

Poly

07 September 2024 15:34



mecanique
pour l agr...

MÉCANIQUE POUR L'AGRÉGATION

Hugo Rousille
hugo.rousille@ens-lyon.fr

Ce document est le support des cours de mécanique que je donne à la préparation à l'agrégation de l'ENS de Lyon en 2024. Il est grandement inspiré du livre de cours *Physique pour l'agrégation* [FRR], paru au début de l'année, co-rédigé par Jules Filion, Julien Froustey et moi-même.

Tout commentaire sur le document, n'hésitez donc surtout pas à m'envoyer un mail si vous avez repéré une erreure, pensez qu'une partie n'est pas assez claire ou souhaiteriez que certains points soient éclaircis.

Version du 2 septembre 2024

2

Préambule

Contexte

La mécanique est un domaine de la physique très transverse : elle introduit des notions qui sont utilisées dans de nombreux autres contextes, comme l'énergie, le travail, la quantité de mouvement... Elle est aussi enseignée à des niveaux très différents, et contient donc des concepts de difficulté variable. Le but de ce cours est de passer en revue les points importants du programme de mécanique pour l'agrégation, en commençant par des rappels de CPGE, et en allant jusqu'aux notions de mécanique analytique et mécanique relativiste qui relèvent du programme de L3/M1.

Il n'est pas question ici de proposer des plans de leçons réalisables, mais plutôt de vous fournir un panorama des différentes notions importantes en mécanique afin de vous aider à structurer votre connaissance du domaine pour que vous puissiez construire vos propres leçons. Un travail personnel d'approfondissement sera nécessaire, et je vous proposerai à cet effet tout au long du cours des références pertinentes pour vous aider à le réaliser.

Programme

A l'écrit

Le programme de l'écrit de l'agrégation est celui des classes de deuxième année de prépa scientifique, auxquelles sont ajoutées plusieurs notions complémentaires. En mécanique, ces notions complémentaires sont les suivantes :

- Systèmes dynamiques :
 - Système de deux points matériels et problème à deux corps;
 - Chaque;
 - Opérateurs lagrangien et hamiltonien. Principes variationnels;
- Mécanique du solide :
 - Théorèmes fondamentaux de mécanique du solide;
 - Solide en translation et du solide en rotation autour d'un axe fixe;

-
- Approximation gyroscopique;
 - Notions élémentaires d'élasticité;
 - Relativité restreinte :
 - Notion d'événement, transformation spatiale de Lorentz;
 - Éléments de cinématique et de dynamique relatives;
 - Choix, effet Cœlest;
 - Lois de transformation des sources et du champ électromagnétique;
 - Notions sur le formalisme quadridimensionnel.

Bien que ce programme soit très complet en apparence, les notions les plus subtiles (comme les lois de transformation du champ électromagnétique ou la mécanique lagrangienne) ne sont que très rarement évaluées à l'oral et à l'oral. Ainsi, il est important de hiérarchiser les notions à travailler afin d'éviter absolument les lacunes sur la base du programme, à savoir ce qui est fait au CPGE.

A Oral

Depuis 2020, il n'y a plus de liste de titres de leçons de physique à Oral de l'agrégation externe de physique-chimie. La liste de titres de leçons est cependant conservée à l'agrégation spéciale. Voici une liste des titres de leçons concernant la mécanique relativiste à l'agrégation spéciale 2023 :

- LPDact1** Gravitation;
- LPDact2** Lois de conservation en dynamique;
- LPDact24** Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique;
- LPDact25** Oscillateurs, portraits de phase et non-linéarités;
- LPDact26** Cinématique relativiste. Expérience de Michelson et Morley.

Chaque année, le rapport du jury donne un certain nombre d'exemples de titres de leçons tombés à Oral. Je vous invite à lire ceux des années passées pour avoir une idée des sujets qui peuvent être demandés. Au début de chaque chapitre de ce cours se trouve une liste des leçons en lien avec le contenu du chapitre tombées aux sessions 2022 et 2023 (le rapport 2024 n'est pas encore disponible).

Annales et entraînement complémentaire

Pour aller plus loin, il est utile de s'entraîner sur des épreuves d'annales de l'agrégation. Voici une liste non exhaustive d'anciennes épreuves de l'agrégation contenant des parties de mécanique :

- A2023** Géodésie d'indice : du phénomène de mélange aux applications modernes;
- A2021** La forme de la Terre;
- C2020** Mesures multidisciplinaires biologiques et matière active;
- A2019** (...Stabilités;
- A2018** Interactions dans le Système Solaire;

-
- C2017 Quelques aspects de la physique du GPS;
 AIPC2017 Exactitude et stabilité de la mesure du temps;
 C2016 Méthodes variationnelles et symétriques;
 AIPC2016 Autour de l'exploration du système solaire;
 AIPC2012 Quelques phénomènes liés à l'activité interne de la Terre;
 AIPC2013 À la recherche des ondes gravitationnelles;
 A2011 Effet de serre;
 A2010 Stabilité des systèmes dynamiques : thermosvection et bifurcation en mécanique;
 C2010 Différents aspects de la structure et de la dynamique de l'atome d'hydrogène;
 C2009 Couplage fort de deux oscillateurs;
 C2008 Néromagnétisme et sonde à effet Hall;
 C2003 Les planètes extrasolaires.

Bibliographie principale

Je vous propose ici une liste des références classiques utiles en mécanique à l'agrégation. Une bibliographie complète est disponible page [75](#).

- [1] Un manuel polyvalent, traitant en détail tous les points du programme de première année de CPGE. Il est utile d'utiliser aussi la version deuxième année [2]. Dans certains cas, la version ancien programme de 2004 [3] peut aussi être utile.
- [4] Un ancien manuel de CPGE, très complet mais synthétique et peu pédagogique. Il est donc particulièrement utile si vous savez déjà ce que vous recherchez.
- [5] Un livre assez long contenant de très nombreux calculs sur beaucoup de points de détails peu traités ailleurs. Il souffre cependant d'un manque de clarté et d'un certain nombre d'erreurs.
- [TLM] Un ancien manuel de prépa bien pensé, utile pour trouver certains calculs ou des exemples d'exercices.
- [DRA] Un dictionnaire proposant des définitions pour tous les termes apparaissant à l'agrégation, très utile pour trouver les bonnes formulations des définitions.
- [FFR] Un manuel conçu pour la préparation de l'agrégation, que je ne peux pas présenter de façon objective.

Table des matières

I Mécanique classique	9
1 Théorèmes fondamentaux de la mécanique	11
1.1 Dynamique d'un point matériel	11
1.1.1 Référentiel, cinématique et dynamique	11
1.1.2 Lois de Newton	14
1.1.3 Énergie en mécanique	14
1.1.4 Moment cinétique	18
1.2 Application : le pendule simple	20
1.2.1 Description du problème	20
1.2.2 Résolution à l'aide des lois de Newton	21
1.2.3 Résolution à l'aide des méthodes énergétiques	21
1.2.4 Résolution par le théorème du moment cinétique	22
1.2.5 Comparaison des approches	22
1.3 Équilibre, stabilité et dynamique visqueuse	23
1.3.1 Équilibre mécanique et énergie potentielle	23
1.3.2 Comportement proche d'une position d'équilibre	23
1.3.3 Flots lits et de diffusion	25
1.4 Quelques prégs habituels et comment les éviter	25
1.4.1 Pendus et fils	25
1.4.2 Chute de l'approche	28
2 Applications : frottements, oscillateurs, particules chargées	31
2.1 Frottements fluides et solides	32
2.1.1 Frottements fluides	33
2.1.2 Frottements solides	36
2.2 Oscillateur harmonique	44
2.2.1 Propriétés fondamentales	45
2.2.2 Oscillateur harmonique amorti par frottements solides	49
2.3 Oscillations non-linéaires : exemple du pendule simple	52

2.3.1	Lindstedt	53
2.3.2	Solutions d'ordre supérieur	54
2.3.3	Méthode de Poincaré-Lindstedt	55
2.3.4	Période d'oscillation non perturbative	57
2.3.5	Étude qualitative du mouvement complet	58
2.3.6	Pour aller plus loin	60
2.4	Mouvement de particules chargées	60
2.4.1	Force de Lorentz	60
2.4.2	Champ électrostatisique uniforme	62
2.4.3	Champ magnétostatisque uniforme	62
II	Exercices	67
	Bibliographie	75

Première partie

Mécanique classique

Chapitre 1

Théorèmes fondamentaux de la mécanique

La mécanique est un domaine de la physique plus intuitif que d'autres, mais sa formalisation nécessite le maniement d'un certain nombre de grandeurs et de théorèmes, chacun ayant ses particularités. Ainsi, il est crucial de bien maîtriser les différentes définitions pour ne pas dénaturer les processus lors d'un écrit ou d'un oral.

Dans ce chapitre, nous allons poser les bases de la mécanique telle qu'elle est étudiée en CPGE, à travers l'étude des *points matériels*. Nous nous intéresserons ensuite à des cas spécifiques pour illustrer les différentes méthodes de résolution utilisées en mécanique. Pour finir, je vous proposerai une liste de pièges habituels en mécanique et quelques conseils sur comment les éviter!

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

1. avoir poser un problème en mécanique, en définissant le référentiel, le repère, et en modélisant les objets en jeu;
2. connaître les différents manières d'étudier le mouvement et savoir choisir la plus appropriée dans une situation donnée;
3. comprendre que tout système évoluant autour de l'une de ses positions d'équilibre est équivalent à un oscillateur harmonique.

1.1 Dynamique d'un point matériel

1.1.1 Référentiels, cinématique et dynamique

La mécanique s'intéresse à la description du mouvement d'objets les uns par rapport aux autres lorsque ceux-ci interagissent au moyen de forces. Afin de simplifier l'étude, on commence par modéliser chaque

objet en jeu par un objet portant de même nom, appelé **point matériel**. Le repérage d'un point matériel ne nécessite que 3 coordonnées d'espace.

Cette modélisation ne permet pas de rendre compte de l'orientation de l'objet, ce qui signifie qu'une partie de l'information concernant le mouvement de celui-ci est perdue. Une description plus complète du mouvement d'un solide sera étudiée au [II](#).

Afin de pouvoir décrire l'évolution dans l'espace du point matériel considéré au cours du temps, il est nécessaire de se donner une référence. On suppose que tout observateur du mouvement dispose d'un ensemble rigide de points qui lui apparaissent fixes ; il s'agit du **système référentiel** lié à cet observateur. En choisissant l'un de ces points fixes comme **origine** et en choisissant une base de **projection** constituée de 3 axes, on dispose d'un **repère tridimensionnel**¹. Les coordonnées du point matériel, définies comme les projections du vecteur position sur chacun des axes de la base, permettent alors de repérer la position du point au cours du temps.

Il ne faut pas confondre référentiel et repère ! En effet, pour un même référentiel, le choix du repère est totalement libre tant que l'origine est fixe. Le choix du repère fixe alors le choix du système de coordonnées.

Par exemple, lors de l'étude de la chute d'une balle, on choisit d'abord le référentiel (généralement, celui du laboratoire), puis on décide d'un repère en prenant une origine et trois axes (en général, l'origine est la position initiale de la balle et l'un des axes est la verticale locale).

Plusieurs référentiels sont utilisés de façon usuelle en mécanique. Ces référentiels ainsi que seront définis au [II](#). Les trois systèmes de coordonnées utilisés sont les systèmes cartésien, cylindrique et sphérique, résumés sur la figure 1.1 ci-après.

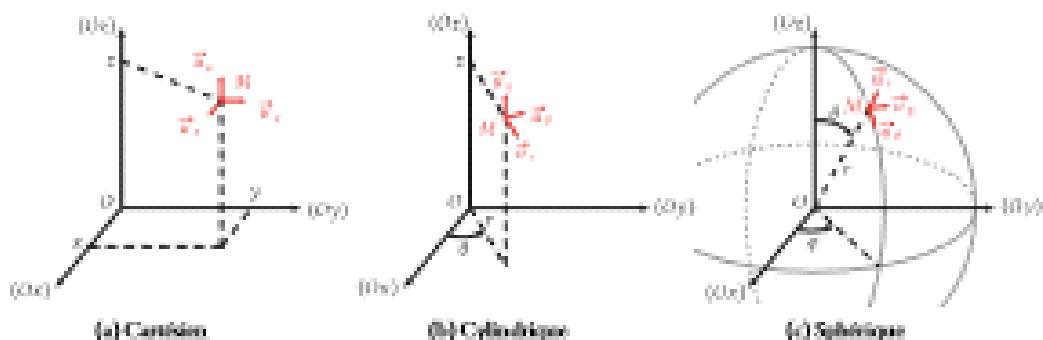


FIGURE 1.1 – Systèmes de coordonnées usuels.

1. En mécanique newtonienne, le temps est supposé absolu, c'est à dire qu'il est le même pour tous les référentiels. Ainsi, on n'inclut pas le choix du temps dans le choix du référentiel. Ce postulat sera remis en cause en mécanique relativiste dans le [II](#).

En coordonnées cartésiennes, un point matériel est repéré par ses abscisses x , ses ordonnées y et sa cote z . La base de l'espace est donnée par les trois vecteurs \vec{e}_x , \vec{e}_y et \vec{e}_z : ceux-ci ne dépendent pas de la position du point dans l'espace. En coordonnées cylindriques, on repère un point par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le plan Oxy et par sa cote z : la base est alors donnée par les vecteurs \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_z , et celle-ci est **locale**. On a les projections suivantes :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y, \\ \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y, \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z. \end{cases} \quad (1.1)$$

En coordonnées sphériques, on repère un point par sa distance r au centre du repère, son angle θ avec la verticale (il s'agit de la colatitude, soit $\pi/2 - \vartheta$ où ϑ est la latitude) et sa longitude φ . La base est également locale et est donnée par les trois vecteurs \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_φ . On a :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{e}_r = -\sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\theta = -\cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z, \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y. \end{cases} \quad (1.2)$$

Les quantités r , θ , \vec{e}_r et \vec{e}_θ ne représentent pas du tout la même chose selon que l'on soit en coordonnées cylindriques ou sphériques.

Dans la suite, l'origine du repère sera appellée O_0 et le point matériel étudié sera appellé M . Le référentiel étudié sera noté R . On notera \vec{r} le vecteur \overrightarrow{OM} , aussi appelé **vecteur position**. Le **vecteur vitesse** du point M sera défini comme la dérivée composée du vecteur position, puisque celle-ci dépend du référentiel (un point fixe dans un référentiel ne l'est pas forcément dans un autre), on ajoutera à sa définition le nom du référentiel :

$$\vec{v}_R(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{R_0}. \quad (1.3)$$

On définit de même le vecteur **acélération** :

$$\vec{a}_R(M) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} \right)_{R_0}. \quad (1.4)$$

La **cinématique** consiste en la description du mouvement à partir de grandeurs évoluant dans le temps, sans s'intéresser aux causes de celui-ci. Par exemple, pour un point matériel repéré dans le référentiel R par des coordonnées cartésiennes, on aura

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z, \\ \vec{r} &= x \vec{e}_x + y \vec{e}_y + z \vec{e}_z, \end{aligned}$$

$$\vec{r} = \vec{x}\vec{u}_x + \vec{y}\vec{u}_y + \vec{z}\vec{u}_z, \quad (1.5)$$

avec x, y et z des fonctions du temps (on note \dot{f} la dérivée de f par rapport au temps). En coordonnées cylindriques, on aura, en utilisant $\vec{u}_r = \theta \vec{u}_\phi$ et $\vec{u}_\phi = -\dot{\theta} \vec{u}_r$ (voir équation (1.1)) :

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= r\vec{u}_r + z\vec{u}_z, \\ \vec{v} &= r\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\phi + \dot{z}\vec{u}_z, \\ \vec{a} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\phi + \ddot{z}\vec{u}_z. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Le but de la mécanique est de lier ces grandeurs issues d'une description cinématique aux causes du mouvement, à travers les lois de la dynamique que nous allons étudier dès maintenant.

1.1.2 Lois de Newton

Les trois lois de Newton sont les postulats à la base de la mécanique dite « newtonienne ». Elles ont été énoncées initialement en 1687.

Introduire

1^{re} loi de Newton (principe d'inertie)

Un point matériel est dit **isolé** s'il n'est soumis à aucune action mécanique, et **pseudo-isolé** si les actions qui s'exercent sur lui se compensent. Il existe une classe de référentiels, dits **galiliens**, dans lesquels le mouvement du centre d'inertie d'un corps isolé ou pseudo-isolé est rectiligne uniforme.

On peut invoquer ce principe pour définir un référentiel galilien, indiquant qu'un référentiel est galilien si et seulement si le mouvement d'un corps isolé ou pseudo-isolé dans celui-ci est rectiligne uniforme. Comme souvent en physique, le concept de « référentiel galilien » est une construction théorique, et l'on pourra en pratique quantifier la qualité galiléenne d'un référentiel en étudiant le mouvement d'un corps isolé ou pseudo-isolé dans celui-ci. Cela sera réalisé au ??.

Dans la suite, on considère que le référentiel de travail R est galilien, et l'on étudie un seul point matériel M .

La deuxième loi de Newton permet de faire le lien recherché entre la description du mouvement et les causes de celui-ci, à savoir les forces. Une **force nette** $\vec{F}_{O \rightarrow M}$ est un vecteur suppose indépendant du référentiel caractérisant l'action mécanique d'un objet O sur le point matériel M . La **résumante des forces** \vec{F} subie par M est la somme de toutes les forces subies par le point M :

$$\vec{F} = \sum_O \vec{F}_{O \rightarrow M}.$$

Informations **2^{ème} loi de Newton (Principe fondamental de la dynamique)**

Considérons un point matériel M qui subit une résultante des forces \vec{F} . Dans le référentiel galiléen R , on a

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_R = \vec{F}, \quad (1.7)$$

où \vec{p} est la quantité de mouvement du système étudié dans R :

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (1.8)$$

La 2^{ème} loi de Newton relie bien une quantité cinétique, la quantité de mouvement que l'on peut calculer à partir des équations (1.5) et (1.6), aux forces qui sont les causes du mouvement. Ainsi, l'étude d'un problème de mécanique consiste presque systématiquement en la résolution de l'équation (1.7).

Informations **3^{ème} loi de Newton (Principe des actions réciproques)**

Considérons deux points matériels M_1 et M_2 . Ceux-ci interagissent par le biais de deux forces, $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ et $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$. On a quel que soit la mouvement des deux points l'égalité

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}. \quad (1.9)$$

Finalement donnons l'expression de quelques forces usuellement rencontrées en mécanique à l'aggravation.

force élastique: il s'agit de la force exercée par un ressort tendu sur une masse à son extrémité. Elle s'écrit:

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x, \quad (1.10)$$

avec l la longueur du ressort tendu, l_0 la longueur à vide du ressort et \vec{u}_x l'axe du ressort.

poids: le poids est la force exercée par la Terre sur un objet à sa surface. Il est noté:

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z, \quad (1.11)$$

avec g l'accélération de la pesanteur égale³ à $9,806\,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et \vec{u}_z le vecteur indiquant la verticale.

électrostatique: la force électrostatique exercée par un champ électrique \vec{E} sur une particule de charge q est notée:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (1.12)$$

frottements fluides: une force de frottement fluide s'oppose au mouvement. Elle est en général notée

$$\vec{F}_{\text{frot}} = -\lambda\vec{v}, \quad (1.13)$$

avec λ un coefficient de proportionnalité.

3. Cette valeur est une constante : en effet, la Terre n'est pas parfaitement circulaire, l'intensité de la pesanteur à sa surface fluctue selon la position de l'observateur. L'étude des fluctuations de la pesanteur à la surface de la Terre se nomme gravimétrie, et est depuis plusieurs siècles une subdivision d'étude de la composition interne de notre planète [6, 7, 8].

1.1.3 Énergie en mécanique

Il est possible de reformuler la mécanique en utilisant une grandeur présente de manière universelle en physique moderne : l'énergie. Cette reformulation sera particulièrement utile pour étudier les problèmes unidimensionnels, comme nous le verrons dans la section 1.3.

Puissance, travail et énergie

Pour commencer, remarquons qu'une force peut être à l'origine d'un mouvement : ainsi, l'objet en question celle-ci fournit de l'énergie au point matériel auquel elle s'applique. Cependant, le cas contraire existe : une force peut s'opposer au mouvement (c'est par exemple généralement le cas des frottements). Le transfert d'énergie doit donc être algébrique selon la direction relative de la force et du mouvement (donc de la vitesse). On définit alors la **puissance** \mathcal{P} d'une force \vec{F} s'appliquant sur un point M de vitesse \vec{v} :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.14)$$

Cette puissance est un scalaire. À partir de celle-ci, on définit le **travail infinitésimal** dW en écrivant

$$dW = \mathcal{P} dt. \quad (1.15)$$

Le **travail** $W_{t_1 \rightarrow t_2}$ entre les instants t_1 et t_2 est alors donné par intégration :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_T dt \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.16)$$

La valeur de l'intégrale dépend de la trajectoire suivie ! En effet, en général, la force \vec{F} dépend de la position ou même de la vitesse.

Remarquons enfin que l'équation (1.15) nous permet d'écrire

$$dW = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{OM}}{dt} dt = \vec{F} \cdot d\vec{OM}. \quad (1.17)$$

Supposons alors qu'il existe une fonction E_p telle que $dW = -dE_p$. Une telle fonction doit alors vérifier $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OM}$, ce qui implique

$$\vec{F} = -\widehat{\text{grad}} E_p. \quad (1.18)$$

Une force \vec{F} telle que la fonction E_p existe est appelée **force conservative**, et E_p est donc l'**énergie potentielle associée** à la force. En pratique, il est possible d'ajouter une constante à E_p tout en vérifiant toujours l'équation (1.18), ce qui signifie que l'énergie potentielle est définie à une constante près.

Pour une force conservative, le travail ne dépend pas de la trajectoire mais uniquement des instants de départ et d'arrivée. En effet, l'équation (1.16) devient dans ce cas

$$W = - \int_T dE_p = E_p(t_1) - E_p(t_2) = -\Delta E_p. \quad (1.19)$$

On peut calculer l'énergie potentielle pour les forces usuelles présentées dans la section 1.1.3. On cherche pour cela à résoudre l'équation (1.18) en E_p . Les résultats sont résumés dans le tableau 1.1. La force de frottement fluide n'est pas conservative et il n'existe donc pas d'énergie potentielle associée : en effet, \vec{F}_{frot} dépend de \vec{x} et donc de la trajectoire.

Force	Expression	Énergie potentielle
Fluide	$-k(l - l_0)\vec{u}_x$	$\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + \text{cste}$
Poids	$-mg\vec{u}_z$	$mgh + \text{cste}$
Électromotique	$q\vec{E}$	$qV + \text{cste}$

Tableau 1.1 – Énergies potentielles pour certaines forces usuelles.

On définit enfin l'**énergie cinétique** E_c pour un point matériel par

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.20)$$

L'**énergie mécanique** E_m est alors définie par

$$E_m = E_c + E_p. \quad (1.21)$$

Théorèmes énergétiques

Les lois de la dynamique newtonienne peuvent être reformulées en deux théorèmes reliant les différentes quantités énergétiques entre elles. Ces différents théorèmes sont très équivalents entre eux mais font intervenir des grandeurs différentes : il faudra choisir le plus adapté à chaque situation selon les quantités connues (voir section 1.4.2 pour un guide).

Intuition	Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique
Notons $\mathcal{P}(t)$ la somme des puissances des forces subies à t par un point matériel M . On a alors	$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(t). \quad (1.22)$
On peut écrire cette égalité en version intégrée :	$\Delta E_c = W'_{t_1 \rightarrow t_2}, \quad (1.23)$
où $W'_{t_1 \rightarrow t_2}$ est la somme des travaux des forces s'appliquant à M entre t_1 et t_2 .	

Théorème de la puissance et de l'énergie mécanique

Nous avons $\mathcal{P}_m(t)$ la somme des puissances des forces non-conservatives subies à t par un point matériel M . On a alors

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}_m(t), \quad (1.24)$$

On peut écrire cette égalité en version intégrée :

$$\Delta \mathcal{E}_m = W_{m, t_1 \rightarrow t_2}, \quad (1.25)$$

avec $W_{m, t_1 \rightarrow t_2}$ la somme des travaux associés aux forces non-conservatives.

La première conclusion à tirer de ce dernier théorème, et la plus utile en pratique, est que dans le cas où toutes les forces en jeu sont conservatives, l'énergie mécanique est conservée. La formulation énergétique de la mécanique nous permet ainsi d'obtenir une quantité conservée au cours du mouvement, ce qui simplifie grandement l'étude de celui-ci. On parle d'*indicateur permanent du mouvement*.

1.1.4 Moment cinétique

Si la description énergétique est particulièrement adaptée aux situations où les forces sont conservatives, il existe également une autre reformulation de la mécanique newtonienne qui permet quant à elle de décrire plus simplement les mouvements de rotation. On utilise pour cela la notion de moment cinétique. Nous prenons un point quelconque de l'espace; le **moment cinétique** du point matériel M en A est \vec{L}_A avec

$$\vec{L}_A = \vec{AM} \wedge \vec{p}. \quad (1.26)$$

Si (Δ) est une droite dirigée par le vecteur unitaire $\vec{\omega}_x$ et contenant le point A , on peut définir le **moment cinétique** par rapport à un axe (Δ) par

$$\vec{L}_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{\omega}_x. \quad (1.27)$$

Celui-ci est indépendant du choix du point A tant que A est sur l'axe (Δ) . On peut aller plus loin : en se placant en coordonnées cylindriques d'origine A et d'axe (Δ) (voir figure 1.7), on a

$$\vec{p} = m\vec{v} = m(r\vec{\omega}_r + r\dot{\theta}\vec{\omega}_\theta + \dot{z}\vec{\omega}_z), \quad (1.28)$$

ce qui implique

$$\vec{L}_\Delta = (r\vec{\omega}_r) \wedge \vec{p} = mr^2\dot{\theta}\vec{\omega}_x. \quad (1.29)$$

On définit alors le **moment d'inertie** I_Δ par rapport à (Δ) par

$$\boxed{I_\Delta = I_\theta \dot{\theta}}. \quad (1.30)$$

On a alors, dans le cas présent,

$$I_\Delta = mr^2. \quad (1.31)$$

La notion de moment d'inertie prendra tout son sens au moment de l'étude de la mécanique des solides dans le 2^e. Nous savons que le vecteur unitaire portant (Δ) étant nommé ici \vec{u}_Δ , on aurait pu noter les quantités I_Δ et I'_Δ .

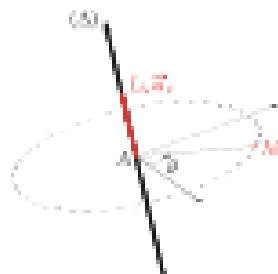


FIGURE 1.2 – Moment cinétique du point M par rapport à l'axe (Δ).

On définit pour une force \vec{F} s'appliquant au point M son **moment en A** $\widehat{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$ par

$$\widehat{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}. \quad (1.32)$$

Ici, toutes les quantités dépendent du point M et aussi du point A où les moments sont calculés.

On a alors le théorème suivant, qui découle de la seconde loi de Newton :

Théorème

Théorème du moment cinétique

Le moment cinétique en A (appelé **fixe**) du point M est relié à la somme $\widehat{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}$ des moments en A des forces s'appliquant sur M par la relation

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \widehat{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}. \quad (1.33)$$

Le théorème du moment cinétique donné sous la forme (1.33) n'est valable que pour un point A fixe. Si le point A est mobile de vitesse \vec{v}_A , l'équation (1.33) devient

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \widehat{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} - \vec{v}_A \wedge \vec{r}_M. \quad (1.34)$$

Le théorème du moment cinétique peut sembler futile pour le moment, car en mécanique du point matériel celui-ci est strictement équivalent à la relation fondamentale de la dynamique — en injectant

les équations (1.26) et (1.32) dans l'équation (1.5) on retrouve l'équation (1.33). Cependant, il devient crucial en mécanique du solide, ce qui est développé au §7.

1.2 Application : le pendule simple

Voyons désormais l'application des théorèmes donnés précédemment dans un cas simple : l'étude d'un pendule simple.

1.2.1 Description du problème

Considérons une masse m (supposée ponctuelle) attachée par un fil de masse négligeable et de longueur ℓ à un point O . On cherche à décrire le mouvement. On se place dans le référentiel du laboratoire, que l'on suppose galiléen. Le système choisi est le point matériel modélisant la masse, et l'on utilise les coordonnées polaires. Les conventions sont résumées sur la figure 1.3.

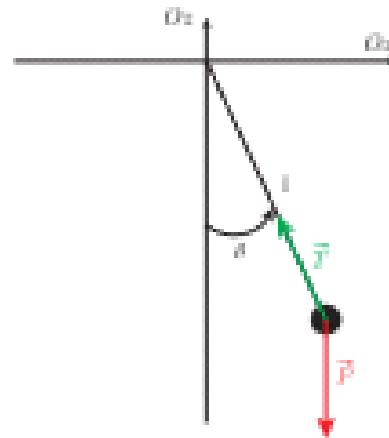


FIGURE 1.3 – Pendule simple et notations associées.

En coordonnées polaires, la position du pendule est repérée par ses coordonnées (r, θ) . Ici, on suppose que l'on a à tout instant $r = \ell$; obtenir la trajectoire est donc équivalent à obtenir la fonction $\theta(t)$. Deux forces entrent en jeu :

- le poids de la masse $\vec{P} = -mg\hat{\mathbf{z}}_z$;
- la tension du fil $\vec{T} = -T\hat{\mathbf{z}}_r$.

Dans la suite, nous obtiendrons l'équation sur $\theta(t)$ de trois manières différentes, en utilisant les théorèmes donnés dans les sections 1.1.2 à 1.1.4.

1.2.2 Résolution à l'aide des lois de Newton

La seconde loi de Newton nous donne l'équation

$$m\ddot{\vec{Z}} = \vec{T} + \vec{P}. \quad (1.35)$$

L'accélération $\ddot{\vec{Z}}$ obtenue à partir de l'équation (1.6) est vant

$$\ddot{\vec{Z}} = -M^2 \ddot{\vec{U}_r} + M^2 \ddot{\vec{U}_\theta}. \quad (1.36)$$

Le poids \vec{P} est donné en fonction de \vec{U}_θ , tandis que l'accélération $\ddot{\vec{Z}}$ et la tension du fil \vec{T} sont donnés dans la base $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta)$; il est nécessaire de projeter \vec{P} dans cette base. On obtient

$$\vec{P} = -mg(-\cos \theta \vec{U}_r + \sin \theta \vec{U}_\theta). \quad (1.37)$$

Ainsi, l'équation (1.35) devient

$$-m\ddot{\theta}^2 = -T + mg \cos \theta, \quad (1.38)$$

$$m\ddot{\theta} = -mg \sin \theta. \quad (1.39)$$

À partir de l'équation (1.39), on obtient l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (1.40)$$

Dans le cas où l'amplitude du mouvement est faible, à savoir $\theta \ll 1$, on peut développer le sinus autour de $\theta = 0$ et l'équation (1.40) devient l'équation bien connue d'un oscillateur harmonique (voir section 2.2) :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (1.41)$$

On peut aussi utiliser l'équation (1.38) pour calculer la tension du fil :

$$T = mg \cos \theta + m\dot{\theta}^2. \quad (1.42)$$

1.2.3 Résolution à l'aide des méthodes énergétiques

L'énergie potentielle associée au poids écrit $E_p = mgh + cte$. On choisit la constante de sorte à ce que E_p soit nulle à l'altitude du point O ; ainsi, on a

$$E_p(\theta) = -mg l \cos \theta. \quad (1.43)$$

De plus, il nous faut calculer le travail de la tension du fil pour pouvoir appliquer les théorèmes énergétiques. La puissance associée à cette force est $P = \vec{T} \cdot \vec{V}$. Or, le mouvement se déroule tout selon \vec{U}_θ , on a $\vec{V} = M^2 \vec{U}_\theta$ et ainsi la puissance est nulle. Cela signifie que la tension du fil ne transmet pas, et il n'est donc pas nécessaire de prendre en compte dans les bilans énergétiques.

Toutes les forces en jeu étant donc conservatives, il est possible d'appliquer le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 - mg l \cos \theta = cte. \quad (1.44)$$

En dérivant cette équation, on retrouve l'équation (1.40).

1.2.4 Résolution par le théorème du moment cinétique

Le moment cinétique du point M en O s'écrit :

$$\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = m(\vec{U}_p) \wedge (\vec{U}_M) = m^2 \dot{\theta} \vec{U}_x. \quad (1.45)$$

De plus, le moment du poids est donné par

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = (\vec{U}_x) \wedge (-mg \vec{U}_z) = -mg l \sin \theta \vec{U}_x, \quad (1.46)$$

et la tension du fil est de moment nul car elle est dirigée selon \overrightarrow{OM} . La décomposition du moment cinétique nous permet donc de trouver l'équation du mouvement :

$$m^2 \ddot{\theta} = -mg l \sin \theta, \quad (1.47)$$

et l'on retrouve l'équation (1.40).

1.2.5 Comparaison des approches

Nous avons vu que les trois approches précédemment exposées permettaient de retrouver l'équation du mouvement du pendule simple. Cependant, elles ont chacune leur spécificité.

L'approche par la deuxième loi de Newton est la plus complète. En effet, elle permet de tracer l'équation du mouvement et de calculer la tension du fil à tout instant. Cependant, elle nécessite l'écriture de deux équations obtenues et le calcul de projections de vecteurs, ce qui entraîne une plus grande difficulté de calcul.

L'approche énergétique est la plus physique : en remarquant que la tension du fil ne travaille pas, elle nous aide directement à l'existence d'un quantité conservée et permet de retrouver l'équation du mouvement plus rapidement que par les autres méthodes. Elle ne permet cependant pas de calculer \vec{T} .

Enfin, l'approche par le théorème du moment cinétique est la plus pratique car elle permet de se poser de la tension du fil, qui n'intervient pas dans la rotation (moment nul en O). Cependant, elle nécessite le calcul de plusieurs produits vectoriels et est donc bien moins rapide que les autres méthodes.

Pour ce type de problème unidimensionnel, on voit donc que la méthode énergétique est à privilégier. Il est cependant parfois impossible d'éviter l'utilisation des lois de Newton, par exemple lorsque le calcul de forces inconnues est demandé. Enfin, la méthode du moment cinétique n'est pas la plus adaptée ici, mais on voit que celle-ci sera très performante dès que plusieurs forces ont des moments nuls.

Pour conclure, remarquons qu'une réalisation expérimentale d'un pendule ne correspond jamais aux hypothèses évoquées ici, à savoir que le fil est inextensible et de masse nulle. Les pendules utilisés en TP sont modélisés de façon légèrement différente : on parle du modèle du « pendule pesant », qui sera présenté dans la ??.

1.3 Équilibre, stabilité et domaine visité

Bien souvent, lors de l'étude d'un problème mécanique, il n'est pas nécessaire de disposer de l'équation du mouvement complète pour obtenir les informations recherchées. Par exemple, il peut suffire de constater qu'il existe des positions dans lesquelles les forces se compensent et le système ne bouge plus; en astronomie, il peut être suffisant de connaître de la trajectoire d'une comète seulement son point le plus proche de la Terre. Ces différents calculs sont généralement bien plus faciles que d'obtenir la trajectoire complète.

1.3.1 Équilibre mécanique et énergie potentielle

On dit qu'un point matériel est à l'**équilibre mécanique** si et seulement si il est immobile, c'est-à-dire que sa vitesse \vec{v} est nulle à tout instant. Cela implique (équations (1.7) et (1.33)) que les résultantes des forces **extérieures** qui agissent sur ce point sont nulles. On définit alors une **position d'équilibre** comme une configuration du système telles que ces deux résultantes soient nulles.

Un système peut passer en une position d'équilibre sans que son mouvement ne se termine. Cependant, si à un certain instant t le système se trouve en l'une de ses positions d'équilibre avec une vitesse nulle, alors il y restera indéfiniment.

Dans la suite, on suppose que l'on étudie un point matériel de masse m sur lequel s'applique une résultante des forces \vec{F} . Dans ce cas, la nullité de la résultante des forces implique également la nullité de la résultante des moments. On suppose enfin que la force \vec{F} dirige d'une énergie potentielle : il existe une fonction E_p telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$.

Par définition, les positions d'équilibre sont telles que $\vec{F} = \vec{0}$. On en déduit que les positions d'équilibre sont les extrêmes de l'énergie potentielle.

Bien évidemment, ce résultat n'est valable que si l'intégralité des forces en jeu sont conservatives. Si ce n'est pas le cas, il est nécessaire de renoncer à la définition de position d'équilibre et à trouver la configuration pour que toutes les forces se compensent.

1.3.2 Comportement proche d'une position d'équilibre

Les positions d'équilibre étant connues, on peut désormais s'intéresser au comportement du système proche de celles-ci. Supposons que le système est initialement dans un état d'équilibre. On le perturbe alors légèrement hors de sa position d'équilibre. On distingue deux cas :

- * si le système a tendance à revenir dans sa position d'équilibre initiale, on dit que celui-ci est **stable**;
- * dans le cas contraire, on dit qu'il est **instable**.

On peut valider la qualité de stabilité en comportement de l'énergie potentielle E_p proche d'une position d'équilibre. Supposons que E_p ne dépend que d'une seule variable x et que la position d'équilibre soit en $x = x_0$. On a alors

$$E_p(x) = E_p(x_0) + E'_p(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} E''_p(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (1.48)$$

Par définition d'une position d'équilibre on a $E'_p(x_0) = 0$. Proche de la position d'équilibre, on peut donc approximer l'énergie potentielle E_p par

$$E_p \approx E_p(x_0) + \frac{1}{2} E''_p(x_0)(x - x_0)^2. \quad (1.49)$$

On remarque que ce profil d'énergie potentielle correspond à une force élastique de raideur équivalente k_{eq} avec:

$$k_{eq} = E''_p(x_0). \quad (1.50)$$

Cette approximation est représentée visuellement sur la figure 1.4.

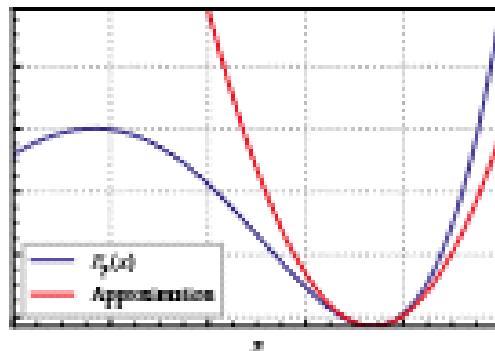


FIGURE 1.4 – Approximation harmonique de l'énergie potentielle autour de l'un de ses minima.

À partir de ce résultat, on peut déduire que l'équation du mouvement autour de la position d'équilibre s'écrit:

$$m\ddot{x} = -E''_p(x_0)(x - x_0), \quad \text{soit} \quad \ddot{y} + \frac{E''_p(x_0)}{m}y = 0 \quad \text{avec} \quad y = x - x_0. \quad (1.51)$$

On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique : le mouvement est stable pour $E''_p(x_0) > 0$, et instable si³ $E''_p(x_0) < 0$.

³ Dans le cas — rare — où $E''_p(x_0) = 0$, il faut poursuivre le développement limité de l'équation (1.48) jusqu'au premier ordre non nul.

On voit donc que tout mouvement proche d'une position d'équilibre peut être décrit en première approximation par une équation d'oscillateur harmonique. Cela justifie l'omniprésence de ce modèle en physique.

Ce résultat également n'est valable que si l'intégralité des forces en jeu sont conservatives. Il ne faut cependant pas chercher à extrapoler les critères de stabilité obtenus ici au cas non conservatif, sous peine d'obtenir des résultats totalement faux! Un exemple classique est l'étude de la stabilité des points de Lagrange d'un système à deux corps : l'étude d'énergie potentielle simple indique qu'il n'y a pas de positions d'équilibre stables, mais la prise en compte de la force de Coriolis montre que les *maxima* sont des positions stables [5].

1.3.3 États liés et de diffusion

Pour finir, on peut également utiliser l'énergie potentielle pour obtenir des propriétés qualitatives sur le mouvement sans même résoudre d'équations. On s'intéresse au mouvement d'un point matériel de masse m dans un profil d'énergie potentielle $E_p(x)$. On suppose qu'il n'y a aucune force supplémentaire non保守的.

Par conservation de l'énergie mécanique, on a donc dans cette situation

$$E_k + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x) = E_m = \text{const.} \quad (1.52)$$

On en déduit plusieurs propriétés.

- L'énergie cinétique étant toujours positive, on a $E_m \geq E_p(x)$ ce qui conditionne les valeurs de x accessibles au système. Si x ne peut prendre ses valeurs que dans un ensemble borné, on dira que l'on se trouve dans un **état lié** (figure 1.5a); à l'inverse, si x peut atteindre l'infini, on dira que l'on se trouve dans un **état de diffusion** (figure 1.5b).
- Les points tels que $E_m = E_p(x)$, appellés **points de rebroussement**, correspondent aux situations où $\dot{x} = 0$. En ces points, la vitesse s'inverse et la trajectoire change de sens (elle passe des x croissants aux x décroissants ou vice-versa); elle rebrousse chemin.

Les points de rebroussement ne sont pas des positions d'équilibre! On a en ces points $\dot{x} = 0$ mais $\ddot{x} \neq 0$.

1.4 Quelques pièges habituels et comment les éviter

1.4.1 Poules et fils

De nombreux systèmes physiques étudiés en mécanique contiennent des fils ou des poules. Dans ce type de situation, il est facile de se tromper en simplifiant trop le système ou au contraire en se compliquant.

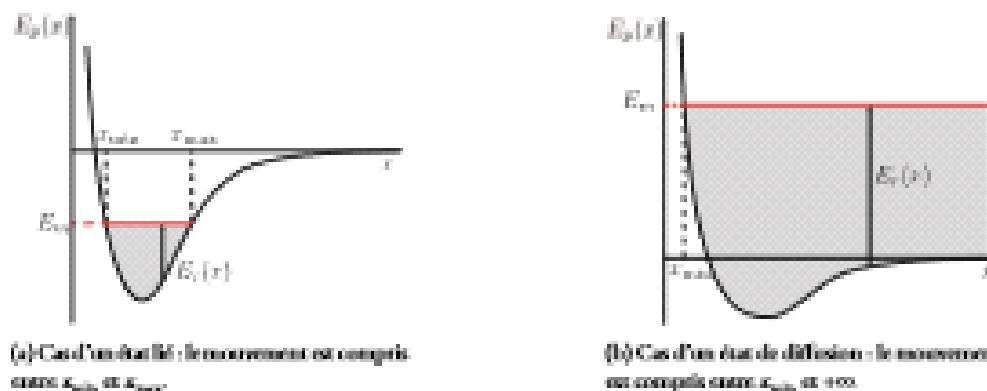


FIGURE 1.5 – ILLUSTRATION DES ÉTATS LIÉS ET DE DIFFUSION.

trop la vie. Le but de cette partie est donc de présenter les différentes méthodes possibles de traitement d'exercices mettant en jeu des fils ou des poulies.

Pour cela, nous travaillerons sur l'exemple de la machine d'Atwood : une poulie est fixée à un support, et l'on fait passer un fil autour de celle-ci. Ce fil est relié à deux masses, m_1 et m_2 . La situation est décrite sur la figure 1.6.

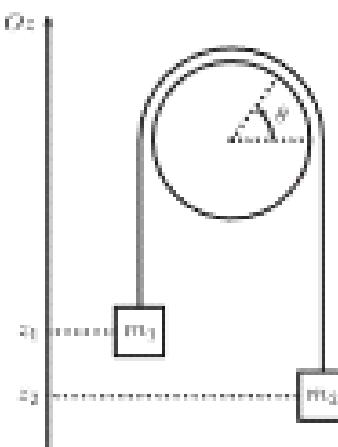


FIGURE 1.6 – MACHINE D'ATWOOD.

Afin de clarifier la situation, commençons par étudier plus en détails comment les actions mécaniques se répartissent dans un fil. Considérons un point M quelconque sur un fil (dont on suppose la section

négligeable). La force exercée par la partie droite M sur la partie avant M' est appelée **tension du fil** et est notée $T(\delta t)$. Le moment exercé est quant à lui appelé **raideur du fil** et est noté $\Gamma_M(M)$. On dit qu'un fil est **ouple** si en chacun de ses points, la raideur est nulle ; dans ce cas, la tension du fil est **constante** en tout point au fil.

Pour un déformé à la pouille : celle-ci peut pivoter librement autour de son axe, noté (Δ) . Si le moment des actions de liaisons projeté sur (Δ) entre la pouille et son support est nul, on dit que la liaison est de type **pivot parfait**.

On réalise les hypothèses suivantes sur la machine d'Atwood :

- la pouille est en liaison pivot parfait et possède un moment d'inertie J par rapport à son axe;
- le fil est souple;
- le fil est inextensible et sans masse;
- le fil ne glisse pas sur la pouille.

Le problème comporte 3 incertaines cinématiques : x_1 , x_2 et θ . Cependant, le fait que le fil soit inextensible et ne puisse pas glisser sur la pouille implique que ces quantités doivent être reliées par deux équations : le problème ne comporte qu'un seul degré de liberté. L'inextensibilité implique

$$x_1 + x_2 = \text{const.} \quad (1.53)$$

Le concept de non-glissement sera davantage explicité au chapitre 2. On comprend cependant bien que pour que le fil soit immobile par rapport à la pouille, en notant R le rayon de celle-ci, on doit avoir

$$\dot{x}_1 = R\dot{\theta}. \quad (1.54)$$

Le système est théâtre de nombreuses actions : en tout point du fil s'applique la tension du fil, qui **peut varier le long du fil**, il y a de plus des actions de contact entre le fil et la pouille ainsi que des actions d'air sur la pouille. Pour ne pas faire intervenir d'incertaines supplémentaires, il est particulièrement intéressant d'appliquer le théorème du moment cinétique au système complet (pouille, fil et masses) par rapport à l'axe de rotation de la pouille : on se débarrasse ainsi de toutes les actions internes ! On a ainsi

$$\frac{dI_\theta}{dt} = \sigma M_{\text{ext},\theta}, \quad (1.55)$$

où I_θ est la somme des moments cinétiques projetés sur (Δ) :

$$I_\theta = J\ddot{\theta} - m_1 R\ddot{x}_1 + m_2 R\ddot{x}_2. \quad (1.56)$$

Les seules forces extérieures sont les poids des masses m_1 et m_2 , on a donc

$$M_{\text{ext},\theta} = m_1 g R - m_2 g R. \quad (1.57)$$

L'équation du mouvement est donc

$$J\ddot{\theta} - m_1 R\ddot{x}_1 + m_2 R\ddot{x}_2 = (m_1 - m_2)gR. \quad (1.58)$$

À l'aide des équations (1.53), (1.54) et (1.55), on obtient en définitive

$$\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1 = R\ddot{\theta} = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + f/R^2}. \quad (1.59)$$

La tension du fil n'est pas uniforme le long du fil? En effet, si la masse m_1 subit une tension $\vec{T}_1 = T_1 \hat{u}_1$, on a

$$m_1 \ddot{x}_1 = T_1 - m_1 g, \quad (1.60)$$

et les masses m_1 et m_2 étant différentes, T_1 et T_2 sont différentes.

On peut seulement affirmer que la tension est uniforme le long de chaque partie pendante du fil, celui-ci étant sans masse (pour le voir, on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique à une portion de fil).

On peut obtenir un résultat similaire en utilisant le théorème de l'énergie cinétique pour le système complet, car les actions intriques ne travaillent pas. Cependant, utiliser le principe fondamental de la dynamique n'est pas adapté car il faut pour cela s'attacher à l'évolution de la tension du fil entre les deux masses... .

1.4.2 Choix de l'approche

Il existe de nombreux théorèmes en mécanique, et le choix du théorème à appliquer n'est pas toujours évident. Dans la figure 1.7, je propose un processus à suivre pour choisir le bon théorème à appliquer. Ce schéma n'est pas universel, mais il couvre l'essentiel des situations académico-scolaires rencontrées en mécanique.

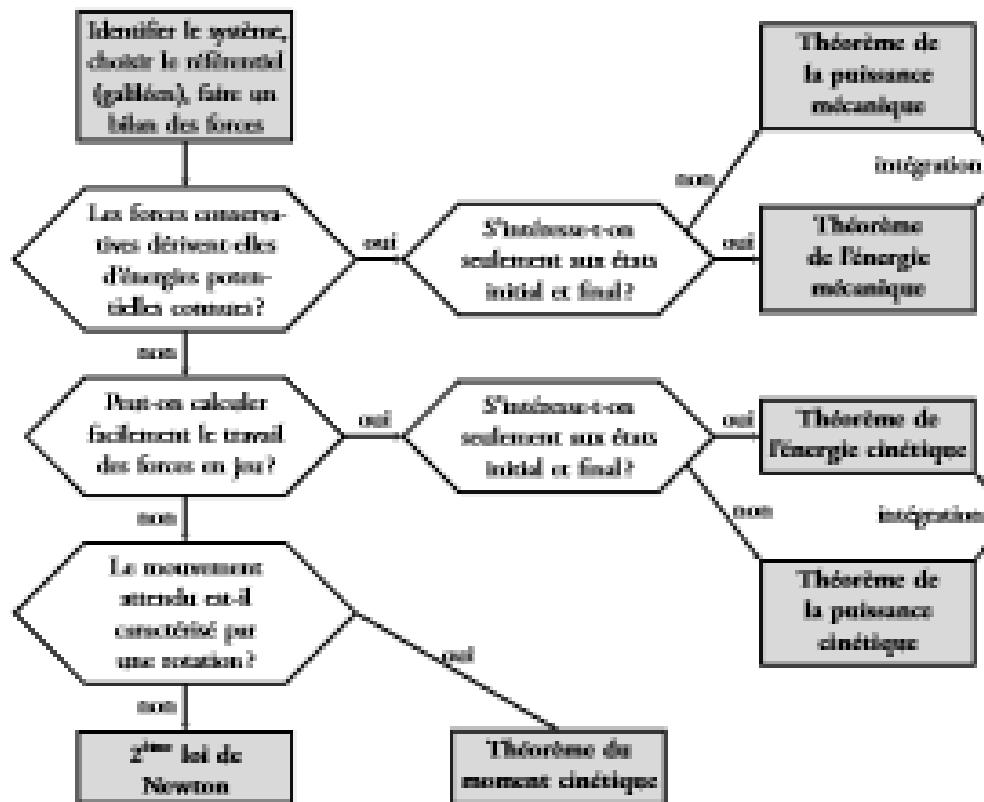


FIGURE 1.7 – Processus de décision pour le choix du théorème mécanique à utiliser.

Chapitre 2

Applications : frottements, oscillateurs, particules chargées

Nous disposons désormais des théorèmes qui nous serviront dans le reste de cette partie d'étude de la mécanique newtonienne : nous pourrons passer à l'étude de ces phénomènes. Cela nécessite de décrire plus précisément les forces qui entrent en jeu dans la description de ces phénomènes. Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur la description des frottements, qui entrent en jeu dans toute situation réelle mais sont souvent négligés.

Nous nous intéresserons ensuite à l'étude des oscillateurs, des objets omniprésents en physique. Après une étude complète de l'oscillateur harmonique, pierre anglaise de la mécanique de par son universalité (voir chapitre 1), nous affinerons le modèle pour décrire des oscillateurs plus riches.

Pour finir, nous étudierons le mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique. La forme de la force de Lorentz entraîne l'existence de trajectoires qualitativement différentes de celles étudiées dans les deux premières parties de ce chapitre.

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

1. comprendre que chaque situation où des frottements sont présents est unique mais qu'il est possible de dégager des lois approximant efficacement des situations très variées;
2. maîtriser l'approche d'un problème à frottements solides : hypothèse, résolution, vérification, qui entraîne des comportements qualitativement bien plus riches que dans les problèmes à frottements fluides;
3. avoir que le portrait de phase permet de comprendre qualitativement le comportement d'un oscillateur non linéaire;
4. connaître les caractéristiques de la présence de non-linéarités;
5. décrire qualitativement le mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique.

Voici des extraits de logiques tombés en 2022 et 2023 qui sont en lien avec ce chapitre :

2023	Forces de traînée et de portance	Mettre en œuvre une expérience permettant de caractériser une force de traînée à faible nombre de Reynolds.
	Frottements	Illustrer l'exemple d'une situation mécanique dans laquelle intervient au moins un changement de mode de glissement, en s'appuyant sur la simulation numérique dont le code est fourni.
2022	Approches perturbatives	Le candidat ou la candidate établira la formule de Borda et mettra en évidence expérimentalement le non-hachoirisme des oscillations d'un pendule. Il n'est pas opportun de consacrer plus de quinze minutes pour exposer cette partie de la logique.
	Forces intérieures à un système	Le candidat ou la candidate proposera et exploitera une expérience mettant en évidence le travail des forces intérieures à un système. Il n'est pas opportun de consacrer plus de dix minutes pour exposer cette partie de la logique.
	Régimes transitoires	Le candidat ou la candidate présentera expérimentalement le portrait de phase d'un phénomène transitoire. Il n'est pas opportun de consacrer plus de dix minutes pour exposer cette partie de la logique.
	Frottements	Le candidat ou la candidate présentera une expérience permettant de déterminer le coefficient de frottement fluide sur un oscillateur mécanique amorti. Il n'est pas opportun de consacrer plus de dix minutes pour exposer cette partie de la logique.

2.1 Frottements fluides et solides

Le terme de **frottement** désigne de manière générale une interaction entre deux corps (solides ou fluides) en contact et tendant à s'opposer à leur mouvement relatif. Les forces de frottements ont été les premières à être étudiées par les humains : il est en effet crucial de comprendre leur fonctionnement afin de pouvoir les minimiser lors notamment du transport d'objets (voir [9] pour un résumé historique). Leur modélisation est cependant ardue par la grande diversité de situations possibles, dans lesquelles les frottements se manifestent de façons très différentes. Commençons par quelques observations.

- Lorsqu'un objet est lancé dans l'air, sa vitesse cesse d'augmenter au bout d'un certain temps : il existe une « vitesse limite » de chute.
- Cette vitesse limite dépend de la forme de l'objet et de sa masse.

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

- * Lorsque l'on fait glisser un objet sur le sol, il ne se met pas en mouvement immédiatement : il faut exercer une certaine force pour le faire se déplacer. À l'inverse, dans l'air ou l'eau, un objet se met en mouvement immédiatement.

On en déduit que les forces de frottements se divisent en deux catégories, selon que le contact soit avec un fluide ou un liquide. Les frottements fluides doivent compenser la poussée pour une certaine vitesse, on en déduit qu'on peut les écrire sous la forme

$$\vec{F}_{\text{frot}} = -f(v)\vec{v}_x, \quad (2.1)$$

avec le vecteur \vec{v} dans la direction du mouvement et f une fonction croissante. La description des frottements solides sera plus complexe car il faudra distinguer des phasés selon que les objets soient ou non en mouvement ou non.

2.1.1 Frottements fluides

Faible vitesse

Dans le cas de frottements fluides, on fait souvent l'hypothèse que la force de frottements est proportionnelle à la vitesse. Ceci est valable lorsque les vitesses en jeu sont suffisamment faibles.

Indication	Force de frottements visqueux
La force de frottements s'exerçant sur un objet plongé dans un fluide et évoluant avec une vitesse relative v dans celui-ci est de la forme	$\vec{F}_{\text{frot}} = -\lambda \vec{v},$ (2.2)

avec λ un coefficient de proportionnalité positif, exprimé en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Note : par abus de dénomination, on appelle souvent à cette force de frottements sous le nom « frottements fluides ».

Plus quantitativement, cette expression de la force de frottements est valide lorsque le *nombre de Reynolds* associé à l'écoulement relatif du fluide dans le rétinacule de l'objet est petit devant 1. Ainsi, pour un objet de taille d , plongé dans un fluide de viscosité cinétique ν , la formule de l'équation (2.2) est valable tant que

$$d \times v \ll \nu. \quad (2.3)$$

Il est possible d'obtenir une formule pour le coefficient λ dans le cas où l'objet considéré est une sphère de rayon R . On obtient alors ce cas

$$\lambda = 6\pi\eta R, \quad (2.4)$$

avec η la viscosité dynamique du fluide. Une bille de métal de 1 cm de diamètre aura donc un coefficient λ dans l'air valant environ $1,7 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

fonctionne l'effet d'une telle force de frottement sur un mouvement de chute libre. On considère une masse m qui tombe dans l'air selon la verticale (Oz) — orientée vers le bas ici — dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On suppose que la vitesse initiale est nulle. Les deux forces¹ s'appliquant sur cette masse sont (voir figure 2.1)

- son poids $\vec{P} = mg \vec{u}_z$
- la force de frottement $\vec{F}_{\text{frot}} = -kv \vec{u}_z$

La seconde loi de Newton nous permet d'obtenir l'équation du mouvement :

$$m\ddot{z} = mg - kv \quad \text{soit} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g. \quad (2.6)$$

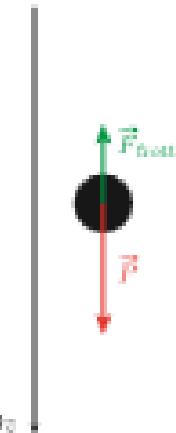


FIGURE 2.1 – Forces s'appliquant sur une masse en chute libre.

On peut déduire de l'équation (2.6) que la vitesse $v(t)$ est

$$v(t) = gt + Ae^{-kt}, \quad t = \frac{m}{k}, \quad (2.7)$$

avec A une constante. La vitesse initiale étant nulle, on obtient $A = -gt_0$ et

$$v(t) = gt\left(1 - e^{-kt}\right), \quad (2.8)$$

1. On néglige ici la poussée d'Archimède s'appliquant sur la masse en cours de chute. Si on la prend en compte, il faut compliquer la masse en par

$$(p - p_f)V, \quad (2.5)$$

avec p la masse volumique de l'objet, V le volume de celui-ci et p_f la masse volumique du fluide. On voit que négliger cette poussée est raisonnable dans le cas d'une chute si l'objet est suffisamment dense.

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

Le profil de vitesse est tracé sur la figure 2.1. On observe que la vitesse tend vers une valeur limite v_∞ , telle que $\vec{v} = v_\infty \vec{e}_x$, en accord avec les observations faites précédemment. Cette vitesse limite est

$$v_\infty = \frac{C_D}{2} . \quad (2.9)$$

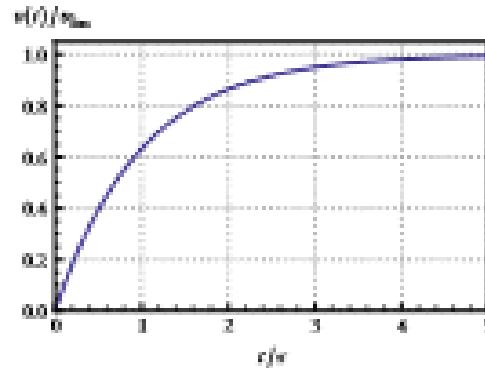


FIGURE 2.1 – Évolution de la vitesse au cours de la chute libre.

Vitesse plus élevée

Lorsque la vitesse de chute est plus élevée, il est plus complexe d'écrire une loi suffisamment générale pour être pertinente. On fait en pratique ce qu'est appelé des simulations numériques. On écrit la force de frottements sous la forme

$$\vec{F}_{\text{frot}} = -\frac{1}{2} \rho v^2 A C_d(s) \vec{e}_x , \quad (2.10)$$

où A est l'aire de la section de l'objet considéré dans un plan perpendiculaire à la vitesse (pour une sphère de rayon R , cette aire vaut πR^2), ρ est sa masse volumique, C_d est le coefficient de traînée et \vec{e}_x est un vecteur unitaire orienté dans le sens de la vitesse ($\vec{e}_x = \vec{v}/v$). On cherche ensuite à obtenir ce coefficient de traînée en fonction de la vitesse.

Dans le cas où l'objet considéré est une sphère de rayon R , on donne le coefficient de traînée pour tout v (plus précisément pour tout nombre de Reynolds Re/v) dans la figure 2.3. On observe qu'à faible vitesse, C_d se comporte comme $1/v$, ce qui corrabore l'équation (2.2). À vitesse plus élevée, on dispose d'une plage importante de valeurs de v pour lesquelles C_d est environ constant, ce qui permet d'écrire

$$\vec{F}_{\text{frot}} = -kv^2 \vec{e}_x . \quad (2.11)$$

Voyons en quoi cette nouvelle expression de la force de frottements modifie le mouvement lors d'une chute libre. La nouvelle équation du mouvement est

$$m\ddot{v} = mg - kv^2 \quad \text{soit} \quad \ddot{v} = g - \frac{k}{m}v^2 . \quad (2.12)$$

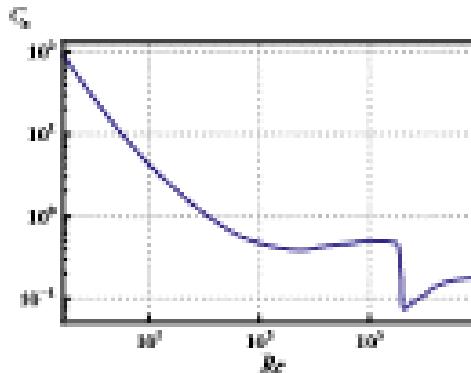


FIGURE 2.3 – Coefficient de frottement pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, dans le cas d'une sphère.

Cette équation n'est pas linéaire, on ne peut donc pas la résoudre par les moyens usuels. On peut déjà obtenir la vitesse limite :

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{g r m}{F}}. \quad (2.13)$$

Remarquons déjà que la dépendance en m a fondamentalement changé par rapport au cas précédent : la vitesse limite n'évolue plus proportionnellement à m , mais seulement à sa racine carrée!

L'équation du mouvement peut alors s'écrire

$$\frac{d(v/v_{\text{lim}})}{1 - (v/v_{\text{lim}})^2} = \frac{dx}{r} \quad \text{où} \quad r = \frac{v_{\text{lim}}}{F}. \quad (2.14)$$

On reconnaît dans le membre de gauche la dérivée de $\operatorname{arctanh}(v/v_{\text{lim}})$. Il donc possible d'intégrer l'équation du mouvement : en utilisant le fait que la vitesse initiale est nulle, on obtient

$$v(t) = v_{\text{lim}} \operatorname{tanh}\left(\frac{t}{r}\right). \quad (2.15)$$

Le nouveau profil de vitesse est tracé sur la figure 2.4.

Si vous souhaitez aller plus loin dans l'étude de la chute libre d'une bille et de la mesure du coefficient de frottement, vous pouvez consulter par exemple [10]. Une perspective historique est donnée dans [11].

2.1.2 Frottements solides

On s'intéresse désormais à la description des forces de frottements entrant en jeu lors du contact entre deux solides. La première étape est de se munir d'une description cinématique du contact entre deux solides.

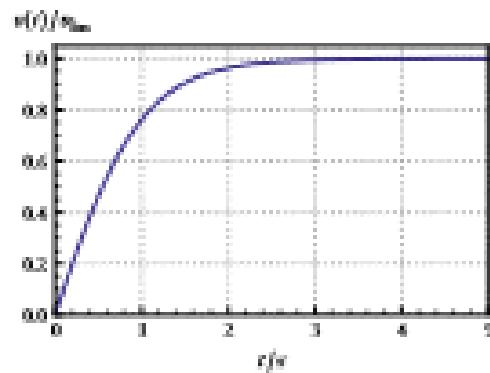


FIGURE 2.4 – Évolution de la vitesse au cours de la chute libre dans le cas d'une force de frottement en v^2 .

Vitesse de glissement

On considère un solide S posé sur un support Σ qui peut être fixe ou representer un autre solide en mouvement et dont la forme est a priori quelconque. Ces deux objets évoluent dans un référentiel R galiléen. Dans un premier temps le contact est supposé ponctuel. À l'instant t , on considère deux points coïncidant : le point J appartenant au solide S et le point J' appartenant à Σ (voir figure 2.5). Ils sont confondus à l'instant t mais éventuellement分离 à se séparer aux instants ultérieurs.

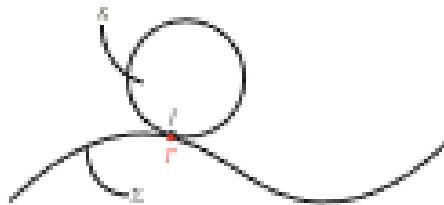


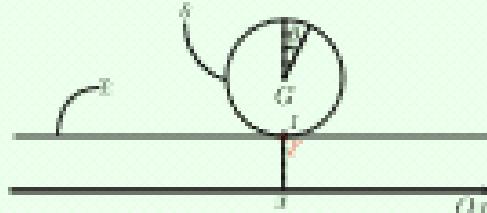
FIGURE 2.5 – Contact ponctuel entre deux solides.

On définit alors la **vitesse de glissement** de S sur Σ par

$$\vec{v}_g(S/\Sigma) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(J \in S) - \vec{v}_{\mathcal{R}}(J' \in \Sigma). \quad (2.14)$$

Cette vitesse est indépendante du référentiel dans lequel elle est évaluée (voir PP). Il faut comprendre cette définition comme « l'écart de vitesse entre le point de contact vu comme étant lié à S et ce même point vu comme étant lié à Σ ». Les deux solides ayant des géométries différentes, il n'y a pas de raison pour que ces deux vitesses soient égales, bien que les deux points soient confondus à un instant donné. Cependant, si le solide S ne glisse pas sur Σ , ces deux points coïncident à tout instant et on a $\vec{v}_g = \vec{0}$. On parle alors d'**adhérence**.

Prenons l'exemple d'une roue de rayon R roulant sur un sol horizontal. On note $\omega = \dot{\theta}$ sa vitesse angulaire et x son abscisse.



On se place dans le référentiel où le centre de la roue est fixe. On a alors $\vec{v}_g (J \in \mathcal{S}) = -R\omega \vec{u}_x$ et $\vec{v}_g (J' \in \Sigma) = -x \vec{u}_x$. Ainsi, la vitesse de glissement est :

$$\vec{v}_g = (\dot{x} - R\omega) \vec{u}_x. \quad (2.17)$$

On n'a pas de glissement si la vitesse angulaire de la roue est telle que $\dot{\omega} = R\dot{x}$.

On peut aussi se placer dans le référentiel lié au sol : on a alors $\vec{v}_g (J' \in \Sigma) = \vec{0}$ et on doit évaluer $\vec{v}_g (J \in \mathcal{S})$ en utilisant la formule de Vavignon (voir ??) :

$$\vec{v}_g (J \in \mathcal{S}) = \vec{v}_g (G \in \mathcal{S}) + \vec{R}\vec{G} \wedge \vec{\Omega} = \dot{x} \vec{u}_x + R \vec{u}_z \wedge \omega \vec{u}_y = (\dot{x} - R\omega) \vec{u}_x. \quad (2.18)$$

Lois de l'évaluation de la vitesse de glissement, il faut bien prendre soin d'évaluer les deux vitesses dans le même référentiel !

Lois de Coulomb

La force de frottement entre les solides a une origine microscopique complexe, elle est modélisée à l'échelle macroscopique par une force résultante² \vec{R} qui s'applique au point de contact J .

On décompose la force \vec{R} en deux vecteurs :

- L'un, noté \vec{N} , est orthogonal à la surface de contact. Il caractérise le non-encaissement du solide dans Σ et est dirigé de Σ vers \mathcal{S} ;
- L'autre, noté \vec{T} , est dans le plan du contact donc orthogonal à \vec{N} et caractérise la friction.

Les lois de Coulomb sont des lois phénoménologiques énoncées par Amontons dès 1699 et précisées par Coulomb en 1785 permettant de prédire la direction, le sens et dans certains cas la norme de la force \vec{T} .

2. Dans le modèle du contact ponctuel, les actions de frottements se résument à une résultante des forces. En réalité, il y a toujours un léger frottement des surfaces au niveau du contact, et il peut donc y avoir un moment de frottement qui oppose à la rotation au niveau du contact ponctuel (voir [T1.1d]).

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

Informations	Lois du frottement solide
On distingue deux cas selon la valeur de $\vec{v}_f(S/\Sigma)$.	
• Si $\vec{v}_f(S/\Sigma) = \vec{0}$, il y a adhérence et on a	$ \vec{T} \leq f_s \vec{N} . \quad (2.19)$
• Si $\vec{v}_f(S/\Sigma) \neq \vec{0}$, il y a glissement et on a	$ \vec{T} = f_d \vec{N} \quad \text{ou} \quad \vec{T} \cdot \vec{v}_f(S/\Sigma) < 0 . \quad (2.20)$

Les scalaires f_s et f_d sont deux coefficients caractérisant le contact respectivement statique (**coefficients de frottement statique**) et de glissement (**coefficients de frottement dynamique**). Ils ne dépendent que des corps en contact (matériaux, état de surface, etc.) et sont indépendants de la valeur de \vec{N} (en particulier dans la plupart des cas usuels, de la masse de S), de l'aire de la zone de contact entre les deux solides et, le cas échéant, de la vitesse de glissement.

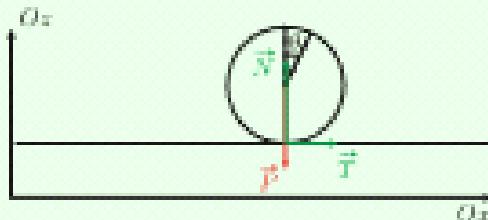
Les coefficients f_s et f_d sont souvent considérés égaux, même si en toute rigueur on a plutôt $f_s \geq f_d$ comme en témoigne le tableau 2.2. Cela n'implique pas nécessairement que de lui donner raisonnable (penser à un déménagement...). Cependant ces coefficients étant phénoménologiques on ne peut pas démontrer fondamentalement cette inégalité et on pourra imaginer qu'elles soit toutes pour certains cas spécifiques.

Matériaux	f_s	f_d
Acier/Acier	0,2	0,1
Pneu/Route sèche	0,8	0,5
Pneu/Route mouillée	0,5	0,4
Bois/Bois	0,5	0,3
Pneu/Route mouillée	0,3	
Pneu de F1/Route	1,8	
Céramique/Acier	4	

TABLE 2.2 – Ordres de grandeur de quelques coefficients de frottement classiques.

La différence numérique entre f_s et f_d a son importance. Elle permet notamment d'expliquer les mouvements appelés « stick-slip ». Ce type de mouvement, communément étudié en CPGE, consiste en une alternance de phases de glissement et de non-glisement. On pourra par exemple se référer à [12].

Reprenons le cas de la roue posée sur un sol horizontal, puis dans le cas plus général où l'on étudie le démarrage d'une voiture. On suppose que l'on fournit un couple moteur $\Gamma \vec{u}_y$ à la roue de masse m .



On cherche la condition pour que la roue ne patine pas lors du démarrage. Rédisons un bilan des forces :

- le poids de la roue vaut $\vec{P} = -mg \vec{U}_z$,
- la réaction normale vaut $\vec{N} = N \vec{U}_z$,
- la réaction tangentielle vaut $\vec{T} = T \vec{U}_x$ (avec T aléatoire).

La voiture ne se déplaçant que horizontalement, on doit avoir $N = mg$. Appliquons alors le théorème du moment cinétique à la roue : on écrit $\vec{L}_{O_z} = J\vec{\theta} \vec{u}_y$ (voir ??), et on a

$$J\vec{\theta} = -KT + \Gamma. \quad (2.21)$$

La seconde loi de Newton appliquée à la roue nous donne

$$m\vec{x} = \vec{T}. \quad (2.22)$$

Enfin, la condition de non-glissement est $\dot{x} = R\dot{\theta} = R\omega$. On en déduit donc

$$\Gamma = mR\dot{\omega} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{J}{mR^2} + R \right) \Gamma = \Gamma. \quad (2.23)$$

En cas de non-glissement, on a selon la loi d'Amontons-Coulomb $|\Gamma| < f_m g$, ce qui implique

$$\Gamma < f_m g R \left(1 + \frac{J}{mR^2} \right). \quad (2.24)$$

En observant les valeurs de f_m du tableau 2.2, on comprend pourquoi il est bien plus ardu de démarquer une voiture sur un sol enneigé : le couple maximal atteignable est bien plus faible que sur une route sèche ! Remarquons pour finir que dans le cas présent, la force de « frottement » tangentielle est bien celle qui permet au véhicule d'avancer *in fine*.

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

Etude énergétique

La puissance totale des actions de frottement entre les solides S et Σ est donnée par

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\vec{R}_{S/\Sigma}) + \mathcal{P}(\vec{R}_{\Sigma/S}). \quad (2.25)$$

Or, on a

$$\mathcal{P}(\vec{R}_{\Sigma/S}) = \vec{R}_{\Sigma/S} \cdot \vec{v}_S (I \in S) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\vec{R}_{S/\Sigma}) = \vec{R}_{S/\Sigma} \cdot \vec{v}_{\Sigma} (I' \in \Sigma). \quad (2.26)$$

Par principe des actions réciproques, on a $\vec{R}_{S/\Sigma} = -\vec{R}_{\Sigma/S}$, soit

$$\mathcal{P} = \vec{R}_{S/\Sigma} \cdot (\vec{v}_S (I \in S) - \vec{v}_{\Sigma} (I' \in \Sigma)) = \vec{R}_{S/\Sigma} \cdot \vec{v}_S (S/\Sigma). \quad (2.27)$$

Pour finir, la vitesse de glissement appartenant au plan unique commun aux deux solides, on a :

Tel contact	Puissance des forces de frottement
La puissance totale \mathcal{P} des forces de frottements entre les solides S et Σ est :	
	$\mathcal{P} = \vec{T} \cdot \vec{v}_S (S/\Sigma). \quad (2.28)$

Celle-ci est nulle dans le cas du non glissement et négative dans le cas du glissement.

Pour illustrer la nécessité de la rigueur lors de l'étude d'actions entre solides, intéressons-nous au cas suivant : un tapis roulant roule avec une vitesse $U \vec{v}_x$ dans le référentiel terrestre. Dessus se trouve un pavé avançant avec une vitesse $V \vec{v}_{x'}$, avec $0 < V < U$: le pavé glisse. Notons $\vec{T} = T \vec{v}_x$ la réaction tangentielle du tapis sur le pavé : on a $T \geq 0$. On calcule la puissance régie par les systèmes {pavé}, {tapis} et {tapis + pavé} dans les référentiels liés au laboratoire, au tapis et au pavé :

Référentiel	Terrestre	Pavé	Tapis
$\mathcal{P}_{\text{terrestre}}$	$TV \geq 0$	$T \times 0 = 0$	$T(V - U) \leq 0$
$\mathcal{P}_{\text{pavé}}$	$-TU < 0$	$-T(U - V) \leq 0$	$-T \times 0 = 0$
$\mathcal{P}_{\text{tapis}} (\text{tapis} + \text{pavé})$	$-T(U - V) \leq 0$	$-T(U - V) \leq 0$	$-T(U - V) \leq 0$

On remarque donc que seule la puissance des actions mutuelles de contact est toujours négative (et ne dépend pas du référentiel).

On dit souvent que « les frottements s'opposent au mouvement ». Dans le contexte du glissement, cette idée est juste et est bien traduite par le fait que la puissance des forces de frottements est négative. Cependant, cette phrase peut occulter des situations dans lesquelles le frottement est utile. Dans le cas de la marche à pied ou du mouvement d'une voiture cela le fait qu'il y ait adhérence (donc frottement

statique) qui permet de convertir l'action mécanique en mouvement (voir l'exemple précédent). D'autres situations exploitent aussi le frottement dynamique : polissage, freinage, etc.

Origine microscopique

L'origine microscopique des frottements est très complexe car elle fait appel aux interactions à l'échelle atomique entre les deux solides. Elle a fait ainsi l'objet de nombreux développements scientifiques. Je présente ici un modèle simplifié proposé dans [13] qui permet de comprendre dans les grandes lignes l'origine de la loi d'Amontons-Coulomb.

La première idée de la modélisation est de différencier l'aire de la surface géométrique commune aux deux solides, notée A ci que l'on mesure aisément, et l'aire réelle du contact A_c . Du fait de la rugosité des surfaces considérées, l'aire A_c est nettement plus faible que A . La figure 2.6, représentant une rugosité en graine, aide à l'en convaincre. Le contact entre les deux solides est donc ramené à une série de contacts quasi-punctuels, subissant une contrainte normale σ_N .

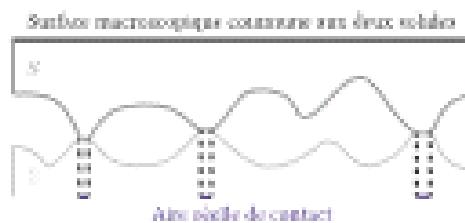


FIGURE 2.6 – L'aire réelle de contact à l'échelle microscopique est nettement plus petite que l'aire géométrique commune aux deux solides à l'échelle macroscopique.

Dans le cas qui nous intéresse la force verticale contrôlant les solides l'un sur l'autre est macroscopique (c'est par exemple le poids du solide supérieur) tandis qu'en a justifié plus haut que la surface réelle de contact est microscopique. La contrainte σ_N est donc très importante de sorte qu'elle doit être absorbée par une multitude de contacts quasi-punctuels qui absorbent chacun au plus une contrainte p une fois dans leur régime plastique de déformation (voir figure 2.7a). Cette contrainte maximale p étant à priori largement inférieure à σ_N , on pourra considérer que tous les contacts ponctuels ont atteint ce régime. L'équilibre macroscopique du solide impose ainsi $N = p \times A_c$, avec $p = N/A_c$.

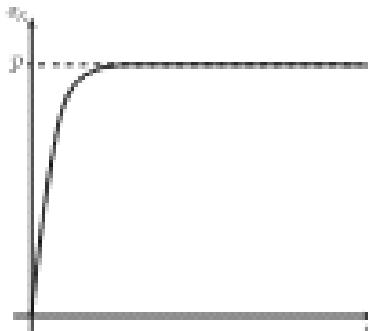
Les micro-contacts étudiés subissent des efforts si importants qu'on peut considérer qu'à ces endroits les deux solides « frottent »². Supposons alors que l'on applique une action T parallèle à la surface de contact (typiquement on tire S sur un plan). Chaque micro-contact subit une contrainte tangentielle $\sigma_T = T/A_c$ sa déformation est donnée schématiquement par la courbe de réponse contrainte/déformation en chauffement présenté figure 2.7b. Contrairement à ce qui se passe en compression, les contacts ne peuvent pas se déformer notablement en chauffement et cèdent dès que la contrainte appliquée devient supérieure à r .

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

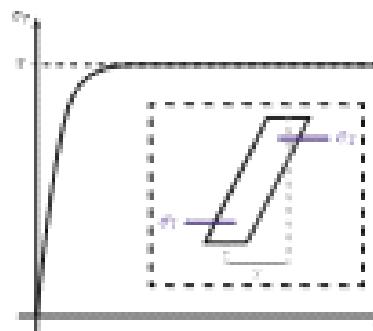
Considérons dans un premier temps que T est relativement faible, c'est-à-dire que $T/A_s \ll r$. Alors la contrainte tangentielle peut se répartir sur tous les micro-contacs en garantissant pour la majorité d'entre eux qu'il n'y a pas rupture. Cette répartition tient jusqu'à ce que T atteigne une valeur seuil de l'ordre de $T = rA_s$, à partir de laquelle les contacts ne peuvent plus absorber la contrainte et sont obligés de rompre. Comme on a justifié précédemment que $A_s = N/p$ on a finalement :

$$\begin{aligned} T &< \frac{r}{p}N \quad \text{lorsqu'il n'y a pas glissement} \\ T &= \frac{r}{p}N \quad \text{lorsqu'il y a glissement.} \end{aligned} \tag{2.29}$$

On retrouve donc un comportement semblable à celui annoncé par les lois de Coulomb. On comprend qu'en effet ces lois ne dépendent pas de la surface du contact puisque quelle que soit la surface disponible au contact c'est la surface réelle A_s qui joue un rôle et celle-ci varie en augmentant plus ou moins pour compenser exactement la contrainte normale. Enfin on voit le coefficient de frottement aux propriétés intrinsèques du solide déformable sans considération sur le contact en tant que tel.



(a) Cas d'un effort en compression.



(b) Cas d'un effort en cisaillement.

FIGURE 2.7 – Profils de réponse des déformations normale (σ_N) et tangentielle (σ_T) d'un solide soumis à des contraintes normale (σ_N) et tangentielle (σ_T).

Un autre modèle utilisant une modélisation en deux de face des surfaces est proposé dans le chapitre 20 de [11.18].

On voit bien que la modélisation théorique des coefficients de frottement ne permet pas d'obtenir des prévisions quantitatives pour f_1 ou f_2 : il faut donc mesurer ces coefficients expérimentalement.

Meilleur des coefficients de frottement

Pour mesurer le coefficient f_s entre un objet donné et une surface S , on procède comme suit : on pose l'objet sur la surface et on incline celle-ci d'un angle α ; on augmente ensuite α jusqu'à avoir début du glissement. La situation est résumée sur la figure 2.8. On note m la masse de l'objet.

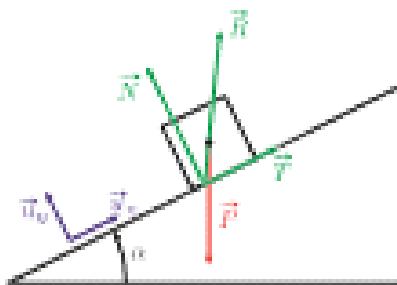


FIGURE 2.8 – Dispositif permettant la mesure du coefficient de frottement statique f_s .

On se place dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen. On suppose que l'objet est immobile : la vitesse de glissement est nulle. Il vient donc :

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \alpha = 0, \\ T &= mg \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Pour avoir non-glissement, il est nécessaire selon la loi d'Amontons-Coulomb d'avoir $T \leq f_s N$. On en déduit :

$$\tan \alpha \leq f_s. \quad (2.31)$$

Ainsi, dès que α dépasse $\arctan(f_s)$, on aura démarrage du mouvement : on peut relever la valeur de α correspondante et en déduire f_s .

Lois du trait de schémas impliquant des forces de frottements sur des solides, on fera attention à placer les points d'application des forces de sorte que le moment total soit nul ! Sur la figure 2.8 par exemple, la force de réaction totale $\vec{T} + \vec{N}$ doit passer par le centre de gravité de l'objet.

Un dispositif de mesure de f_s fait l'objet d'un exercice dans la partie II.

2.2 Oscillateur harmonique

Il nous entraîne à présent vers l'étude de systèmes omniprésents en physique : les oscillateurs. Un **oscillateur** est un système physique soumis à deux effets antagonistes le faisant osciller autour d'un état d'équilibre. Une telle compétition entre deux effets peut se retrouver dans de nombreuses applications, ce qui explique l'intérêt de l'étude des oscillateurs. Nous commençons par l'étude d'un oscillateur particulier, l'**oscillateur harmonique**.

2.2.1 Propriétés fondamentales

Un **oscillateur harmonique** est un systèmeупрощенное, lorsqu'il est à une dimension et n'est soumis à aucune excitation, par une fonction $x(t)$ dépendant du temps et vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.32)$$

La quantité ω_0 , positive, est appelée **pulsation propre** et est exprimée en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le SI.

Nous avons déjà rencontré une telle équation au chapitre 1 : dans l'approximation des petits angles, un pendule simple de longueur l est décrit par l'équation (2.12) avec $\omega_0^2 = g/l$. Plus généralement, tout système en petites oscillations autour d'une position d'équilibre x_0 peut être modélisé par un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0^2 = k/(m)$. L'oscillateur harmonique est aussi rencontré en électronique, dans un circuit LC série. Le modèle généralement utilisé en mécanique pour obtenir une équation d'oscillateur harmonique est celui d'une masse glissant sans frottements sur le sol et reliée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 (voir figure 2.9).

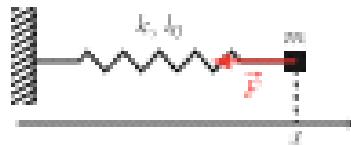


FIGURE 2.9 – Masse reliée à un ressort.

Étudions le mouvement de la masse dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La seule force horizontale est la force de rappel du ressort, qui s'exprime : $\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{u}_x$. La seconde loi de Newton projetée sur l'horizontale donne donc :

$$mx\ddot{x} = -k(x - l_0) \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{avec} \quad y = x - l_0. \quad (2.33)$$

On retrouve bien une équation d'oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Pour résoudre l'équation (2.33), on peut procéder de deux façons différentes : on peut écrire

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \text{ou} \quad x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t). \quad (2.34)$$

La première solution peut être développée en $x(t) = x_0[\cos(\omega_0 t) \cos \phi - \sin(\omega_0 t) \sin \phi]$, ce qui signifie que les deux solutions sont équivalentes : on choisira la plus adaptée aux conditions initiales lors d'un exercice.

L'énergie cinétique de l'oscillateur harmonique est :

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} m x_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t). \quad (2.35)$$

Son énergie potentielle est :

$$E_p = \frac{1}{2} kx(t)^2 = \frac{1}{2} kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t). \quad (2.36)$$

On en déduit donc que l'énergie totale de l'oscillateur, notée E_m , est telle que

$$E_m = m\omega_0^2 x_0^2. \quad (2.37)$$

Nous avons obtenu les trois propriétés de l'oscillateur harmonique :

Intuitif	Propriétés de l'oscillateur harmonique
	<ul style="list-style-type: none"> Les oscillations, sinusoidales, persistent indéfiniment dans le temps sans atténuation. La période de l'oscillation est égale à $2\pi/\omega_0$ quelle que soit la condition initiale imposée, en particulier quelle que soit l'amplitude du mouvement. On parle d'harmonie des oscillations. En moyennant sur une période, on a $\langle E_p \rangle = \langle E_d \rangle = \frac{1}{4} m\omega_0^2 x_0^2 = \frac{1}{2} E_m.$ <p>On parle d'équpartition de l'énergie mécanique et on peut voir l'oscillateur harmonique comme le parfait échangeur entre énergie potentielle et énergie cinétique.</p>

Portrait de phase

Afin de visualiser qualitativement le comportement de l'oscillateur harmonique, on peut chercher à reformuler l'équation (2.35). En effet, en multipliant celle-ci par dx/dt , on fait apparaître la conservation de l'énergie :

$$\frac{dx}{dt} \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 \right) = 0. \quad (2.38)$$

Pour toute trajectoire $x(t)$, on a donc

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 = \text{const.}, \quad (2.40)$$

ce qui signifie qu'il existe une constante a telle que

$$\left(\frac{1}{\omega_0} \frac{dx}{dt} \right)^2 + x^2 = a. \quad (2.41)$$

Dans le plan $(x, \dot{x}/\omega_0)$, cette équation est l'équation d'un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon \sqrt{a} (la constante a étant forcément positive). Le tracé des trajectoires dans ce plan est appelé **portrait de phase** : il s'agit d'un

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

outil très puissant pour l'étude des oscillateurs, notamment les oscillateurs non-harmoniques (voir section 3.3). On dispose d'autant de trajectoires qu'il y a de constantes x : on trace quelques-unes d'entre elles sur la figure 2.10.

Introduisons-nous à quelques propriétés des trajectoires dans l'espace des phases.

Conditions initiales Des conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ permettent de repérer un point dans le portrait de phase. Ce point permet de fixer la constante x , ce qui permet en retour de fixer la trajectoire. Ainsi, on retrouve bien le fait que les conditions initiales fixent initialement la trajectoire.

Croisement de trajectoires Deux trajectoires dans l'espace des phases ne peuvent se croiser : si cela était, le cas, les trajectoires auraient les mêmes valeurs de x et \dot{x} en un point. En prenant ce point comme condition initiale, les trajectoires seraient alors identiques car elles auraient les mêmes conditions initiales.

Sens de parcours Une trajectoire dans l'espace des phases possède un sens de parcours, que l'on peut trouver grâce au signe de \dot{x} : dans la partie supérieure, on a $\dot{x} > 0$, donc x doit augmenter, ce qui signifie que l'on parcourt la trajectoire de la gauche vers la droite. Dans la partie inférieure, le sens de parcours est de la droite vers la gauche.

Dans les parties qui suivent, nous aurons l'occasion de tracer plusieurs portraits de phase pour des oscillateurs non-harmoniques. Pour voir davantage d'illustrations de cet outil et approfondir son utilisation, on pourra consulter la référence [14].

Oscillateur harmonique amorti par frottements fluides

Nous cherchons désormais à nous approcher d'une description réaliste d'un oscillateur mécanique. Pour ce faire, nous partons du constat qu'un mouvement périodique d'oscillations libres n'aime pas : tout mouvement est amorti par des frottements. Ajoutons alors à l'équation (3.32) un terme de frottements fluides : on parle d'**oscillateur harmonique amorti** et l'équation associée est

$$\ddot{x} + \frac{2\zeta}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.42)$$

avec Q le **facteur de qualité**.

Dans le cas du système masse-ressort décrit dans la figure 2.9, la nouvelle force de frottements s'écrit $\vec{F}_{\text{frot}} = -\lambda \dot{x} \vec{u}_x$, et l'équation du mouvement devient

$$m\ddot{x} = -\lambda \dot{x} - k(x - l_0). \quad (2.43)$$

Dans cette situation, on peut retrouver une équation d'oscillateur amorti (équation (2.42)) de facteur de qualité

$$Q = \frac{\sqrt{k/m}}{\lambda}. \quad (2.44)$$

La limite où les frottements sont négligeables correspond à prendre $\lambda \rightarrow 0$, soit $Q \rightarrow +\infty$.

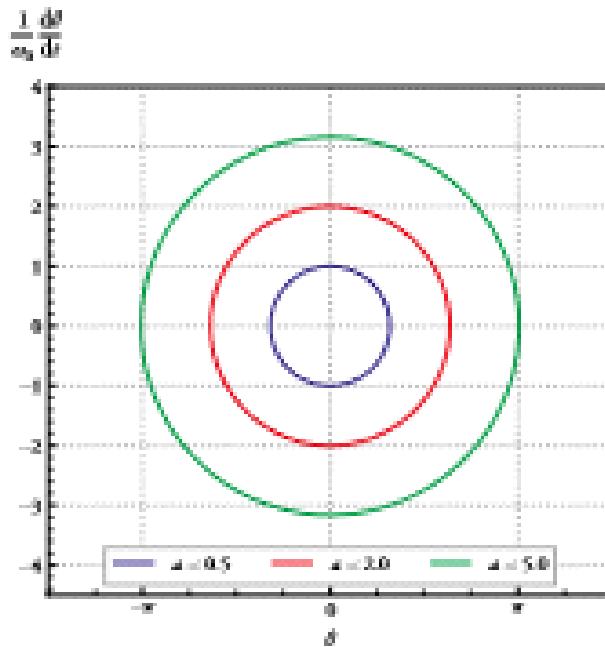


FIGURE 2.10 – Portrait de phase de l'oscillateur harmonique.

L'étude des solutions de l'équation (2.4.1) peut être réalisée, mais ce n'est pas l'objet de ce cours. On procédera plutôt par analogie avec le comportement des circuits diodes 2 étudiés en électrotechnique.

Nous avons déjà vu que l'oscillateur harmonique permettait de décrire tout système en oscillation autour d'une position d'équilibre. Nous allons voir désormais que l'oscillateur amorti permet de modéliser tout système avec une perte constante d'énergie. Reprenons le cas d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 , et supposons qu'à partir de l'instant $t = 0$, à chaque période, le système perde une fraction constante de son énergie totale :

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{2\pi}{Q}. \quad (2.45)$$

On a donc, si $\Delta E \ll E$ (ou de façon équivalente $Q \gg 1$) :

$$E(t + 2\pi/\omega_0) = E(t) = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{dE}{dt} = -\frac{2\pi}{Q} E(t), \quad (2.46)$$

ce qui donne :

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{2\pi}{Q} \ll \omega_0, \quad (2.47)$$

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

où K_0 est l'énergie mécanique initiale de l'oscillateur.

Cherchons désormais quelle modification de la trajectoire $x(t)$ pourrait conduire à une telle évolution de l'énergie $E(t)$. On pose $x(t) = x_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_0 t + \varphi)$. En dérivant cette fonction, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x_0 e^{-\gamma t/2} \omega_0 \left(-\frac{\gamma}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \sin(\omega_0 t + \varphi) \right), \\ \ddot{x}(t) &= x_0 e^{-\gamma t/2} \omega_0^2 \left(\left(\frac{\gamma}{2\omega_0} \right)^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\gamma}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi) - \cos(\omega_0 t + \varphi) \right).\end{aligned}\quad (2.48)$$

Il vient donc, à l'ordre le plus bas en γ/ω_0 :

$$E(t) = \frac{1}{2} m x^2 + \frac{1}{2} k x^2 = e^{-\gamma t} m \omega_0^2 x_0^2 = K_0 e^{-\gamma t}, \quad (2.49)$$

ainsi que

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = x_0 e^{-\gamma t/2} \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\gamma \dot{x}. \quad (2.50)$$

On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique : on voit donc que celle-ci peut décrire de façon générale tout processus périodique avec une loss puré d'énergie !

2.2.2 Oscillateur harmonique amorti par frottements solides

L'oscillateur étudié dans la section précédente était amorti par un terme de frottements fluides. Or, comme nous l'avons vu dans la section 2.1, il existe un autre type de frottements, qualitativement différent : les frottements solides. Un oscillateur amorti par frottements solides peut modéliser par exemple l'aiguille d'une balance, qui oscille avant d'atteindre sa position finale. Voyons en quoi la différence de force de frottements entraîne une différence de comportement lors des oscillations.

L'étude d'un tel système est un grand classique des frottements solides. Elle permet d'illustrer efficacement la méthode à suivre lors de la résolution d'un problème mettant en jeu de type de forces (hypothèse initiale sur le glissement, élaboration du mouvement, vérification de l'hypothèse) : il faut bien la maîtriser !

Bilan des forces

On considère le système suivant : une masse m assimilée à un point matériel est attachée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 (voir figure 2.11). On note x l'abscisse de la masse. S'appliquent sur cette masse :

- * Son poids \vec{P} ,
- * La réaction normale du support \vec{N} ,
- * La réaction tangentielle du support \vec{T} ,
- * La force exercée par le ressort \vec{F}_d .

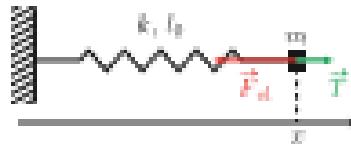


FIGURE 2.11 – Schéma représentatif d'un oscillateur harmonique amorti par frottements solides.

Le mouvement étant unidimensionnel, on doit avoir $\vec{F} = -\vec{N}$.

On note $mg = \|\vec{F}\|$, $\vec{T} = T\vec{u}_x$. De plus, on a $\vec{F}_d = -k(x - l_0) = -kX$ en posant $X = x - l_0$. La vitesse de glissement du support par rapport au sol est $\vec{v}_g = \dot{x}\vec{u}_x = \dot{X}\vec{u}_x$. Notons f le coefficient de frottement de la masse sur le sol (on ne fait pas de différence entre les régimes dynamique et statique).

Conditions de démarrage

Cherchons la condition de démarrage du système : on suppose que initialement, la vitesse de glissement \vec{v}_g est nulle. Pour démarer, on doit avoir une accélération non nulle. Par le principe fondamental de la dynamique, on a en général

$$m\ddot{x} = m\ddot{X} = T - kX. \quad (2.51)$$

Or, pour se pas avoir une en mouvement, on doit avoir $\ddot{x} = 0$. La première loi de Coulomb impose par ailleurs $|T| \leq fN = fm g$. La condition de non mise en mouvement devient donc

$$T = kX \quad \text{et} \quad k|X| \leq fm g. \quad (2.52)$$

Distinction des cas

On distingue donc deux cas lorsque $\vec{v}_g = \vec{0}$:

1. Si $|X| > fm g/k$, alors le mouvement continue,
2. Si $|X| < fm g/k$ alors le mouvement s'arrête et ne pourra pas reprendre sans intervention extérieure.

Pour finir, on note $a = fm g/k$. Étudions maintenant le mouvement.

Hypothèse sur le début du mouvement

Supposons sans perte de généralité que l'on commence dans une phase où $X > a$, avec une vitesse nulle. L'équation du mouvement est alors

$$m\ddot{X} = T - kX, \quad (2.53)$$

et \vec{T} est parallèle et opposé à \vec{v}_g . Comme vu précédemment, on commence bien par une phase dynamique.

On fait alors l'hypothèse raisonnée que la masse se déplace vers la gauche : $\dot{x} < 0$. On peut alors écrire $T = +fm g$ selon la seconde loi de Coulomb, et l'équation devient

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = f_f \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.54)$$

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

La solution est donc, avec les conditions initiales $X(0) = X_0$ et $\dot{X}(0) = 0$:

$$X(t) = (X_0 - x) \cos(\omega_0 t) + x. \quad (2.55)$$

On a un mouvement sinusoidal centré en $+x$.

Si l'on avait fait l'hypothèse que la masse se déplaçait vers la droite, on aurait une force $T = -f \text{sgn } x$ et l'équation aurait pour solution $X(t) = (X_0 + x) \cos(\omega_0 t) - x$. Cette solution décrit une fonction X décroissante, ce qui signifie que la masse se déplace en réalité vers la gauche : cela est en désaccord avec l'hypothèse initiale et on peut donc la rejeter.

Vérification de l'hypothèse dès que $\tau_g^2 = \frac{\pi}{2}$

Cette phase du mouvement se poursuit jusqu'à l'instant t_1 tel que que la vitesse de placement \dot{X} devient, c'est-à-dire pour $\omega_0 t_1 = \pi$. On a alors $X = 2x - X_0$. On doit alors vérifier si le mouvement peut bien continuer. Deux cas se posent devant à nous :

1. Si $|2x - X_0| > x$, ou $X_0 > 3x$, le mouvement continue dans l'autre sens,
2. Sinon le mouvement s'arrête.

On s'intéresse au cas où le mouvement continue : on a alors une phase avec $\dot{X} > 0$ donc $T = -f \text{sgn } x$ et l'équation est

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = -f g. \quad (2.56)$$

La solution est alors, avec $X(t_1) = 2x - X_0$ et $\dot{X}(t_1) = 0$:

$$X(t) = -(X_0 - 3x) \cos(\omega_0(t - t_1)) - x \quad \text{soit} \quad X(t) = (X_0 - 3x) \cos(\omega_0 t) - x. \quad (2.57)$$

On a un mouvement sinusoidal centré en $-x$. Cette phase dure jusqu'à lorsque $t = t_2 = 2t_1$. La position est alors $X = X_0 - 4x$: on peut répéter le raisonnement de la première partie en remplaçant X_0 par $X_0 - 4x$. On en déduit le théorème suivant.

Théorème Mouvement d'un oscillateur amorti par frottements solides

- * Le mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 amorti par des frottements solides avec un coefficient f est une succession de branches de cosinus de pulsation ω_0 centrés successivement sur $\pm x$ (voir figure 2.12).
- * Les amplitudes décroissent de façon arithmétique avec une raison $2x$.
- * La position d'arrêt de l'oscillateur se trouve dans l'intervalle $[-x, x]$ et dépend de la position initiale X_0 .

Citez l'un des principaux intérêts de ce théorème : les signaux des appareils analogiques. Celles-ci peuvent être modélisées en première approche par des oscillateurs angulaires (pendules). Cependant,

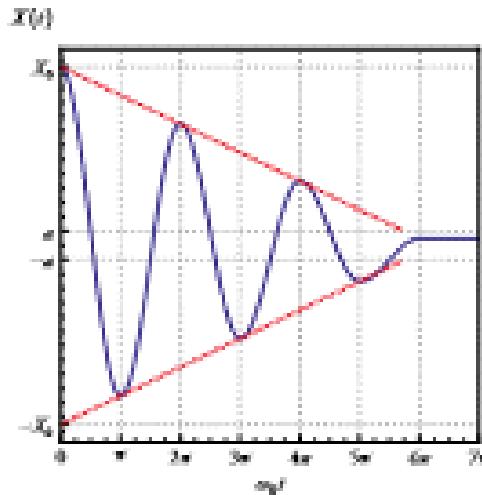


FIGURE 2.12 – Evolution de la position d'un oscillateur amorti par frottements solides. On constate bien que l'enveloppe du mouvement est constituée de deux droites.

elles sont soumises à de nombreuses forces de frottements au niveau de la liaison pivot qui les fait tourner. Les frottements solides notamment sont à diminuer le plus possible, car *la position d'équilibre n'est pas toujours la même selon la position initiale!*

Portrait de phase

Pour terminer cette étude, on se propose de représenter le portrait de phase de l'oscillateur amorti par frottements solides. On a établi les équations du mouvement :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = f g \quad \text{lorsque } \dot{X} < 0 \quad (2.58)$$

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = -f g \quad \text{lorsque } \dot{X} > 0. \quad (2.59)$$

Les trajectoires dans le plan de phase sont des arcs de cercles successivement centrés sur $f g$ dans la partie $\dot{X} < 0$ (demi-espace du bas) et sur $-f g$ lorsque $\dot{X} > 0$ (demi-espace du haut). Cette succession continue jusqu'à ce que l'oscillateur atteigne la plage d'équilibre et s'y arrête. Le portrait de phase est représenté sur la figure 2.13.

2.3 Oscillateurs non-linéaires : exemple du pendule simple

L'oscillateur harmonique ainsi que l'oscillateur harmonique amorti sont des oscillateurs linéaires. Cependant, même dans les problèmes physiques simples, les équations obtenues sont souvent non linéaires : le cas

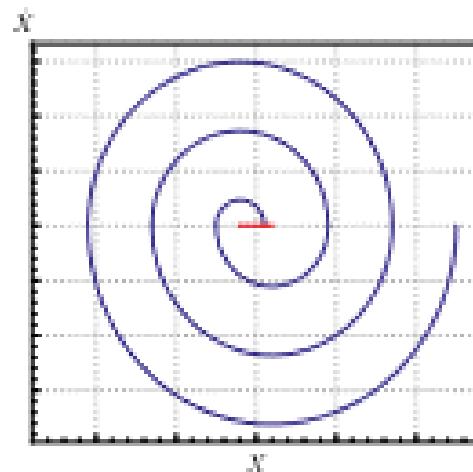


FIGURE 2.13 – Portrait de phase de l'oscillateur amorti par frottement visqueux. La zone d'absorbtion est représentée en rouge.

du pendule simple (section 1.2) en est une illustration. Dans cette section, nous utiliserons l'exemple de ce système pour obtenir des propriétés générales des oscillateurs non-linéaires.

L'équation du mouvement pour le pendule simple est :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (2.60)$$

Cette équation n'est pas linéaire, à cause du terme en sinus ; voyons ce que l'effet de non-linéarité modifie dans le comportement d'un oscillateur à travers cet exemple.

2.3.1 Linéarisation

En général, on traite l'équation (2.60) au premier ordre en θ . On suppose $\theta \ll 2\pi$, ce qui permet d'écrire $\sin \theta \approx \theta$. On retrouve alors l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (2.61)$$

caractéristique d'un oscillateur harmonique. Elle est linéaire (par construction) et on la résout plus haut. Cependant, la linéarisation de l'équation induit forcément des erreurs dès que θ devient trop grand par rapport à 2π et, pour améliorer la modélisation, on est amené à réaliser un développement limité du sinus à un ordre supérieur.

2.3.2 Solutions d'ordre supérieur

Réalisons un développement perturbatif plus complet. Il nous faut pour cela identifier un petit paramètre en puissances duquel nous pourrons développer la solution. Nous avons vu précédemment que $\delta \ll 2\pi$ de sorte que δ pourrait être un bon candidat mais il varie au cours du temps et n'est donc pas à proprement parler un paramètre. On lui préférera l'angle initial θ_0 , constant et faible lui aussi, que l'on notera dorénavant ε afin d'insister sur son caractère infinitésimal. On prendra ainsi pour conditions initiales (sans perte de généralité)

$$\theta(t=0) = \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0} = 0. \quad (2.62)$$

On cherche alors une solution sous la forme

$$\theta(t) = \varepsilon \theta_1(t) + \varepsilon^2 \theta_2(t) + \dots \quad (2.63)$$

Les conditions initiales s'appliquent toujours à la fonction $\theta(t)$. Ainsi, on a

$$\varepsilon \theta_1(0) + \varepsilon^2 \theta_2(0) + \dots = \varepsilon. \quad (2.64)$$

En identifiant les puissances de ε , on trouve les conditions correspondantes sur les θ_i :

$$\theta_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad \theta_i(0) = 0 \quad \text{et} \quad i \geq 1. \quad (2.65)$$

De même, on trouve que pour tout i on a $d\theta_i/dt|_{t=0} = 0$.

L'équation (2.60) devient, avec cette forme de solution et arrêtant à l'ordre 4 :

$$\varepsilon \frac{d^2\theta}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \varepsilon^3 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(\varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \varepsilon^3 \theta_3) + O(\varepsilon^4) = 0. \quad (2.66)$$

On doit développer le sinus en puissances de ε :

$$\sin(\varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \varepsilon^3 \theta_3) = \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \varepsilon^3 \theta_3 - \frac{1}{2} (\varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \varepsilon^3 \theta_3)^2 + \dots \quad (2.67)$$

En ne conservant que les termes d'ordre au plus 3, on obtient pour finir

$$\varepsilon \frac{d^2\theta}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \varepsilon^3 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + \omega_0^2 \left(\varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \varepsilon^3 \left(-\frac{1}{6} \theta_1^2 + \theta_3 \right) \right) + O(\varepsilon^4) = 0. \quad (2.68)$$

On a donc, en identifiant les équations ordre par ordre et en faisant appel aux conditions initiales de l'équation (2.62) :

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \omega_0^2 \theta_1 = 0 \quad \Rightarrow \theta_1(t) = \cos(\omega_0 t).$$

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

$$\begin{aligned}\frac{d^2\delta_2}{dt^2} + \omega_0^2\delta_2 &= 0 \quad \Rightarrow \delta_2(t) = 0, \\ \frac{d^2\delta_3}{dt^2} + \omega_0^2\delta_3 - \frac{1}{\epsilon}\omega_0^2\delta_1^2 &= \frac{\omega_0^2}{24} \cos(3\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2}{8} \cos(\omega_0 t).\end{aligned}\quad (2.69)$$

On observe que la dernière équation correspond à un oscillateur harmonique à la pulsation ω_0 , forcé à la pulsation ω_0 . Ce système est instable : ainsi, δ_3 diverge lorsque t augmente³, ce qui fait que le développement perturbatif n'est plus valable au bout d'un certain temps.

2.3.3 Méthode de Poincaré-Lindstedt

Afin d'éviter les divergences, on doit réaliser un développement perturbatif plus poussé. On se propose alors de faire un double développement perturbatif sur δ , toujours, mais aussi sur ω :

$$\begin{aligned}\tau &= \omega t \qquad \text{avec} \quad \omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \dots, \\ \delta(\tau) &= \delta_1(\tau) + \epsilon^2\delta_2(\tau) + \dots.\end{aligned}\quad (2.71)$$

Un tel développement permet de rendre explicite une modification de la fréquence avec l'amplitude initiale. L'équation (2.69) devient alors

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{d^2\delta}{d\tau^2} + \sin\theta = 0. \quad (2.72)$$

En injectant l'équation (2.71), on obtient

$$\begin{aligned}\left(1 + 2\frac{\partial\omega}{\partial\epsilon} + \left(\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 + 2\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)\right) \frac{d^2}{d\tau^2} &\left(\epsilon\delta_1(\tau) + \epsilon^2\delta_2(\tau) + \epsilon^3\delta_3(\tau) + O(\epsilon^4)\right) \\ &+ \left(\epsilon\delta_1'(\tau) + \epsilon^2\delta_2'(\tau) + \epsilon^3\left(\delta_3'(\tau) - \frac{1}{\epsilon}\delta_1^2(\tau)\right) + O(\epsilon^4)\right) = 0.\end{aligned}\quad (2.73)$$

À l'ordre 1 en ϵ , on trouve

$$\frac{d^2\delta_1}{d\tau^2} + \delta_1 = 0. \quad (2.74)$$

On en déduit que l'on a $\delta_1(\tau) = \cos(\tau)$. À l'ordre 2, on obtient

$$\frac{d^2\delta_2}{d\tau^2} + \delta_2 = -2\frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{d^2\delta_1}{d\tau^2} - 2\frac{\omega_1}{\omega_0} \cos(\tau). \quad (2.75)$$

³ On peut montrer que la solution pour δ_3 est

$$\delta_3(t) = \frac{1}{32} \sin(\omega_0 t) (\delta_{30} e^{i\omega_0 t} + \sin(2\omega_0 t)). \quad (2.76)$$

Afin d'éviter l'instabilité décrite au paragraphe précédent, on doit annuler le terme de forcing, en prenant $\omega_0 = 0$. On a alors $\theta_2 = 0$ en imposant les conditions initiales. Enfin, l'équation à l'ordre 3 donne :

$$\frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \theta_1 = -2\frac{\omega_0}{\omega_0} \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + \frac{1}{6}\theta_1^3 \quad (2.76)$$

$$= \frac{1}{24} \cos(3t) + \frac{1}{8} \left(1 + 16\frac{\omega_0}{\omega_0}\right) \cos(t), \quad (2.77)$$

De nouveau, pour annuler le terme de forcing, on doit avoir $\omega_0 = -\omega_0/16$. On en déduit alors

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{t^2}{16}\right). \quad (2.78)$$

On peut faire apparaître la période T dans la formule précédente : on a $T = 2\pi/\omega$ et on obtient la formule de Borda :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{t^2}{16}\right), \quad (2.79)$$

où $T_0 = 2\pi\sqrt{I/g}$. On peut alors résoudre l'équation pour θ_1 , et on obtient⁴

$$\theta(t) = t \cos\left(\omega_0 \left(1 - \frac{t^2}{16}\right)t\right) + \frac{t^3}{192} (\cos(\omega_0 t) - \cos(3\omega_0 t)). \quad (2.80)$$

C'est justement le fait que la fréquence varie qui faisait échouer la méthode précédente. En général, dès qu'une méthode perturbative fait apparaître un forcing rendant le système instable, on peut se demander qu'un des paramètres du système doit aussi être développé de façon perturbative, c'est ce qui amène à la méthode de Poincaré-Lindstedt.

Les propriétés obtenues pour le pendule simple sont universelles et sont caractéristiques des systèmes non linéaires.

Informations

Caractéristiques des oscillateurs non linéaires

La présence de non-linéarités dans le mouvement d'un oscillateur de pulsation donnée entraîne trois effets :

- * une modification de la fréquence du mouvement;
- * une dépendance des caractéristiques en les conditions initiales;
- * une apparition d'harmoniques aux multiples de la fréquence du mouvement.

Ces trois propriétés sont la signature d'un comportement non-linéaire, et se retrouvent dans des systèmes extrêmement variés.

⁴ La pulsation est ω_0 dans les termes d'ordre t^2 car toute correction mène dans la formule de Borda à introduire des termes d'ordre supérieur.

2.3.4 Période d'oscillation non perturbative

Il est intéressant, pour écrire le développement perturbatif précédent, d'établir des méthodes de calcul allégées qui mènent à un résultat partiel mais souvent suffisant. Dans le cas du pendule simple par exemple, on peut trouver l'expression de la période d'oscillation pour toute position initiale. Pour ce faire, on multiplie l'équation (2.60) par $d\theta/dt$: on obtient la conservation de l'énergie (à un facteur m près)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \omega_0^2 \cos \theta \right) = 0. \quad (2.81)$$

Supposons qu'on lâche le pendule avec un angle θ_0 ($\theta_0 < \pi$, de façon à faire moins d'un tour complet), sans vitesse initiale. Par intégration, on a donc

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2\omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (2.82)$$

On se place sur le premier quart de période du mouvement : θ évolue de θ_0 à 0 tandis que t évolue de 0 à $T/4$. On peut prendre la racine carrée de l'équation précédente et on obtient

$$\frac{dt}{dt} = -\sqrt{2\omega_0/\cos \theta - \cos \theta_0} \quad \text{soit} \quad dt = \frac{-d\theta}{\sqrt{2\omega_0/\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (2.83)$$

Par intégration sur le quart de période, il vient donc

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (2.84)$$

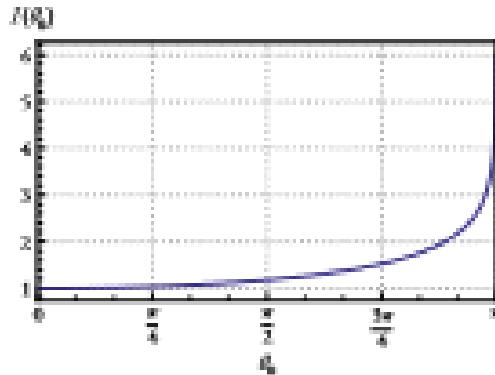
L'intégrale dans le membre de droite n'a pas d'expression simple à partir de fonctions de base : il s'agit d'une intégrale elliptique. On peut cependant l'évaluer numériquement. On la note $\text{erf}(\theta_0)/\sqrt{2}$; la fonction I est tracée sur la figure 2.14, et on a

$$T = T_0 I(\theta_0) \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2.85)$$

On peut donc trouver numériquement la période des oscillations pour toute amplitude de départ, ce qui est souvent satisfaisant en pratique. Par ailleurs, une étude asymptotique montre que la fonction I écrit

$$I(\theta_0) = 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \mathcal{O}(\theta_0^4). \quad (2.86)$$

On a donc $T = T_0 (1 + \theta_0^2/16 + \mathcal{O}(\theta_0^4))$ et on retrouve la formule de Borda (2.79). En revanche, on n'obtient pas la solution complète de l'équation à l'ordre 3.

FIGURE 2.14 – Tracé de la fonction I pour $\dot{\theta}_0$ entre 0 et π .

2.3.5 Étude qualitative du mouvement complet

Dans cette partie sur le pendule non-linéaire nous avons d'abord présenté le calcul complet pour les petites oscillations, difficile, qui mène à la solution exacte à l'ordre 3. Nous avons ensuite présenté une solution numérique partielle du problème permettant de retrouver la formule de Borda. Dans cette section nous allons voir comment le portrait de phase de l'oscillateur permet de comprendre le comportement du système sans avoir à résoudre les équations du mouvement.

Toutes les forces en jeu étant conservatives, l'énergie mécanique $E = 1/2 \cdot (\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)^2 - \omega_0^2 \cos\theta$ est constante au cours du mouvement. La donnée de conditions initiales permet d'évaluer E , et le mouvement sera tel que

$$\left(\frac{1}{\omega_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right)^2 = 2 \cos(\theta) = C \quad \text{avec} \quad C = \text{const.} \quad (2.87)$$

Les trajectoires dans le portrait de phase dépendent donc de la valeur de la constante C : on en trace quelques unes sur la figure 2.15.

Ce portrait de phare permet de comprendre qualitativement les différents types de mouvements possibles. Pour ce faire, remarquons que l'on doit toujours avoir $-2 \cos\theta < C$, soit $\cos\theta > -C/2$. Ainsi, on différencie les mouvements selon la valeur de C :

$-2 < C < 2$: Dans ce cas, il existe deux valeurs de θ telles que $-2 \cos\theta = C$. On note ces valeurs $\pm \theta_C$. Lorsque $\theta = \pm \theta_C$, on a donc $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$. Ainsi, on a un mouvement oscillatoire d'amplitude $2\theta_C$; la période a été calculée dans la partie précédente. Sur le portrait de phase de la figure 2.15, cela se traduit par une trajectoire qui boucle sur elle-même : en partant d'un point donné, on y revient toujours en un temps fini. Ceci est valable modulo 2π : si on décale θ de 2π , le tracé de la trajectoire est inchangé.

$C > 2$: On a plus de valeur de θ telle que $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$. Ainsi, la vitesse ne s'annule pas, et θ croît (ou décroît, selon la trajectoire) indéfiniment. Le mouvement est une *rotation*. Le même choix de C amène

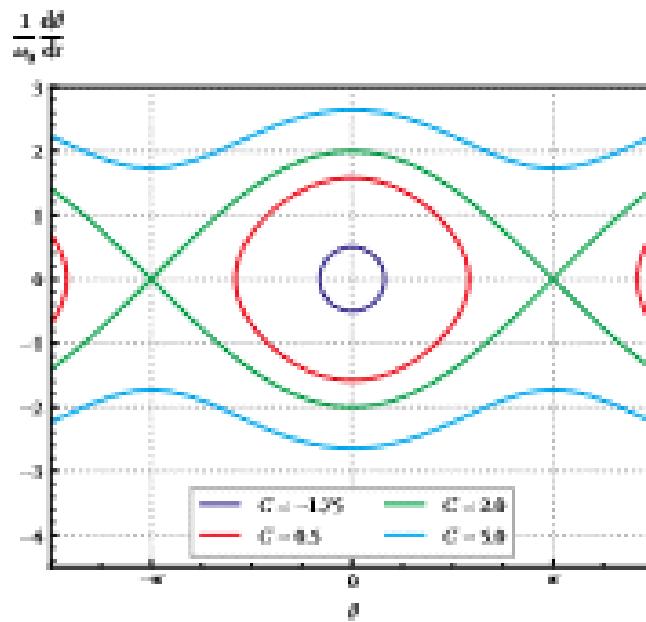


FIGURE 2.25 – Trajet du portrait de phase d'un pendule pesant pour différentes valeurs de C .

d'ailleurs à deux trajectoires, selon le sens de rotation.

$C = 2$. Il s'agit d'une valeur critique, pour laquelle les deux comportements précédents se rejoignent. Le pendule prend un temps infiniment long à atteindre $d\theta/dt = 0$.

Lorsque C est proche de -2 (avec toujours $C > 2$), on peut poursuivre l'étude plus loin. Posons $C = -2 + \epsilon^2$ avec $\epsilon > 0$. On a alors

$$-2 \cos \theta_0 = -2 + \epsilon^2 \quad \text{avec} \quad \theta_0 = \arccos \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2} \right) = \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (2.88)$$

Ainsi, les oscillations sont d'ordre ϵ , ce qui permet de faire l'approximation des petites oscillations. La trajectoire est donc telle que

$$\left(\frac{1}{\omega_0} \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) = -2 + \epsilon^2, \quad (2.89)$$

soit

$$\left(\frac{1}{\omega_0} \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \theta^2 = \epsilon^2. \quad (2.90)$$

Cette équation est la représentation d'un cercle : on a donc des trajectoires circulaires dans le portrait de phase dès lors que les oscillations sont de faible amplitude ; on retrouve le comportement en oscillateur

harmonique du pendule simple aux petits angles. À mesure que C augmente, les trajectoires se déforment à cause de l'apparition de non-linéarités jusqu'à changer qualitativement dès que $C > 2$. On en déduit une autre propriété fondamentale des non-linéarités : celles-ci entraînent l'apparition de comportements qualitativement différents.

Ainsi, l'étude du portrait de phase permet de comprendre les différents comportements de l'oscillateur non-linéaire. Il est donc pertinent, pour un oscillateur donné, de chercher à tracer son portrait de phase afin de caractériser son comportement.

2.3.6 Pour aller plus loin

Le pendule simple n'est pas le seul exemple d'oscillateur non linéaire utile à l'application. On peut citer entre autres l'oscillateur de van der Pol ou l'oscillateur à pont de Wien. Ces oscillateurs seront souvent réalisés dans des montages électroniques, mais la méthode présentée dans cette partie reste valable : pour comprendre le comportement qualitatif, un *tracé du portrait de phase*, et pour comprendre le comportement quantitatif, un *développement perturbatif*.

2.4 Mouvement de particules chargées

Pour clore ce chapitre, passons à l'étude d'un autre type de système usuel en mécanique, dont la dynamique présente de nombreux nouveaux par rapport à ce qui a été étudié jusqu'ici : le mouvement des particules chargées dans un champ électromagnétique. La présence d'un champ magnétique entraîne l'apparition d'un nouveau terme dans la force subie par ces particules, et ce nouveau terme permet l'existence de nouvelles formes qualitatives de trajectoires.

2.4.1 Force de Lorentz

Soit une particule chargée de masse m et de charge q qui l'on étudie dans un référentiel R , et \vec{v} sa vitesse dans ce référentiel. La force qu'elle subit dans un champ électrique \vec{E} et/ou magnétique \vec{B} est la **force de Lorentz** :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E}(M, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M, t) \right). \quad (2.31)$$

que l'on peut décomposer en une partie électrique $\vec{F}_E = q \vec{E}$ et une partie magnétique $\vec{F}_{mg} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$, dont on rappelle les propriétés plus bas.

Dans les équations du mouvement, la charge n'apparaît que via le rapport q/m (parfois appelé *charge spécifique*) : c'est uniquement ce rapport qui pourra être déterminé via des expériences de mécanique.

Pour des particules à l'échelle atomique (électrons, protons, ions chargés), la force de Lorentz est largement dominante devant la force gravitationnelle.

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

Prenons des valeurs typiques $E \sim 10^2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $B \sim 0,1 \text{ T}$, charge élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ et vitesse $v \sim c/100 = 3 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (cesse devrait sans nécessiter de prendre en compte des corrections relatives). Considérons à titre d'exemple un proton de masse $m_p \approx 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

On compare la force de Lorentz et le poids :

$$\begin{aligned}\frac{|m_p \vec{v}|}{|q \vec{E}|} &= \frac{10^{-26}}{10^{-17}} = 10^{-9} \\ \frac{|m_p \vec{v}|}{|q \vec{v} \wedge \vec{B}|} &= \frac{10^{-26}}{10^{-14}} = 10^{-12}\end{aligned}\quad (2.22)$$

Le poids est donc bien complètement négligeable devant la force de Lorentz. On peut de plus noter que la norme de la force magnétique est facilement grande devant la norme de la force électrique pour des vitesses élevées.

La force de Lorentz électrique travaille, et pour un champ électrostatique $\vec{E} = -\nabla V$ (V est le potentiel électrique) cette force est conservative :

$$dW_E = q \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \nabla V \cdot d\vec{l} = -d(qV) \quad (2.23)$$

elle dérive donc de l'**énergie potentielle électrostatique** $E_{pot} = qV$.

À l'inverse, le travail de la force de Lorentz magnétique est nul. En effet, lors d'un déplacement $d\vec{l} = \vec{v} dt$, le travail magnétique s'écrit

$$dW_{mag} = q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0 \quad (2.24)$$

par propriété du produit vectoriel car $\vec{v} \perp (\vec{v} \wedge \vec{B})$.

Tutoriel

Actions d'un champ électrique/magnétique

- Un champ électrique peut accélérer ou ralentir une particule (donc modifier $\|\vec{v}\|$), mais aussi dévier celle-ci (donc modifier la direction de \vec{v}).
- Un champ magnétique peut uniquement dévier une particule, donc courber sa trajectoire.

Un champ magnétique peut accélérer ou ralentir une particule de matière « indirecte », par l'intermédiaire d'un champ électrique. Par exemple, un champ $\vec{B}(x)$ variable est source d'un champ \vec{E} (via l'équation de Maxwell-Faraday), qui peut alors remplir ce rôle d'accélérateur.

2.4.2 Champ électrostatique uniforme

Supposons que régne uniquement un champ électrique \vec{E}_0 stationnaire et uniforme. Le PFD écrit alors dans \mathcal{R} s'écrit alors :

$$m\ddot{\vec{r}} = q\vec{E}_0 \quad \text{soit} \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{q}{m}\vec{E}_0. \quad (2.95)$$

Il s'agit d'un mouvement à *vitesse accélérations constante*, complètement analogue à une chute libre. La trajectoire est donc parabolique dans le cas général, et la résolution des équations du mouvement est un calcul très classique.

Comme indiqué précédemment, la force de Lorentz décrit ici du potentiel $E_{pot} = qV$ (où $\vec{E}_0 = -\nabla V$). La conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{const}, \quad (2.96)$$

et on peut facilement écrire la variation d'énergie cinétique à la tension appliquée (c'est-à-dire à la différence de potentiel). Si par exemple le potentiel passe de V_1 à V_2 , on a :

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - v_1^2 = -q(V_2 - V_1). \quad (2.97)$$

2.4.3 Champ magnétostatique uniforme

On considère désormais le mouvement dans un champ magnétostatique \vec{B} stationnaire et uniforme; on choisit alors le repère $(Oxyz)$ afin que $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$, et que les conditions initiales s'écrivent⁵ $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ et $v_{0x} = 0$. On note $v_{0y} = v_0$ et $v_{0z} = v_1$.

La force de Lorentz magnétique ne travaille pas, on démontre par application du TEC que $v^2 = \text{const} = v_1^2 + v_0^2$. En outre, le PFD s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge B_0 \vec{u}_z. \quad (2.98)$$

Sur $(Oxyz)$, on a :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{qB_0}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

On définit alors la **pulsion cyclotron**⁶ par :

$$u_c = \frac{|q|B_0}{m} \quad (2.100)$$

5. Ces sont des C.I. générales; on peut toujours déplacer l'origine du repère pour prendre $V_0 = 0$ (car \vec{B} est uniforme), et on définit \vec{u}_z comme la direction de la vitesse initiale dans le plan orthogonal à \vec{B} .

6. On la définit parfois de manière algébrique $u_c = qB_0/m$, mais nous ne faisons pas ce choix ici afin que la pulsion reste une *quantité physique positive*.

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

et les équations du mouvement deviennent donc :

$$\begin{cases} \ddot{v}_x = \pm \omega_0 v_y \\ \ddot{v}_y = -\omega_0 v_x \\ \ddot{v}_z = 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

où les signes supérieurs correspondent à une charge positive ($q > 0$), et inférieurs à une charge négative.

Le mouvement vertical (dans la direction perpendiculaire au champ) est très simple : la vitesse v_z est constante, égale à v_0 , d'où

$$v_z(t) = v_0 t. \quad (2.102)$$

En combinant ce résultat à la conservation de l'énergie cinétique, on voit qu'on a aussi conservation de $v_x^2 + v_y^2 = v_0^2$.

Par ailleurs, dans le plan (Oxy) , les équations sont analogues (l'équation sur v_x dépend de v_y , et vice-versa). Afin de résoudre un tel système, on pose la variable complexe $w = v_x + i v_y$, et on ajoute les équations sur v_x et v_y , après multiplication de cette dernière par i :

$$\dot{w} = \mp \omega_0 w \quad \text{de solution} \quad w(t) = w_0 e^{\mp \omega_0 t}, \quad (2.103)$$

avec $w_0 = v_{x,0} + i v_{y,0} = v_0$.

On aboutit à une équation d'ordre 1, beaucoup plus facile à résoudre. On obtient alors v_x et v_y par :

$$v_x(t) = \Re(w) \quad , \quad v_y(t) = \Im(w), \quad (2.104)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos(\omega_0 t) \\ v_y(t) = \mp v_0 \sin(\omega_0 t) \end{cases} \quad (2.105)$$

Une intégration supplémentaire fournit la position :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ y(t) = \pm \frac{v_0}{\omega_0} [\cos(\omega_0 t) - 1] \end{cases} \quad (2.106)$$

Cette méthode fonctionne car les équations initiales sont *linéaires* (d'où la validité du principe de superposition) et il suffit de résoudre deux équations (de sorte qu'on peut identifier partie réelle et partie imaginaire à la fin).

Trajectoire Faisant donc la solution (2.106), on remarque la propriété suivante :

$$x(\varphi)^2 + \left(y(\varphi) \pm \frac{v_0}{\omega_r}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_r}\right)^2. \quad (2.107)$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle de rayon (*dit rayon de Larmor*) :

$$R = \frac{v_0}{\omega_r} = \frac{mv_0}{|q|B_0}. \quad (2.108)$$

et de centre de coordonnées $(0, \mp v_0/\omega_r)$. Rappelons ici que le signe supérieur (resp. inférieur) correspond à une charge q positive (resp. négative). Le sens de parcours de ce cercle dépend aussi du signe de q , comme on peut le voir explicitement dans la solution (2.106). Il faut néanmoins être capable de le retrouver graphiquement, comme dans la figure 2.16 ci-dessous :

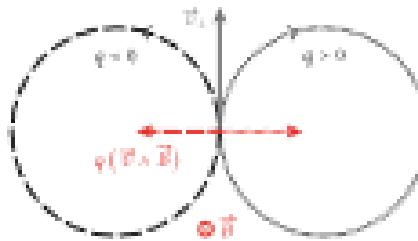


FIGURE 2.16 – Trajectoire circulaire dans le plan orthogonal au champ magnétostatique. Le sens de parcours résulte en résultant la force de Lorentz, qui doit être dirigée vers le centre du cercle.

En combinant ce résultat au mouvement vertical (équation (2.102)), on voit que la trajectoire est celle d'une *bille* de rayon R et de pas⁷

$$p = q\frac{2\pi}{\omega_r} = 2\pi\frac{mv_0}{|q|B_0}. \quad (2.109)$$

Quelques applications

Spectromètre de masse Un spectromètre de masse a pour objectif de séparer des particules selon leur valeur du rapport q/m et peut, par exemple, fonctionner de la manière suivante : après une accélération par une différence de potentiel U , des particules de même charge mais de masses différentes, pénètrent dans une où règne un champ uniforme \vec{B} avec des vitesses différentes ; elles décrivent alors des trajectoires circulaires de rayons différents, ce qui permet de les séparer.

7. Il s'agit de la distance verticale parcourue pendant une rotation dans le plan (Oxy), donc pendant une durée $T = 2\pi/\omega_r$.

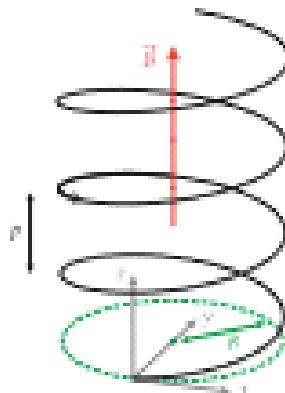


FIGURE 2.57 – Trajectoire hélicoïdale (particule de charge négative).

Expérience de Thomson Cette expérience historique de 1897 a pour objectif la mesure de e/m_e à partir de faisceaux d'électrons de vitesse \vec{v}_0 . Elle a lieu en deux étapes :

- les électrons sont déviés par un champ \vec{E} perpendiculaire à \vec{v}_0 , et on mesure l'angle de déviation δ ;
- cette déviation est ensuite annulée en ajoutant un champ magnétique \vec{B} perpendiculaire à \vec{E} tel que $eE = mv_0B$: la force de Lorentz est alors nulle, et les électrons ont une trajectoire rectiligne. La connaissance de E et B permet de déterminer v_0 , puis de renoncer à e/m_e via l'angle de déviation δ .

Cyclotron Un **cyclotron** (représenté figure 2.18) est constitué de deux électrodes métalliques croisées en forme de \wedge (dès « Dels », ou \wedge s en anglais), placées entre les pôles d'un électro-magnét produisant un champ magnétique uniforme \vec{B} . Une différence de potentiel alternative est appliquée aux électrodes afin que signe entre elles un champ électrique $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi)$. Une source de particules est placée au centre du dispositif. Les particules produites sont accélérées par le champ \vec{E} , puis pénètrent dans un des \wedge et parcourront alors un demi-cercle. En arrivant à nouveau dans l'espace inter-dos, ces particules peuvent être encore accélérées, puis parcourront un autre demi-cercle dans l'autre dos (de rayon plus important car $R \propto \sqrt{\beta}$ constant), etc. Les particules mettent toujours le même temps à parcourir un demi cercle, car la pulsation cyclotron $\omega_c = |q|\vec{B}/m$ est indépendante de la vitesse.

Le champ électrique doit être orienté dans le bon sens à chaque passage des particules dans l'intervalle central, donc passer d'un maximum à un minimum toutes les demi-périodes, ce qui impose $\omega = \omega_c$.

Le physicien américain E. Lawrence a reçu le prix Nobel de Physique 1939 pour « l'invention et le développement du cyclotron », ce dispositif ayant été créé avec son étudiant M. Livingston en 1930. Dans ce dispositif original, les dos sont des demi-cercles de 24 cm de diamètre, et le champ magnétique appliqué est au maximum $B = 1,6$ T. On cherche à accélérer des protons (charge $q = +e$, masse

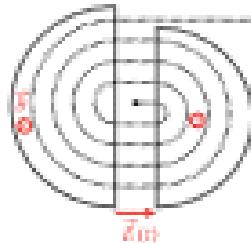


FIGURE 2.18 - Principe d'un cyclotron (vue de dessus). Schéma effectué pour un proton ($q > 0$).

$$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Ces valeurs donnent une fréquence cyclotron

$$\omega_c = \frac{eB}{2\pi m_p} = 21 \text{ MHz}. \quad (2.110)$$

La vitesse maximale des protons correspond à la vitesse pour un rayon $r = R_{\max}$, soit :

$$v_{\max} = R_{\max} \cdot \omega_c = 1,6 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (2.111)$$

On peut exprimer l'énergie cinétique finale en électrons-volts :

$$\frac{1}{2} m_p v_{\max}^2 = 1,3 \text{ MeV}. \quad (2.112)$$

L'immense avantage des cyclotrons est qu'ils permettent de beaucoup accélérer une particule avec une faible tension, grâce à son action répétée à chaque tour. Si on voulait atteindre la même vitesse avec un accélérateur électrostatique, il faudrait une tension U telle que $E_{\max} = eU$, donc $U = 1,3 \times 10^9 \text{ V}$!

Le principal problème des cyclotrons est de réussir à maintenir un champ magnétique uniforme sur toute la surface du dispositif, ce qui limite énormément les tailles envisageables. Les valeurs de l'exemple précédent n'autorisent une taille limite du dispositif : il permet d'atteindre des vitesses relativistes, pour lesquelles le calcul précédent tombe en défaut !

Deuxième partie

Exercices

GW

Mouvement de stick-slip

Afin de vous entraîner sur ce sujet, vous pouvez travailler sur la partie I du sujet X PC 2007. Des corrigés sont trouvables facilement sur Internet, n'hésitez pas à me contacter si vous ne parvenez pas à les trouver.

Point d'application de la réaction du support et basculement

Énoncé

Considérons un pavé de côté a et hauteur b , de masse m , posé sur un plan et tari dans la direction \vec{U}_x par une force $\vec{F} = F\vec{U}_x$ appliquée en M comme représenté figure 2.19. Le frottement entre le pavé et le plan est caractérisé par un unique coefficient f .

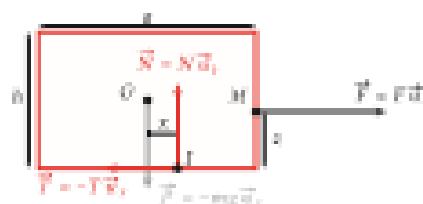


FIGURE 2.19 – Le pavé est soumis à une force $\vec{F} = F\vec{U}_x$ de traction appliquée en M . La poix s'applique en G . On considère que la réaction du support $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ s'applique au point I , dont la position est placée au hasard pour le moment.

1. À quelles conditions le pavé reste-t-il immobile? En déduire une égalité impliquant N et une inégalité impliquant F .
2. Utiliser la condition statique pour tirer une relation entre x et z .
3. Que se passe-t-il si $|x| > z/2$? Discuter.

Correction

1. Le pavé reste immobile s'il se trouve à l'équilibre statique. Cela implique que la somme des forces s'appliquant sur lui est nulle :

$$\vec{T} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0}, \quad (2.113)$$

On en déduit, par projection sur \vec{U}_x et \vec{U}_y ,

$$N = mg \quad \text{et} \quad F = T. \quad (2.114)$$

Pour qu'il n'y ait pas glissement, la loi d'Amontons-Coulomb impose $|T| \leq f|N|$, soit

$$F \leq fmg. \quad (2.115)$$

On doit également avoir entre l'équilibre des moments des forces : en prenant les moments au point I , on a $\mathcal{M}_I(\vec{F}) = \mathcal{M}_I(\vec{F}') = \vec{0}$, et on doit donc avoir :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_I(\vec{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_I(\vec{F}') = \vec{0}. \quad (2.116)$$

2. On déduit de l'équation précédente la relation

$$-(mgx - Fx) \vec{n}_y = \vec{0}, \quad \text{soit} \quad x = \frac{F}{mg}x. \quad (2.117)$$

Plusieurs remarques s'imposent sur cette expression de x :

- Si on ne tire pas sur le poul ($F = 0$), le point I est la projection de G sur la surface de contact.
- Si on tire sur la droite du poul, le point d'application de la force est à droite de G . Si on pousse ($F < 0$), le point d'application est à gauche de G .
- Plus le poul est lourd, moins le point d'application s'écarte de la verticale de G .

3. Si $|x| > x/2$, le point d'application I sort de la surface de contact entre les deux solides ce qui est impossible. L'équilibre des moments est nécessairement rompu et le solide bascule. La condition de basculement écrit :

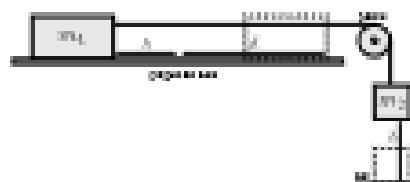
$$\frac{|F|}{mg}x > \frac{x}{2} \quad \text{soit} \quad x > \frac{mgx}{2|F|}. \quad (2.118)$$

Le basculement a lieu vers la droite si $x > x/2$ — soit $F > 0$ — et vers la gauche si $x < -x/2$ — soit $F < 0$. Cette condition est d'autant plus difficile à remplir que le poul est lourd (x grand) et lourd (m élevé).

Mesure d'un coefficient de friction dynamique

Énoncé

On étudie le dispositif présenté dans [mesure-fd] (et [TLM] page 372), résumé dans la partie II. Lors de la première phase du mouvement, les deux masses avancent à la même vitesse ; lors de la deuxième phase, la masse 2 est poussée par terre et la masse 1 avance seule sur la table.



Expérience de mesure du coefficient de frottement dynamique f_d .

1. Notons v_d la vitesse de chaque masse à la fin de la première phase. Obtenir une équation reliant v_d , b , m_1 , m_2 et f_d .

2. En n'oubliant sur la deuxième phase, obtenir une seconde équation reliant v_2 , m_2 , b et d la distance parcourue par la masse 1 lors de cette phase.
3. Vérifier que l'on a alors

$$f_d = \frac{m_2 b}{m_1 b + (m_1 + m_2)d}. \quad (2.119)$$

Correction

1. On applique le théorème de l'énergie mécanique au système (masse 1 + masse 2 + fil) entre l'instant initial $t = 0$ et le moment Δt où la masse 2 touche le sol. On a

$$\frac{1}{2}m_1 v_2^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - m_2 g b = W_{\text{int.,m}} = -m_2 g b f_d + T_1 v_1 \Delta t - T_2 v_2 \Delta t, \quad (2.120)$$

en notant v_i la vitesse de la masse i et T_i la tension du fil pour la masse i . On a \vec{T}_1 dans le sens de \vec{v}_1 et \vec{T}_2 oppose à \vec{v}_2 , donc les trajectoires sont bien opposées; le fil étant inextensible, on a $T_1 = T_2 = T$ et $v_1 = v_2$. Ainsi

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 - m_2 g b = -m_2 g b f_d. \quad (2.121)$$

2. La masse 1 avance avec glissement. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'état initial et l'état final :

$$-\frac{1}{2}m_1 v_2^2 = -f_d m_1 g b d. \quad (2.122)$$

3. Pour finir, on obtient l'équation recherchée en éliminant v_2 des deux équations précédentes.

Expérience de Millikan

Énoncé

On dispense un brouillard de fines gouttelettes sphériques d'eau, de masse volumique $\rho_0 = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, dans l'espace séparant les deux plaques horizontales d'un condensateur plan, distantes de $d = 2,0 \times 10^{-2} \text{ m}$. Les gouttelettes sont chargées négativement et sans vitesse initiale.

Toutes les gouttelettes ont radius moyen R mais pas forcément la même charge $-q$. En l'absence de champ électrique E , une gouttelette est soumise à son poids ($g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$), à la poussée d'Archimède de l'air ambiant de masse volumique $\rho_a = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -k \vec{v}$ avec $k = adF$ et $F = 3,6 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

1. Déterminer la vitesse limite \vec{v}_0 .
2. Déterminer l'expression de la vitesse des gouttes. On fixe apparemment un temps caractéristique τ .
3. On mesure $v_0 = 2,0 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, déterminer la valeur de k .
4. On applique une différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ de manière à avoir un champ électrique \vec{E} dirigé vers le bas. Déterminer E en fonction de U . On observe plusieurs gouttelettes : certaines sont immobilisées pour $U = 3200 \text{ V}$, d'autres pour $U = 6400 \text{ V}$ ou encore $U = 9600 \text{ V}$. Que peut-on en conclure ?

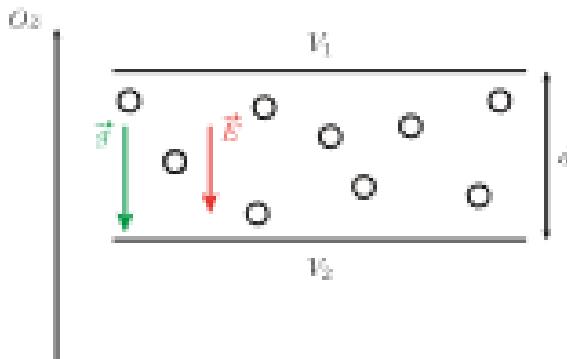


Schéma de l'expérience

Corrigé

- On fait le bilan des forces s'exerçant sur la goutte dans le référentiel galiléen : le poids, la poussée d'Archimède (opposée du poids du volume d'air déplacé) et le frottement. Le PFD appliqué à une goutte donne :

$$m\ddot{\vec{x}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_2 \vec{g} - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_A \vec{g} - k\vec{x}.$$

La vitesse limite ou échappement lorsque l'accélération devient nulle :

$$\vec{v}_0 = \frac{4\pi R^3}{3k} (\rho_2 - \rho_A) \vec{g}.$$

- On peut résoudre le PFD en utilisant \vec{v}_0 :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = k(\vec{v}_0 - \vec{v}) \quad \text{soit} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m} \vec{v} = \frac{\vec{v}_0}{m}, \quad \text{avec} \quad r = \frac{m}{k}.$$

La solution de cette équation est :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 (1 - \exp(-t/r)).$$

- On trouve $R = 1,15 \times 10^{-4} \text{ m}$.

- On a $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ soit, en posant $V = V(x)$ et $\vec{E} = -E \vec{u}_x$, $dV/dx = E$. Il vient donc $V(x) = Ex + \text{const.}$ On a $V(r_1) = V_1$ et $V(r_2) = V_2$, soit :

$$U = V_1 - V_2 = E(r_1 - r_2) = Ed.$$

À l'équilibre, la force de frottement est nulle et la force électrostatique $-q\vec{E}$ équilibre le poids et la poussée d'Archimède :

$$\vec{0} = -q\vec{E} + \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_b - \rho_a)\vec{g}.$$

On en déduit :

$$q = \frac{4\pi R^3}{3g}(\rho_b - \rho_a)g.$$

Les trois tensions données dans Bénard donnent respectivement à $q = 3e$, $q = 2e$ et $q = e$. Plus généralement, en réalisant cette expérience, on mesure $q = n \times e$ avec n un entier positif. Cela constitue une preuve expérimentale de la quantification de la charge.

Note : le procédé de mesure par simulation de la vitesse de la goutte est peu précis à cause du mouvement brownien qui donne à faible vitesse. Lors de son expérience historique, Millikan a plutôt mesuré la vitesse limite des gouttes tombant à travers le champ électrostatisque : celle-ci vaut :

$$\overline{v}_{lim}(R) = \frac{1}{k} \left[\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_b - \rho_a)\vec{g} - q\vec{E} \right],$$

et sa mesure permet directement de renseigner à q .

Bibliographie

- [FFR] J. PELLETIER, J. PROUSTIER et H. ROUSSILLE. *Physique pour l'agregation*. De Boeck, 2023 (cf. p. 1, 5).
- [1] B. SALAMITO et al. *Physique tout-en-un PCSI*. Dunod, 2013 (cf. p. 5).
- [2] M.-N. SANZ et al. *Physique tout-en-un PC*. Dunod, 2014 (cf. p. 5).
- [3] M.-N. SANZ et B. SALAMITO. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2004 (cf. p. 5).
- [4] J.-M. BULINIC et al. *Mécanique 1^{ère} année*. Hachette, 2003 (cf. p. 5).
- [5] J.-P. PINEZ. *Mécanique fondamentale et applications*. 7^{ème} édition. Dunod, 2022 (cf. p. 5, 25).
- [TLM] L. BOUCQUET, J.-P. FAROUX et J. REMAURY. *Tous les mécaniques. Cases et exercices corrigés*. Dunod, 2002 (cf. p. 5, 38, 43, 70).
- [Dico] R. TAILLER, L. VILLAIN et P. FAUVRE. *Dictionnaire de physique*. 4^{ème} édition. De Boeck, 2013 (cf. p. 5).
- [6] V. DUFARUS et H. LECOMTE. « La naissance de la gravimétrie : les découvertes de Huyghens et les développements théoriques de Newton ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 105.931 (fév. 2011), p. 243-255 (cf. p. 15).
- [7] V. DUFARUS et H. LECOMTE. « La naissance de la gravimétrie : mise en évidence de la variation de la pesanteur avec la latitude ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 105.932 (mars 2011), p. 359-373 (cf. p. 15).
- [8] V. DUFARUS et H. LECOMTE. « La naissance de la gravimétrie : test de l'attraction newtonienne par des mesures de l'intensité et de la direction de la pesanteur effectuées au Pérou par Bouguer ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 105.934 (mai 2011), p. 581-590 (cf. p. 15).
- [9] M. BAROUDOU. « La tribologie. La science pour comprendre et maîtriser le mouvement et l'usure ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 88.764 (mai 1994), p. 793-822 (cf. p. 32).
- [10] R. GROSS et C. D. KIRKMAN. « The Terminal Velocity of Fall for Water Droplets in Stagnant Air ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 6.4 (1^{ère} sem. 1949), p. 243-248 (cf. p. 36).
- [11] W. W. HACKBORN. « On Motion in a Resisting Medium : A Historical Perspective ». In : *American Journal of Physics* 84.2 (1^{ère} sem. 2016), p. 127-134 (cf. p. 36).
- [12] B. SALAMITO et al. *Physique tout-en-un MP*. Dunod, 2014 (cf. p. 39).
- [13] F. P. BOYDIES et D. TANCO. *The Friction and Lubrication of Solids*. Oxford Classical Texts, 1954 (cf. p. 42).

- [14] H. Grot et J.-P. Guilletet, « Le portrait de phase des oscillateurs », in : *Bulletin de l'Institut des physiciens* 86,744 (1992), p. 719-755 (cf. p. 47).

Poly_Updated

07 October 2024 19:03



mecanique
pour l agr...

MÉCANIQUE POUR L'AGRÉGATION

Hugo Rousille
hugo.rousille@ens-lyon.fr

Ce document est le support des cours de mécanique que je donne à la préparation à l'agrégation de l'ENS de Lyon en 2024. Il est grandement inspiré du livre de cours *Physique pour l'agrégation* [FFR], paru au début de l'année, co-rédigé par Jules Filion, Julien Froustey et moi-même.

Tout commentaire sur le document, n'hésitez donc surtout pas à m'envoyer un mail si vous avez repéré une coquille, pensez qu'une partie n'est pas assez claire ou souhaiteriez que certains points soient éclaircis.

Version du 4 octobre 2024.

Préambule

Contexte

La mécanique est un domaine de la physique très transverse : elle introduit des notions qui sont utilisées dans de nombreux autres contextes, comme l'énergie, le travail, la quantité de mouvement... Elle est aussi enseignée à des niveaux très différents, et contient donc des concepts de difficulté variable. Le but de ce cours est de passer en revue les points importants du programme de mécanique pour l'agrégation, en commençant par des rappels de CPGE, et en allant jusqu'aux notions de mécanique analytique et mécanique relativiste qui relèvent du programme de L3/M1.

Il n'est pas question ici de proposer des plans de leçons réalisables, mais plutôt de vous fournir un panorama des différentes notions importantes en mécanique afin de vous aider à structurer votre connaissance du domaine pour que vous puissiez construire vos propres leçons. Un travail personnel d'approfondissement sera nécessaire, et je vous proposerai à cet effet tout au long du cours des références pertinentes pour vous aider à le réaliser.

Programme

A l'écrit

Le programme de l'écrit de l'agrégation est celui des classes de deuxième année de prépa scientifique, auxquelles sont ajoutées plusieurs notions complémentaires. En mécanique, ces notions complémentaires sont les suivantes :

- Systèmes dynamiques :
 - Système de deux points matériels et problème à deux corps;
 - Chaque;
 - Opérateurs lagrangien et hamiltonien. Principes variationnels;
- Mécanique du solide :
 - Théorèmes fondamentaux de mécanique du solide;
 - Solide en translation et du solide en rotation autour d'un axe fixe;

- Approximation gyroscopique;
- Notions élémentaires d'élasticité;
- Relativité restreinte :
 - Notion d'intervalles, transformation spatiale de Lorentz;
 - Éléments de cinématique et de dynamique relatives;
 - Choix, effet Cœlest;
 - Lois de transformation des sources et du champ électromagnétique;
 - Notions sur le formalisme quadridimensionnel.

Bien que ce programme soit très complet en apparence, les notions les plus subtiles (comme les lois de transformation du champ électromagnétique ou la mécanique lagrangienne) ne sont que très rarement évaluées à l'oral et à l'oral. Ainsi, il est important de hiérarchiser les notions à travailler afin d'éviter absolument les lacunes sur la base du programme, à savoir ce qui est fait au CPGE.

A Oral

Depuis 2020, il n'y a plus de liste de titres de leçons de physique à Oral de l'agrégation externe de physique-chimie. La liste de titres de leçons est cependant conservée à l'agrégation spéciale. Voici une liste des titres de leçons concernant la mécanique relativiste à l'agrégation spéciale 2023 :

- LPDact1** Gravitation;
- LPDact2** Lois de conservation en dynamique;
- LPDact24** Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique;
- LPDact25** Oscillateurs, portraits de phase et non-linéarités;
- LPDact26** Cinématique relativiste. Expérience de Michelson et Morley.

Chaque année, le rapport du jury donne un certain nombre d'exemples de titres de leçons tombés à Oral. Je vous invite à lire ceux des années passées pour avoir une idée des sujets qui peuvent être demandés. Au début de chaque chapitre de ce cours se trouve une liste des leçons en lien avec le contenu du chapitre tombées aux sessions 2022 et 2023 (le rapport 2024 n'est pas encore disponible).

Annales et entraînement complémentaire

Pour aller plus loin, il est utile de s'entraîner sur des épreuves d'annales de l'agrégation. Voici une liste non exhaustive d'anciennes épreuves de l'agrégation contenant des parties de mécanique :

- A2023** Géodésie d'indice : du phénomène de mélange aux applications modernes;
- A2021** La forme de la Terre;
- C2020** Mesures multidisciplinaires biologiques et matière active;
- A2019** (...Stabilités;
- A2018** Interactions dans le Système Solaire;

-
- C2017 Quelques aspects de la physique du GPS;
 AIPC2017 Exactitude et stabilité de la mesure du temps;
 C2016 Méthodes variationnelles et symétriques;
 AIPC2016 Autour de l'exploration du système solaire;
 AIPC2012 Quelques phénomènes liés à l'activité interne de la Terre;
 AIPC2013 À la recherche des ondes gravitationnelles;
 A2011 Effet de serre;
 A2010 Stabilité des systèmes dynamiques : thermosvection et bifurcation en mécanique;
 C2010 Différents aspects de la structure et de la dynamique de l'atome d'hydrogène;
 C2009 Couplage fort de deux oscillateurs;
 C2008 Néromagnétisme et sonde à effet Hall;
 C2003 Les planètes extrasolaires.

Bibliographie principale

Je vous propose ici une liste des références classiques utiles en mécanique à l'agrégation. Une bibliographie complète est disponible page [187](#).

- [1] Un manuel polyvalent, traitant en détail tous les points du programme de première année de CPGE. Il est utile d'utiliser aussi la version deuxième année [2]. Dans certains cas, la version ancien programme de 2004 [3] peut aussi être utile.
- [4] Un ancien manuel de CPGE, très complet mais synthétique et peu pédagogique. Il est donc particulièrement utile si vous savez déjà ce que vous recherchez.
- [5] Un livre assez long contenant de très nombreux calculs sur beaucoup de points de détails peu traités ailleurs. Il souffre cependant d'un manque de clarté et d'un certain nombre d'erreurs.
- [11.M] Un ancien manuel de prépa bien pensé, utile pour trouver certains calculs ou des exemples d'exercices.
- [DRA] Un dictionnaire proposant des définitions pour tous les termes apparaissant à l'agrégation, très utile pour trouver les bonnes formulations des définitions.
- [FFR] Un manuel conçu pour la préparation de l'agrégation, que je ne peux pas présenter de façon objective.

Table des matières

I Mécanique classique	11
1 Théorèmes fondamentaux de la mécanique	13
1.1 Dynamique d'un point matériel	13
1.1.1 Référentiel, cinématique et dynamique	13
1.1.2 Lois de Newton	16
1.1.3 Énergie en mécanique	18
1.1.4 Moment cinétique	20
1.2 Application : le pendule simple	22
1.2.1 Description du problème	22
1.2.2 Résolution à l'aide des lois de Newton	23
1.2.3 Résolution à l'aide des méthodes énergétiques	23
1.2.4 Résolution par le théorème du moment cinétique	24
1.2.5 Comparaison des approches	24
1.3 Équilibre, stabilité et dynamique visqueuse	25
1.3.1 Équilibre mécanique et énergie potentielle	25
1.3.2 Comportement proche d'une position d'équilibre	25
1.3.3 Flots lits et de diffusion	27
1.4 Quelques prégs habituels et comment les éviter	27
1.4.1 Pendus et fils	27
1.4.2 Chute de l'approche	30
2 Applications : frottements, oscillateurs, particules chargées	33
2.1 Frottements fluides et solides	34
2.1.1 Frottements fluides	35
2.1.2 Frottements solides	38
2.2 Oscillateur harmonique	46
2.2.1 Propriétés fondamentales	47
2.2.2 Oscillateur harmonique amorti par frottements solides	51
2.3 Oscillations non-linéaires : exemple du pendule simple	54

2.3.1	Lindstedt	55
2.3.2	Solutions d'ordre supérieur	56
2.3.3	Méthode de Poincaré-Lindstedt	57
2.3.4	Méthode d'oscillation non perturbative	59
2.3.5	Étude qualitative du mouvement complet	60
2.3.6	Pour aller plus loin	62
2.4	Mouvement de particules chargées	62
2.4.1	Forces de Lorentz	62
2.4.2	Champ électrostatique uniforme	64
2.4.3	Champ magnétostatique uniforme	64
3	Mouvements à force centrale	69
3.1	Propriétés générales du mouvement	70
3.1.1	Conservation du moment cinétique	70
3.1.2	Énergie potentielle effective	72
3.1.3	Problème à deux corps	72
3.2	Potentiel newtonien	74
3.2.1	Équation de la trajectoire	75
3.2.2	Interprétation de la trajectoire en loi de Kepler	77
3.2.3	Méthode des vitesses radiales	79
3.2.4	Expérience de Rutherford	82
3.2.5	Liens avec le potentiel harmonique	86
4	Changements de référentiels	89
4.1	Lois de composition des grandeurs cinématiques	90
4.1.1	Mouvement relatif des deux référentiels	90
4.1.2	Formules de composition	91
4.1.3	Cas principaux	93
4.1.4	Consequences pour les lois de la dynamique	94
4.2	Illustrations de la dynamique en référentiel non-galiléen	95
4.2.1	Référentiel quinck	95
4.2.2	Verticale apparente	96
4.2.3	Déviation en chute libre par la force de Coriolis	99
4.2.4	Pendule de Foucault	101
4.2.5	Écoulements géostrophiques	103
4.2.6	Effet de marée	106
4.3	Galilée ou non?	107
4.3.1	Référentiel géocentrique	107
4.3.2	Référentiel de Copernic	109
4.3.3	Référentiel tournant	111

5 Éléments de mécanique du solide	113
5.1 Description cinétique d'un solide	114
5.1.1 Mouvement d'un ensemble de points	114
5.1.2 Pendule pesant	117
5.2 Description globale du mouvement d'un solide	118
5.2.1 Description cinétique du mouvement d'un solide	118
5.2.2 Éléments d'inertie du solide	121
5.2.3 Mouvement dans le référentiel du solide	123
5.2.4 Équations du mouvement, tensions	124
5.3 Rotation d'un solide autour d'un point fixe	128
5.3.1 Équation du mouvement d'un gyroscope	129
5.3.2 Généralités sur le mouvement de précession	131
5.3.3 Précession du gyroscope	133
5.3.4 Couple gyroscopique	134
5.4 Introduction à la mécanique du solide déformable	135
5.4.1 Déformations homogènes d'un solide	136
5.4.2 Tenseur des déformations	138
5.4.3 Tenseur des contraintes	140
II Mécanique relativiste	145
6 De la mécanique classique à la mécanique relativiste	147
6.1 Transformation de Galilée et électromagnétisme	147
6.1.1 Transformation de Galilée	147
6.2 Expérience de Michelson et Morley	149
6.2.1 Non-invariance des équations de Maxwell	149
6.2.2 Description de l'expérience	151
6.3 Postulats d'Einstein	155
7 Cinématique relativiste	157
7.1 Transformation de Lorentz	158
7.1.1 Relativité du temps	158
7.1.2 Transformation spéciale de Lorentz	159
7.1.3 Interprétation graphique	166
7.1.4 Invariance de l'intervalle	167
7.2 Conséquences pratiques	168
7.2.1 Conséquences sur les durées	168
7.2.2 Conséquences sur les longueurs	172
7.2.3 Effet Doppler-Ramsey	175

III Exercices	179
Bibliographie	187

Première partie

Mécanique classique

II

Chapitre 1

Théorèmes fondamentaux de la mécanique

La mécanique est un domaine de la physique plus intuitif que d'autres, mais sa formalisation nécessite le maniement d'un certain nombre de grandeurs et de théorèmes, chacun ayant ses particularités. Ainsi, il est crucial de bien maîtriser les différentes définitions pour ne pas dénaturer les processus lors d'un écrit ou d'un oral.

Dans ce chapitre, nous allons poser les bases de la mécanique telle qu'elle est étudiée en CPGE, à travers l'étude des *points matériels*. Nous nous intéresserons ensuite à des cas spécifiques pour illustrer les différentes méthodes de résolution utilisées en mécanique. Pour finir, je vous proposerai une liste de pièges habituels en mécanique et quelques conseils sur comment les éviter!

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

1. avoir poser un problème en mécanique, en définissant le référentiel, le repère, et en modélisant les objets en jeu;
2. connaître les différents manières d'étudier le mouvement et savoir choisir la plus appropriée dans une situation donnée;
3. comprendre que tout système évoluant autour de l'une de ses positions d'équilibre est équivalent à un oscillateur harmonique.

1.1 Dynamique d'un point matériel

1.1.1 Référentiels, cinématique et dynamique

La mécanique s'intéresse à la description du mouvement d'objets les uns par rapport aux autres lorsque ceux-ci interagissent au moyen de forces. Afin de simplifier l'étude, on commence par modéliser chaque

objet en jeu par un objet portant de même nom, appelé **point matériel**. Le repérage d'un point matériel ne nécessite que 3 coordonnées d'espace.

Cette modélisation ne permet pas de rendre compte de l'orientation du objet, ce qui signifie qu'une partie de l'information concernant le mouvement de celui-ci est perdue. Une description plus complète du mouvement d'un solide sera étudiée au chapitre 5.

Afin de pouvoir décrire l'évolution dans l'espace du point matériel considéré au cours du temps, il est nécessaire de se donner une référence. On suppose que tout observateur du mouvement dispose d'un ensemble rigide de points qui lui apparaissent fixes ; il s'agit du **système de référence** lié à cet observateur. En choisissant l'un de ces points fixes comme **origine** et en choisissant une **base de projection** constituée de 3 axes, on dispose d'un **repère tridimensionnel**¹. Les coordonnées du point matériel, définies comme les projections du vecteur position sur chacun des axes de la base, permettent alors de repérer la position du point au cours du temps.

Il ne faut pas confondre référentiel et repère ! En effet, pour un même référentiel, le choix du repère est totalement libre tant que l'origine est fixe. Le choix du repère fixe alors le choix du système de coordonnées.

Par exemple, lors de l'étude de la chute d'une balle, on choisit d'abord le référentiel (généralement, celui du laboratoire), puis on décide d'un repère en prenant une origine et trois axes (en général, l'origine est la position initiale de la balle et l'un des axes est la verticale locale).

Plusieurs référentiels sont utilisés de façon usuelle en mécanique. Ces référentiels ainsi que seront définis au chapitre 4. Les trois systèmes de coordonnées utilisés sont les systèmes cartésien, cylindrique et sphérique, illustrés sur la figure 1.1 ci-après.

En coordonnées cartésiennes, un point matériel est repéré par son abscisse x , son ordonnée y et sa cote z . La base de l'espace est donnée par les trois vecteurs \vec{u}_x , \vec{u}_y et \vec{u}_z : ceux-ci ne dépendent pas de la position du point dans l'espace. En coordonnées cylindriques, on repère un point par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le plan Oxy et par sa cote z ; la base est alors donnée par les vecteurs \vec{u}_r , \vec{u}_θ et \vec{u}_z et celle-ci est *locale*. On a les projections suivantes :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, \\ y = r \sin \theta, \\ z = z. \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y, \\ \vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y, \\ \vec{u}_z = \vec{u}_z. \end{cases} \quad (1.1)$$

En coordonnées sphériques, on repère un point par sa distance r au centre du repère, son angle δ avec la verticale (il s'agit de la colatitude, soit $\pi/2 - \lambda$ où λ est la latitude) et sa longitude φ . La base est également

1. En mécanique newtonienne, le temps est supposé constant, c'est à dire qu'il est le même pour tous les référentiels. Ainsi, on n'inclut pas le choix du temps dans le choix du référentiel. Ce postulat sera remis en cause en mécanique relativiste dans la partie II.

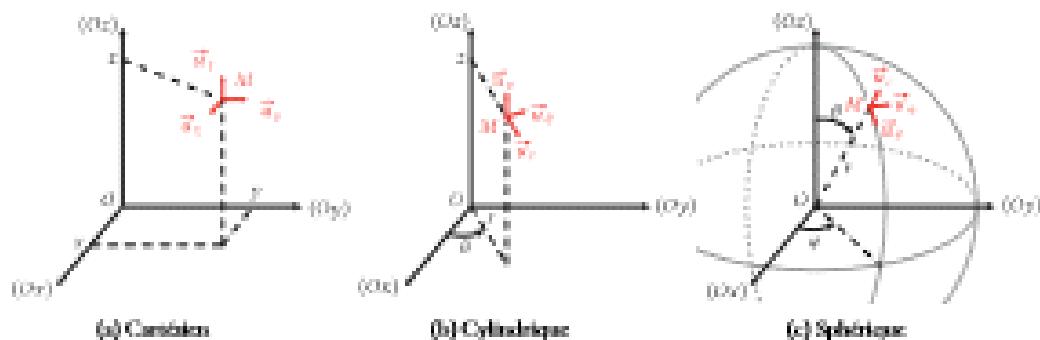


FIGURE 1.1 – Structures de coordination des quarks

locale et est donnée par les trois vecteurs \vec{w}_1 , \vec{w}_2 et \vec{w}_3 . On a

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta, \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \vec{r}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z, \\ \vec{r}_{\theta} = -\cos \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z, \\ \vec{r}_{\varphi} = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y. \end{cases} \quad (1.2)$$

Les quantités r , θ , $\overline{\varphi}_x$ et $\overline{\varphi}_y$ ne repoussent pas du tout la nature chose selon que l'on soit en coordonnées cylindriques ou sphériques.

Dans la suite, l'origine du repère sera appelée O , et le point matériel étudié sera appelé M . Le référentiel d'étude sera nommé R . On notera \vec{r} le vecteur OM , aussi appelé **vecteur position**. Le **vecteur vitesse** du point M sera défini comme la dérivée temporelle du vecteur position; puisque celle-ci dépend du référentiel (un point fixe dans un référentiel ne l'est pas forcément dans un autre), on ajoutera à sa définition le nom du référentiel :

$$\overline{F}_R(M) = \left(\frac{d\overline{f}(M)}{dx} \right)_x . \quad (1.3)$$

On définit alors une **réaction** :

$$\overline{J}_B(M) = \left(\frac{d^2 \overline{OM}}{dr^2} \right)_{r=0} \quad (14)$$

La cinématique consiste en la description du mouvement à partir de grandeurs évoluant dans le temps, sans s'intéresser aux causes de celui-ci. Par exemple, pour un point matériel repéré dans le référentiel R par des coordonnées x_i , y_i , z_i , etc.

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{Ox} + y\overrightarrow{Oy} + z\overrightarrow{Oz}$$

$$\begin{aligned}\vec{U} &= \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z, \\ \vec{Z} &= \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z,\end{aligned}\quad (1.5)$$

avec x, y et z des fonctions du temps (on note \dot{f} la dérivée de f par rapport au temps). En coordonnées cylindriques, on aura, en utilisant $\vec{u}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\theta = -\dot{r}\vec{u}_r$ (voir équation (1.1)) :

$$\begin{aligned}\vec{U} &= r\vec{u}_r + z\vec{u}_z, \\ \vec{V} &= r\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z, \\ \vec{Z} &= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2r\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z.\end{aligned}\quad (1.6)$$

Le but de la mécanique est de lier ces grandeurs issues d'une description cinématique aux causes du mouvement, à travers les lois de la dynamique que nous allons étudier dès maintenant.

1.1.2 Lois de Newton

Les trois lois de Newton sont les postulats à la base de la mécanique dite « newtonienne ». Elles ont été énoncées initialement en 1687.

Informations

1^{re} loi de Newton (principe d'inertie)

Un point matériel est dit **isolé** s'il n'est soumis à aucune action réactionnelle, ou **pseudo-isolé** si les actions qui s'exercent sur lui se compensent. Il existe une classe de référentiels, dits **galiléens**, dans lesquels le mouvement du centre d'inertie d'un corps isolé ou pseudo-isolé est rectiligne uniforme.

On peut insérer ce principe pour définir un référentiel galiléen, indiquant qu'un référentiel est galiléen si et seulement si le mouvement d'un corps isolé ou pseudo-isolé dans celui-ci est rectiligne uniforme. Comme souvent en physique, le concept de « référentiel galiléen » est une construction idéale, et l'on pourra en pratique quantifier la qualité galiléenne d'un référentiel en étudiant le mouvement d'un corps isolé ou pseudo-isolé dans celui-ci. Cela sera réalisé au chapitre 4.

Dans la suite, on considère que le référentiel de travail \mathcal{R} est galiléen, et l'on étudie un seul point matériel M .

La deuxième loi de Newton permet de faire le lien recherché entre la description du mouvement et les causes de celui-ci, à savoir les forces. Une **force** notée $\vec{F}_{O \rightarrow M}$ est un vecteur supposé indépendant du référentiel caractérisant l'action mécanique d'un objet O sur le point matériel M . La **résultante des forces** \vec{F} subie par M est la somme de toutes les forces subies par le point M :

$$\vec{F} = \sum_O \vec{F}_{O \rightarrow M}.$$

Informations **2^{ème} loi de Newton (Principe fondamental de la dynamique)**

Considérons un point matériel M qui subit une résultante des forces \vec{F} . Dans le référentiel galiléen R , on a

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \Big|_R = \vec{F}, \quad (1.7)$$

où \vec{p} est la quantité de mouvement du système étudié dans R :

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (1.8)$$

La 2^{ème} loi de Newton relie bien une quantité cinétique, la quantité de mouvement que l'on peut calculer à partir des équations (1.5) et (1.6), aux forces qui sont les causes du mouvement. Ainsi, l'étude d'un problème de mécanique consiste presque systématiquement en la résolution de l'équation (1.7).

Informations **3^{ème} loi de Newton (Principe des actions réciproques)**

Considérons deux points matériels M_1 et M_2 . Ceux-ci interagissent par le biais de deux forces, $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ et $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$. On a quel que soit la movement des deux points l'égalité

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}. \quad (1.9)$$

Finalement donnons l'expression de quelques forces usuellement rencontrées en mécanique à l'aggravation.

force élastique: il s'agit de la force exercée par un ressort tendu sur une masse à son extrémité. Elle s'écrit:

$$\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_x, \quad (1.10)$$

avec l la longueur du ressort tendu, l_0 la longueur à vide du ressort et \vec{u}_x l'axe du ressort.

poids: le poids est la force exercée par la Terre sur un objet à sa surface. Il est noté:

$$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z, \quad (1.11)$$

avec g l'accélération de la pesanteur égale³ à $9,806\,45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et \vec{u}_z le vecteur indiquant la verticale.

électrostatique: la force électrostatique exercée par un champ électrique \vec{E} sur une particule de charge q est notée:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (1.12)$$

frottements fluides: une force de frottement fluide s'oppose au mouvement. Elle est en général notée

$$\vec{F}_{\text{frot}} = -\lambda\vec{v}, \quad (1.13)$$

avec λ un coefficient de proportionnalité.

3. Cette valeur est une constante : en effet, la Terre n'est pas parfaitement circulaire, l'intensité de la pesanteur à sa surface fluctue selon la position de l'observateur. L'étude des fluctuations de la pesanteur à la surface de la Terre se nomme gravimétrie, et est depuis plusieurs siècles une subdivision d'étude de la composition interne de notre planète [6, 7, 8].

1.1.3 Énergie en mécanique

Il est possible de reformuler la mécanique en utilisant une grandeur présente de manière universelle en physique moderne : l'énergie. Cette reformulation sera particulièrement utile pour étudier les problèmes unidimensionnels, comme nous le verrons dans la section 1.3.

Puissance, travail et énergie

Pour commencer, remarquons qu'une force peut être à l'origine d'un mouvement : ainsi, l'objet en question celle-ci fournit de l'énergie au point matériel auquel elle s'applique. Cependant, le cas contraire existe : une force peut s'opposer au mouvement (c'est par exemple généralement le cas des frottements). Le transfert d'énergie doit donc être algébrique selon la direction relative de la force et du mouvement (donc de la vitesse). On définit alors la **puissance** \mathcal{P} d'une force \vec{F} s'appliquant sur un point M de vitesse \vec{v} :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.14)$$

Cette puissance est un scalaire. À partir de celle-ci, on définit le **travail infinitésimal** dW en écrivant :

$$dW = \mathcal{P} dt. \quad (1.15)$$

Le **travail** $W_{t_1 \rightarrow t_2}$ entre les instants t_1 et t_2 est alors donné par intégration :

$$W_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_T dt \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (1.16)$$

La valeur de l'intégrale dépend de la trajectoire suivie ! En effet, en général, la force \vec{F} dépend de la position ou même de la vitesse.

Remarquons enfin que l'équation (1.15) nous permet d'écrire

$$dW = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{OM}}{dt} dt = \vec{F} \cdot d\vec{OM}. \quad (1.17)$$

Supposons alors qu'il existe une fonction E_p telle que $dW = -dE_p$. Une telle fonction doit alors vérifier $dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{OM}$, ce qui implique

$$\vec{F} = -\widehat{\text{grad}} E_p. \quad (1.18)$$

Une force \vec{F} telle que la fonction E_p existe est appelée **force conservative**, et E_p est donc l'**énergie potentielle associée** à la force. En pratique, il est possible d'ajouter une constante à E_p tout en vérifiant toujours l'équation (1.18), ce qui signifie que l'énergie potentielle est définie à une constante près.

Pour une force conservative, le travail ne dépend pas de la trajectoire mais uniquement des instants de départ et d'arrivée. En effet, l'équation (1.16) devient dans ce cas

$$W = - \int_T dE_p = E_p(t_1) - E_p(t_2) = -\Delta E_p. \quad (1.19)$$

On peut calculer l'énergie potentielle pour les forces usuelles présentées dans la section 1.1.3. On cherche pour cela à résoudre l'équation (1.18) en E_p . Les résultats sont résumés dans le tableau 1.1. La force de frottement fluide n'est pas conservative et il n'existe donc pas d'énergie potentielle associée : en effet, \vec{F}_{frot} dépend de \vec{x} et donc de la trajectoire.

Force	Expression	Énergie potentielle
Fluide	$-k(l - l_0)\vec{u}_x$	$\frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + \text{cste}$
Poids	$-mg\vec{u}_z$	$mgh + \text{cste}$
Électromotrique	$q\vec{E}$	$qV + \text{cste}$

Tableau 1.1 – Énergies potentielles pour certaines forces usuelles.

On définit enfin l'**énergie cinétique** E_c pour un point matériel par

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.20)$$

L'**énergie mécanique** E_m est alors définie par

$$E_m = E_c + E_p. \quad (1.21)$$

Théorèmes énergétiques

Les lois de la dynamique newtonienne peuvent être reformulées en deux théorèmes reliant les différentes quantités énergétiques entre elles. Ces différents théorèmes sont très équivalents entre eux mais font intervenir des grandeurs différentes : il faudra choisir le plus adapté à chaque situation selon les quantités connues (voir section 1.4.2 pour un guide).

Intuition	Théorème de la puissance et de l'énergie cinétique
Notons $\mathcal{P}(t)$ la somme des puissances des forces subies à t par un point matériel M . On a alors	$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}(t). \quad (1.22)$
On peut écrire cette égalité en version intégrée :	$\Delta E_c = W'_{t_1 \rightarrow t_2}, \quad (1.23)$
où $W'_{t_1 \rightarrow t_2}$ est la somme des travaux des forces s'appliquant à M entre t_1 et t_2 .	

Théorème de la puissance et de l'énergie mécanique

Nousons $\mathcal{P}_m(t)$ la somme des puissances des forces non-conservatives subies à t par un point matériel M . On a alors

$$\frac{dx_M}{dt} = \mathcal{P}_m(t), \quad (1.24)$$

On peut écrire cette égalité en version intégrée :

$$\Delta E_m = W_{x_0, x_1 \rightarrow x_2}, \quad (1.25)$$

avec $W_{x_0, x_1 \rightarrow x_2}$ la somme des travaux associés aux forces non-conservatives.

La première conclusion à tirer de ce dernier théorème, et la plus utile en pratique, est que dans le cas où toutes les forces en jeu sont conservatives, l'énergie mécanique est conservée. La formulation énergétique de la mécanique nous permet ainsi d'obtenir une quantité conservée au cours du mouvement, ce qui simplifie grandement l'étude de celui-ci. On parle d'*indicateur permanent du mouvement*.

1.1.4 Moment cinétique

Si la description énergétique est particulièrement adaptée aux situations où les forces sont conservatives, il existe également une autre reformulation de la mécanique newtonienne qui permet quant à elle de décrire plus simplement les mouvements de rotation. On utilise pour cela la notion de moment cinétique. Nousons A un point quelconque de l'espace; le **moment cinétique** du point matériel M en A est \vec{L}_A avec

$$\vec{L}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{p}. \quad (1.26)$$

Si (Δ) est une droite dirigée par le vecteur unitaire \vec{u}_z et contenant le point A , on peut définir le **moment cinétique** par rapport à un axe (Δ) par

$$\vec{L}_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_z. \quad (1.27)$$

Celui-ci est indépendant du choix du point A tant que A est sur l'axe (Δ) . On peut aller plus loin : en se placant en coordonnées cylindriques d'origine A et d'axe (Δ) (voir figure 1.7), on a

$$\vec{p} = m\vec{v} = m(r\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z), \quad (1.28)$$

ce qui implique

$$\vec{L}_\Delta = (r\vec{u}_r) \wedge \vec{p} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z. \quad (1.29)$$

On définit alors le **moment d'inertie** I_Δ par rapport à (Δ) par

$$\boxed{I_\Delta = I_\theta \dot{\theta}}. \quad (1.30)$$

On a alors, dans le cas présent,

$$I_\Delta = mr^2. \quad (1.31)$$

La notion de moment d'inertie prendra tout son sens au moment de l'étude de la mécanique des solides dans le chapitre 5. Notons que le vecteur unitaire position (\hat{A}) étant assumé ici \vec{v}_A , on aurait pu poser les quantités I_x et I_y .

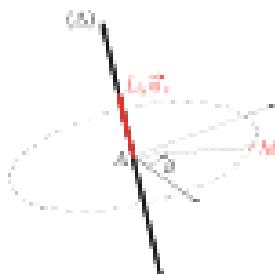


FIGURE 1.2 – Moment cinétique du point M par rapport à l'axe (A).

On définit pour une force \vec{F} s'appliquant au point M son **moment en A** $\widehat{\mathcal{M}}_A(\vec{F})$ par

$$\widehat{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \widehat{AM} \wedge \vec{F}. \quad (1.32)$$

Ici, toutes les quantités dépendent du point M et aussi du point A où les moments sont calculés.

On a alors le théorème suivant, qui découle de la seconde loi de Newton :

Théorème

Théorème du moment cinétique

Le moment cinétique en A (appelé **fixe**) du point M est relié à la somme $\widehat{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}$ des moments en A des forces s'appliquant sur M par la relation

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \widehat{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}}. \quad (1.33)$$

Le théorème du moment cinétique donné sous la forme (1.33) n'est valable que pour un point A fixe. Si le point A est mobile de vitesse \vec{v}_A , l'équation (1.33) devient

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \widehat{\mathcal{M}}_A^{\text{ext}} - \vec{v}_A \wedge \vec{r}_M. \quad (1.34)$$

Le théorème du moment cinétique peut sembler futile pour le moment, car en mécanique du point matériel celui-ci est strictement équivalent à la relation fondamentale de la dynamique — en injectant

les équations (1.26) et (1.32) dans l'équation (1.5) on retrouve l'équation (1.33). Cependant, il devient crucial en mécanique du solide, ce qui est développé au chapitre 5.

1.2 Application : le pendule simple

Voyons désormais l'application des théorèmes donnés précédemment dans un cas simple : l'étude d'un pendule simple.

1.2.1 Description du problème

Considérons une masse m (supposée ponctuelle) attachée par un fil de masse négligeable et de longueur l à un point O . On cherche à décrire le mouvement. On se place dans le référentiel du laboratoire, que l'on suppose galiléen. Le système choisi est le point matériel modélisant la masse, et l'on utilise les coordonnées polaires. Les conventions sont résumées sur la figure 1.3.

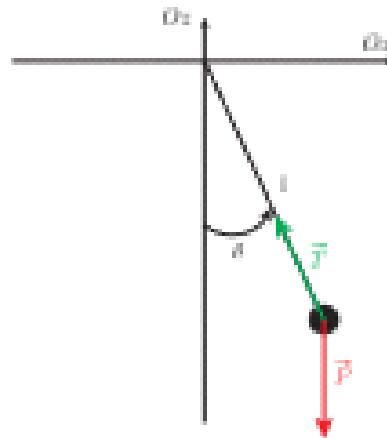


FIGURE 1.3 – Pendule simple et notations associées.

En coordonnées polaires, la position du pendule est repérée par ses coordonnées (r, θ) . Ici, on suppose que l'on a à tout instant $r = l$; obtenir la trajectoire est donc équivalent à obtenir la fonction $\theta(t)$. Deux forces entrent en jeu :

- le poids de la masse $\vec{P} = -mg \hat{\mathbf{z}}_z$;
- la tension du fil $\vec{T} = -T \hat{\mathbf{z}}_r$.

Dans la suite, nous obtiendrons l'équation sur $\theta(t)$ de trois manières différentes, en utilisant les théorèmes donnés dans les sections 1.1.2 à 1.1.4.

1.2.2 Résolution à l'aide des lois de Newton

La seconde loi de Newton nous donne l'équation

$$m\ddot{\vec{Z}} = \vec{T} + \vec{P}. \quad (1.35)$$

L'accélération $\ddot{\vec{Z}}$ obtenue à partir de l'équation (1.6) est vant

$$\ddot{\vec{Z}} = -M^2 \ddot{\vec{U}_r} + M^2 \ddot{\vec{U}_\theta}. \quad (1.36)$$

Le poids \vec{P} est donné en fonction de \vec{U}_θ , tandis que l'accélération $\ddot{\vec{Z}}$ et la tension du fil \vec{T} sont donnés dans la base $(\vec{U}_r, \vec{U}_\theta)$; il est nécessaire de projeter \vec{P} dans cette base. On obtient

$$\vec{P} = -mg(-\cos \theta \vec{U}_r + \sin \theta \vec{U}_\theta). \quad (1.37)$$

Ainsi, l'équation (1.35) devient

$$-m\ddot{\theta}^2 = -T + mg \cos \theta, \quad (1.38)$$

$$m\ddot{\theta} = -mg \sin \theta. \quad (1.39)$$

À partir de l'équation (1.39), on obtient l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (1.40)$$

Dans le cas où l'amplitude du mouvement est faible, à savoir $\theta \ll 1$, on peut développer le sinus autour de $\theta = 0$ et l'équation (1.40) devient l'équation bien connue d'un oscillateur harmonique (voir section 2.2) :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0. \quad (1.41)$$

On peut aussi utiliser l'équation (1.38) pour calculer la tension du fil :

$$T = mg \cos \theta + m\dot{\theta}^2. \quad (1.42)$$

1.2.3 Résolution à l'aide des méthodes énergétiques

L'énergie potentielle associée au poids écrit $E_p = mgz + cte$. On choisit la constante de sorte à ce que E_p soit nulle à l'altitude du point O ; ainsi, on a

$$E_p(\theta) = -mg l \cos \theta. \quad (1.43)$$

De plus, il nous faut calculer le travail de la tension du fil pour pouvoir appliquer les théorèmes énergétiques. La puissance associée à cette force est $P = \vec{T} \cdot \vec{U}$. Or, le mouvement se déroule tout selon \vec{U}_θ , on a $\vec{T} = M^2 \vec{U}_\theta$ et ainsi la puissance est nulle. Cela signifie que la tension du fil ne transmet pas, et il n'est donc pas nécessaire de prendre en compte dans les bilans énergétiques.

Toutes les forces en jeu étant donc conservatives, il est possible d'appliquer le théorème de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 - mg l \cos \theta = cte. \quad (1.44)$$

En dérivant cette équation, on retrouve l'équation (1.40).

1.2.4 Résolution par le théorème du moment cinétique

Le moment cinétique du point M en O s'écrit :

$$\vec{L}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = m(\vec{U}_p) \wedge (\vec{d}\vec{U}_p) = m^2 \dot{\theta} \vec{U}_x. \quad (1.45)$$

De plus, le moment du poids est donné par

$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = (\vec{U}_x) \wedge (-mg \vec{U}_z) = -mg l \sin \theta \vec{U}_x, \quad (1.46)$$

et la tension du fil est de moment nul car elle est dirigée selon \overrightarrow{OM} . La décomposition du moment cinétique nous permet donc de trouver l'équation du mouvement :

$$m^2 \ddot{\theta} = -mg l \sin \theta, \quad (1.47)$$

et l'on retrouve l'équation (1.40).

1.2.5 Comparaison des approches

Nous avons vu que les trois approches précédemment exposées permettaient de retrouver l'équation du mouvement du pendule simple. Cependant, elles ont chacune leur spécificité.

L'approche par la deuxième loi de Newton est la plus complète. En effet, elle permet de tracer l'équation du mouvement et de calculer la tension du fil à tout instant. Cependant, elle nécessite l'écriture de deux équations obtenues et le calcul de projections de vecteurs, ce qui entraîne une plus grande difficulté de calcul.

L'approche énergétique est la plus physique : en remarquant que la tension du fil ne travaille pas, elle nous aide directement à l'existence d'un quantité conservée et permet de retrouver l'équation du mouvement plus rapidement que par les autres méthodes. Elle ne permet cependant pas de calculer \vec{T} .

Enfin, l'approche par le théorème du moment cinétique est la plus pratique car elle permet de se poser de la tension du fil, qui n'intervient pas dans la rotation (moment nul en O). Cependant, elle nécessite le calcul de plusieurs produits vectoriels et est donc bien moins rapide que les autres méthodes.

Pour ce type de problème unidimensionnel, on voit donc que la méthode énergétique est à privilier. Il est cependant parfois impossible d'éviter l'utilisation des lois de Newton, par exemple lorsque le calcul de forces inconnues est demandé. Enfin, la méthode du moment cinétique n'est pas la plus adaptée ici, mais on voit que celle-ci sera très performante dès que plusieurs forces ont des moments nuls.

Pour conclure, remarquons qu'une réalisation expérimentale d'un pendule ne correspond jamais aux hypothèses évoquées ici, à savoir que le fil est inextensible et de masse nulle. Les pendules utilisés en TP sont modélisés de façon légèrement différente : on parle du modèle du « pendule pesant », qui sera présenté dans la section 5.1.2.

1.3 Équilibre, stabilité et domaine visité

Bien souvent, lors de l'étude d'un problème mécanique, il n'est pas nécessaire de disposer de l'équation du mouvement complète pour obtenir les informations recherchées. Par exemple, il peut suffire de constater qu'il existe des positions dans lesquelles les forces se compensent et le système ne bouge plus; en astronomie, il peut être suffisant de connaître de la trajectoire d'une comète seulement son point le plus proche de la Terre. Ces différents calculs sont généralement bien plus faciles que d'obtenir la trajectoire complète.

1.3.1 Équilibre mécanique et énergie potentielle

On dit qu'un point matériel est à l'**équilibre mécanique** si et seulement si il est immobile, c'est-à-dire que sa vitesse \vec{v} est nulle à tout instant. Cela implique (équations (1.7) et (1.33)) que les résultantes des forces *extérieures* *qui dépendent* d'appliquer sur celui-ci sont nulles. On définit alors une **position d'équilibre** comme une configuration du système telles que ces deux résultantes soient nulles.

Un système peut passer en une position d'équilibre sans que son mouvement ne se termine. Cependant, si à un certain instant t le système se trouve en l'une de ses positions d'équilibre avec une vitesse nulle, alors il y restera indéfiniment.

Dans la suite, on suppose que l'on étudie un point matériel de masse m sur lequel s'applique une résultante des forces \vec{F} . Dans ce cas, la nullité de la résultante des forces implique également la nullité de la résultante des moments. On suppose enfin que la force \vec{F} dérive d'une énergie potentielle : il existe une fonction E_p telle que $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p$.

Par définition, les positions d'équilibre sont telles que $\vec{F} = \vec{0}$. On en déduit que les positions d'équilibre sont les extrêmes de l'énergie potentielle.

Bien évidemment, ce résultat n'est valable que si l'intégralité des forces en jeu sont conservatives. Si ce n'est pas le cas, il est nécessaire de renoncer à la définition de position d'équilibre et à trouver la configuration pour que toutes les forces se compensent.

1.3.2 Comportement proche d'une position d'équilibre

Les positions d'équilibre étant connues, on peut désormais s'intéresser au comportement du système proche de celles-ci. Supposons que le système est initialement dans un état d'équilibre. On le perturbe alors légèrement hors de sa position d'équilibre. On distingue deux cas :

- * si le système a tendance à revenir dans sa position d'équilibre initiale, on dit que celui-ci est **stable**;
- * dans le cas contraire, on dit qu'il est **instable**.

On peut valider la qualité de stabilité en comportement de l'énergie potentielle E_p proche d'une position d'équilibre. Supposons que E_p ne dépend que d'une seule variable x et que la position d'équilibre soit en $x = x_0$. On a alors

$$E_p(x) = E_p(x_0) + E'_p(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} E''_p(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \quad (1.48)$$

Par définition d'une position d'équilibre on a $E'_p(x_0) = 0$. Proche de la position d'équilibre, on peut donc approximer l'énergie potentielle E_p par

$$E_p \approx E_p(x_0) + \frac{1}{2} E''_p(x_0)(x - x_0)^2. \quad (1.49)$$

On remarque que ce profil d'énergie potentielle correspond à une force élastique de raideur équivalente k_{eq} avec:

$$k_{eq} = E''_p(x_0). \quad (1.50)$$

Cette approximation est représentée visuellement sur la figure 1.4.

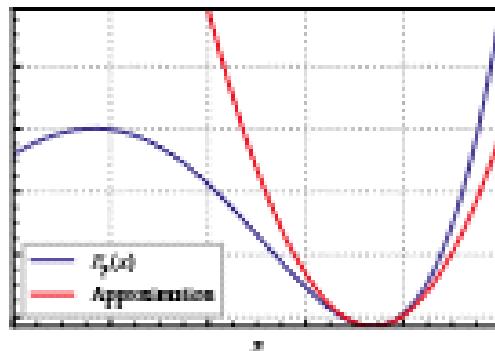


FIGURE 1.4 – Approximation harmonique de l'énergie potentielle autour de l'un de ses minima.

À partir de ce résultat, on peut déduire que l'équation du mouvement autour de la position d'équilibre s'écrit:

$$m\ddot{x} = -E''_p(x_0)(x - x_0), \quad \text{soit} \quad \ddot{y} + \frac{E''_p(x_0)}{m}y = 0 \quad \text{avec} \quad y = x - x_0. \quad (1.51)$$

On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique : le mouvement est stable pour $E''_p(x_0) > 0$, et instable si $E''_p(x_0) < 0$.

³ Dans le cas — rare — où $E''_p(x_0) = 0$, il faut poursuivre le développement limité de l'équation (1.48) jusqu'au premier ordre non nul.

On voit donc que tout mouvement proche d'une position d'équilibre peut être décrit en première approximation par une équation d'oscillateur harmonique. Cela justifie l'omniprésence de ce modèle en physique.

Ce résultat également n'est valable que si l'intégralité des forces en jeu sont conservatives. Il ne faut cependant pas chercher à extrapoler les critères de stabilité obtenus ici au cas non conservatif, sous peine d'obtenir des résultats totalement faux! Un exemple classique est l'étude de la stabilité des points de Lagrange d'un système à deux corps : l'étude d'énergie potentielle simple indique qu'il n'y a pas de positions d'équilibre stables, mais la prise en compte de la force de Coriolis montre que les *maxima* sont des positions stables [5].

1.3.3 États liés et de diffusion

Pour finir, on peut également utiliser l'énergie potentielle pour obtenir des propriétés qualitatives sur le mouvement sans même résoudre d'équations. On s'intéresse au mouvement d'un point matériel de masse m dans un profil d'énergie potentielle $E_p(x)$. On suppose qu'il n'y a aucune force supplémentaire non保守的.

Par conservation de l'énergie mécanique, on a donc dans cette situation

$$E_k + E_p = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + E_p(x) = E_m = \text{const.} \quad (1.52)$$

On en déduit plusieurs propriétés.

- L'énergie cinétique étant toujours positive, on a $E_m \geq E_p(x)$ ce qui conditionne les valeurs de x accessibles au système. Si x ne peut prendre ses valeurs que dans un ensemble borné, on dira que l'on se trouve dans un **état lié** (figure 1.5a); à l'inverse, si x peut atteindre l'infini, on dira que l'on se trouve dans un **état de diffusion** (figure 1.5b).
- Les points tels que $E_m = E_p(x)$, appellés **points de rebroussement**, correspondent aux situations où $\dot{x} = 0$. En ces points, la vitesse s'inverse et la trajectoire change de sens (elle passe des x croissants aux x décroissants ou vice-versa); elle rebrousse chemin.

Les points de rebroussement ne sont pas des positions d'équilibre! On a en ces points $\dot{x} = 0$ mais $\ddot{x} \neq 0$.

1.4 Quelques pièges habituels et comment les éviter

1.4.1 Poulies et fils

De nombreux systèmes physiques étudiés en mécanique contiennent des fils ou des poulies. Dans ce type de situation, il est facile de se tromper en simplifiant trop le système ou au contraire en se compliquant.

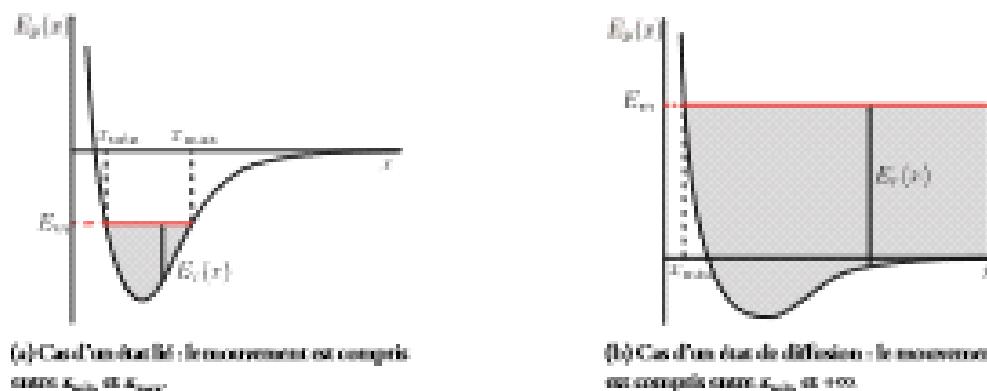


FIGURE 1.5 – ILLUSTRATION DES ÉTATS LIÉS ET DE DIFFUSION.

trop la vie. Le but de cette partie est donc de présenter les différentes méthodes possibles de traitement d'exercices mettant en jeu des fils ou des poulies.

Pour cela, nous travaillerons sur l'exemple de la machine d'Atwood : une poulie est fixée à un support, et l'on fait passer un fil autour de celle-ci. Ce fil est relié à deux masses, m_1 et m_2 . La situation est décrite sur la figure 1.6.

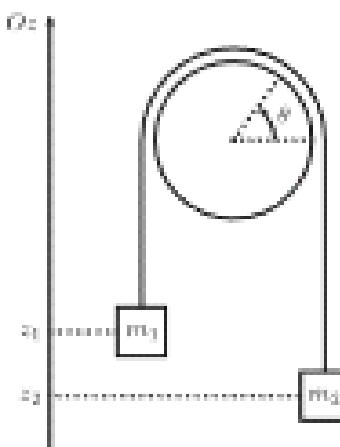


FIGURE 1.6 – MACHINE D'ATWOOD.

Afin de clarifier la situation, commençons par étudier plus en détails comment les actions mécaniques se répartissent dans un fil. Considérons un point M quelconque sur un fil (dont on suppose la section

négligeable). La force exercée par la partie droite M sur la partie avant M' est appelée **tension du fil** et est notée $T(\delta t)$. Le moment exercé est quant à lui appelé **raideur du fil** et est noté $\Gamma_M(M)$. On dit qu'un fil est **souple** si en chacun de ses points, la raideur est nulle ; dans ce cas, la tension du fil est **constante** en tout point au fil.

Pour un déformé à la poule : celle-ci peut pivoter librement autour de son axe, noté (Δ) . Si le moment des actions de liaisons projeté sur (Δ) entre la poule et son support est nul, on dit que la liaison est de type **pivot parfait**.

On réalise les hypothèses suivantes sur la machine d'Atwood :

- la poule est en liaison pivot parfait et possède un moment d'inertie J par rapport à son axe;
- le fil est souple;
- le fil est inextensible et sans masse;
- le fil ne glisse pas sur la poule.

Le problème comporte 3 incertaines cinématiques : x_1 , x_2 et θ . Cependant, le fait que le fil soit inextensible et ne puisse pas glisser sur la poule implique que ces quantités doivent être reliées par deux équations : le problème ne comporte qu'un seul degré de liberté. L'inextensibilité implique

$$x_1 + x_2 = \text{const.} \quad (1.53)$$

Le concept de non-glissement sera davantage explicité au chapitre 2. On comprend cependant bien que pour que le fil soit immobile par rapport à la poule, en notant R le rayon de celle-ci, on doit avoir

$$\dot{x}_1 = R\dot{\theta}. \quad (1.54)$$

Le système est théâtre de nombreuses actions : en tout point du fil s'applique la tension du fil, qui **peut varier le long du fil**, il y a de plus des actions de contact entre le fil et la poule ainsi que des actions d'air sur la poule. Pour ne pas faire intervenir d'incertaines supplémentaires, il est particulièrement intéressant d'appliquer le théorème du moment cinétique au système complet (poule, fil et masses) par rapport à l'axe de rotation de la poule : on se débarrasse ainsi de toutes les actions internes ! On a ainsi

$$\frac{dI_\theta}{dt} = \mathcal{M}_{\text{ext},\theta}, \quad (1.55)$$

où I_θ est la somme des moments cinétiques projetés sur (Δ) :

$$I_\theta = J\ddot{\theta} - m_1 R\ddot{x}_1 + m_2 R\ddot{x}_2. \quad (1.56)$$

Les seules forces extérieures sont les poids des masses m_1 et m_2 , on a donc

$$\mathcal{M}_{\text{ext},\theta} = m_1 g R - m_2 g R. \quad (1.57)$$

L'équation du mouvement est donc

$$J\ddot{\theta} - m_1 R\ddot{x}_1 + m_2 R\ddot{x}_2 = (m_1 - m_2)gR. \quad (1.58)$$

À l'aide des équations (1.53), (1.54) et (1.55), on obtient en définitive

$$\ddot{x}_2 = -\ddot{x}_1 = R\ddot{\theta} = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + f/R^2}. \quad (1.59)$$

La tension du fil n'est pas uniforme le long du fil? En effet, si la masse m_1 subit une tension $\vec{T}_1 = T_1 \hat{u}_1$, on a

$$m_1 \ddot{x}_1 = T_1 - m_1 g, \quad (1.60)$$

et les masses m_1 et m_2 étant différentes, T_1 et T_2 sont différentes.

On peut seulement affirmer que la tension est uniforme le long de chaque partie pendante du fil, celui-ci étant sans masse (pour le voir, on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique à une portion de fil).

On peut obtenir un résultat similaire en utilisant le théorème de l'énergie cinétique pour le système complet, car les actions intriques ne travaillent pas. Cependant, utiliser le principe fondamental de la dynamique n'est pas adapté car il faut pour cela s'attacher à l'évolution de la tension du fil entre les deux masses... .

1.4.2 Choix de l'approche

Il existe de nombreux théorèmes en mécanique, et le choix du théorème à appliquer n'est pas toujours évident. Dans la figure 1.7, je propose un processus à suivre pour choisir le bon théorème à appliquer. Ce schéma n'est pas universel, mais il couvre l'essentiel des situations académico-scolaires rencontrées en mécanique.

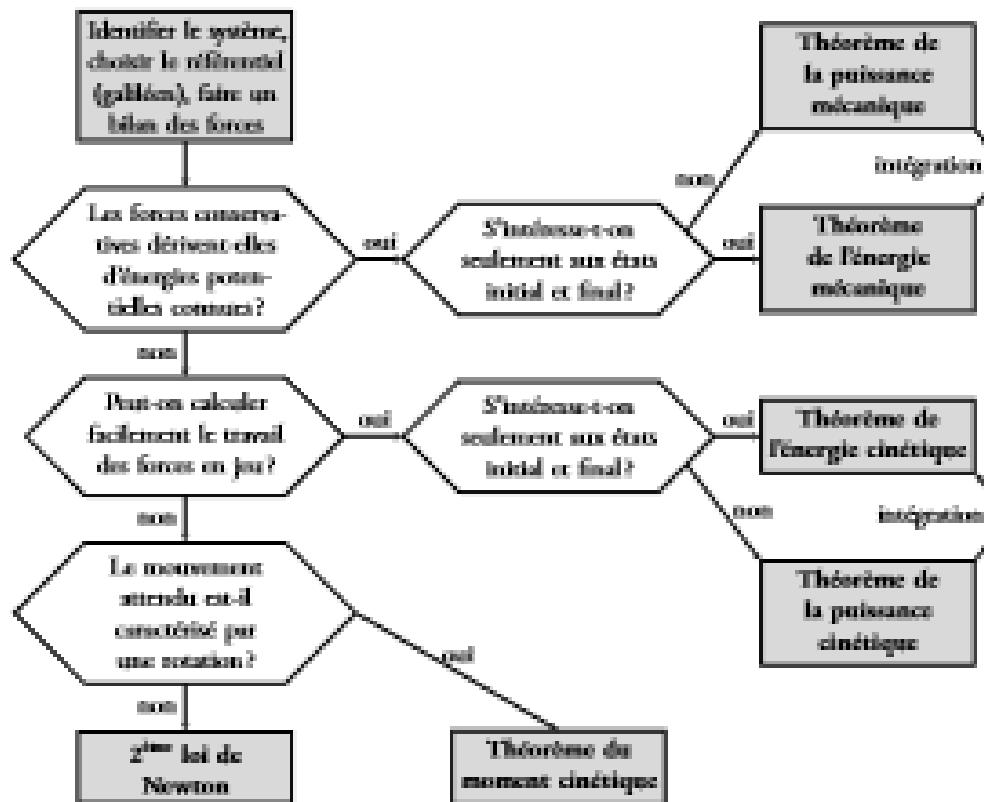


FIGURE 1.7 – Processus de décision pour le choix du théorème mécanique à utiliser.

Chapitre 2

Applications : frottements, oscillateurs, particules chargées

Nous disposons désormais des théorèmes qui nous serviront dans le reste de cette partie d'étude de la mécanique newtonienne : nous pourrons passer à l'étude de ces phénomènes. Cela nécessite de décrire plus précisément les forces qui entrent en jeu dans la description de ces phénomènes. Dans ce chapitre, nous nous concentrerons sur la description des frottements, qui entrent en jeu dans toute situation réelle mais sont souvent négligés.

Nous nous intéresserons ensuite à l'étude des oscillateurs, des objets omniprésents en physique. Après une étude complète de l'oscillateur harmonique, pierre anglaise de la mécanique de par son universalité (voir chapitre 1), nous affinerons le modèle pour décrire des oscillateurs plus riches.

Pour finir, nous étudierons le mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique. La forme de la force de Lorentz entraîne l'existence de trajectoires qualitativement différentes de celles étudiées dans les deux premières parties de ce chapitre.

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

1. comprendre que chaque situation où des frottements sont présents est unique mais qu'il est possible de dégager des lois approximant efficacement des situations très variées;
2. maîtriser l'approche d'un problème à frottements solides : hypothèse, résolution, vérification, qui entraîne des comportements qualitativement bien plus riches que dans les problèmes à frottements fluides;
3. avoir que le portrait de phase permet de comprendre qualitativement le comportement d'un oscillateur non linéaire;
4. connaître les caractéristiques de la présence de non-linéarités;
5. décrire qualitativement le mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique.

Voici des extraits de leçons tombées en 2022 et 2023 qui sont en lien avec ce chapitre :

2023	Forces de traînée et de portance	Mettre en œuvre une expérience permettant de caractériser une force de traînée à faible nombre de Reynolds.
	Frottements	Illustrer l'exemple d'une situation mécanique dans laquelle intervient au moins un changement de mode de glissement, en s'appuyant sur la simulation numérique dont le code est fourni.
2022	Approches perturbatives	Le candidat ou la candidate établira la formule de Borda et mettra en évidence expérimentalement le non-hachoirisme des oscillations d'un pendule. Il n'est pas opportun de consacrer plus de quinze minutes pour exposer cette partie de la leçon.
	Forces intérieures à un système	Le candidat ou la candidate proposera et exploitera une expérience mettant en évidence le travail des forces intérieures à un système. Il n'est pas opportun de consacrer plus de dix minutes pour exposer cette partie de la leçon.
	Régimes transitoires	Le candidat ou la candidate présentera expérimentalement le portrait de phase d'un phénomène transitoire. Il n'est pas opportun de consacrer plus de dix minutes pour exposer cette partie de la leçon.
	Frottements	Le candidat ou la candidate présentera une expérience permettant de déterminer le coefficient de frottement fluide sur sol sollicité un oscillateur mécanique amorti. Il n'est pas opportun de consacrer plus de dix minutes pour exposer cette partie de la leçon.

2.1 Frottements fluides et solides

Le terme de **frottement** désigne de manière générale une interaction entre deux corps (solides ou fluides) en contact et tendant à s'opposer à leur mouvement relatif. Les forces de frottements ont été les premières à être étudiées par les humains : il est en effet crucial de comprendre leur fonctionnement afin de pouvoir les minimiser lors notamment du transport d'objets (voir [9] pour un résumé historique). Leur modélisation est cependant ardue par la grande diversité de situations possibles, dans lesquelles les frottements se manifestent de façons très différentes. Commençons par quelques observations.

- Lorsqu'un objet est lancé dans l'air, sa vitesse cesse d'augmenter au bout d'un certain temps : il existe une « vitesse limite » de chute.
- Cette vitesse limite dépend de la forme de l'objet et de sa masse.

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

- * Lorsque l'on fait glisser un objet sur le sol, il ne se met pas en mouvement immédiatement : il faut exercer une certaine force pour le faire se déplacer. À l'inverse, dans l'air ou l'eau, un objet se met en mouvement immédiatement.

On en déduit que les forces de frottements se divisent en deux catégories, selon que le contact soit avec un fluide ou un liquide. Les frottements fluides doivent compenser la poussée pour une certaine vitesse, on en déduit qu'on peut les écrire sous la forme

$$\vec{F}_{\text{frot}} = -f(v) \vec{v}_x, \quad (2.1)$$

avec le vecteur \vec{v} dans la direction du mouvement et f une fonction croissante. La description des frottements solides sera plus complexe car il faudra distinguer des phasés selon que les objets soient ou non en mouvement ou non.

2.1.1 Frottements fluides

Faible vitesse

Dans le cas de frottements fluides, on fait souvent l'hypothèse que la force de frottements est proportionnelle à la vitesse. Ceci est valable lorsque les vitesses en jeu sont suffisamment faibles.

Indication	Force de frottements visqueux
La force de frottements s'exerçant sur un objet plongé dans un fluide et évoluant avec une vitesse relative v dans celui-ci est de la forme	$\vec{F}_{\text{frot}} = -\lambda \vec{v}, \quad (2.2)$ avec λ un coefficient de proportionnalité positif, exprimé en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Note : par abus de dénomination, on utilise souvent le terme force de frottements sous le nom « frottements fluides ».

Plus quantitativement, cette expression de la force de frottements est valide lorsque le *nombre de Reynolds* associé à l'écoulement relatif du fluide dans le rétinacule de l'objet est petit devant 1. Ainsi, pour un objet de taille d , plongé dans un fluide de viscosité cinétique ν , la formule de l'équation (2.2) est valable tant que

$$d \times v \ll \nu. \quad (2.3)$$

Il est possible d'obtenir une formule pour le coefficient λ dans le cas où l'objet considéré est une sphère de rayon R . On obtient alors ce cas

$$\lambda = 6\pi\eta R, \quad (2.4)$$

avec η la viscosité dynamique du fluide. Une bille de métal de 1 cm de diamètre aura donc un coefficient λ dans l'air valant environ $1,2 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

fonctionne l'effet d'une telle force de frottement sur un mouvement de chute libre. On considère une masse m qui tombe dans l'air selon la verticale (Oz) — orientée vers le bas ici — dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On suppose que la vitesse initiale est nulle. Les deux forces¹ s'appliquant sur cette masse sont (voir figure 2.1)

- son poids $\vec{P} = mg \vec{u}_z$
- la force de frottement $\vec{F}_{\text{frot}} = -kv \vec{u}_z$

La seconde loi de Newton nous permet d'obtenir l'équation du mouvement :

$$m\ddot{z} = mg - kv \quad \text{soit} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v = g. \quad (2.6)$$

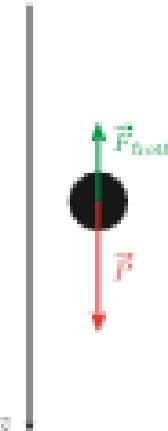


FIGURE 2.1 – Forces s'appliquant sur une masse en chute libre.

On peut déduire de l'équation (2.6) que la vitesse $v(t)$ est

$$v(t) = gt + Ae^{-kt}, \quad t = \frac{m}{k}, \quad (2.7)$$

avec A une constante. La vitesse initiale étant nulle, on obtient $A = -gt_0$ et

$$v(t) = gt\left(1 - e^{-kt}\right). \quad (2.8)$$

1. On néglige ici la poussée d'Archimète s'appliquant sur la masse en cours de chute. Si on la prend en compte, il faut compliquer la masse en par

$$(p - p_f)V, \quad (2.5)$$

avec p la masse volumique de l'objet, V le volume de celui-ci et p_f la masse volumique du fluide. On voit que négliger cette poussée est raisonnable dans le cas d'une chute si l'objet est suffisamment dense.

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

Le profil de vitesse est tracé sur la figure 2.1. On observe que la vitesse tend vers une valeur limite v_∞ , telle que $\vec{v} = v_\infty \vec{e}_x$, en accord avec les observations faites précédemment. Cette vitesse limite est

$$v_\infty = \frac{C_D}{2} . \quad (2.9)$$

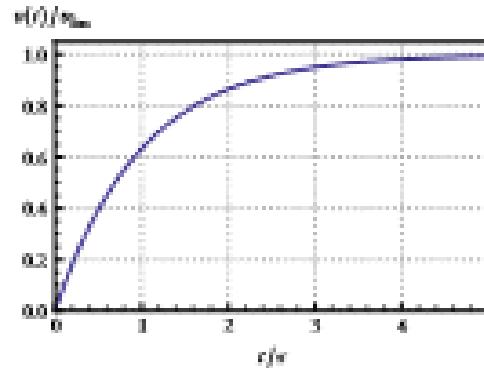


FIGURE 2.1 – Évolution de la vitesse au cours de la chute libre.

Vitesse plus élevée

Lorsque la vitesse de chute est plus élevée, il est plus complexe d'écrire une loi suffisamment générale pour être pertinente. On fait en pratique ce qu'est appelé des simulations numériques. On écrit la force de frottements sous la forme

$$\vec{F}_{\text{frot}} = -\frac{1}{2} \rho v^2 A C_d(s) \vec{e}_x , \quad (2.10)$$

où A est l'aire de la section de l'objet considéré dans un plan perpendiculaire à la vitesse (pour une sphère de rayon R , cette aire vaut πR^2), ρ est sa masse volumique, C_d est le coefficient de traînée et \vec{e}_x est un vecteur unitaire orienté dans le sens de la vitesse ($\vec{e}_x = \vec{v}/v$). On cherche ensuite à obtenir ce coefficient de traînée en fonction de la vitesse.

Dans le cas où l'objet considéré est une sphère de rayon R , on donne le coefficient de traînée pour tout v (plus précisément pour tout nombre de Reynolds Re/v) dans la figure 2.3. On observe qu'à faible vitesse, C_d se comporte comme $1/v$, ce qui corrabore l'équation (2.2). À vitesse plus élevée, on dispose d'une plage importante de valeurs de v pour lesquelles C_d est environ constant, ce qui permet d'écrire

$$\vec{F}_{\text{frot}} = -kv^2 \vec{e}_x . \quad (2.11)$$

Voyons en quoi cette nouvelle expression de la force de frottements modifie le mouvement lors d'une chute libre. La nouvelle équation du mouvement est

$$m\ddot{v} = mg - kv^2 \quad \text{soit} \quad \ddot{v} = g - \frac{k}{m}v^2 . \quad (2.12)$$

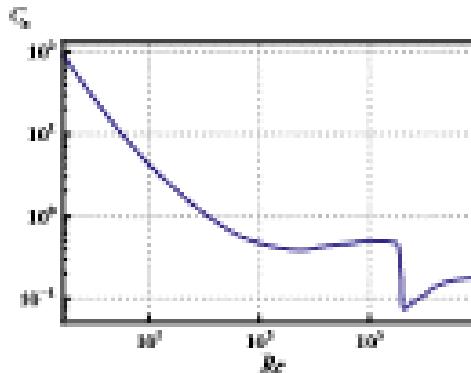


FIGURE 2.3 – Coefficient de frottement pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, dans le cas d'une sphère.

Cette équation n'est pas linéaire, on ne peut donc pas la résoudre par les moyens usuels. On peut déjà obtenir la vitesse limite :

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{g r m}{F}}. \quad (2.13)$$

Remarquons déjà que la dépendance en m a fondamentalement changé par rapport au cas précédent : la vitesse limite n'évolue plus proportionnellement à m , mais seulement à sa racine carrée!

L'équation du mouvement peut alors s'écrire

$$\frac{d(v/v_{\text{lim}})}{1 - (v/v_{\text{lim}})^2} = \frac{dx}{r} \quad \text{où} \quad r = \frac{v_{\text{lim}}}{F}. \quad (2.14)$$

On reconnaît dans le membre de gauche la dérivée de $\operatorname{arctanh}(v/v_{\text{lim}})$. Il donc possible d'intégrer l'équation du mouvement : en utilisant le fait que la vitesse initiale est nulle, on obtient

$$v(t) = v_{\text{lim}} \operatorname{tanh}\left(\frac{t}{r}\right). \quad (2.15)$$

Le nouveau profil de vitesse est tracé sur la figure 2.4.

Si vous souhaitez aller plus loin dans l'étude de la chute libre d'une bille et de la mesure du coefficient de frottement, vous pouvez consulter par exemple [10]. Une perspective historique est donnée dans [11].

2.1.2 Frottements solides

On s'intéresse désormais à la description des forces de frottements entrant en jeu lors du contact entre deux solides. La première étape est de se munir d'une description cinématique du contact entre deux solides.

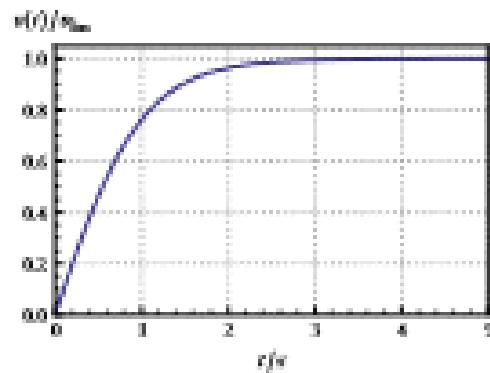


FIGURE 2.4 – Évolution de la vitesse au cours de la chute libre dans le cas d'une force de frottement en v^2 .

Vitesse de glissement

On considère un solide S posé sur un support Σ qui peut être fixe ou representer un autre solide en mouvement et dont la forme est a priori quelconque. Ces deux objets évoluent dans un référentiel \mathcal{R} galiléen. Dans un premier temps le contact est supposé ponctuel. À l'instant t , on considère deux points coïncidant : le point J appartenant au solide S et le point J' appartenant à Σ (voir figure 2.5). Ils sont confondus à l'instant t mais éventuellement amenés à se séparer aux instants ultérieurs.

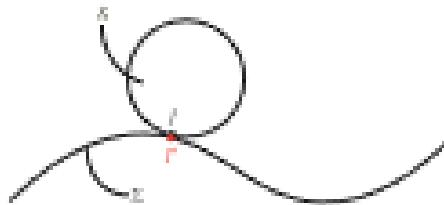


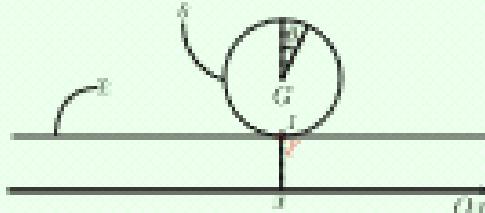
FIGURE 2.5 – Contact ponctuel entre deux solides.

On définit alors la **vitesse de glissement** de S sur Σ par

$$\vec{v}_g(S/\Sigma) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(J \in S) - \vec{v}_{\mathcal{R}}(J' \in \Sigma). \quad (2.14)$$

Cette vitesse est indépendante du référentiel dans lequel elle est évaluée (voir chapitre 4). Il faut comprendre cette définition comme « l'écart de vitesse entre le point de contact vu comme étant lié à S et ce même point vu comme étant lié à Σ ». Les deux solides ayant des géométries différentes, il n'y a pas de raison pour que ces deux vitesses soient égales, bien que les deux points soient confondus à un instant donné. Cependant, si le solide S ne glisse pas sur Σ , ces deux points coïncident à tout instant et on a $\vec{v}_g = \vec{0}$. On parle alors d'**adhérence**.

Prenons l'exemple d'une roue de rayon R roulant sur un sol horizontal. On note $\omega = \dot{\theta}$ sa vitesse angulaire et x son abscisse.



On se place dans le référentiel où le centre de la roue est fixe. On a alors $\vec{v}_R (J \in S) = -R\omega \vec{u}_x$ et $\vec{v}_R (J' \in \Sigma) = -x \vec{u}_x$. Ainsi, la vitesse de glissement est :

$$\vec{v}_g = (\dot{x} - R\omega) \vec{u}_x. \quad (2.17)$$

On n'a pas de glissement si la vitesse angulaire de la roue est telle que $\dot{x} = R\omega$.

On peut aussi se placer dans le référentiel lié au sol : on a alors $\vec{v}_R (J' \in \Sigma) = \vec{0}$ et on doit évaluer $\vec{v}_R (J \in S)$ en utilisant la formule de Vavignon (voir chapitre 5) :

$$\vec{v}_R (J \in S) = \vec{v}_R (G \in S) + \vec{R}\vec{G} \wedge \vec{\Omega} = \dot{x} \vec{u}_x + R \vec{u}_x \wedge \omega \vec{u}_y = (\dot{x} - R\omega) \vec{u}_x. \quad (2.18)$$

Lois de l'évaluation de la vitesse de glissement, il faut bien prendre soin d'évaluer les deux vitesses dans le même référentiel !

Lois de Coulomb

La force de frottement entre les solides a une origine microscopique complexe, elle est modélisée à l'échelle macroscopique par une force résultante² \vec{R} qui s'applique au point de contact J .

On décompose la force \vec{R} en deux vecteurs :

- L'un, noté \vec{N} , est orthogonal à la surface de contact. Il caractérise le non-encastrément du solide dans Σ et est dirigé de Σ vers S ;
- L'autre, noté \vec{T} , est dans le plan du contact donc orthogonal à \vec{N} et caractérise la friction.

Les lois de Coulomb sont des lois phénoménologiques énoncées par Amontons dès 1699 et précises par Coulomb en 1785 permettant de prédire la direction, le sens et dans certains cas la norme de la force \vec{T} .

2. Dans le modèle du contact ponctuel, les actions de frottement se réduisent à une résultante des forces. En réalité, il y a toujours un léger frottement des surfaces au niveau du contact, et il peut donc y avoir un moment de frottement qui oppose à la rotation au niveau du contact ponctuel (voir [T1.1d]).

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

Informations	Lois du frottement solide
On distingue deux cas selon la valeur de $\vec{v}_f(S/\Sigma)$.	
• Si $\vec{v}_f(S/\Sigma) = \vec{0}$, il y a adhérence et on a	$ \vec{T} \leq f_s \vec{N} . \quad (2.19)$
• Si $\vec{v}_f(S/\Sigma) \neq \vec{0}$, il y a glissement et on a	$ \vec{T} = f_d \vec{N} \quad \text{ou} \quad \vec{T} \cdot \vec{v}_f(S/\Sigma) < 0 . \quad (2.20)$

Les scalaires f_s et f_d sont deux coefficients caractérisant le contact respectivement statique (**coefficients de frottement statique**) et de glissement (**coefficients de frottement dynamique**). Ils ne dépendent que des corps en contact (matériaux, état de surface, etc.) et sont indépendants de la valeur de \vec{N} (en particulier dans la plupart des cas usuels, de la masse de S), de l'aire de la zone de contact entre les deux solides et, le cas échéant, de la vitesse de glissement.

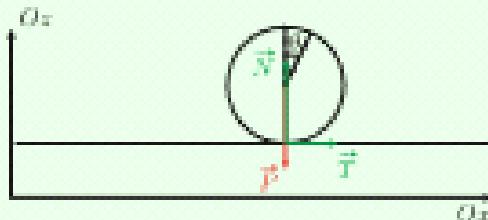
Les coefficients f_s et f_d sont souvent considérés égaux, même si en toute rigueur on a plutôt $f_s \geq f_d$ comme en témoigne le tableau 2.2. Cela n'implique pas nécessairement que de lui donner résistance (penser à un déménagement...). Cependant ces coefficients étant phénoménologiques on ne peut pas démontrer fondamentalement cette inégalité et on pourraient imaginer qu'elles soit égales pour certains cas spécifiques.

Matériaux	f_s	f_d
Acier/Acier	0,2	0,1
Pneu/Route sèche	0,8	0,5
Pneu/Route mouillée	0,5	0,4
Bois/Bois	0,5	0,3
Pneu/Route mouillée	0,3	
Pneu de F1/Route	1,8	
Céramique/Acier	4	

TABLE 2.2 – Ordres de grandeur de quelques coefficients de frottement classiques.

La différence numérique entre f_s et f_d a une importance. Elle permet notamment d'expliquer les mouvements appelés « stick-slip ». Ce type de mouvement, communément étudié en CPGE, consiste en une alternance de phases de glissement et de non-glisement. On pourra par exemple se référer à [12].

Reprenons le cas de la roue posée sur un sol horizontal, puis dans le cas plus général où l'on étudie le démarrage d'une voiture. On suppose que l'on fournit un couple moteur $\Gamma \vec{u}_y$ à la roue de masse m .



On cherche la condition pour que la roue ne patine pas lors du démarrage. Rédisons un bilan des forces :

- le poids de la roue vaut $\vec{P} = -mg \vec{U}_z$,
- la réaction normale vaut $\vec{N} = N \vec{U}_z$,
- la réaction tangentielle vaut $\vec{T} = T \vec{U}_x$ (avec T aléatoire).

La voiture ne se déplaçant que horizontalement, on doit avoir $N = mg$. Appliquons alors le théorème du moment cinétique à la roue : on écrit $\vec{J}_{O_z} = J\dot{\theta} \vec{u}_y$ (voir chapitre 5), et on a

$$J\ddot{\theta} = -KT + \Gamma. \quad (2.21)$$

La seconde loi de Newton appliquée à la roue nous donne

$$m\ddot{x} = T. \quad (2.22)$$

Enfin, la condition de non-glissement est $\dot{x} = R\dot{\theta}$. On en déduit donc

$$T = mR\ddot{\theta} \quad \text{soit} \quad \left(\frac{J}{mR^2} + R \right) T = \Gamma. \quad (2.23)$$

En cas de non-glissement, on a selon la loi d'Amontons-Coulomb $|T| < f_m g$, ce qui implique

$$\Gamma < f_m g R \left(1 + \frac{J}{mR^2} \right). \quad (2.24)$$

En observant les valeurs de f_m du tableau 2.2, on comprend pourquoi il est bien plus ardu de démarquer une voiture sur un sol enneigé : le couple maximal atteignable est bien plus faible que sur une route sèche ! Remarquons pour finir que dans le cas présent, la force de « frottement » tangentielle est bien celle qui permet au véhicule d'avancer *in fine*.

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

Etude énergétique

La puissance totale des actions de frottement entre les solides S et Σ est donnée par

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\vec{R}_{S/\Sigma}) + \mathcal{P}(\vec{R}_{\Sigma/S}). \quad (2.25)$$

Or, on a

$$\mathcal{P}(\vec{R}_{\Sigma/S}) = \vec{R}_{\Sigma/S} \cdot \vec{v}_S (J \in S) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\vec{R}_{S/\Sigma}) = \vec{R}_{S/\Sigma} \cdot \vec{v}_{\Sigma} (J' \in \Sigma). \quad (2.26)$$

Par principe des actions réciproques, on a $\vec{R}_{S/\Sigma} = -\vec{R}_{\Sigma/S}$, soit

$$\mathcal{P} = \vec{R}_{S/\Sigma} \cdot (\vec{v}_S (J \in S) - \vec{v}_{\Sigma} (J' \in \Sigma)) = \vec{R}_{S/\Sigma} \cdot \vec{v}_S (S/\Sigma). \quad (2.27)$$

Pour finir, la vitesse de glissement appartenant au plan unique commun aux deux solides, on a :

Tel contact	Puissance des forces de frottement
La puissance totale \mathcal{P} des forces de frottements entre les solides S et Σ est :	
	$\mathcal{P} = \vec{T} \cdot \vec{v}_S (S/\Sigma). \quad (2.28)$

Celle-ci est nulle dans le cas du non glissement et négative dans le cas du glissement.

Pour illustrer la nécessité de la rigueur lors de l'étude d'actions entre solides, intéressons-nous au cas suivant : un tapis roulant roule avec une vitesse $U \vec{v}_x$ dans le référentiel terrestre. Dessus se trouve un pavé avançant avec une vitesse $V \vec{v}_{x'}$, avec $0 < V < U$: le pavé glisse. Notons $\vec{T} = T \vec{v}_x$ la réaction tangentielle du tapis sur le pavé : on a $T \geq 0$. On calcule la puissance régie par les systèmes {pavé}, {tapis} et {tapis + pavé} dans les référentiels liés au laboratoire, au tapis et au pavé :

Référentiel	Terrestre	Pavé	Tapis
$\mathcal{P}_{\text{terrestre}}$	$TV \geq 0$	$T \times 0 = 0$	$T(V - U) \leq 0$
$\mathcal{P}_{\text{pavé}}$	$-TU < 0$	$-T(U - V) \leq 0$	$-T \times 0 = 0$
$\mathcal{P}_{\text{tapis}} (\text{tapis} + \text{pavé})$	$-T(U - V) \leq 0$	$-T(U - V) \leq 0$	$-T(U - V) \leq 0$

On remarque donc que seule la puissance des actions mutuelles de contact est toujours négative (et ne dépend pas du référentiel).

On dit souvent que « les frottements s'opposent au mouvement ». Dans le contexte du glissement, cette idée est juste et est bien traduite par le fait que la puissance des forces de frottements est négative. Cependant, cette phrase peut occulter des situations dans lesquelles le frottement est utile. Dans le cas de la marche à pied ou du mouvement d'une voiture cela le fait qu'il y ait adhérence (donc frottement

statique) qui permet de convertir l'action mécanique en mouvement (voir l'exemple précédent). D'autres situations exploitent aussi le frottement dynamique : polissage, freinage, etc.

Origine microscopique

L'origine microscopique des frottements est très complexe car elle fait appel aux interactions à l'échelle atomique entre les deux solides. Elle a fait ainsi l'objet de nombreux développements scientifiques. Je présente ici un modèle simplifié proposé dans [13] qui permet de comprendre dans les grandes lignes l'origine de la loi d'Amontons-Coulomb.

La première idée de la modélisation est de différencier l'aire de la surface géométrique commune aux deux solides, notée A ci que l'on mesure aisément, et l'aire réelle du contact A_c . Du fait de la rugosité des surfaces considérées, l'aire A_c est nettement plus faible que A . La figure 2.6, représentant une rugosité en graine, aide à l'en convaincre. Le contact entre les deux solides est donc ramené à une série de contacts quasi-punctuels, subissant une contrainte normale σ_N .

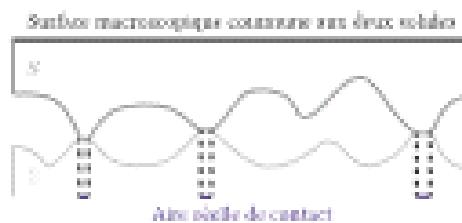


FIGURE 2.6 – L'aire réelle de contact à l'échelle microscopique est nettement plus petite que l'aire géométrique commune aux deux solides à l'échelle macroscopique.

Dans le cas qui nous intéresse la force verticale contrôlant les solides l'un sur l'autre est macroscopique (c'est par exemple le poids du solide supérieur) tandis qu'en a justifié plus haut que la surface réelle de contact est microscopique. La contrainte σ_N est donc très importante de sorte qu'elle doit être absorbée par une multitude de contacts quasi-punctuels qui absorbent chacun au plus une contrainte p une fois dans leur régime plastique de déformation (voir figure 2.7a). Cette contrainte maximale p étant à priori largement inférieure à σ_N , on pourra considérer que tous les contacts ponctuels ont atteint ce régime. L'équilibre macroscopique du solide impose ainsi $N = p \times A_c$, avec $p = N/A_c$.

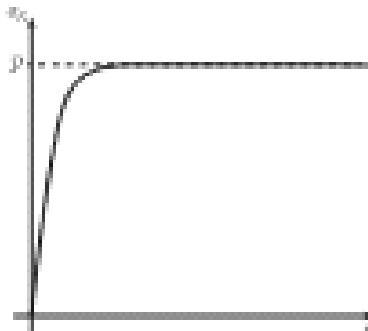
Les micro-contacts étudiés subissent des efforts si importants qu'on peut considérer qu'à ces endroits les deux solides « frottent »². Supposons alors que l'on applique une action T parallèle à la surface de contact (typiquement on tire S sur un plan). Chaque micro-contact subit une contrainte tangentielle $\sigma_T = T/A_c$ sa déformation est donnée schématiquement par la courbe de réponse contrainte/déformation en chauffement présenté figure 2.7b. Contrairement à ce qui se passe en compression, les contacts ne peuvent pas se déformer notablement en chauffement et cèdent dès que la contrainte appliquée devient supérieure à r .

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

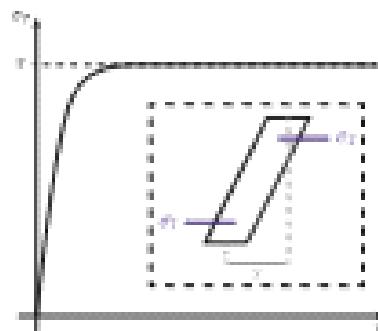
Considérons dans un premier temps que T est relativement faible, c'est-à-dire que $T/A_s \ll r$. Alors la contrainte tangentielle peut se répartir sur tous les micro-contacs en garantissant pour la majorité d'entre eux qu'il n'y a pas rupture. Cette répartition tient jusqu'à ce que T atteigne une valeur seuil de l'ordre de $T = rA_s$, à partir de laquelle les contacts ne peuvent plus absorber la contrainte et sont obligés de rompre. Comme on a justifié précédemment que $A_s = N/p$ on a finalement :

$$\begin{aligned} T &< \frac{r}{p}N \quad \text{lorsqu'il n'y a pas glissement} \\ T &= \frac{r}{p}N \quad \text{lorsqu'il y a glissement.} \end{aligned} \tag{2.29}$$

On retrouve donc un comportement semblable à celui annoncé par les lois de Coulomb. On comprend qu'en effet ces lois ne dépendent pas de la surface du contact puisque quelle que soit la surface disponible au contact c'est la surface réelle A_s qui joue un rôle et celle-ci varie en augmentant plus ou moins pour compenser exactement la contrainte normale. Enfin on voit le coefficient de frottement aux propriétés intrinsèques du solide déformable sans considération sur le contact en tant que tel.



(a) Cas d'un effort en compression.



(b) Cas d'un effort en cisaillement.

FIGURE 2.7 – Profils de réponse des déformations normale (σ_N) et tangentielle (σ_T) d'un solide soumis à des contraintes normale (σ_N) et tangentielle (σ_T).

Un autre modèle utilisant une modélisation en deux de face des surfaces est proposé dans le chapitre 20 de [11.18].

On voit bien que la modélisation théorique des coefficients de frottement ne permet pas d'obtenir des prévisions quantitatives pour f_1 ou f_2 : il faut donc mesurer ces coefficients expérimentalement.

Meilleur des coefficients de frottement

Pour mesurer le coefficient f_s entre un objet donné et une surface S , on procède comme suit : on pose l'objet sur la surface et on incline celle-ci d'un angle α ; on augmente ensuite α jusqu'à avoir début du glissement. La situation est résumée sur la figure 2.8. On note m la masse de l'objet.

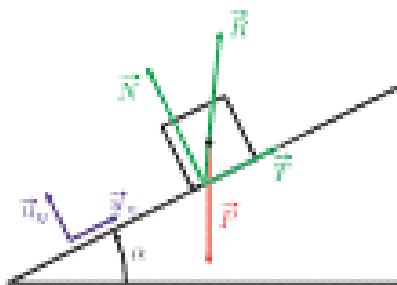


FIGURE 2.8 – Dispositif permettant la mesure du coefficient de frottement statique f_s .

On se place dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen. On suppose que l'objet est immobile : la vitesse de glissement est nulle. Il vient donc :

$$\begin{aligned} N &= mg \cos \alpha = 0, \\ T &= mg \sin \alpha = 0. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Pour avoir non-glissement, il est nécessaire selon la loi d'Amontons-Coulomb d'avoir $T \leq f_s N$. On en déduit :

$$\tan \alpha \leq f_s. \quad (2.31)$$

Ainsi, dès que α dépasse $\arctan(f_s)$, on aura démarage du mouvement : on peut relever la valeur de α correspondante et en déduire f_s .

Lois du trait de schémas impliquant des forces de frottements sur des solides, on fera attention à placer les points d'application des forces de sorte que le moment total soit nul ! Sur la figure 2.8 par exemple, la force de réaction totale $\vec{T} + \vec{N}$ doit passer par le centre de gravité de l'objet.

Un dispositif de mesure de f_s fait l'objet d'un exercice dans la partie III.

2.2 Oscillateur harmonique

Il nous entraîne à présent vers l'étude de systèmes omniprésents en physique : les oscillateurs. Un **oscillateur** est un système physique soumis à deux effets antagonistes le faisant osciller autour d'un état d'équilibre. Une telle compétition entre deux effets peut se retrouver dans de nombreuses applications, ce qui explique l'intérêt de l'étude des oscillateurs. Nous commençons par l'étude d'un oscillateur particulier, l'**oscillateur harmonique**.

2.2.1 Propriétés fondamentales

Un **oscillateur harmonique** est un systèmeупрощенное, lorsqu'il est à une dimension et n'est soumis à aucune excitation, par une fonction $x(t)$ dépendant du temps et vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.32)$$

La quantité ω_0 , positive, est appelée **pulsation propre** et est exprimée en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le SI.

Nous avons déjà rencontré une telle équation au chapitre 1 : dans l'approximation des petits angles, un pendule simple de longueur l est décrit par l'équation (2.12) avec $\omega_0^2 = g/l$. Plus généralement, tout système en petites oscillations autour d'une position d'équilibre x_0 peut être modélisé par un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0^2 = k/(m)$. L'oscillateur harmonique est aussi rencontré en électronique, dans un circuit LC série. Le modèle généralement utilisé en mécanique pour obtenir une équation d'oscillateur harmonique est celui d'une masse glissant sans frottements sur le sol et reliée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 (voir figure 2.9).

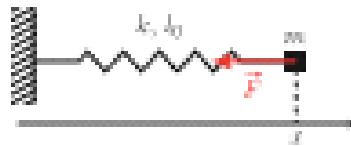


FIGURE 2.9 – Masse reliée à un ressort.

Étudions le mouvement de la masse dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La seule force horizontale est la force de rappel du ressort, qui s'exprime : $\vec{F} = -k(x - l_0)\vec{u}_x$. La seconde loi de Newton projetée sur l'horizontale donne donc :

$$mx\ddot{x} = -k(x - l_0) \quad \text{soit} \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{avec} \quad y = x - l_0. \quad (2.33)$$

On retrouve bien une équation d'oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Pour résoudre l'équation (2.33), on peut procéder de deux façons différentes : on peut écrire

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \text{ou} \quad x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t). \quad (2.34)$$

La première solution peut être développée en $x(t) = x_0[\cos(\omega_0 t) \cos \phi - \sin(\omega_0 t) \sin \phi]$, ce qui signifie que les deux solutions sont équivalentes : on choisira la plus adaptée aux conditions initiales lors d'un exercice.

L'énergie cinétique de l'oscillateur harmonique est :

$$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t). \quad (2.35)$$

Son énergie potentielle est :

$$E_p = \frac{1}{2} kx(t)^2 = \frac{1}{2} kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t). \quad (2.36)$$

On en déduit donc que l'énergie totale de l'oscillateur, notée E_m , est telle que

$$E_m = m\omega_0^2 x_0^2. \quad (2.37)$$

Nous avons obtenu les trois propriétés de l'oscillateur harmonique :

Intuitif	Propriétés de l'oscillateur harmonique
	<ul style="list-style-type: none"> Les oscillations, sinusoidales, persistent indéfiniment dans le temps sans atténuation. La période de l'oscillation est égale à $2\pi/\omega_0$ quelle que soit la condition initiale imposée, en particulier quelle que soit l'amplitude du mouvement. On parle d'harmonie des oscillations. En moyennant sur une période, on a $\langle E_p \rangle = \langle E_d \rangle = \frac{1}{4} m\omega_0^2 x_0^2 = \frac{1}{2} E_m.$ <p>On parle d'équpartition de l'énergie mécanique et on peut voir l'oscillateur harmonique comme le parfait échange entre énergie potentielle et énergie cinétique.</p>

Portrait de phase

Afin de visualiser qualitativement le comportement de l'oscillateur harmonique, on peut chercher à reformuler l'équation (2.35). En effet, en multipliant celle-ci par dx/dt , on fait apparaître la conservation de l'énergie :

$$\frac{dx}{dt} \left(\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x \right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 \right) = 0. \quad (2.38)$$

Pour toute trajectoire $x(t)$, on a donc

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 x^2 = \text{const.}, \quad (2.40)$$

ce qui signifie qu'il existe une constante a telle que

$$\left(\frac{1}{\omega_0} \frac{dx}{dt} \right)^2 + x^2 = a. \quad (2.41)$$

Dans le plan $(x, \dot{x}/\omega_0)$, cette équation est l'équation d'un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon \sqrt{a} (la constante a étant forcément positive). Le tracé des trajectoires dans ce plan est appelé **portrait de phase** : il s'agit d'un

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

outil très puissant pour l'étude des oscillateurs, notamment les oscillateurs non-harmoniques (voir section 3.3). On dispose d'autant de trajectoires qu'il y a de constantes x : on trace quelques-unes d'entre elles sur la figure 2.10.

Introduisons-nous à quelques propriétés des trajectoires dans l'espace des phases.

Conditions initiales Des conditions initiales $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ permettent de repérer un point dans le portrait de phase. Ce point permet de fixer la constante x , ce qui permet en retour de fixer la trajectoire. Ainsi, on retrouve bien le fait que les conditions initiales fixent initialement la trajectoire.

Croisement de trajectoires Deux trajectoires dans l'espace des phases ne peuvent se croiser : si cela était, le cas, les trajectoires auraient les mêmes valeurs de x et \dot{x} en un point. En prenant ce point comme condition initiale, les trajectoires seraient alors identiques car elles auraient les mêmes conditions initiales.

Sens de parcours Une trajectoire dans l'espace des phases possède un sens de parcours, que l'on peut trouver grâce au signe de \dot{x} : dans la partie supérieure, on a $\dot{x} > 0$, donc x doit augmenter, ce qui signifie que l'on parcourt la trajectoire de la gauche vers la droite. Dans la partie inférieure, le sens de parcours est de la droite vers la gauche.

Dans les parties qui suivent, nous aurons l'occasion de tracer plusieurs portraits de phase pour des oscillateurs non-harmoniques. Pour voir davantage d'illustrations de cet outil et approfondir son utilisation, on pourra consulter la référence [14].

Oscillateur harmonique amorti par frottements fluides

Nous cherchons désormais à nous approcher d'une description réaliste d'un oscillateur mécanique. Pour ce faire, nous partons du constat qu'un mouvement périodique d'oscillations libres n'aime pas : tout mouvement est amorti par des frottements. Ajoutons alors à l'équation (3.32) un terme de frottements fluides : on parle d'**oscillateur harmonique amorti** et l'équation associée est

$$\ddot{x} + \frac{4\pi}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.42)$$

avec Q le **facteur de qualité**.

Dans le cas du système masse-ressort décrit dans la figure 2.9, la nouvelle force de frottements s'écrit $\vec{F}_{\text{frot}} = -\lambda \dot{x} \vec{u}_x$, et l'équation du mouvement devient

$$m\ddot{x} = -\lambda \dot{x} - k(x - l_0). \quad (2.43)$$

Dans cette situation, on peut retrouver une équation d'oscillateur amorti (équation (2.42)) de facteur de qualité

$$Q = \frac{\sqrt{k/m}}{\lambda}. \quad (2.44)$$

La limite où les frottements sont négligeables correspond à prendre $\lambda \rightarrow 0$, soit $Q \rightarrow +\infty$.

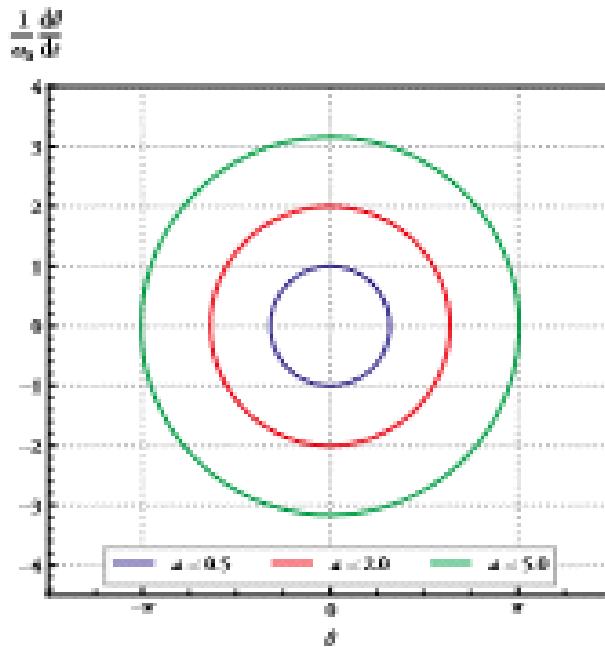


FIGURE 2.10 – Portrait de phase de l'oscillateur harmonique.

L'étude des solutions de l'équation (2.4.1) peut être réalisée, mais ce n'est pas l'objet de ce cours. On procédera plutôt par analogie avec le comportement des circuits d'ondes 2 étudiés en électromagnétique.

Nous avons déjà vu que l'oscillateur harmonique permettait de décrire tout système en oscillation autour d'une position d'équilibre. Nous allons voir désormais que l'oscillateur amorti permet de modéliser tout système avec une perte constante d'énergie. Rappons le cas d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 , et supposons qu'à partir de l'instant $t = 0$, à chaque période, le système perde une fraction constante de son énergie totale :

$$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{2\pi}{Q}. \quad (2.45)$$

On a donc, si $\Delta E \ll E$ (ou de façon équivalente $Q \gg 1$) :

$$E(t + 2\pi/\omega_0) = E(t) = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{dE}{dt} = -\frac{2\pi}{Q} E(t), \quad (2.46)$$

ce qui donne :

$$E(t) = E_0 e^{-\gamma t} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{2\pi}{Q} \ll \omega_0, \quad (2.47)$$

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

où K_0 est l'énergie mécanique initiale de l'oscillateur.

Cherchons désormais quelle modification de la trajectoire $x(t)$ pourrait conduire à une telle évolution de l'énergie $E(t)$. On pose $x(t) = x_0 e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_0 t + \varphi)$. En dérivant cette fonction, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x_0 e^{-\gamma t/2} \omega_0 \left(-\frac{\gamma}{2\omega_0} \cos(\omega_0 t + \varphi) - \sin(\omega_0 t + \varphi) \right), \\ \ddot{x}(t) &= x_0 e^{-\gamma t/2} \omega_0^2 \left(\left(\frac{\gamma}{2\omega_0} \right)^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\gamma}{\omega_0} \sin(\omega_0 t + \varphi) - \cos(\omega_0 t + \varphi) \right).\end{aligned}\quad (2.48)$$

Il vient donc, à l'ordre le plus bas en γ/ω_0 :

$$E(t) = \frac{1}{2} m x^2 + \frac{1}{2} k x^2 = e^{-\gamma t} m \omega_0^2 x_0^2 = K_0 e^{-\gamma t}, \quad (2.49)$$

ainsi que

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = x_0 e^{-\gamma t/2} \omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) = -\gamma \dot{x}. \quad (2.50)$$

On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique : on voit donc que celle-ci peut décrire de façon générale tout processus périodique avec une loss puré d'énergie !

2.2.2 Oscillateur harmonique amorti par frottements solides

L'oscillateur étudié dans la section précédente était amorti par un terme de frottements fluides. Or, comme nous l'avons vu dans la section 2.1, il existe un autre type de frottements, qualitativement différent : les frottements solides. Un oscillateur amorti par frottements solides peut modéliser par exemple l'aiguille d'une balance, qui oscille avant d'atteindre sa position finale. Voyons en quoi la différence de force de frottements entraîne une différence de comportement lors des oscillations.

L'étude d'un tel système est un grand classique des frottements solides. Elle permet d'illustrer efficacement la méthode à suivre lors de la résolution d'un problème mettant en jeu de type de forces (hypothèse initiale sur le glissement, élaboration du mouvement, vérification de l'hypothèse) : il faut bien la maîtriser !

Bilan des forces

On considère le système suivant : une masse m assimilée à un point matériel est attachée à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 (voir figure 2.11). On note x l'abscisse de la masse. S'appliquent sur cette masse :

- * Son poids \vec{P} ,
- * La réaction normale du support \vec{N} ,
- * La réaction tangentielle du support \vec{T} ,
- * La force exercée par le ressort \vec{F}_d .

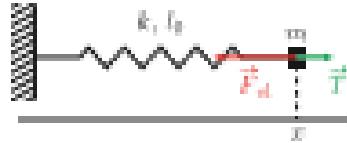


FIGURE 2.11 – Schéma représentatif d'un oscillateur harmonique amorti par frottements solides.

Le mouvement étant unidimensionnel, on doit avoir $\vec{F} = -\vec{N}$.

On note $mg = \|\vec{F}\|$, $\vec{T} = T\vec{u}_x$. De plus, on a $\vec{F}_d = -k(x - l_0) = -kX$ au point $X = x - l_0$. La vitesse de glissement du support par rapport au sol est $\vec{v}_g = \dot{x}\vec{u}_x = \dot{X}\vec{u}_x$. Notons f le coefficient de frottement de la masse sur le sol (on ne fait pas de différence entre les régimes dynamique et statique).

Conditions de démarrage

Cherchons la condition de démarrage du système : on suppose que initialement, la vitesse de glissement \vec{v}_g est nulle. Pour démarrer, on doit avoir une accélération non nulle. Par le principe fondamental de la dynamique, on a en général

$$m\ddot{x} = m\ddot{X} = T - kX. \quad (2.51)$$

Or, pour se pas avoir une mise en mouvement, on doit avoir $\ddot{x} = 0$. La première loi de Coulomb impose par ailleurs $|T| \leq fN = fmg$. La condition de non mise en mouvement devient donc

$$T = kX \quad \text{et} \quad k|X| \leq fmg. \quad (2.52)$$

Distinction des cas

On distingue donc deux cas lorsque $\vec{v}_g = \vec{0}$:

1. Si $|X| > fmg/k$, alors le mouvement continue,
2. Si $|X| < fmg/k$ alors le mouvement s'arrête et ne pourra pas reprendre sans intervention extérieure.

Pour finir, on note $a = fmg/k$. Étudions maintenant le mouvement.

Hypothèse sur le début du mouvement

Supposons sans perte de généralité que l'on commence dans une phase où $X > a$, avec une vitesse nulle. L'équation du mouvement est alors

$$m\ddot{X} = T - kX, \quad (2.53)$$

et \vec{T} est parallèle et opposé à \vec{v}_g . Comme vu précédemment, on commence bien par une phase dynamique.

On fait alors l'hypothèse raisonnée que la masse se déplace vers la gauche : $\dot{x} < 0$. On peut alors écrire $T = +fmg$ selon la seconde loi de Coulomb, et l'équation devient

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = f_g \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.54)$$

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

La solution est donc, avec les conditions initiales $X(0) = X_0$ et $\dot{X}(0) = 0$:

$$X(t) = (X_0 - x) \cos(\omega_0 t) + x. \quad (2.55)$$

On a un mouvement sinusoidal centré en $+x$.

Si l'on avait fait l'hypothèse que la masse se déplaçait vers la droite, on aurait une force $F = -f mg$ et l'équation aurait pour solution $X(t) = (X_0 + x) \cos(\omega_0 t) - x$. Cette solution décrit une fonction X décroissante, ce qui signifie que la masse se déplace en réalité vers la gauche : cela est en désaccord avec l'hypothèse initiale et on peut donc la rejeter.

Vérification de l'hypothèse dès que $\tau_g^2 = \frac{\pi}{2}$

Cette phase du mouvement se poursuit jusqu'à l'instant t_1 tel que que la vitesse de placement \dot{X} devient, c'est-à-dire pour $\omega_0 t_1 = \pi$. On a alors $X = 2x - X_0$. On doit alors vérifier si le mouvement peut bien continuer. Deux cas se posent devant à nous :

1. Si $|2x - X_0| > x$, ou $X_0 > 3x$, le mouvement continue dans l'autre sens,
2. Sinon le mouvement s'arrête.

On s'intéresse au cas où le mouvement continue : on a alors une phase avec $\dot{X} > 0$ donc $F = -f mg$ et l'équation est

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = -f g. \quad (2.56)$$

La solution est alors, avec $X(t_1) = 2x - X_0$ et $\dot{X}(t_1) = 0$:

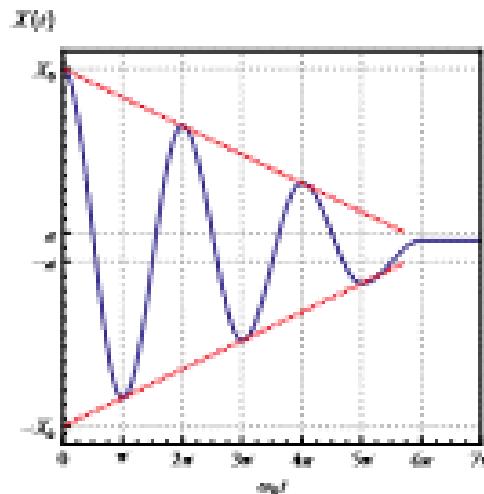
$$X(t) = -(X_0 - 3x) \cos(\omega_0(t - t_1)) - x \quad \text{soit} \quad X(t) = (X_0 - 3x) \cos(\omega_0 t) - x. \quad (2.57)$$

On a un mouvement sinusoidal centré en $-x$. Cette phase dure jusqu'à lorsque $t = t_2 = 2t_1$. La position est alors $X = X_0 - 4x$: on peut répéter le raisonnement de la première partie en remplaçant X_0 par $X_0 - 4x$. On en déduit le théorème suivant.

Théorème Mouvement d'un oscillateur amorti par frottements solides

- Le mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 amorti par des frottements solides avec un coefficient f est une succession de branches de cosinus de pulsation ω_0 centrés successivement sur $+x$ (voir figure 2.12).
- Les amplitudes décroissent de façon arithmétique avec une raison $2x$.
- La position d'arrêt de l'oscillateur se trouve dans l'intervalle $[-x, x]$ et dépend de la position initiale X_0 .

Citez l'un des principaux intérêts de ce modèle : les signaux des appareils analogiques. Celles-ci peuvent être modélisées en première approche par des oscillateurs angulaires (pendules). Cependant,



elles sont soumises à de nombreuses forces de frottements au niveau de la liaison pivot qui les fait tourner. Les frottements solides notamment sont à diminuer le plus possible, car *la position d'équilibre n'est pas toujours la même selon la position initiale!*

Portrait de phase

Pour terminer cette étude, on se propose de représenter le portrait de phase de l'oscillateur amorti par frottements solides. On a établi les équations du mouvement :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = fg \quad \text{lorsque } \dot{x} < 0 \quad (2.58)$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -fg \quad \text{lorsque } \dot{x} > 0. \quad (2.59)$$

Les trajectoires dans le plan de phase sont des arcs de cercles successivement centrés sur f/g dans la partie $\dot{x} < 0$ (demi-espace du bas) et sur $-f/g$ lorsque $\dot{x} > 0$ (demi-espace du haut). Cette succession continue jusqu'à ce que l'oscillateur atteigne la plage d'équilibre et s'y arrête. Le portrait de phase est représenté sur la figure 2.13.

2.3 Oscillateurs non-linéaires : exemple du pendule simple

L'oscillateur harmonique ainsi que l'oscillateur harmonique amorti sont des oscillateurs linéaires. Cependant, même dans les problèmes physiques simples, les équations obtenues sont souvent non linéaires : le cas

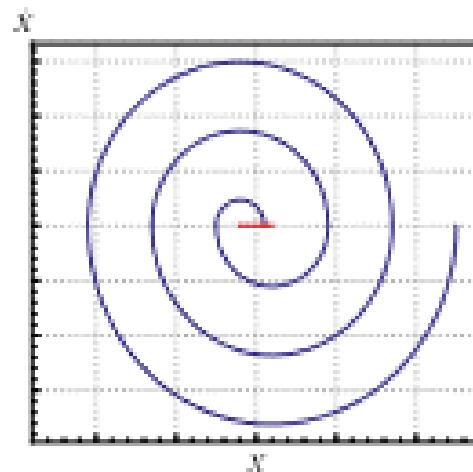


FIGURE 2.13 – Portrait de phase de l'oscillateur amorti par frottement visqueux. La zone d'arche est représentée en rouge.

du pendule simple (section 1.2) en est une illustration. Dans cette section, nous utiliserons l'exemple de ce système pour obtenir des propriétés générales des oscillateurs non-linéaires.

L'équation du mouvement pour le pendule simple est :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (2.60)$$

Cette équation n'est pas linéaire, à cause du terme en sinus ; voyons ce que l'effet de non-linéarité modifie dans le comportement d'un oscillateur à travers cet exemple.

2.3.1 Linéarisation

En général, on traite l'équation (2.60) au premier ordre en θ . On suppose $\theta \ll 2\pi$, ce qui permet d'écrire $\sin \theta \approx \theta$. On retrouve alors l'équation

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (2.61)$$

caractéristique d'un oscillateur harmonique. Elle est linéaire (par construction) et on la résout plus haut. Cependant, la linéarisation de l'équation induit forcément des erreurs dès que θ devient trop grand par rapport à 2π et, pour améliorer la modélisation, on est amené à réaliser un développement limité du sinus à un ordre supérieur.

2.3.2 Solutions d'ordre supérieur

Réalisons un développement perturbatif plus complet. Il nous faut pour cela identifier un petit paramètre en puissances duquel nous pourrons développer la solution. Nous avons vu précédemment que $\delta \ll 2\pi$ de sorte que δ pourrait être un bon candidat mais il varie au cours du temps et n'est donc pas à proprement parler un paramètre. On lui préférera l'angle initial θ_0 , constant et faible lui aussi, que l'on notera dorénavant ε afin d'insister sur son caractère infinitésimal. On prendra ainsi pour conditions initiales (sans perte de généralité)

$$\theta(t=0) = \varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=0} = 0. \quad (2.62)$$

On cherche alors une solution sous la forme

$$\theta(t) = \varepsilon \delta_1(t) + \varepsilon^2 \delta_2(t) + \dots \quad (2.63)$$

Les conditions initiales s'appliquent toujours à la fonction $\theta(t)$. Ainsi, on a

$$\varepsilon \delta_1(0) + \varepsilon^2 \delta_2(0) + \dots = \varepsilon. \quad (2.64)$$

En identifiant les puissances de ε , on trouve les conditions correspondantes sur les δ_i :

$$\delta_1(0) = 1 \quad \text{et} \quad \delta_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad i > 1. \quad (2.65)$$

De même, on trouve que pour tout i on a $d\delta_i/dt|_{t=0} = 0$.

L'équation (2.60) devient, avec cette forme de solution et arrêtant à l'ordre 4 :

$$\varepsilon \frac{d^2\theta}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \varepsilon^3 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \sin(\varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \varepsilon^3 \delta_3) + O(\varepsilon^4) = 0. \quad (2.66)$$

On doit développer le sinus en puissances de ε :

$$\sin(\varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \varepsilon^3 \delta_3) = \varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \varepsilon^3 \delta_3 - \frac{1}{2} (\varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \varepsilon^3 \delta_3)^2 + \dots \quad (2.67)$$

En ne conservant que les termes d'ordre au plus 3, on obtient pour finir

$$\varepsilon \frac{d^2\theta}{dt^2} + \varepsilon^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \varepsilon^3 \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \left(\varepsilon \delta_1 + \varepsilon^2 \delta_2 + \varepsilon^3 \left(-\frac{1}{6} \delta_1^2 + \delta_3 \right) \right) + O(\varepsilon^4) = 0. \quad (2.68)$$

On a donc, en identifiant les équations ordre par ordre et en faisant appel aux conditions initiales de l'équation (2.62) :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \delta_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_1(t) = \cos(\omega_0 t),$$

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

$$\begin{aligned}\frac{d^2\delta_2}{dt^2} + \omega_0^2\delta_2 &= 0 \quad \Rightarrow \delta_2(t) = 0, \\ \frac{d^2\delta_3}{dt^2} + \omega_0^2\delta_3 - \frac{1}{\epsilon}\omega_0^2\delta_1^2 &= \frac{\omega_0^2}{24} \cos(3\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2}{8} \cos(\omega_0 t).\end{aligned}\quad (2.69)$$

On observe que la dernière équation correspond à un oscillateur harmonique à la pulsation ω_0 , forcé à la pulsation ω_0 . Ce système est instable : ainsi, δ_3 diverge lorsque t augmente³, ce qui fait que le développement perturbatif n'est plus valable au bout d'un certain temps.

2.3.3 Méthode de Poincaré-Lindstedt

Afin d'éviter les divergences, on doit réaliser un développement perturbatif plus poussé. On se propose alors de faire un double développement perturbatif sur δ , toujours, mais aussi sur ω :

$$\begin{aligned}\tau &= \omega t \quad \text{avec} \quad \omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \dots, \\ \delta(\tau) &= \delta_1(\tau) + \epsilon^2\delta_2(\tau) + \dots.\end{aligned}\quad (2.71)$$

Un tel développement permet de rendre explicite une modification de la fréquence avec l'amplitude initiale. L'équation (2.69) devient alors

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{d^2\delta}{d\tau^2} + \sin\theta = 0. \quad (2.72)$$

En injectant l'équation (2.71), on obtient

$$\begin{aligned}\left(1 + 2\frac{\partial\omega}{\partial\epsilon} + \left(\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 + 2\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)\epsilon^2 + O(\epsilon^3)\right) \frac{d^2}{d\tau^2} &\left(\epsilon\delta_1(\tau) + \epsilon^2\delta_2(\tau) + \epsilon^3\delta_3(\tau) + O(\epsilon^4)\right) \\ &+ \left(\epsilon\delta_1'(\tau) + \epsilon^2\delta_2'(\tau) + \epsilon^3\left(\delta_3'(\tau) - \frac{1}{\epsilon}\delta_1^2(\tau)\right) + O(\epsilon^4)\right) = 0.\end{aligned}\quad (2.73)$$

À l'ordre 1 en ϵ , on trouve

$$\frac{d^2\delta_1}{d\tau^2} + \delta_1 = 0. \quad (2.74)$$

On en déduit que l'on a $\delta_1(\tau) = \cos(\tau)$. À l'ordre 2, on obtient

$$\frac{d^2\delta_2}{d\tau^2} + \delta_2 = -2\frac{\omega_1}{\omega_0} \frac{d^2\delta_1}{d\tau^2} - 2\frac{\omega_1}{\omega_0} \cos(\tau). \quad (2.75)$$

³ On peut montrer que la solution pour δ_3 est

$$\delta_3(t) = \frac{1}{32} \sin(\omega_0 t) (\delta_{30} e^{i\omega_0 t} + \sin(2\omega_0 t)). \quad (2.76)$$

Afin d'éviter l'instabilité décrite au paragraphe précédent, on doit annuler le terme de forcing, en prenant $\omega_0 = 0$. On a alors $\theta_2 = 0$ en imposant les conditions initiales. Enfin, l'équation à l'ordre 3 donne :

$$\frac{d^2\theta_3}{dt^2} + \theta_3 = -2\frac{\omega_0}{\omega_0} \frac{d^2\theta_3}{dt^2} + \frac{1}{6}\theta_1^3 \quad (2.76)$$

$$= \frac{1}{24} \cos(3t) + \frac{1}{8} \left(1 + 16\frac{\omega_0}{\omega_0}\right) \cos(t), \quad (2.77)$$

De nouveau, pour annuler le terme de forcing, on doit avoir $\omega_0 = -\omega_0/16$. On en déduit alors

$$\omega = \omega_0 \left(1 - \frac{t^2}{16}\right). \quad (2.78)$$

On peut faire apparaître la période T dans la formule précédente : on a $T = 2\pi/\omega$ et on obtient la formule de Borda :

$$T = T_0 \left(1 + \frac{t^2}{16}\right), \quad (2.79)$$

où $T_0 = 2\pi\sqrt{I/g}$. On peut alors résoudre l'équation pour θ_3 , et on obtient⁴

$$\theta_3(t) = t \cos\left(\omega_0 \left(1 - \frac{t^2}{16}\right)t\right) + \frac{t^3}{192} (\cos(\omega_0 t) - \cos(3\omega_0 t)). \quad (2.80)$$

C'est justement le fait que la fréquence varie qui faisait échouer la méthode précédente. En général, dès qu'une méthode perturbative fait apparaître un forcing rendant le système instable, on peut se demander qu'un des paramètres du système doit aussi être développé de façon perturbative, c'est ce qui amène à la méthode de Poincaré-Lindstedt.

Les propriétés obtenues pour le pendule simple sont universelles et sont caractéristiques des systèmes non linéaires.

Informations

Caractéristiques des oscillateurs non linéaires

La présence de non-linéarités dans le mouvement d'un oscillateur de pulsation donnée entraîne trois effets :

- * une modification de la fréquence du mouvement;
- * une dépendance des caractéristiques en les conditions initiales;
- * une apparition d'harmoniques aux multiples de la fréquence du mouvement.

Ces trois propriétés sont la signature d'un comportement non-linéaire, et se retrouvent dans des systèmes extrêmement variés.

⁴ La pulsation est ω_0 dans les termes d'ordre t^2 car toute correction mène dans la formule de Borda à introduire des termes d'ordre supérieur.

2.3.4 Période d'oscillation non perturbative

Il est intéressant, pour écrire le développement perturbatif précédent, d'établir des méthodes de calcul allégées qui mènent à un résultat partiel mais souvent suffisant. Dans le cas du pendule simple par exemple, on peut trouver l'expression de la période d'oscillation pour toute position initiale. Pour ce faire, on multiplie l'équation (2.60) par $d\theta/dt$: on obtient la conservation de l'énergie (à un facteur m près)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \omega_0^2 \cos \theta \right) = 0. \quad (2.81)$$

Supposons qu'on lâche le pendule avec un angle θ_0 ($\theta_0 < \pi$, de façon à faire moins d'un tour complet), sans vitesse initiale. Par intégration, on a donc

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = 2\omega_0^2 (\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (2.82)$$

On se place sur le premier quart de période du mouvement : θ évolue de θ_0 à 0 tandis que t évolue de 0 à $T/4$. On peut prendre la racine carrée de l'équation précédente et on obtient

$$\frac{dt}{dt} = -\sqrt{2\omega_0/\cos \theta - \cos \theta_0} \quad \text{soit} \quad dt = \frac{-d\theta}{\sqrt{2\omega_0/\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (2.83)$$

Par intégration sur le quart de période, il vient donc

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}. \quad (2.84)$$

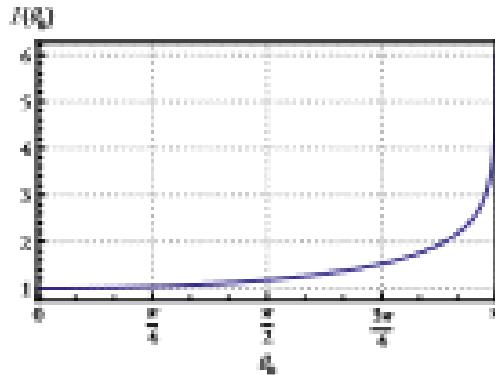
L'intégrale dans le membre de droite n'a pas d'expression simple à partir de fonctions de base : il s'agit d'une intégrale elliptique. On peut cependant l'évaluer numériquement. On la note $\text{erf}(\theta_0)/\sqrt{2}$; la fonction I est tracée sur la figure 2.14, et on a

$$T = T_0 I(\theta_0) \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2.85)$$

On peut donc trouver numériquement la période des oscillations pour toute amplitude de départ, ce qui est souvent satisfaisant en pratique. Par ailleurs, une étude asymptotique montre que la fonction I écrit

$$I(\theta_0) = 1 + \frac{1}{16} \theta_0^2 + \mathcal{O}(\theta_0^4). \quad (2.86)$$

On a donc $T = T_0 (1 + \theta_0^2/16 + \mathcal{O}(\theta_0^4))$ et on retrouve la formule de Borda (2.79). En revanche, on n'obtient pas la solution complète de l'équation à l'ordre 3.

FIGURE 2.14 – Tracé de la fonction I pour $\dot{\theta}_0$ entre 0 et π .

2.3.5 Étude qualitative du mouvement complet

Dans cette partie sur le pendule non-linéaire nous avons d'abord présenté le calcul complet pour les petites oscillations, difficile, qui mène à la solution exacte à l'ordre 3. Nous avons ensuite présenté une solution numérique partielle du problème permettant de retrouver la formule de Borda. Dans cette section nous allons voir comment le portrait de phase de l'oscillateur permet de comprendre le comportement du système sans avoir à résoudre les équations du mouvement.

Toutes les forces en jeu étant conservatives, l'énergie mécanique $E = 1/2 \cdot (\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)^2 - \omega_0^2 \cos\theta$ est constante au cours du mouvement. La donnée de conditions initiales permet d'évaluer E , et le mouvement sera tel que

$$\left(\frac{1}{\omega_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \right)^2 = 2 \cos(\theta) = C \quad \text{avec} \quad C = \text{const.} \quad (2.87)$$

Les trajectoires dans le portrait de phase dépendent donc de la valeur de la constante C : on en trace quelques unes sur la figure 2.15.

Ce portrait de phare permet de comprendre qualitativement les différents types de mouvements possibles. Pour ce faire, remarquons que l'on doit toujours avoir $-2 \cos\theta < C$, soit $\cos\theta > -C/2$. Ainsi, on différencie les mouvements selon la valeur de C :

$-2 < C < 2$: Dans ce cas, il existe deux valeurs de θ telles que $-2 \cos\theta = C$. On note ces valeurs $\pm \theta_C$. Lorsque $\theta = \pm \theta_C$, on a donc $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$. Ainsi, on a un mouvement oscillatoire d'amplitude $2\theta_C$; la période a été calculée dans la partie précédente. Sur le portrait de phase de la figure 2.15, cela se traduit par une trajectoire qui boucle sur elle-même : en partant d'un point donné, on y revient toujours en un temps fini. Ceci est valable modulo 2π : si on décale θ de 2π , le tracé de la trajectoire est inchangé.

$C > 2$: On a plus de valeur de θ telle que $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 0$. Ainsi, la vitesse ne s'annule pas, et θ croît (ou décroît, selon la trajectoire) indéfiniment. Le mouvement est une *rotation*. Le même choix de C amène

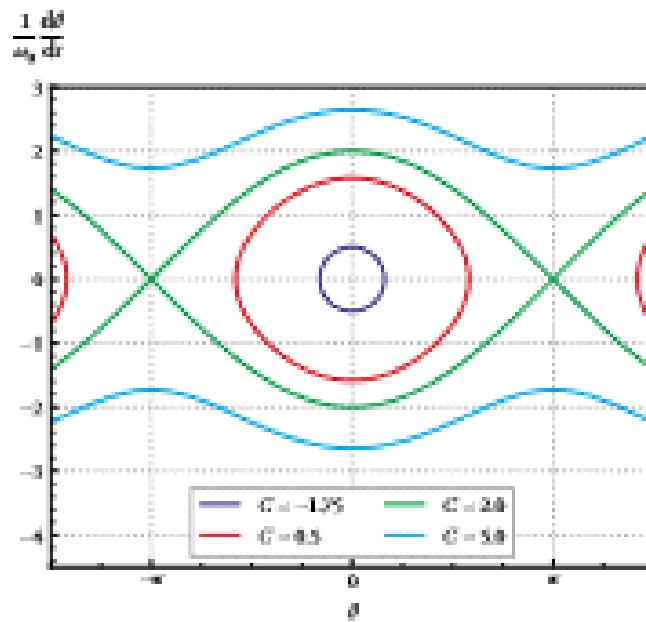


FIGURE 2.25 – Trajet du portrait de phase d'un pendule pesant pour différentes valeurs de C .

d'ailleurs à deux trajectoires, selon le sens de rotation.

$C = 2$. Il s'agit d'une valeur critique, pour laquelle les deux comportements précédents se rejoignent. Le pendule prend un temps infiniment long à atteindre $d\theta/dt = 0$.

Lorsque C est proche de -2 (avec toujours $C > 2$), on peut poursuivre l'étude plus loin. Posons $C = -2 + \epsilon^2$ avec $\epsilon > 0$. On a alors

$$-2 \cos \theta_0 = -2 + \epsilon^2 \quad \text{avec} \quad \theta_0 = \arccos\left(1 - \frac{\epsilon^2}{2}\right) = \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (2.88)$$

Ainsi, les oscillations sont d'ordre ϵ , ce qui permet de faire l'approximation des petites oscillations. La trajectoire est donc telle que

$$\left(\frac{1}{\omega_0} \frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = -2 + \epsilon^2, \quad (2.89)$$

soit

$$\left(\frac{1}{\omega_0} \frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \theta^2 = \epsilon^2. \quad (2.90)$$

Cette équation est la représentation d'un cercle : on a donc des trajectoires circulaires dans le portrait de phase dès lors que les oscillations sont de faible amplitude ; on retrouve le comportement en oscillateur

harmonique du pendule simple aux petits angles. À mesure que C augmente, les trajectoires se déforment à cause de l'apparition de non-linéarités jusqu'à changer qualitativement dès que $C > 2$. On en déduit une autre propriété fondamentale des non-linéarités : celles-ci entraînent l'apparition de comportements qualitativement différents.

Ainsi, l'étude du portrait de phase permet de comprendre les différents comportements de l'oscillateur non-linéaire. Il est donc pertinent, pour un oscillateur donné, de chercher à tracer son portrait de phase afin de caractériser son comportement.

2.3.6 Pour aller plus loin

Le pendule simple n'est pas le seul exemple d'oscillateur non linéaire utile à l'application. On peut citer entre autres l'oscillateur de van der Pol ou l'oscillateur à pont de Wien. Ces oscillateurs seront souvent réalisés dans des montages électroniques, mais la méthode présentée dans cette partie reste valable : pour comprendre le comportement qualitatif, un *tracé du portrait de phase*, et pour comprendre le comportement quantitatif, un *développement perturbatif*.

2.4 Mouvement de particules chargées

Pour clore ce chapitre, passons à l'étude d'un autre type de système usuel en mécanique, dont la dynamique présente de nombreux nouveaux par rapport à ce qui a été étudié jusqu'ici : le mouvement des particules chargées dans un champ électromagnétique. La présence d'un champ magnétique entraîne l'apparition d'un nouveau terme dans la force subie par ces particules, et ce nouveau terme permet l'existence de nouvelles formes qualitatives de trajectoires.

2.4.1 Force de Lorentz

Soit une particule chargée de masse m et de charge q qui l'on étudie dans un référentiel R , et \vec{v} sa vitesse dans ce référentiel. La force qu'elle subit dans un champ électrique \vec{E} et/ou magnétique \vec{B} est la **force de Lorentz** :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E}(M, t) + \vec{v} \wedge \vec{B}(M, t) \right). \quad (2.31)$$

que l'on peut décomposer en une partie électrique $\vec{F}_E = q \vec{E}$ et une partie magnétique $\vec{F}_{mg} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$, dont on rappelle les propriétés plus bas.

Dans les équations du mouvement, la charge n'apparaît que via le rapport q/m (parfois appelé *charge spécifique*) : c'est uniquement ce rapport qui pourra être déterminé via des expériences de mécanique.

Pour des particules à l'échelle atomique (électrons, protons, ions chargés), la force de Lorentz est largement dominante devant la force gravitationnelle.

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

Prenons des valeurs typiques $E \sim 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, $B \sim 0,1 \text{ T}$, charge élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ et vitesse $v \sim c/100 = 3 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (cesse devrait sans nécessiter de prendre en compte des corrections relatives). Considérons à titre d'exemple un proton de masse $m_p \approx 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

On compare la force de Lorentz et le poids :

$$\begin{aligned}\frac{|m_p \vec{v}|}{|q \vec{E}|} &= \frac{10^{-26}}{10^{-17}} = 10^{-9} \\ \frac{|m_p \vec{v}|}{|q \vec{v} \wedge \vec{B}|} &= \frac{10^{-26}}{10^{-14}} = 10^{-12}\end{aligned}\quad (2.22)$$

Le poids est donc bien complètement négligeable devant la force de Lorentz. On peut de plus noter que la norme de la force magnétique est facilement grande devant la norme de la force électrique pour des vitesses élevées.

La force de Lorentz électrique travaille, et pour un champ électrostatique $\vec{E} = -\nabla V$ (V est le potentiel électrostatique) cette force est conservative :

$$dW_E = q \vec{E} \cdot d\vec{l} = -q \nabla V \cdot d\vec{l} = -d(qV) \quad (2.23)$$

elle dérive donc de l'**énergie potentielle électrostatique** $E_{pot} = qV$.

À l'inverse, le travail de la force de Lorentz magnétique est nul. En effet, lors d'un déplacement $d\vec{l} = \vec{v} dt$, le travail magnétique s'écrit

$$dW_{mag} = q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0 \quad (2.24)$$

par propriété du produit vectoriel car $\vec{v} \perp (\vec{v} \wedge \vec{B})$.

Tutoriel

Actions d'un champ électrique/magnétique

- * Un champ électrique peut accélérer ou ralentir une particule (donc modifier $\|\vec{v}\|$), mais aussi dévier celle-ci (donc modifier la direction de \vec{v}).
- * Un champ magnétique peut uniquement dévier une particule, donc courber sa trajectoire.

Un champ magnétique peut accélérer ou ralentir une particule de matière « indirecte », par l'intermédiaire d'un champ électrique. Par exemple, un champ $\vec{B}(x)$ variable est source d'un champ \vec{E} (via l'équation de Maxwell-Faraday), qui peut alors remplir ce rôle d'accélérateur.

2.4.2 Champ électrostatique uniforme

Supposons que régne uniquement un champ électrique \vec{E}_0 stationnaire et uniforme. Le PFD écrit alors dans \mathcal{R} s'écrit alors :

$$m\vec{J} = q\vec{E}_0 \quad \text{soit} \quad \vec{J} = \frac{q}{m}\vec{E}_0. \quad (2.95)$$

Il s'agit d'un mouvement à *vitesse accélérations constante*, complètement analogue à une chute libre. La trajectoire est donc parabolique dans le cas général, et la résolution des équations du mouvement est un calcul très classique.

Comme indiqué précédemment, la force de Lorentz décrite ici du potentiel $E_{\text{pot}} = qV$ (où $\vec{E}_0 = -\nabla V$). La conservation de l'énergie mécanique s'écrit donc :

$$\frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{const}, \quad (2.96)$$

et on peut facilement écrire la variation d'énergie cinétique à la tension appliquée (c'est-à-dire à la différence de potentiel). Si par exemple le potentiel passe de V_1 à V_2 , on a :

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - v_1^2 = -q(V_2 - V_1). \quad (2.97)$$

2.4.3 Champ magnétostatique uniforme

On considère désormais le mouvement dans un champ magnétostatique \vec{B} stationnaire et uniforme; on choisit alors le repère $(Oxyz)$ afin que $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$, et que les conditions initiales s'écrivent⁵ $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ et $v_{0x} = 0$. On note $v_{0y} = v_0$ et $v_{0z} = v_1$.

La force de Lorentz magnétique ne travaille pas, on démontre par application du TEC que $v^2 = \text{const} = v_1^2 + v_0^2$. En outre, le PFD s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge B_0 \vec{u}_z. \quad (2.98)$$

Sur $(Oxyz)$, on a :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{qB_0}{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.99)$$

On définit alors la **pulsion cyclotron**⁶ par :

$$u_c = \frac{|q|B_0}{m} \quad (2.100)$$

5. Ces sont des C.I. générales; on peut toujours déplacer l'origine du repère pour prendre $V_0 = 0$ (car \vec{B} est uniforme), et on définit \vec{u}_z comme la direction de la vitesse initiale dans le plan orthogonal à \vec{B} .

6. On la définit parfois de manière algébrique $u_c = qB_0/m$, mais nous ne faisons pas ce choix ici afin que la pulsion reste une *quantité physique positive*.

CHAPITRE 2. APPLICATIONS : FROTTEMENTS, OSCILLATEURS, PARTICULES CHARGÉES

et les équations du mouvement aboutissent donc :

$$\begin{cases} \ddot{v}_x = \pm \omega_0 v_y \\ \ddot{v}_y = -\omega_0 v_x \\ \ddot{v}_z = 0 \end{cases} \quad (2.101)$$

où les signes supérieurs correspondent à une charge positive ($q > 0$), et inférieurs à une charge négative.

Le mouvement vertical (dans la direction perpendiculaire au champ) est très simple : la vitesse v_z est constante, égale à v_0 , d'où

$$z(t) = v_0 t. \quad (2.102)$$

En combinant ces résultats à la conservation de l'énergie cinétique, on voit qu'on a aussi conservation de $v_x^2 + v_y^2 = v_0^2$.

Par ailleurs, dans le plan (Oxy) , les équations sont analogues (l'équation sur v_x dépend de v_y , et vice-versa). Afin de résoudre un tel système, on pose la variable complexe $w = v_x + i v_y$, et on soumet les équations sur v_x et v_y , après multiplication de cette dernière par i :

$$\dot{w} = \mp \omega_0 w \quad \text{de solution} \quad w(t) = w_0 e^{\mp i \omega_0 t}, \quad (2.103)$$

avec $w_0 = v_{x,0} + i v_{y,0} = v_0$.

On aboutit à une équation d'ordre 1, beaucoup plus facile à résoudre. On obtient alors v_x et v_y par :

$$v_x(t) = \Re(w) \quad , \quad v_y(t) = \Im(w), \quad (2.104)$$

ce qui donne

$$\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos(\omega_0 t) \\ v_y(t) = \mp v_0 \sin(\omega_0 t) \end{cases} \quad (2.105)$$

Une intégration supplémentaire fournit la position :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \\ y(t) = \pm \frac{v_0}{\omega_0} [\cos(\omega_0 t) - 1] \end{cases} \quad (2.106)$$

Cette méthode fonctionne car les équations initiales sont *linéaires* (d'où la validité du principe de superposition) et il suffit de résoudre (de sorte qu'on peut identifier partie réelle et partie imaginaire à la fin).

Trajectoire Faisant donc la solution (2.106), on remarque la propriété suivante :

$$x(t)^2 + \left(y(t) \pm \frac{v_0}{\omega_r}\right)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_r}\right)^2. \quad (2.107)$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle de rayon (*dit rayon de Larmor*) :

$$R = \frac{v_0}{\omega_r} = \frac{mv_0}{|q|B_0}. \quad (2.108)$$

et de centre de coordonnées $(0, \mp v_0/\omega_r)$. Rappelons ici que le signe supérieur (resp. inférieur) correspond à une charge q positive (resp. négative). Le sens de parcours de ce cercle dépend aussi du signe de q , comme on peut le voir explicitement dans la solution (2.106). Il faut néanmoins être capable de le retrouver graphiquement, comme dans la figure 2.16 ci-dessous :

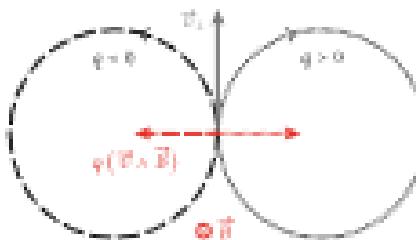


FIGURE 2.16 – Trajectoire circulaire dans le plan orthogonal au champ magnétostatique. Le sens de parcours résulte en résultant la force de Lorentz, qui doit être dirigée vers le centre du cercle.

En combinant ce résultat au mouvement vertical (équation (2.102)), on voit que la trajectoire est celle d'une *bille de rayon R et de pas*⁷

$$p = q \frac{2\pi}{\omega_r} = 2\pi \frac{mv_0}{|q|B_0}. \quad (2.109)$$

Quelques applications

Spectromètre de masse Un spectromètre de masse a pour objectif de séparer des particules selon leur valeur du rapport q/m et peut, par exemple, fonctionner de la manière suivante : après une accélération par une différence de potentiel U , des particules de même charge mais de masses différentes, pénètrent dans une où règne un champ uniforme \vec{B} avec des vitesses différentes ; elles décrivent alors des trajectoires circulaires de rayons différents, ce qui permet de les séparer.

⁷ Il s'agit de la distance verticale parcourue pendant une rotation dans le plan (Oxy), donc pendant une durée $T = 2\pi/\omega_r$.

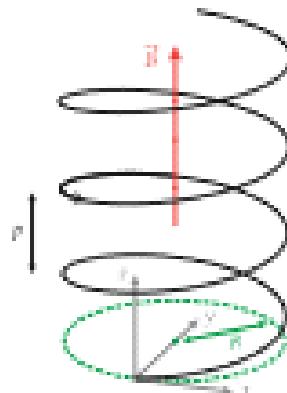


FIGURE 2.57 – Trajectoire hélicoïdale (particule de charge négative).

Expérience de Thomson Cette expérience historique de 1897 a pour objectif la mesure de e/m_e à partir de faisceaux d'électrons de vitesse \vec{v}_0 . Elle a lieu en deux étapes :

- les électrons sont déviés par un champ \vec{E} perpendiculaire à \vec{v}_0 , et on mesure l'angle de déviation δ ;
- cette déviation est ensuite annulée en ajoutant un champ magnétique \vec{B} perpendiculaire à \vec{E} tel que $eE = mv_0B$: la force de Lorentz est alors nulle, et les électrons ont une trajectoire rectiligne. La connaissance de E et B permet de déterminer v_0 , puis de renoncer à e/m_e via l'angle de déviation δ .

Cyclotron Un **cyclotron** (représenté figure 2.18) est constitué de deux électrodes métalliques croisées en forme de \wedge (dès « Dels », ou \wedge s en anglais), placées entre les pôles d'un électro-magnét produisant un champ magnétique uniforme \vec{B} . Une différence de potentiel alternative est appliquée aux électrodes afin que signe entre elles un champ électrique $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi)$. Une source de particules est placée au centre du dispositif. Les particules produites sont accélérées par le champ \vec{E} , puis pénètrent dans un des \wedge et parcourront alors un demi-cercle. En arrivant à nouveau dans l'espace inter-dos, ces particules peuvent être encore accélérées, puis parcourront un autre demi-cercle dans l'autre dos (de rayon plus important car $R \propto \sqrt{\beta}$ constant), etc. Les particules mettent toujours le même temps à parcourir un demi cercle, car la pulsation cyclotron $\omega_c = |q|\vec{B}/m$ est indépendante de la vitesse.

Le champ électrique doit être orienté dans le bon sens à chaque passage des particules dans l'intervalle central, donc passer d'un maximum à un minimum toutes les demi-périodes, ce qui impose $\omega = \omega_c$.

Le physicien américain E. Lawrence a reçu le prix Nobel de Physique 1939 pour « l'invention et le développement du cyclotron », ce dispositif ayant été créé avec son étudiant M. Livingston en 1930. Dans ce dispositif original, les dos sont des demi-cercles de 24 cm de diamètre, et le champ magnétique appliqué est au maximum $B = 1,6$ T. On cherche à accélérer des protons (charge $q = +e$, masse

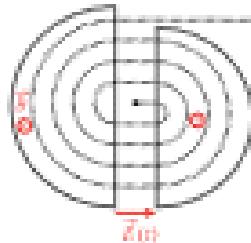


FIGURE 2.18 - Principe d'un cyclotron (vue de dessus). Schéma effectué pour un proton ($q > 0$).

$$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Ces valeurs donnent une fréquence cyclotron

$$\omega_c = \frac{eB}{2\pi m_p} = 21 \text{ MHz}. \quad (2.110)$$

La vitesse maximale des protons correspond à la vitesse pour un rayon $r = R_{\max}$, soit :

$$v_{\max} = R_{\max} \times \omega_c = 1,6 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (2.111)$$

On peut exprimer l'énergie cinétique finale en électrons-volts :

$$\frac{1}{2} m_p v_{\max}^2 = 1,3 \text{ MeV}. \quad (2.112)$$

L'immense avantage des cyclotrons est qu'ils permettent de beaucoup accélérer une particule avec une faible tension, grâce à son action répétée à chaque tour. Si on voulait atteindre la même vitesse avec un accélérateur électrostatique, il faudrait une tension U telle que $E_{\max} = eU$, donc $U = 1,3 \times 10^9 \text{ V}$!

Le principal problème des cyclotrons est de réussir à maintenir un champ magnétique uniforme sur toute la surface du dispositif, ce qui limite énormément les tailles envisageables. Les valeurs de l'exemple précédent marquent une autre limite du dispositif : il permet d'atteindre des vitesses relativistes, pour lesquelles le calcul précédent tombe en défaut !

Chapitre 3

Mouvements à force centrale

Les mouvements à force centrale ont été étudiés très tôt par les physiciens car ils décrivent les trajectoires des astres célestes. De premières lois empiriques ont été obtenues par Kepler, et celles-ci furent ensuite démontrées théoriquement à l'aide d'un modèle de l'interaction gravitationnelle entre deux corps, la loi de gravitation universelle de Newton. Au cours de ce chapitre, nous allons étudier le mouvement dans un champ de force central et d'obtenir les propriétés des trajectoires possibles.

Les objectifs du chapitre sont les suivants :

1. connaître les propriétés d'un mouvement à force centrale;
2. avoir obtenu l'équation de la trajectoire à l'aide d'un invariant supplémentaire dans le cas d'un potentiel newtonien;
3. en déduire les propriétés importantes du mouvement (forme, paramètre d'impact, etc.).

Voici des titres de l'opus tombés en 2022 et 2023 qui sont en lien avec ce chapitre :

2023	Équilibre et mouvement dans un champ de force centrale conservatif	Illustrer la leçon en exploitant la simulation numérique de la trajectoire du satellite Poldac de Suisse, dans le cadre ci fourni. Préparer l'énoncé et la résolution d'un exercice portant sur l'expérience historique de Rutherford.
	Mouvements d'atomes	Préparer l'énoncé et la résolution d'un exercice traitant de l'expérience de Rutherford.
2022	Systèmes planétaires	Le candidat ou la candidate présente une méthode de détection d'exoplanètes. Il n'est pas opportun de consacrer plus de quinze minutes pour exposer cette partie de la leçon.

équilibre et mouvement dans un champ de force centrale conservative	Le candidat ou la candidate décrit et analyse le mouvement des particules alpha dans l'expérience historique de Rutherford. Il n'est pas opportun de consacrer plus de quinze minutes pour exposer cette partie de la leçon.
	Le candidat ou la candidate exposera le cas de l'oscillateur harmonique spatial (force de rappel proportionnelle à la distance au centre de force). Il n'est pas opportun de consacrer plus de dix minutes pour exposer cette partie de la leçon.
Satellites. Applications	Le candidat ou la candidate traitera le cas particulier des satellites artificiels géostationnaires. Il n'est pas opportun de consacrer plus de dix minutes pour exposer cette partie de la leçon.

3.1 Propriétés générales du mouvement

Une force est dite **centrale** dans le référentiel d'étude (supposé galiléen) si, quelle que soit la position du point M sur lequel elle s'applique, elle est exercée par la droite liant M à un point O fixe dans ce référentiel. Le point O est alors appelé **centre de force**. Si elle est orientée vers O elle est attractive; dans le cas contraire, elle est répulsive.

Plusieurs forces courantes sont de ce type : la force d'interaction gravitationnelle, la force électrostatische entre deux charges ponctuelles, ou encore la tension du fil dans le cas du pendule simple.

3.1.1 Conservation du moment cinétique

Considérons un point matériel M soumis uniquement à une force centrale \vec{F} de centre O . La force est colinéaire à \overrightarrow{OM} et son moment en O est donc tel :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}. \quad (3.1)$$

Ainsi, par le théorème du moment cinétique en notant $\vec{T}_O(M) = \vec{T}_O$, on a $d\vec{T}_O/dt = \vec{0}$ et on en déduit que *le moment cinétique par rapport à O se conserve*. Cela entraîne deux propriétés.

Mouvement plan

Considérons, comme sur la figure 3.1, le plan (P) orthogonal à \vec{T}_O et contenant O à l'instant initial. Au cours du mouvement, \vec{T}_O est constant et orthogonal à \overrightarrow{OM} donc \overrightarrow{OM} est toujours contenue dans (P) . Ainsi, le mouvement à priori 3D de M dans le champ de force centrale se trouve restreint à un plan (2D) qui dépend des conditions initiales et n'est donc pas le même pour tous les systèmes évoluant sous l'influence du champ de force considéré. Il est alors justifié d'utiliser les coordonnées polaires (r, θ) dans le plan du mouvement.

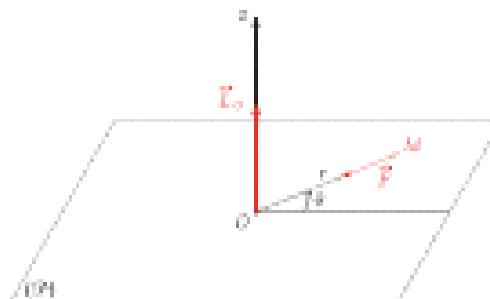


FIGURE 3.1 – Point M soumis à une force centrale de centre O . On définit les coordonnées polaires dans le plan du mouvement.

Loi des aires

En coordonnées polaires, le moment cinétique s'écrit :

$$\vec{L}_O(M) = m\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = mr^2\dot{\theta}\hat{u}_z. \quad (3.2)$$

Ainsi, la conservation de \vec{L}_O implique que la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ est conservée. Le premier effet tangible de la conservation de C est que les corps évoluant proche du centre de force (r faible) tournent plus rapidement ($\dot{\theta}$ important) que ceux qui en sont éloignés.

C'est le cas des planètes du système solaire : Mercure, qui est la plus proche du soleil, en effectue le tour complet en 88 jours tandis que Neptune, qui est plus éloignée, met 165 ans.

On peut aussi relier C à la vitesse angulaire. Par propriété du produit vectoriel, l'air balayé pendant dt par le vecteur \overrightarrow{OM} est (voir figure 3.2)

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{OM}(t) \wedge d\overrightarrow{OM} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{OM}(t) \wedge \vec{v}(t) \right| dt \\ &= \frac{1}{2} \left| \vec{L}_O \right| = \frac{|C|}{2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Le fait que C soit conservé implique donc que dA/dt est constante : l'air balayé entre t et $t + dt$ est le même quel que soit t . Ce résultat est connu sous le nom de *loi des aires*, ou *dernière loi de Kepler*.

Ces propriétés sont valides pour toute force centrale, quelle que soit la forme du potentiel associé et qu'elle soit conservative ou non !

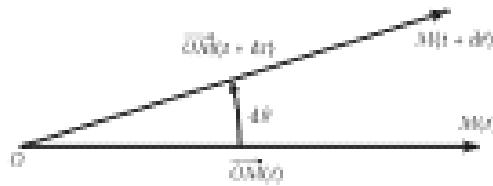


FIGURE 3.2 – Calcul de la vitesse tangentielle.

3.1.2 Énergie potentielle effective

La conservation du terme $r^2\dot{\theta}$ permet d'exprimer l'énergie cinétique uniquement en fonction de r et de ses dérivées :

$$E_c = \frac{1}{2}m\omega^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 + \frac{J_0^2}{2mr^2}. \quad (3.4)$$

Si de plus la force considérée est conservatrice, elle dérive d'une énergie potentielle qui ne peut dépendre que de la coordonnée radiale (sinon, la relation $\vec{F} = -\text{grad } E_p$ impliquerait l'apparition d'une composante de la force sur un autre vecteur que \vec{r} , ce brisant le caractère central) $E_p(r)$ de sorte que l'énergie mécanique sera :

$$E_m = E_p(r) + \frac{1}{2}m\omega^2 + \frac{J_0^2}{2mr^2}. \quad (3.5)$$

Dans le cas d'une force conservatrice, E_m dépend en fonction de la seule variable r et de ses dérivées, et sa valeur est constante au cours du mouvement. La description du mouvement tridimensionnel, précédemment ramenée à l'étude d'un mouvement 2D, est finalement réduite à l'étude d'un mouvement à un unique degré de liberté. C'est là tout l'intérêt des mouvements dans un champ de force central !

L'expression de l'énergie mécanique permet l'analogie avec un problème unidimensionnel dont :

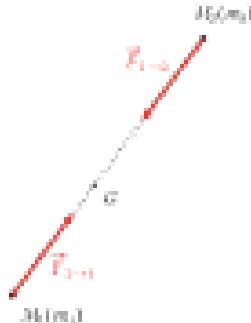
- L'énergie cinétique serait $\frac{1}{2}mv^2$,
- L'énergie potentielle serait $E_{pot} = E_p(r) + \frac{J_0^2}{2mr^2}$.

Ce second terme est appelé **énergie potentielle effective** dans le sens où il est « effectivement » à prendre en compte pour décrire le mouvement radial. étant donné qu'il ne dépend de r , il pourra être représenté graphiquement ce qui permet, connaissant E_m à l'instant initial, de déterminer le comportement du système, comme décrit dans le chapitre 1.

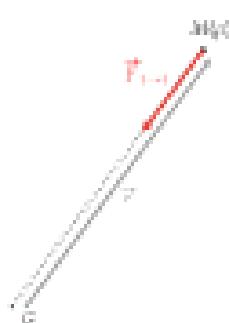
3.1.3 Problème à deux corps

Nous avons pour le moment décrit le mouvement d'une masse soumise à une force d'origine non précise. Cependant, dans de nombreux problèmes à force centrale, l'interaction s'effectue entre deux corps qui s'attirent

— où se repoussent — mutuellement. Ainsi, on considère le cas plus général de deux corps ponctuels (M_1 , masse m_1 et M_2 , masse m_2) en interaction mutuelle. L'ensemble est isolé et on étudie leur mouvement dans un référentiel galiléen \mathcal{R} .



(a) Deux particules en interaction mutuelle.



(b) Système réduit.

FIGURE 3.1 – Modélisation du système à deux corps par une particule réduite. Le point G est le barycentre du système.

L'application du PFD à chaque corps donne :

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (3.6)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{1 \rightarrow 2} \quad (3.7)$$

et le principe des actions réciproques implique $\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$. En sommant ces deux équations, on observe que le barycentre G du système, défini par $(m_1 + m_2) \ddot{\vec{r}}_G = m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2$, a un mouvement rectiligne uniforme :

$$\ddot{\vec{r}}_G = \vec{0}. \quad (3.8)$$

Ce résultat peut s'établir directement en appliquant le théorème de la résultante dynamique au système global, qui est isolé.

Le mouvement global des deux corps étant déterminé, il reste à décrire leur mouvement relatif. Pour cela, nous étudions la coordonnée relative $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. En faisant la différence pondérée des équations (3.7)/ m_2 − (3.6)/ m_1 , on obtient

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{F}_{1 \rightarrow 2}. \quad (3.9)$$

On définit la **masse réduite** μ telle que

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \quad \Longrightarrow \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.10)$$

Ainsi, on obtient une équation différentielle décrivant le mouvement d'un point fixé M de masse μ (la « particule réduite ») et soumis à $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{1 \rightarrow 2}. \quad (3.11)$$

Or, par symétrie, la force $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ est nécessairement¹ exercée par la droite $(M_1 M_2)$ qui contient le barycentre G , propriété qui rappelle directement les forces centrales. Justifions le rigoureusement.

On se place désormais dans le référentiel R_G , référentiel en translation par rapport à R et dans lequel G est au repos (au contraire de l'origine du référentiel barycentrique du système, voir le chapitre 4). Parce que G est en mouvement rectiligne uniforme dans R , ce référentiel R_G est galiléen. La particule réduite M est alors soumise dans ce référentiel à la force centrale $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$. Toute l'étude précédente s'applique :

- le moment cinétique en G \vec{L}_G est conservé;
- si la force d'interaction décrite d'un potentiel, l'énergie mécanique est conservée;
- on peut définir une énergie potentielle effective, discuter qualitativement des trajectoires possibles, etc.

L'argument crucial est la colinéarité de $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ avec $\overrightarrow{M_1 M_2}$. Une fois cela vérifié, on voit que les forces centrales dirigent le mouvement d'une très grande variété de situations! Remarquons à cette occasion que $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ n'est centrale que dans le référentiel R_G , mais pas dans le premier référentiel galiléen initial R , dans lequel G n'est pas un point fixe!

Par définition du barycentre, on peut alors exprimer

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GM_2} &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \overrightarrow{GM_1} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

puis les trajectoires respectives des points M_1 et M_2 sont données par $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{GM_{1,2}}$.

3.2 Potentiel newtonien

Nous avons obtenu dans la section précédente les propriétés générales du mouvement d'une particule soumise à une force centrale. Cependant, les trajectoires peuvent fortement varier selon l'expression exacte de la force centrale. Nous nous concentrerons donc à présent sur un cas particulier très utile : celui où la force est newtonienne, c'est-à-dire qu'elle est conservative et décrite par l'énergie potentielle $-k/r$. Ce cas permet de distinguer deux situations physiques : les interactions gravitationnelle et électrostatique.

1. Plus rigoureusement, cette force est une force n -vecteur, donc elle appartient à tout plan de symétrie du système. En l'occurrence pour des corps ponctuels, tous les plans contenant la droite $(M_1 M_2)$ sont des plans de symétrie. La force est donc conservée dans l'intersection de tous ces plans, à savoir la droite $(M_1 M_2)$.

3.2.1 Équation de la trajectoire

Considérons un point matériel de masse m évoluant dans un potentiel harmonique $E_p(r) = -k/r$. L'application du principe fondamental de la dynamique au système mène à l'équation du mouvement :

$$m \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r. \quad (3.13)$$

Faisons nous que le mouvement en plan se passe dans des coordonnées polaires. L'équation du mouvement projeté sur \vec{u}_r et \vec{u}_θ donne alors

$$\begin{cases} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{k}{r^2}, \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

La seconde équation ne nous apprend rien de plus que la conservation de la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ obtenue de sorte que la résolution des équations du mouvement passe par la résolution de la première équation. De nombreuses méthodes existent, nous en présentons deux qui ont un intérêt pédagogique particulier.

Méthode de Binet

Cette première méthode est un changement de variables appelé [formule de Binet](#) et consiste à écrire l'équation du mouvement en fonction de $u = 1/r$. Supposons que l'on peut paramétriser la trajectoire sous la forme $r = r(\theta)$. On a alors

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta}. \quad (3.15)$$

Réécrivons l'équation du mouvement à l'aide de cette nouvelle fonction $u(\theta)$. On commence par réécrire le terme de gauche. On a

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d}{du} \left(\frac{1}{u} \right) \right) \\ &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{d}{du} \left(\frac{1}{u} \right) \frac{du}{d\theta} \right) \\ &= \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{\dot{\theta}}{u^2} \frac{du}{d\theta} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

On reconnaît la quantité $C = r^2\dot{\theta} = \dot{\theta}/u^2$. Il vient donc

$$\ddot{r} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{du}{d\theta} \right) = -C \dot{\theta} \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}. \quad (3.17)$$

Alors, en utilisant de nouveau la constante C , le membre de gauche de l'équation du mouvement sur \vec{u}_r s'écrit

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -C^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} - C^2 u^2 = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right). \quad (3.18)$$

L'équation du mouvement devient alors simplement :

$$-mC^2\omega^2 \left(\frac{d^2x}{dt^2} + x \right) = -kx^2, \quad (3.19)$$

s' où :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = \frac{k}{mC^2}. \quad (3.20)$$

Il s'agit simplement de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation Ω et de position d'équilibre k/mC^2 . L'expression des solutions est immédiate :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{k}{mC^2} + a \cos(\beta - \delta_0) \\ \text{où } r &= \frac{1}{x} = \frac{\frac{mC^2}{k}}{1 + \frac{mC^2}{k} \cos(\beta - \delta_0)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

où a et δ_0 sont des constantes déterminées par les conditions initiales. On reconnaît l'équation d'une conique dont l'interprétation sera détaillée dans la section 3.2.3.

Vecteur de Rungé-Lenz

L'équation de la trajectoire peut aussi être obtenue en faisant appel au **vecteur de Rungé-Lenz** \vec{J} défini par

$$\vec{J} = \vec{v} \wedge \vec{L}_G - k \vec{x}, \quad (3.22)$$

Le moment cinétique \vec{L}_G étant constant, donc de dérivée nulle, on démontre que le vecteur de Rungé-Lenz est lui-même conservé :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{J}}{dt} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \wedge \vec{L}_G - k \frac{d\vec{x}}{dt} \\ &= -\frac{k}{mr^2} \vec{U}_r \wedge mr^2 \dot{\theta} \vec{U}_\theta - k \dot{\theta} \vec{U}_\theta \\ &= \vec{0}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

On a donc identifié, après l'énergie E_m et le moment cinétique \vec{L}_G , une troisième intégrale du mouvement ! Il est finalement possible d'obtenir l'équation de la trajectoire en écrivant

$$\begin{aligned} \vec{J} \cdot \vec{x} &= (\vec{v} \wedge \vec{L}_G) \cdot \vec{x} - k \\ &= (\vec{U}_r \wedge \vec{v}) \cdot \vec{L}_G - k \\ &= \frac{mC^2}{r} - k. \end{aligned} \quad (3.24)$$

On choisissant l'axe Ox comme étant orienté par \vec{A} (ce qui est possible car \vec{A} est constant) et en notant θ l'angle entre \vec{u}_r et \vec{u}_θ , on a $\vec{A} \cdot \vec{u}_r = A \cos \theta$ avec $A = \|\vec{A}\|$. Il vient :

$$A \cos \theta = \frac{m C^2}{r} - k \quad \text{puis} \quad r = \frac{\frac{m C^2}{k}}{1 + \frac{k}{A} \cos \theta}. \quad (3.25)$$

On observe que l'on retrouve la même équation de trajectoire que celle obtenue par la méthode de Binet (équation (3.21)), avec $A = m C^2$ et $\theta_0 = 0$ (ce qui s'explique par le choix d'axe (Ox) fait ici).

3.2.2 Interprétation de la trajectoire et lois de Kepler

L'équation de trajectoire obtenue est celle d'une conique², dont on va désormais s'attacher à décrire les caractéristiques.

Trajectoires dans le cas général

Étudions donc la trajectoire décrite en coordonnées polaires (r, θ) par

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (3.26)$$

où p est appelé le **paramètre** et e l'**excentricité**. À partir des équations physiques déterminées dans la section précédente (équation (3.25)), on peut relier les paramètres géométriques p et e à ceux identifiés dans le cas du potentiel newtonien :

$$p = \frac{m C^2}{k} \quad \text{et} \quad e = \frac{A}{k}. \quad (3.27)$$

On voit alors que p et e sont positifs dans le cas d'une force attractive et négatifs pour une force répulsive.

Une telle trajectoire est représentée par des formes géométriques distinctes selon les valeurs de r et de p . Tout d'abord, si p est positif, les trajectoires sont les suivantes :

- $e = 0$: trajectoire circulaire de rayon p ,
- $0 < e < 1$: trajectoire elliptique, dont l'origine O est un foyer, de demi-grand axe $a = p/(1 - e^2)$ et de demi petit axe $b = \sqrt{ap}$,
- $e = 1$: trajectoire parabolique (du type $y = x^2$)
- $e > 1$: trajectoire hyperbolique (du type $y = 1/x$).

Dans le cas où p est négatif, le seul cas d'intérêt sera $e < -1$, pour lequel la trajectoire est également hyperbolique. Toutes ces trajectoires sont représentées sur la figure 3.6. On donne dans la suite les relations qui existent entre les paramètres mathématiques e et p des trajectoires et les paramètres physiques E_{tot} , I_{Q} et A .

² Les coniques sont les courbes obtenues par l'intersection d'un plan et d'un plan : cercle, ellipse, hyperbole et parabole.

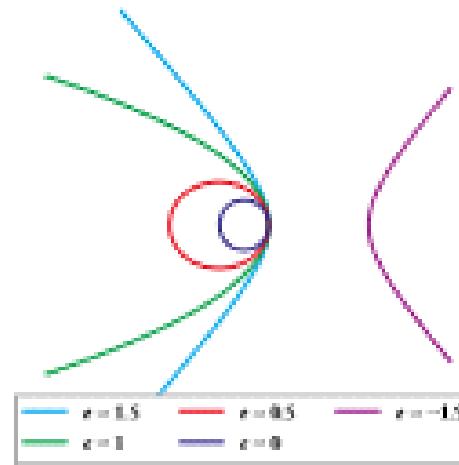


FIGURE 3.4 – Représentation graphique des coniques distinguées par la valeur de leur excentricité e .

Pour la trajectoire de la Terre autour du Soleil, on a $a = 1,4960 \times 10^{11}$ km et $e = 0,0167$ (source : [15]). La faible valeur de e coïncide avec le fait que l'orbite de la Terre soit quasi-circulaire.

Un tracé naïf en coordonnées polaires donnerait deux branches pour les solutions hyperboliques : on observerait alors que l'une des branches correspond au cas attractif et l'autre au cas répulsif. En réalité, si l'on se restreint au tracé de l'équation (3.26) pour $r > 0$, il n'y a pas d'ambiguité : une seule branche est telle que $r > 0$ dans chaque cas.

Énergie mécanique

On a

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}m\left(r^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\left(\left(\frac{dr/C}{d\theta/r}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{2}mr^2\left(\frac{1}{r^2} + \left(\frac{d\pi}{d\theta r}\right)^2\right) - \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{2}\mu k\left(\frac{1 + 2x \cos \theta + x^2}{r^2}\right) - \frac{k}{r}(1 + x \cos \theta) \end{aligned}$$

$$E_m = \frac{\vec{h}}{2\vec{p}} \cdot (\vec{r}^2 - 1) . \quad (3.28)$$

Ainsi, dans le cas où $\vec{h} > 0$, un état lié, défini par $E_m < 0$ correspond à une excentricité e inférieure à 1 (ce qui correspond bien, sur la figure 3.4, aux trajectoires circulaire et elliptique) : il s'agit de la *première loi de Kepler*. À l'inverse un état de diffusion pour lequel $E_m > 0$ a $e > 1$ et correspond à une trajectoire parabolique ou hyperbolique. D'autre part, si \vec{h} est négatif (donc \vec{p} négatif), l'énergie mécanique étant positive on a forcément $|e| \geq 1$.

Enfin, pour une trajectoire fermée (cas $\vec{h} > 0$), on peut exprimer l'énergie mécanique en fonction du paramètre a (demi-grand axe de l'ellipse ou rayon de la trajectoire circulaire). Elle devient :

$$E_m = \frac{\vec{h}}{2\vec{p}} \cdot (\vec{r}^2 - 1) = -\frac{\vec{h}}{2a} . \quad (3.29)$$

Moment cinétique

De même qu'on a exprimé l'énergie mécanique du système en fonction des paramètres de la trajectoire on peut exprimer son moment cinétique (conservé lui aussi) en fonction de ces mêmes paramètres :

$$L_0^2 = m^2 C^2 = m\vec{h}\vec{p} = m\vec{h}\vec{r} \left(1 - e^2\right) . \quad (3.30)$$

Période du mouvement

Lorsque l'énergie mécanique du système lui confère une trajectoire fermée, sa période de rotation T est telle que l'aire balayée durant T soit l'aire de l'ellipse. Ceux qui ont appris simplement πab , ou encore, en utilisant la loi des ares, $TC/2$ de sorte que :

$$\begin{aligned} T \frac{C}{2} &= \pi ab \\ \text{donc } T &= 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{kp}} = a^{3/2} 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} . \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ainsi, dans le cas de l'interaction gravitationnelle où $k = G\mu m$ on obtient la *troisième loi de Kepler* :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} . \quad (3.32)$$

Importance du vecteur de Runge-Lenz

Il est intéressant d'interroger sur l'origine du vecteur de Runge-Lenz, car celui-ci constitue une intégrale du mouvement instantané qui nous permet de résoudre exactement les trajectoires de façon simple. Réisons un bilan des constantes du mouvement dans le cas d'une force centrale newtonienne :

- * L'énergie mécanique E_m est conservée et c'est un scalaire, on obtient donc *l'assistance du mouvement*,

- Le moment cinétique \vec{L}_0 est conservé de sorte que chaque composante de ce vecteur est constante au cours du temps : *3 constantes du mouvement*,
- Le vecteur de Runge-Lenz \vec{A} est conservé lui aussi et procure à son tour *3 constantes du mouvement*.

Or, dans la situation étudiée, démontrer sept constantes du mouvement, chacune équivalente à une équation imposée au système (typiquement $dE_m/dt = 0$), est problématique : en effet, le mouvement d'un point dans l'espace est complètement décrit par la dynamique, à tout instant, de six variables : trois permettant de décrire sa position, et trois autres sa vitesse.

En fait, on peut démontrer rapidement que les constantes du mouvement identifiées ne sont pas indépendantes. D'une part, on a une relation sur les normes :

$$E_m = \frac{mv^2}{2r_{\text{min}}^2} \left(\frac{\vec{A}^2}{\vec{L}^2} - 1 \right) \quad \text{donc} \quad \vec{A}^2 = \vec{L}^2 + \frac{2E_m r_{\text{min}}^2}{m}. \quad (3.33)$$

De plus la définition de \vec{A} impose $\vec{A} \cdot \vec{L}_0 = 0$. Ainsi, E_m et \vec{L}_0 étant déjà connus, on sait dans quel plan doit être le vecteur \vec{A} et sa norme est imposée. Le calcul de \vec{A} n'apporte donc qu'une *seule constante du mouvement indépendante des préférences*, sa direction dans le plan du mouvement, qui s'avère être la direction de l'axe principal de la conique.

Nous disposons donc finalement de 5 constantes du mouvement et sommes ramenés à un problème à *un seul paramètre* ! Cela signifie que le problème à force centrale newtonienne est **exactement soluble**. De tels problèmes sont très rares en physique et leur existence mérite d'être soulignée.

3.2.3 Méthode des vitesses radiales

En 2019, M. Mayor et D. Queloz ont obtenu la moitié du Prix Nobel de Physique pour « la première découverte d'une exoplanète (51 Pegasi b) en orbite autour d'une étoile de type solaire ». Cette première a ouvert la voie à une véritable chasse aux exoplanètes, dont les découvertes confirmées se comptent aujourd'hui en milliers. La méthode utilisée pour détecter la présence d'une exoplanète en rotation autour d'une étoile est une application directe des résultats de ce chapitre : l'interaction gravitationnelle entre les deux corps affecte le mouvement de l'étoile, qui se trouve alors en rotation autour du centre de masse du système. Ce mouvement périodique provoque, par effet Doppler, une variation de la fréquence des raies du spectre de l'étoile : lorsque l'étoile se rapproche de l'observateur, son spectre est décalé vers le bleu ($\Delta f > 0$) et inversement lorsqu'elle s'éloigne. Le paramètre clé étant la vitesse de l'étoile suivant la ligne de visée, appelée *vitesse radiale*, on parle de *technique des vitesses radiales*. Avec une analyse spectroscopique, on peut déceler l'influence d'un corps en orbite autour de l'étoile !

Supposons que l'on observe un système Soleil-Planète, de masses respectives M et m , dont le plan de la trajectoire est incliné par rapport à la ligne de visée d'un angle i a priori inconnu, compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$ (voir figure 3.5). On suppose pour simplifier que les trajectoires des astres sont circulaires.

Parce que l'on a (voir équation (3.12)) $\vec{F}_x = \vec{F}_G + \frac{m}{M+m} \vec{F}$ où \vec{F} est le rapport vecteur de la particule réduite

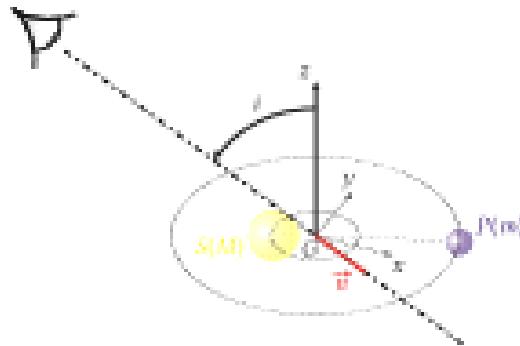


FIGURE 3.5 – Définition de l'angle d'inclinaison i du plan de la trajectoire par rapport à la ligne de visée. Le vecteur unitaire \hat{n} définit la ligne de visée entre l'observateur et le centre de masse G du système.

associée au couple S/P , la vitesse de l'onde sonore

$$\vec{v}_x = \vec{v}_G + \frac{m}{M+m} \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (3.34)$$

La contribution de la vitesse du centre de masse, constante (car le système est isolé), peut être éliminée car elle modifie uniquement la valeur moyenne de v_x . Si l'on fait une trajectoire circulaire, on peut paramétriser le plan de la trajectoire (G, \vec{u}_x, \vec{u}_y) de sorte que $u_{x,i} = v_0 \sin(\omega t)$ et $u_{y,f} = v_0 \cos(\omega t)$ où, pour une trajectoire circulaire de la particule réduite de rayon R et de période T , $\omega = 2\pi/T$ et ³ $v_0 = \frac{2\pi R}{T(M+m)}$. La relation loi de Kepler (37) relie $T^2/R^3 = 4\pi^2/(G[M+m])$, d'où l'amplitude de la vitesse

$$v_0 = \left(\frac{2\pi G f}{T} \right)^{1/2} \frac{m}{(M+m)^{1/2}}. \quad (3.35)$$

La vitesse radiale $v_r = \vec{v}_x \cdot \vec{r}$ s'obtient par projection : $v_r = u_{x,i} \sin i$. On donne l'expression finale :

$$v_r(t) = \left(\frac{2\pi G f}{T} \right)^{1/2} \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right), \quad (3.36)$$

où $f = (m \sin i)^2 / (M+m)^2$ est la fréquence de sonde du système. C'est cette vitesse radiale qui est directement reliée au décalage de fréquence Doppler mesurable.

Dans le cas de la découverte de Mayor et Queloz [16], l'apparition de la sinusode $v_r(t)$ conduit à une période orbitale $T = 4,23$ jours et une amplitude $v_0 \sin i = 59 \pm 3 \text{ m.s}^{-1}$ (voir figure 3.6). On peut alors

³ La particule réduite parcourt un cercle de rayon R pendant le temps T , donc à la vitesse $\|d\vec{r}/dt\| = 2\pi R/T$. L'onde et la planète suivent aussi des trajectoires circulaires de périodicité T , mais de rayons différents.

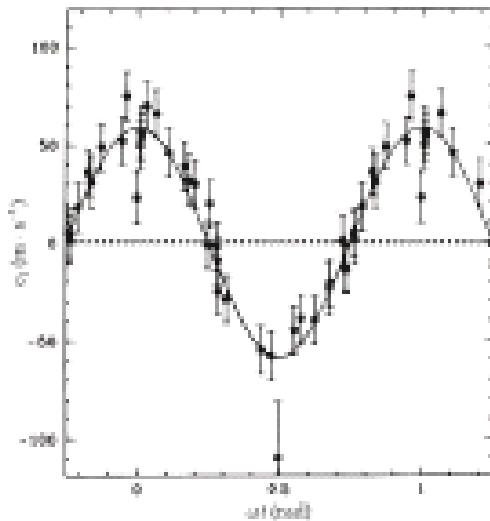


FIGURE 3.6 – Vitesse radiale de l'étoile 51 Peg, d'après l'article de Mayor & Queloz [16]. La courbe plate correspond à l'ajustement avec les paramètres donnés dans le texte.

on déduit $f \approx 0,50 \times 10^{-10} M_\odot$, c'est une borne inférieure pour la masse de l'exoplanète (on n'ignore pas devant M dans f) :

$$m \gtrsim |mv \sin i| \approx 3,3 \times 10^{25} \text{ kg} \approx 9,47 M_J, \quad (3.37)$$

où M_J est la masse de Jupiter. Trouver une planète semblable à Jupiter si proche de son étoile a été une véritable surprise pour les astrophysiciens, qui ont alors créé la catégorie des « Jupiter chauds », dont 51 Pegasi b a inauguré une longue série.

On remarquera que cette méthode des vitesses radiales, à cause de l'angle d'observation i inconnu, ne fournit qu'une borne inférieure de la masse de la planète. D'autres techniques (transit, astrométrie...) permettent lorsqu'elles sont applicables de déterminer précisément cette masse. De plus, cette méthode sera particulièrement adaptée lorsque le rapport signal-sur-bruit dans $v_r(t)$ sera bas, ce qui correspond à une faible période T et une grande fonction de masse f (donc une grande masse de compagnon m) : c'est apparemment le cas pour des planètes massives (du type Jupiter) orbitant très près de leur étoile, comme 51 Pegasi b.

3.2.4 Expérience de Rutherford

L'expérience de Rutherford, aussi connue sous le nom d'« expérience de la feuille d'or », est l'expérience ayant prouvé le caractère hachuré de la matière à l'échelle microscopique, invalidant le modèle de Thomson (le « plum pudding », selon lequel un atome était une boule chargée positivement contenant de petites

charges négatives) et envoient un modile planétaire de l'atome (l'atome est considéré d'un noyau chargé positivement de taille très faible autour duquel se trouve le nuage électronique). Son principe est le suivant : on place une feuille d'or très fine (environ 6×10^{-3} Å) dans une enceinte sous vide, et on la bombarde de particules α (des noyaux d'hélium) émises par de la matière radioactive. On place un écran derrière la feuille, celui-ci est recouvert d'un revêtement spécial qui permet d'observer les collisions avec les particules α .

Les physiciens Geiger et Marsden réalisent l'expérience [17] et font les observations suivantes :

- la plupart des particules traversent la feuille sans être déviées significativement;
- une petite fraction des particules incidentes est légèrement déviée par rapport à leur direction initiale;
- quelques très rares particules (une sur 10 000 ou 20 000) sont tant déviées qu'elles sont *renvoyées dans la direction de la source*.

Rutherford interprète ces résultats [18] de la façon suivante : la déviation moyenne étant très faible, il est hautement improbable que les particules réfléchies observées aient acquis leur mouvement par une succession de petites déviations ; au contraire, il fait l'hypothèse que ces rares particules ont été réfléchies lors de leur rencontre avec un *seul atome*, qui doit donc pour cela émettre un champ électrique très intense. Un tel champ ne peut être créé que par une charge positive quasi-ponctuelle : il suppose donc que la charge positive est un point et s'intéresse à la dynamique d'une particule α provenant de l'infini et interagissant avec le noyau.

On peut observer la trajectoire d'une telle particule en utilisant les résultats sur les forces centrales présentés dans ce chapitre. En effet, la force coulombienne qui agit sur la particule α de charge $+Ze$ à une distance r du noyau (supposé ponctuel) de charge $+Ze$ a pour expression

$$\vec{F} = \frac{K}{r^2} \vec{z}, \quad \text{avec} \quad K = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0}. \quad (3.38)$$

Il s'agit donc bien d'une force centrale⁴, et l'on a conservation

- de l'énergie mécanique de la particule $E_m = mv^2/2 + E/r$;
- du moment cinétique en O (position du noyau) $\vec{L}_O = m\vec{r} \wedge \vec{v}$;
- du vecteur de Runge-Lenz $\vec{A} = \vec{r} \wedge \vec{L}_O + K\vec{z}_r$.

On peut relier ces quantités à deux paramètres physiques, la vitesse initiale v_0 et le paramètre d'impact k_m définis sur la figure 3.7. On a

$$E_0 = mv_0^2/2 = mk_m v_0, \quad \text{et} \quad E_m = \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (3.39)$$

Dans le cadre de l'expérience de Rutherford historique, on a $v_0 = 2 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

L'équation de la trajectoire est

$$r = \frac{p}{1 + \cos\theta} = \frac{mv_0^2}{A \cos\theta - K}. \quad (3.40)$$

4. On utilise ici K défini comme l'apport de \vec{r} sur la force est négatif.

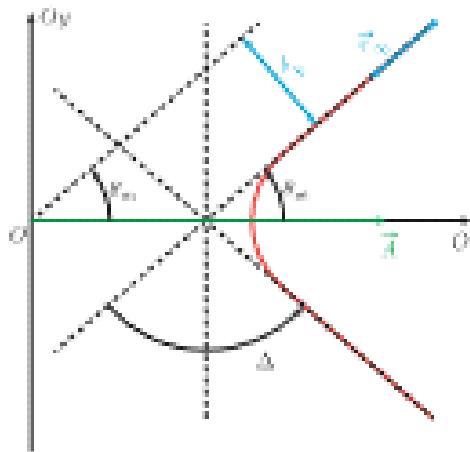


FIGURE 3.7 – Diffraction de Rutherford.

On voit que la valeur existante δ_m telle qu'un rayon r positif croise est telle que:

$$\cos \delta_m = K/J . \quad (3.41)$$

Par propriété des hyperboles, cette valeur peut être reliée à la déviation Δ de la particule incidente:

$$\Delta = \pi - 2\delta_m . \quad (3.42)$$

On a ensuite:

$$R_m = \frac{mK^2}{2J_0^2} \left(\frac{J^2}{K^2} - 1 \right) \quad \text{soit} \quad \frac{2J_0^2 R_m}{mK^2} = \frac{1}{\cos^2(\delta_m)} - 1 = \tan^2(\delta_m) = \cotan^2\left(\frac{\Delta}{2}\right). \quad (3.43)$$

Pour finir, on a donc:

$$\cotan\frac{\Delta}{2} = \frac{m k_m^2 \rho_m^2}{K} . \quad (3.44)$$

On peut obtenir la distance minimale entre la particule et le centre de force O en évaluant r en $\theta = 0$:

$$r(\theta = 0) = \frac{mK^2}{J - K} = \frac{J_0^2}{m(J - K)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{J^2}{K^2} + m^2 k_m^2 \rho_m^2} - K} . \quad (3.45)$$

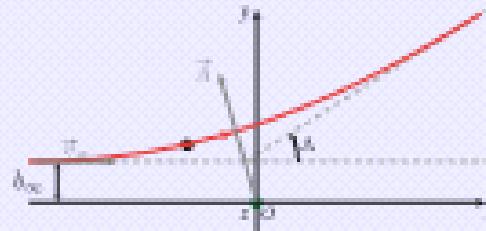
On peut alors imaginer une majoration de la taille du noyau atomique en évaluant cette quantité lorsque k_m tend vers 0. Dans ce cas, la trajectoire est confondue avec l'axe Ox et l'angle de déviation est $\Delta = \pi$: la particule « rebondit » sur le noyau et repart en sens inverse. On a:

$$\lim_{k_m \rightarrow 0} r(\theta = 0) = \frac{2K}{m \rho_m^2} = \frac{Z e^2}{m v_0^2 \rho_m^2} = r_{min} . \quad (3.46)$$

Dans le cas de l'expérience de Rutherford, on trouve pour un atome d'or ($Z = 79$) $r_{\text{min}} = 3 \times 10^{-14} \text{ m}$, en utilisant la masse d'une particule : $m = 6,64 \times 10^{-27} \text{ kg}$. On en conclut donc que la taille du noyau atomique doit être de 4 à 5 ordres de grandeur inférieure à celle de l'atome !

On peut renouer la déivation obtenue dans l'équation (3.46) plus simplement en choisissant des axes adaptés au problème : si on pose l'axe Ox parallèle à la vitesse initiale, on a

$$\vec{L}_D = m\vec{r} \wedge \vec{v} = m(-d\vec{u}_x + k_m \vec{u}_y) \wedge u_m \vec{u}_x = -mk_m u_m \vec{u}_y. \quad (3.47)$$



Dans l'état initial, on a

$$\vec{J} = \vec{v} \wedge \vec{L}_D - K\vec{u}_x = m k_m u_m^2 \vec{u}_y - K\vec{u}_x. \quad (3.48)$$

Enfin, par conservation de l'énergie mécanique, le module de la vitesse après diffusion est $v = v_\infty$, où le vecteur :

$$\vec{v} = u_m (\cos \Delta \vec{u}_x + \sin \Delta \vec{u}_y).$$

On peut exprimer le vecteur de Runge-Lenz dans l'état final, après la diffusion (on a alors $\vec{u}_x = \cos \Delta \vec{u}_x + \sin \Delta \vec{u}_y$) :

$$\begin{aligned} \vec{J} &= u_m (\cos \Delta \vec{u}_x + \sin \Delta \vec{u}_y) \wedge (-mk_m u_m \vec{u}_y) + K(\cos \Delta \vec{u}_x + \sin \Delta \vec{u}_y) \\ &= (K \sin \Delta + mk_m u_m^2 \cos \Delta) \vec{u}_y + (K \cos \Delta - mk_m u_m^2 \sin \Delta) \vec{u}_x. \end{aligned} \quad (3.49)$$

En identifiant les deux dernières équations par conservation de \vec{J} , on a suivant le vecteur \vec{u}_x :

$$K(1 + \cos \Delta) = mk_m u_m^2 \sin \Delta,$$

donc

$$\tan \frac{\Delta}{2} = \frac{\sin \Delta}{1 + \cos \Delta} = \frac{K}{mk_m u_m^2}. \quad (3.50)$$

Pour un faisceau de particules incidentes, on peut de plus faire des hypothèses statistiques sur la répartition des paramètres d'impact et en déduire l'intensité de scintillement prévue sur l'écran en fonction de la déviation Δ . Le calcul complet est réalisé dans le BUP [12] : on trouve une dépendance en $1/\sin^2(\Delta/2)$.

conséquence du phénomène de diffusion par un noyau. Cette préiction théorique fut vérifiée expérimentalement par Geiger et Marsden en 1913 [20], confirmant le modèle planétaire de l'atome.

3.2.5 Lien avec le potentiel harmonique

Intéressons-nous désormais au cas où le potentiel d'interaction n'est plus un potentiel newtonien mais un potentiel harmonique. Ce cas est particulièrement intéressant : nous verrons qu'il possède de nombreuses similitudes avec le cas du potentiel newtonien. On prend

$$E_p(r) = \frac{1}{2}mr^2\omega^2. \quad (3.51)$$

Tout d'abord, on peut remarquer que, le potentiel tendant vers +∞ à l'infini, on ne peut pas avoir d'état de diffusion : tous les états sont liés.

Équation de la trajectoire

Cherchons à appliquer la méthode de Binet dans cette situation : on pose cette fois-ci $u = 1/r^2$, et on divise le temps dans l'équation de conservation de l'énergie. On part de

$$E_{\text{m}} = \frac{1}{2}mr(\dot{r})^2 + \frac{L_{\text{p}}^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}mr^2\omega^2. \quad (3.52)$$

On a par ailleurs

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \quad \text{et} \quad C = \frac{L_{\text{p}}^2}{mr} = r^2\dot{\theta} = \frac{\dot{\theta}}{u}. \quad (3.53)$$

On en déduit :

$$E_{\text{m}} = \frac{mC^2}{8u} \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + \frac{mC^2}{2} u + \frac{mu^2}{2}. \quad (3.54)$$

Par dérivation, on obtient alors

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + 4u = \frac{4E_{\text{m}}}{mC^2}. \quad (3.55)$$

La solution de cette équation est

$$\frac{1}{u} = \frac{E_{\text{m}}}{mC^2} + a \cos(2\theta), \quad (3.56)$$

avec a dépendant des conditions initiales.

On cherche à comprendre ce que représente l'équation (3.56) géométriquement. Parcours de la définition d'une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b en coordonnées cartésiennes :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.57)$$

En posant $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on peut transformer cette équation en

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{b^2} \right) \cos(2\theta). \quad (3.58)$$

On reconnaît donc dans l'équation (3.56) une ellipse de demi-grand axe a et de demi-petit axe b avec

$$a = \frac{1}{\sqrt{\alpha + E_m/mC^2}} \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{\sqrt{-\alpha + E_m/mC^2}}. \quad (3.60)$$

On peut aller plus loin : les points $r = a \{a = 1/\alpha^{1/2}\}$ et $r = b \{a = 1/b^2\}$ sont des points de reboulement conséqués $\dot{r} = 0$. On en déduit qu'ils correspondent exactes de l'équation

$$E_m = \frac{mc^2}{2} u + \frac{mc^2}{2u}. \quad (3.61)$$

On en déduit (avec $a \geq b$ par convention)

$$\frac{1}{a^2} = \frac{E_m}{mc^2} \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{mcC}{E_m} \right)^2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{b^2} = \frac{E_m}{mc^2} \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{mcC}{E_m} \right)^2} \right). \quad (3.62)$$

Cela fixe la valeur de a :

$$a^2 = \frac{E_m^2 - mc^2 \omega^2 C^2}{mc^2 C^2}. \quad (3.63)$$

La trajectoire est donc intégralement fixée par l'énergie mécanique E_m , la constante des aires C , et le choix de la direction de l'axe principal de l'ellipse : cela est similaire au cas newtonien ! Ce n'est pas un hasard, comme nous allons le voir dans la partie suivante.

Théorème de Bertrand

Théorème

Théorème de Bertrand

Considérons une particule soumise au potentiel central $E_p(r)$. Les deux seules formes de potentiels conduisant à des trajectoires fermées pour tous les états liés sont les potentiels

- * newtonien $E_p(r) = -k/r$,
- * harmonique $E_p(r) = m\omega^2 r^2/2$.

Une conséquence directe de ce théorème est qu'il est possible de définir une direction privilégiée de l'espace pour ces deux potentiels, reliant le centre de force au périhélie. Cette direction privilégiée doit alors fournir une nouvelle quantité conservée ! Dans le cas du potentiel newtonien, cette quantité est le vecteur de Runge-Lenz \vec{A} . Dans le cas de l'oscillateur harmonique, la quantité conservée est un tenseur de rang 2, qui l'on peut interpréter comme une matrice. Ce tenseur fournit deux directions privilégiées, perpendiculaires entre elles : les deux axes de l'ellipse. Dans le plan Oxy , ce tenseur a pour représentation matricielle

$$[\vec{A}] = \frac{m}{2} \begin{pmatrix} \omega^2 x^2 + v_x^2 & \omega^2 xy + v_x v_y & 0 \\ \omega^2 xy + v_x v_y & \omega^2 y^2 + v_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

On peut aller bien plus loin dans l'étude comparative des mouvements dans les potentiels newtonien et harmonique : voir la BUP [21] pour plus de détails.

Chapitre 4

Changements de référentiels

Les lois de Newton, présentées au chapitre 1, montrent en évidence le caractère privilégié des référentiels galiliens, dans lesquels le principe d'inertie est vérifié et où l'on peut donc le principe fondamental de la dynamique. Un référentiel est défini comme galilien si celui-ci est en translation rectiligne uniforme par rapport à un... autre référentiel galilien, dont l'existence est possible par le principe d'inertie. Cependant, le référentiel dans lequel il est naturel d'étudier un mouvement n'est pas toujours dans cette situation : il faut alors comprendre comment les lois de la dynamique newtonienne sont modifiées lorsqu'elles sont énoncées dans un référentiel non galilien.

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

1. connaître les lois de transformation des théorèmes généraux de mécanique lors d'un changement de référentiel;
2. savoir interpréter qualitativement l'effet des forces d'inertie d'orientation et de Coriolis lors d'un mouvement;
3. savoir appliquer les différentes méthodes de calcul pour des problèmes mettant en jeu ces forces (perturbatif, variable complexe, etc.);
4. connaître les critères pour considérer un référentiel galilien.

Voici des titres de leçons tombés en 2022 et 2023 qui sont en lien avec ce chapitre :

2023	Dynamique en référentiel terrestre	Présenter l'énoncé et la résolution d'un exercice mettant en jeu la force de Coriolis.
	Système Terre-Lune	Présenter le phénomène des marées et ses conséquences sur le système Terre-Lune.

2022	Approches perturbatives	Le candidat ou la candidate mènera le calcul de la déviation vers l'Est en utilisant un développement limité. Il n'est pas opportun de consacrer plus de dix minutes pour exposer cette partie de la leçon.
	Dynamique en référentiel terrestre	Le candidat ou la candidate abordera l'expérience du pendule de Foucault. Il n'est pas opportun de consacrer plus de quinze minutes pour exposer cette partie de la leçon.
	Système Terre-Lune	Le candidat ou la candidate présentera le phénomène des marées et ses conséquences sur le système Terre-Lune. Il n'est pas opportun de consacrer plus de quinze minutes pour exposer cette partie de la leçon.

4.1 Lois de composition des grandeurs cinématiques

Dans tout ce chapitre, nous chercherons à décrire le mouvement d'un point matériel M de masse m dans deux différents référentiels représentés figure 4.1 :

- le référentiel fixe \mathcal{R} , auquel on associe le repère cartésien $(Oxyz)$,
- le référentiel mobile \mathcal{R}' , auquel on associe le repère cartésien $(O'x'y'z')$.

Ces repères cartésiens de référence seront appelés « repères liés » aux référentiels, et sont parfaitement confondus avec les référentiels.



FIGURE 4.1 – Deux référentiels en mouvement relatif, et leurs repères d'espace associés.

Le point O est, par définition, fixe dans \mathcal{R} , tandis que O' est fixe dans \mathcal{R}' .

4.1.1 Mouvement relatif des deux référentiels

De manière générale, le mouvement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} se décompose en :

- une translation instantanée, que l'on peut décrire par le mouvement de n'importe quel point fixe de \mathcal{R}' (par exemple O'),

- * une rotation instantanée, correspondant au changement d'orientation des vecteurs \vec{u}'_x , \vec{u}'_y et \vec{u}'_z dans \mathcal{R} . On définit ainsi le **vecteur rotation** $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} (= \text{rotation de } \mathcal{R}' \text{ par rapport à } \mathcal{R})$ tel que :

$$\left(\frac{d\vec{u}'_x}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge \vec{u}'_x. \quad (4.1)$$

Idem pour y' et z' .

Ce mouvement général étant décrit, on peut obtenir la formule suivante, très similaire, relatant la dérivée d'un vecteur \vec{A} dans les deux référentiels :

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge \vec{A}. \quad (4.2)$$

Pour démontrer cette formule, on écrit $\vec{A} = a'_x \vec{u}'_x + a'_y \vec{u}'_y + a'_z \vec{u}'_z$. Dans le référentiel \mathcal{R}' , ces vecteurs de base sont constants, d'où

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} = \frac{da'_x}{dt} \vec{u}'_x + \frac{da'_y}{dt} \vec{u}'_y + \frac{da'_z}{dt} \vec{u}'_z. \quad (4.3)$$

En prenant la dérivée dans \mathcal{R} , les mêmes vecteurs sont variables :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} &= \frac{da'_x}{dt} \vec{u}'_x + \frac{da'_y}{dt} \vec{u}'_y + \frac{da'_z}{dt} \vec{u}'_z + a'_x \left(\frac{d\vec{u}'_x}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + a'_y \left(\frac{d\vec{u}'_y}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + a'_z \left(\frac{d\vec{u}'_z}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &= \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge (a'_x \vec{u}'_x + a'_y \vec{u}'_y + a'_z \vec{u}'_z) \\ &= \left(\frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge \vec{A}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

ce qui est bien l'équation (4.2).

4.1.2 Formules de composition

On peut utiliser l'équation (4.2) pour rélier les expressions de la vitesse du point M exprimée dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) &= \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &= \left(\frac{d\vec{OO'}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &= \vec{v}_{\mathcal{R}}(O') + \left(\frac{d\vec{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge \vec{O'M}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Intuition**Loi de composition des vitesses**

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{v}_e, \quad (4.6)$$

où la **vitesse d'entraînement** s'exprime dans le cas général

$$\vec{v}_e = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(O') + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}. \quad (4.7)$$

On peut alors appliquer la même raisonnement une fois de plus :

$$\begin{aligned} \vec{z}_{\mathcal{R}}(M) &= \left(\frac{d\vec{v}_{\mathcal{R}}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &= \left(\frac{d\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \vec{z}_{\mathcal{R}'}(O') + \left(\frac{d}{dt} [\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}] \right)_{\mathcal{R}} \\ &= \left(\frac{d\vec{v}_{\mathcal{R}'}(M)}{dt} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{z}_{\mathcal{R}'}(O') + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \\ &= \vec{z}_{\mathcal{R}'}(M) + 2\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{z}_{\mathcal{R}'}(O') + \left(\frac{d\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge (\vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Intuition**Loi de composition des accélérations**

$$\vec{z}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{z}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{z}_e + \vec{z}_r, \quad (4.9)$$

où l'expression générale de l'**accélération d'entraînement** est (on note $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$)

$$\vec{z}_e = \vec{z}_{\mathcal{R}'}(O') + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}), \quad (4.10)$$

et où l'**accélération de Coriolis** s'exprime

$$\vec{z}_r = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M). \quad (4.11)$$

Dans l'expression de l'accélération de Coriolis, c'est bien la vitesse de M dans le référentiel \mathcal{R}' qui intervient. C'est logique, puisqu'on cherche à exprimer les quantités cinématiques de M dans \mathcal{R} uniquement en fonction de celles dans \mathcal{R}' .

Dans les expressions précédentes, on peut remplacer O' par n'importe quel point lié à \mathcal{R}' (c'est-à-dire n'importe quel point fixe dans \mathcal{R}'). En tant qu'origine du repère lié à \mathcal{R}' , O' est néanmoins souvent le point le plus adéquat.

4.1.3 Cas principaux

En pratique, il faut souvent renseigner les expressions précédentes dans les deux cas particuliers suivants : la translation et la rotation uniforme autour d'un axe fixe.

Translation

Dans le cas d'une translation pure, on a logiquement $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$ et le mouvement de R' est entièrement déterminé par celui d'un de ses points, par exemple O' . On a alors :

$$\begin{aligned}\vec{v}_r &= \vec{v}_{R'}(O') \\ \vec{x}_r &= \vec{x}_{R'}(O') \\ \vec{x}_r &= \vec{0}\end{aligned}\tag{4.12}$$

Lois de composition — Translation

Lorsque R' est en translation dans R , on a :

$$\begin{aligned}\vec{x}_{R'}(M) &= \vec{x}_R(M) + \vec{x}_{R'}(O') \\ \vec{x}_R(M) &= \vec{x}_R(M) + \vec{x}_{R'}(O').\end{aligned}\tag{4.13}$$

Rotation uniforme autour d'un axe fixe

On considère la situation décrite figure 4.2. Le référentiel R' est en rotation à la vitesse angulaire constante $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{\omega} = \omega \vec{u}_z = \omega \vec{u}'_z$.

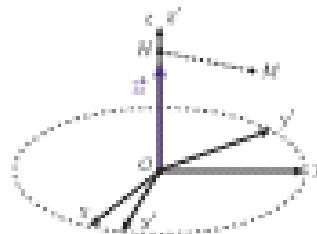


FIGURE 4.2 – Référentiel R' en rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à R .

La vitesse d'entraînement est alors :

$$\vec{v}_r = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}. \tag{4.14}$$

Le vecteur $\vec{\omega}$ étant connu, l'accélération d'entraînement s'écrit :

$$\vec{a}_r = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = -\omega^2 \overrightarrow{OM}, \tag{4.15}$$

où \vec{M} est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation (Oz) (voir figure 4.2). Enfin l'accélération de Coriolis s'écrit :

$$\vec{Z}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{\tau}_{R'}(M). \quad (4.16)$$

Informations Lois de composition — Rotation uniforme autour d'un axe fixe

Lorsque R' est en rotation autour d'un axe fixe dans R , on a :

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_{R'}(M) &= \vec{\tau}_{R'}(M) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}, \\ \vec{\tau}_R(M) &= \vec{\tau}_{R'}(M) - \omega^2 \vec{OM} + 2\vec{\omega} \wedge \vec{\tau}_{R'}(M).\end{aligned}\quad (4.17)$$

4.1.4 Conséquences pour les lois de la dynamique

Supposons que l'on étudie le mouvement du point M dans le référentiel R galiléen. Dans ce référentiel, on peut écrire le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{\tau}_R(M) = \vec{F}, \quad (4.18)$$

où \vec{F} est la résultante des forces extérieures d'application sur M . En utilisant la loi de composition des accélérations, on peut réécrire cette équation sous la forme

$$m(\vec{\tau}_{R'}(M) + \vec{Z}_c + \vec{Z}_s) = \vec{F}. \quad (4.19)$$

Informations

PFD au référentiel non galiléen

Dans le référentiel R' non galiléen, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{\tau}_{R'}(M) = \vec{F} + \vec{F}_{de} + \vec{F}_{ce}, \quad (4.20)$$

où \vec{F}_{de} est la force d'inertie d'un entraînement

$$\vec{F}_{de} = -m\vec{Z}_s, \quad (4.21)$$

et \vec{F}_{ce} est la force d'inertie de Coriolis

$$\vec{F}_{ce} = -m\vec{Z}_c = -m\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{\tau}_{R'}(M). \quad (4.22)$$

Les forces d'inertie d'entraînement et d'inertie de Coriolis diffèrent des forces usuelles car elles ne sont pas invariantes par changement de référentiel. On s'y réfère donc sous le nom de « pseudo-forces » ; en pratique, on peut tout de même réaliser tous les calculs habituels en les traitant de la même façon que les autres forces : par exemple, dans le théorème du moment cinétique, on devra prendre en compte les

moments des forces \vec{F}_α et \vec{F}_{ω} .

Pour finir, nous pouvons faire quelques remarques sur le comportement énergétique de ces forces. Tout d'abord, nous pouvons voir que quel que soit le mouvement, la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_\alpha) = (-2m\vec{\Omega}_{R/R} \wedge \vec{r}_{R'}(M)) \cdot \vec{v}_{R'}(M) = 0. \quad (4.23)$$

Enfin, dans le cas de la rotation uniforme autour d'un axe fixe, la force d'inertie d'entraînement dérive d'une énergie potentielle :

$$dW_\alpha = \vec{F}_\alpha \cdot d\vec{OM} = m\omega^2 \vec{OM} \cdot d\vec{OM}, \quad (4.24)$$

et $d\vec{OM} = d\vec{RM}$ dans ce cas car R est fixe, donc

$$dW_\alpha = \frac{1}{2} m\omega^2 d(RM^2) = d\left(\frac{1}{2} m\omega^2 RM^2\right) = -dE_{pot}, \quad (4.25)$$

où E_{pot} est défini par

$$E_{pot} = -\frac{1}{2} m\omega^2 RM^2. \quad (4.26)$$

4.2 Illustrations de la dynamique en référentiel non-galiléen

Dans cette partie, nous allons étudier le principe fondamental de la dynamique dans différents référentiels non galiléens souvent utilisés en physique : le référentiel géocentrique et le référentiel terrestre. Dans chaque cas, l'apparition des forces d'inertie d'entraînement et d'inertie de Coriolis impliqueraient des modifications quantitatives du mouvement, que l'on étudie succinctement.

4.2.1 Référentiels usuels

En mécanique, le choix d'un « bon » référentiel est dicté par des considérations pratiques. On cherche essentiellement un compromis entre choisir un référentiel où le mouvement sera simple à décrire (il ne viendrait à l'esprit de personne de décrire la chute d'une balle sur Terre dans le référentiel lié à Jupiter...) et s'assurer que le référentiel retenu soit le plus galiléen possible ou à défaut que l'on puisse décrire facilement les forces d'inertie à prendre en compte. On va amener au général à considérer trois référentiels, représentés figure 4.3.

Référentiel de Copernic

Dans le référentiel de Copernic \mathfrak{R}_C , le centre de masse du système solaire est fixe et les axes du repère d'espace lui pointent vers trois étoiles lointaines¹.

1. Ces trois étoiles, si elles sont suffisamment éloignées, apparaissent fixes pour une expérience de durée raisonnable. Ainsi, elles fournissent également les trois directions nécessaires pour définir progressivement le référentiel \mathfrak{R}_C .

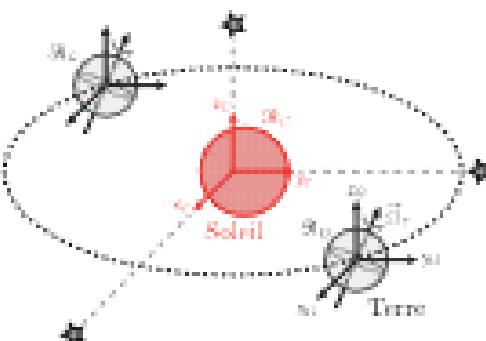


FIGURE 4.3 – Référentiels usuels en mécanique. \mathcal{R}_C est en translation quasi-circulaire par rapport à \mathcal{R}_G , et \mathcal{R}_T est en rotation par rapport à ces deux derniers (ses axes ne sont pas représentés). On a représenté les étoiles lointaines fixant les directions des repères liés à \mathcal{R}_G et \mathcal{R}_C .

Le référentiel héliocentrique \mathcal{R}_H (ou référentiel de Kepler) est défini de manière semblable au référentiel de Copernic, à la différence près que c'est le centre de masse du Soleil (et non le barycentre du système solaire) qui est fixe dans \mathcal{R}_H , les axes des repères d'espace liés étant parallèles. La différence entre \mathcal{R}_C et \mathcal{R}_H est principalement due à Jupiter qui, du fait de son attraction gravitationnelle, produit un mouvement du Soleil autour de leur barycentre.

Dans le référentiel de Copernic, le mouvement du centre d'inertie de la Terre est en première approximation une translation quasi-circulaire dans un plan nommé *plan de l'écliptique* (voir chapitre 3). La période de ce mouvement est de 365,25 jours².

Expérimentalement, on constate que le référentiel de Copernic sera le référentiel « le plus galilien » à notre disposition en pratique, ce point étant discuté à la fin de ce chapitre. Dans la suite, sauf mention contraire, on considérera donc systématiquement \mathcal{R}_C galilien.

Référentiel géocentrique

Le référentiel de Copernic n'est pas adapté pour décrire par exemple le mouvement d'un corps en orbite autour de la Terre. On choisit plutôt dans ce cas le **référentiel géocentrique \mathcal{R}_G** , dans lequel le centre de masse de la Terre est fixe et dont les axes du repère d'espace lié sont parallèles à ceux du repère d'espace de \mathcal{R}_C .

Ce référentiel est en *translation quasi-circulaire* par rapport à \mathcal{R}_C , d'où en particulier $\vec{\Omega}_{\mathcal{R}_G/\mathcal{R}_C} = \vec{0}$. La translation n'étant pas rectiligne uniforme, \mathcal{R}_G n'est pas galilien.

² La période du mouvement de la Terre (*période sidérale*) est plus exactement de 365,256 jours, mais nous utiliserons dans la suite l'*année julienne*, différant comme-on-trouve d'environ 26 secondes. La différence sera négligeable dans la suite.

Une translation circulaire n'est pas une rotation! À tout instant on a $\vec{\omega}_{x_0} = \vec{\omega}_{x_0'}$, et idem en y et z , comme indiqué figure 4.3. En d'autres termes, « le référentiel géocentrique n'a pas compte de la rotation de la Terre ».

Dans le référentiel géocentrique, la Terre est en rotation directe en est autour de l'axe Nord-Sud, avec le vecteur rotation $\vec{\Omega}_T$. Cet axe de rotation est incliné par rapport au plan de l'écliptique d'environ 23° . Sa vitesse de rotation est d'un tour par jour, mais il ne s'agit pas d'un tour parfait. En effet, en une année, la Terre effectue une rotation supplémentaire par rapport aux étoiles fixes que par rapport au Soleil. La période de rotation du mouvement par rapport à ces étoiles fixes est appelée **jour sidéral**: on a $T_{\text{sd}} = 23\text{ h}56\text{ min}4\text{s} = 86\cdot164\text{ s}$. On obtient ainsi la valeur :

$$\Omega_T = \frac{2\pi}{T_{\text{sd}}} = 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (4.27)$$

À la différence entre T_{sd} et T_{an} près, la vitesse angulaire de la Terre est donc trois fois inférieure à celle de la petite aiguille d'une montre (puisque celle-ci réalise une rotation de 360° en 12 heures). Cela montre à quel point $\vec{\Omega}_T$ est une vitesse angulaire faible (mais correspondant à une vitesse d'environ 1700 km/hour à l'équateur, qui nous « décalifrait » si l'atmosphère n'était pas entraînée à la même vitesse³).

Le vecteur rotation $\vec{\Omega}_T$ n'est pas rigoureusement constant. En effet, l'axe de rotation de la Terre possède un mouvement :

- de précession (la fameuse « précession des équinoxes », voir [22]), de période 26 000 ans;
- de nutation de faible amplitude ($9,2''$) et de période 18,6 ans, systématiquement négligé vu sa très faible amplitude.

Les mouvements étant étudiés sur des durées très faibles devant la période de précession, on considère systématiquement³ $d\vec{\Omega}_T/dt = \vec{0}$.

Référentiel terrestre

Pour décrire un mouvement à la surface de la Terre, il faut à tenir compte de ce mouvement de rotation. Le **référentiel terrestre** est le référentiel véritablement lié à la Terre : le centre de la Terre y est fixe et il est en rotation par rapport à \mathcal{R}_G et \mathcal{R}_H de vecteur rotation $\vec{\Omega}_{x_0,\mathcal{R}_T} = \vec{\Omega}_{y_0,\mathcal{R}_T} = \vec{\Omega}_T$. Ainsi, \mathcal{R}_T n'est pas galiléen.

Le **référentiel du laboratoire** (pour lequel la pièce d'étude est fixe) coïncide avec le référentiel terrestre tant que l'on néglige les mouvements locaux sur la Terre (fractures des plaques par exemple). On fait cependant la distinction entre les deux.

³ Les effets des forces de marée ont également tendance à modifier la vitesse de rotation; cet effet est aussi extrêmement lent par rapport aux durées des expériences qui nous intéressent et nous ne le prenons pas en compte ici.

La suite de ce chapitre est consacrée à l'étude de quelques manifestations du caractère non galiléen du référentiel terrestre. Nous choisissons de mener cette discussion en séparant clairement les sources de «non-galilité» :

- dans un premier temps, la rotation propre de la Terre (on suppose le référentiel géocentrique galiléen) a des conséquences spécifiques, via les forces d'incertitude associées;
- dans un second temps, le mouvement du centre d'incertitude de la Terre dans \mathcal{R}_G^* conduit à des effets de marée.

Ces mouvements de la Terre, aujourd'hui considérés comme «évidents», ont mis des siècles avant d'être acceptés (longue domination de la théorie géocentrique, etc.). On recommande la lecture de [23] pour une revue des preuves expérimentales de ces mouvements. La suite du chapitre approfondit certains phénomènes classiques dus au caractère non galiléen du référentiel terrestre.

On utilise également un référentiel référentiel seulement en barycentrique : le référentiel barycentrique d'un système, noté \mathcal{R}_G^* . Celui-ci est tel que le barycentre du système G soit fixe et que les axes du repère d'espace lié soient parallèles à ceux du référentiel d'étude initial, \mathcal{R} . En d'autres termes, \mathcal{R}_G^* est en translation par rapport à \mathcal{R} . Ce référentiel est galiléen si, et seulement si, G est en mouvement rectiligne uniforme dans \mathcal{R} .

L'objectif est qu'il est possible de montrer que les théorèmes géostatiques de la mécanique peuvent toujours s'écrire dans le référentiel barycentrique presque comme dans un référentiel galiléen, alors que le référentiel barycentrique ne l'est pas forcément. Ce référentiel sera donc particulièrement utile lors de l'étude de mouvements complexes de solides. On se réfèrera à [4, BPRM1] pour plus de détails.

On commence donc par supposer que le référentiel géocentrique est galiléen, et on s'intéresse alors à la dynamique dans le référentiel terrestre, en rotation uniforme par rapport à ce dernier.

4.2.2 Verticale apparente

Considérons un point matériel M de masse m , suspendu au bout d'un fil, dans le référentiel terrestre. Les deux forces s'appliquant sur le point sont la force d'attraction gravitationnelle due au champ \vec{G}_T créé par la Terre et la tension du fil \vec{T} . Le principe fondamental de la dynamique *dans le référentiel terrestre non galiléen* s'écrit alors

$$m\ddot{\vec{x}} = m\vec{G}_T(M) + \vec{T} + \vec{F}_{\alpha} + \vec{F}_{\beta}. \quad (4.28)$$

Lorsque le point est au repos, sa vitesse est nulle dans le référentiel terrestre, et on a donc: $\vec{F}_{\alpha} = \vec{0}$. On définit alors le poids \vec{P} tel que

$$\vec{P} = m\vec{G}_T(M) + \vec{F}_{\alpha} = m(\vec{G}_T(M) - \vec{T}_{\alpha}). \quad (4.29)$$

En écrivant $\vec{P} = m\vec{g}$, on en déduit:

$$\vec{g} = \vec{G}_T(M) - \vec{T}_{\alpha}. \quad (4.30)$$

Ainsi, le vecteur intensité de la pesanteur n'est pas exactement collinaire au champ gravitationnel créé par la Terre : il est défini de façon à prendre en compte l'accélération d'inertie d'entrainement due au caractère non galiléen du référentiel terrestre. Cette définition permet de rendre cohérentes toutes les études du mouvement en mécanique réalisées jusqu'ici, en considérant que \vec{g} définit localement une verticale apparente (voir figure 4.6).

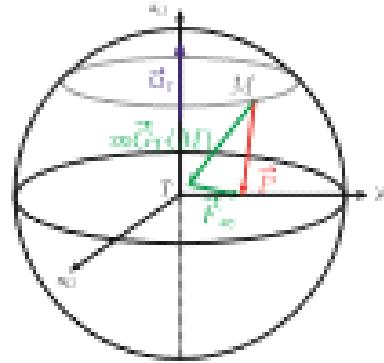


FIGURE 4.6 – Définition de la verticale apparente dans le référentiel terrestre. L'effet de la force d'inertie d'entrainement est fortement exagéré ici pour le rendre visible.

4.2.3 Déviation en chute libre par la force de Coriolis

Considérons désormais un point matériel M de masse m lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur h dans le référentiel terrestre. On suppose la variation d'altitude entre $z = h$ et $z = 0$ suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que la seule force appliquée sur M est le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ (on néglige les frottements). Le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen donne alors

$$m\vec{a} = -mg\vec{u}_z - 2m\vec{u}_T \wedge \vec{v}. \quad (4.31)$$

Cette équation est complexe à résoudre à général car elle couple des composantes différentes de \vec{v} et de \vec{a} . Cependant, on connaît la solution lorsque l'on néglige la force de Coriolis : on a alors $m\vec{a} = -mg\vec{u}_z$, et

$$a(t) = -g, \quad v(t) = -gt, \quad z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4.32)$$

Le vol à $z = 0$ est alors réalisé en une durée $\Delta t = \sqrt{2h/g}$.

Supposons que l'on utilise l'expression de a obtenue dans ce cas pour comparer l'ordre de grandeur de la force de Coriolis avec celui du poids : on a

$$\frac{|2\vec{u}_T \wedge \vec{v}|}{g} = \frac{2M_T g \Delta t}{g} = 2\sqrt{2h} M_T \sqrt{\frac{h}{g}} \sim 10^{-4} \text{ à } 10^{-3}. \quad (4.33)$$

en prenant b de l'ordre de 10 m à 100 m. Cela signifie que lors pour traiter le mouvement de façon perturbative, la force de Coriolis apparaît au 1^{er} ordre. On écrit alors :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 + \dots, \quad (4.34)$$

avec \vec{v}_1 un terme d'ordre 1. Le PFD à l'ordre 0 a déjà été résolu : on a $\vec{v}_0 = -g/\vec{\omega}_p$. À l'ordre 1, on a donc :

$$m \frac{d\vec{v}_1}{dt} = -2m\vec{\Omega}_p \wedge \vec{v}_0 = -2m\vec{\Omega}_p \wedge (-g/\vec{\omega}_p). \quad (4.35)$$

Il vient alors :

$$m \frac{d\vec{v}_1}{dt} = 2mg\vec{\Omega}_p t \sin\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \vec{e}_y = 2mg\vec{\Omega}_p t \cos\lambda \vec{e}_y, \quad (4.36)$$

avec λ la latitude du point M (voir figure 4.5). On a donc une déviation vers l'Est au cours du mouvement :

$$x(t) = x(0) + \frac{1}{2}g\vec{\Omega}_p t^2 \cos\lambda, \quad (4.37)$$

sous une déviation d'amplitude totale :

$$\Delta x = \frac{1}{2}g\vec{\Omega}_p \cos\lambda \left(\frac{2h}{g}\right)^{1/2}. \quad (4.38)$$

À la latitude $\lambda = 50^\circ$, pour $h = 150$ m, on trouve $\Delta x = 2,6$ cm : la déviation est très faible même pour une variation d'altitude importante ! En pratique, il est difficile de la mesurer avec précision à cause des effets des frottements de l'air.

La méthode présentée ici de calcul par développement perturbatif est une méthode classique de résolution de problèmes où la force de Coriolis joue un rôle.

On pourrait poursuivre le développement : la vitesse v vers l'Est implique une composante de la force de Coriolis vers le Nord ou le Sud selon l'hémisphère, et donc une déviation supplémentaire, et cela continue indéfiniment... Cependant, la première correction étant déjà très faible, toute déviation supplémentaire est quasiment impossible à observer expérimentalement.

Pour aller plus loin, on peut consulter le BUP [24].

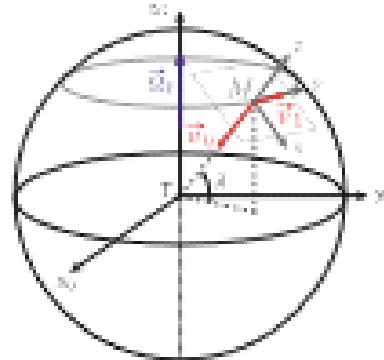


FIGURE 4.5 – Déviation d'un objet dans le référentiel terrestre lors d'une chute libre verticale.

4.2.4 Pendule de Foucault

En 1851, Léon Foucault installe sous la coupole du Panthéon (latitude $\lambda = 48^\circ 51'$) un pendule simple constitué d'une sphère de masse $m = 28\text{ kg}$ (centre d'inertie G) oscillant au bout d'un fil de longueur $L = 67\text{ m}$ avec une déviation maximale $d = 4\text{ m}$. Il mesure une période d'oscillation $T_0 = 16,5\text{ s}$ mais observe une précession du plan des oscillations avec une période $T_p = 31,446\text{ min}$. Il en déduit que le phénomène est dû à la rotation de la Terre et caractérise l'aspect non galiléen du référentiel terrestre. Cherchons à moins ou équation le phénomène pour comprendre en quoi c'est bien la rotation de la Terre qui est à l'origine du phénomène.

On utilise le même repère local que dans la figure 4.5 et on se place dans le référentiel terrestre. Tout d'abord, on observe que l'inclinaison maximale θ_m du filo est telle que

$$\tan \theta_m = \frac{d}{L} = 0,06 < 1. \quad (4.39)$$

On peut donc considérer que le pendule oscille faiblement. La différence entre les altitudes maximale et minimale est :

$$\Delta z = L(1 - \cos \theta_m) \approx L \frac{\theta_m^2}{2} \leq L, \quad (4.40)$$

donc on peut également supposer que G se déplace uniquement dans un plan horizontal défini par $z = 0$. On remarque également que la période d'oscillation T_0 est cohérente avec celle d'un pendule simple, à savoir $2\pi\sqrt{L/g}$. On note O la position du pendule au repos.

Le vecteur rotation de la Terre écrit :

$$\vec{\Omega}_T = \Omega_T (-\cos 2\vec{z}_e + \sin 2\vec{z}_e), \quad (4.41)$$

On en déduit que la force d'insertion de Coriolis s'écrit:

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v} = -2m\Omega_T \begin{pmatrix} -\cos\lambda \\ 0 \\ \sin\lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -2m\Omega_T \begin{pmatrix} -\dot{y}\sin\lambda \\ \dot{x}\sin\lambda \\ -\dot{y}\cos\lambda \end{pmatrix}. \quad (4.42)$$

Comparons l'ordre de grandeur du poids et de la force de Coriolis sur la verticale, sachant que $\dot{y} \sim \frac{\omega_0}{\lambda}$:

$$\frac{F_{CG}}{mg} = \frac{2m\Omega_T (2\pi/T_0) \cos\lambda}{mg} \sim 10^{-5} \ll 1. \quad (4.43)$$

On voit que l'on peut négliger la composante verticale de la force de Coriolis. Si l'on note T_h la composante horizontale de la tension du fil et T_v sa composante verticale, on doit donc avoir $T_h = mg$ pour que le mouvement ne soit qu'horizontal.

Or T_h et T_v sont reliés à la norme T de la tension du fil par $T_h = T \sin \theta$ et $T_v = T \cos \theta$ (voir figure 4.6). On en déduit:

$$T_h = \tan \theta T_0 = \frac{\Omega G}{L} mg \quad \text{car} \quad \theta \ll 1. \quad (4.44)$$

La tension horizontale étant dirigée vers G , on conclut que la force de tension du fil se traduit à une force de rappel discrète:

$$\vec{T}_h = -\frac{mg}{L} \vec{OG} = -m\omega_0^2 \vec{OG}. \quad (4.45)$$

Le principe fondamental de la dynamique donne alors:

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x + 2\omega_0 \dot{y} \quad \text{et} \quad \ddot{y} = -\omega_0^2 y - 2\omega_0 \dot{x} \quad \text{avec} \quad \omega = \Omega_T \sin \lambda \ll \omega_0. \quad (4.46)$$

En pratique, le pendule de Foucault installé au Panthéon dispose d'un mécanisme lui injectant de l'énergie pour maintenir le mouvement, sans quoi les oscillations s'arrêtent au bout de quelques heures à cause des frottements de l'air.

Pour résoudre ce système, on pose $Z = x + iy$. L'équation (4.46) devient alors:

$$\ddot{Z} + 2i\omega\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0. \quad (4.47)$$

Le discriminant associé est $\Delta = -4(\omega^2 + \omega_0^2) \approx -4\omega_0^2$. Les racines sont donc $-i(\omega \pm \omega_0)$ et la solution générale s'écrit:

$$Z(t) = [A e^{i\omega_0 t} + B e^{-i\omega_0 t}] e^{-i\omega t}. \quad (4.48)$$

Supposons que l'on lâche initialement le pendule sans vitesse initiale et avec $x = x_0$, $y = 0$; on a $Z(0) = x_0$ et $\dot{Z}(0) = 0$. Cela se traduit, en utilisant l'inégalité $\omega \ll \omega_0$, par:

$$Z(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t}. \quad (4.49)$$

On en déduit donc:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad y(t) = x_0 \cos(\omega_0 t) (-\sin(\omega t)). \quad (4.50)$$

On a bien rotation du plan d'oscillation à la vitesse angulaire ω ! À la latitude λ du Panthéon, on trouve une période d'oscillation $2\pi/\omega = 31.467 \text{ min}^2 \text{s}$.

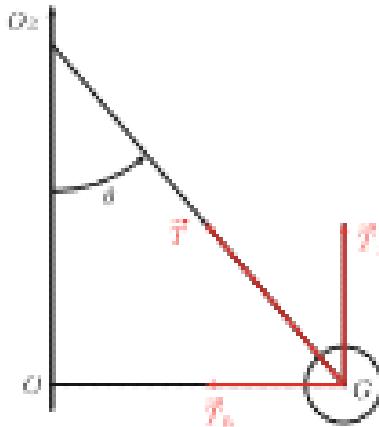


FIGURE 4.8 – Boussinesq de Boussinesq.

4.2.5 Écoulements géostrophiques

Enfin, il est intéressant de présenter une situation où la force de Coriolis n'est pas une perturbation mais joue bel et bien un rôle majeur dans la dynamique : il s'agit des écoulements géostrophiques dans l'atmosphère ou l'océan. Pour le comprendre, dérivons l'équation de Navier-Stokes dans le référentiel terrestre :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{g} - 2\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v} + \nu \Delta \vec{v}. \quad (4.51)$$

On utilise le même système de coordonnées que précédemment, et le vecteur $\vec{\Omega}_T$ est donc donné par l'équation (4.11). On néglige la composante verticale de la vitesse, de sorte que l'équation de Navier-Stokes écrit pour les composantes horizontales :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P - 2\vec{\Omega}_T \sin \lambda \vec{u}_x \wedge \vec{v} + \nu \Delta \vec{v}, \quad (4.52)$$

et on introduit dans la suite le paramètre de Coriolis,

$$f = 2\vec{\Omega}_T \sin \lambda, \quad (4.53)$$

ainsi que le vecteur $\vec{f} = f \vec{u}_x$.

Comme habituellement pour l'étude de l'équation de Navier-Stokes, on introduit des nombres sans dimension qui permettent de comparer les différents termes de l'équation. On définit ainsi deux nouveaux nombres qui caractérisent l'importance de la rotation dans un fluide :

- le **nombre d'Eddy**, rapport des termes de viscosité et de Coriolis

$$Ek \sim \frac{\|\omega \cdot \vec{v}\|}{\|f \wedge \vec{v}\|} \sim \frac{r}{fL}, \quad (4.54)$$

- le **nombre de Rossby**, rapport des termes d'accélération convective et de Coriolis

$$Ro = \frac{\|(\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}\|}{\|f \wedge \vec{v}\|} = \frac{U}{fL}. \quad (4.55)$$

Dans les expressions précédentes, U et L sont respectivement la vitesse typique et l'échelle typique de l'écoulement.

Comme d'habitude, on peut aussi associer des temps caractéristiques aux différents termes de l'équation de Navier-Stokes :

- temps de la rotation $1/f$,
- temps de diffusion visqueuse L^2/ν ,
- temps d'advection L/U .

Par exemple, le nombre de Rossby compare la période de rotation et le temps d'advection.

On peut noter la relation $Re Ek = Ro$ où Re est le nombre de Reynolds sur l'échelle L .

On présente dans le tableau 4.2 quelques ordres de grandeur pour des écoulements à grande échelle dans l'atmosphère ou l'océan.

Echelle typique	Atmosphère	Océan
L (m)	10^6	10^7
U ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	10	0,1
ν ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)	15×10^{-6}	10^{-6}
Ek	10^{-11}	10^{-12}
Ro	0,1	0,01

TABLE 4.2 – Ordres de grandeur pour la circulation des fluides géophysiques à grande échelle. On a pris $\lambda = 45^\circ$, de sorte que $f = 10^{-4} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ces valeurs montrent que les écoulements géophysiques à grande échelle sont dominés par la force de Coriolis : on peut alors simplifier l'équation de Navier-Stokes avec une approximation adaptée.

Théorie:**Approximation géostrophique**

On appelle **écoulement géostrophique** un écoulement dominé par la force de Coriolis :

$$Ek \ll 1, \quad Re \ll 1, \quad (4.56)$$

et dans lequel on néglige aussi les termes instationnaires. On parle aussi d'**approximation géostrophique**.

Les ordres de grandeur du tableau 4.2 permettent d'affirmer que l'approximation géostrophique décrit bien les mouvements horizontaux à grande échelle dans l'atmosphère et l'océan. On parle ainsi de vents et courants géostrophiques.

Dans le cadre de cette approximation, on néglige donc les termes inertiel, instationnaires et visqueux de sorte que l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P = - \vec{f} \wedge \vec{V}. \quad (4.57)$$

Cette équation définit ce que l'on appelle l'**équilibre géostrophique**, puisque forces de pression et force d'inertie de Coriolis s'équilibrent. À la différence des écoulements habituels (Poissonne, par exemple) où les lignes de courant sont généralement colinéaires aux gradients de pression, la situation est ici toute autre, puisque

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} P = 0. \quad (4.58)$$

Au lieu d'être orthogonales, baroques et lignes de courant sont *parallèles*. On peut le comprendre en remarquant que si initialement l'écoulement suit les gradients de pression, la force de Coriolis décrit les trajectoires, et puisque cette force est dominante cela résulte en un écoulement « tourné » de 90°.

L'équilibre entre force de pression et force de Coriolis est représenté pour un anticyclone dans l'hémisphère nord ($f > 0$) figure 4.7. Noter que dans l'hémisphère sud, le sens de \vec{f} serait inversé dans le sens de l'écoulement axial (écoulement anti-horaire autour d'un anticyclone). On peut observer en temps réel ces effets sur le site <https://earth.nullschool.net/fr/current/wind/surface/level/overlay-mean-sea-level-pressure/>.

On entend parfois que cette inversion du sens de l'écoulement entre hémisphères nord et sud s'observe dans le système des levées... c'est complètement faux ! En effet, on peut estimer les nombres de Rossby et Ekman pour un écoulement de vitesse typique $U = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ et de taille $L \sim 10 \text{ cm}$:

$$Ek \sim 1, \quad Re \sim 10^2, \quad (4.59)$$

donc la force de Coriolis ne domine pas du tout l'écoulement ! En pratique, ce sont des paramètres externes comme des perturbations initiales ou la forme du bief qui fixent le sens de la vitesse. Réaliser l'expérience proprement pour observer un éventuel effet de la rotation de la Terre nécessite quantité de précautions.

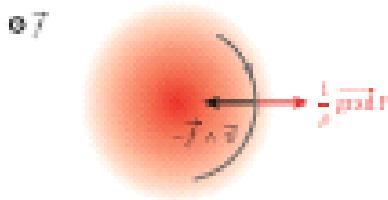


FIGURE 4.7 – Anticyclone (zone de haute pression) dans l'hémisphère nord : l'aire de rotation s'effectue autour de la zone de haute pression dans le sens horaire. L'échelle de couleurs indique la valeur de la pression.

4.2.6 Effets de marées

On s'intéresse désormais à la dynamique dans le référentiel géocentrique, que l'on ne suppose plus galilien. On considère désormais que c'est le référentiel de Copernic qui est galilien, et le référentiel géocentrique est en translation non uniforme par rapport à celui-ci. Il n'y a pas de force d'inertie de Coriolis dans ce cas : le PFD s'écrit, pour un point matériel de masse M ,

$$m\vec{Z}_{R_C} = \vec{F} + m\vec{G}_T(M) + m\vec{G}_A(M) - m\vec{Z}_c, \quad (4.60)$$

où \vec{G}_T est le champ de gravitation créé par la Terre, \vec{G}_A est le champ de gravitation créé par les autres astres et \vec{F} est l'ensemble des autres forces pouvant s'appliquer sur M (force électromagnétique, tension d'un fil, etc.). Dans la suite, on ne prendra pas en considération ces forces, c'est-à-dire qu'on écrira $\vec{F} = \vec{0}$.

Le référentiel géocentrique étant en translation par rapport au référentiel de Copernic, l'accélération d'inertie : \vec{Z}_c est la même en tout point M et vers $\vec{Z}_{R_C}(T)$ avec T le centre d'inertie de la Terre. On peut obtenir l'expression de cette accélération en appliquant le théorème de la résultante cinétique au système (l'aire) étudié dans R_C :

$$M_T \vec{Z}_{R_C}(T) = M_T \vec{G}_A(T), \quad (4.61)$$

avec M_T la masse de la Terre. On en déduit :

$$\vec{Z}_c = \vec{G}_A(T). \quad (4.62)$$

Malgré son apparence simplicité, l'équation (4.61) cache quelques hypothèses. En toute rigueur, le terme de droite doit en effet être la résultante des forces gravitationnelles sur la Terre, soit :

$$\iiint_{\text{Terre}} dm_P \vec{G}_A(P). \quad (4.63)$$

Cette résultante se réduit exactement à $M_T \vec{g}_A(T)$ pour des astres à symétrie sphérique, et est plus généralement valable si la distance astre-Terre est suffisamment grande devant le rayon de la Terre. Ce point est discuté dans la composition A 1999.

Réécrivons alors l'équation (4.60) en tenant compte de l'expression de \vec{g}_r :

$$m \vec{g}_{R_0} = -m \vec{g}_T(M) + m \left[\vec{g}_A(M) - \vec{g}_A(T) \right]. \quad (4.64)$$

On voit apparaître le **terme différentiel des marées** :

$$\vec{g}_A(M) = \vec{g}_A(M) - \vec{g}_A(T). \quad (4.65)$$

C'est donc la **non-uniformité** du champ gravitationnel (des astres autres que celui de la Terre) qui est responsable par un point matériel.

Considérons, pour illustrer choses, l'interaction entre la Terre et la Lune (on pourrait remplacer la Lune par n'importe quel autre astre, comme le Soleil). On suppose la Lune à symétrie sphérique, de sorte que son champ gravitationnel est équivalent à celui d'une masse ponctuelle de masse M_L située au centre de la lune L .

On représente figure 4.8 le terme de marée en différents points de la surface terrestre. L'effet de cette force différentielle est un « allongement » dans la direction TL , et un « raccourcissement » dans la direction orthogonale.

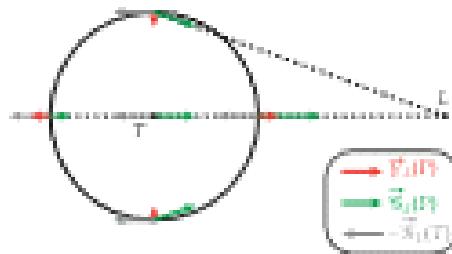


FIGURE 4.8 – Représentation du terme différentiel des marées dû à l'interaction Terre-Lune en quatre points de la surface terrestre.

Pour calculer plus précisément l'expression de \vec{g}_A , on utilise les notations de la figure 4.9. Un point P de la surface de la Terre est repéré par les coordonnées $(x, y) = (R \cos \theta, R \sin \theta)$ (on se place dans un plan méridien contenant (TL) et le point P considéré). On note la distance $TL = D$. On suppose que $R/D \ll 1$, et on calculera ainsi toutes les quantités au premier ordre en R/D .

On a :

$$\vec{g}_L(P) = GM_L \left(\frac{\vec{PL}}{PL^2} - \frac{\vec{TL}}{TL^2} \right). \quad (4.66)$$

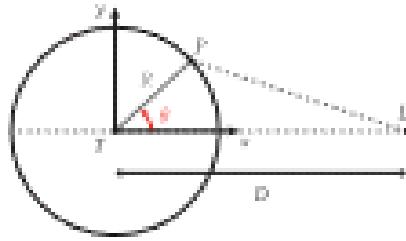


FIGURE 4.7 – Notations pour le calcul du terme différentiel des marées en un point P de la surface de la Terre.

avec $\overrightarrow{TL} = D \vec{u}_x$ et $\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TL} = (D - R \cos \theta) \vec{u}_x - R \sin \theta \vec{u}_y$. Alors

$$\overrightarrow{PL} = \sqrt{(D - R \cos \theta)^2 + R^2 \sin^2 \theta} = D \sqrt{1 - 2 \frac{R}{D} \cos \theta}, \quad (4.67)$$

d'où

$$\frac{1}{PL^2} = \frac{1}{D^2} \left(1 - 2 \frac{R}{D} \cos \theta \right)^{-1/2} = \frac{1}{D^2} \left(1 + 2 \frac{R}{D} \cos \theta \right). \quad (4.68)$$

Cela permet de réécrire

$$\begin{aligned} \overline{r}_g(P) &= \frac{GM}{D^2} \left[-\vec{u}_x + \left((1 - \frac{R}{D} \cos \theta) \vec{u}_x - \frac{R}{D} \sin \theta \vec{u}_y \right) \times \left(1 + 2 \frac{R}{D} \cos \theta \right) \right] \\ &\approx \frac{GM}{D^2} \left[2 \frac{R}{D} \cos \theta \vec{u}_x - \frac{R}{D} \sin \theta \vec{u}_y \right] \\ &= \frac{GM}{D^2} [2x \vec{u}_x - y \vec{u}_y] \end{aligned} \quad (4.69)$$

Cela justifie le nom des \overline{r}_g , figure 4.8. Notamment, on retrouve l'ordre de grandeur du terme différentiel des marées dû à un astre de masse M :

$$\overline{r} = \frac{GM}{D^2} \frac{2R}{D} \quad (4.70)$$

que l'on obtient en prenant $x = R$ et $y = 0$ dans l'équation (4.69). On donne les ordres de grandeur du terme des marées sur Terre dans le tableau 4.3.

On voit donc que les deux autres contribuant le plus à la présence de marées sur Terre sont le Soleil et la Lune. Leurs positions relatives par rapport à la Terre font varier l'intensité des marées observées, selon que les termes différentiels des marées leur étant associés soient de mêmes signes ou de signes opposés dans les mêmes régions du globe. Une étude plus complète de la « théorie statique des marées océaniques » est proposée dans [TLM, 25, 26] et dans l'éprouve A.1999.

	Soleil	Lune	Vénus	Mars	Jupiter
$M \text{ (kg)}$	2×10^{30}	7×10^{22}	5×10^{24}	6×10^{23}	2×10^{27}
$D \text{ (m)}$	$1,5 \times 10^{11}$	4×10^8	4×10^{10}	8×10^{10}	6×10^{11}
$\frac{GM}{D} \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$	6×10^{-3}	3×10^{-3}	2×10^{-2}	4×10^{-3}	4×10^{-2}
$\gamma \text{ (m} \cdot \text{s}^{-2}\text{)}$	5×10^{-7}	10^{-6}	7×10^{-11}	10^{-12}	8×10^{-12}

Table 4.3 – Ordres de grandeur des principales contributions au terme différentiel des masses à la surface de la Terre. La distance D indiquée est la distance minimale moyenne entre la Terre et l'autre considéré.

Le grand collisionneur électron-positron (LEP) était un accélérateur de 27 km de circonférence en service de 1989 à 2000, qui a laissé sa place au LHC. Un de ses objectifs était la production de bosons Z pour notamment déterminer leur masse m_Z et vérifier le Modèle Standard des particules. Cependant, lors des expériences réalisées en 1991, des erreurs systématiques inexplicables empêchaient d'atteindre une précision suffisante pour mesurer m_Z à partir de l'énergie des faisceaux utilisés, cette énergie variant « sans raison ». L'origine se trouve dans les masses terrestres : celles-ci conduisent à une variation de la circonference de 1 mm environ. Le nombre de tours par seconde effectués par les particules était fixé par les champs électromagnétiques de l'accélérateur, cette variation de circonference se traduit par des orbites légèrement différentes et donc une variation d'énergie. Des expériences spécifiques ont confirmé que des variations d'énergie de l'ordre de 10 MeV dues aux marrés étaient observées [27], couvrant la voie à une calibration et donc une détermination précise de m_Z .

4.3 Galiléen ou non ?

Pour conclure ce chapitre, revenons sur la question plus générale du caractère galiléen ou non d'un référentiel. En effet, nous avons montré ici nombre de phénomènes apparaissant lorsque le référentiel considéré (géocentrique, terrestre) n'est pas galiléen, cependant, dans de nombreuses applications réalistes jusqu'ici, nous avons considéré ces référentiels galiléens et les prédictions étaient correctes. La question suivante est donc légitime : peut-on quantifier le caractère galiléen d'un référentiel ?

4.3.1 Référentiel géocentrique

Commençons par le cas du référentiel géocentrique. Étudions le mouvement d'un point dans \mathcal{R}_G , on a alors : écrit l'équation du mouvement suivante :

$$\vec{m} \ddot{\vec{x}}_{R_G}(t) = \vec{F} + \vec{m} \vec{g}_T(t). \quad (4.7)$$

En effet, si le mouvement est étudié dans \mathcal{R}_G , on ne souhaite pas avoir à prendre en compte les champs gravitationnels extérieurs \vec{g}_d . La question est donc la suivante : à quelle(s) condition(s) cette équation du mouvement est-elle adéquate ?

En comparant cette équation à l'équation (4.66), on voit qu'il suffit de pouvoir négliger le terme de marée. Cela revient donc à négliger la non-uniformité du champ \vec{g}_d , ce qui donne le critère suivant.

Intuition	Critère d'utilisation du référentiel \mathcal{R}_G
<p>Le référentiel galactocentrique peut être considéré galiléen pour une expérience de courte durée si l'on reste dans une zone d'espace dont l'extension est faible devant l'échelle typique de variation de \vec{g}_d. Le seul champ gravitationnel à considérer est alors celui de la Terre.</p> <p>Si on note λ_d l'échelle typique de variation de \vec{g}_d, il faut donc avoir :</p>	$T M \ll \lambda_d$ (4.72)

Le critère couramment pris en compte « \mathcal{R}_G peut être considéré galiléen sur une durée faible devant la période de révolution de la Terre » n'est donc pas adapté ! En effet, sur une telle durée, la trajectoire de T est environ rectiligne uniforme (on apprécie la trajectoire circulaire par sa tangente), et on pourrait alors écrire le PFD sans force d'inertie :

$$m \vec{x}_{\mathcal{R}_G}(M) = \vec{F} + m \vec{g}_T(M) + m \vec{g}_d(M). \quad (4.73)$$

Il n'y a priori aucune raison de ne pas considérer $\vec{g}_d(M)$, ce qui est précisément ce que l'on souhaite éviter.

À l'inverse, tant que $T M \ll \lambda_d$, on peut négliger le terme de marées et utiliser le PFD (équation (4.71)). Néanmoins, on voit que les corrections dues au terme de marée négligé vont s'accumuler au cours du temps (cf. le calcul réalisé plus bas pour le référentiel de Copernic), alors le fait qu'on ne peut pas complètement éviter une condition, certes secondaire⁴, sur la durée de l'expérience.

4.3.2 Référentiel de Copernic

Cette discussion nous permet de préciser pourquoi on a considéré jusqu'à présent que le référentiel de Copernic était galiléen avec une bonne approximation. \mathcal{R}_G est en translation quasi-circulaire autour du centre de la Voie Lactée, donc on peut suivre le même raisonnement que précédemment en remplaçant \vec{g}_d par le champ gravitationnel galactique \vec{g}_{gl} , le nouveau référentiel galiléen de référence étant le référentiel « galactocentrique ».

La distance typique de variation de \vec{g}_{gl} est de l'ordre de la taille de la galaxie, donc 10^5 al. On utilise le référentiel de Copernic sur des distances de l'ordre de la taille du système solaire, donc inférieures à 10^{-2} al. Ainsi, le champ galactique peut être approximé uniforme à l'échelle du système solaire, et \mathcal{R}_G galiléen (on ne considérant donc pas le champ \vec{g}_{gl}).

4. Une autre supplémentaire de condition est le fait qu'en considérer très souvent comme exemple des corps en orbite. Or pour ce type de mouvement, les dimensions spatiales et temporelles de la trajectoire sont liées et on peut écrire la condition $T M \ll \lambda_d$ comme une condition sur la durée du mouvement.

Évaluons l'importance du terme de marée galactique sur la description de l'orbite terrestre, que l'on considère être circulaire de rayon $r = 1,5 \times 10^4$ km. Le centre de masse du système solaire, nommé C , décrit dans le référentiel galactocentrique \mathcal{R}_{gal} une trajectoire circulaire à vitesse constante $v_C = 2\pi R/T$ avec $R = 2,7 \times 10^4$ si le rayon de la trajectoire et $T = 240 \times 10^3$ sa période. Le terme de marée dans \mathcal{R}_C est, pour un point M tel que $CM \ll R$:

$$\overline{\mathcal{G}}_{\text{gal}}(M) = \overline{\mathcal{G}}_{\text{gal}}(C) + (\overline{CM} \cdot \overline{\text{grad}}) \overline{\mathcal{G}}_{\text{gal}}(C) + \mathcal{O}(CM^2), \quad (4.74)$$

qui vaut en norme $\sim (r/R)\mathcal{G}_{\text{gal}}(C)$ où $r = CM$.

On peut exprimer $\mathcal{G}_{\text{gal}}(C)$ en exploitant la trajectoire circulaire de C dans \mathcal{R}_{gal} :

$$\mathcal{G}_{\text{gal}}(C) = \left\| \overrightarrow{x}_{\mathcal{R}_{\text{gal}}}(C) \right\| = \frac{v_C^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}. \quad (4.75)$$

En ordres de grandeur, la variation de rayon Δr de la trajectoire de M sur un temps t due aux forces de marées vaut donc :

$$\frac{\Delta r}{r^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \Big|_{\text{marée}} \sim \frac{r}{R} \times \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad \text{d'où} \quad \Delta r \sim 4\pi^2 \left(\frac{t}{T}\right)^2 r. \quad (4.76)$$

Pour l'orbite terrestre sur $t = 1$ an, on obtient une correction $\Delta r \sim 10^{-7}$ km, absolument négligeable! Cela montre bien l'excellent caractère galiléen approximé de \mathcal{R}_C dans les conditions établies précédemment.

4.3.3 Référentiel terrestre

Enfin, on peut conclure quant au caractère (non) galiléen du référentiel terrestre. On a vu dans les exemples présentés précédemment que les effets de la force de Coriolis augmentent avec le temps de l'expérience, la quantité d'intérêt étant $\Omega_T t$. Si $\Omega_T t \ll 1$, les corrections sont très faibles et on peut raisonnablement considérer le référentiel terrestre galiléen (du moins si on a supposé \mathcal{R}_C galiléen, dans le cas contraire il faut aussi tenir compte de la condition sur le terme de marée présentée plus haut).

Indication	Critère d'utilisation du référentiel \mathcal{R}_T
	Si on s'est placé dans des conditions pour lesquelles \mathcal{R}_C peut être considéré galiléen, il faudra tenir compte de la rotation de la Terre <i>sauf si l'expérience est suffisamment courte pour que les corrections soient négligeables</i> . En notant Δt la durée de l'expérience, on doit avoir

$$\Omega_T \Delta t \ll 1 \quad \text{i.e.} \quad \Delta t \ll T_{\text{sol}} = 24 \text{ h} \quad (4.77)$$

pour pouvoir considérer \mathcal{R}_T galiléen.

On le rappelle, « considérer un référentiel galiléen » est une affirmation qui s'applique à une expérience donnée, avec une précision donnée. La condition $G_y dr \ll 1$ assure que les corrections seront faibles (par exemple, pour la déviation vers l'Est, la valeur obtenue de 2,6 cm est bien très faible devant la hauteur de chute), mais si l'expérience est suffisamment précise, il faudra les prendre en compte.

Chapitre 5

Éléments de mécanique du solide

Nous nous sommes pour le moment restreints à la description du mouvement de points matériels. Cela nous a permis de ne pas prendre en compte les 3 degrés de liberté d'orientation qui doivent être considérés en général. Dans ce chapitre, nous cherchons à généraliser les études de mouvement réalisées jusqu'à maintenant, en décrivant complètement les mouvements que peut avoir un solide. Nous supposerons tous les solides indéformables pour commencer, puis nous terminerons le chapitre avec une description succincte des solides déformables.

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

1. savoir paramétriser le mouvement d'un solide à l'aide des angles d'Euler;
2. connaître les propriétés du mouvement de precession;
3. interpréter le mouvement d'un solide dans l'approximation gyroscopique;
4. connaître les quantités physiques entrant en jeu dans la description des solides déformables.

Voici des titres de leçons tombés en 2022 et 2023 qui sont en lien avec ce chapitre :

2023	Rotation d'un système autour d'un axe fixe.	Illustrer expérimentalement et analyser la rotation d'un système déformable autour d'un axe fixe Mettre en œuvre une expérience avec un pendule pesant et l'analyser.
	Rotation d'un système autour d'un point fixe.	Présenter l'approximation gyroscopique sur l'exemple de la toupie Mettre en œuvre une expérience illustrant l'effet gyroscopique et l'analyser.

2022	Effets gyroscopiques	Le candidat ou la candidate présentera le phénomène de la précession des équipes. Il n'est pas opportun de consacrer plus de dix minutes pour exposer cette partie de la leçon.
------	----------------------	---

5.1 Description cinématique d'un solide

Comme d'habitude en mécanique, nous commençons l'étude de la mécanique des solides par la description des mouvements possibles. Pour cela, nous généralisons la cinématique du point matériel.

5.1.1 Mouvement d'un ensemble de points

Dans cette partie, nous considérons un solide *non* *solide*. Ce solide peut être considéré comme un ensemble continu de points matériels. On suppose pour le moment que tous les points considérés sont **indéformables**, c'est à dire que la distance entre chaque couple de points est indépendante du temps. Conséquemment, par exploiter cette notion d'indéformabilité afin de relier les vitesses des différents points du solide.

Formule de Varignon

Soient deux points *A* et *B* de *S*. La variation du vecteur \overrightarrow{OB} pendant l'intervalle de peut être décomposée comme suit :

$$d\overrightarrow{OB} = d\overrightarrow{OA} + d\overrightarrow{AB}. \quad (5.1)$$

Le membre de gauche est $\overline{V}_B dt$ et le premier terme du membre de droite est simplement $\overline{V}_A dt$. On s'autorise donc à la quantité $d\overrightarrow{AB}$. Le solide *S* étant indéformable, la norme de \overrightarrow{AB} ne peut pas varier. Ainsi, le vecteur \overrightarrow{AB} subit une rotation d'angle $d\varphi$ et d'axe $\overline{\omega}$. De plus, $\overline{\omega}$ doit être orthogonal au plan formé par \overrightarrow{AB} et $d\overrightarrow{AB}$ (voir figure 5.1), de sorte que

$$d\overrightarrow{AB} = d\varphi \overline{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}. \quad (5.2)$$

On obtient alors

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{\Omega} \wedge \overrightarrow{AB}, \quad \text{où} \quad \overline{\Omega} = \frac{d\varphi}{dt} \overline{\omega}. \quad (5.3)$$

Remarquons que le vecteur $\overline{\Omega}$ est indépendant du point *A* choisi. En effet, pour un nouveau point *A'* (pour lequel le vecteur $\overline{\Omega}$ deviendrait $\overline{\Omega}'$) :

$$\overline{V}_{B'} = \overline{V}_{A'} + \overline{\Omega}' \wedge \overrightarrow{A'B'} \quad \text{et} \quad \overline{V}_B = \overline{V}_{A'} + \overline{\Omega} \wedge \overrightarrow{AA'}. \quad (5.4)$$

On a $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB}$, donc

$$\overline{V}_{B'} = \overline{V}_{A'} + \left(\overline{\Omega} - \overline{\Omega}' \right) \wedge \overrightarrow{AA'} + \overline{\Omega}' \wedge \overrightarrow{AB}. \quad (5.5)$$

On peut écrire alors $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\Omega} \wedge \vec{AB}$, où

$$\boxed{\vec{\Omega} = \vec{\Omega}'}. \quad (5.6)$$

On remarque aussi que l'on peut inverser les points A et B sans que le vecteur $\vec{\Omega}$ ne change. On en déduit que ce vecteur est indépendant du couple de points (A, B) choisi : il peut être défini au niveau du solide, et on l'appelle **vecteur rotation instantanée**.

Tutoriel

Formule de Varignon

Pour un solide indifférenciable de vecteur rotation instantanée $\vec{\Omega}$, on a pour tout couple de points (A, B) de ce solide :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\Omega} \wedge \vec{AB}. \quad (5.7)$$

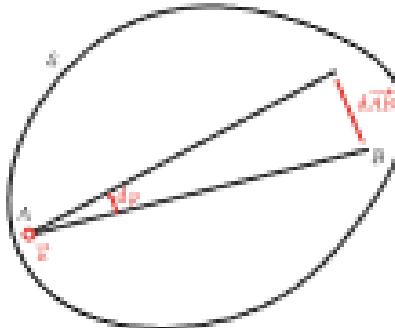


Figure 5.1 – La variation infinitésimale du vecteur \vec{AB} peut être interprétée comme une rotation du vecteur \vec{v} perpendiculaire au plan généré par \vec{AB} et $d\vec{AB}$.

La formule précédente se simplifie dans les cas élémentaires de mouvements de translation et de rotation autour d'un axe fixe.

Mouvement de translation

Un système S de masse totale m est en translation si, à tout instant t , tous les points du système ont la même vitesse :

$$\vec{V}_M(t) = \vec{V}_0(t). \quad (5.8)$$

En particulier pour deux points A et B quelconques du système, $d\vec{AB}/dt = \vec{0}$ et de manière équivalente, par la formule de Varignon,

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega} \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega} = \vec{0}}. \quad (5.9)$$

Si \vec{V}_0 est constante la translation est **rectiligne uniforme** mais ce n'est en général pas le cas : \vec{V}_0 dépend de t et la translation est quelconque.

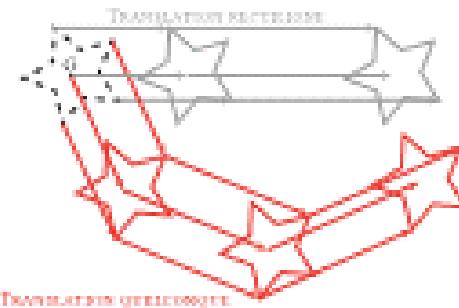


FIGURE 5.2 – Mouvements de translation rectiligne et de translation quelconque. À chaque instant tous les points se déplacent avec la même vitesse.

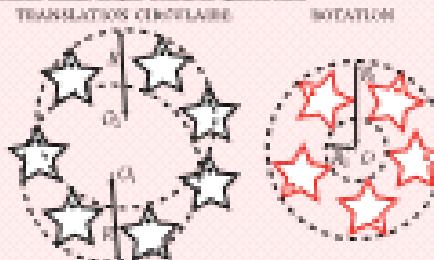
Mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ si tous ses points ont pour trajectoire des cercles de rayon quelconque dont le centre appartient à Δ . Les points de S sur Δ sont de vitesse nulle de sorte que d'après la formule de Véronique la vitesse d'un point M quelconque est donnée par

$$\vec{v}_M = \vec{\Omega} \wedge \vec{HM}, \quad (5.10)$$

où HM est le projeté de HM sur l'axe de rotation Δ . Le mouvement de rotation est donc entièrement caractérisé par le vecteur rotation $\vec{\Omega}$.

Le mouvement de rotation diffère bien de celui de translation circulaire. En effet, dans le premier les trajectoires de centre O sont de rayon quelconque tandis que dans le second les rayons des trajectoires circulaires sont tous les mêmes mais leurs centres diffèrent.



La dynamique d'un tel mouvement est décrite par la théorie du moment cinétique projet sur l'axe Δ :

$$\frac{dI_{\Delta}}{dt} = I_{\Delta} \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{\omega}_M(\vec{F}_{ext}), \quad (5.11)$$

On a écrit $I_A = I_0 \Omega$, avec I_0 le **moment d'inertie** du solide par rapport à l'axe de rotation¹

$$I_0 = \int_{\text{solide}} r_{A,A}^2 \rho_A \, dv_A, \quad (5.12)$$

où $r_{A,A}$ la distance de A à l'axe de rotation A .

L'énergie cinétique du solide est dans ce cas

$$E_k = \frac{1}{2} I_0 \Omega^2. \quad (5.13)$$

5.1.2 Pendule pesant

Dans cette section, nous reprenons le calcul de l'équation du mouvement d'un pendule en rotation autour d'un axe fixe. Cependant, nous ne supposons plus que le pendule est constitué d'un fil de masse négligeable; au contraire, il est fait d'une tige rigide de masse M et de longueur L au bout de laquelle se trouve une masse m . Cette modélisation est plus proche des pendules qui sont généralement utilisés en travaux pratiques. Nous reprenons les notations de la section 1.3 (voir figure 5.3).

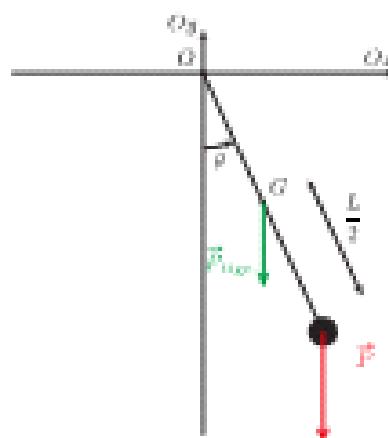


FIGURE 5.3 – Pendule pesant.

L'étude d'un tel pendule diffère par deux aspects de celle du pendule simple :

1. il faut désormais prendre en compte, en plus du moment du poids de la masse m , le moment du poids de la tige, qui s'applique en $G : \overrightarrow{M}_{Ox}(P_{tang}) = -Mg L \sin \theta \overrightarrow{e_x}/2$;
2. le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation n'est plus donné par $J = ml^2$: il faut également prendre en compte le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe de rotation.

1. Ce moment d'inertie est bien constant pour un solide incompressible en rotation autour de A .

Calculons donc le moment d'inertie d'une barre de masse linéaire λ et de longueur L (on a $M = \lambda L$). On considère que la section de la barre est négligeable : la barre peut être considérée comme étant uniformément masse, et son moment d'inertie I_O par rapport à l'une de ses extrémités O est alors

$$I_O = \int_0^L dx x^2 \lambda = \frac{1}{3} \lambda L^3 = \frac{1}{3} M L^2. \quad (5.14)$$

Le théorème du moment cinétique appliquée en O donne alors

$$\left(m\dot{L}^2 + \frac{1}{3} M L^2 \right) \ddot{\theta} = -mgL \sin \theta - Mg \frac{L}{2} \sin \theta. \quad (5.15)$$

On en déduit :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L} \frac{m + M/2}{m + M/3}. \quad (5.16)$$

On observe que l'on n'a pas $\omega_0^2 = \sqrt{I_O/L}$!

Cette situation n'est pas celle qui est réalisée en TP : afin de rapprocher le système d'un véritable pendule simple, sur lequel seul le moment du poids de la masse s'applique, on « équilibre » le pendule en fixant la tige au niveau de son centre de masse G . Le moment du poids de la tige est alors nul.

Calculons le moment d'inertie de la même barre mais par rapport à son centre :

$$I_G = \int_{-L/2}^{+L/2} dx x^2 \lambda = \frac{1}{12} \lambda L^3 = \frac{1}{12} M L^2. \quad (5.17)$$

L'équation du mouvement est alors

$$\left(m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{12} M L^2 \right) \ddot{\theta} = -mg \frac{L}{2} \sin \theta. \quad (5.18)$$

Il vient :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{L/2} \frac{m}{m + M/3}. \quad (5.19)$$

5.2 Description générale du mouvement d'un solide

5.2.1 Description cinématique du mouvement d'un solide

La description générale du mouvement d'un solide passe par la définition de deux systèmes de coordonnées. L'un, $\{X, Y, Z\}$ est lié au laboratoire. Il est supposé fixe et galiléen. L'autre, $\{x, y, z\}$, est lié au solide, se déplace et pivote avec lui. Ces deux repères sont différenciés sur la figure 5.4.

Le mouvement général d'un solide S est décomposé selon deux contributions. D'abord, le mouvement d'un point quelconque de S ; généralement son centre d'inertie G . Ensuite, l'orientation du solide dans l'espace autour de ce point. Cette orientation est donnée par trois angles.

Insciemment, on peut visualiser la décrire par les trois angles de rotation autour des axes du repère lié au solide. Ces angles, représentés figure 5.4 ont des démonstrations issues notamment de la marine et de l'aéronautique :

Le **roulis** est la rotation autour de l'axe longitudinal — lorsqu'un navire est pris de tracas par la houle.

Le **tangage** est la rotation autour de l'axe transverse, devant un arrière — face aux vagues.

Le **laçot** est la rotation autour de l'axe vertical. Il correspond au changement de cap du navire.



FIGURE 5.4 – Le repère noir (X, Y, Z) est associé à un référentiel immobile et galiléen (par exemple le port) tandis que le repère orange (x, y, z) est attaché au solide (ici le bateau) dans tous ses mouvements de translation et de rotation. Les trois angles de tangage, roulis et laçot sont associés à des mouvements perceptibles dans un bateau.

Pourtant ces angles ne sont pas ceux utilisés usuellement en physique. On optera plutôt pour un autre système d'angles indépendants : les angles d'Euler, dont on comprendra l'utilité dans la section 5.3. Ils sont obtenus par rotations successives autour de différents axes :

- la **précession** est la rotation du solide autour de la verticale du repère fixe. L'angle ψ autour de l'axe (GZ) transforme le repère (X, Y, Z) en (s, v, Z) ;
- la **rotation d'angle** θ autour de l'axe (Gv) écarte la verticale du solide de la verticale fixe et fait passer de (s, v, Z) à (s, w, z) ;
- la **rotation propre** d'angle ϕ autour de l'axe (Gz) fait enfin passer de (s, w, z) au repère lié au solide (x, y, z).

Cette procédure est représentée étape par étape sur la figure 5.5.

La base intermédiaire (s, w, Z) est parfois appelée *base de Rigid*. Ces rotations successives sont résumées figure 5.6.

Il faut bien comprendre les mouvements que décrivent chacun de ces trois angles. La rotation propre ϕ est la plus simple puisque c'est la rotation du solide autour de son « propre » axe vertical (Gz). La rotation décrit l'écart angulaire entre l'axe de rotation propre et la verticale du repère de référence (GZ). Enfin, la précession correspond au mouvement de rotation de (Gz) autour de (GZ).

La manière la plus simple d'écrire la vecteur rotation du système est alors :

$$\vec{\Omega} = \dot{\psi} \vec{Z} + \dot{\theta} \vec{v} + \dot{\phi} \vec{z} . \quad (5.20)$$

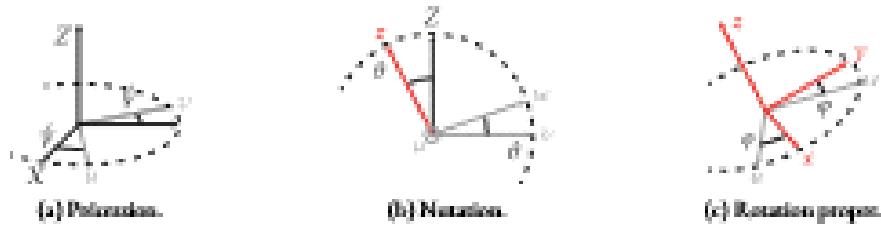


FIGURE 5.5 — On passe du repère fixe (X, Y, Z) au repère mobile (x, y, z) par trois rotations successives selon les angles d'Euler. Les axes noirs sont ceux du repère immobile et les orange ceux du solide. Les axes gris sont les axes intermédiaires de la procédure.

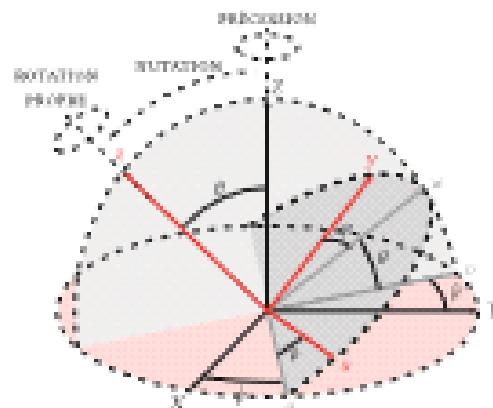


FIGURE 5.6 – Les angles d'Euler. Attention : les axes (x , y , z) ne sont pas nécessairement les mêmes que dans la figure 5.4.

Par projections successives, qui s'obtiennent aisément à partir de la figure 5.5, on obtient l'expression du vecteur rotation dans la base d'Euler :

$$\begin{aligned}\vec{U} &= (\dot{\theta} \cos(\varphi) + \dot{\varphi} \sin(\theta) \sin(\varphi)) \vec{x} \\ &+ (-\dot{\theta} \sin(\varphi) + \dot{\varphi} \sin(\theta) \cos(\varphi)) \vec{y} \\ &+ (\dot{\varphi} + \dot{\vartheta} \cos(\theta)) \vec{z}\end{aligned}\quad (5.21)$$

On notera un glissement de notation fréquent en mécanique du solide. Le vecteur unitaire de l'axe Ox , au lieu d'être \vec{e}_x , devient \vec{z} . Cela permet de mieux nous y retrouver dans la multitude d'axes introduits. Nous conserverons ces notations par la suite lorsque cela s'avère nécessaire.

Une question se pose alors : quelles axes $\{x, y, z\}$ choisir ? On les prend, quand c'est possible, alignés avec les trois axes principaux d'inertie tels que définis dans la partie suivante.

5.2.2 Éléments d'inertie du solide

Tutoriel

Moment et énergie cinétiques pour un solide

De manière générale, le moment cinétique d'un solide évolut en un point O écrit

$$\vec{L}_O = [I_O] \vec{\Omega}, \quad (5.22)$$

où $[I_O]$ est un tenseur symétrique appelé **tenseur d'inertie**, dépendant du point O , et $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation instantanée.

L'énergie cinétique du solide s'écrit quant à elle :

$$E_c = \frac{1}{2} m \omega_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot [I_O] \vec{\Omega}, \quad (5.23)$$

avec G le centre de masse du solide.

Le tenseur d'inertie en un point O écrit en général

$$[I_O] = \int_{\text{solide}} dm \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -yz & -zx \\ -yz & x^2 + z^2 & -xy \\ -zx & -xy & x^2 + y^2 \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \vec{O}\vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Si l'on note (x_G, y_G, z_G) les coordonnées du point G , on peut réécrire le tenseur d'inertie au point O en tenseur d'inertie au point G :

$$[I_G] = [I_O] + m \begin{pmatrix} x_G^2 + z_G^2 & -2x_G y_G & -2x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -2y_G z_G \\ -x_G z_G & -2y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

Ce résultat est connu sous le nom de **théorème d'Huygen**.

Le tenseur d'inertie d'un cube homogène de côté a et de masse m est en son centre G

$$[I_G] = \frac{ma^2}{6} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.26)$$

et est en l'un de ses coins O

$$[I_O] = ma^2 \begin{pmatrix} 2/3 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 2/3 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 2/3 \end{pmatrix} = [I_G] + \frac{ma^2}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Le fait que le tenseur d'inertie soit non diagonal en O signifie que pour faire tourner le cube autour de l'axe (Ox) , il faudra fournir un couple non nul selon (Oy) et (Oz) pour bloquer la rotation !

Le tenseur d'inertie $[I_O]$ étant symétrique, il peut être diagonalisé. Il existe donc une base orthonormale particulière, *propre au solide et au point d'expression*, dans laquelle celui-ci s'écrit :

$$[I_O] = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

Les axes principaux d'*axe de*, donnés par les vecteurs propres² du tenseur $[I_O]$, sont les trois axes de cette base, et les coefficients diagonaux du tenseur $[I]$ sont les *moments principaux d'inertie*. Ces quantités dépendent du point O auquel on effectue le calcul ! On peut interpréter ces axes comme les axes autour desquels il est possible de faire tourner le solide sans devoir subir des couples selon les autres directions.

On se placera dans le quasi-totaleil des cas dans la situation où l'on étudie le moment cinétique en G . En effet, comme nous le verrons dans la section 5.2.4, c'est de ce point dont on peut obtenir le mouvement à partir du PFD, et le mouvement autour de G n'est alors qu'une rotation du solide.

Si le système est en rotation autour d'un axe fixe, dit (Ox) , on a $\vec{\omega} = (\Omega \ 0 \ 0)$ et d'après le théorème de Pythagore, $y^2 + z^2$ est la distance r du point A à l'axe de rotation. Le moment cinétique selon (Ox) s'obtient en considérant le terme (r, z) du tenseur d'inertie :

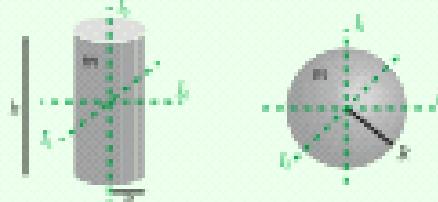
$$\vec{L}_G \cdot \vec{\omega}_x = \int_{vol} dm r^2 \Omega = I \Omega. \quad (5.29)$$

On retrouve bien la définition habituelle du moment d'inertie I_x du moment cinétique ainsi que de l'énergie cinétique $E_T = I \Omega^2 / 2$.

Pour un cylindre plein, homogène (rayon R , hauteur h et masse m), étudié en son centre de masse, les axes principaux d'inertie sont les axes de symétrie représentés ci-dessous en pointillés orange. Le moment d'inertie selon l'axe du cylindre est $I_1 = mR^2/2$ et selon les deux autres axes orthogonaux $I_2 = I_3 = mR^2/4 + mh^2/12$.

Pour une sphère plate, homogène (rayon R et masse m), la symétrie est si forte que les axes principaux d'inertie sont trois axes orthogonaux quelconques. Les moments d'inertie selon ces trois axes sont égaux $I_1 = I_2 = I_3 = 2mR^2/5$.

2. Lorsque le solide possède des axes de symétrie, ils constituent automatiquement les axes principaux d'inertie (voir exemple ci-après).



L'étude pour équations géométriques se trouve facilement dans la littérature, notamment [5].

5.2.3 Mouvement dans le référentiel du solide

Pour un solide, les équations du mouvement sont au nombre de 6 : en plus des 3 équations décrivant le mouvement du centre de masse (similaires aux équations pour un point matériel), 3 équations doivent décrire l'évolution de l'orientation du solide dans l'espace au cours du temps. Commençons par étudier un cas simplifié, dans lequel on peut se ramener à l'évolution de 3 grandeurs seulement : l'étude de la rotation d'un solide dans son propre référentiel.

On se place pour commencer dans un référentiel \mathcal{R} supposé galiléen, et on suppose de plus que le solide n'est soumis qu'à une résultante des forces s'appliquant au centre de masse G . Le moment cinétique \vec{J}_G est alors conservé :

$$\left(\frac{d\vec{J}_G}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{0}. \quad (5.30)$$

On se place alors dans un référentiel privilégié : le référentiel \mathcal{R}_G lié au solide S et de centre G . Dans celui-ci, le mouvement est une simple rotation instantanée décrite par un vecteur $\vec{\Omega}$. L'équation (5.30) devient donc

$$\left(\frac{d\vec{J}_G}{dt} \right)_{\mathcal{R}_G} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{J}_G \vec{\Omega}) = \vec{0}. \quad (5.31)$$

On prend pour axes du repère lié au référentiel \mathcal{S} les trois axes principaux d'inertie du solide en G , et on suppose que l'on a $I_1 < I_2 < I_3$. L'équation (5.31) peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_2 - I_3)\Omega_2 \Omega_3 &= 0, \\ I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_3 - I_1)\Omega_3 \Omega_1 &= 0, \\ I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_1 - I_2)\Omega_1 \Omega_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ces équations sont appelées **équations d'Euler**. Elles permettent notamment d'étudier la stabilité de la rotation d'un solide autour de ses axes principaux d'inertie. Considérons par exemple que le solide est un

rotation uniforme selon l'axe correspondant à I_3 . On a alors $\Omega_1 = \text{const}$ (soit $d\Omega_1/dr = 0$) et pour l'onde de la stabilité, on peut supposer que l'on a

$$\Omega_2, \Omega_3 \ll \Omega_1. \quad (5.33)$$

Les équations deviennent alors

$$\frac{d^2\Omega_2}{dt^2} + \frac{(I_2 - I_3)(I_1 - I_3)}{I_1 I_3} \Omega_2^2 \Omega_3 = 0, \quad (5.34)$$

et de même pour Ω_3 . On obtient donc deux équations d'oscillations harmoniques avec une pulsation réelle : la rotation est stable. On obtiendrait le même résultat en supposant que la rotation a lieu autour de l'axe correspondant à I_2 .

Cependant, si on suppose que la rotation a lieu autour de l'axe de moment d'inertie I_2 , on obtient

$$\frac{d^2\Omega_1}{dt^2} + \frac{(I_2 - I_3)(I_1 - I_2)}{I_1 I_2} \Omega_2^2 \Omega_1 = 0, \quad (5.35)$$

et de même pour Ω_2 . On observe donc une équation d'oscillation harmonique avec une pulsation imaginaire : cela témoigne de la présence d'une instabilité, connue sous le nom d'**effet D'jani below** (ou effet de la raquette de tennis, car on peut le voir facilement lorsque l'on lance une raquette de tennis dans l'air).

Ce raisonnement repose sur le fait que les trois moments d'inertie I_1 , I_2 et I_3 sont différents.

5.2.4 Équations du mouvement, torseurs

On prend désormais le cas d'un référentiel quelconque : on doit décrire le mouvement du centre de masse en plus de la rotation du solide sur lui-même. Afin d'unifier toutes les équations, on introduit le concept de torseur.

Un **torseur** est un ensemble de deux quantités vectorielles appelées **éléments de réduction du torseur** : la **résultante** \vec{R} et le **moment** $\vec{M}_{\vec{A},\vec{R}}$. Contrairement à la résultante, qui est une grandeur scalaire, le moment dépend du point de calcul \vec{A} . Cependant, la somme de \vec{R} et de $\vec{M}_{\vec{A},\vec{R}}$ en un point \vec{A} quelconque du système suffit à le calculer en tout point grâce à la relation de Varignon qui lie nécessairement les deux éléments de réduction du torseur :

$$\vec{M}_{\vec{B},\vec{B}}(\vec{B}) = \vec{M}_{\vec{A},\vec{A}} + \vec{R}\vec{J}_{\vec{A}} \times \vec{R}. \quad (5.36)$$

Un torseur n'est pas la simple juxtaposition de deux vecteurs quelconques. L'un et l'autre doivent être reliés par la relation de Varignon.

Le tenseur T d'un solide S dans le référentiel R exprimé au point P est globalement noté :

$$T(P, R) = \left\{ \frac{\vec{R}}{\partial A_P} \right\}_R \quad (5.37)$$

Comme nous disposons, dans la suite, d'un unique référentiel galiléen, nous omettrons d'indiquer la base R dans l'écriture des tenseurs et des dérivées.

L'écriture des équations du mouvement, dans le cas d'un point matériel, permettait de séparer la cinématique (représentée par le vecteur vitesse \vec{V}) à la dynamique (représentée par la résultante des forces \vec{P}). Cependant, une étape intermédiaire était nécessaire : passer de la vitesse à la quantité de mouvement \vec{P} . Dans le cas d'un point matériel, cette étape appelée **cinétique** est triviale et n'est pas explicitée. Au contraire, pour un solide, cette étape n'est pas évidente car le champ de vitesse dépend fortement de la répartition de la masse dans ledit solide. Dans la suite, nous allons introduire ces trois étapes et les tenseurs (qui remplacent les vecteurs de la mécanique du point) correspondants.

Le tenseur cinématique décrit le mouvement instantané d'un solide. Nous avons déjà rencontré ses composantes :

Tenseur	Tenseur cinématique
Pour un solide indéformable, le vecteur rotation $\vec{\Omega}$ et la vitesse en un point définissent le tenseur cinématique du solide :	$V(P) = \left\{ \frac{\vec{\Omega}}{\vec{v}_P} \right\}, \quad (5.38)$

et ce en vertu de la loi de composition des vitesses qui constituent, pour ce tenseur, la relation de Vrignon.

Lorsqu'un tenseur a une résultante nulle, on parle de **couple** ; le moment est alors indépendant du point d'après la relation de Vrignon. Par exemple dans le cas d'une translation ($\vec{\Omega} = \vec{0}$), le tenseur cinématique est un couple et la vitesse est la même en tout point.

Lorsqu'en contre le moment est nul au moins en un point, on parle de **glisseur**. C'est notamment le cas du tenseur cinématique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe puisqu'alors \vec{v} est nulle en tout point de l'axe.

Torseur cinématique

La cinématique d'un solide est décrite par deux quantités :

- la **réalisme cinématique** ou l'équivalence de la quantité de mouvement d'un point matériel pour un solide :

$$\vec{P} = \int_{\text{solide}} d\tau \rho(A) \vec{v}_A = \int_{\text{solide}} dm \vec{v}_x, \quad (5.39)$$

- le moment cinétique est l'équivalent du moment cinétique d'un point matériel pour un solide :

$$\vec{L}_S = \int_{\text{solide}} dv \vec{P} \vec{d} \wedge (\rho(\vec{d}) \vec{v}_{\vec{d}}) = \int_{\text{solide}} dm \vec{P} \vec{d} \wedge \vec{v}_{\vec{d}}, \quad (5.40)$$

Ces deux quantités vérifient la relation de Varignon

$$\vec{L}_S = \vec{L}_P + \vec{E} \vec{d} \wedge \vec{P}, \quad (5.41)$$

de sorte que \vec{P} et \vec{L}_P forment bien un couple.

Inertiel	Torseur cinétique
Le torseur cinétique d'un système de points S s'exprime au point P par :	
	$\mathcal{C}(P) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{P} \\ \vec{L}_P \end{array} \right\}. \quad (5.42)$

Torseur dynamique

La dynamique d'un point est décrite par son accélération. En mécanique du solide, on introduit le torseur dynamique dont les éléments de réduction sont les suivants :

- la résultante dynamique

$$\vec{Z} = \int_{\text{solide}} dm \vec{Z}(\vec{d}), \quad (5.43)$$

- le moment dynamique en P

$$\vec{D}_P = \int_{\text{solide}} dm \vec{P} \vec{d} \wedge \vec{Z}(\vec{d}). \quad (5.44)$$

Inertiel	Torseur dynamique
Le torseur dynamique d'un système de points S s'exprime au point P par :	
	$\mathcal{D}(P) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{Z} \\ \vec{D}_P \end{array} \right\}. \quad (5.45)$

Les torseurs cinétiques et dynamiques sont reliés par les relations suivantes :

$$\vec{Z} = \frac{d\vec{P}}{dt} - m \vec{Z}_s, \quad (5.46)$$

$$\vec{D}_P = \frac{d\vec{L}_P}{dt} - m \vec{v}_G \wedge \vec{v}_P, \quad (5.47)$$

où la vitesse \vec{v}_P n'est pas celle du point P lié au solide S mais celle d'un « point coïncidant » uniquement géométrique — c'est-à-dire non lié au système — confondu avec P à l'instant du calcul.

Si l'on s'intéresse à la dynamique de la roue dans l'exemple page 46, le point coïncident au niveau du contact entre la roue et le sol change à chaque instant : sa vitesse dans le référentiel du laboratoire est simplement : $\dot{x}\vec{u}_x$.

Torseur d'action

On peut alors introduire un torseur associé aux forces qui s'appliquent sur le solide. On introduit :

- la résultante des actions mécaniques, qui est l'équivalent de la force sur un point matériel pour un solide :

$$\vec{R} = \int_{\text{sol}} d\vec{f}_A , \quad (5.48)$$

avec $d\vec{f}_A$ la force subie par un élément infinitésimal de contact en A ;

- le moment des actions mécaniques, qui est l'équivalent du moment d'une force sur un point matériel pour le solide :

$$\vec{M}_P = \int_{\text{sol}} \vec{PA} \wedge d\vec{f}_A . \quad (5.49)$$

Indication

Torseur d'action

Le torseur d'action d'un système de points S s'exprime au point P par

$$\omega A(P) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_P \end{array} \right\} . \quad (5.50)$$

La notion de torseur d'action généralise celle de force. En effet, en général, on ne peut pas définir un point d'application pour l'action associée à un torseur ωA . On ne peut parler de force que dans le cas où ωA est un glisseur : le point d'application de la force est alors sur l'axe où le moment de ωA est nul.

Le torseur d'action d'un solide S soumis seulement à son poids exprimé au centre d'inertie G du solide est un glisseur :

$$\omega D(G) = \left\{ \begin{array}{c} \vec{m}\vec{f} \\ 0 \end{array} \right\} . \quad (5.51)$$

Équations du mouvement

Pour un système indéformable, dans un référentiel galiléen et au point P fixe, on a :

$$\omega D(P) = \omega A_{\text{ext}}(P) , \quad (5.52)$$

avec ωA_{ext} le torseur des actions extérieures.

Cette équation permet de trouver le tenseur dynamique, puis de renoncer au tenseur cinématique, pour des actions extérieures données. Il est alors possible de retrouver le champ de vitesse et le vecteur rotation instantané à l'aide du tenseur d'inertie, en écrivant les éléments de réduction du tenseur cinématique au point G :

$$\vec{P} = m \vec{\omega}_G \quad \text{et} \quad \vec{I}_G = [I_G] \vec{\Omega}, \quad (5.53)$$

Par formule de Vargasse, on peut ensuite obtenir le champ de vitesse dans tout le solide.

Ces sections nous ont permis d'introduire les notions de tenseur d'inertie et de tenseur, qui ne sont pas cruciales mais dont il est bon d'avoir pris connaissance. On retiendra surtout les faits suivants :

- * les résultats concernant la mécanique du solide indéformable sont la prolongation directe de ceux pour la mécanique du point, à ce près que le passage de la cinématique à la dynamique nécessite la compréhension de la répartition de masse du solide;
- * les axes principaux d'un solide sont les axes autour desquels il est possible de faire tourner le solide sans subir de couple dans les autres directions;
- * une action sur un solide ne peut pas toujours se ramener à une simple force s'appliquant en un point.

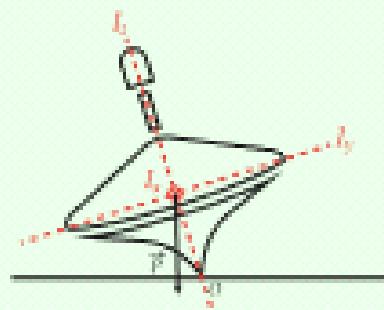
5.3 Rotation d'un solide autour d'un point fixe

Dans cette section, nous allons décrire le mouvement particulier d'un solide autour d'un point fixe O . Le solide étudié est supposé homogène et à symétrie de révolution autour de l'axe $\langle Ox \rangle$ de sorte que $I_x = I_y \neq I_z$ et G appartient à $\langle Ox \rangle$. On note

$$\overrightarrow{OG} = x \vec{z}. \quad (5.54)$$

Le solide est soumis à un champ de force constant dans le moment en O en posé par \vec{M} . Il s'agit généralement du champ de pesanteur. La liaison en O est supposée parfaite de sorte que le moment, en O , de la réaction du support est nul (voir exemple de la roue).

La roue est l'exemple le plus classique d'un système en rotation autour d'un point fixe et le point O correspond à sa partie posée sur le support.



Cependant on peut, grâce à une liaison cardan, décider de placer le point O où l'on veut sur l'axe du solide et notamment modifier la distance a . C'est notamment le cas des gyroscopes de démonstration. Lorsque O coïncide avec le centre d'inertie G du solide, le gyroscope est dit *équilibré*.

5.3.1 Équation du mouvement d'un gyroscope

Dans toute la suite nous appliquerons l'étude au **gyroscope**. Il s'agit d'un dispositif mécanique en rotation rapide autour d'un axe monté sur un support pivotant librement [Dico]. Il est représenté figure 5.7 sur laquelle nous rappelons aussi les principaux axes permettant de définir les angles d'Euler (voir pour rappel la section 5.2.1).

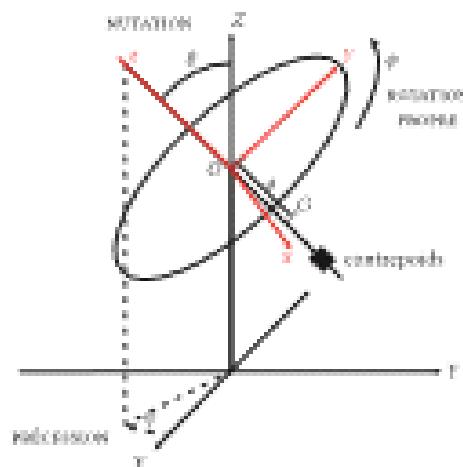


FIGURE 5.7 – Le gyroscope. Les trois rotations sont libres. Le contrepoids permet de régler la distance a entre le point de fixation O et le centre de gravité G .

L'inertie du gyroscoppe est double. En vue du concours, d'autant, il peut permettre d'élargir la notion importante de précession, en théorie incontournable pour certains montages. Il a aussi un intérêt industriel puisqu'il permet de stabiliser et de mesurer certains mouvements; nous y reviendrons.

Approximation gyroscopique

L'**approximation gyroscopique** consiste à imposer que le moment cinétique du solide exprimé au point O soit strictement collinaire à \vec{OG} et vaille

$$\vec{L}_O = I_0 \dot{\phi} \vec{Z}. \quad (5.55)$$

Cette approximation est généralement vérifiée pour les gyroscopes, qui sont souvent utilisés avec une vitesse de rotation proche très élevée devant les deux autres vitesses de rotation

$$|\dot{\phi}| \gg |\dot{\psi}|, |\dot{\theta}|. \quad (5.56)$$

De plus, la constitution des solides « trapus » fait que généralement $I_1 \approx I_2 \approx I_3$. Dans lors, le moment cinétique du solide selon l'axe de rotation propre est nettement supérieur aux deux autres :

$$|I_0 \dot{\phi}| \gg |I_1 \dot{\psi}|, |I_2 \dot{\theta}|. \quad (5.57)$$

et il est effectivement collinaire à l'axe (Oz) en bonne approximation.

L'approximation gyroscopique ne peut pas se résumer à $|\dot{\phi}| \gg |\dot{\psi}|, |\dot{\theta}|$. En effet, si les moments d'inertie sont équivalents et que celui associé à $\dot{\phi}$ est nettement inférieur aux deux autres on ne pourra pas se ramener à $\vec{L}_O = I_0 \dot{\phi} \vec{Z}$. Ce raccourci n'est ainsi valide que si les trois moments d'inertie sont du même ordre de grandeur, ce qui est souvent le cas.

Équation de précession

Le théorème du moment cinétique s'écrit alors, pour le solide, dans un référentiel galiléen et au point O :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OG} \wedge \vec{F}. \quad (5.58)$$

Combiné à l'approximation gyroscopique, l'expression du théorème du moment cinétique mène à (\vec{L}_0 est la norme du moment cinétique \vec{L}_O) :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \omega \vec{Z} \wedge (-mg \vec{Z}) - \omega \frac{\vec{L}_0}{I_0} \wedge (-mg \vec{Z}) \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \left(\frac{mgx}{I_0} \vec{Z} \right) \wedge \vec{L}_0. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Cette équation est une équation de précession dont les propriétés générales sont exposées dans la section [5.3.2](#).

Gyroscope équilibré

Si le gyroscope est équilibré, c'est-à-dire qu'il est maintenu par son centre d'inertie ($\vec{OG} = \vec{0}$ donc $a = 0$), le théorème du moment cinétique appliqué dans un référentiel galiléen impose que \vec{T}_G est constant en norme comme en direction.

Dans ce cas, et *dans un référentiel galiléen*, le gyroscope persévère dans son seul mouvement de rotation propre. C'est cette propriété qui a intéressé L. Foucault au milieu du XIX^{ème} siècle. Comme précédemment étudié dans le chapitre 4, observant qu'un tel gyroscope déstabilisé posé à la surface de la Terre précessait, il en déduisit que le référentiel terrestre n'est pas galiléen!

5.3.2 Généralités sur le mouvement de précession

Les équations de la forme

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{J} \quad (5.60)$$

avec $\vec{\Omega}$ constante (de norme homogène à une vitesse angulaire) sont des **équations de précession**. Prenons nous pour l'étudier dans une base telle que $\vec{\Omega}$ est posé par \vec{Z} , les vecteurs \vec{X} et \vec{Y} étant choisis de manière quelconque pour compléter la base directe.

Voir à ce qui est présenté plus haut sur les angles d'Euler, \vec{X} , \vec{Y} et \vec{Z} sont bien les vecteurs unitaires de la base fixe liée au sol.

L'équation de précession impose immédiatement la conservation de la norme de \vec{J} et de sa composante selon (OZ) . En effet, le produit scalaire de l'équation (5.60) avec \vec{J} donne

$$\begin{aligned} \vec{J} \cdot \frac{d\vec{J}}{dt} &= \vec{J} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{J}) \\ \frac{d\vec{J}^2}{dt} &= 0 \quad \text{soit} \quad \|\vec{J}\| = \text{cste}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

De plus, la projection de (5.60) sur \vec{Z} (vecteur constant) implique

$$\begin{aligned} \vec{Z} \cdot \frac{d\vec{J}}{dt} &= \vec{Z} \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{J}) \\ \frac{d(\vec{Z} \cdot \vec{J})}{dt} &= 0 \quad \text{soit} \quad J_Z = \text{cste}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Ainsi, lorsqu'il est régi par une équation de précession, le mouvement de \vec{J} est extrêmement contraint. Il est de norme constante et de projection constante sur la verticale. \vec{J} n'a donc pas d'autre choix que de décrire un cercle appelé *aire de précession* représenté figure 5.8.

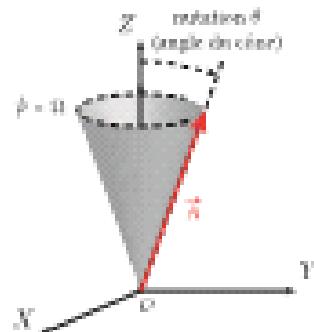


FIGURE 5.8 – Cône de précession décrit par le vecteur \vec{A} dont le mouvement est dirigé par une équation de précession.

Une autre équation de précession classique est celle qui governise la dynamique d'un moment magnétique sous l'effet d'un champ \vec{B} .

Vitesse de précession

La vitesse de précession peut être calculée en résolvant l'équation (5.60). En projetant $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ on peut écrire :

$$\frac{dJ_x}{dt} = -\Omega J_y \quad (5.63)$$

$$\frac{dJ_y}{dt} = \Omega J_x \quad (5.64)$$

$$\frac{dJ_z}{dt} = 0. \quad (5.65)$$

L'équation (5.65) indique la conservation de la composante selon \vec{Z} de \vec{J} . Les équations (5.63) et (5.64) peuvent se résoudre en considérant la combinaison (5.63)+i(5.64) :

$$\frac{d}{dt}(J_x + iJ_y) = \Omega(-J_y + iJ_x) = i\Omega(J_x + iJ_y), \quad (5.66)$$

et en posant $J_x + iJ_y = e^{i\Omega t}\theta$. On en déduit :

$$(J_x + iJ_y)e^{-i\Omega t} = i\Omega e^{i\Omega t}\theta \quad \text{soit} \quad (J_x + iJ_y) = i\Omega e^{i\Omega t}\theta. \quad (5.67)$$

La partie réelle de cette équation ($\theta = 0$) implique que $J_x^2 + J_y^2$ soit constant, et comme J_z aussi on conserve la conservation de la norme $\|\vec{J}\|$. La partie imaginaire nous montre que l'angle formé par \vec{J} sur le plan horizontal varie comme

$$\dot{\theta} = \Omega. \quad (5.68)$$

Ainsi, \vec{A} précesse à la vitesse angulaire Ω .

Tutoriel	Équation de précession et conséquences
	<p>Lorsque le mouvement d'un vecteur \vec{A} est dicté par la donnée d'un vecteur $\vec{\Omega}$ constant et de l'équation de précession</p> $\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{A}, \quad (5.69)$ <p>\vec{A} décrit un <i>oblique</i> autour de $\vec{\Omega}$ (figure 5.8) à la vitesse angulaire Ω. En particulier, la norme de \vec{A} et sa projection sur l'axe de $\vec{\Omega}$ sont conservées.</p>

5.3.3 Précession du gyroscope

Les résultats généraux sur la précession s'appliquent immédiatement au cas du gyroscope. En effet, il obéit à l'équation de précession (5.69) pour laquelle \vec{A} est le moment cinétique \vec{L}_G et

$$\vec{\Omega} = \frac{mgd}{J_0} \vec{Z}. \quad (5.70)$$

Il y a donc conservation de la norme L_G de \vec{L}_G et de sa composante selon la verticale $\{OZ\}$. De plus, le moment cinétique suit à son tour la trajectoire du *oblique de précession* déjà représenté figure 5.8. Puisqu'enfin, dans l'approximation gyroscopique, \vec{L}_G est solidaire de l'axe de révolution du solide, le gyroscope suit aussi ce mouvement.

Cette trajectoire du gyroscope est donc *parabolique* : sous l'effet du poids on aurait pu s'attendre à le voir simplement tomber et osciller comme un pendule. Il n'en est rien : le centre d'inertie se met à bouger horizontalement ! Ce comportement surprenant est directement lié, comme nous l'avons démontré, à la rotation rapide du solide sur lui-même. Une illustration est disponible en suivant ce lien : <https://www.youtube.com/watch?v=CEKtn1ZfhxI>.

On peut se demander quelle force engendre la précession du gyroscope. Pour le comprendre appliquons le principe fondamental de la dynamique au centre de gravité G . Le gyroscope n'est soumis qu'à son poids \vec{P} et la réaction du support décomposée en $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{T}$ comme il est d'usage. On obtient

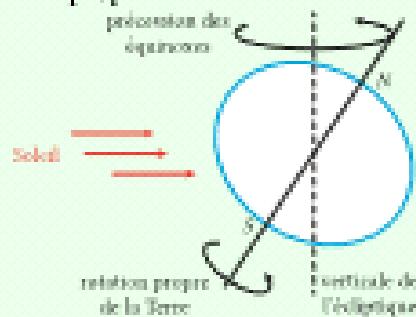
$$m\vec{Z}_G = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{T}. \quad (5.71)$$

Or, lorsque le gyroscope penche, l'accélération verticale de G est nulle de sorte que $\vec{T} = -\vec{R}_N$. En revanche elle est non nulle dans le plan horizontal d'où on déduit que $\vec{T} \neq \vec{0}$. Ainsi, du fait de l'importance moment cinétique du gyroscope, c'est le support qui transfère le mouvement de balancer vertical en mouvement de rotation horizontale.

Quoique a déjà lancé une toupie soit que plus elle tourne vite sur elle-même (rotation propre ω importante, approximation gyroscopique vérifiée), plus elle sera stable et son axe de rotation changera peu (précision haute). Lorsque, du fait des frottements, elle perd de la vitesse et donc peu à peu de l'approximation gyroscopique, elle commence à tomber sous l'effet classique de son poids et son axe Gz penche de plus en plus vite. Ce phénomène se comprend bien d'après l'égalité

$$\Omega_z = \frac{mgx}{I_{xx}}. \quad (5.72)$$

La précession des équinoxes est une autre manifestation famuse du phénomène étudié ici. Du fait de la non-sphéricité de la Terre, le couple exercé sur elle par le Soleil et la Lune est non nul. Il en résulte que l'axe de rotation de la Terre, qui est incliné de $23,5^\circ$ par rapport à la verticale de l'équateur, effectue autour d'elle un tour complet en à peu près 26 000 ans.



L'histoire liée à ce phénomène implique de grands astronomes comme Hippocrate de Nicée ou Copernic, et est largement présentée, de même que le détail des calculs, dans [22].

5.3.4 Couple gyroscopique

Considérons maintenant un gyroscope équilibré (O et G coïncident). En absence d'autre force que le poids, son moment cinétique est constant. Que se passe-t-il si on cherche à modifier \vec{L}_G ?

Pour simplifier l'étude, nous supposons que le moment cinétique est contraint à évoluer dans le plan horizontal, par exemple par une fixation qui préserve avec lui. Le mouvement du gyroscope est donc réduit à sa précession et le moment cinétique \vec{L}_G vérifie l'équation³:

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{L}_G. \quad (5.73)$$

³. Cette équation est une équation cinématique, qui décrit géométriquement le mouvement. L'équation dynamique sur la gravité, faisant intervenir M_{grav} ,

Comme de plus, par application du théorème du moment cinétique, cette variation est égale au moment dynamique exercé sur le gyroscope,

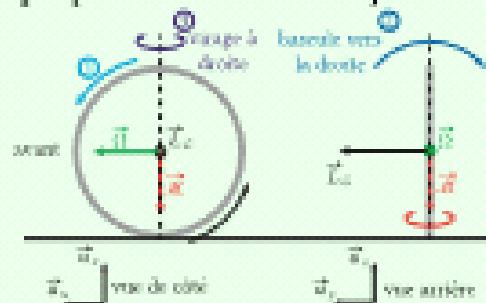
$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{ext-\vec{\Omega}}. \quad (5.74)$$

On en déduit l'expression du couple exercé à son tour par le gyroscope sur le support :

$$\vec{\mathcal{M}}_{gyro} = -\vec{\mathcal{M}}_{ext-\vec{\Omega}} = \vec{L}_G \wedge \vec{\Omega}. \quad (5.75)$$

Ainsi, lorsqu'on cherche à provoquer une rotation du gyroscope, celui-ci réagit en exerçant un couple orthogonal à la rotation et au moment cinétique appelé couple gyroscopique. Son effet, illustré dans l'exemple suivant, est tout aussi paradoxal que la précession.

Soit un cercle basé en rotation dans une trajectoire purement rectiligne (étape 1 de la figure ci-dessous). Cette rotation se traduit par un moment cinétique constant \vec{L}_G selon $\vec{\Omega}_G$. Si par un déséquilibre ou l'action d'un utilisateur le cercle vient à pencher, par exemple sur la droite, on traduit cette bascule par le vecteur $\vec{\Omega}$ porté par $\vec{\Omega}_G$ (étape 2 sur la figure). Cette bascule s'impose aussi au vecteur \vec{L}_G . Par effet gyroscopique, le système répond par un couple gyroscopique $\vec{\mathcal{M}} = \vec{L}_G \wedge \vec{\Omega}$ qui s'applique alors selon $-\vec{\Omega}_G$ et a pour effet de faire tourner la trajectoire du cercle vers la droite.



Couple gyroscopique et précession vont toujours de pair. Seul change, en fonction de la situation, le point de vue.

- Soit l'expérimentateur impose le couple et observe la précession. C'est le cas lorsqu'il regarde le gyroscope évoluer sous l'effet du poids.
- Soit l'expérimentateur impose la rotation et subit le couple. C'est le cas dans les systèmes embarqués.

5.4 Introduction à la mécanique du solide déformable

L'objectif de cette dernière partie est de lever l'hypothèse du solide *indéformable* et étudier le comportement d'un système sous l'effet d'une contrainte lorsque la distance entre les particules est limitée par un certain

autour de sa valeur moyenne. Le développement de cette déviation, dite **déviateur de Poisson**, est mené de manière parfaitement équivalente dans [11.7]. On s'attachera ici à en extraire les idées physiques générales et les grandeurs utiles pour l'application.

5.4.1 Déformations homogènes d'un solide

Pour commencer, nous allons décrire le comportement d'un barreau de longueur L et de rayon R soumis à une pression P selon la direction (Oz). On suppose que celui-ci se déforme de façon homogène selon les trois directions de l'espace.

Module d'Young et coefficient de Poisson

On introduit deux coefficients décrivant la déformation d'un solide dans cette situation :

Le **module d'Young E** permet de passer de l'effort imposé au barreau à son allongement :

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{P}{E}. \quad (5.76)$$

Plus le module d'Young d'un solide est grand moins il se déforme à contrainte fixe.

Le **coefficient de Poisson ν** représente la compression relative du barreau dans la direction transversale à l'allonge :

$$\frac{\Delta R}{R} = -\frac{\Delta L}{L}. \quad (5.77)$$

Cette interprétation est schématisée figure 5.9. On donne quelques ordres de grandeur dans le tableau 5.2.

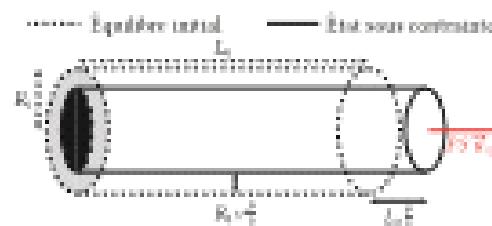


FIGURE 5.9 – Interprétation schématique des coefficients E et ν .

Deux exemples numériques

Il est intéressant de s'intéresser sur les valeurs du tableau 5.2 et faire le lien avec les propriétés connues des matériaux.

Le caoutchouc a un très faible module d'Young E , ce qui indique qu'à une contrainte P donnée il s'allonge particulièrement aisément par rapport à d'autres matériaux — comportement continu. En conséquence, il a

Matériau	Modèle d'Young E (GPa)	Coefficient de Poisson ν
Aluminium	69	0,346
Aacier	210	0,27 à 0,30
Béton	20 à 30	0,20
Cauchois	10^{-3} à 10^{-1}	0,50

TABLE 5.2 – Ordres de grandeur du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν pour quelques matériaux d'usage.

un coefficient de Poisson ν maximal qui indique que un allongement effectué, pour conserver le volume, avec une très importante compression dans la direction transverse.

Par ailleurs ce tableau 5.2 considère des matériaux isotropes. On ne tient donc pas compte du fait que la résistance d'un matériau à une contrainte peut dépendre du signe de la contrainte. Le béton a par exemple un assez grand module d'Young en compression mais il est presque dix fois plus faible en traction. C'est la raison pour laquelle il est souvent complété par une structure en acier pour former le *béton armé*. L'acier seul n'est jamais utilisé dans la construction pour des raisons évidentes de coût et d'entretien (rouille).

Cas des grandes déformations

Dans le cas où les déformations du matériau devient telle que la modélisation linéaire n'est plus possible on se contente à une description qualitative de la relation contrainte/déformation. Elle est donnée par les courbes de la figure 5.10, sur lesquelles on note : ϵ la déformation relative $\Delta l/l_0$ et σ la tension exercée sur le matériau.

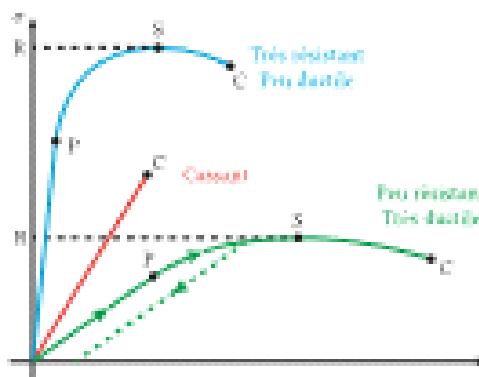


FIGURE 5.10 – Courbe de réponse de différents matériaux sollicités en traction. P marque la fin du domaine élastique, S le début de la scission et C la rupture. R est la résistance du matériau.

Le comportement général correspondant aux courbes présentées figure 5.10 est le suivant : pour une faible déformation, la contrainte est linéaire. C'est le **domaine élastique** et le coefficient directeur est le module d'Young E . Dans ce domaine, la déformation est réversible : lorsque la contrainte est relâchée le solide revient à l'équilibre initial. Au-delà du point P on entre dans un régime de déformation dit **plastique**. La relation entre σ et ϵ n'est plus linéaire et dans la plupart des cas la déformation n'est plus réversible : lorsque la contrainte est relâchée le matériau trouve un état d'équilibre différent de l'état initial.

L'image d'un ballon de baudruche qui a été gonflé complètement puis dégonflé, et se retrouve flasque, est un bon exemple de solide sorti de son domaine d'élasticité.

À partir du point S commence la striction : la section du barreau commence à diminuer notablement. Au point C le matériau casse. Plus ce point intervient à grand ϵ , plus le matériau est **ductile**. Enfin, la plus grande contrainte R atteinte lors de ce processus est la **résistance** du matériau.

La **courbe bleue** présente le comportement d'un matériau très résistant mais peu ductile. Il peut supporter une grande contrainte sans se déformer (initial).

La **courbe rouge** présente le comportement d'un matériau cassant, c'est à dire dans le point C intervient avant la sortie du domaine d'élasticité (verse).

La **courbe verte** présente un matériau peu résistant mais très ductile : il peut supporter une très grande déformation sans casser (caoutchouc).

5.4.2 Tenseur des déformations

Passons maintenant au cas d'une déformation inhomogène du solide. Le premier enjeu est de se munir d'un outil adéquat pour décrire la déformation du solide en tout point.

Vecteur déplacement

Soit un point O pris pour référence. Chaque point M du solide est repéré par rapport à ce point O , à l'équilibre, par un vecteur \vec{r} . Lorsque le solide se déforme, tous les points sont susceptibles de se déplacer de sorte que dans ce nouvel état le point M est repéré par un vecteur \vec{r}' . On peut alors définir pour chaque point un **vecteur déplacement** $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$.

Ce vecteur, qui quantifie de combien chaque point s'est déplacé par rapport à l'équilibre, permet de savoir exactement quelle est la forme du solide à un instant t . Pour autant il ne qualifie pas exactement la **déformation**. Par exemple un vecteur déplacement constant correspondrait à un solide qui se serait globalement déplacé sans s'être, justement, déformé.

Distance entre deux points

On s'intéresse ainsi plusôt à la distance entre les points du solide et à son évolution lorsqu'on le déforme. On sait notamment que c'est lorsque cette distance évolue que les interactions microscopiques vont être

modifiés. Soit deux points du solide M_1 et M_2 et $\vec{dx} = \vec{M}_1 \vec{M}_2 = (dx_1, dx_2, dx_3)$ le vecteur entre eux à l'équilibre. Après déformation celui-ci devient $\vec{dx}' = \vec{dx} + \vec{du}$ où \vec{du} est la différence des vecteurs déplacements de M_1 et M_2 .

Le carré de la distance entre ces points s'écrit simplement $\|\vec{dx}\|^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ à l'équilibre tandis qu'à la fin de la déformation :

$$\|\vec{dx}'\|^2 = dx_1'^2 + dx_2'^2 + dx_3'^2 = (\vec{dx} + \vec{du})^2. \quad (5.78)$$

On utilise dans ce qui suit la convention de sommation d'Einstein. Celle-ci consiste à sommer implicitement sur les indices doubles sans réécrire le symbole \sum : on effectue le remplacement :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j d_{ij} \longrightarrow x_i x_j d_{ij}. \quad (5.79)$$

Tenseur des déformations

En remplaçant $dx_i = (\partial x_i / \partial q_k) dq_k$ et en développant $(\vec{dx} + \vec{du})^2$, il vient :

$$\begin{aligned} \|\vec{dx}'\|^2 &= \|\vec{dx}\|^2 + 2 dx_i dx_j + du_i du_j \\ &= \|\vec{dx}\|^2 + 2 \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_k dq_k + \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_j}{\partial q_l} dq_k dq_l. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Nous pouvons réécrire cette expression en utilisant le fait que les indices i , k et l sont mutuels donc interchangeables. Le troisième terme peut ainsi s'écrire (on échange $i \leftrightarrow l$)

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \frac{\partial x_l}{\partial q_l} dq_k dq_l = \frac{\partial x_l}{\partial q_k} \frac{\partial x_i}{\partial q_l} dq_k dq_l. \quad (5.81)$$

Pour le second terme, on échange $i \leftrightarrow k$ dans l'une des deux occurrences :

$$2 \frac{\partial x_i}{\partial q_k} dq_i dq_k = \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right) dq_i dq_k. \quad (5.82)$$

La distance devient alors

$$\|\vec{dx}'\|^2 = \|\vec{dx}\|^2 + 2 \epsilon_{ik} dx_i dq_k \quad (5.83)$$

et permet de définir le **tenseur des déformations** [2] dont les éléments sont :

$$\epsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \frac{\partial x_l}{\partial q_k} \right). \quad (5.84)$$

Ce tenseur est manifestement symétrique : $\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}$.

En chaque point du solide, le tenseur des déformations $[E]$ étant symétrique il peut être diagonalisé sur une base d'axes propres. Dans une telle base, la déformation est localement ramenée à des compressions/dilatations purées dans les trois directions.

Pour autant, rien n'indique a priori que la base dans laquelle $[E]$ est diagonal soit la même au tout point du solide.

Dans la suite, nous nous limiterons à l'échelle de petites déformations de sorte que nous négligions l'ordre 2 dans l'expression du tenseur pour ne garder que

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.85)$$

Déformation d'un sous-volume

Ce tenseur $[E]$ donne enfin accès à la déformation relative d'un sous-volume du solide. En effet, si à l'équilibre $dr = dx_1 dx_2 dx_3$ et après déformation $dr' = dx'_1 dx'_2 dx'_3$ on admet (ce la preuve se trouve dans [117]) que

$$dr' = dr (1 + \text{Tr}([E])) = dr (1 + \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}). \quad (5.86)$$

La trace du tenseur $[E]$ apparaît ainsi comme la variation relative de volume

$$\text{Tr}([E]) = \frac{dr' - dr}{dr}. \quad (5.87)$$

5.4.3 Tenseur des contraintes

Contraintes internes

De manière tout à fait analogue, il nous faut aussi décrire les contraintes qui s'exercent dans le solide. À l'équilibre les forces qui s'appliquent en tout point se compensent de sorte que la contrainte est nulle. Dis que le solide est soumis à un effort et se déforme, des forces locales apparaissent en tout point. Elles tendent de maintenir le solide dans sa position d'équilibre. Ce sont les **contraintes internes**. Ces contraintes proviennent essentiellement des interactions moléculaires qui maintiennent la cohésion du solide. Elles sont donc de *court portée* à l'échelle du solide de sorte que nous pouvons considérer les seules forces exercées par les plus proches voisins.

Cette hypothèse tombe en défaut lorsqu'on étudie la déformation de solides sous l'effet d'une force à longue portée. C'est par exemple le cas de l'étude des matériaux **piezocéramiques** dont la déformation est proportionnelle à la tension U due au champ électrique \vec{E} .

Tenseur des contraintes

Quelle est alors la force subie par un sous-volume \mathcal{V} quelconque du solide ? Celle-ci s'obtient à priori en sommant les forces subies par chaque volume élémentaire. Pour chaque composante i de la force,

$$F_i = \int_{\mathcal{V}} f_i(M) \, dv . \quad (5.88)$$

Comme les interactions se font entre plus proches voisins, la plupart des termes en volume voisinant aussi interviennent leur interaction réciproque et s'annulent. Ainsi, seules les contributions à la surface du sous-volume sont à prendre en considération : on cherche à transformer une intégrale volumique en intégrale surfacique. La théorie de Green-Gauss-Godfrey nous enseigne qu'une telle manipulation n'est possible que si le scalaire intégré peut s'écrire sous la forme de la divergence d'un vecteur⁴. Ce résultat se généralise de sorte que la force locale \vec{f} s'écrit ici comme la divergence d'un tenseur :

$$\vec{f}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{V}} f_i \, dv = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \, dv = \oint_{\mathcal{S}} \sigma_{ik} \, dS_k . \quad (5.89)$$

Le tenseur $[\sigma] = [\sigma_{ik}]$ est le **tenseur des contraintes** tel que $\sigma_{ik} \, dS_k$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de la force sur l'élément de surface dS (voir figure 5.11). Notons ainsi que σ_{ik} est une force par unité de surface, donc une pression.

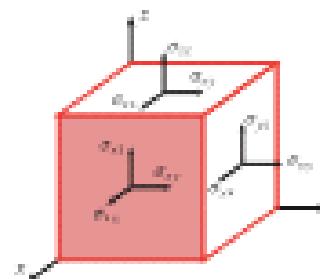


FIGURE 5.11 – Composantes du tenseur des contraintes. La première lettre en indice indique la face sur laquelle la force surfacique s'applique, et la seconde sa direction.

Considérons un solide déformable soumis à un champ de pression hydrostatique (constante et isotrope) P . Dans ce cas, P est la force par unité de surface et s'applique sur tous les éléments dS vers l'intérieur

⁴ On a par exemple l'identité de Gauss $\iiint \nabla \cdot \vec{F} \, dv = \iint \vec{F} \cdot dS$.

du solide de sorte que $\sigma_{ij} dV_j = -P \delta_{ij} dV_j$. Le tenseur des contraintes est donc, dans ce cas :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix}. \quad (5.90)$$

Les éléments diagonaux du tenseur des contraintes correspondent à des efforts normaux et sont souvent vus comme des termes de pression (voir exemple). À l'inverse, les éléments hors diagonale correspondent à des contraintes tangentielles, dites de cisaillement.

Loi de Hooke

Dans le cas général, le tenseur des contraintes n'est pas connu mais il peut être relié au tenseur des déformations par des lois de composition. Celles-ci résultent, dans l'*approximation des petites déformations* et pour des solides isotropes, de la **loi de Hooke** :

$$\sigma_{ij} = K \epsilon_{ij} + 2\mu \left(\epsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \epsilon_{kk} \right). \quad (5.91)$$

Le premier terme correspond à la contribution d'un effort « de pression hydrostatique » de sorte que K est appelé **modèle d'élasticité hydrostatique**. Réciproquement, le second terme regroupe les efforts de cisaillement et μ est ainsi appelé **modèle de cisaillement**. Tous les deux sont strictement positifs pour assurer la stabilité du solide à l'équilibre.

L'expression exacte de la loi (5.91) n'est pas primordiale mais il faut reconnaître l'idée générale que pour les petites déformations la loi de Hooke est *linéaire*.

On peut inverser l'équation (5.91) en en prenant la trace :

$$\epsilon_{ii} = 3K \epsilon_{ii} \quad \text{soit} \quad \epsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii} - \frac{1}{3} \delta_{ii} \sigma_{kk}}{2\mu} + \frac{1}{9K} \delta_{ii} \epsilon_{kk}. \quad (5.92)$$

Retour sur la déformation homogène

Le tenseur des déformations $[\epsilon]$ étant constant, la loi de Hooke implique que $[\sigma]$ l'est aussi de sorte que les contraintes internes peuvent être directement déterminées à partir des conditions aux limites. Considérons la déformation la plus simple possible : la compression (ou étirement) d'un barreau sous l'effet d'une force par unité de surface P exercée aux extrémités.

Sur la surface latérale unique force-neutre de sorte que, $\vec{n} = n_x \vec{u}_x + n_y \vec{u}_y + n_z \vec{u}_z$ étant le vecteur normal sortant, $n_x n_y = 0$. Comme sur cette surface \vec{v} est orthogonal à \vec{n} , on a $n_x n_y = 0$ et $n_z = 0$ donc

$$\sigma_{xz} n_y = 0 \Rightarrow \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0. \quad (5.93)$$

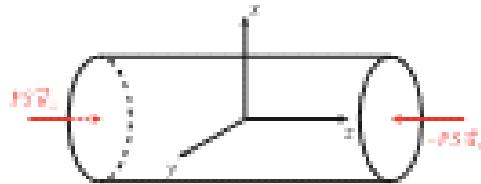


FIGURE 5.12 – Compression homogène d'un barreau.

Comme de plus [Σ] est symétrique⁵, cela implique aussi $\sigma_{xy} = \sigma_{yz} = 0$ de sorte que seul σ_{zz} est non nul. Enfin, aux deux extrémités du barreau, $\sigma_y \sigma_z = P$ d'où $\sigma_{yy} = P$. Ainsi, le tenseur des contraintes se résume à

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}. \quad (5.94)$$

En intégrant ces considérations dans la loi de Hooke inversée (équation (5.92)), on déduit, en introduisant le module d'Young E tel que $\sigma_{zz} = E \epsilon_{zz}$ et le coefficient de Poisson ν tel que $\epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} = -\nu \epsilon_{yy}$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{yy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3K} + \frac{1}{\mu} \right) P = \frac{P}{2E} \\ \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\nu} - \frac{1}{3K} \right) P = -\nu \epsilon_{yy}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

On en déduit que les deux coefficients K et ν sont liés au module d'élasticité isotrope K et au module de cisaillement μ par les relations

$$E = \frac{2K\mu}{3K + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{1}{2} \frac{3K - 2\mu}{3K + \mu}. \quad (5.96)$$

On a mentionné que $K, \mu > 0$ d'où

$$-1 \leq \nu \leq \frac{1}{2}. \quad (5.97)$$

On peut vérifier que

$$\frac{\Delta F}{F} = \text{Tr}([\sigma]) = (1 - 2\nu) \frac{\Delta L}{L}, \quad (5.98)$$

de sorte que lorsque $\nu = 1/2$, le solide est incompressible.

Dans ce cas, d'ailleurs, $K \rightarrow +\infty$. D'après (5.91), $1/K$ quantifie la déformation associée à une contrainte

⁵. Le fait que le tenseur des contraintes soit symétrique évite de considérer tous les éléments des contraintes internes et la partie de ce résultat pourra par exemple être bas dans [1.15]. Par ailleurs, ce résultat peut tomber en défaut en certaines conditions particulières ; c'est le cas du matériau de la théorie de Cosserat.

donnée. Lorsque $K \rightarrow \infty$ le solide peut subir une contrainte infinie sans se déformer, ce qui est bien la définition d'un solide incompressible.

Deuxième partie

Mécanique relativiste

Chapitre 6

De la mécanique classique à la mécanique relativiste

Au début du XX^e siècle a lieu une révolution dans le monde de la physique : Einstein propose une théorie de la mécanique qui se base sur des postulats remettant en cause la compréhension intuitive du mouvement des corps qui était acquise jusqu'alors. Le but de ce chapitre est de présenter le raisonnement qui a poussé les physiciens et physiciennes à se libérer de la mécanique newtonienne et à construire une nouvelle théorie, menant à l'élaboration de la relativité générale et à tout un pan de la physique moderne. On cherchera ensuite dans les prochains chapitres à présenter la construction de la théorie et à dégager de nouveaux effets physiques remarquables.

Les objectifs du chapitre sont les suivants :

1. connaître la notion d'éther et son utilité en mécanique newtonienne ;
2. savoir expliquer en quoi celle-ci a été mise en défaut à l'aide de l'expérience de Michelson et Morley ;
3. comprendre les implications des postulats d'Einstein.

6.1 Transformation de Galilée et électromagnétisme

Considérons deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. Sans perte de généralité, les centres et axes de chaque référentiel coïncident à $t = 0$. Le centre de \mathcal{R} est O , celui de \mathcal{R}' est O' . Enfin, la vitesse de O' dans \mathcal{R} est constante et notée $\vec{V} = V \vec{v}_g$. La situation est résumée figure 6.1.

6.1.1 Transformation de Galilée

Dans le cadre de la mécanique newtonienne le changement de référentiel se fait selon la transformation de Galilée.



FIGURE 6.1 – Référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' et mouvement relatif de l'un par rapport à l'autre.

Informations

Transformation de Galilée

Lorsqu'un référentiel \mathcal{R}' est en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} selon la situation de la figure 6.1, on a :

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad \text{et} \quad t' = t. \quad (6.1)$$

Cette transformation s'inverse très facilement en considérant la transformation de \mathcal{R}' vers \mathcal{R} de vitesse $-V$. Par simple dérivation par rapport au temps, la loi de composition des vitesses est :

$$\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{V}. \quad (6.2)$$

On reconnaît ici le cas particulier d'une vitesse d'initialisation constante $\vec{V}_0 = \vec{V}$.

Imisons ici sur le fait que, sans plus de précaution, cette transformation suppose $t = t'$. C'est bien sûr un choix fidèle à l'intuition que l'on a du temps, mais nous serons amenés à la mettre en défaut dans ce chapitre et les suivants. Notons aussi que cette loi a été longtemps indiscutée du fait qu'elle coïncide parfaitement avec l'observation du quotidien, tant que les vitesses en jeu sont raisonnables (cette hypothèse restant à quantifier pour le moment). Toute théorie plus évoluée devra ainsi être en accord avec la transformation de Galilée pour les « faibles » vitesses.

Notons enfin que la transformation de Galilée impose de transformer les opérateurs de dérivation comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - V \frac{\partial}{\partial x'}. \quad (6.3)$$

La dynamique classique résulte alors du *principe de relativité de Galilée*. Il implique que les équations qui décritent la mécanique des systèmes en fonction des coordonnées et du temps doivent prendre la même forme quel que soit le référentiel galiléen considéré. On dit que les lois de la dynamique sont **invariantes par changement de référentiel galiléen**.

Prenons par exemple le *principe fondamental de la dynamique* (PFD). Son invariance¹ implique de pouvoir écrire dans \mathcal{R} ou dans \mathcal{R}' :

$$m \vec{F}(M) = \vec{F} \quad \text{et} \quad m \vec{F}'(M) = \vec{F}', \quad (6.4)$$

1. On suppose que les attributs d'une particule, comme sa masse ou sa charge, sont invariantes par changement de référentiel.

Comme par transformation de Galilée l'accélération de M dans \mathcal{R} , en la même que celle dans \mathcal{R}' , on déduit de l'invariance du PFD que $\vec{F} = \vec{F}'$.

Si l'on applique cette égalité à la force de Lorentz, il vient :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v}_{\mathcal{R}}(M) \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) \wedge \vec{B}') = \vec{F}'. \quad (6.5)$$

En injectant $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M) = \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) + \vec{V}$, on obtient :

$$q(\vec{E} + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) \wedge \vec{B} + \vec{V} \wedge \vec{B}) = q(\vec{E}' + \vec{v}_{\mathcal{R}'}(M) \wedge \vec{B}'). \quad (6.6)$$

Or cette équation doit être valable quel que soit le mouvement de M , donc pour tout $\vec{v}_{\mathcal{R}}(M)$. Cela implique :

$$\begin{cases} \vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} \\ \vec{B}' = \vec{B}. \end{cases} \quad (6.7)$$

Nous allons voir que ces prédictions entrent en contradiction avec la théorie de l'Electromagnétisme de Maxwell.

6.2 Expérience de Michelson et Morley

Jusqu'au XVII^e siècle, les vitesses observées sont soit assez faibles (quelques centaines de kilomètres par heure tout au plus) soit tellement grandes qu'elles paraissent infinies. Il faut attendre 1676 pour que le Danois Ole Rømer démontre que la lumière voyage à vitesse finie (ce à quoi, d'ailleurs, personne ne veut croire). Ce n'est qu'à partir de 1729 que Bradley confirme ce résultat et donne une valeur de c proche de la valeur actuelle. En parallèle, à partir des années 1860, la théorie ondulatoire de la lumière s'impose et corroboré l'hypothèse d'une vitesse finie. Elle est développée successivement par Huyghens puis Fresnel qui, par analogie avec les ondes acoustiques, introduit un milieu de propagation pour la lumière : l'éther.

Après que cette notion d'éther, référentiel absolu lié au mouvement de la lumière, ait été imposée pendant près d'un siècle, James Maxwell viene perturber cette conception de la lumière. En effet, les équations de l'Electromagnétisme qu'il présente à la Royal Society en 1864 postulent la propagation d'ondes électromagnétiques de vitesse c , indépendamment du référentiel d'étude. Il devient de plus qu'elles ne sont pas invariantes par la transformation de Galilée.

6.2.1 Non-invariance des équations de Maxwell

Prenons par exemple l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.8)$$

La charge étant invariante, et la transformation de Galilée conservant les longueurs, la charge volumique ρ est aussi de sorte que $\rho = \rho'$. En injectant alors les expressions de la transformation des champs (6.7) il vient :

$$\operatorname{div} \vec{E}' = \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div} (\vec{V} \wedge \vec{B})$$

$$\begin{aligned} &= \operatorname{div} \vec{B} + \vec{V} \cdot \operatorname{rot} \vec{B} \\ &= \frac{\rho}{\epsilon_0} + \vec{V} \cdot \operatorname{rot} \vec{B}. \end{aligned}$$

qui ne se résume pas a priori à $\operatorname{div} \vec{B} = \rho / \epsilon_0$. Cette équation n'est donc pas invariant par transformation de Galilée. Il y a contradiction entre la théorie de Maxwell et la mécanique newtonienne si l'une ou l'autre doit être corrigée :

- si la mécanique est vraie, alors la vitesse v doit être modifiée selon la vitesse de la source dans l'éther et les équations de Maxwell doivent être corrigées pour prendre en compte le différentiel étendu par rapport à un référentiel absolu,
- si la théorie de Maxwell est correcte, la vitesse de la lumière est une constante indépendante du référentiel donc à fortiori du mouvement de la source et le principe de relativité galiléenne tombe en défaut.

Cette contradiction entre électromagnétisme et invariance galiléenne se retrouve dans l'exemple du champ magnétique créé par un fil infini chargé en volume.

Considérons d'abord un tel fil, de charge volumique ρ et section S , au repos dans un référentiel \mathcal{R} . Il n'est parcouru par aucun courant, donc le champ magnétique calculé dans ce référentiel est simplement nul dans tout l'espace : $\vec{B} = \vec{0}$.

Imaginons dans un second temps le même système, cette fois dans le référentiel \mathcal{R}' en translation dans la direction du fil à vitesse \vec{V} . On se trouve alors dans la situation d'un fil parcouru par une densité de courant $\vec{j} = -\rho \vec{V}$ telle que $J = -\rho S V$.



Dans ce référentiel le champ magnétique à l'extérieur du fil est donné par le théorème d'Ampère et sait

$$\vec{B}'(r, \theta, z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{J}{r} \vec{u}_r. \quad (6.9)$$

On a en particulier $\vec{B} \neq \vec{B}'$, ce qui entraîne une contradiction avec l'équation (6.7). Concernant les champs électriques, le théorème de Gauss dans chaque référentiel fournit

$$\vec{E} = \vec{E}' = \frac{\rho S}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{u}_r. \quad (6.10)$$

Au moment où les équations de Maxwell apparaissent et viennent bouleverser les connaissances bien ancrées de mécanique, les physiciens tentent pour le moins sceptiques et préfèrent corriger la transformation de Galilée et corriger les équations de Maxwell. Mais celles-ci ne obéissent pas et se voient améliorées progressivement.

confondues par l'expérience. En 1888, notamment, Hertz découvre les ondes radio (ondes électromagnétiques basses fréquences dites aussi *ondes horizontales*) qui viennent renforcer la théorie de Maxwell.

Comme souvent, l'expérience est appellée à trancher et, à la fin du XIX^e siècle, on cherche à mesurer la vitesse de la lumière dans différentes situations vis-à-vis de l'éther, ou du mouvement de la source, pour tester la validité de ces deux théories.

6.2.2 Description de l'expérience

L'expérience dite de *Michelson et Morley* est celle qui est généralement retenue comme ayant permis de confirmer les prédictions de Maxwell et, par voie de conséquence, de remettre en cause la transformation de Galilée. Elle est présentée pour la première fois en 1887 par Albert Michelson et Edward Morley [28].

L'idée et la théorie

L'expérience repose sur le principe que la vitesse c de la lumière se compose avec celle de la source par rapport à l'éther. À cette occasion, Michelson conçoit l'interféromètre qui porte aujourd'hui son nom, schématiquement représenté figure 6.2. Il est constitué de deux bras orthogonaux le long desquels les ondes lumineuses se propagent avant d'interférer en sortie du dispositif. L'intensité de sortie dépend du déphasage acquis pendant le parcours des deux bras. Lorsque l'interféromètre est immobile, la situation est comme, et les deux bras étant de même longueur la fringe centrale est en O . *Quelle différence de marche peut-on attendre lorsque l'interféromètre se déplace dans l'éther?*

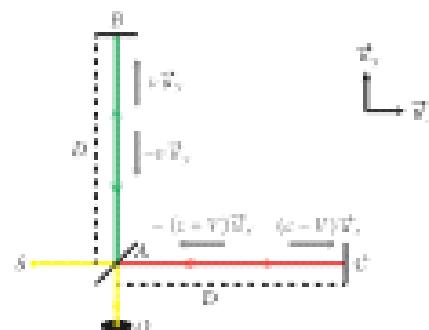


FIGURE 6.2 – D'après [28]. On a indiqué la vitesse de la lumière dans le référentiel du laboratoire à chaque étape (en supposant valide la loi de transformation galiléenne).

Considérons que le mouvement de la Terre par rapport à l'éther se fasse suivant une vitesse $V \vec{u}_x$, et étudions ce qu'il se passe sur chacun des bras. Par composition galiléenne des vitesses, si un rayon lumineux se propage selon un vecteur unitaire \vec{u} , alors sa vitesse dans le référentiel du laboratoire est $c\vec{u} = V\vec{u}_x$.

* Selon le sens considéré au mouvement la lumière parcourt d'abord la distance D séparant A de C avec une vitesse $c - V$ puis la distance D séparant C de A avec une vitesse $(c + V)$. Le temps de vol

est ainsi

$$T_1 = \frac{D}{c + V} + \frac{D}{c - V} = \frac{2D}{c} \frac{1}{1 - V^2/c^2}. \quad (6.11)$$

- Selon le bras orthogonal au mouvement, la vitesse de la lumière est, sur le trajet $A \rightarrow B$ de longueur D , $c\vec{u}_F = c\vec{u} - V\vec{u}_S$, où (puisque $\vec{u}^2 = 1$) $c^2 = u^2 + V^2$ et la vitesse sur le trajet vertical a donc pour norme $v = \sqrt{c^2 - V^2}$. Sur le trajet retour $B \rightarrow A$, la vitesse devient $-v\vec{u}_F$, avec la même valeur de v . Finalement, le temps de parcours est :

$$T_2 = 2 \times \frac{D}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2D}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (6.12)$$

La différence de marche attendue au point O est ainsi, au premier ordre non nul,

$$\begin{aligned} c(T_1 - T_2) &= 2D \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) - 2D \left(1 + \frac{V^2}{c^2} \right) \\ &= D \frac{V^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Il va de soi que Michelson ne peut arrêter le mouvement de la Terre dans l'éther et par conséquent compare deux situations équivalentes : d'abord un train aligné avec l'odit mouvement, puis l'autre, en tournant l'interféromètre de 90° . Les deux différences de marche étant données par l'équation (6.13) et son opposé, on s'attend à une variation de différence de phase

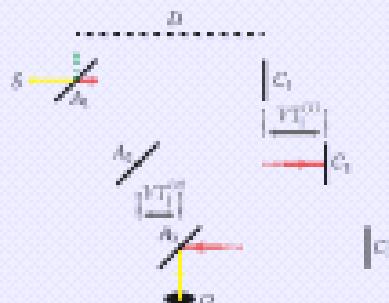
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} 2D \frac{V^2}{c^2}, \quad (6.14)$$

avec λ la longueur d'onde de la lumière utilisée. Cela correspond à un décalage de n franges d'interférences avec

$$n_{\text{eff}} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{2D}{\lambda} \frac{V^2}{c^2} \quad (6.15)$$

Dans le calcul précédent, c'est en parcourant le trajet lame-miroir de distance D à différentes vitesses dans le référentiel du laboratoire que les rayons lumineux interfèrent différemment qu'à repos. Il aurait été possible de réaliser le calcul dans le référentiel de l'éther : la lumière se propage alors toujours à la vitesse c , mais les distances parcourues sont différentes.

Dans la figure ci-dessous, on calcule T_1 en se plaçant dans le référentiel de l'éther. On représente à chaque fois la lame et le miroir C , qui se déplacent à la vitesse \vec{V} dans l'éther.



Ainsi, lorsque la lumière se réfléchit sur le miroir (qui est passé de C_1 à C_2), elle a parcouru la distance $A_1C_1 + C_1C_2 = D + VT_1^{(R)}$ à la vitesse c , le tout pendant la durée $T_1^{(R)}$. Ainsi, on obtient l'égalité des distances $cT_1^{(R)} = D + VT_1^{(R)}$ soit $T_1^{(R)} = D/(c - V)$. De même, lors du trajet retour, on a $cT_1^{(D)} = C_2A_2 + A_2A_1 = D - VT_1^{(D)}$, donc $T_1^{(D)} = D/(c + V)$. Finalement, on a bien la même expression de $T_1 = T_1^{(R)} + T_1^{(D)}$ qu'à l'équation (6.11).



Pour la direction orthogonale, on note que :

$$\begin{cases} A_1B = c\frac{T_1}{2} & \text{car la lumière se déplace à } c, \\ A_1B^2 = D^2 + (VT_1/2)^2 & \text{par le théorème de Pythagore.} \end{cases} \quad (6.16)$$

On obtient le même résultat qu'à l'équation (6.13) grâce à ces deux expressions.

Dispositif expérimental

Dans un premier temps le dispositif utilisé est un interféromètre comme nous avons vu graphique l'habitude d'en utiliser. La longueur des bras est, selon [28], de 2×10^6 longueurs d'onde du sodium soit environ 1,18 m. La vitesse V de l'interféromètre dans l'ether est celle de la Terre sur son orbite soit

$$V = \frac{2\pi \times R_T}{T_{\text{an}}} = 3 \times 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (6.17)$$

On aboutit finalement à un déplacement des franges à mesurer de l'ordre de 0,04 interférences.

Pour minimiser les vibrations dues à l'environnement et mettre un pesement facile de l'appareil, Michelson et Morley disposent l'interféromètre sur un bloc de pierre flottant sur une couche de mercure (ce métal n'a pas de base liquide, facilitant le pesement de l'interféromètre, tout en étant suffisamment dense pour en supporter le poids) de 1,5 cm de profondeur. Pour faciliter la mesure, ils allongent artificiellement la longueur des bras par réflexions multiples. La longueur effective atteint environ 11 m de sorte que le déplacement des franges à mesurer se rapproche de

$$\frac{v^2}{c^2} = 2D \frac{v^2}{c^2} = 0,4 \text{ interférences}. \quad (6.18)$$

Le dispositif expérimental final est reproduit figure 6.3, tiré directement de l'article original de Michelson et Morley [28].

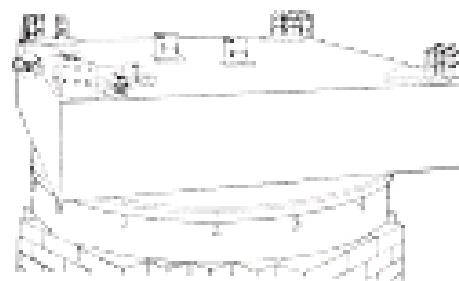


FIGURE 6.3 – Dispositif interférométrique de Michelson conçu en 1887 pour mettre en évidence le mouvement de la Terre par rapport à l'Ether [28].

Résultats

Dès 1887 Michelson affirme que le rapport du déplacement calculé sur le déplacement observé $v_{\text{obs}}/v_{\text{obs}}$ vaut au moins 20 et probablement plus de 40, c'est à dire que le déphasage observé est trop faible pour être significatif. Au fil du temps et à force de précision ce rapport ne fait qu'augmenter et il obtient, en 1929, un rapport de 90. En 1950, G. Jones mesure de son côté un rapport de 395. Tout converge donc pour affirmer que le déphasage expérimental est nul : la vitesse de la lumière ne semble pas subir l'influence de la vitesse de la source.

Encore dans les années 2000 de nombreux équipages ont amélioré la précision sur cette mesure jusqu'à atteindre une précision relative de 10^{-17} [29].

Dès lors que la transformation de Galilée est mise en défaut, c'est toute la mécanique newtonienne qui est à repenser (du moins, dans les domaines de vitesse où elle est mise en défaut). Le développement d'une

nouvelle théorie de la mécanique est nécessairement basée sur un nouveau jeu de postulats, lesquels sont énoncés notamment par Einstein en 1905².

6.3 Postulats d'Einstein

L'expérience de Michelson et Morley échoue à mettre en évidence le mouvement de la Terre par rapport à l'éther, support du mouvement de la lumière. De deux choses l'une : soit l'éther est fixe par rapport à la Terre, soit ce concept d'éther, vu comme référence de repos absolu n'existe pas. La première solution n'ayant aucune raison d'être a priori, Einstein appuie son développement sur cette seconde conclusion et énonce le principe de relativité [30].

Postulat:

Principe de relativité (postulat)

Les lois de la physique sont identiques dans tout référentiel galiléen.

À ce premier postulat il en adjoint immédiatement un second :

Postulat:

Principe d'invariance de la vitesse de la lumière

La vitesse de la lumière varie c dans tout référentiel.

Notons d'ores et déjà que ce second postulat condamne la transformation de Galilée puisque la vitesse de la lumière ne se compose jamais avec la vitesse du référentiel. Ce deuxième postulat demande d'ailleurs d'avoir défini une procédure adéquate de mesure des longueurs et des durées, procédure sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Notons enfin que, dans l'esprit de ce qu'on fait les physiciens de l'époque, il n'existe jamais question de remettre en cause la mécanique newtonienne mais bien de la prolonger. Si l'a jamais été explicitement énoncé, on peut se permettre d'ériger cette règle en théorème. Cela nous permet d'insister sur le fait que c'est un très bon idéal à adopter à l'aggrégation.

Postulat:

Cohérence avec la mécanique newtonienne

Les résultats de la relativité restreinte devront coïncider, aux vitesses faibles devant la vitesse de la lumière, avec ceux de la mécanique newtonienne.

Rappelons, pour la complétude, les énoncés historiquement formulés par Einstein dans son article de 1905 [30] :

1. « Les lois selon lesquelles l'état des systèmes physiques se transforment sont indépendantes de la

2. Dans le même temps d'autres scientifiques (physiciens et mathématiciens) avaient établi des résultats importants dans ce domaine, et on peut citer les noms de H. Lorentz et H. Poincaré.

- hypothèse dont ces changements sont rapportés dans deux systèmes de coordonnées en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre. »*
2. « *Chaque rayon lumineux se déplace dans un système de coordonnées stationnaires à la même vitesse c , la vitesse étant indépendante de la condition que ce rayon lumineux soit émis par un corps au repos ou en mouvement.* »

Chapitre 7

Cinématique relativiste

Le chapitre précédent a été l'occasion de trouver les limites de la théorie de la mécanique newtonienne. Nous avons présenté les postulats d'Einstein à la base de la théorie de la relativité restreinte, et nous allons désormais en déduire des implications pour les changements de référentiels dans cette théorie. Cela nous permettra de prédire des phénomènes étonnans lorsque les vitesses en jeu sont proches de celle de la lumière dans le vide...

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

1. comprendre l'importance de la relativité du temps et de la non-simultanéité;
2. avoir interprété un diagramme de Lorentz;
3. connaître la limite classique de la relativité restreinte (et penser à la vérifier à chaque fois que l'on obtient un résultat)
4. avoir expliquer les différents phénomènes étonnans prévus par la relativité restreinte.

Voici des extraits de leçons tombés en 2022 et 2023 qui sont en lien avec ce chapitre :

2023	Effet Doppler. Exemple d'application	Établir et commenter les caractéristiques de l'effet Doppler relativiste.
2022	Effet Doppler	Le candidat ou la candidate établira les caractéristiques de l'effet Doppler relativiste. Il n'est pas opportun de consacrer plus de dix minutes pour exposer cette partie de la leçon.
	Exemples d'effets relativistes. Applications	Le candidat ou la candidate présentera et analysera l'expédition historique de Russie. Il n'est pas opportun de consacrer plus de quinze minutes pour exposer cette partie de la leçon.

7.1 Transformation de Lorentz

Avant de rentrer pleinement dans les calculs de relativité il nous faut définir deux notions générales importantes. Celle d'**événement** d'abord : il s'agit d'un phénomène localisé dans l'espace et dans le temps. Son étendue spatiale est ponctuelle et sa durée instantanée. Il est repéré, dans un référentiel donné \mathcal{R} , par ses trois coordonnées spatiales et sa coordonnée temporelle, soit par le *quadrapôle* (x, y, z, t) . Le facteur c peut être interprété ici comme un facteur d'*homogénéité*.

Parmi tous les référentiels disponibles pour l'étude d'un objet ou d'un observateur, l'un aura une importance particulière : le **référentiel propre** qui est celui dans lequel l'objet est immobile, ou « au repos ».

7.1.1 Relativité du temps

Nous allons tâcher de montrer que le temps revêt une importance nouvelle dans la théorie de la relativité restreinte. Prenons l'exemple d'une horloge à photon unique représenté figure 7.1. Elle est composée de deux miroirs distants de d entre lesquels oscille un photon. Dans le référentiel \mathcal{R}' du laboratoire, elle est en translation rectiligne uniforme à la vitesse \vec{V} . Dès lors le second postule ce photon voyage à la vitesse c quel que soit le référentiel dans lequel on l'étudie. On considère la durée écoulée entre les deux événements : « le photon quitte le miroir A » et « le photon rentre au miroir A ».

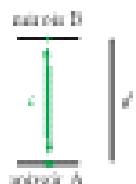
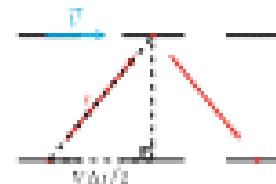
(a) Dans \mathcal{R}' .(b) Dans \mathcal{R} .

FIGURE 7.1 – Trajet du photon dans l'horloge. **a** : dans son référentiel \mathcal{R}' . **b** : dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} dans lequel elle translate à \vec{V} .

Dans le référentiel de l'horloge le photon fait un aller-retour entre les miroirs dans une durée $\Delta t'$ qui s'exprime simplement à partir de la distance parcourue et de la vitesse (figure 7.1a) :

$$\Delta t' = \frac{2d}{c}. \quad (7.1)$$

Dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} , la distance parcourue par le photon est plus grande (figure 7.1b). Par application du théorème de Pythagore on trouve

$$\Delta t = \frac{2}{c} \times \sqrt{d^2 + \left(\frac{V\Delta t'}{2}\right)^2} \quad \text{donc} \quad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \quad (7.2)$$

On a supposé ici que la distance entre les deux milieux est restée égale à d dans les deux référentiels. Ce résultat sur les longueurs dans la direction transverse au mouvement découle immédiatement de la transformation spéciale de Lorentz (voir section 7.1.2).

Trois constats s'imposent :

- La durée entre deux événements est différente selon qu'elle est mesurée dans un référentiel en mouvement ou dans le référentiel propre.
- La durée dans le référentiel en mouvement est plus longue que celle dans le référentiel propre : $\Delta t > \Delta t'$. On parle de *dilatation des durées*, et on y reviendra plus bas.
- Lorsque $V \ll c$ on retrouve le résultat classique $\Delta t \approx \Delta t'$.

On voit apparaître dans ce calcul la quantité $\gamma(V)$ qui prendra dans la suite une importance primordiale :

$$\gamma(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (7.3)$$

Cette importance nouvelle du temps implique de le considérer comme une variable à part entière. Désormais, le vecteur position quadruplement codimensionné (x, y, z) sera remplacé par un vecteur de dimension 4, appelé quadrivecteur position,¹ noté \vec{X} et défini par

$$\vec{X} = (ct, x, y, z). \quad (7.4)$$

Ses quatre coordonnées dépendent du référentiel dans lequel il est exprimé de sorte que l'objet de la première partie est logiquement de comprendre comment ce quadrivecteur position est modifié par un changement de référentiel en relativité restituée.

7.1.2 Transformation spéciale de Lorentz

La transformation qui permet de passer d'un référentiel à un autre dans le cadre de la relativité, et dans le cas spécifique des référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' étudié jusqu'ici, est dite **transformation de Lorentz spéciale**. Elle est essentiellement due à H. Poincaré et s'exprime ainsi :

1. Rappelons toutefois au fait que la notion de quadrivecteur est une notion importante et époustouflante difficile. Il ne suffit pas, pour fixer un quadrivecteur, de donner ses quatre composantes. Nous traiterons sur cette notion en détail dans la partie de dynamique relativiste et admettons à ce stade qu'on peut noter \vec{X} ainsi.

Intuition**Transformée de Lorentz spéciale**

Lorsque deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre et que, à l'origine des temps, leurs axes et origine coïncident, on passe de l'un à l'autre par transformée de Lorentz spéciale. On a :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

où $\beta = v/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

Elle repose sur un petit nombre de postulats simples, aisément acceptables, ce qui lui garantit une grande généralité. Nous allons désormais la démontrer.

Mouvement d'un point isolé

La transformation de Lorentz est linéaire. Il existe plusieurs manières de le montrer, la plus convaincante est peut-être celle proposée par [HFRM1] : un point matériel isolé a néanmoins une trajectoire rectiligne uniforme dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' . Cela implique qu'on puisse écrire, dans \mathcal{R} ,

$$x = x_0 + v_x t, \quad y = y_0 + v_y t, \quad z = z_0 + v_z t, \quad (7.6)$$

et dans \mathcal{R}'

$$x' = x'_0 + v'_x t', \quad y' = y'_0 + v'_y t', \quad z' = z'_0 + v'_z t'. \quad (7.7)$$

La transformation de Lorentz doit transformer une forme en l'autre et on démontre que seules les transformations linéaires ont cette propriété.

On trouvera dans [31] une démonstration plus mathématique du résultat.

Intuition**La transformation de Lorentz est linéaire**

Nous sommes donc à la recherche d'une matrice A de taille 4×4 telle que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

L'absence de second membre traduit le fait que les repères ont, à l'instant initial, la même origine. On peut toujours faire cette hypothèse du fait que l'espace-temps est supposé *homogène*.

Directions transverses

Dans les directions transverses au mouvement de \mathcal{R}' dans \mathcal{R} , on peut écrire, d'après l'équation (7.8), par exemple pour la direction y :

$$y' = a_{21}ct + a_{22}x + a_{23}y + a_{24}z. \quad (7.9)$$

Or les axes Ox et Ox' coïncident avec la direction de translation donc si $y = z = 0$ on a nécessairement $y' = z' = 0$. Ainsi, pour tout x et t on a

$$0 = a_{21}ct + a_{22}x \quad \text{d'où} \quad a_{21} = a_{22} = 0 \quad \text{et} \quad y' = a_{23}y + a_{24}z. \quad (7.10)$$

Considérons aussi que les axes Ox et Ox' sont parallèles, $y \neq 0$ doit correspondre à $y' \neq 0$ d'où l'annulation de a_{24} et finalement

$$y' = a_{23}(V)y \quad (7.11)$$

où le coefficient a_{23} ne dépend que de V par homogénéité de l'espace.

La valeur de $a_{23}(V)$ est imposée par la nature de la transformation dualité et l'isotropie de l'espace. En effet, la transformation inverse, qui transforme y' en y , peut s'obtenir de deux manières :

- soit en inversant la relation (7.11) : $y = y'/a_{23}(V)$;
- soit en réalisant que la transformation qui permet de passer de \mathcal{R}' à \mathcal{R} , est elle-même une transformation de Lorentz spéciale, de vitesse $-V$. On a donc aussi $y = a_{23}(-V)y'$.

Utilisons à présent l'isotropie de l'espace. Celle-ci implique qu'aucune direction ne soit privilégiée et en particulier la transformation de Lorentz doit s'exprimer de la même manière quelle que soit la direction de translation (du moment qu'on a pris soin d'aligner correctement les axes). Ceci se traduit par une *invariance de la transformation par rotation*. La transformation ne peut à fortiori pas dépendre du sens de translation (qui est une rotation d'angle π) de sorte que les éléments de A ne dépendent de la vitesse que par sa norme et $a_{23}(-V) = a_{23}(V)$. On a ainsi démontré l'égalité

$$a_{23} = \frac{1}{a_{23}}. \quad (7.12)$$

On a donc $a_{23}(V) = \pm 1$, où le signe traduit l'orientation relative des axes. Si celle-ci est cohérente,

$$a_{23}(V) = 1. \quad (7.13)$$

De même dans la direction z , $a_{31} = a_{32} = a_{33} = 0$ et $a_{34} = 1$.

Intuition**Directions transverses au mouvement**

La transformation de Lorentz spéciale laisse invariantes les coordonnées transverses au mouvement relatif de deux référentiels.

La matrice de transformation est alors ramenée à quatre coefficients :

$$\begin{pmatrix} x' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(V) & a_{12}(V) & 0 & 0 \\ a_{21}(V) & a_{22}(V) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$

Désormais on résumera d'ailleurs la matrice A à la matrice 2×2 telle que :

$$\begin{pmatrix} x' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(V) & a_{12}(V) \\ a_{21}(V) & a_{22}(V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

Vitesse des origines

De nouvelles simplifications apparaissent lorsqu'on se pose des vitesse connues de deux points particulier : O et O' . Considérons le mouvement du point O' , défini notamment par $x' = 0$, on peut écrire

$$a_{21}(V)x + a_{22}(V)z = x' = 0 \Rightarrow \frac{x}{z} = -\frac{a_{21}(V)}{a_{22}(V)}. \quad (7.16)$$

De plus il se déplace dans \mathcal{R} à la vitesse V , donc

$$-\frac{a_{21}(V)}{a_{22}(V)} = \frac{V}{c}. \quad (7.17)$$

Si on étudie de la même manière le mouvement de \mathcal{R} dans \mathcal{R}' on peut inverser la transformation :

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{12}(V) & -a_{11}(V) \\ -a_{22}(V) & a_{21}(V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ z' \end{pmatrix}, \quad (7.18)$$

et pour le point O , vérifiant $x = 0$, on a :

$$-a_{21}(V)x' + a_{11}(V)z' = 0. \quad (7.19)$$

Comme O se déplace à la vitesse $-V$ dans \mathcal{R}' ,

$$\frac{a_{21}(V)}{a_{11}(V)} = -\frac{V}{c}. \quad (7.20)$$

En combinant ces deux égalités, on démontre

$$a_{11}(V) = a_{22}(V). \quad (7.21)$$

Isoptropie de l'espace

Nous exploitons à nouveau l'isotropie de l'espace en considérant la rotation d'un axe Oy et d'angle α . Elle est signifiée par une barre. Cela nous donne deux nouveaux référentiels : la rotation \mathcal{R}' de \mathcal{R} et la rotation \mathcal{R}'' de \mathcal{R}' . Les quatre référentiels à disposition sont résumés sur la figure 7.2.

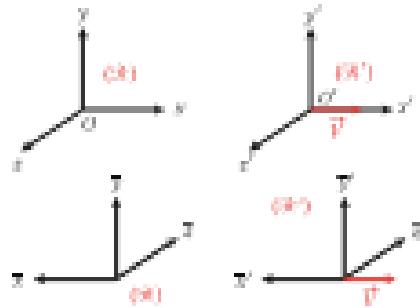


FIGURE 7.2 – À partir du référentiel initial \mathcal{R} , on constitue deux types de transformation : la translation de vitesse \vec{V} selon $\overrightarrow{x_0}$ (signifiée par la prime $'$) et la rotation d'un axe Oy et d'angle α (signifiée par la barre $\bar{\alpha}$). Cela aboutit à quatre référentiels différents dont les vitesses sont représentées par rapport à \mathcal{R} .

Comme \mathcal{R} se déplace à la vitesse V dans \mathcal{R}' on peut écrire entre eux la transformée de Lorentz

$$\begin{pmatrix} \sigma' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(V) & a_{12}(V) \\ a_{21}(V) & a_{22}(V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ x \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

Comme de plus \mathcal{R}' et \mathcal{R}'' sont les rotations respectives de \mathcal{R} et \mathcal{R}' on peut réécrire la transformation comme suit :

$$\begin{pmatrix} \sigma' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(V') & -a_{12}(V') \\ -a_{21}(V') & a_{22}(V') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma'' \\ x'' \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

En comparant cette dernière expression avec la transformée inverse (équation [7.13]) on déduit:²

$$a_{11}^2 = a_{12}a_{21} = 1 \quad (7.24)$$

et comme de plus $a_{22} = -(V/c)a_{11}$ on a

$$a_{12}(V) = \frac{c}{V} \frac{1 - a_{11}^2(V)}{a_{11}(V)} \quad (7.25)$$

et la transformée est ramenée à l'expression d'une unique fonction arbitraire, $a_{11}(V)$:

$$A(V) = \begin{pmatrix} a_{11}(V) & \frac{c}{V} \frac{1 - a_{11}^2(V)}{a_{11}(V)} \\ \frac{c}{V} a_{11}(V) & a_{11}(V) \end{pmatrix}. \quad (7.26)$$

² Notons que cela correspond à dire que le déterminant de la matrice de transformation de Lorentz vaut 1.

L'objet du dernier paragraphe est de déterminer a_{11} .

Invariance de c

Considérons un cas particulier correspondant au second postulat d'Einstein : la propagation d'un rayon lumineux. Cette propagation se fait à la vitesse c dans \mathcal{R} et dans \mathcal{R}' , soit $dx/dt = dx'/dt' = c$. En écrivant la transformation de Lorentz (7.26) pour les déplacements infinitésimaux $d\vec{x}$, on a :

$$\begin{aligned} dt' &= a_{11} \left(dt + \frac{1}{V} \frac{1 - a_{11}^2}{a_{11}^2} dx \right), \\ dx' &= a_{11} (dx - V dt). \end{aligned} \quad (7.27)$$

ce qui permet d'exprimer

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{\frac{dx}{dt} - V}{1 + \frac{1 - a_{11}^2}{V^2/a_{11}^2} \frac{dx}{dt}} \quad (7.28)$$

Finalement, on remplace $dx/dt = dx'/dt' = c$ ce qui permet d'obtenir

$$a_{11}^2 = \frac{1}{1 - V^2/c^2}. \quad (7.29)$$

Conclusion

En posant

$$\beta = \frac{V}{c} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (7.30)$$

on peut écrire $a_{11} = \gamma$ et obtenir la forme explicite de (7.26) exposée au début de cette partie :

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ dz' \\ dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \\ ct \end{pmatrix}. \quad (7.31)$$

Cette transformation n'ayant pas d'influence sur les directions transverses on la résume très couramment à la matrice 2×2 :

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \quad (7.32)$$

Pour faire le changement de référence inverse et passer de \vec{x}' à \vec{x} on pourrait inverser la matrice 2×2 précédente, ce qui n'est pas difficile. Cela dit, mieux vaut montrer au jury qu'on a bien compris la

physique au milieu des calculs : passer de \mathcal{R}' à \mathcal{R} revient bien à inverser la transformation de \mathcal{R} vers \mathcal{R}' mais c'est surtout un changement de référentiel de vitesse $-V$ dont la transformation de Lorentz s'exprime immédiatement en conservant $\gamma(-V) = \gamma(V)$ et $\beta(-V) = -\beta(V)$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta \\ \gamma \beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \kappa' \end{pmatrix}. \quad (7.33)$$

Remarquons aussi que lorsque $V \ll c$ on a $\beta \rightarrow 0$ et $\gamma \rightarrow 1$ et on retrouve la transformation de Galilée, ce qui est attendu. Ces deux facteurs quantifient ainsi l'importance des corrections relativistes. À la limite non relativiste $V \ll c$, γ tend vers 1. Puis au fur et à mesure que l'on augmente V le coefficient diverge. On donne quelques valeurs de γ en fonction de V/c dans le tableau 7.2 pour se rendre compte des vitesses à partir desquelles la relativité restreinte s'écarte notablement de la mécanique newtonienne. Le graphique présenté figure 7.3 permet de faire passer le même message de manière plus visuelle.

V/c	0,01	0,30	0,70	0,95
γ	1,01	1,1	2	10

TABLE 7.2 – Quelques valeurs significatives de γ .

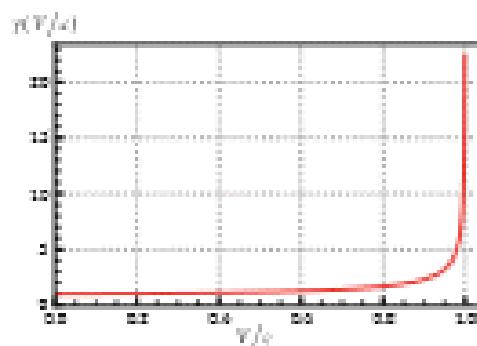


FIGURE 7.3 – Facteur γ de Lorentz quantifiant l'écart entre la relativité et la transformation de Galilée en fonction de la vitesse adimensionnée V/c .

Ignorer les corrections relativistes même toujours à une erreur sur la position de la trajectoire, laquelle est d'autant plus faible que γ l'est. Si au quotidien on se satisfait de la mécanique newtonienne, certaines expériences de précision impliquent de prendre en compte ces corrections même si les vitesses en jeu ne sont pas à priori relativistes.

7.1.3 Interprétation graphique

A partir de la transformation de Lorentz en deux dimensions donnée dans l'équation (7.32), on peut déduire les relations suivantes entre les coordonnées x et ct :

$$x = \frac{1}{\gamma}x' + \beta ct \quad \text{et} \quad ct' = \frac{1}{\gamma}ct - \beta x'. \quad (7.34)$$

En remarquant que l'on a $\beta^2 + \left(\frac{1}{\gamma}\right)^2 = 1$, on peut poser α tel que

$$x = \cos \alpha x' + \sin \alpha ct \quad \text{et} \quad ct' = \cos \alpha ct - \sin \alpha x', \quad (7.35)$$

avec

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{\gamma}. \quad (7.36)$$

On peut donc représenter graphiquement les transformations de Lorentz par des rotations d'angle α entre les coordonnées (x', ct') et (x, ct) .

Une telle représentation graphique est donnée sur la figure 7.4. On choisit d'élever les deux rapports d'un angle $\alpha/2$ par rapport à l'horizontale et à la verticale de référence afin d'insister sur le fait qu'aucun d'entre eux n'est privilégié : c'est le mouvement relatif des référentiels compris ici ! De plus, un photon voyagant à la vitesse c , il suit une trajectoire d'équation $x = ct$ ou $x' = ct'$, c'est-à-dire une droite d'angle 45° avec l'horizontale.

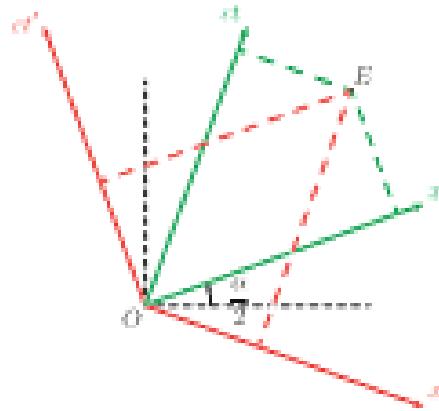


FIGURE 7.4 – Diagramme de Lorentz. On insiste sur le fait que les systèmes se rotatent l'un par rapport à l'autre sous (x', ct') et (x, ct) , non pas (x, ct) et (x', ct') !

On peut voir sur la figure 7.4 que la transformation de Lorentz permettant de passer du repère (x, ct) au repère (x', ct') a aussi une interprétation géométrique, bien que celle-ci soit plus complexe : il s'agit d'une transformation hyperbolique du plan.

Bien plus généralement, on peut montrer que les transformations de Lorentz sont les éléments du groupe $SO(1, 3)$. Les transformations obtenues ici en forment un sous-groupe, car l'on est limité à la description de translations rectilignes uniformes selon un seul axe. En général, il faut aussi prendre en compte les rotations ; on peut alors montrer qu'il existe une structure de groupe sur les transformations de Lorentz.

7.1.4 Invariance de l'intervalle

Nous avons introduit à présent la notion d'événement, décrit par quatre coordonnées spatiotemporelles, et la transformation de ses coordonnées lors d'un changement de référentiel galiléen. Lors de la description de systèmes physiques se pose naturellement la question de mesurer la « distance » entre différents événements. Cette question n'est pas évidente du fait du caractère non-absolu du temps.

La bonne généralisation à un espace-temps à quatre dimensions conduit à la notion d'**intervalle**. Entre deux événements repérés dans un même référentiel par les coordonnées (x_1, x_0, p_0, x_1) et (x_2, x_0, p_0, x_2) , l'intervalle est

$$(x_2 - x_1)^2 = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (p_2 - p_1)^2 + (x_2 - x_1)^2. \quad (7.37)$$

que l'on écritra pour des événements infinitésimalement proches

$$dt^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (7.38)$$

Le choix du signe – devant la composante temporelle $-ct$ + devant la composante spatiale $+dx$ – est parfaitement arbitraire. On y reviendra lors de la description plus générale du formalisme quadridimensionnel en dynamique relativiste.

Considérons maintenant les deux autres événements dans le référentiel \mathcal{R}' , ils sont repris par (x'_1, x'_0, p'_0, x'_1) et (x'_2, x'_0, p'_0, x'_2) . Faire le lien entre l'intervalle dans les deux référentiels fournit une belle application de la transformation de Lorentz. Pour simplifier, on considérera des événements infinitésimalement proches pour utiliser la notation de platonique $s_{0,2}$.

La transformation de Lorentz étant linéaire, on peut l'écrire pour dx' ,

$$c dt' = \gamma c dt - \gamma \beta dx \quad \text{et} \quad dx' = -\gamma \beta c dt + \gamma dx, \quad (7.39)$$

de sorte que

$$\begin{aligned} dx'^2 &= -c^2 dt'^2 + dx'^2 + \dots \\ &= -\gamma^2(c dt - \beta dx)^2 + \gamma^2(-\beta c dt + dx)^2 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\gamma^2(\beta^2 dx^2 - 2\beta dx \cdot dx + \beta^2 dx^2) + \gamma^2(\beta^2 c^2 dt^2 - 2\beta c dt \cdot dx + dx^2) + \dots \\
 &= -\gamma^2(c^2 dt^2(1 - \beta^2) - dx^2(1 - \beta^2)) + \dots
 \end{aligned} \tag{7.40}$$

Comme on sait $\gamma^2 = 1/(1 - \beta^2)$, on obtient bien $dt^2 - dx^2$, à savoir que l'intervalle entre deux événements est un intervalle relativiste (i.e., il a la même valeur dans tout référentiel galiléen). On parle d'**intervalle de l'espace-temps**.

Pour finir, remarquons que l'intervalle dt^2 n'est pas nécessairement positif.

- Si l'intervalle est positif, on peut trouver un référentiel \mathcal{R}' pour lequel $dt^2 - dx'^2 = dx^2 > 0$: il suffit en effet de résoudre l'équation (7.39) avec $dx' = 0$. Dans \mathcal{R}' les deux événements sont simultanés (mais à des endroits différents). On parle d'**intervalle de genre espace**.
- Si l'intervalle est négatif, on peut trouver un référentiel \mathcal{R}' pour lequel $dt^2 - dx'^2 = -c^2 dt'^2 < 0$ en résolvant l'équation (7.39) avec $dx' = 0$. Dans \mathcal{R}' les deux événements ont lieu au même endroit (mais à des instants différents). On parle d'**intervalle de genre temps**.

Remarquons que l'on ne pourra pas résoudre l'équation (7.39) avec $dx' = 0$ pour un intervalle de genre espace ou $dt' = 0$ pour un intervalle de genre temps car les signes ne seraient pas cohérents !

Si deux événements sont séparés par un intervalle de genre espace il ne peut exister aucun lien de causalité (c'est-à-dire qu'aucune information ne peut être envoyée de l'un à l'autre) entre les deux puisqu'il peuvent être simultanés en deux points différents dans un référentiel donné.

7.2 Conséquences pratiques

7.2.1 Conséquences sur les durées

Dilatation des durées

L'effet présent dans ce paragraphe est peut-être un des plus célèbres de relativité restreinte : le temps s'écoule différemment dans deux référentiels en mouvement relatif, ce que nous avons déjà vu lors de notre étude de l'horologie à photon. Pour vérifier rigoureusement cette affirmation, il faut comparer l'indication donnée par une horloge dans les deux référentiels \mathcal{R} et \mathcal{R}' . Considérons donc une horloge au repos dans le référentiel \mathcal{R}' , c'est-à-dire immobile en O' . Nous considérons deux « tics » consécutifs de l'horloge, séparés d'une durée $\Delta t'_0$. L'indice 0 est là pour rappeler que l'horloge est bien immobile dans \mathcal{R}' (cette notation se précisera plus bas avec le concept de temps propre).

Quelle est la durée séparant ces tics dans \mathcal{R} ? Pour la déterminer, il faut identifier précisément les deux événements considérés et appliquer la transformation de Lorentz³:

³ Attention, on utilise ici la transformation pour passer de \mathcal{R}' à \mathcal{R} , donc avec $-V$.

- le « premier tick » de coordonnées

$$t'_0 = 0, \quad x'_0 = 0, \quad (7.41)$$

donc dans \mathcal{R}_0 , on a

$$t_0 = 0, \quad x_0 = 0, \quad (7.42)$$

- le « second tick » de coordonnées

$$t'_0 = \Delta t'_0, \quad x'_0 = 0, \quad (7.43)$$

et ainsi dans \mathcal{R}_0 ,

$$t_0 = \gamma \Delta t'_0, \quad x_0 = \gamma V \Delta t'_0. \quad (7.44)$$

On peut noter que le second tick à l'œil, dans \mathcal{R}_0 , à la position $x_0 = \gamma V \Delta t'_0$, quand la cinématique classique aurait prévu $x_0 = V \Delta t'_0$.

De manière générale, la cinématique relativiste appelle souvent des corrections via un facteur γ (qui tend bien vers 1 aux faibles vitesses) par rapport à la cinématique newtonienne.

La durée entre les deux ticks est ainsi

$$\Delta t = t_0 - t_1 = \gamma \Delta t'_0, \quad (7.45)$$

donc la période de l'horloge paraît plus longue que dans le référentiel où elle est immobile : c'est le phénomène de **dilatation des durées**.

Temps propre

On peut retrouver le résultat précédent directement à partir de l'expression de l'intervalle. En effet, on avait précédemment

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t'^2, \quad (7.46)$$

qui doit être égal à Δt^2 . Or dans \mathcal{R}_0 , l'horloge se déplace à la vitesse constante V , donc

$$\Delta t^2 = -c^2 \Delta t'^2 + \Delta x^2 = -c^2 \Delta t'^2 + V^2 \Delta t'^2 = -c^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \Delta t'^2, \quad (7.47)$$

et on obtient l'équation (7.45) par identification des intervalles.

Dans le référentiel \mathcal{R}' , l'horloge est au repos et c'est pourquoi on parle de **référentiel propre**. De même, le temps qui s'y écoule est le **temps propre** τ : ici $t' = \tau$.

Le temps propre est plus que le temps dans un certain référentiel : puisqu'on a la relation $\Delta s^2 = -c^2 \Delta t'^2$, il s'agit du pendant « temporel » de l'intervalle, et fournit un instantané semblable à un temps. Cela sera très utile en dynamique relativiste.

On peut ainsi formuler un peu plus généralement le principe de dilatation des durées.

Informations**Dilatation des durées**

La durée mesurée entre deux événements dans un référentiel en translation à vitesse V par rapport au référentiel propre est plus grande que la durée propre : on parle de dilatation des durées.

$$\Delta t = \gamma(V) \Delta t' > \Delta t'. \quad (7.48)$$

Il est possible d'interpréter le phénomène de dilatation des durées à l'aide d'un diagramme de Lorentz, comme celui dans la figure 7.5.

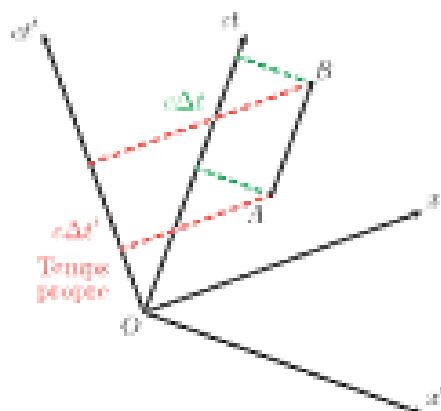


FIGURE 7.5 – Illustration de la dilatation des durées à l'aide d'un diagramme de Lorentz. On voit que dans tout référentiel tel que l'horloge n'est pas au repos (A et B ont des coordonnées spatiales différentes), la durée $t_B - t_A$ mesurée sera supérieure au temps propre.

Il étant galiléen, nous avons considéré ici un cas simplifié où l'horloge était en translation rectiligne uniforme dans \mathfrak{R} . Elle pourrait avoir un mouvement quelconque de vitesse $\vec{V}(t)$, auquel cas il n'y a pas un référentiel propre mais un à chaque instant : c'est le référentiel galiléen \mathfrak{R}_t en translation par rapport à \mathfrak{R} de vitesse $\vec{V}_t = \vec{V}(t)$. La relation de dilatation des durées peut alors écrire de façon infinitésimale :

$$dt = \gamma d\tau' = \gamma dt', \quad (7.49)$$

ou de façon intégrale :

$$\Delta t = \int \gamma dt'. \quad (7.50)$$

Considérons deux horloges A et B , synchronisées à l'instant initial. On fait dévier l'horloge B de A à une vitesse V constante. En raison du phénomène de dilatation des durées, un observateur lié à l'horloge B devrait voir l'horloge A retarder... mais de façon symétrique, un observateur lié à A devrait voir B retarder ! Que se passe-t-il alors si l'horloge B fait demi-tour et rejoint A en se déplaçant à la vitesse $-V$? Cette question est à l'origine du *paradoxe des jumeaux*.

Pour résoudre le paradoxe, il faut remarquer que le demi-tour réalisé par l'horloge B implique un changement de référentiel galiléen ! Il est nécessaire d'effectuer une accélération ponctuelle, qui est mesurable directement dans le référentiel de B . À l'inverse, A n'effectue pas de demi-tour et a donc une accélération toujours nulle. Cette observation brise la symétrie et les calculs mènent alors à (voir [32]) :

$$T_B = \gamma(V) T_A, \quad (7.51)$$

avec T_A la durée mesurée dans le référentiel lié à B et T_B la durée mesurée dans le référentiel lié à A .

Cette première conséquence sur la mesure de durée explique une expérience très classique menée dès les années 1940 et qui a permis de confirmer cette prédiction.

Durée de vie des muons atmosphériques

Les muons sont des particules chargées, découvertes en 1937 par Stoen et Stevenson, susceptibles de se désintégrer selon

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_{\mu}, \quad (7.52)$$

où on rappelle que ν_μ est un neutrino muonique et $\bar{\nu}_\mu$ un antineutrino électronique. C'est une réaction qui conduit à une loi de décomposition exponentielle du nombre de muons : $N(t) = N(0) \exp(-t/T)$, où T est la durée de vie des muons. En laboratoire, on mesure cette durée de vie dans leur référentiel propre $T_p = 2,2 \times 10^{-6}$ s.

La même mesure peut être effectuée pour des muons voyageant à $v = 0,992c$ lorsqu'ils arrivent sur Terre. Dans le référentiel de la Terre la durée de vie perçue doit satisfaire $T = \gamma T_p$. C'est qu'en essaya de vérifier expérimentalement.

Sur la figure 7.6, un détecteur placé en D_1 et un autre en D_2 capture les muons neutrs. Depuis leur émission ils arrivent au temps t_2 en D_2 qui comprend $n(t_2) = n_0 \exp(-t_2/T)$ et au temps t_1 en D_1 qui comprend $n(t_1) = n_0 \exp(-t_1/T)$. Les deux temps étant reliés par la vitesse de parcours $t_1 - t_2 = (x_2 - x_1)/v$, on a

$$\ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = -\frac{t_2 - t_1}{T} \quad \text{donc} \quad T = \frac{x_2 - x_1}{v \ln\left(\frac{n_2}{n_1}\right)}. \quad (7.53)$$

En 1963, les américains Frisch et Smith mènent l'expérience au mont Washington [33] et mesurent

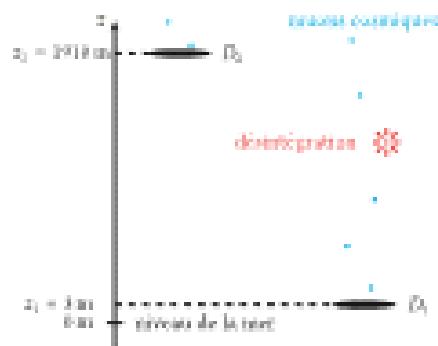


FIGURE 7.6 – Deux détecteurs comprennent les mesures cosmiques repas en haut du mont Washington (D_2) et au niveau de la mer (D_3).

$n_2 = 563 \pm 10$ à $x_2 = 1910$ m et $n_3 = 408 \pm 9$ à $x_3 = 3$ m. Il vient donc $T = 19,9$ ps d'où

$$\gamma_{\text{exp}} = \frac{T}{T_p} = 9 \quad \text{alors que} \quad \gamma_{\text{théor.}} = 7,92. \quad (7.54)$$

En réalité, Frisch et Smith ont dû prendre en compte de nombreuses sources d'incertitudes pour estimer correctement la valeur moyenne de la vitesse des photons. Ils fournissent ainsi dans leur article $\gamma_{\text{moy.}} = 8,6 \pm 2$, et estiment de même pour la valeur expérimentale $\gamma_{\text{exp.}} = 8,8 \pm 0,8$.

On peut conclure que la dilatation des durées est bien observée.

7.2.2 Conséquences sur les longueurs

Qu'adviennent de la mesure de longueurs dans deux référentiels en mouvement relatif? Commençons par définir la **longueur propre** d'un objet : il s'agit de la longueur de cet objet dans un référentiel où celui-ci est au repos. Considérons alors une règle de longueur propre L_p , au repos dans \mathcal{R}' et disposée suivant $\mathcal{O}'x'$.

Comment mesurer sa longueur dans \mathcal{R} ? La méthode consiste à déterminer la position des extrémités de la règle à un instant donné $\Delta t = 0$.

La longueur de la règle est donc $L = \Delta x = x_2 - x_1$ où les deux événements considérés A et B sont :

- la détection de la position de la première extrémité, en $(t_A = 0, x_A = 0)$, donc $(t'_A = 0, x'_A = 0)$;
- la détection de la position de la seconde extrémité, en $(t_B = 0, x_B = L)$, et c'est L que l'on cherche à déterminer. Par transformation de Lorentz, $t'_B = -\gamma \beta t_B$ et $x'_B = \gamma L$.

La règle étant au repos dans \mathcal{R}' , la mesure de la position de ses deux extrémités donne forcément sa longueur

propre : $s'_0 - s'_d = L_p$. Finalement, on obtient :

$$L = \frac{L_p}{\gamma} < L_p. \quad (7.55)$$

Il y a **contraction des longueurs**, puisque la règle apparaît moins longue dans le référentiel R .

On voit bien ici que cette contraction des longueurs est une autre face de la relativité de la simultanéité, puisque $t_0 = t_d$ alors que $t'_0 < t'_d$. Cette différence sur les temps se traduit ensuite en différence sur les positions.

Tableau

Contraction des longueurs

La longueur propre L_p d'un objet dans le référentiel où il est au repos et celle L mesurée par un observateur en translation rectiligne uniforme à la vitesse V sont liées par

$$L = \frac{L_p}{\gamma(V)} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} L_p. \quad (7.56)$$

On a donc toujours $L < L_p$.

Comme la dilatation des temps, la contraction des longueurs est un effet purement cinématique qui ne résulte ni n'engendre aucun phénomène dynamique (force, ...).

Le même raisonnement mené sur les dimensions transversales au mouvement montre qu'elles ne sont pas concernées par le phénomène de contraction. Par conséquent la mesure des angles, surface et volume est aussi modifiée par le fait d'être ou non en mouvement par rapport à l'objet lorsqu'on effectue la mesure. Les formules sont démontrées dans de nombreuses références, notamment au chapitre 4 de [32].

Terminons cette section par un exemple illustrant les précautions qu'il faut prendre sous peine de mener à des paradoxes.

Soit une baguette de pain de longueur propre L_p lancée à vitesse V très proche de c sur la table d'un boulanger qui, évidemel, a fait deux coups de couteau très tranchants séparés de L_p sur la baguette.

- + Du point de vue du boulanger, la baguette de pain est contractée d'un facteur γ et la baguette restera ainsi en saucisse.

• Du point de vue de la baguette, les deux couteaux sont séparés d'une distance égale à y et elle sera irrémédiablement tranchée.

Le paradoxe se résout en définissant proprement les événements. Soit \mathcal{R} le référentiel de la boulangerie et \mathcal{R}' celui de la baguette (en translation rectiligne uniforme de vitesse $\vec{V} = V \vec{\mathbf{e}}_x$). L'origine de chaque repère est choisie de sorte que l'événement « le couteau gauche s'abat » ait lieu à $(t_0, x_0) = (0, 0)$ et $(t'_0, x'_0) = (0, 0)$. Considérons l'événement « le couteau droit s'abat », de coordonnées (t_0, x_0) dans \mathcal{R} et (t'_0, x'_0) dans \mathcal{R}'

- Dans le référentiel de la boulangerie, les deux couteaux s'abattent simultanément et le boulanger souhaite couper la baguette avec exactement la distance L_p , soit $t_0 = 0$ et $x_0 = L_p$. Par construction des longueurs, l'autre côté droit de la baguette est alors en $x = L_p/y < x_0$ donc la baguette est bien saillie et sauve.
- Dans le référentiel de la baguette, la transformation de Lorentz donne :

$$\alpha'_0 = \gamma(x_0 - \beta t_0) = -\gamma \beta x_0 \implies t'_0 = -\frac{x'_0}{\gamma \beta} < 0,$$

tandis que le couteau gauche s'abat en $t'_0 = 0$: le couteau droit s'abat avant le gauche, il n'y a

plus simultanéité des événements ! Par ailleurs, on a $x'_0 = \gamma(x_0 - \beta t_0) = \gamma t'_p > t'_p$ tandis que l'heureux/heureuse de la baguette est en $x' = t'_p$, lorsque le coucou doit crier (la baguette est au repos dans \mathcal{R}') : la baguette est encore une fois jeune et sauvage² !

a. A moins toutefois que la baguette d'heureux contre le coucou droit déclinerait pas assez...

7.2.3 Effet Doppler-Fizeau

Considérons une onde de cohérence émise par une source S et reçue par un observateur en M . On suppose que S est en mouvement par rapport à M . La fréquence de l'onde émise par la source et la fréquence de l'onde reçue par l'observateur sont alors différentes en général, à cause du mouvement relatif des deux lors de l'émission d'une période.

Lorsque l'onde émise est portée par un milieu matériel, un référentiel est d'office privilégié : celui où le milieu est au repos. Pour simplifier, on suppose que l'onde est formée d'impulsions séparées d'une période T_S , et on suppose que les mouvements se font tous le long d'une droite. On se place alors dans le référentiel du milieu matériel, et on note v_M la vitesse du récepteur et v_S la vitesse de la source.

La distance séparant les impulsions dans le référentiel du milieu est $d = cT_S - v_S T_S$, car la source avance de $T_S v_S$ entre deux d'entre elles. Le récepteur reçoit les impulsions séparées d'une distance d_M avec $cT_M = d_M = d + v_M T_M$, d'où

$$f_M = \frac{1}{T_M} = \frac{d + v_M T_M}{d} = \frac{c - v_M}{c - v_S} \frac{1}{T_S} = f_S \frac{1 - \frac{v_M}{c}}{1 - \frac{v_S}{c}}. \quad (7.57)$$

Si seule la source est mobile, on trouve $f_M = f_S / (1 - v_S/c)$, tandis que si seul l'observateur est mobile on obtient $f_M = f_S (1 - v_M/c)$. On a donc une dégénérescence due à la présence d'un référentiel privilégié.

Pour les ondes électromagnétiques dans le vide, le raisonnement est différent, car aucun référentiel n'est privilégié. On considère que l'observateur est lié au référentiel \mathcal{R} et que la source est dans le référentiel \mathcal{R}' (voir figure 7.3). Notons dans \mathcal{R} \vec{k} la vecteur d'onde de l'onde et ω sa pulsation. Une impulsion correspond à une phase donnée : on peut traduire le fait que l'on suit une impulsion dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' en écrivant

$$-\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r} = -\omega t' + \vec{k}' \cdot \vec{r}', \quad (7.58)$$

En d'autres termes, la phase est invariante par changement de référentiel. Cela implique les relations suivantes pour la transformation de ω et \vec{k} :

$$\begin{aligned} \omega' &= \gamma(\omega - k_x P), \\ k'_x &= \gamma\left(k_x - \frac{\omega P}{c^2}\right), \\ k'_y &= k_y, \quad \text{et} \quad k'_z = k_z. \end{aligned} \quad (7.59)$$

En notant θ l'angle entre \vec{k}' et \vec{V} (avec \vec{V} selon Ox), on trouve à l'aide de la relation de dispersion :

$$\omega = \frac{\omega'}{r(1 - \beta \cos \theta)}, \quad (7.60)$$

Pour comparer au cas précédent, on suppose que \vec{k}' et \vec{v}' sont alignés :

- si la source se rapproche de l'observateur, on a $\theta = 0$ et

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad (7.61)$$

s'olt un décalage du spectre vers les petites longueurs d'onde;

- si la source éloigne de l'observateur, on a $\theta = \pi$ et

$$\omega = \omega' \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}, \quad (7.62)$$

s'olt un décalage du spectre vers les grandes longueurs d'onde, ou *redshift*.

On observe que dans ce cas, on a parfaite symétrie entre le mouvement de la source et le mouvement de l'observateur! Par ailleurs, on peut prendre la limite $\beta \ll 1$ pour comparer aux prédictions classiques dans la limite non relativiste. On obtient dans le premier cas $\omega = \omega'(1 + \beta)$ et dans le second cas $\omega = \omega'(1 - \beta)$, ce qui est cohérent avec l'équation (7.57) : en effet, celle-ci donne dans cette limite

$$\omega = \omega' \left(1 + \frac{v_0 - v_M}{c} \right), \quad (7.63)$$

et $v_0 = v_M/c$ vaut β si la source s'approche de l'observateur et $=-\beta$ sinon.



FIGURE 7.7 – Positions de l'observateur *Af* et de la source *S*.

On pourrait aussi retrouver le même résultat en écrivant la dilatation des durées entre les deux référentiels, sans passer par l'invariance de la phase.

Du fait de l'*effet Doppler relativiste*, et de l'*éloignement relatif* des astres dans l'Univers, un rayonnement électromagnétique émis par une étoile sera mesuré sur Terre avec une légère différence de fréquence. On observe en effet une augmentation de la longueur d'onde, c'est pourquoi on parle de *redshift vers le rouge*. Cet effet a été observé pour la première fois par W. Huggins en 1868. Il s'agit en réalité d'une combinaison d'effets distincts :

- le *Doppler redshift*, que nous venons d'expliquer, dû à un mouvement relatif entre les astres observés et l'observateur sur Terre;
- le *cosmologique redshift* dû à l'expansion de l'Univers : l'espace-temps s'étire, et l'on peut considérer que chaque photon subit une infinité de Doppler redshift en chaque point de sa trajectoire;
- le *gravitationnel redshift* dû à l'effet de la gravité sur le temps propre des photons (effet Einstein).

Troisième partie

Exercices

Mouvement de stick-slip

Afin de vous entraîner sur ce sujet, vous pouvez travailler sur la partie I du sujet X PC 2007. Des corrigés sont trouvables facilement sur Internet, n'hésitez pas à me contacter si vous ne parvenez pas à les trouver.

Point d'application de la réaction du support et basculement

Énoncé

Considérons un pavé de côté a et hauteur b , de masse m , posé sur un plan et tourné dans la direction \vec{U}_x par une force $\vec{F} = F\vec{U}_y$ appliquée en M comme représenté figure 7.8. Le frottement entre le pavé et le plan est caractérisé par un unique coefficient f .

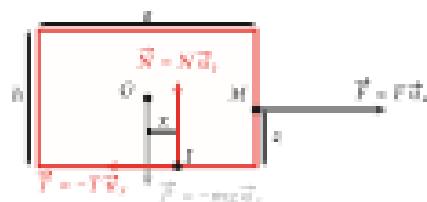


FIGURE 7.8 – Le pavé est soumis à une force $\vec{F} = F\vec{U}_y$, de traction appliquée en M . Le poids s'applique en G . On considère que la réaction du support $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ s'applique au point I , dont la position est placée au hasard pour le moment.

- À quelles conditions le pavé reste-t-il immobile? En déduire une égalité impliquant N et une inégalité impliquant T .
- Utiliser la condition statique pour trouver une relation entre x et z .
- Que se passe-t-il si $|x| > z/2$? Discuter.

Correction

- Le pavé reste immobile s'il se trouve à l'équilibre statique. Cela implique que la somme des forces s'appliquant sur lui est nulle :

$$\vec{T} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0}, \quad (7.64)$$

On en déduit, par projection sur \vec{U}_x et \vec{U}_y ,

$$N = mg \quad \text{et} \quad F = T. \quad (7.65)$$

Pour qu'il n'y ait pas glissement, la loi d'Amontons-Coulomb impose $|T| \leq f|N|$, soit

$$F \leq fmg. \quad (7.66)$$

On doit également avoir entre l'équilibre des moments des forces : en prenant les moments au point I , on a $\mathcal{M}_I(\vec{F}) = \mathcal{M}_I(\vec{F}') = \vec{0}$, et on doit donc avoir :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_I(\vec{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_I(\vec{F}') = \vec{0}. \quad (7.67)$$

2. On déduit de l'équation précédente la relation

$$-(mgx - Fx) \vec{n}_y = \vec{0}, \quad \text{soit} \quad x = \frac{F}{mg}x. \quad (7.68)$$

Plusieurs remarques s'imposent sur cette expression de x :

- Si on ne tire pas sur le poul ($F = 0$), le point I est la projection de G sur la surface de contact.
- Si on tire sur la droite du poul, le point d'application de la force est à droite de G . Si on pousse ($F < 0$), le point d'application est à gauche de G .
- Plus le poul est lourd, moins le point d'application s'écarte de la verticale de G .

3. Si $|x| > a/2$, le point d'application I sort de la surface de contact entre les deux solides ce qui est impossible. L'équilibre des moments est nécessairement rompu et le solide bascule. La condition de basculement écrit :

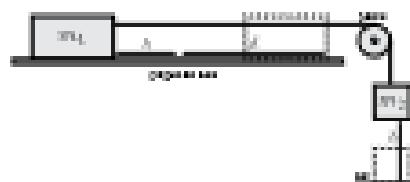
$$\frac{|F|}{mg}x > \frac{a}{2} \quad \text{soit} \quad x > \frac{mg a}{2|F|}. \quad (7.69)$$

Le basculement a lieu vers la droite si $x > a/2$ — soit $F > 0$ — et vers la gauche si $x < -a/2$ — soit $F < 0$. Cette condition est d'autant plus difficile à remplir que le poul est large (a grand) et lourd (m élevé).

Mesure d'un coefficient de friction dynamique

Énoncé

On étudie le dispositif présenté dans [mesure-fd] (cf [TLM] page 272), résumé dans la partie III. Lors de la première phase du mouvement, les deux masses avancent à la même vitesse ; lors de la deuxième phase, la masse 2 est poussée par terre et la masse 1 avance seule sur la table.



Expérience de mesure du coefficient de frottement dynamique f_d .

1. Notons v_d la vitesse de chaque masse à la fin de la première phase. Obtenir une équation reliant v_d , b , m_1 , m_2 et f_d .

2. En n'oubliant sur la deuxième phase, obtenir une seconde équation reliant v_2 , m_2 , b et d la distance parcourue par la masse 1 lors de cette phase.
3. Vérifier que l'on a alors

$$f_d = \frac{m_2 b}{m_1 b + (m_1 + m_2)d}. \quad (7.70)$$

Correction

1. On applique le théorème de l'énergie mécanique au système (masse 1 + masse 2 + fil) entre l'instant initial $t = 0$ et le moment Δt où la masse 2 touche le sol. On a

$$\frac{1}{2}m_1 v_2^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - m_2 g b = W_{\text{int.,m}} = -m_2 g b f_d + T_1 v_1 \Delta t - T_2 v_2 \Delta t, \quad (7.71)$$

en notant v_i la vitesse de la masse i et T_i la tension du fil pour la masse i . On a \vec{T}_1 dans le sens de \vec{v}_1 et \vec{T}_2 oppose à \vec{v}_2 , donc les trajectoires sont bien opposées; le fil étant inextensible, on a $T_1 = T_2 = T$ et $v_1 = v_2$. Ainsi

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_2^2 - m_2 g b = -m_2 g b f_d. \quad (7.72)$$

2. La masse 1 avance avec glissement. On applique le théorème de l'énergie cinétique entre l'état initial et l'état final :

$$-\frac{1}{2}m_1 v_2^2 = -f_d m_1 g b d. \quad (7.73)$$

3. Pour finir, on obtient l'équation recherchée en éliminant v_2 des deux équations précédentes.

Expérience de Millikan

Énoncé

On dispense un brouillard de fines gouttelettes sphériques d'eau, de masse volumique $\rho_0 = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, dans l'espace séparant les deux plaques horizontales d'un condensateur plan, distantes de $d = 2,0 \times 10^{-2} \text{ m}$. Les gouttelettes sont chargées négativement et sans vitesse initiale.

Toutes les gouttelettes ont radius moyen R mais pas forcément la même charge $-q$. En l'absence de champ électrique E , une gouttelette est soumise à son poids ($g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$), à la poussée d'Archimède de l'air ambiant de masse volumique $\rho_a = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -k \vec{v}$ avec $k = ad\eta$ et $\eta = 3,6 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Déterminer la vitesse limite \vec{v}_0 .
- Déterminer l'expression de la vitesse des gouttes. On fixe apparemment un temps caractéristique τ .
- On mesure $v_0 = 2,0 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, déterminer la valeur de k .
- On applique une différence de potentiel $U = V_1 - V_2$ de manière à avoir un champ électrique \vec{E} dirigé vers le bas. Déterminer E en fonction de U . On observe plusieurs gouttelettes : certaines sont immobilisées pour $U = 3200 \text{ V}$, d'autres pour $U = 6400 \text{ V}$ ou encore $U = 9600 \text{ V}$. Que peut-on en conclure ?

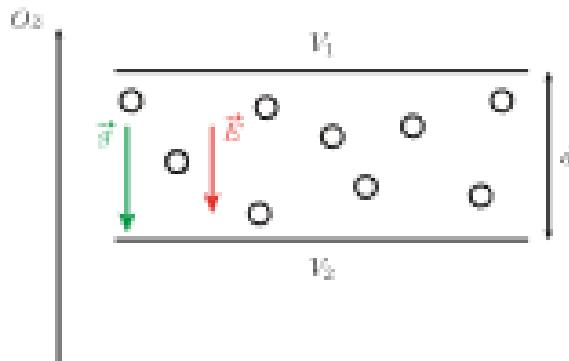


Schéma de l'expérience

Corrigé

- On fait le bilan des forces s'exerçant sur la gouttelette dans le référentiel galiléen : le poids, la poussée d'Archimède (opposée du poids du volume d'air déplacé) et le frottement. Le PFD appliqué à une goutte donne :

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_1 \vec{g} - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_2 \vec{g} - k\vec{v}.$$

La vitesse limite ou échappement lorsque l'accélération devient nulle :

$$\vec{v}_0 = \frac{4\pi R^3}{3k} (\rho_1 - \rho_2) \vec{g}.$$

- On peut résoudre le PFD en utilisant \vec{v}_0 :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = k(\vec{v}_0 - \vec{v}) \quad \text{soit} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m} \vec{v} = \frac{\vec{v}_0}{m}, \quad \text{avec} \quad r = \frac{m}{k}.$$

La solution de cette équation est :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 (1 - \exp(-t/r)).$$

- On trouve $R = 1,15 \times 10^{-4}$ m.

- On a $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ soit, en posant $V = V(x)$ et $\vec{E} = -E \vec{u}_x$: $dV/dx = E$. Il vient donc $V(x) = Ex + \text{const.}$ On a $V(r_1) = V_1$ et $V(r_2) = V_2$, soit :

$$U = V_1 - V_2 = E(r_1 - r_2) = Ed.$$

À l'équilibre, la force de frottement est nulle et la force électrostatique $-q\vec{E}$ équilibre le poids et la pression d'Archimède :

$$\vec{0} = -q\vec{E} + \frac{4}{3}\pi R^3(\rho_b - \rho_a)\vec{g}.$$

On en déduit :

$$q = \frac{4\pi R^3}{3g}(\rho_b - \rho_a)g.$$

Les trois tensions données dans Bénard donnent respectivement à $q = 3e$, $q = 2e$ et $q = e$. Plus généralement, en réalisant cette expérience, on mesure $q = n \times e$ avec n un entier positif. Cela constitue une preuve expérimentale de la quantification de la charge.

Note : le procédé de mesure par simulation de la vitesse de la goutte est peu précis à cause du mouvement brownien qui donne à faible vitesse. Lors de son expérience historique, Millikan a plutôt mesuré la vitesse limite des gouttes tombant à travers le champ électrostatisque : celle-ci vaut :

$$\overline{v}_{lim}(R) = \frac{1}{k} \left[\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_b - \rho_a)\vec{g} - q\vec{E} \right],$$

et sa mesure permet directement de renseigner à q .

Bibliographie

- [FPR] J. FILLIETTE, J. FROUETTE et H. ROUSSEAU. *Physique pour l'agregation*. De Boeck, 2023 (cf. p. 1, 5).
- [1] B. SALAMETTO et al. *Physique tout-en-un PCSI*. Dunod, 2013 (cf. p. 5).
- [2] M.-N. SANCÉ et al. *Physique tout-en-un PC*. Dunod, 2014 (cf. p. 5).
- [3] M.-N. SANCÉ et B. SALAMETTO. *Physique tout-en-un MP-MP**. Dunod, 2004 (cf. p. 5).
- [4] J.-M. BARDAT et al. *Mécanique 7^e année*. Héritage. Hachette, 2003 (cf. p. 5, 36).
- [5] J.-P. PINEAU. *Mécanique, fondements et applications*. 7^e édition. Dunod, 2022 (cf. p. 5, 27, 123).
- [TLM] L. BOUQUET, J.-P. FAROUX et J. REMAURE. *Toute la mécanique. Cases et exercices corrigés*. Dunod, 2002 (cf. p. 5, 40, 45, 108, 182).
- [Dico] R. TABAÏT, L. VILLEAIS et P. FRÈVRE. *Dictionnaire de physique*. 6^e édition. De Boeck, 2018 (cf. p. 5, 123).
- [6] V. DURAKOV et H. LACROIX. « La naissance de la gravimétrie : les découvertes de Huyghens et les développements théoriques de Newton ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 105.931 (avr. 2011), p. 243-255 (cf. p. 17).
- [7] V. DURAKOV et H. LACROIX. « La naissance de la gravimétrie : mise en évidence de la variation de la pesanteur avec la latitude ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 105.932 (mars 2011), p. 359-373 (cf. p. 17).
- [8] V. DURAKOV et H. LACROIX. « La naissance de la gravimétrie : test de l'attraction newtonienne par des mesures de l'instant et de la direction de la pesanteur effectuées au Pérou par Bouguer ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 105.934 (mai 2011), p. 581-590 (cf. p. 17).
- [9] M. BARQUEIRA. « La tribologie. La science pour comprendre et maîtriser le frottement et l'usure ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 88.764 (mai 1994), p. 793-822 (cf. p. 34).
- [10] R. GUSS et G. D. KINSER. « The Terminal Velocity of Fall for Water Droplets in Stagnant Air ». In : *Journal of the Atmospheric Sciences* 6.4 (1^{er} sem. 1949), p. 243-248 (cf. p. 38).
- [11] W. W. HADENBURG. « On Motion in a Resisting Medium : A Historical Perspective ». In : *American Journal of Physics* 84.2 (1^{er} fév. 2016), p. 127-134 (cf. p. 38).
- [12] B. SALAMETTO et al. *Physique tout-en-un MP*. Dunod, 2014 (cf. p. 41).
- [13] F. P. BOYDSEN et D. TAYLOR. *The Friction and Lubrication of Solids*. Oxford Classical Texts, 1954 (cf. p. 44).

- [14] H. Gell et J.-P. Rameau. « Le portrait de phase des oscillateurs ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 86.744 (1992), p. 719-755 (cf. p. 49).
- [15] NASA. *Earth Fact Sheet*. url : <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/earthfact.html> (cf. p. 76).
- [16] M. Mayor et D. Queloz. « A Jupiter-mass Companion to a Solar-Type Star ». In : *Nature* 378 (1995), p. 355-359 (cf. p. 81-82).
- [17] H. Geiger et E. Marsden. « On a Diffuse Reflection of the α -Particles ». In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 82.557 (juil. 1909), p. 495-500 (cf. p. 83).
- [18] E. Rutherford. « LXXIX. The Scattering of α and β Particles by Matter and the Structure of the Atom ». In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 21.125 (mai 1911), p. 669-688 (cf. p. 83).
- [19] U. Flourens. « Étude de la diffusion de Rutherford à l'aide du vecteur de Laplace ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 88.765(2) (juin 1994), p. 101-115 (cf. p. 85).
- [20] H. Geiger et E. Marsden. « LXI. The Laws of Deflection of a Particle through Large Angles ». In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 25.143 (avr. 1913), p. 604-623 (cf. p. 86).
- [21] J. Stevano-Blat. « Comparaison entre le mouvement de Kepler et le mouvement elliptique harmonique ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 87.751 (1993), p. 165-193 (cf. p. 87).
- [22] C. Carre. « À propos de la précession des équinoxes ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 100.839(1) (avr. 2006), p. 1541-1544 (cf. p. 97, 134).
- [23] J. Stevano-Blat. « Les preuves expérimentales des mouvements de la Terre ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 97.859 (2003), p. 25-39 (cf. p. 98).
- [BFRM 1] M. BERTIN, J.-P. FAROUX et J. RAMAUX. *Mécanique I. Mécanique classique des systèmes de points et notions de relativité*. Dunod, 1995 (cf. p. 98, 160).
- [24] H. Gell. « Vers l'est ou vers l'ouest ? ». In : *Bulletin de l'Union des physiciens* 80.485 (1994), p. 393-399 (cf. p. 100).
- [25] J. Barthes et B. Pottier. *La physique par la pratique*. H&K, 2005 (cf. p. 108).
- [26] G. ROUDET. *Dynamique atôme — La matière*. 2012. url : http://atocleagn.univ-lille3.fr/~roudet/documents/cours_maree_2012.pdf (cf. p. 108).
- [27] I. ALESSANDRI et al. « Effects of Tidal Forces on the Beam Energy in LEP ». In : *Proceedings of International Conference on Particle Accelerators*, T. I. 1993, p. 44-46 (cf. p. 109).
- [LL 7] L. D. LANDAU et E. M. LIFCHITS. *Physique théorique. VII : Théorie de l'électrodynamique quantique des champs*. Mir, 1970 (cf. p. 136, 140, 143).
- [28] A. A. MICHELSON et E. W. MORLEY. « On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether ». In : *American Journal of Science* 34.203 (avr. 1887), p. 333-345 (cf. p. 151, 153-154).
- [29] S. HINDEMITH et al. « Rotating optical cavity experiment testing Lorentz invariance at the 10^{-17} level ». In : *Physical Review D: Particles and Fields* 80.10, 105011 (avr. 2009), p. 105011 (cf. p. 154).

-
- [30] A. EINSTEIN. « De l'électrodynamique des corps en mouvement ». In : *Zeitschrift der Physik* (1905) (cf. p. 158).
 - [31] J. HLADÍK et M. CHYRÝS. *Introduction à la relativité restreinte*. Dunod, 2001 (cf. p. 169).
 - [32] C. SEMAY et B. SILVETRE-BRAC. *Relativité restreinte*. Dunod, 2005 (cf. p. 171, 173).
 - [33] D. H. FRAZER et J. H. SARTORIUS. « Measurement of the Relativistic Time Dilation Using μ -Mesons ». In : *American Journal of Physics* 31.5 (mai 1963), p. 342-355 (cf. p. 171).