r}_0(t)$ . Dans cette zone appelée *zone de champ proche*, le temps de propagation des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  est négligeable devant le temps caractéristique d'évolution des sources. Pour une évolution sinusoïdale par exemple,  $r \ll \lambda$  implique en effet  $r/c \ll \lambda/c = T$  où  $T$  est la période des oscillations ;
- Loin de la source ( $r \gg \lambda$  pour un champ sinusoïdal), seul le champ rayonné est conservé. Dans cette zone, appelée *zone de rayonnement*, les champs peuvent être très différents des champs de champ proche. Nous verrons par exemple que le champ électrique rayonné est orthogonal à  $\mathbf{u}_r$  loin de la source, alors que le champ proche, donné par la loi de Coulomb, est parallèle à  $\mathbf{u}_r$ .

#### 5.1.4 POTENTIELS RETARDÉS

Si le calcul direct des champs électrique et magnétique à partir de l'expression des sources  $\rho(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  est complexe, il est en va différemment des potentiels scalaire

et vecteur quand on se restreint à la jauge de Lorenz (voir Remarque 1)

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (5.20)$$

Les potentiels prennent alors une forme exactement analogue aux potentiels de l'électromagnétostatique.

### Potentiels retardés

Dans le cadre de la jauge de Lorenz (5.20), les potentiels scalaires  $V(\mathbf{r}, t)$  et vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  créés par les densités de charge  $\rho(\mathbf{r}, t)$  et de courant  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r', \end{array} \right. \quad (5.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r', \end{array} \right. \quad (5.22)$$

où le temps  $t'$  est donné par  $t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$ .

La seule différence avec les lois de la statique tient au fait que, dans le calcul des potentiels au temps  $t$  et au point  $\mathbf{r}$ , les sources  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  sont évaluées au temps  $t'$ , c'est-à-dire le temps  $t$  auquel on soustrait le temps de propagation à la vitesse  $c$  entre le point  $\mathbf{r}'$  où sont évaluées les sources et le point  $\mathbf{r}$  où sont calculés les potentiels. Les potentiels donnés par les expressions ci-dessus sont appelés *potentiels retardés*.

### 5.1.5 APPLICATION : DIPÔLE OSCILLANT

Calculons à titre d'exemple le champ électrique créé par une charge  $q$  qui oscille autour d'un point  $O$ , pris comme origine des axes. On suppose qu'elle suit une trajectoire  $\mathbf{r}_0(t)$  d'extension  $d$  et que le mouvement est restreint à un axe qu'on note ( $Oz$ ) :  $\forall t |z(t)| < d$ . À cette distribution de charge, nous associons le dipôle électrique  $\mathbf{p}(t) = q\mathbf{r}_0(t)$  et les densités  $\rho(\mathbf{r}, t) = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$  et  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = q\partial_t \mathbf{r}_0(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$ .

Pour obtenir le champ électrique, nous calculons dans un premier temps les potentiels retardés, en commençant par le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ . Puisqu'il n'y a ici qu'une seule charge en mouvement, l'expression (5.22) prend la forme simple

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\partial_t \mathbf{r}_0(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial_t \mathbf{p}(t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}. \quad (5.23)$$

### APPROXIMATIONS

Nous supposons par la suite que l'extension  $d$  du mouvement de la charge est toujours négligeable : nous nous restreignons au calcul des potentiels aux positions  $\mathbf{r}$  telles que  $r \gg d$ . C'est l'équivalent de l'**approximation dipolaire** faite au chapitre 4 pour le calcul du champ électrique créé par un dipôle électrique *statique*.

En outre, nous supposons  $d$  suffisamment faible pour que le temps de propagation des ondes électromagnétiques sur l'extension du mouvement,  $d/c$ , soit lui-même négligeable devant l'échelle de temps caractéristique  $T$  du mouvement de la charge :

$$d/c \ll T \Leftrightarrow d \ll c/T \Leftrightarrow d/T \ll c. \quad (5.24)$$

La seconde inégalité se récrit, pour une onde harmonique de période  $T$  et de longueur d'onde  $\lambda$ , en  $d \ll \lambda$  : la distance  $d$  est aussi négligeable devant la longueur d'onde. La dernière égalité implique que la vitesse de la particule est faible devant  $c$  : on suppose la particule **non relativiste**.

### POTENTIELS RETARDÉS

L'approximation non-relativiste nous permet de négliger le temps de propagation des ondes sur la distance  $d$ . Le temps  $t'$  peut donc être calculé comme si la particule était toujours au point  $O$  :  $t' = t - r/c$ . En outre, dans le cadre de l'approximation dipolaire, nous nous restreignons aux termes au premier ordre en  $d/r$  dans l'expression des potentiels. Puisque  $\mathbf{r}_0$  est lui-même proportionnel à  $d$ , nous remplaçons dans (5.23) le dénominateur par  $r = |\mathbf{r}|$ . Le potentiel vecteur s'écrit alors

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial_t \mathbf{p}(t - r/c)}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial_t p(t - r/c)}{r} \mathbf{u}_z. \quad (5.25)$$

La jauge de Lorenz permet de calculer le potentiel scalaire :

$$\partial_t V(\mathbf{r}, t) = -c^2 \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (5.26)$$

Puisque  $\mathbf{A} = A(r, t) \mathbf{u}_z$ , on peut écrire

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \mathbf{grad} A(r, t) \cdot \mathbf{u}_z = \frac{\partial A}{\partial r} \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_z = \frac{\partial A}{\partial r} \cos \theta, \quad (5.27)$$

où  $\theta$  est l'angle azimutal des coordonnées sphériques de centre  $O$  et d'axe ( $Oz$ ). On écrit enfin

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \left[ -\frac{1}{r^2} \partial_t p(t - r/c) - \frac{1}{rc} \partial_t^2 p(t - r/c) \right] \cos \theta \quad (5.28)$$

$$V(r, t) = \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}(t - r/c) \cdot \mathbf{u}_r}{r^2} \right] + \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta \partial_t p(t - r/c)}{rc} \right]. \quad (5.29)$$



Dans la dernière équation, obtenue par intégration de (5.28), le terme constant a été pris nul. Il ne peut pas dépendre de  $\mathbf{p}$  puisque  $\mathbf{p}$  dépend du temps, il ne décrit donc pas le potentiel créé par le dipôle.

On reconnaît dans le premier terme de l'équation (5.29) la forme du potentiel électrique statique créé par un dipôle électrique. Ici il s'agit du potentiel *quasi-statique*, en prenant la valeur du dipôle  $\mathbf{p}$  au temps  $t$  corrigé du temps de propagation des ondes. C'est l'équivalent du premier terme de l'équation (5.18) !

Le second terme est le potentiel dipolaire rayonné à grande distance.

### CHAMP ÉLECTRIQUE EN CHAMP PROCHE ET RAYONNÉ

Pour calculer le champ électrique, supposons pour simplifier que le mouvement de la charge est sinusoïdal à la pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $d$ . On écrit, en notations complexes,

$$\underline{\mathbf{p}}(t) = q \times d \ e^{i\omega t} \ \mathbf{u}_z = \mathbf{p}_0 \ e^{i\omega t}, \quad (5.30)$$

avec  $\mathbf{p}_0 = qd \mathbf{u}_z$ . Les potentiels prennent alors la forme, en notant  $k = \omega/c$ ,

$$\underline{V}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{u}_r}{r^2} e^{i(\omega t - kr)} \right] + \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{i\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{u}_r}{r^2} (kr) e^{i(\omega t - kr)} \right], \quad (5.31)$$

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{i kr}{r^2} \mathbf{p}_0 e^{i(\omega t - kr)}. \quad (5.32)$$

Comme attendu d'après notre analyse précédente, on constate que le terme de rayonnement dans l'expression de  $V$  est dominant quand  $kr \gg 1$  soit  $r \gg \lambda$ . Dans la zone de champ proche, le potentiel scalaire se résume au terme quasi-statique alors que dans la zone de rayonnement, le potentiel scalaire est le potentiel rayonné.

On calcule le champ électrique via  $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V - \partial_t \mathbf{A}$ . Plusieurs termes contribuent à l'expression du champ, ils sont proportionnels à  $k^2/r$ ,  $k/r^2$  ou  $1/r^3$ . Nous ne gardons par la suite que les termes dominants :

- dans la zone de champ proche ( $kr \ll 1$ ) on ne garde que les termes en  $1/r^3$ ,
- dans la zone de rayonnement ( $kr \gg 1$ ) on ne garde que les termes en  $k^2/r$ .

On obtient alors les expressions suivantes :

$$\text{champ proche} \quad \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\underline{\mathbf{p}}(t - r/c) \cdot \mathbf{u}_r) \mathbf{u}_r - \underline{\mathbf{p}}(t - r/c)] \quad (5.33)$$

$$\text{champ rayonné} \quad \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{k^2 p_0 \sin \theta}{r} e^{i(\omega t - kr)} \mathbf{u}_\theta. \quad (5.34)$$

Une nouvelle fois, le champ électrique dans la zone de champ proche est simplement le champ électrique du dipôle électrique statique en prenant en compte la valeur instantanée du dipôle calculée au temps  $t - r/c$ .

Le champ électrique dans la zone de rayonnement prend une forme très différente ! Il est toujours orthogonal à  $\mathbf{u}_r$  et s'apparente à une *onde sphérique sortante* au terme en  $(\sin \theta)$  près. Sa décroissance en  $1/r$  assure une puissance rayonnée non nulle à l'infini.

Le facteur  $(\sin \theta)$  a, quant à lui, une conséquence importante : contrairement aux ondes sphériques, la puissance n'est pas répartie de façon uniforme dans toutes les directions de l'espace. En particulier, les champs rayonnés sont nuls dans la direction  $\theta = 0[\pi]$ , c'est-à-dire dans la direction selon laquelle la charge oscille. On résume cela en écrivant qu'**il n'y a pas de rayonnement dans la direction du dipôle**.

Notons également que le champ rayonné se récrit

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2 p_0 \sin \theta}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \mathbf{u}_\theta = -\frac{\mu_0 q a_0 \sin \theta}{4\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \mathbf{u}_\theta, \quad (5.35)$$

où  $a_0 = \omega^2 d$  est l'accélération de la particule chargée. Nous retrouvons le fait qu'**une charge ne peut rayonner que si elle est accélérée**.

Notons enfin la forme simple que prend le champ magnétique  $\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}$ . Dans la zone de rayonnement,

$$\boxed{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}}{\omega}, \quad \text{avec } \mathbf{k} = k \mathbf{u}_r.} \quad (5.36)$$

Cette relation, analogue directe de l'équation (5.19), traduit comme nous allons le voir dans la prochaine section le fait que l'onde sphérique rayonnée par le dipôle oscillant ressemble localement à une onde plane.

#### À retenir : Section 5.1.1

- Équation de propagation pour les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ ,
- Expression du vecteur de Poynting, des densités d'énergie, équation de conservation de l'énergie,
- Expression des potentiels retardés,
- Définition des zones de champ proche et de rayonnement,
- Savoir qu'une charge ne rayonne que si elle est accélérée.

## 5.2 ONDES PLANES PROGRESSIVES MONOCHROMATIQUES

Comme nous l'avions vu lors de notre étude des ondes acoustiques, il n'y a pas de solution générale simple de l'équation de d'Alembert tridimensionnelle. Une nouvelle fois, nous restreignons donc notre étude à certaines solutions particulières, mais au rôle tout à fait important, et au premier chef les ondes planes progressives monochromatiques.

### 5.2.1 RELATION DE DISPERSION

Nous savons d'ores-et-déjà comment écrire de façon générale une onde plane progressive. En notant  $\omega$  sa pulsation et  $\mathbf{k}$  son vecteur d'onde, nous écrivons

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \quad (5.37)$$

$$\underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi)}. \quad (5.38)$$

La phase  $\phi$  est a priori quelconque. La relation de dispersion est, quant à elle, obtenue de façon identique à ce que nous avions fait pour les ondes acoustiques. En insérant (5.37) dans l'équation de d'Alembert (5.11), et en utilisant le fait que

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} = -k^2 \underline{\mathbf{E}} \quad \text{et} \quad \partial_t^2 \underline{\mathbf{E}} = -\omega^2 \underline{\mathbf{E}}, \quad (5.39)$$

nous obtenons la relation de dispersion usuelle

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (5.40)$$

La vitesse de phase des ondes électromagnétiques dans le vide est alors  $v_\phi = \omega/k = c \mathbf{u}$  où  $\mathbf{u} = \mathbf{k}/k$  est la direction de propagation des ondes. Cette vitesse est bien indépendante de la pulsation  $\omega$  : dans le vide, la propagation des ondes électromagnétiques est non dispersive.

#### À retenir

*Dans le vide, la propagation des ondes électromagnétiques est non-dispersive.*

- Les équations de propagation des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  s'écrivent

$$\left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0, \quad \left( \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{B} = 0. \quad (5.41)$$

- La relation de dispersion s'écrit  $\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ .

### 5.2.2 STRUCTURE DES ONDES PLANES

Nous n'avons pas encore commenté les valeurs que peuvent prendre les vecteurs  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{B}_0$  dans les expressions des champs (5.37) et (5.38). Ces deux expressions sont toujours solutions des équations de propagation (5.41). Toutefois, ces champs doivent également être solutions des équations de Maxwell ! Calculons dans un premier temps  $\operatorname{div} \underline{\mathbf{E}}$  :

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{E}} = \frac{\partial}{\partial x} \underline{\mathbf{E}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{\mathbf{E}}_y + \frac{\partial}{\partial z} \underline{\mathbf{E}}_z = -ik_x \underline{\mathbf{E}}_x - ik_y \underline{\mathbf{E}}_y - ik_z \underline{\mathbf{E}}_z \quad (5.42)$$

$$= -i\mathbf{k} \cdot \underline{\mathbf{E}} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (5.43)$$

L'équation de Maxwell-Gauss (5.1) prend alors une forme très simple :

$$-\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0. \quad (5.44)$$

Le champ électrique  $\mathbf{E}_0$  est donc nécessairement orthogonal au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ . On dit dans ce cas que l'onde est *transverse électrique*, abrégé en *onde TE*.

On peut en fait dériver exactement la même relation pour le champ magnétique à partir de l'équation de Maxwell (5.3) : le champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  est nécessairement orthogonal au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  :

$$-\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0. \quad (5.45)$$

On dit que l'onde est *transverse magnétique*, abrégé en *onde TM*. Quand l'onde est transverse électrique et transverse magnétique, on dit qu'elle est... *transverse électromagnétique*, abrégé en *ondes TEM*.

Cet adjectif *transverse* est le même que celui que nous avons utilisé pour caractériser les ondes mécaniques. Ici, ce n'est pas le déplacement des éléments de corde ou des éléments de fluide que nous considérons, puisqu'il n'y a pas de milieu support pour les ondes électromagnétiques, mais la direction des champs électrique et magnétique, directement, par rapport à la direction de propagation.

## À retenir

*Une onde électromagnétique progressive est dite :*

- transverse électrique (TE) si le champ électrique est en tout point orthogonal à la direction de propagation,
  - transverse magnétique (TM) si le champ magnétique est en tout point orthogonal à la direction de propagation,
  - transverse électromagnétique (TEM) si le champ électrique et le champ magnétique sont en tout point orthogonaux à la direction de propagation.
- Une onde plane progressive dans le vide est une onde TEM ;
- Le champ électrique et le champ magnétique d'une onde progressive ne sont jamais purement longitudinaux, c'est-à-dire uniquement parallèles à la direction de propagation. Une onde peut, en revanche, n'être ni TE, ni TM. On parle dans ce cas d'onde *hybride*.

Toujours à partir des équations de Maxwell, nous pouvons trouver une équation supplémentaire qui relie non plus seulement  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{B}_0$  à  $\mathbf{k}$  mais ces trois vecteurs entre eux. Constatons pour cela que

$$\text{rot } \underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \partial_y \underline{\mathbf{E}}_z - \partial_z \underline{\mathbf{E}}_y \\ \partial_z \underline{\mathbf{E}}_x - \partial_x \underline{\mathbf{E}}_z \\ \partial_x \underline{\mathbf{E}}_y - \partial_y \underline{\mathbf{E}}_x \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} k_y \underline{\mathbf{E}}_z - k_z \underline{\mathbf{E}}_y \\ k_z \underline{\mathbf{E}}_x - k_x \underline{\mathbf{E}}_z \\ k_x \underline{\mathbf{E}}_y - k_y \underline{\mathbf{E}}_x \end{pmatrix} = -i\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{E}}. \quad (5.46)$$

L'équation de Maxwell-Faraday (5.4) permet alors d'écrire

$$(-i\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{E}}_0) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{B}} = -i\omega \underline{\mathbf{B}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (5.47)$$

On en déduit l'expression du champ magnétique :

$$\underline{\mathbf{B}}_0 = \frac{\mathbf{k} \wedge \underline{\mathbf{E}}_0}{\omega} = \frac{\mathbf{u} \wedge \underline{\mathbf{E}}_0}{c}, \quad (5.48)$$

où nous avons utilisé, pour la dernière équation, la relation de dispersion. Cette relation, sur les champs  $\mathbf{E}_0$  et  $\mathbf{B}_0$  est aussi valable pour les champs  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ , en notations aussi bien réelles que complexes.

## Structure d'onde plane

*Pour une onde plane monochromatique ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ) de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ , les vecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{B}$ , dans cet ordre, forment un trièdre direct.*

- Le champ magnétique s'exprime en fonction de  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{k}$  et  $\omega$  par la relation

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}}{\omega}. \quad (5.49)$$

- Dans le vide, cette écriture se simplifie en

$$\underline{\mathbf{B}} = \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}}{c}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{k}/k. \quad (5.50)$$

- On dit d'une onde quelconque qui vérifie ces propriétés qu'elle a la *structure d'une onde plane*.

Notons une conséquence directe de l'équation (5.50) : dans le vide, les normes des champs électrique et magnétique d'une onde qui a la structure d'une onde plane sont reliées par

$$|\mathbf{E}| = c|\mathbf{B}|. \quad (5.51)$$

Cette relation est en fait vérifiée pour tout milieu non dispersif, pour lequel  $\omega/k = c$  quel que soit  $\omega$ . De façon plus générale, on peut écrire pour l'onde plane de pulsation  $\omega$ , en notant  $\mathbf{E}_\omega$  et  $\mathbf{B}_\omega$  ses champs et  $v_\phi(\omega)$  la vitesse de phase,

$$|\mathbf{E}_\omega| = v_\phi(\omega) |\mathbf{B}_\omega|. \quad (5.52)$$

Notons par ailleurs que la relation (5.49) implique que la phase  $\phi$  introduite équation (5.38) est nulle : **les champs électrique et magnétique d'une onde plane oscillent en phase**. Prenons alors l'exemple d'une onde qui se propage dans la direction des  $z$  croissants ( $\mathbf{k} = \omega/c \mathbf{u}_z$ ) et pour laquelle le champ  $\mathbf{E}_0$  est orienté selon  $\mathbf{u}_x$ . On obtient, en notations réelles,

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{B}(z, t) = B_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_y, \quad \mathbf{k} = k \mathbf{u}_z. \quad (5.53)$$

L'onde électromagnétique se manifeste par la propagation simultanée des champs électrique et magnétique, qui oscillent en phase dans deux directions transverses orthogonales (voir figure 5.3).

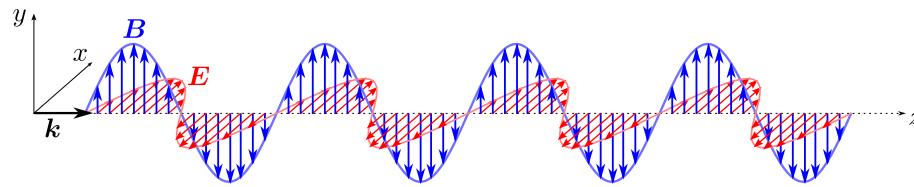


FIGURE 5.3 – Propagation d'une onde électromagnétique plane monochromatique se propageant vers les  $z$  croissants. Les champs électrique  $E$  et magnétique  $B$  sont orthogonaux et perpendiculaire à  $k$ . Ils oscillent en phase : les maxima du champ électrique coïncident avec les maxima du champ magnétique.

### 5.2.3 ASPECTS ÉNERGÉTIQUES

La relation très simple qui relie les champs électrique et magnétique permet de simplifier grandement les expressions de la densité d'énergie. On constate en effet que la densité d'énergie magnétique se récrit

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 = \frac{1}{2\mu_0 c^2} \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 = \mathcal{E}_e. \quad (5.54)$$

**Pour une onde plane, les densités d'énergie électrique et magnétique sont égales.** La densité d'énergie électromagnétique s'écrit donc simplement

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \epsilon_0 \mathbf{E}^2. \quad (5.55)$$

Les relations (5.49) ou (5.50) permettent aussi de ré-exprimer le vecteur de Poynting sous la forme

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \left( \frac{\mathbf{k} \wedge \mathbf{E}}{\omega} \right) = \frac{1}{\mu_0 \omega} [\mathbf{E}^2 \mathbf{k} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}] = \frac{\epsilon_0 c^2 \mathbf{E}^2}{\omega} \mathbf{k}, \quad (5.56)$$

où l'on a utilisé le fait que le champ  $\mathbf{E}$  est transverse ( $\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0$ ). On retrouve alors un résultat déjà obtenu pour le vecteur intensité acoustique  $\mathbf{j}$  des ondes acoustiques : pour une onde plane, dans le vide, le vecteur de Poynting est orienté selon le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  donc le long de la direction de propagation. Dans le vide, le vecteur de Poynting se simplifie encore en

$$\mathbf{\Pi} = \epsilon_0 c \mathbf{E}^2 \mathbf{u}. \quad (5.57)$$

Finalement, nous pouvons définir l'intensité de l'onde électromagnétique de la même façon que nous avions défini l'intensité acoustique (instantanée) au chapitre 3.

L'intensité instantanée est la puissance instantanée par unité de surface orientée dans le sens de propagation de l'onde. Il s'agit de la norme du vecteur de Poynting. L'intensité de l'onde, appelée *intensité lumineuse*, est sa valeur moyenne temporelle :

$$I(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{\Pi}(\mathbf{r}, t) \rangle_T = \epsilon_0 c \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)^2 \rangle_T. \quad (5.58)$$

Pour l'onde plane monochromatique d'amplitude  $\mathbf{E}_0$ , l'intensité est donc uniforme :

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c \mathbf{E}_0^2 = c \times \langle \mathcal{E}_{\text{vol}} \rangle. \quad (5.59)$$

#### À retenir : Ondes planes progressives et énergie

Pour une onde plane progressive monochromatique  $\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , de direction de propagation  $\mathbf{u} = \mathbf{k}/k$ ,

- Les densités d'énergie magnétique et électrique sont égales, la densité d'énergie totale étant

$$\mathcal{E}_{\text{vol}} = \epsilon_0 \mathbf{E}^2, \quad \text{et} \quad \langle \mathcal{E}_{\text{vol}} \rangle = \frac{\epsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2}{2}; \quad (5.60)$$

- Le vecteur de Poynting s'écrit

$$\mathbf{\Pi} = \epsilon_0 c \mathbf{E}^2 \mathbf{u}, \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 c |\mathbf{E}_0|^2 \mathbf{u}; \quad (5.61)$$

- L'intensité lumineuse est uniforme et s'écrit

$$I = \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2. \quad (5.62)$$

### 5.2.4 POLARISATION DES ONDES PLANES

Les équations précédentes et la relation simple (5.49) qui relie  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  mettent en évidence le fait que toutes les propriétés de l'onde plane sont obtenues par la donnée du vecteur d'onde<sup>1</sup>  $\mathbf{k}$  et du champ électrique  $\mathbf{E}_0$ . En particulier, la direction de  $\mathbf{E}_0$  permet de déduire celle de  $\mathbf{B}$ . De manière générale, on ne s'intéresse donc qu'au champ électrique  $\mathbf{E}_0$ , excepté dans les situations où l'onde interagit avec un milieu aux propriétés magnétiques. Nous nous concentrerons donc par la suite sur les expressions possibles du vecteur  $\mathbf{E}_0$ .

1. En supposant la relation de dispersion connue pour en déduire  $\omega$ .

## Remarque 2

L'équation (5.59) a une interprétation simple. Considérons une surface  $d\mathbf{S}$  contenue dans un plan d'onde et orientée dans le sens de propagation de l'onde. La puissance moyenne  $\delta\mathcal{P}$  qui traverse cette surface est, par définition, le produit de l'intensité lumineuse et de  $d\mathbf{S}$  :

$$\delta\mathcal{P} = I \times d\mathbf{S}. \quad (5.63)$$

L'énergie moyenne qui traverse  $d\mathbf{S}$  en un temps  $dt$  est donc  $\delta\mathcal{U} = \delta\mathcal{P} dt$ . Par ailleurs, puisque l'onde se propage à la vitesse de la lumière  $c$ , l'énergie moyenne qui traverse  $d\mathbf{S}$  en  $dt$  est aussi l'énergie contenue dans le cylindre engendré par  $d\mathbf{S}$  de longueur  $c dt$ . Connaissant la densité volumique moyenne d'énergie,  $\langle \mathcal{E}_{\text{vol}} \rangle$ , on obtient :

$$\delta\mathcal{U} = \langle \mathcal{E}_{\text{vol}} \rangle \times d\mathbf{S} c dt = \delta\mathcal{P} dt = I d\mathbf{S} dt \quad \text{et donc} \quad I = c \langle \mathcal{E}_{\text{vol}} \rangle. \quad (5.64)$$

Si la norme de  $\mathbf{E}_0$  détermine l'intensité lumineuse et donc la puissance portée par l'onde, la direction dans laquelle oscille le champ électrique joue aussi un rôle important, notamment dans son interaction avec la matière. Cette direction est ce qu'on appelle la *polarisation* de l'onde. Notons d'ores-et-déjà qu'il faut ici entendre « direction » dans un sens large : nous verrons que le champ électrique peut aussi bien osciller le long d'une direction bien déterminée que tourner autour d'un axe.

## Définition : Polarisation

*On appelle polarisation d'une onde la direction d'oscillation de son champ électrique.*

Pour une onde plane progressive  $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ , la polarisation est donnée par le vecteur unitaire  $\underline{\mathbf{u}}$ , complexe dans le cas général, et qui s'écrit

$$\underline{\mathbf{u}} = \frac{\underline{\mathbf{E}}_0}{|\underline{\mathbf{E}}_0|}. \quad (5.65)$$

Le vecteur polarisation d'une onde plane dans le vide est nécessairement orthogonal au vecteur d'onde :

$$\underline{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (5.66)$$

La polarisation de l'onde plane est uniforme : elle ne dépend pas de  $\mathbf{r}$ .

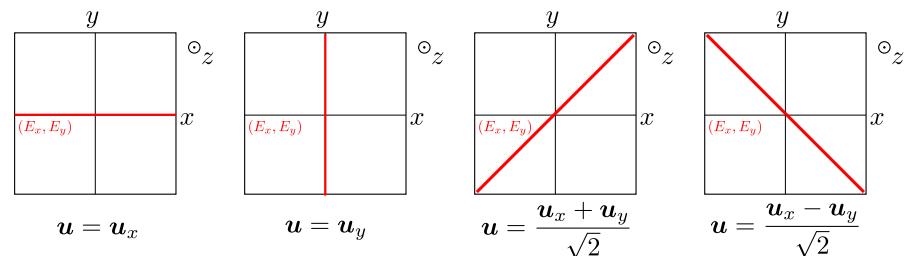


FIGURE 5.4 – Polarisations rectilignes d'une onde plane qui se propage vers les  $z$  croissants. L'onde s'écrit  $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 \underline{\mathbf{u}} e^{i(\omega t - kz)}$ , et on trace les courbes de coordonnées  $(E_x(z, t), E_y(z, t))$  à  $z$  fixé.

Dans toute la suite, on considère une onde plane progressive qui se propage vers les  $z$  croissants :  $\mathbf{k} = k \mathbf{u}_z$  et  $\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{i(\omega t - kz)}$ . Notons que le champ  $\underline{\mathbf{E}}_0$  peut a priori être complexe comme nous allons le voir par la suite.

## POLARISATION RECTILIGNE

Si le champ électrique oscille dans une direction fixe, nécessairement orthogonale à  $\mathbf{u}_z$ , c'est-à-dire que nous pouvons écrire

$$\underline{\mathbf{E}}_0 = E_0 \mathbf{u}_x, \quad (5.67)$$

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_x, \quad (5.68)$$

on dit que l'onde est *polarisée rectilignement* ou *linéairement*. Dans l'exemple précédent, le vecteur polarisation  $\underline{\mathbf{u}}$  est le vecteur  $\mathbf{u}_x$ . Ce vecteur est donc un vecteur *réel*.

Toutes les polarisations rectilignes orthogonales à  $\mathbf{u}_z$  sont possibles pour l'onde plane progressive. On représente graphiquement la polarisation de l'onde en dessinant la « trajectoire » de  $\mathbf{E}(z, t)$  dans un plan d'onde  $z = \text{cte}$ . Mathématiquement parlant, nous traçons la courbe paramétrique  $(E_x(z, t), E_y(z, t))$  pour le paramètre  $t$ . Par convention, on trace toujours cette trajectoire en choisissant les axes de telle façon que la direction de propagation pointe vers le lecteur. On dit qu'on se place du point de vue du récepteur.

On représente, figure 5.4, quelques polarisations rectilignes possibles. Pour simplifier, on donne ci-dessous les expressions de  $E_x$  et  $E_y$  dans le plan  $z = 0$ .

- $\mathbf{u} = \mathbf{u}_x$  : on a  $E_x(0, t) = E_0 \cos(\omega t)$  et  $E_y(0, t) = 0$ ,
- $\mathbf{u} = \mathbf{u}_y$  : on a  $E_x(0, t) = 0$  et  $E_y(0, t) = E_0 \cos(\omega t)$ ,
- $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$  : on a  $E_x(0, t) = E_y(0, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t)$ ,

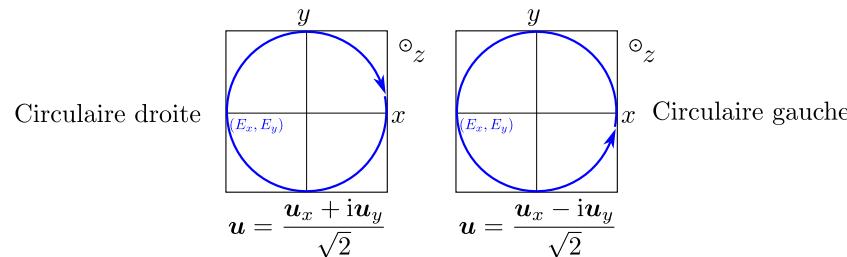


FIGURE 5.5 – Polarisations circulaires d'une onde plane qui se propage vers les  $z$  croissants. L'onde s'écrit  $\underline{E} = E_0 \underline{u} e^{i(\omega t - kz)}$ , et on trace les courbes de coordonnées  $(E_x(z, t), E_y(z, t))$  à  $z$  fixé.

- $\underline{u} = (\mathbf{u}_x - \mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$  : on a  $E_x(0, t) = -E_y(0, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t)$ .

On constate dans tous les cas que les composantes  $E_x$  et  $E_y$  oscillent *en phase ou en opposition de phase*.

### POLARISATION CIRCULAIRE

Les composantes  $E_x$  et  $E_y$  n'oscillent pas nécessairement en phase. Considérons par exemple l'onde résultant de la superposition de deux ondes planes progressives co-propageantes,  $\underline{E}_1$  et  $\underline{E}_2$ , polarisées rectilignement mais de polarisations orthogonales :

$$\underline{E}_1(z, t) = E_1 \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_x \quad \text{et} \quad \underline{E}_2(z, t) = E_2 \cos(\omega t - kz + \varphi) \mathbf{u}_y, \quad (5.69)$$

donc, pour  $\underline{E} = \underline{E}_1 + \underline{E}_2$ ,

$$E_x(z, t) = E_1 \cos(\omega t - kz) \quad \text{et} \quad E_y(z, t) = E_2 \cos(\omega t - kz + \varphi). \quad (5.70)$$

On remarque alors que :

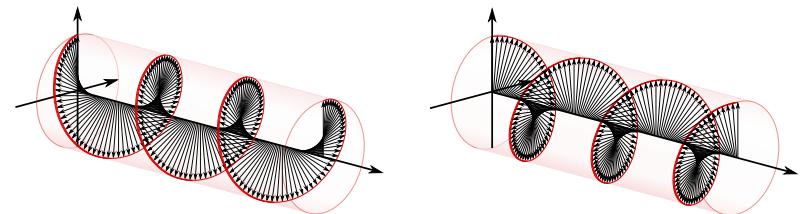
- si les composantes  $E_x$  et  $E_y$  ont la même amplitude :  $E_1 = E_2$ ,
- si les composantes  $E_x$  et  $E_y$  sont en quadrature de phase :  $\varphi = \pm\pi/2[2\pi]$

alors  $E_x(z, t)^2 + E_y(z, t)^2 = 2E_1^2$ , qui est l'équation paramétrique d'un cercle : le champ électrique dans un plan d'onde ( $z = \text{cte}$ ) décrit un cercle. On dit dans ce cas que la polarisation de l'onde est *circulaire*.

On trace figure 5.5 les deux polarisations circulaires possibles pour l'onde plane qui se propage vers les  $z$  croissants. On donne une nouvelle fois les expressions des composantes dans le plan  $z = 0$  pour simplifier :

### Remarque 3

La terminologie gauche et droite pour les polarisations circulaires trouve son explication si l'on regarde l'évolution du vecteur  $\underline{E}$  non plus dans un plan d'onde donné mais dans sa propagation le long de l'axe ( $Oz$ ). On trace dans la figure ci-dessous cette évolution pour les deux polarisations circulaires gauche et droite.



circulaire droite      circulaire gauche  
(figure extraite de fr.wikipedia.org/wiki/Polarisation\_circulaire)

Pour la polarisation circulaire droite, le vecteur  $\underline{E}$  décrit une hélice qui respecte la règle de la main droite, alors que l'hélice est inversée pour la polarisation circulaire gauche.

- Si  $\varphi = +\pi/2$ , alors  $\underline{u} = (\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$ . On a  $E_x(0, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t$  et  $E_y(0, t) = -\frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin \omega t$ . Le cercle tracé figure 5.5 est parcouru dans le sens horaire. On dit que l'onde est polarisée *circulaire droite* ;
- Si  $\varphi = -\pi/2$ , alors  $\underline{u} = (\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$ . On a  $E_x(0, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t$  et  $E_y(0, t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \sin \omega t$ . Le cercle tracé figure 5.5 est parcouru dans le sens direct. On dit que l'onde est polarisée *circulaire gauche*.

On constate dans les deux cas, et contrairement aux polarisations rectilignes, que le vecteur polarisation  $\underline{u}$  est maintenant complexe.

### POLARISATION ELLIPTIQUE

Si la polarisation de l'onde électromagnétique n'est ni rectiligne ni circulaire, on dit que la polarisation est elliptique : la courbe paramétrique  $(E_x(z, t), E_y(z, t))$  est maintenant une ellipse parcourue, à l'instar de la polarisation circulaire, dans le sens direct ou dans le sens indirect. On parle alors de polarisations elliptiques gauche ou droite. Nous retiendrons seulement, dans le cas général, que la polarisation est caractérisée par la donnée de deux nombres réels, le rapport  $\beta$  des amplitudes de  $E_x(z, t)$  et de  $E_y(z, t)$  et leur phase relative  $\varphi$ . On peut en effet écrire toute onde plane de vecteur

d'onde  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_z$  sous la forme

$$E_x(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz), \quad E_y(z, t) = \beta E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi). \quad (5.71)$$

Ces deux nombres réels sont précisément les deux nombres réels qui permettent d'écrire le vecteur unitaire  $\underline{\mathbf{u}}$  :

$$\underline{\mathbf{u}} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2}} \mathbf{u}_x + \frac{\beta e^{i\varphi}}{\sqrt{1+\beta^2}} \mathbf{u}_y. \quad (5.72)$$

#### À retenir : Polarisations rectilignes et circulaires

Pour une onde plane progressive se propageant dans la direction des  $z$  croissants  $\underline{\mathbf{E}} = E_0 \underline{\mathbf{u}} e^{i(\omega t - kz)}$ , dont les composantes  $E_x$  et  $E_y$  sont

$$E_x(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz), \quad E_y(z, t) = \beta E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi), \quad (5.73)$$

- Si les composantes  $E_x$  et  $E_y$  oscillent *en phase* ( $\varphi = 0$ ) ou en opposition de phase ( $\varphi = \pi$ ), la polarisation est rectiligne. Le vecteur  $\underline{\mathbf{u}}$  est réel;
- Si les composantes  $E_x$  et  $E_y$  oscillent en *quadrature de phase* ( $\varphi = \pm\pi/2$ ) et si elles sont d'amplitudes identiques ( $\beta = 1$ ) alors la polarisation est circulaire et le vecteur polarisation est complexe :  $\underline{\mathbf{u}} = (\mathbf{u}_x \pm i\mathbf{u}_y)/\sqrt{2}$ 
  - Si  $\underline{\mathbf{E}}$  tourne autour de  $(Oz)$  dans le sens direct dans un plan d'onde, du point de vue du récepteur, l'onde est circulaire gauche ;
  - Si  $\underline{\mathbf{E}}$  tourne autour de  $(Oz)$  dans le sens horaire dans un plan d'onde, du point de vue du récepteur, l'onde est circulaire droite.
- Si la polarisation de l'onde n'est ni rectiligne ni circulaire, on dit qu'elle est *elliptique*.

#### À retenir : Section 5.2

- Écriture d'une onde plane progressive (OPPM) dans le vide,
- Définition des ondes TE, TM et TEM. Savoir qu'une OPPM dans le vide est TEM,
- Relation entre  $\underline{\mathbf{E}}$  et  $\underline{\mathbf{B}}$  pour une OPPM,
- Puissance et intensité lumineuse pour une OPPM,
- Savoir définir, écrire et reconnaître une polarisation rectiligne et une polarisation circulaire.

#### Exercices d'application 1

1. Les ondes suivantes sont-elles polarisées rectilignement, circulairement ou ni l'une ni l'autre (donc elliptiquement) ? Dans le cas d'une polarisation rectiligne, donner l'angle que fait le vecteur polarisation avec  $(Ox)$ . Dans le cas d'une polarisation circulaire, préciser si la polarisation est gauche ou droite.
  - (a)  $\underline{\mathbf{E}} = E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_x + 3E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_y$ ,
  - (b)  $\underline{\mathbf{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \mathbf{u}_x + iE_0 e^{i(\omega t - kz)} \mathbf{u}_y$ ,
  - (c)  $\underline{\mathbf{E}} = 2E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_x + E_0 \sin(\omega t - kz) \mathbf{u}_y$ ,
  - (d)  $\underline{\mathbf{E}} = 3E_0 \cos(\omega t - kz) \mathbf{u}_x + 3E_0 \sin(\omega t - kz) \mathbf{u}_y$ ,
  - (e)  $\underline{\mathbf{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \mathbf{u}_x - iE_0 e^{i(\omega t - kz)} \mathbf{u}_y$ ,
  - (f)  $\underline{\mathbf{E}} = E_0 e^{i(\omega t + kz)} \mathbf{u}_x - iE_0 e^{i(\omega t + kz)} \mathbf{u}_y$ .
2. On considère une onde plane progressive qui se propage dans le vide le long de  $(Ox)$  dans la direction des  $x$  croissants. L'onde est polarisée rectilignement selon  $\mathbf{u}_y$ . Écrire les champs  $\underline{\mathbf{E}}$  et  $\underline{\mathbf{B}}$  en notations complexes et en notations réelles.
3. On considère une onde plane progressive qui se propage dans le vide le long de  $(Oz)$  dans la direction des  $z$  croissants. L'onde est polarisée circulairement. Écrire les champs  $\underline{\mathbf{E}}$  et  $\underline{\mathbf{B}}$  en notations complexes et en notations réelles.
4. On considère deux ondes  $\underline{\mathbf{E}}_1 = E_0(\mathbf{u}_x + i\mathbf{u}_y) e^{i(\omega t - kz)}$  et  $\underline{\mathbf{E}}_2 = E_0(\mathbf{u}_x - i\mathbf{u}_y) e^{i(\omega t - kz)}$ . Quelle est la polarisation de ces ondes ? Quelle est la polarisation de  $\underline{\mathbf{E}}_1 + \underline{\mathbf{E}}_2$  ? Et de  $\underline{\mathbf{E}}_1 - \underline{\mathbf{E}}_2$  ?



### 5.3 PROPAGATION DANS UN DIÉLECTRIQUE : INDICE OPTIQUE ET DIOPTRES

Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. En dehors des sources des ondes, les densités de charge  $\rho$  et de courant  $j$  étaient donc nulles. Il en va différemment quand les ondes se propagent dans un milieu matériel, et la situation devient plus complexe. Dans ce cas en effet, la présence des champs  $E$  et  $B$  peut modifier les densités de charges et de courant. Mais ces mêmes densités créent leurs propres champs électriques et magnétiques qui viennent s'ajouter au champ de l'onde incidente.

Une étude avancée de la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux sort du cadre de ce cours. Il est toutefois une situation où les équations de Maxwell prennent une forme très simple : celle des milieux diélectriques LHI, c'est-à-dire les milieux linéaires, homogènes et isotropes.

#### 5.3.1 MILIEUX DIÉLECTRIQUES LHI

Nous faisons par la suite les hypothèses suivantes sur le milieu dans lequel les ondes électromagnétiques se propagent :

- milieu diélectrique : il n'y a pas de charges libres dans le milieu. À basse fréquence, cela revient à dire que le milieu est isolant ;
- milieu homogène : les propriétés du milieu sont les mêmes en tout point du milieu ;
- milieu isotrope : la réponse du milieu aux champs  $E$  et  $B$  ne dépend ni de la polarisation ni de la direction de propagation de l'onde ;
- milieu linéaire : la réponse du milieu (par exemple la modification de la densité de charge au passage de l'onde) est linéaire en l'amplitude de l'onde. Cette hypothèse n'est en général valide que pour des ondes de « suffisamment faible » amplitude. On retrouve ainsi, contrairement à la propagation dans le vide, une hypothèse similaire à celles que nous avions déjà faites pour les ondes mécaniques !

Si toutes ces hypothèses sont vérifiées alors les équations de Maxwell restent inchangées à la modification près de  $\epsilon_0$  en  $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ . La grandeur  $\epsilon_r$ , sans dimension, est appelée *permittivité relative du milieu*. Elle est toujours positive et plus grande que 1 :

$$\operatorname{div} E = 0 \quad (5.74)$$

$$\operatorname{rot} B = \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad (5.75)$$

$$\operatorname{div} B = 0 \quad (5.76)$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \quad (5.77)$$

On peut alors reprendre la dérivation de l'équation d'onde pour les champs. Elle est exactement identique à celle que nous avions faite au début du chapitre. Nous obtenons finalement

$$\left( \Delta - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E = 0 \quad (5.78)$$

$$\left( \Delta - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) B = 0. \quad (5.79)$$

Les ondes électromagnétiques sont donc à nouveau solution de l'équation de d'Alembert mais elles se propagent maintenant à la vitesse

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \leq c. \quad (5.80)$$

On réécrit cette dernière équation en introduisant l'indice optique ou indice de réfraction  $n$  du milieu.

#### Définition : Indice optique

Pour un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope, de permittivité diélectrique relative  $\epsilon_r$ , on définit l'indice optique ou indice de réfraction, noté  $n$ , comme

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \geq 1 \quad (5.81)$$

La vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique d'indice  $n$  est

$$c' = \frac{c}{n} \leq c. \quad (5.82)$$

De nombreux matériaux s'apparentent à des milieux diélectriques. Aussi pouvons-nous donner un indice optique tel que défini ci-dessus (réel  $\geq 1$ ) pour quasiment tous les milieux isolants et non absorbants<sup>2</sup>. La valeur de l'indice de réfraction dépend beaucoup du milieu.

Valeurs d'indice de réfraction pour une onde de longueur d'onde  $\lambda = 589$  nm (jaune)

	vide	air	eau	plexiglas	verre (BK7)	verre (LaSF30)	diamant
$n$	1	1,0003	1,333	1,49	1,52	1,80	2,42

2. On peut aussi définir un indice optique dans ce cas, mais il n'est plus réel.

Le plus souvent, la valeur de l'indice dépend également fortement de la fréquence de l'onde. Pour l'eau par exemple, alors que  $n = 1,33$  pour une onde lumineuse, à basse fréquence,  $\epsilon_r \approx 80$  et  $n \approx 9$ . Notons qu'alors, la vitesse de phase des ondes,  $c/n$ , dépend de la fréquence de l'onde : le milieu est dispersif. C'est précisément la dépendance de l'indice optique en la fréquence de l'onde qui est à l'origine du phénomène de dispersion de la lumière dans les gouttes d'eau ou sur un prisme. Dans tous les cas, la relation de dispersion s'écrit maintenant

$$\mathbf{k}^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}. \quad (5.83)$$

### 5.3.2 RÉFLEXION ET TRANSMISSION SUR UN DIOPTRE

Pour une onde plane progressive monochromatique, nous pouvons reprendre les relations précédentes modifiées pour prendre en compte la valeur de l'indice optique. Nous nous restreindrons ici à donner la relation entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  qui prend maintenant la forme

$$\mathbf{B} = n \frac{\mathbf{u} \wedge \mathbf{E}}{c}, \quad \text{avec } \mathbf{u} = \mathbf{k}/k. \quad (5.84)$$

Cette relation entre les deux champs électrique et magnétique prend en fait une forme très analogue à ce que nous avions écrit entre l'onde de vitesse et de surtension sur la corde ( $T_y = \pm Zv$ ) ou entre l'onde de vitesse et de surpression pour les ondes acoustiques ( $\delta P = \pm z v$ ), dans le cas des ondes planes progressives. Ici, c'est l'indice de réfraction  $n$  qui joue le rôle d'impédance caractéristique du milieu.

Considérons pour nous en convaincre la situation où une onde plane progressive est en incidence normale sur un dioptre, c'est-à-dire la surface de séparation entre deux milieux d'indice  $n_1$  et  $n_2$ . On suppose que l'onde se propage dans le sens des  $z$  croissants et que le dioptre est de normale  $\mathbf{u}_z$ . L'onde est polarisée rectilignement selon  $\mathbf{u}_x$ .

Au niveau de l'interface, l'onde peut se réfléchir ou être transmise. Nous devons considérer les ondes suivantes :

— l'onde incidente

$$\underline{\mathbf{E}}_i = \mathbf{E}_{0,i} e^{i(\omega t - k_i z)} = E_0 e^{i(\omega t - k_i z)} \mathbf{u}_x, \quad (5.85)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_i = n_1 \frac{\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{E}_i}{c} = \frac{n_1 E_0}{c} e^{i(\omega t - k_i z)} \mathbf{u}_y, \quad (5.86)$$

$$\mathbf{k}_i = n_1 \frac{\omega}{c} \mathbf{u}_z, \quad (5.87)$$

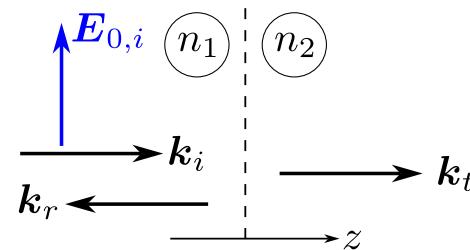


FIGURE 5.6 – Réflexion et transmission d'une onde plane progressive incidente sur une dioptre séparant un milieu d'indice  $n_1$  et un milieu d'indice  $n_2$ .

— l'onde réfléchie

$$\underline{\mathbf{E}}_r = \mathbf{E}_{0,r} e^{i(\omega t + k_r z)} \quad (5.88)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_r = -n_1 \frac{\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{E}_r}{c} = -n_1 \frac{\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{E}_{0,r}}{c} e^{i(\omega t + k_r z)}, \quad (5.89)$$

$$\mathbf{k}_r = -n_1 \frac{\omega}{c} \mathbf{u}_z, \quad (5.90)$$

— l'onde transmise

$$\underline{\mathbf{E}}_t = \mathbf{E}_{0,t} e^{i(\omega t - k_t z)} \mathbf{u}_x \quad (5.91)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_t = n_2 \frac{\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{E}_t}{c} = n_2 \frac{\mathbf{u}_z \wedge \mathbf{E}_{0,t}}{c} e^{i(\omega t - k_t z)}, \quad (5.92)$$

$$\mathbf{k}_t = n_2 \frac{\omega}{c} \mathbf{u}_z. \quad (5.93)$$

On utilise alors les relations de passage des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  au niveau de l'interface. Puisque les ondes planes sont transverses, les champs électriques et magnétiques des ondes réfléchie et transmise, comme pour l'onde incidente, sont orthogonaux à la direction de propagation des ondes. Tous les champs sont donc tangents au dioptre. Puisque la composante tangentielle du champ électrique est continue, on peut écrire que les champs électriques eux-mêmes sont continus. Par ailleurs, puisque le milieu est isolant, il n'y a ni charges ni courants surfaciques, et la composante tangentielle du champ magnétique est continue également<sup>3</sup>. Les champs magnétiques sont donc également continus à la traversée du dioptre :

$$\mathbf{E}_{0,i} + \mathbf{E}_{0,r} = \mathbf{E}_{0,t} \Rightarrow E_0 \mathbf{u}_x + \mathbf{E}_{0,r} = \mathbf{E}_{0,t} \quad (5.94)$$

$$\mathbf{B}_{0,i} + \mathbf{B}_{0,r} = \mathbf{B}_{0,t} \Rightarrow n_1 \mathbf{E}_0 \mathbf{u}_y - n_1 \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{E}_{0,r} = n_2 \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{E}_{0,t}. \quad (5.95)$$

3. Il faut en fait aussi supposer que le milieu est non magnétique, ce qui revient à dire qu'on n'a pas à modifier la valeur de  $\mu_0$  dans les équations de Maxwell comme on l'a fait pour  $\epsilon_0$ .

La résolution ne pose pas problème, et l'on trouve finalement

$$\mathbf{E}_{0,r} = r \mathbf{E}_{0,i}, \quad \text{avec} \quad r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad (5.96)$$

$$\mathbf{E}_{0,t} = t \mathbf{E}_{0,i}, \quad \text{avec} \quad t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \quad (5.97)$$

On obtient ainsi les coefficients de réflexion qui prennent exactement la même forme que ceux que nous avions obtenus pour les ondes mécaniques (équation (4.79)), en remplaçant l'impédance mécanique par l'indice de réfraction.

### À retenir : Section 5.3

- Définition de l'indice de réfraction ou indice optique,
- Vitesse de propagation des ondes dans un milieu diélectrique LHI,
- Relation de dispersion et lien entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  pour une OPPM dans un milieu d'indice  $n$ ,
- Savoir calculer des coefficients de réflexion et de transmission pour une OPPM en incidence normale sur un dioptre.

# A CORRIGÉ DES EXERCICES D'APPLICATION

## A.1 CHAPITRE 1

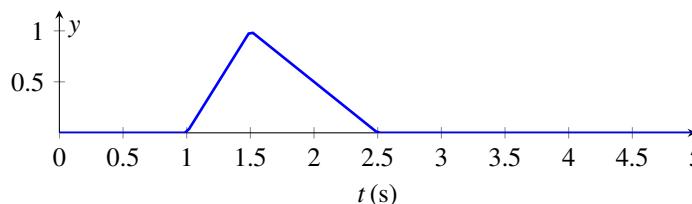
1. (a) oscillation d'un pendule : pas une onde, la perturbation est locale, elle ne se déplace pas ;  
 (b) vibrations de la membrane d'un tambour : c'est une onde mécanique bidimensionnelle. Grandeurs physiques concernées : déplacement transversal de la membrane, vitesse de déplacement des éléments de la membrane, tension de la membrane ;  
 (c) tremblements de terre : c'est une onde mécanique tridimensionnelle. Grandeurs physiques concernées : déplacement transversal ou longitudinal du sol, vitesse de déplacement,  
 (d) café qui monte dans un morceau de sucre : pas une onde, on passe d'un état d'équilibre à un autre et déplacement d'ensemble du café dans le sucre ;  
 (e) écoulement d'un fleuve : pas une onde, déplacement d'ensemble du système physique ;  
 (f) lumière dans une fibre optique : c'est une onde tridimensionnelle, une onde électromagnétique. Grandeurs physiques concernées : champs électriques et magnétiques ;  
 (g) son produit par un claquement de doigts : le son est une onde sonore, tridimensionnelle. Grandeurs physiques concernées : déplacement et vitesse des molécules de l'air, pression locale, densité... ;  
 (h) signal nerveux : c'est une onde unidimensionnelle. Il s'agit d'un signal électrique, les grandeurs concernées sont par exemple la tension électrique et le courant électrique locaux ;  
 (i) battements de cœur : c'est un phénomène périodique mais ce n'est pas une onde, il n'y a pas de déplacement de la perturbation.
2. Une onde lumineuse, qui n'est pas une onde mécanique, tridimensionnelle et qui se déplace à la vitesse de la lumière.  
 Une onde acoustique dans l'air, c'est une onde mécanique tridimensionnelle qui se déplace à  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .  
 Une onde acoustique dans un solide, le sol, une onde mécanique tridimensionnelle dont la vitesse de propagation dépend beaucoup de la nature du sol.
3. (a) vibrations d'une corde de guitare : onde transverse, la direction de propagation est la direction de la corde, la direction de la perturbation lui est orthogonale,

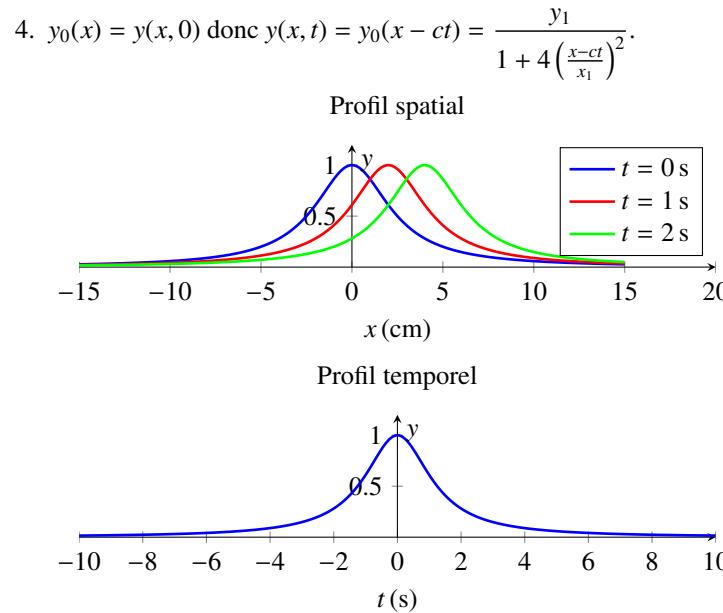
- (b) sonar d'un bateau : onde longitudinale, la direction de propagation et la direction de la perturbation sont identiques, elle part de la source vers l'objet vu par le sonar ;  
 (c) ola dans un stade : onde transverse, la direction de propagation est le contour horizontal du stade, alors que la direction de la perturbation est la verticale.

## A.2 CHAPITRE 2

### A.2.1 EXERCICES D'APPLICATION 1

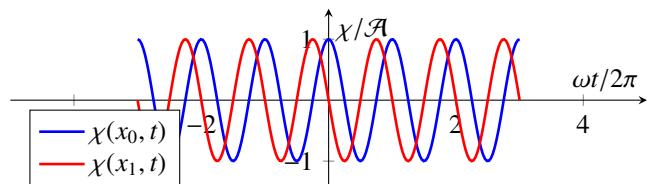
1. (a) Onde progressive qui se propage dans le sens des  $x$  décroissants à la vitesse  $c = \omega/k$  ;  
 (b) Ce n'est pas une onde progressive, la fonction d'onde dépend séparément de l'espace et du temps ;  
 (c) Ce n'est pas une onde progressive, elle ne s'écrit pas comme une fonction de  $x \pm ct$  seulement. Par exemple :  $2i\chi(x, t) = e^{i(2kx+ct)} + e^{-i\omega t}$  soit la somme d'une onde progressive et d'un terme qui ne dépend pas de l'espace ;  
 (d) Onde progressive qui se propage dans le sens des  $x$  décroissants à la vitesse  $3c/2$  ;  
 (e) Onde progressive qui se propage dans le sens des  $x$  décroissants à la vitesse  $c = \omega/k$ .
2. (a) Onde progressive qui se propage dans le sens des  $x$  décroissants à la vitesse de  $8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  
 (b) Onde progressive qui se propage dans le sens des  $x$  croissants à la vitesse de  $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  
 (c) Ce n'est pas une onde progressive, le motif de l'onde change avec le temps. En fait, il s'agit de la somme de deux ondes progressives contra-propagantes qui se déplacent à  $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  
 (d) Il s'agit d'une onde progressive, mais il n'y a pas assez d'information pour savoir la direction et la vitesse de propagation. Par exemple, cela pourrait être une propagation dans le sens des  $x$  croissants à  $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ou dans le sens des  $x$  décroissants à  $3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , ou encore dans le sens des  $x$  croissants à  $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- 3.



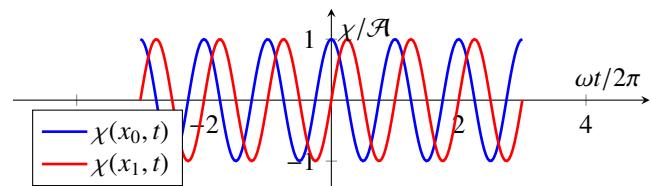


### A.2.2 EXERCICES D'APPLICATION 2

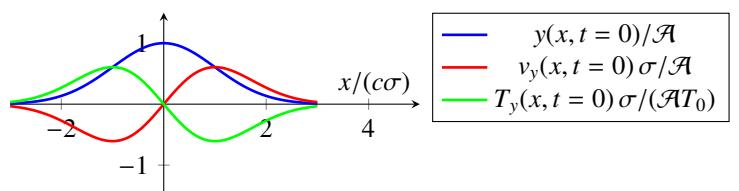
1. (a)  $\lambda = c/v = 1,2 \text{ m}$ .  
 (b) Avec  $k = 2\pi/\lambda$ , la distance entre deux points déphasés de  $\delta\phi$  est  $\delta x = \phi/k$  donc,  $\delta\phi = \pi/3 \leftrightarrow \delta x = \lambda/6$ ,  $\delta\phi = \pi/2 \leftrightarrow \delta x = \lambda/4$ ,  $\delta\phi = 2\pi \leftrightarrow \delta x = \lambda$ .  
 (c)  $\delta\phi = \omega\delta t = 2\pi\nu\delta t$ . Ici,  $\delta\phi = 3\pi/2$ .
2.  $\mathcal{A} = 3 \text{ m}$ ,  $\omega = 2,8 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\nu = 880 \text{ Hz}$ ,  $k = 8,3 \text{ rad} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\mathbf{k} = +k\mathbf{u}_x$  car l'onde se propage dans le sens des  $x$  croissants, la phase de l'onde est l'argument du sinus et la vitesse de phase  $v_\phi = \omega/k = 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
3. On écrit  $\chi(x, t) = \chi_-(x + ct)$  et  $\chi(x_0, t) = \chi_-(x_0 + ct) = \mathcal{A} \cos \omega t$ . Donc  $\chi(x, t) = \mathcal{A} \cos(\omega t - k(x - x_0))$ .



4. On obtient dans ce cas  $\chi(x, t) = \mathcal{A} \cos(\omega t - k(x - x_0))$ .



5. (a) Vitesse :  $c = \sqrt{T_0/\mu}$ ,  $y(x, t) = \mathcal{A} \sin(\omega t - kx)$  avec  $k = \pm\omega/c$  selon que l'onde se propage vers les  $x$  croissants ou décroissants.  
 (b)  $v_y(x, t) = \partial_t y(x, t) = \mathcal{A}\omega \cos(\omega t - kx)$ .  
 (c)  $T_y(x, t) = T_0 \partial_x y(x, t) = -T_0 \mathcal{A}k \cos(\omega t - kx) = -\sqrt{T_0\mu} \mathcal{A}\omega \cos(\omega t - kx) = -\sqrt{T_0\mu} v_y(x, t)$ .  
 (d)  $y(x, t) = \mathcal{A} \exp\left(-\frac{(t-x/c)^2}{2\sigma^2}\right)$  pour une onde qui se propage vers les  $x$  croissants.  
 $v_y(x, t) = -\frac{\mathcal{A}(t-x/c)}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{(t-x/c)^2}{2\sigma^2}\right)$   
 $T_y = \frac{T_0 \mathcal{A}(t-x/c)}{c\sigma^2} \exp\left(-\frac{(t-x/c)^2}{2\sigma^2}\right) = -\sqrt{T_0\mu} v_y(x, t)$ .  
 (e) Profils spatiaux



6. (a) Avec  $y(x, t) = \mathcal{A} \sin(\omega t - kx)$  on a  $\underline{y}(x, t) = -i\mathcal{A} \exp(i(\omega t - kx))$ .  
 (b)  $\underline{v}_y(x, t) = i\omega \underline{y}(x, t) = \omega \mathcal{A} \exp(i(\omega t - kx))$  et donc  $v_y(x, t) = \mathcal{A}\omega \cos(\omega t - kx)$ .  
 (c)  $\underline{T}_y(x, t) = -ik\underline{y}(x, t) = -kT_0 \mathcal{A} \exp(i(\omega t - kx)) = -\sqrt{T_0\mu} \underline{v}_y(x, t)$  et donc  $T_y(x, t) = -\sqrt{T_0\mu} v_y(x, t)$ .

### A.2.3 EXERCICES D'APPLICATION 3

1. (a) Masse linéique  $\mu = \rho \pi R^2 = 7,4 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $c = \sqrt{T_0/\mu} = 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Impédance  $Z = \sqrt{T_0\mu} = 2,5 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .  
 (b)  $\lambda = c/v = 1,3 \text{ m}$ ,  
 (c) Si la longueur d'onde est fixée, il faut augmenter  $c$  pour augmenter  $v = c/\lambda$  et donc augmenter la tension. Ou alors diminuer la masse linéique  $\mu$  soit diminuer le rayon.

2. L'onde se propage à la vitesse  $c$  sur une corde de masse linéique  $\mu$ . La tension à l'équilibre de la corde est donc  $T_0 = \mu c^2$  et son impédance  $Z = \sqrt{T_0\mu} = \mu c$ . Comme l'onde est une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants, on peut écrire  $T_y = -Zv_y = -\mu v_0 c \exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{2\sigma^2}\right)$ .
3. L'onde de vitesse a pour expression

$$v_y(x, t) = \partial_t y(x, t) = \frac{cy_0}{\sigma^2} \left[ (x - ct) \exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{\sigma^2}\right) - (x + ct) \exp\left(-\frac{(x+ct)^2}{2\sigma^2}\right) \right].$$

L'onde de déplacement  $y(x, t)$  n'est pas une onde progressive, on ne peut donc pas utiliser directement les relations liant ondes de vitesse et de tension via l'impédance. On constate toutefois que  $y(x, t) = y_+(x - ct) + y_-(x + ct)$  avec  $y_{\pm}(x \mp ct) = y_0 \exp\left(-\frac{(x\mp ct)^2}{\sigma^2}\right)$ . Les ondes de déplacement  $y_+$  et  $y_-$  sont des ondes progressives.

L'onde  $y_+$  se propage vers les  $x$  croissants, on a donc  $T_{y,+} = -Zv_{y,+}$  où  $v_{y,+} = \partial_t y_+(x - ct) = \frac{y_0 c}{\sigma^2} (x - ct) \exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{2\sigma^2}\right)$ , avec  $Z = \mu c$ .

L'onde  $y_-$  se propage vers les  $x$  décroissants, on a donc  $T_{y,-} = +Zv_{y,-}$  où  $v_{y,-} = \partial_t y_-(x + ct) = -\frac{y_0 c}{\sigma^2} (x + ct) \exp\left(-\frac{(x+ct)^2}{2\sigma^2}\right)$ .

Finalement,  $T_y(x, t) = T_{y,+}(x - ct) + T_{y,-}(x + ct)$ .

#### A.2.4 EXERCICES D'APPLICATION 4

- La puissance portée par l'onde est  $\mathcal{P} = Z(v_y^2) = Z\mathcal{A}^2\omega^2/2$ , avec  $\mathcal{A}$  l'amplitude de l'onde de déplacement. On trouve donc  $\mathcal{P} = 4,4 \text{ mW}$ . L'amplitude de l'onde de vitesse est  $v_{y,0} = \omega\mathcal{A} = 32 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ . L'amplitude  $T_{y,0}$  de l'onde de tension peut être trouvée par  $\mathcal{P} = T_{y,0}^2/(2Z)$  ou par  $T_{y,0} = Zv_{y,0} = Z\omega\mathcal{A}$ . On trouve  $T_{y,0} = 0,28 \text{ N}$ .
- L'onde se propage à la vitesse  $c$  sur une corde de masse linéique  $\mu$ . La tension à l'équilibre de la corde est donc  $T_0 = \mu c^2$  et son impédance  $Z = \sqrt{T_0\mu} = \mu c$ . Comme l'onde est une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants, le courant d'énergie est donné par  $\mathbf{j}_m = Zv_y^2 \mathbf{u}_x = \mu c v_0^2 \exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{\sigma^2}\right) \mathbf{u}_x$ .
- L'onde de vitesse a pour expression

$$v_y(x, t) = \partial_t y(x, t) = \frac{cy_0}{\sigma^2} \left[ (x - ct) \exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{\sigma^2}\right) - (x + ct) \exp\left(-\frac{(x+ct)^2}{2\sigma^2}\right) \right].$$

L'onde de déplacement  $y(x, t)$  n'est pas une onde progressive, on ne peut donc pas utiliser les relations liant ondes de vitesse et de tension via l'impédance. On

calcule plutôt  $T_y$ , en notant  $T_0 = \mu c^2$ , via

$$\begin{aligned} T_y(x, t) &= T_0 \partial_x y(x, t) \\ &= -\frac{T_0 y_0}{\sigma^2} \left[ (x - ct) \exp\left(-\frac{(x-ct)^2}{2\sigma^2}\right) + (x + ct) \exp\left(-\frac{(x+ct)^2}{2\sigma^2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Le courant d'énergie est alors donné par  $\mathbf{j}_m(x, t) = -T_y(x, t) v_y(x, t) \mathbf{u}_x$ .

### A.3 CHAPITRE 3

#### A.3.1 EXERCICES D'APPLICATION 1

- L'onde étant longitudinale, les particules du fluides sont mises en mouvement dans la direction de propagation de l'onde, donc selon  $\mathbf{u}_x$ . Il s'agit d'une onde plane progressive unidimensionnelle, on peut donc écrire la fonction d'onde de l'onde de déplacement sous la forme  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A} \cos(\omega t - kx + \phi_0) \mathbf{u}_x$ .
- Pour une onde sphérique sortante, les particules sont mises en mouvement dans le sens de  $\mathbf{u}_r$ , le vecteur des coordonnées sphériques centrées sur le centre commun des surfaces d'onde (sphères concentriques). La fonction d'onde de déplacement s'écrit  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathcal{A}}{r} \cos(\omega t - kr + \phi_0) \mathbf{u}_r$ .
- (a) C'est une onde sinusoïdale dont la phase s'écrit  $\omega t - kz$ . Les surfaces d'onde sont donc les plans de normale  $\mathbf{u}_z$ . L'amplitude est uniforme. Il s'agit donc d'une onde plane progressive qui se propage vers les  $z$  croissants.  
(b) La relation de dispersion donne  $k^2 = \omega^2/c_s^2$ . Si l'onde se propage vers les  $z$  croissants, on a  $k > 0$  et donc  $k = \omega/c_s$ . Finalement,  $\mathbf{k} = \pm\omega/c_s \mathbf{u}_z$  (+ pour une propagation vers les  $z$  croissants), il ne dépend pas de  $\mathbf{r}$ .  
(c) Si la température augmente, dans l'air considéré comme un gaz parfait, alors  $c_s \propto \sqrt{T}$  augmente aussi. La longueur d'onde  $\lambda = 2\pi c_s/\omega$  augmente donc également.  
(d) L'équation  $\Phi(\mathbf{r}, t) = \pi/2$  se récrit  $z = \frac{\pi}{2k} + \frac{\omega t}{k} = \lambda/4 \pm c_s t$ . Il s'agit donc d'un plan qui de normale ( $Oz$ ) qui se déplace le long de cet axe à la vitesse  $c_s$ .
- (a) Il s'agit à nouveau d'une onde sinusoïdale mais à symétrie sphérique : elle ne dépend que de  $r$ . Son amplitude décroît en  $1/r$ , il s'agit bien d'une onde sphérique.  
La relation de dispersion est la même que pour l'onde plane, mais la direction de  $\mathbf{k}$  est maintenant donnée par  $\mathbf{u}_r$  :  $\mathbf{k} \pm \omega/c_s \mathbf{u}_r$ , avec un + pour une onde sortante et un - pour une onde entrante. Le vecteur d'onde dépend donc de  $\mathbf{r}$  puisque la direction de  $\mathbf{u}_r$  dépend de  $\mathbf{r}$ .



- (b) L'équation  $\Phi(\mathbf{r}, t) = \pi/2$  se récrit  $r = \frac{\pi}{2k} + \frac{\omega t}{k} = \lambda/4 \pm c_s t$ . Il s'agit maintenant d'une sphère dont le rayon croît (onde sortante) ou décroît (onde entrante) à la vitesse  $c_s$ .

### A.3.2 EXERCICES D'APPLICATION 2

- On assimile l'onde sonore émise par l'avion à une onde sphérique. Dès qu'on est loin de l'avion (distance  $r \gg$  taille de l'avion), l'approximation est bonne. L'amplitude de l'onde sonore décroît donc en  $1/r$  et l'intensité acoustique en  $1/r^2$ . Finalement, si le niveau sonore est  $L_0$  à une distance  $r_0$ , alors  $L(r) - L_0 = 10 \log \frac{I(r)}{I(r_0)} = 10 \log \frac{r_0^2}{r^2} = 20 \log \frac{r_0}{r}$ .

Si à  $r_0$ ,  $L(r_0) = 120$  dB, alors  $L(10r_0) = L_0 - 20$  dB = 110 dB. Le niveau sonore perd 20dB « par décade », c'est-à-dire en multipliant la distance à la source par 10. Pour passer sous le seuil de l'audible, il faut aller à la distance  $r_1$  telle que  $L(r_1) = L_0 - 20 \log \frac{r_0}{r_1} = 0$  dB soit  $r_1 = r_0 \times 10^6 = 1 \times 10^5$  km : c'est la distance Paris - Los Angeles !

En fait, le niveau sonore passe sous le seuil de l'audible bien avant cela à cause de l'absorption du son dans l'air.

- (a) Fonction d'onde de déplacement :  $\underline{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{A} e^{i(\omega t - kr)} \mathbf{u}_x$  avec  $\mathcal{A} = 1 \mu\text{m}$  et  $\omega = 2\pi \times 1 \text{ kHz}$ .

Onde de vitesse  $\underline{v} = \partial_t \underline{\Psi} = i\omega \mathcal{A} e^{i(\omega t - kr)} \mathbf{u}_x$ . Son amplitude est  $v_0 = \omega \mathcal{A} = 6 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Comme l'onde est progressive, on peut utiliser la relation entre sur-pression et vitesse :  $\underline{\delta P} = -z \underline{v} \cdot \underline{u}$  où  $\underline{u} = +\mathbf{u}_x$  est la direction de propagation. Finalement,  $\underline{\delta P} = -i\omega z \mathcal{A} e^{i(\omega t - kr)}$ . Son amplitude est  $\delta P_0 = \omega z \mathcal{A} = 2,5 \text{ Pa}$ .

- (b) On peut calculer la puissance acoustique comme  $\mathcal{P} = zv^2/2 \times S$  ou comme  $\mathcal{P} = \delta P^2/(2z) \times S$ . Il faut repasser en notations réelles avant de calculer les carrés :  $v(x, t) = -\omega \mathcal{A} \sin(\omega t - kr)$  donc  $\mathcal{P}(x, t) = z S \omega^2 \mathcal{A}^2 \sin^2(\omega t - kr)$ . Sa valeur moyenne (temporelle) est  $\langle \mathcal{P} \rangle_t = \frac{z S \omega^2 \mathcal{A}^2}{2} = 0,8 \mu\text{W}$ .
- (c) L'intensité acoustique de l'onde plane est  $I = \langle \mathcal{P} \rangle_t / S = 1/2 \times z \omega^2 \mathcal{A}^2 = 8 \text{ mW/m}^2$ . Le niveau sonore est alors  $L = 10 \log(I/I_0)$  où  $I_0 = 1 \times 10^{-12} \text{ W/m}^2$  donc  $L = 100$  dB. Le niveau sonore de l'onde plane est indépendant de la position.
- (a) Le haut-parleur émet une onde sphérique sortante  $\Psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathcal{A}}{r} \cos(\omega t - kr)$ , soit en notations complexes  $\underline{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathcal{A}}{r} e^{i(\omega t - kr)}$ . Sa longueur d'onde est  $\lambda = c_s/v = 1,42 \text{ m}$ .
- (b) Pour que l'onde sphérique ait une structure d'onde plane, il faut se placer à une distance grande devant  $\lambda$ .

- (c)  $\underline{\delta P}(\mathbf{r}, t) = \delta P_0 \frac{r_0}{r} e^{i(\omega t - kr)}$ . À la distance  $d = 10 \text{ m}$ , on peut considérer que l'onde sphérique a la structure d'une onde plane. On peut alors écrire, avec  $z$  l'impédance caractéristique du milieu, et notant que  $\mathbf{u}_r$  est la direction de propagation de l'onde, que l'onde de vitesse s'écrit  $\underline{v} = -\underline{\delta P}/z \mathbf{u}_r$ . Puisque par ailleurs  $\underline{v} = i\omega \underline{\Psi}$ , où  $\Psi$  est l'onde de déplacement, on en déduit que  $\Psi = \frac{i\omega \mathcal{A}}{\omega z}$ .

Son amplitude est alors  $\mathcal{A} = \frac{\delta P_0}{\omega z} \times d_0/d = 1,5 \mu\text{m}$ . On a utilisé ici  $z = \rho_0 c_s$ .

- (d) Pour calculer le niveau sonore, on peut utiliser la relation  $L = 20 \log(\delta P/P_0)$  où  $P_0 = \sqrt{2z I_0} = \sqrt{2 \rho_0 c_s I_0} = 29,6 \mu\text{Pa}$ . On a alors  $L(d_0) = 20 \log(\delta P_0/P_0) = 110 \text{ dB}$  et  $L(d) = L(d_0) - 20 \log(d_0/d) = 90 \text{ dB}$ .

4. (a) Onde de vitesse  $\underline{v} = i\omega \mathcal{A} \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)} \mathbf{u}_r$ .

Pour l'onde de pression, on ne peut pas utiliser la relation vitesse et surpression via l'impédance car l'onde n'est pas plane progressive. On utilise plutôt  $\underline{\delta P} = c_s^2 \delta \rho$  et  $\delta \rho = -\rho_0 \operatorname{div} \Psi$  et donc  $\underline{\delta \rho} = -\rho_0 \mathcal{A} / r^2 \partial_r (r^2 \times \frac{1}{r} e^{i(\omega t - kr)})$ . On obtient  $\underline{\delta P} = \rho_0 c_s^2 \mathcal{A} \left( -\frac{1}{r^2} + i \frac{k}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)}$ .

En notations réelles, on a  $\delta P = -\rho_0 c_s^2 \mathcal{A} \left( \frac{1}{r^2} \cos(\omega t - kr) + \frac{k}{r} \sin(\omega t - kr) \right)$ .

- (b) L'intensité acoustique instantanée est donnée par  $I(r, t) = v(r, t) \times \delta P(r, t)$  avec  $v(r, t) = -\frac{\omega \mathcal{A}}{r} \sin(\omega t - kr)$ . On a donc

$$I(r, t) = \frac{\rho_0 c_s^2 \mathcal{A}^2 \omega}{r^2} \left( \frac{\cos(\omega t - kr) \sin(\omega t - kr)}{r} + k \sin^2(\omega t - kr) \right).$$

Si on calcule la valeur moyenne, on constate que seul le terme en  $\sin^2$  contribue, la moyenne de  $\cos \sin$  étant nulle. On a donc finalement en valeur moyenne  $I(t) = \frac{\rho_0 c_s^2 \mathcal{A}^2 k \omega}{2r^2} = \frac{z \omega^2 \mathcal{A}^2}{2r^2}$ . On retrouve le résultat de l'onde plane !

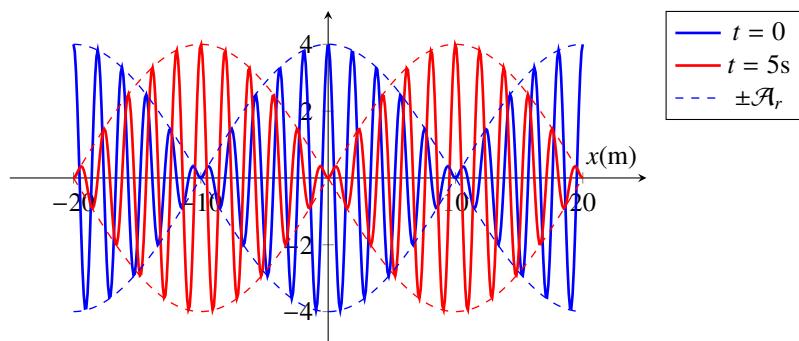
## A.4 CHAPITRE 4

### A.4.1 EXERCICES D'APPLICATION 1

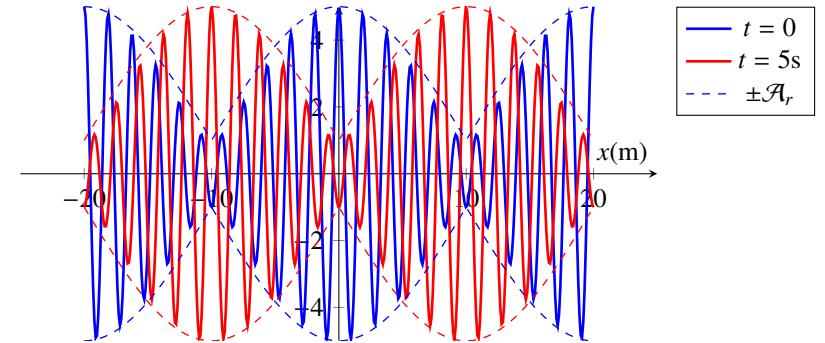
- (a) On calcule  $\chi(x, t) = \cos(\omega t - kr) - \cos(\omega t + kr + \pi/2) = 2 \sin(\omega t + \pi/4) \sin(kx + \pi/4)$ . On a séparation des variables de temps et d'espace, cette fonction d'onde est stationnaire.
- (b) On procède de même :  $\chi(x, t) = 2 \cos(3\omega t + 2kx) \cos(2\omega t + 3kx)$ . Il n'y a pas de séparation des variables, l'onde n'est pas stationnaire.
- (c)  $\chi(x, t) = 2 \sin(3\omega t + \pi/4) \sin(2\omega t + kx + \pi/4)$ . L'onde n'est pas stationnaire.
- (d) Il n'y a pas séparation des variables  $x$  et  $t$ , l'onde n'est pas stationnaire.
- (e) L'onde est stationnaire, elle s'écrit bien comme un produit  $f(t) \times g(x)$ .
- (f) L'onde est stationnaire, elle s'écrit bien comme un produit  $f(t) \times g(x)$ .



2. (a)  $\chi(x, t) = 4 \cos(1,05\pi x - 2,1\pi t) \cos(0,05\pi x - 0,1\pi t)$ . Le terme rapidement oscillant dans le temps est le terme  $\cos(1,05\pi x - 2,1\pi t)$ , on peut donc écrire que l'amplitude de la résultante est  $\mathcal{A}_r(x, t) = 4|\cos(0,05\pi x - 0,1\pi t)|$ .
- (b) À une position fixe de l'espace, l'amplitude oscille lentement dans le temps, en s'annulant périodiquement. On obtient des battements de période  $\pi/(0,1\pi) = 10$  s. La période des oscillations rapides est de  $2\pi/(2,1\pi) = 0,95$  s.
- (c) La période spatiale de  $\mathcal{A}_r$  est  $\lambda = \pi/(0,05\pi) = 20$  m. La longueur d'onde de  $\chi_1$  est  $\lambda_1 = 2,0$  m et la longueur d'onde de  $\chi_2$  est  $\lambda_2 = 1,8$  m. On a donc  $\lambda \gg \lambda_{1,2}/2$ . Dans l'espace aussi, la variation de  $\mathcal{A}_r$  est lente.
- (d) L'amplitude  $\mathcal{A}_r$  prend bien la forme d'une onde progressive puisqu'elle s'écrit sous la forme d'une fonction de  $x - ct$  avec  $c = -2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- (e) L'onde résultante s'annule quand les ondes individuelles sont en opposition de phase. Il faut donc  $(1,1\pi x - 2,2\pi t) - (1,0\pi x - 2,0\pi t) = 0,1\pi x - 0,2\pi t = \pi + p \times 2\pi$  où  $p \in \mathbb{Z}$ . On retrouve donc les interférences destructives aux positions  $x_p = 10 + 20p + 2t$ . Ces positions se déplacent à la vitesse de  $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . La vitesse de phase des ondes  $\chi_1$  et  $\chi_2$  est  $v_{phi} = (2,0\pi)/(1,0\pi) = (2,2\pi)/(1,1\pi) = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- (f) Aux lieux où les deux ondes sont en opposition de phase, l'amplitude de la résultante est la différence des amplitudes individuelles. Ici elle vaut 0. En revanche, si l'amplitude de l'onde  $\chi_2$  passe à 3,0, l'amplitude de la résultante vaut 1,0 aux lieux où les ondes sont en opposition de phase.
- (g) Profils spatiaux avec amplitudes égales à 2,0

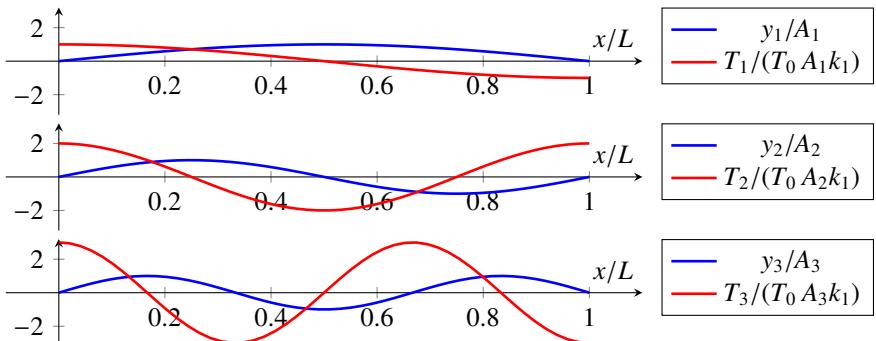


Profils spatiaux avec amplitudes égales à 2,0 et 3,0



#### A.4.2 EXERCICES D'APPLICATION 2

1. L'intervalle spectral libre sur une corde est  $\delta\nu = c/2L$ . Les fréquences dans le spectre sont espacées de  $\delta\nu = 262 \text{ Hz}$  donc  $L = c/2\delta\nu = 64,9 \text{ cm}$ .
2. La hauteur de la note jouée est donnée par la fréquence du fondamental  $\nu_1 = c/2L$ , ou du moins elle lui est proportionnelle. Pour augmenter la fréquence de la note jouée, à  $L$  fixé, il faut donc augmenter  $c$ . Comme  $c = \sqrt{T_0/\mu}$ , il faut augmenter la tension de la corde pour accorder la guitare.
3. En reprenant le raisonnement précédent, si on augmente le diamètre d'une corde sans changer de matériau ni sa longueur, on augmente la masse linéique de la corde et donc on abaisse  $c$  et  $\nu_1$ . Plus la corde est large, plus la note jouée est grave. Sur une harpe, la longueur change d'une corde à une autre. En augmentant  $L$ , on diminue  $\nu_1$  : les notes les plus graves sont jouées sur les cordes les plus longues.
4. Pour le mode  $n$  de la corde, l'onde de déplacement s'écrit  $y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$ , avec  $k_n = n\pi/L$  et  $\omega_n = c k_n$ . On trouve alors  $T_{y,n}(x, t)$  via  $T_{y,n}(x, t) = T_0 \partial_x y_n(x, t) = A_n T_0 k_n \cos(k_n x) \cos(\omega_n t + \phi_n)$ .



5. (a) L'onde de déplacement s'écrit  $y(x, t) = \sum_n (\mathcal{B}_n \cos(\omega_n t) + C_n \sin(\omega_n t)) \sin(k_n x)$ . Les termes  $n = 3$  s'annulent donc aux positions telles que  $\sin k_3 x = 0$  soit  $k_3 x = p \times \pi$  avec  $p \in \mathbb{N}$ . Les positions possibles, qui doivent vérifier  $0 \leq x \leq L$  sont  $x = 0, x = L/3, 2L/3$  et  $L$ . En ces points  $x_p = p \times L/3$ , il n'y a pas de composante qui oscille à la fréquence  $\nu_3$  dans  $y(x_p, t)$ . Les positions  $x = 0$  et  $x = L$  sont peu intéressantes en ce sens que l'onde de déplacement y est nulle. En revanche,  $y(x_1, t)$  et  $y(x_2, t)$  sont non nulles.
- (b)  $T_y(x, t) = T_0 \sum_n (\mathcal{B}_n \cos(\omega_n t) + C_n \sin(\omega_n t)) k_n \cos(k_n x)$ . La composante spectrale de fréquence  $\nu_3$  est donc non nulle aux positions  $x_p$  trouvées précédemment. Elle y est même maximale puisque  $|\cos(k_3 x_p)| = 1$ .
6. Pour l'onde de tension  $T_y$  et une corde libre, on a  $T_y(x = 0, t) = T_y(x = L, t) = 0$ . On retrouve donc les mêmes conditions aux limites que celles utilisées sur l'onde de déplacement pour dériver l'équation (4.63). Les modes propres de l'onde de tension pour la corde libre prennent donc une forme identique à celle des modes propres de l'onde de déplacement pour la corde fixe :  $T_{y,n}(x, t) = \mathcal{B}_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t) + C_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t)$ .
- Pour trouver  $y_n$ , on utilise une nouvelle fois  $T_{y,n} = T_0 \partial_x y_n$  et on intègre l'expression de  $T_{y,n}$  en ne gardant que les termes ondulatoires, c'est-à-dire les termes qui dépendent de l'espace et du temps :
- $$y_n(x, t) = \frac{\mathcal{B}_n}{k_n} \cos(k_n x) \cos(\omega_n t) + \frac{C_n}{k_n} \cos(k_n x) \sin(\omega_n t).$$
7. Les conditions aux limites sur la corde sont inchangées  $y(x = 0, t) = y(x = L, t) = 0$ . La condition de résonance est donc elle-même inchangée : pour le mode  $n$ , on a  $L = n \times \lambda_n / 2$  soit  $\lambda_n = 2L/n$  et  $k_n = 2\pi/\lambda_n = n \times \pi/L$ . La relation de dispersion nous donne alors  $\nu_n = \omega_n/(2\pi) = n \times c/2L + n^2 \times \beta\pi c^2/2L^2$ .
- Le terme en  $n^2$  dans  $\nu_n$  implique que l'espacement entre deux fréquences consécutives  $\nu_{n+1} - \nu_n$  dépend maintenant de  $n$  : l'échelle des fréquences n'est plus harmonique.

## A.5 CHAPITRE 5

### A.5.1 EXERCICES D'APPLICATION 1

1. (a) Polarisation rectiligne,  $E_x$  et  $E_y$  sont en phase,
- (b) Polarisation circulaire,  $E_x$  et  $E_y$  ont même amplitude et sont en quadrature de phase. La polarisation est circulaire droite car  $E_y$  est en avance sur  $E_x$ . Dans le plan ( $xOy$ ) orienté dans le sens de la direction de propagation,  $\mathbf{u}_z$ , le cercle décrit par la polarisation est donc parcouru dans le sens indirect.
- (c) Polarisation elliptique,  $E_x$  et  $E_y$  sont en quadrature de phase mais n'ont pas la même amplitude,

- (d) Polarisation circulaire,  $E_x$  et  $E_y$  ont même amplitude et sont en quadrature de phase. La polarisation est circulaire gauche car  $E_y$  est en retard sur  $E_x$ ,
- (e) Polarisation circulaire,  $E_x$  et  $E_y$  ont même amplitude et sont en quadrature de phase. La polarisation est circulaire gauche car  $E_y$  est en retard sur  $E_x$ ,
- (f) La direction de propagation est maintenant  $-\mathbf{u}_z$ . La polarisation circulaire gauche de la question précédente devient donc circulaire droite.
2.  $\underline{\mathbf{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \mathbf{u}_y$  et  $\mathbf{E} = E_0 \cos(i(\omega t - kx)) \mathbf{u}_y$ .  
On a alors  $\underline{\mathbf{B}} = \mathbf{u}_x \wedge \underline{\mathbf{E}}/c = (E_0/c) e^{i(\omega t - kx)} \mathbf{u}_z$  et  $\mathbf{B} = (E_0/c) \cos(i(\omega t - kx)) \mathbf{u}_z$ .
3. L'onde est polarisée circulairement donc  $\underline{\mathbf{E}} = (E_0/\sqrt{2})(\mathbf{u}_x \pm i\mathbf{u}_y) e^{i(\omega t - kz)}$ , avec  $+$  pour une polarisation circulaire droite et  $-$  pour une polarisation circulaire gauche. Ce qui donne  $\mathbf{E} = (E_0/\sqrt{2}) [\cos(\omega t - kz)\mathbf{u}_x \mp \sin(\omega t - kz)\mathbf{u}_y]$ .  
Avec  $\mathbf{B} = \mathbf{u}_z \wedge \mathbf{E}/c$  on a  $\underline{\mathbf{B}} = (E_0/c\sqrt{2})(\mathbf{u}_y \mp i\mathbf{u}_x) e^{i(\omega t - kz)}$  et  $\mathbf{B} = (E_0/c\sqrt{2}) [\cos(\omega t - kz)\mathbf{u}_y \pm \sin(\omega t - kz)\mathbf{u}_x]$ .
4.  $\mathbf{E}_1$  est circulaire droite et  $\mathbf{E}_2$  est circulaire gauche.  
 $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 2E_0 \mathbf{u}_x e^{i(\omega t - kz)}$  est polarisée rectilignement le long de  $\mathbf{u}_x$ .  
 $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2 = 2iE_0 \mathbf{u}_y e^{i(\omega t - kz)}$  est polarisée rectilignement le long de  $\mathbf{u}_y$ .

