

ÉLECTROMAGNÉTISME

PRÉPARATION À L'AGRÉGATION DE SCIENCES PHYSIQUES – OPTION PHYSIQUE

MONTROUGE (2022–2023)

CLÉMENT SAYRIN

31 octobre 2022

TABLE DES MATIÈRES

1 Une (trop) courte histoire des équations de Maxwell	3
1.1 Quelques expériences historiques	3
1.1.1 La balance de Coulomb, 1784	3
1.1.2 Expérience d'Ørsted, 1820	3
1.1.3 Expériences de Faraday, 1831	4
1.2 Électromagnétisme de Maxwell	4
1.2.1 Les équations de Maxwell	4
1.2.2 Les ondes de Hertz	5
1.3 Au-delà de l'électromagnétisme de Maxwell	5
1.3.1 Relativité restreinte	6
1.3.2 Électrodynamique quantique	6
1.4 Pourquoi des champs ?	6
2 Des distributions de charges et courants	8
2.1 Quelques expériences historiques	8
2.1.1 Expérience de Thomson	8
2.1.2 La goutte d'huile de Millikan	9
2.2 La charge électrique en physique moderne	9
2.3 Densité volumique de charges	10
2.4 Courant électrique	12
2.5 Moments des distributions de charge et courant	13
3 Électro- et Magnétostatique	15
3.1 Électrostatique	15
3.1.1 Équation de Maxwell-Faraday	15
3.1.2 Équation de Maxwell-Gauss	16
3.1.3 Champ électrique d'une distribution de charges quelconque	17
3.2 Magnétostatique	19
3.2.1 Équation de Maxwell-flux	19
3.2.2 Équation de Maxwell-Ampère	19
3.2.3 Champ magnétique d'une distribution de courants quelconque	20
3.3 Extension au cas dynamique, notion de jauge	21
4 Propriétés du champs dans le vide et les milieux	23
4.1 Champs électromagnétiques dans les milieux	23
4.1.1 Champs nivélés	23
4.1.2 Équations de structure	23
4.1.3 Équations aux sources	23
4.2 Propriétés mécaniques du champ électromagnétique	26
4.2.1 Énergie électrostatique	26
4.2.2 Énergie magnétostatique	28
4.2.3 Théorème de Poynting	28
4.3 Quantité de mouvement et moment cinétique	29



0 BIBLIOGRAPHIE

Je donne ici quelques références utiles avec le numéro de version utilisé pour les références données dans le texte. Cette liste est très loin d'être exhaustive !

- *Électrodynamique classique*, J. D. Jackson (3e ed.)
- *Berkeley Physics Course vol. 2 – Électricité et magnétisme*, E. Purcell
- *Leçons de physique, vol. 2*, R. Feynman (New Millenium Ed.)
- *Cours de Physique, Électromagnétisme (1-4)*, M. Bertin, J.-P. Faroux, J. Renault (3e ed.)
- *Électromagnétisme*, J.-P. Pérez, R. Carles, R. Fleckinger (4e ed.)
- *Électromagnétisme*, H. Gié, J.-P. Sarmant (2e ed.)
- *Électromagnétisme et relativité L3*, J.-M. Raimond



1 UNE (TROP) COURTE HISTOIRE DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

Références

- Jackson, introduction
- Born et Wolf pour une intro centrée sur l'optique
- Haroche, La lumière révélée
- Pages Wikipédia à foison
- Site web : Histoires de sciences
- Site web : Podcastscience.fm

Les expériences qu'a faites l'Homme avec les phénomènes appelés aujourd'hui *électromagnétiques* remontent au moins à l'Antiquité. Le terme *électromagnétisme* lui-même vient de la contraction de *Élektron*, une ambre jaune aux propriétés électrostatiques, et de *Magnésie*, une pierre de magnésie étant un aimant naturel. Bien que ces propriétés eussent été utilisées dans des outils depuis longtemps, l'invention de la boussole remonte par exemple entre le 1^{er} siècle avant JC et le 1^{er} siècle après JC, il fallut attendre le XVI^e siècle pour voir les premières expériences « scientifiques » tenter de donner une explication aux phénomènes observés.

Il est illusoire ici de faire un bilan exhaustif de toutes les expériences qui ont mené à la construction de l'électromagnétisme de Maxwell et, plus encore, de toutes celles qui ont suivi. Nous n'en citerons donc que quelques-unes qui ont, parmi d'autres, joué un rôle crucial dans la construction de cette théorie physique.

1.1 QUELQUES EXPÉRIENCES HISTORIQUES

1.1.1 LA BALANCE DE COULOMB, 1784

En 1784, Charles-Augustin Coulomb réalisa une expérience qui lui permit de mesurer comment la force de l'interaction entre deux objets chargés dépend de la distance entre ces deux objets. Les objets chargés sont des balles de sureau. Une première balle de sureau est accrochée à une tige, elle-même suspendue à un fil d'argent. Coulomb construisit ainsi une balance de torsion dont il avait un peu plus tôt démontré le principe de fonctionnement. La balle de sureau est chargée par contact avec une tête d'épingle. Une seconde balle de sureau mobile est alors introduite dans le dispositif, entouré d'un cylindre de verre, et est chargée par contact avec la première balle. En

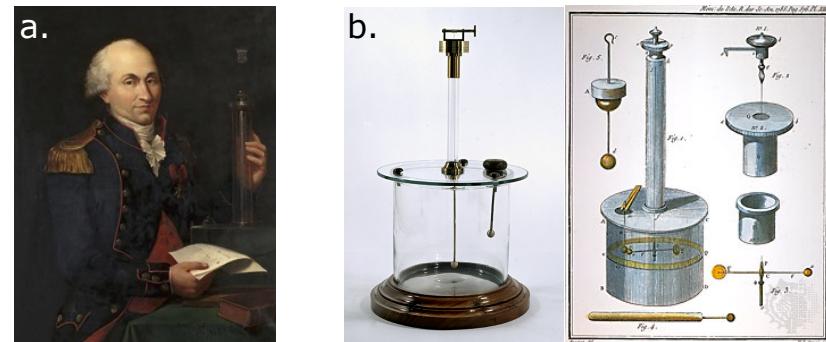


FIGURE 1.1 – a. Charles-Augustin Coulomb (1736–1806). b. Photo et illustration de l'expérience dite « balance de Coulomb ».

augmentant progressivement et de façon contrôlée la torsion du fil d'argent, Coulomb mesure l'angle duquel tourne la tige suspendue pour se rapprocher de la balle mobile. Il obtient alors des résultats compatibles avec une loi en $1/r^2$ pour la force F de l'interaction entre deux charges, loi appelée aujourd'hui *loi de Coulomb* :

$$F \propto \frac{1}{r^2}. \quad (1.1)$$

1.1.2 EXPÉRIENCE D'ÆRSTED, 1820

Réalisée à Lupstein, au Danemark, l'expérience que fit Hans Christian Ørsted en 1820 fut la première à établir un lien entre l'électricité et le magnétisme. La production de courant électrique est alors déjà possible, notamment avec la pile Volta développée en 1799, et les boussoles sont utilisées en navigation depuis déjà bien longtemps. En plaçant une telle boussole sous un fil électrique, Ørsted constate qu'un courant électrique dans le fil entraîne une déviation de la boussole. C'est le principe de base de fonctionnement des galvanomètres, développés peu après.

Il fallut en fait attendre les contributions et les développements théoriques de Jean-Baptiste Biot et Félix Savart puis, surtout, de André-Marie Ampère pour établir la loi sous-jacente à cette expérience, la loi de Biot et Savart qui donne le champ magnétique B créé par un fil électrique $d\ell$ parcouru par un courant I :

$$B \propto \frac{Id\ell \wedge r}{r^3}. \quad (1.2)$$

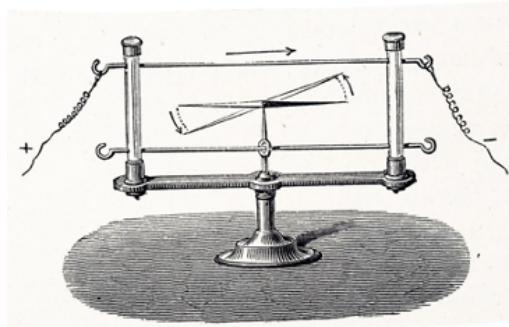
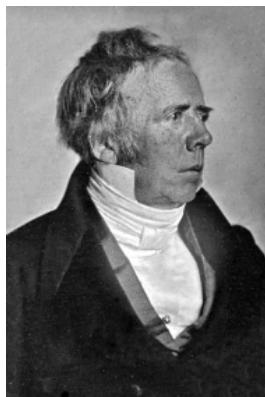


FIGURE 1.2 – Hans Christian Ørsted (1777–1851) et son expérience : une boussole libre de tourner est placée sous un fil parcouru par un courant électrique.

1.1.3 EXPÉRIENCES DE FARADAY, 1831

Par une série d'expériences réalisées à la Royal Society de Londres, Michael Faraday fut le premier à mettre en évidence le phénomène d'*induction*. En 1820, déjà, il avait « inversé » l'expérience d'Ørsted en observant le mouvement du fil électrique parcouru par un courant quand le fil est placé dans le champ magnétique créé par un aimant immobile. Le moteur électrique était en vue.

Dans l'expérience illustrée figure 1.3, Faraday relie cette fois une bobine (A) à une pile Volta puis déplace cette bobine dans un second enroulement (B). Ce dernier est lui-même relié à un galvanomètre qui mesure le courant électrique qui le parcourt. Faraday constate alors que le déplacement de l'enroulement (A) induit un courant électrique dans l'enroulement (B).

Nous savons aujourd’hui que la variation du flux Φ du champ magnétique créé par l'enroulement (A) à travers l'enroulement (B) crée une force électromotrice e aux bornes de l'enroulement (B). Ces deux grandeurs sont reliées par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.3)$$

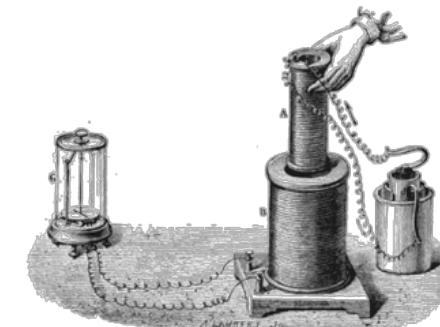
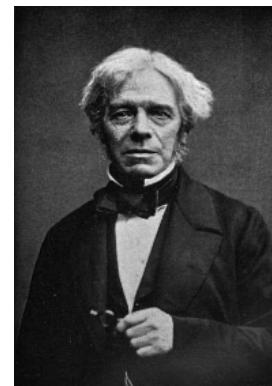


FIGURE 1.3 – Michael Faraday (1791–1867) et le schéma de principe d'une expérience mettant en évidence le phénomène d'induction.

1.2 ÉLECTROMAGNÉTISME DE MAXWELL

1.2.1 LES ÉQUATIONS DE MAXWELL

Jusqu'en 1865, l'électricité et le magnétisme étaient tous deux décrits par deux théories distinctes. Pourtant, depuis les expériences d'Ørsted en 1820, le lien entre ces deux théories était connu. Il fallut attendre la « théorie électromagnétique de la lumière » de James Clerk Maxwell pour enfin les unifier au sein d'un même formalisme. Maxwell retrouve en effet les lois de l'électricité, du magnétisme et de l'induction en imposant au champ électrique $E(r, t)$, au champ magnétique $B(r, t)$ et aux densités de charges $\rho(r, t)$ et de courant $j(r, t)$ électriques les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } B = \mu_0 j + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial E}{\partial t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(Maxwell-Gauss)} \\ \text{(Maxwell-Ampère)} \end{array} \quad (1.4) \quad (1.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } B = 0 \\ \text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(Maxwell-flux)} \\ \text{(Maxwell-Faraday).} \end{array} \quad (1.6) \quad (1.7)$$

Les grandeurs qui interviennent dans ces équations sont

- la permittivité diélectrique du vide, $\epsilon_0 \approx 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$,
- la perméabilité magnétique du vide, $\mu_0 \approx 1,26 \times 10^{-6} \text{ T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1}$.

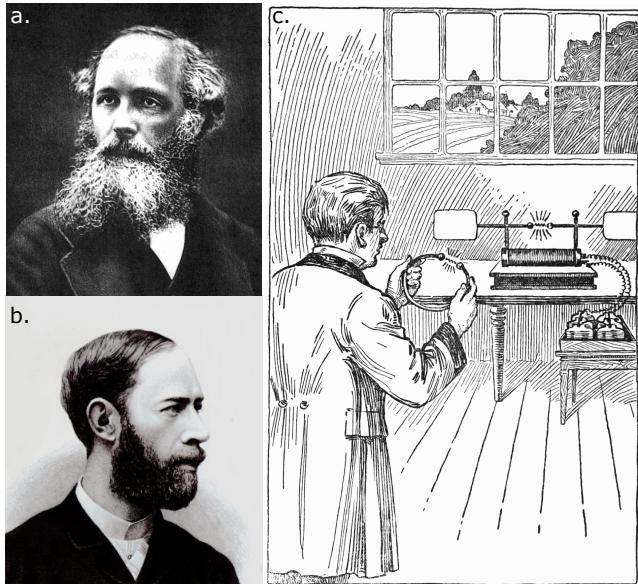


FIGURE 1.4 – a. James Clerk Maxwell (1831–1879) b. Heinrich Hertz (1857–1894) c. Principe de l’expérience de Hertz mettant en évidence l’existence d’ondes électromagnétiques.

1.2.2 LES ONDES DE HERTZ

Ces quatre équations proposées par Maxwell font toutefois bien plus que de donner un cadre commun, l’électromagnétisme classique, à des théories déjà connues : elle permet de prédire des phénomènes encore inconnus en 1865. Si l’on calcule par exemple **rot** (**rot** **B**) ou **rot** (**rot** **E**) à partir de ces équations, on obtient

$$\Delta\mathbf{B} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{rot} \mathbf{j}, \quad \Delta\mathbf{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0} \mathbf{grad} \rho. \quad (1.8)$$

Loin des charges et des courants, c’est-à-dire loin des sources des champs électrique et magnétique, ces équations prennent donc la forme de l’équation de propagation des

ondes établies en 1746 par Jean Le Rond d’Alembert :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \end{array} \right. \quad (1.9)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0 \\ \Delta\mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \end{array} \right. \quad (1.10)$$

où la vitesse de la lumière c est donnée par

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (1.11)$$

Autrement dit, les équations de Maxwell prédisent l’existence d’ondes électromagnétiques, qui se manifestent par la propagation à la vitesse c d’une onde de champ électrique et d’une onde de champ magnétique.

C’est en 1888 que Heinrich Hertz observa pour la première fois ces ondes électromagnétiques. Dans son laboratoire de Karlsruhe, il développa un générateur d’étincelles à partir de deux sphères de cuivre portées à des potentiels élevés et opposés (voir figure 1.4). Des arcs électriques se forment à une fréquence de l’ordre de 100 MHz. Une boucle métallique de taille adaptée et présentant une ouverture où deux boules de laiton sont placées proches l’une de l’autre sert alors de résonateur récepteur. En plaçant le récepteur à distance du générateur d’étincelles, Hertz observe l’apparition d’étincelles entre les boules du récepteur, même à plusieurs mètres ou derrière une cloison en briques. Il constata aussi que ces ondes peuvent être réfléchies sur un miroir en zinc, diffusées, polarisées... à l’instar de la lumière. Ces expériences constituent une confirmation étincelante de la théorie de Maxwell.

1.3 AU-DELÀ DE L’ÉLECTROMAGNÉTISME DE MAXWELL

On adjoint souvent aux équations de Maxwell deux équations sur les charges et courants. La première traduit simplement le principe de conservation de la charge électrique, un principe physique toujours vérifié :

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.12)$$

Cette équation est en fait incluse dans les équations de Maxwell puisqu’on la retrouve en constante que $\operatorname{div} (\mathbf{rot} \mathbf{B}) = 0$.

En revanche, les équations de Maxwell ne permettent pas de retrouver la force de l’interaction entre un champ électromagnétique et une distribution de charges ou de

courants. Il faut donc *ajouter* l'expression de la force de Lorentz à l'électromagnétisme de Maxwell. Une charge q se déplaçant à la vitesse v dans un champ électrique E et un champ magnétique B est soumise à la force

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B}). \quad (1.13)$$

1.3.1 RELATIVITÉ RESTREINTE

Nous savons aujourd'hui que les équations de Maxwell et la force de Lorentz ne sont qu'une partie de théories physiques plus larges, développées suite à l'avènement de la relativité restreinte et de la mécanique quantique au début du XX^e siècle. Le premier cadre dans lequel s'inscrit tout naturellement l'électromagnétisme de Maxwell est précisément celui de la relativité restreinte. La théorie de Maxwell porte en fait en son cœur le principe de la relativité restreinte : la vitesse de la lumière est indépendante du référentiel galiléen choisi. Et en effet, dans notre dérivation des équations d'ondes (1.9) et (1.10), nous n'avons pas précisé le référentiel d'étude et obtenu une vitesse de propagation des ondes qui n'en dépend donc pas.

Par ailleurs, les équations de Maxwell telles qu'écrites plus haut sont déjà invariantes par changement de référentiel relativiste¹, c'est-à-dire sous une transformation de Lorentz. L'électromagnétisme classique était donc « prêt » à s'inscrire dans la relativité restreinte d'Einstein, théorie qui permet de retrouver tout le formalisme de Maxwell ainsi que la force de Lorentz.

1.3.2 ÉLECTRODYNAMIQUE QUANTIQUE

La relativité restreinte découle elle-même d'une théorie unifiée avec la mécanique quantique : la théorie quantique des champs et plus particulièrement son modèle standard. Dans cette théorie physique, les interactions entre particules sont de deux types² :

- l'interaction forte, portée par les gluons, et dont la portée se limite à l'échelle du noyau atomique,
- la force électrofaible.

Dans la limite des faibles énergies (< GeV), l'interaction électrofaible se sépare elle-même en l'interaction faible, portée par les bosons massifs W^\pm et Z^0 , et l'interaction électromagnétique, portée par le photon, un boson de masse nulle. L'électrodynamique quantique est la théorie qui décrit cette interaction, et est donc la version quantique de

1. L'électromagnétisme est en ce sens très différent de la mécanique newtonienne. Ces deux théories classiques sont d'ailleurs incompatibles dès qu'on procède à des changements de référentiel newtoniens.

2. Auxquels il faut ajouter l'interaction gravitationnelle qui n'a pas de description quantique.

l'électromagnétisme relativiste. L'électromagnétisme peut ainsi être vue comme une limite classique de l'électrodynamique quantique.

Références

Jackson, Introduction, I.1

La façon précise de procéder au passage à la limite classique n'est toutefois pas simple. On consultera [Jackson, I.1 p. 4-5] pour une discussion à ce sujet. On peut retenir que pour retrouver l'électromagnétisme, il faut à minima :

- un grand nombre de photons (réels ou virtuels) pour pouvoir négliger tous les effets dus aux fluctuations quantiques,
- que les variations d'énergie ou d'impulsion associées à un photon unique soient négligeables pour le système considéré.

En ce sens, on ne peut pas décrire l'émission spontanée d'un photon par un atome dans un formalisme classique des ondes électromagnétiques : il n'y a pas de photons présents avant l'émission, et l'impulsion du photon émis n'est le plus souvent (pour les photons optiques) pas négligeable.

Ordres de grandeur

- Ampoule de 100 W à une distance de 1 m : le champ électrique moyen y est de l'ordre de $\sqrt{\langle E^2 \rangle} \approx 50 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, il y a environ $10^{15} \text{ photons/cm}^2/\text{s}$ dans le visible ;
- Antenne radio FM de 100 W à une distance 100 km : le champ électrique moyen y est de l'ordre de $\sqrt{\langle E^2 \rangle} \approx 0,5 \text{ mV} \cdot \text{m}^{-1}$, il y a environ $10^{12} \text{ photons/cm}^2/\text{s}$.

Dans les deux cas, un dispositif usuel (taille de l'ordre du cm et phénomènes de l'ordre de la seconde) ne sera donc pas sensible à l'effet d'un photon unique. La plupart du temps, nous ne sommes sensibles qu'à la seule action cumulée macroscopique des photons.

1.4 POURQUOI DES CHAMPS ?

Concluons ce chapitre en se demandant quel est l'intérêt de la notion de champs en électromagnétisme. Car l'on pourrait naïvement considérer que seule nous intéresser l'action à distance d'une distribution de charges et courants sur une autre distribution de charges et courants. On pourrait donc se contenter de la notion de *forces* sans calculer de champs.



Considérons par exemple une distribution de charges quelconque qui impose une force à une charge « test » immobile Q placée au point \mathbf{r} . La force subie par Q est

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{q_i Q}{4\pi\epsilon r_i^2} \mathbf{u}_i. \quad (1.14)$$

On peut alors définir le champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ comme le rapport³

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{r})}{Q} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon r_i^2} \mathbf{u}_i. \quad (1.15)$$

Pourquoi introduire ce champ \mathbf{E} à la place de la force \mathbf{F} ? Cela met en exergue le fait qu'une autre distribution de charge qui créerait le même champ électrique en \mathbf{r} imposerait la même force à la charge test : la nature exacte de la source n'importe pas. Seul compte valeur du champ électrique au point de la charge test.

Par ailleurs, introduire le champ électrique permet de remplacer l'action à *distance* d'une distribution de charges sur une autre par une action *locale* : la charge test interagit avec le champ au point où elle se trouve. Cela implique d'une certaine façon que le champ électrique existe indépendamment de sa source et donc indépendamment de la notion de force.

Cette existence *per se* du champ se manifeste de manière frappante lorsque l'on procède à un changement de référentiel. Quelle est la force subie par une charge test immobile dans un autre référentiel galiléen ? La difficulté pour répondre à cette question tient au fait qu'une distribution de charges et courants n'est pas invariante par changement de référentiel. Par exemple, la valeur du courant électrique dépend de la vitesse de déplacement des charges. La contraction des longueurs relativiste au changement de référentiel implique une modification des densités de charge. Le calcul de la force dans le nouveau référentiel implique donc en amont le calcul de la nouvelle distribution de charges et courants...

Tout cela est bien plus simple si l'on s'intéresse aux champs ! La transformation des champs électriques et magnétiques, dans un changement de référentiel, est en effet connue et est *indépendante* des sources des champs : les champs (\mathbf{E}, \mathbf{B}) dans un référentiel galiléen \mathcal{R} sont transformés en les champs $(\mathbf{E}', \mathbf{B}')$ dans un référentiel

3. La notion de charge « test » est un peu fallacieuse. En toute rigueur, la présence la charge test pourrait modifier la distribution de charges source. Il faudrait alors plutôt définir le champ électrique comme $\mathbf{E} = \lim_{Q \rightarrow 0} \mathbf{F}/Q \dots$ mais que veut-dire $Q \rightarrow 0$ quand on sait que la charge est en fait quantifiée ?

galiléen \mathcal{R}' en mouvement uniforme à la vitesse \mathbf{u} par rapport à \mathcal{R} par

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel}, \quad \mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \quad (1.16)$$

$$\mathbf{E}'_{\perp} = \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{B}) \quad (1.17)$$

$$\mathbf{B}'_{\perp} = \gamma \left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2} \mathbf{u} \wedge \mathbf{B} \right), \quad (1.18)$$

où $\gamma = 1/\sqrt{1 - (u/c)^2}$ et où les indices \parallel et \perp indiquent les composantes tangentes et orthogonales à \mathbf{u} , respectivement. Ainsi, sans avoir de détails sur les sources, connaître le champ électromagnétique localement permet de prédire la dynamique d'un corps en interaction avec ce champ dans n'importe quel référentiel galiléen !

Références

Voir Berkeley sec. 5.5 pour un joli calcul permettant de retrouver la transformation du champ électrique à partir d'un condensateur plan.

L'existence des champs électrique et magnétique indépendamment de leur source est également manifeste loin des sources, quand la notion de propagation des champs prend son sens. Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} se propagent par exemple dans le vide en respectant l'équation de d'Alembert qui ne fait pas intervenir la source de ces champs. En outre, la propagation de cette *onde électromagnétique* s'accompagne de la propagation d'ondes d'énergie, de quantité de mouvement, de moment cinétique... qui ne dépendent eux aussi que de la valeur locale des champs électrique et magnétique. Les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont donc bien plus qu'un intermédiaire de calcul mathématique en lieu et place des forces créées par une distribution de charges et courants.

Notons que cette séparation entre champs et sources culmine avec les notions de modes du champ électromagnétique, particulièrement utile notamment pour un traitement quantique du champ. On réinterprète alors le lien entre sources et champs : les « sources du champ » ne créent pas le champ électromagnétique mais mettent de l'énergie (ou des photons) dans des modes du champ électromagnétique qui existent indépendamment des sources.



2 DES DISTRIBUTIONS DE CHARGES ET COURANTS

Références

- Berkeley, Physics courses II, Électricité et magnétisme
- Gié, Sarmant : Mécanique 1

L'électromagnétisme est intrinsèquement relié au concept de charge électrique : ce sont les sources des champs électromagnétiques qui, en retour, se manifestent par leurs actions sur les particules chargées. Nous ne ferons pas ici un développement complet sur le concept de charges mais rappellerons quelques concepts généraux seulement.

2.1 QUELQUES EXPÉRIENCES HISTORIQUES

2.1.1 EXPÉRIENCE DE THOMSON

De l'ambre jaune "élektron" des grecs qui, frottée, pouvait attirer des objets, aux manipulations fines d'objets chargés comme les expériences de Coulomb à la fin du XVIII^e siècle, nous faisons l'expérience de la charge électrique depuis bien avant la découverte de la quantification de la charge. La première expérience qui mit en évidence l'existence de charges élémentaires est l'expérience que fit Joseph John Thomson en 1897. À cette époque, l'existence de « rayons » cathodiques était déjà connue. Il s'agit de « rayons émis » par une cathode en présence d'une forte différence de potentiel entre la cathode et l'anode, ou plutôt des charges libres (comme des électrons ou des ions) accélérées par le champ électrique entre les deux électrodes. Les physiciens d'alors observaient une lueur dans le tube à vide entre les deux électrodes, qu'on explique aujourd'hui par l'excitation des atomes du gaz résiduel par les charges accélérées. Avec un vide suffisamment bon, les électrons, non déviés et rapides, peuvent atteindre les parois en verre situées derrière l'anode et produire une lueur dans le verre lui-même ou sur un papier phosphorescent placé là.

Dans ses expériences, Thomson ajouta un électromètre au niveau du papier phosphorescent. Il constata d'une part qu'il pouvait dévier le « rayon cathodique » à l'aide d'un champ magnétique et qu'une charge n'était mesurée sur l'électromètre que si le « rayon cathodique » cathodique pointait vers lui : la charge est indissociable du « rayon cathodique » lui-même. En observant ensuite la déviation de ces charges par un champ électrique, il put conclure que leur signe est négatif. Enfin, en mesurant dans une même expérience les déviations produites par un champ électrique et un champ magnétique, ainsi que l'énergie cinétique des électrons incidents¹, Thomson put me-

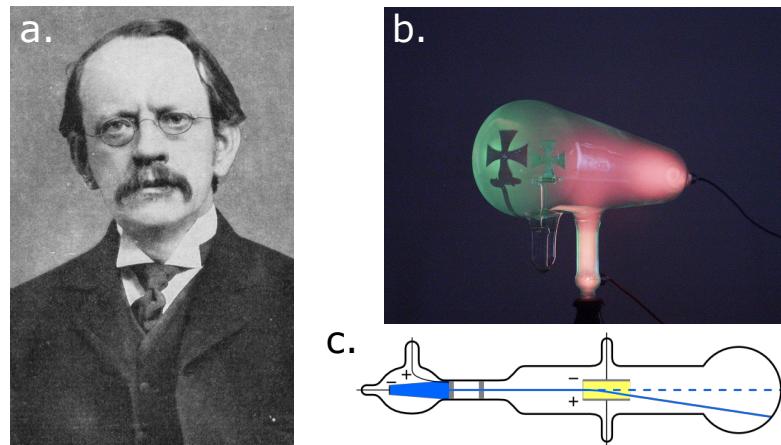


FIGURE 2.1 – a. Joseph John Thomson (1856–1940). b. Fluorescence (rouge) des atomes du gaz contenus dans un tube de Crookes et percutés par des électrons accélérés entre une cathode et une anode. Le verre percutés par les électrons fluoresce en verre. L'ombre portée par un objet est visible. c. Schéma de principe de la déviation par un champ électrique du « rayon cathodique ».

surer le rapport charge/masse pour les charges du « rayon cathodique » [voir Notice 485]. Ses mesures firent apparaître que

- le rapport e/m mesuré est indépendant du matériau de la cathode ou du gaz traversé par le « rayon cathodique »,
- le rapport e/m mesuré est plus de 2000 fois plus grand que celui obtenu pour les ions les plus légers connus, à savoir les ions H^+ .

Les charges du « rayon cathodique » doivent alors être sois 2000 fois plus chargées que les ions connus, soit 2000 fois plus légères. Thomson postula alors l'existence d'une particule élémentaire, l'électron, qui pourrait être arrachée aux atomes, et 2000 fois plus légère qu'eux. La structure de l'atome qu'il propose (modèle « plum pudding ») s'oppose au modèle planétaire proposé au même moment par Jean Perrin, qui réalise lui aussi des expériences sur les rayons cathodiques.

Le prix Nobel de physique 1906 fut attribué à J. J. Thomson pour cette découverte.

Références

Site web : Vidéo sur l'expérience de Thomson (www.cea.fr/multimedia)

1. Par mesure d'échauffement.

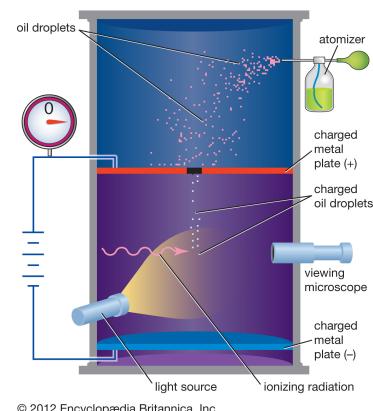


FIGURE 2.2 – Expérience de la goutte d’huile de Millikan. Des gouttes d’huile sont vaporisées puis leur chute libre est observée entre les armatures d’un condensateur. Les gouttes sont chargées au contact de l’air ionisé par rayons X.

2.1.2 LA GOUTTE D’HUILE DE MILLIKAN

Quelques années seulement après ce prix Nobel, Robert A. Millikan et Harvey Fletcher élaborèrent une expérience qui leur permit de démontrer la quantification de la charge électrique. Réalisée en 1909 à l’Université de Chicago, l’expérience consiste à mesurer la vitesse limite atteinte par une goutte d’huile sous l’action conjointe de la pesanteur, des frottements avec le gaz résiduel, de la poussée d’Archimède et d’un champ électrique uniforme (voir figure 2.2). La gouttelette est chargée, ou non, en ionisant l’air grâce à des rayons X. La mesure de la vitesse limite permet alors de remonter à la charge de la gouttelette. Millikan et Fletcher observèrent alors que cette charge est toujours un multiple entier d’une charge élémentaire, légèrement sous-évaluée alors² et connue aujourd’hui comme la charge de l’électron

$$e = 1,602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C.} \quad (2.1)$$

2. À cause d’une mauvaise estimation de la viscosité.

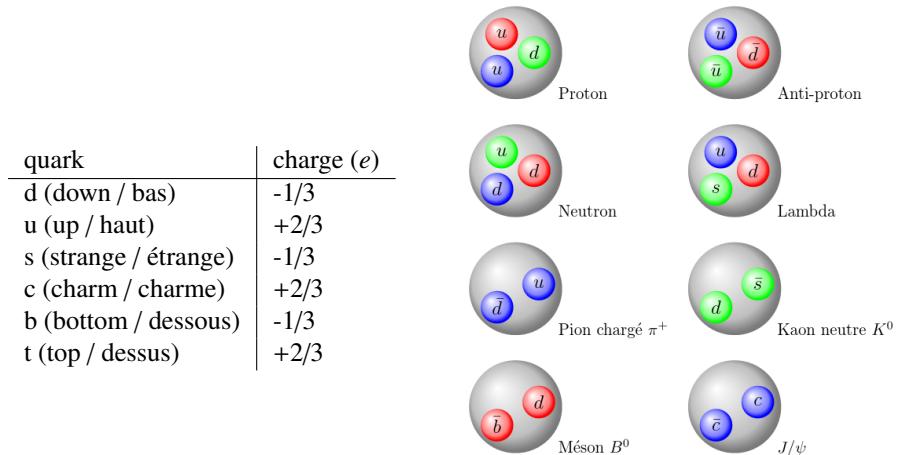


FIGURE 2.3 – (Gauche) Tableau des charges des quarks. (Droite) Composition de particules comme associations de deux ou trois quarks.

2.2 LA CHARGE ÉLECTRIQUE EN PHYSIQUE MODERNE

Références

- Berkeley, sec. 5.4
- Gié, Sarmant : Mécanique 1, sec. 6.18

La quantification de la charge, observée au début du XX^e siècle, est un élément constitutif de nos théories physiques modernes. Tout objet chargé possède une charge qui est un multiple de la charge élémentaire de l’électron, e . Les quarks, qui possèdent des charges fractionnaires, de valeur $-1/3$ ou $+2/3$, ne sont jamais observés comme particules libres mais toujours associés par paire ou triplet, de charge nulle ou multiple de e (voir figure 2.3).

La charge électrique répond de surcroît à deux principes physiques importants.

- **Invariance par changement de référentiel** La charge d’un corps est inchangée lors d’un changement de référentiel relativiste. On pourra se référer à [Berkeley, sec 5.4] pour une discussion autour de cette invariance et en particulier une distinction avec la masse. On peut retenir deux situations physiques qui indiquent cette invariance :

- Les atomes observés sont tous neutres, bien que les « vitesses » des électrons dans leur nuage électronique varient beaucoup d’un atome à un autre. Si la

- charge est indépendante de la vitesse de déplacement de l'électron dans notre référentiel galiléen, c'est qu'elle ne dépend pas du référentiel d'étude ;
- On ne constate pas de variation de la charge avec la température d'un gaz, alors même que la vitesse de déplacement des constituants du gaz en dépend.
 - **Conservation de la charge totale** Quelle que soit la transformation considérée, la charge totale doit être conservée. Cela n'impose pas la conservation du nombre de charges élémentaires, comme en atteste le processus de création de paires électron / positron à partir d'un photon,

$$\gamma \Leftrightarrow e^+ + e^-.$$

La charge totale reste, toutefois, bien toujours nulle dans ce processus.

2.3 DENSITÉ VOLUMIQUE DE CHARGES

Références

- BFR Électromagnétisme I, chap. 13, §3-1,
- BFR Électromagnétisme IV, chap. 1, §4 et 9,
- Jackson, chap. I.6,
- Berkeley, chap 2.7.

Alors que les charges sont toutes quantifiées, les sources du champ électromagnétique qui apparaissent dans les équations de Maxwell sont des grandeurs continues. Il y a essentiellement deux approches, non orthogonales, pour passer de charges discrètes à des densités continues. Considérons un ensemble de charges ponctuelles q_i placées aux positions \mathbf{r}_i .

Nous pouvons dans un premier temps définir pour chaque position \mathbf{r} un volume $\mathcal{V}(\mathbf{r})$ centré sur \mathbf{r} de taille caractéristique :

- suffisamment grande pour ne pas voir le détail microscopique des charges : un léger déplacement du volume ne change pas la charge totale contenue dans le volume,
- petite devant les échelles caractéristiques des phénomènes étudiés.

On définit alors la densité volumique de charge $\rho(\mathbf{r})$ comme la densité moyenne sur le volume $\mathcal{V}(\mathbf{r})$:

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mathcal{V}(\mathbf{r})} \sum_{\mathbf{r}_i \in \mathcal{V}(\mathbf{r})} q_i. \quad (2.2)$$

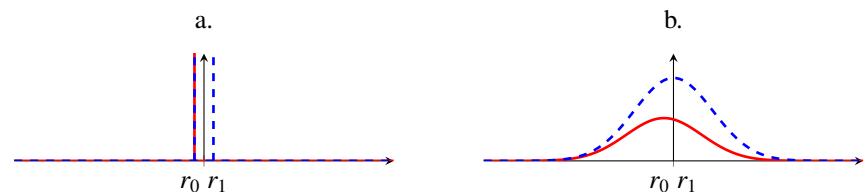


FIGURE 2.4 – Densité de charge pour une charge ponctuelle placée en r_0 (rouge) ou deux charges placées en r_0 et r_1 (bleu), définie de façon « microscopique » (a.) ou nivélée (b.). La fonction $f(\mathbf{r})$ de lissage [eq. (2.3) et (2.6)] utilisée est une gaussienne.

De façon plus générale, on peut pondérer cette moyenne par une fonction quelconque qui prend en compte l'écart au centre \mathbf{r} du volume \mathcal{V} :

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{r}_i \in \mathcal{V}(\mathbf{r})} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) q_i. \quad (2.3)$$

Il est difficile de donner une expression générale pour cette fonction $f(\mathbf{r})$ ou une valeur générale pour la taille caractéristique de \mathcal{V} , i.e. l'extension de $f(\mathbf{r})$, elle peut varier significativement d'une situation physique à une autre. Pour la matière solide, on choisit typiquement $\mathcal{V}^{1/3} \sim 100 \text{ \AA}$. On pourra consulter [BFR IV, Chap 1.9] pour une discussion autour de la forme de $f(\mathbf{r})$.

Il est alors légitime de se demander pourquoi cela fonctionne. Peut-on vraiment oublier le détail microscopique des charges en présence, le remplacer par une quantité moyennée et obtenir malgré tout les bonnes valeurs des champs ? La réponse est, en général, oui grâce à la linéarité de l'électromagnétisme. Si deux charges q_1 et q_2 créent en un point les champs \mathbf{E}_1 et \mathbf{E}_2 , le champ total en ce même point est la somme des champs $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Cela suppose toutefois que les charges n'interagissent pas (trop) entre elles. Par exemple le champ électrique créé par une charge peut venir polariser un atome ou une molécule et ainsi modifier le champ créé par cet atome ou cette molécule.

Dans les situations où l'on a besoin de garder le détail microscopique de la distribution de charges, il est tout de même possible de recourir à l'objet *densité volumique de charge*, ρ . On utilise dans ce cas la distribution de Dirac $\delta(x)$, définie au sens des intégrales de Lebesgue, comme la distribution telle que

$$\int \delta(x) dx = 1, \quad \int \delta(x) f(x) dx = f(0), \quad (2.4)$$

où $f(x)$ est une fonction quelconque. On la représente « à la physicienne » comme une fonction nulle en tout point sauf en $x = 0$ où elle prend une valeur infinie, avec

un infini tel que les relations ci-dessus soient vérifiées. On peut l'obtenir par exemple comme la limite d'une fonction gaussienne normalisée dont on fait tendre la largeur vers 0.

On peut alors écrire la densité volumique de charge $\rho(\mathbf{r})$ comme

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad \text{où} \quad \delta^{(3)}(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z). \quad (2.5)$$

Les expressions (2.3) et (2.5) sont évidemment distinctes. On représente graphiquement figure 2.4 la différence entre la densité de charge ρ microscopique (2.5) et macroscopique, ou *nivelée* (2.3), dans le cas d'une charge placée en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ et de deux charges identiques placées en deux positions \mathbf{r}_0 et \mathbf{r}_1 proches. L'ajout d'une seconde charge modifie de façon très différente la densité de charges dans les deux cas. Le processus de nivellement consiste en fait à « étaler » la charge sur un volume fini. Mathématiquement, il correspond à une convolution par la fonction de lissage $f(\mathbf{r})$:

$$\rho_{\text{nivelée}}(\mathbf{r}) = \int f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}') \, d^3 r'. \quad (2.6)$$

SINGULARITÉ DES DISTRIBUTIONS

La distribution nivelée présente l'avantage de n'avoir aucune singularité mathématique, alors que la densité microscopique diverge en toutes les positions \mathbf{r}_i des charges individuelles. C'est un avantage décisif de l'utilisation de grandeurs nivelées. En particulier, alors que le champ électrique créé par une charge ponctuelle en \mathbf{r}_0 ,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (2.7)$$

diverge en $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, le champ électrique créé par la distribution nivelée ne diverge plus. L'idée sous-jacente est qu'avec une densité de charge nivelée finie $\rho(\mathbf{r})$, la charge contenue dans un volume infinitiment petit est nulle contrairement au cas d'une charge ponctuelle. Le champ électrique créé par la distribution de charges est, comme nous le reverrons au prochain chapitre,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \, d^3 r'. \quad (2.8)$$

Les charges au point $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ tendent donc à faire diverger cette intégrale. Mais comme la charge au point \mathbf{r} strictement, *i.e.* dans un espace de volume nul autour de \mathbf{r} , est nulle avec une densité de charge finie, la divergence apparente disparaît de l'expression du champ total.

Mathématiquement, on peut s'en convaincre par le calcul suivant à une dimension³. Le champ électrique au point $\mathbf{r} = 0$ est

$$E = \int \frac{\rho(x)}{4\pi\epsilon_0 |x|^3} (-x u_x) \, dx. \quad (2.9)$$

L'intégrale diverge autour de $x = 0$. On calcule cette intégrale sur un intervalle $[-a, a]$ suffisamment petit pour qu'on puisse considérer $\rho(x)$ comme uniforme. On écrit alors⁴

$$\int_{-a}^a \frac{\rho(x)}{|x|^3} (-x u_x) \, dx = \rho(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_{-a}^{-\epsilon} \frac{1}{x^2} \, dx + \int_{\epsilon}^a \frac{-1}{x^2} \, dx \right] u_x \quad (2.10)$$

$$= \rho(0) \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{\epsilon} \right] u_x = 0. \quad (2.11)$$

La contribution au champ électrique de l'intervalle infinitésimal $[-a, a]$ est donc bien nulle. On retient finalement que ni les densités ni les champs ne divergent ou ne présentent de discontinuités tant qu'on utilise des densités *volumiques* de charge et courant continues et finies.

En présence de simplifications *supplémentaires*, toutefois, on peut retrouver des divergences dans l'expression de $\rho(\mathbf{r})$ qui prennent une origine bien différente de celles de la distribution microscopique. C'est notamment le cas des situations où les charges sont contenues dans un plan ou sur une ligne.

Dans le cas d'une répartition surfacique des charge, on considère que toutes les charges sont contenues dans un plan, par exemple le plan $x = 0$. La densité volumique de charges s'écrit alors

$$\rho_s(\mathbf{r}) = \delta(x) \sigma(y, z), \quad (2.12)$$

où $\sigma(y, z)$ est une fonction continue qui décrit la façon dont les charges sont réparties sur le plan. On l'appelle *densité surfacique de charge*. Cette fonction $\sigma(y, z)$ ne diverge pas alors que la densité volumique $\rho(x, y, z)$ diverge en $x = 0$.

Un exemple typique où il est utile de recourir à une densité surfacique de charges est celui des charges dans un conducteur. La relation de conservation de la charge associée à la loi d'Ohm prédit une décroissance rapide des charges en volume :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{j} = \gamma \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\epsilon_0} \operatorname{div} \rho = 0, \quad (2.13)$$

où γ est la conductivité électrique du conducteur. On attend donc une décroissance exponentielle de ρ en un temps caractéristique $\tau = \epsilon_0/\gamma$. Pour le cuivre par exemple, avec $\gamma = 6 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, on obtient $\tau \sim 1 \times 10^{-19} \text{ s}$. Les charges en volume disparaissent quasi instantanément et se répartissent à la surface du conducteur.

3. L'extension à 3D ne pose pas de problème autre que de lourdeur d'écriture.

4. On calcule en fait ici la valeur principale de l'intégrale.



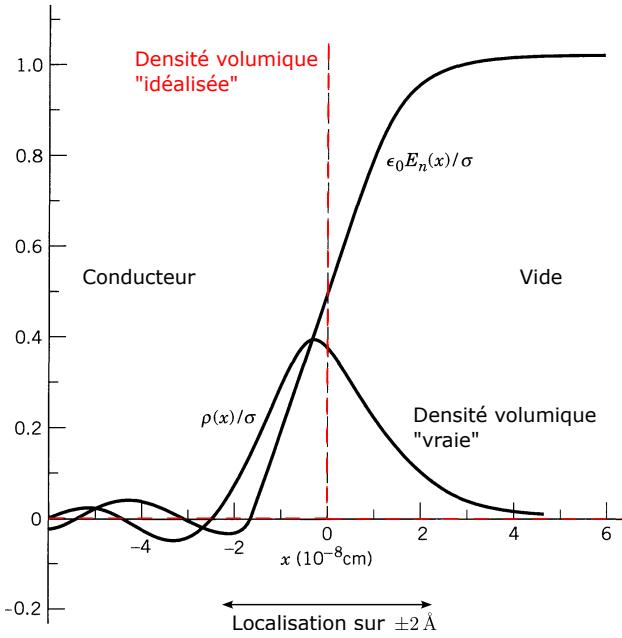


FIGURE 2.5 – Reproduit de [Jackson, sect. I.6]. Densité volumique de charge et composante normale du champ électrique à proximité de la surface d'un conducteur (qui occupe le demi-espace $x < 0$).

On reproduit figure 2.5 la figure I.5 de [Jackson, sect. I.6] où est tracée la densité volumique macroscopique $\rho(x)$ de charges à proximité de la surface du conducteur ainsi que la composante du champ électrique normale à cette surface. On constate que toutes les charges se retrouvent confinées sur une épaisseur de quelques Angström seulement. Dans les situations où la centaine d'Angström ou le nanomètre représente une quantité négligeable, on peut alors remplacer la distribution volumique de charge par une densité « idéalisée » où toutes les charges sont en $x = 0$. On utilise alors la densité surfacique de charges σ pour décrire la distribution. En contrepartie, le champ électrique présente maintenant une discontinuité à la traversée de cette surface (cf. TDs Electromagnétisme).

Notons pour conclure que la distribution macroscopique ρ est en fait déjà une distribution « idéalisée » puisque les détails microscopiques de la répartition des charges ont été oubliés. On pourra consulter aussi [Berkeley, sec 2.7] pour une discussion autour des densités surfaciques de charge.

2.4 COURANT ÉLECTRIQUE

Pour toute distribution de charges, la notion de courant électrique arrive naturellement lorsque l'on considère le déplacement des charges. Il faut toutefois bien distinguer un mouvement individuel des particules chargées et le mouvement d'ensemble de la distribution de charges. Le courant électrique correspond au mouvement d'ensemble des particules chargées, qui peut correspondre à

- un faisceau de particules chargées en mouvement d'ensemble,
- des charges portées par un milieu en mouvement : on parle alors de *courant de convection*,
- un déplacement de charges dans un conducteur sous l'effet d'une différence de potentiel électrique : on parle alors de *courant de conduction*.

De façon générale, ce mouvement d'ensemble est très différent du mouvement particulier. Dans un fil électrique par exemple, le libre parcours moyen des électrons est de l'ordre de 3×10^{-8} m, c'est-à-dire bien plus petit que la longueur du fil. Le mouvement des électrons n'est donc pas du tout balistique dans le fil. Aussi la vitesse de déplacement du nuage électronique dans son ensemble, *i.e.* la vitesse de déplacement de la charge le long du fil est elle bien plus faible que la vitesse balistique des électrons. À température ambiante, la vitesse balistique des électrons est de l'ordre de 10^6 m · s⁻¹ alors que la vitesse de déplacement de la charge peut être estimée, pour un courant $I \sim 1$ A, une densité d'électrons de $n_e \sim 10^{28}$ m⁻³ et un fil de section $s \sim 0,5$ mm² à

$$v_{\text{ensemble}} = \frac{I}{n_e e s} = 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad \ll \quad v_{\text{balistique}} \approx \sqrt{\frac{k_B T}{m_e}} = 7 \times 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (2.14)$$

Le courant électrique quantifie la charge qui traverse une surface donnée par unité de temps. Il nous faut donc définir un vecteur dont le flux à travers une surface orientée est le courant électrique qui la traverse. On note \mathbf{j} ce courant et on procède de façon analogue à la partie précédente pour définir le courant électrique de façon microscopique ou macroscopique.

Pour un ensemble de charges q_i aux positions $\mathbf{r}_i(t)$ et se déplaçant aux vitesses $\mathbf{v}_i(t)$, la densité volumique de courant « microscopique » s'exprime comme

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) q_i \mathbf{v}_i. \quad (2.15)$$

On peut vérifier que la quantité de charge qui traverse un élément de surface $d\mathbf{S}$ centré en \mathbf{r} est bien donné par $dq = \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$.

Dans le cas où toutes les particules sont mues par la même vitesse \mathbf{v} , ou s'il n'y a qu'une seule particule dans la distribution, la densité de courant s'exprime simplement

en fonction de la densité volumique de charges $\rho(\mathbf{r})$:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}) \mathbf{v}. \quad (2.16)$$

On peut aussi niveler cette distribution microscopique en « étalant » chaque distribution de courant élémentaire ($\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) q_i \mathbf{v}_i$) sur un volume \mathcal{V} similaire à celui utilisé pour les densités de charges. Cela revient, encore une fois, à ne garder que la moyenne de la distribution de courant microscopique sur le volume \mathcal{V} :

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{r}_i \in \mathcal{V}(\mathbf{r})} f(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) q_i \mathbf{v}_i, \quad (2.17)$$

où $f(\mathbf{r})$ est une fonction de pondération ad hoc.

Ici aussi, on ne retrouve un lien simple de la forme (2.16) entre les densités nivélées que si tous les éléments constitutifs de la distribution de charges se déplacent à la même vitesse, éléments constitutifs qui sont maintenant macroscopiques. De façon générale, il n'y a pas de lien simple entre densités de charge et de courant. Remarquons à titre d'exemple qu'il est possible d'avoir une densité de courant non nulle avec une densité de charge nulle : c'est le cas par exemple pour deux faisceaux de charges dont les signes sont opposés et qui se propagent en sens opposés. On peut en revanche toujours écrire la relation de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \quad (2.18)$$

2.5 MOMENTS DES DISTRIBUTIONS DE CHARGE ET COURANT

Références

Berkeley, sec. 9.2

Qu'il s'agisse de grandeurs nivélées ou non, la forme détaillée des densités $\rho(\mathbf{r})$ et $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ n'est pas toujours utile et l'on peut souvent se restreindre à des propriétés globales de ces fonctions. Considérons par exemple la distribution de charges dessinée sur la figure 2.6. Si l'on se place très loin de cette distribution de charges, toutes les charges sont vues comme confondues en un même point. La distribution ressemble donc à une charge ponctuelle dont la charge est la charge totale de la distribution. Cette *charge totale* est le *moment d'ordre 0* de la densité $\rho(\mathbf{r})$:

$$K_0 \equiv Q_{\text{tot}} = \iiint \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}'. \quad (2.19)$$

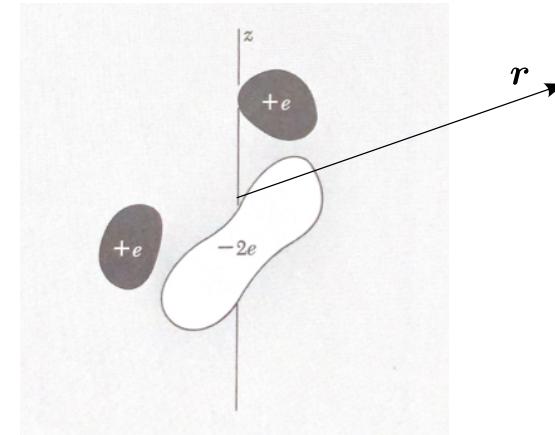


FIGURE 2.6 – Extrait de [Berkeley, sec 9.2]. Distribution de charges présentant un dipôle électrique sur zéro pour une charge totale nulle.

Cette simplification peut être trop grossière toutefois, en particulier si $Q_{\text{tot}} = 0$. On prend alors « progressivement » en compte la façon dont les charges sont réparties spatialement. Pour mettre ce processus en application, on considère par exemple le potentiel électrique créé par la distribution de charge au point \mathbf{r} :

$$V(\mathbf{r}) = \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3 \mathbf{r}' = \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}{r} \right)^{-1} d^3 \mathbf{r}' \quad (2.20)$$

Il s'agit alors de développer $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|/r$ en puissances successives de r'/r , qui tend vers 0 quand on s'éloigne des charges. On écrit alors

$$V(\mathbf{r}) = \frac{K_0}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{K_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{K_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \dots, \quad (2.21)$$

où les quantités K_n dépendent a priori de $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$ et du choix de l'origine des axes.

Ordre 0 Si on oublie toute dépendance en r' dans l'intégrale, on obtient directement $K_0 = \iiint \rho(\mathbf{r}') d^3 \mathbf{r}' = Q_{\text{tot}}$, le résultat précédemment annoncé. Le moment d'ordre 0 de la distribution, la charge totale, est un *scalaire*.

Ordre 1 Pour prendre en compte le terme d'ordre 1 en r'/r , on développe au premier ordre $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|/r = 1 - (\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r}')/r$ pour obtenir

$$K_1 = \iiint \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}_r \, d^3 r' = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r, \quad \text{avec} \quad \mathbf{p} = \iiint \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \, d^3 r'. \quad (2.22)$$

Le terme d'ordre 1 s'exprime ainsi en fonction d'un *vecteur*, le vecteur \mathbf{p} , appelé *dipôle électrique*, dont la valeur est indépendante du choix de l'origine des axes si le moment d'ordre 0, Q_{tot} , est nul. Le dipôle électrique est le moment d'ordre 1 de la distribution.

On peut bien sûr continuer le développement. Le terme K_2 fait par exemple intervenir le *quadrupôle électrique*, un tenseur pris de trace nulle et qui s'exprime comme

$$Q_{ij} = \iiint \rho(\mathbf{r}') (3r'_i r'_j - \|\mathbf{r}'\|^2 \delta_{ij}) \, d^3 r'.$$

Comme pour le dipôle électrique, la valeur de \hat{Q} est indépendante de l'origine des axes si les moments précédents (Q_{tot} et \mathbf{p}) sont nuls. On obtient finalement pour le potentiel électrique une expression de la forme

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_{\text{tot}}}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}_r}{r^2} + \frac{(\hat{Q} \mathbf{u}_r) \cdot \mathbf{u}_r}{r^3} + \dots \right). \quad (2.23)$$

On dit qu'on a procédé au *développement multipolaire* du potentiel.

Remarques

- On peut procéder de même en gravitation et définir les moments de distributions de masse. L'intérêt est moins immédiat puisque les moments ne sont jamais nuls (la masse est toujours positive). On peut citer toutefois le fait que les ondes gravitationnelles sont engendrées par les fluctuations du quadrupôle d'une distribution de masse, défini par la même expression que (2.23).
- On peut procéder au même développement pour les distributions de courant. La différence principale tient au fait qu'il n'y a pas de monopôle magnétique. Le premier moment non nul est le dipôle magnétique. Cette différence avec les charges électriques est à l'origine de l'asymétrie apparente des équations de Maxwell entre charges et courants. On définit en particulier *le dipôle magnétique*, noté \mathbf{m} , et qui s'écrit

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \iiint \mathbf{r}' \wedge \mathbf{j}(\mathbf{r}') \, d^3 r'. \quad (2.24)$$



3 ÉLECTRO- ET MAGNÉTOSTATIQUE

Références

- Berkeley, Physics courses II, Électricité et magnétisme
- Gié, Sarmant : Mécanique 1

Il n'est pas question ici de faire un court complet sur l'électrostatique et la magnétostatique. Il s'agit plutôt de tirer des quatre équations de Maxwell, dans ce cas statique, certaines des lois les plus utiles. Commençons donc par récrire les équations de Maxwell dans la situation où les champs, charges et courants sont indépendants du temps :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{Maxwell-Gauss}) \quad (3.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (\text{Maxwell-Faraday}) \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Maxwell-flux}) \quad (3.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (\text{Maxwell-Ampère}). \quad (3.4)$$

La première constatation est que dans le cas statique, il y a séparation entre champs électrique et magnétique : les équations sur le champ \mathbf{E} ne font intervenir ni le courant électrique \mathbf{j} ni le champ magnétique \mathbf{B} . Inversement, les équations sur le champ \mathbf{B} ne font intervenir ni la charge électrique ρ ni le champ électrique \mathbf{E} . On peut donc traiter séparément l'électrostatique et la magnétostatique.

3.1 ÉLECTROSTATIQUE

3.1.1 ÉQUATION DE MAXWELL-FARADAY

Dans le cas statique, l'équation de Maxwell-Faraday indique que le champ électrique est un champ *irrotationnel* :

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0. \quad (3.5)$$

On peut alors écrire que le champ électrique dérive d'un potentiel, le potentiel électrique :

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V. \quad (3.6)$$

Une autre façon d'écrire cela est de constater que le champ électrique est alors à *circulation conservative* : la circulation du champ électrique d'un point A à un point

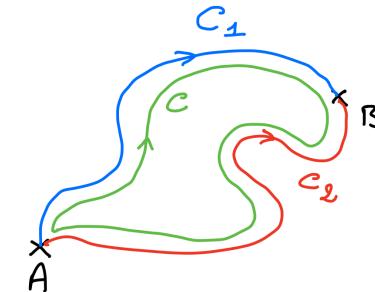


FIGURE 3.1 – Deux contours C_1 et C_2 reliant les points A et B permettent de définir un contour fermé C .

B ne dépend pas du chemin suivi. De manière équivalente, la circulation du champ électrique sur un contour fermé est nulle.

Le théorème de Stokes permet de retrouver ce résultat rapidement. On calcule C_1 et C_2 les circulations du champ électrique sur deux chemins C_1 et C_2 qui relient les points A et B (voir figure 3.1). On peut alors définir un contour fermé, le long duquel la circulation du champ électrique est

$$C = \oint_{A \rightarrow A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{A \rightarrow B, C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_{B \rightarrow A, C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = C_1 - C_2. \quad (3.7)$$

Le théorème de Stokes permet d'écrire la circulation de \mathbf{E} sur le circuit fermé comme le flux de son rotationnel à travers une surface orientée S quelconque portée par le contour fermé. Ainsi

$$C = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2. \quad (3.8)$$

Puisque la circulation de \mathbf{E} ne dépend pas du chemin choisi, on peut associer à chaque point un potentiel. La circulation du champ électrique est alors la *différence de potentiel* entre le point de départ et d'arrivée du chemin :

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_A - V_B. \quad (3.9)$$

Remarque En dehors du cas statique, le champ électrique n'est plus à circulation conservative, ce qui complique la définition d'une différence de potentiel de façon générale. On se référera au cours d'Électronique pour une discussion de ce problème.

3.1.2 ÉQUATION DE MAXWELL-GAUSS

L'équation de Maxwell-Gauss est inchangée au passage au cas statique, et s'écrit

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.10)$$

On considère une surface fermée S orientée vers l'extérieur. Le théorème de Green-Ostrogradsky donne l'égalité entre le flux sortant d'un vecteur à travers la surface S et l'intégrale de sa divergence sur le volume V défini par cette surface. Pour le champ électrique, on en déduit le *théorème de Gauss* :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{E} d^3r = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \quad (3.11)$$

où Q_{int} est la charge contenue dans le volume V .

Charge ponctuelle On considère une charge q placée au centre d'un système de coordonnées sphériques. La densité de charges est donnée par $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r})$. La symétrie sphérique du problème nous indique par ailleurs que le champ électrique en tout point de l'espace doit être porté par \mathbf{u}_r et ne dépendre que de la distance r à la charge : $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \mathbf{u}_r$. On applique alors le théorème de Gauss sur la sphère centrée sur la charge et de rayon r :

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) 4\pi r^2 = \iiint_V \frac{q\delta(\mathbf{r})}{\epsilon_0} d^3r = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (3.12)$$

On obtient ainsi le champ créé par une particule chargée et en particulier la dépendance en $1/r^2$ du champ électrique :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_r. \quad (3.13)$$

Coquille sphérique On considère une sphère qui porte une densité surfacique de charge uniforme σ , de rayon R , et centrée au centre du repère. La symétrie sphérique impose une nouvelle fois au champ électrique de prendre la forme $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \mathbf{u}_r$. En utilisant comme surface de Gauss une sphère concentrique de rayon $r < R$, la charge intérieure étant alors nulle, le théorème de Gauss impose la nullité du champ électrique dans la coquille de rayon R .

Si $r > R$, la charge intérieure est alors la charge totale $Q = 4\pi R^2 \sigma$ portée par la sphère et le champ créé par la sphère est le même qu'une charge ponctuelle Q placée au centre de la sphère.

SUR LA DÉPENDANCE EN $1/r^2$ DU CHAMP ÉLECTRIQUE

Références

- Jackson, sec. I.2 et 12.8, et problème 12.15,
- Textes des expériences de Cavendish : archive.org

La dépendance en $1/r^2$ du champ électrique découle directement des équations de Maxwell. À quelle précisions cette loi est-elle aujourd'hui vérifiée ? Avant toute chose, il est utile de préciser que cette question est intrinsèquement reliée à la question de la masse du photon. Si l'on suppose que le photon est pourvu d'une masse m_γ non nulle, il est en effet possible de montrer [voir Jackson, sect. 12.8] que le potentiel électrique créé par une charge n'est plus en $1/r$ mais prend la forme du potentiel de Yukawa :

$$V(r) = q \frac{e^{-\mu r}}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad \text{avec } \mu = \frac{m_\gamma c}{\hbar}. \quad (3.14)$$

Ce potentiel a maintenant une portée limitée, caractérisée par la distance μ^{-1} , alors que le potentiel en $1/r$ est dit de portée infinie. C'est d'ailleurs l'existence d'une masse pour les bosons Z^0 et W^\pm , vecteurs de l'interaction faible, qui limite la portée de cette interaction à des distances de l'ordre de 10^{-17} m.

Tester la validité de la loi en $1/r^2$ du champ électrique peut donc revenir à

- chercher une masse non nulle pour le photon,
- écrire le champ comme étant proportionnel à $r^{-2-\epsilon}$ et chercher une valeur non nulle pour ϵ .

Expériences à taille humaine Des expériences de laboratoire qui testent la validité de la loi de Coulomb remontent aussi loin que le XVIII^e siècle avec les expériences de Henry Cavendish qu'il mena en 1771 avant même la réalisation de la balance de Coulomb¹. Ces expériences, dont le principe est encore utilisé pour des tests récents, utilise deux sphères conductrices concentriques. Quelle que soit la mesure réalisée, le test de la dépendance en $1/r^2$ du champ électrique revient à tester la nullité du champ électrique créé par la sphère extérieure en son sein.

Nous avons vu ci-dessus que les équations de Maxwell prédisent en effet cette nullité. On peut se convaincre du fait que cela est lié à la dépendance en $1/r^2$ du champ électrique en reprenant l'argument développé par Cavendish. On considère un point P quelconque à l'intérieur de la sphère et on note dS_1 et dS_2 deux éléments de surface de la sphère situés de part et d'autre du point P (voir figure 3.2). Pour des

1. Mais ses expériences ne furent publiées qu'un siècle plus tard par Maxwell lui-même.



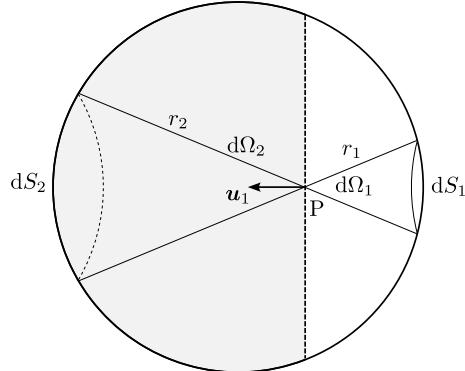


FIGURE 3.2 – Calcul du champ électrique créé par une sphère chargée en un point P quelconque.

éléments de surfaces infinitésimaux, les champs électriques créés au point P par dS_1 et dS_2 s'écrivent, avec σ la densité surfacique de charge,

$$dE_1 = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_1}{r_1^2} \mathbf{u}_1, \quad dE_2 = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{dS_2}{r_2^2} \mathbf{u}_1. \quad (3.15)$$

Puisque les angles solides $d\Omega_1$ et $d\Omega_2$ sont égaux, on a de surcroît

$$d\Omega_1 = \frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS_2}{r_2^2} = d\Omega_2, \quad (3.16)$$

dont on déduit directement que $dE_1 + dE_2 = 0$. On peut reproduire l'argument pour tous les éléments de surfaces des zones blanches et grises dessinées sur la sphère. Ces deux zones créent donc au point P le même champ électrique au signe près : le champ est bien nul à l'intérieur de la sphère.

Remarquons alors que si le champ électrique ne dépend plus de r en $1/r^2$ mais en $1/r^{(2+\epsilon)}$, l'annulation des champs ne se fait plus. Le champ total est orienté dans le sens de \mathbf{u}_1 ou de $-\mathbf{u}_1$ selon que $\epsilon > 0$ ou $\epsilon < 0$, respectivement.

Pour tester la nullité du champ électrique au sein de la sphère, Cavendish relia les deux sphères par un mince fil électrique puis chargea la sphère extérieure. Si un champ électrique existe entre les deux sphères, une force nette est imposée aux charges qui doivent alors s'écouler d'une sphère à l'autre², le sens dépendant du signe de ϵ . Cavendish ne détecta aucune charge supplémentaire sur la sphère intérieure, qu'elle

2. Voir [Metrologia 41 (2004) S136–S146] pour un calcul complet.

soit positive ou négative. Il en conclut une borne sur ϵ de $|\epsilon| < 0,02$, que l'on peut réinterpréter comme une limite sur la masse du photon $m_\gamma < 1 \times 10^{-43}$ kg. Maxwell améliora ces résultats un siècle plus tard pour obtenir $|\epsilon| < 5 \times 10^{-5}$ et $m_\gamma < 5 \times 10^{-45}$ kg. Des expériences plus récentes ont atteint des précisions de mesure de ϵ de l'ordre de 10^{-16} , soit une borne sur m_γ d'environ 10^{-50} kg.

Aux grandes distances Des tests de validité de la loi en $1/r^2$ ont aussi été réalisés à bien plus grande échelle. Les principales mesures reposent sur la mesure de champs magnétiques. Une masse non nulle pour le photon modifie en effet la forme du champ magnétique créé, par exemple, par un dipôle magnétique [voir Jackson, problème 12.5]. En faisant des mesures du champ magnétique terrestre ou d'autres astres, on atteint des précisions sur m_γ de l'ordre de 10^{-51} kg sans jamais observer de valeur non nulle.

Citons également l'existence même de modes résonants électromagnétiques de la cavité formée par... l'ionosphère et la surface de la Terre ! On parle de résonances de Schumann. Le mode fondamental mesuré a une fréquence d'environ 8 Hz. Un calcul naïf permet de trouver rapidement une borne sur la masse du photon. En effet, si le photon a une masse, on peut écrire son énergie sous la forme

$$hv = \sqrt{(m_\gamma c^2)^2 + p^2 c^2}. \quad (3.17)$$

Cela implique nécessairement l'inégalité $m_\gamma < \frac{hv}{c^2} = 6 \times 10^{-50}$ kg. Un calcul plus précis (et plus juste) donne plutôt une borne autour de 10^{-48} kg.

Aux petites distances La loi de Coulomb, enfin, peut être testée à des échelles subatomiques dans des expériences de diffusion de charge de très hautes énergies, afin que les particules chargées s'approchent autant que possible. Cela revient à tester la validité de l'électrodynamique quantique aux très petites distances. Aucune déviation n'a encore été observée jusque des échelles de distance de l'ordre de 10^{-18} m.

3.1.3 CHAMP ÉLECTRIQUE D'UNE DISTRIBUTION DE CHARGES QUELCONQUE

Références

Jackson, chapitre 1

L'expression (3.13) du champ électrique créé par une charge ponctuelle nous indique naturellement comment écrire le champ électrique créé par une densité volumique de charges, $\rho(\mathbf{r})$, quelconque. Le principe de superposition permet en effet

d'écrire le champ électrique total comme la somme des champs électriques créés par chacune des charges qui constituent $\rho(\mathbf{r})$. On obtient

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.18)$$

On peut aussi retrouver cette expression directement à partir des équations de Maxwell. En utilisant le fait que

$$\text{rot}(\text{rot } \mathbf{E}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E}, \quad (3.19)$$

on obtient l'*équation de Poisson*

$$\Delta \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad} \rho. \quad (3.20)$$

Nous verrons plus tard des éléments de démonstration dans le cas plus général de la propagation des ondes électromagnétiques, retenons pour le moment que cette démonstration repose sur l'identité³

$$\Delta_r \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (3.21)$$

Cette identité permet d'écrire

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \iiint \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \text{grad}_{\mathbf{r}'} [\rho(\mathbf{r}')] \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}' \quad (3.22)$$

puisqu'alors

$$\begin{aligned} \Delta_r \mathbf{E} &= \iiint \frac{-\text{grad} \rho(\mathbf{r}')}{4\pi\epsilon_0} \Delta_r \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}' = \iiint \frac{\text{grad} \rho(\mathbf{r}')}{\epsilon_0} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3\mathbf{r}' \quad (3.23) \\ &= \frac{\text{grad} \rho(\mathbf{r})}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

En procédant par intégrations par parties à partir de (3.22), on retrouve alors l'expression annoncée en début de section.

On obtient la même forme d'équations pour le potentiel scalaire $V(\mathbf{r})$. En effet, en injectant l'expression $\mathbf{E} = -\text{grad} V$ dans l'équation de Maxwell-Gauss, on écrit directement l'équation de Poisson (scalaire)

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (3.25)$$

³. Dont on peut se convaincre en calculant le laplacien en tout point $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ puis en calculant son intégrale sur tout l'espace.

En suivant exactement la même démonstration que pour le champ électrique⁴, on peut alors écrire

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}'. \quad (3.26)$$

CONDITIONS AUX LIMITES

Les solutions (3.18) et (3.26) des équations de Poisson sur le champ et le potentiel électriques sont en fait des solutions particulières. On y a imposé la nullité de $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ et de $V(\mathbf{r})$ à l'infini des charges. On peut constater en effet qu'on peut ajouter un vecteur constant quelconque à l'expression de \mathbf{E} ou un scalaire quelconque à l'expression de V sans changer le fait que \mathbf{E} reste solution des équations de Maxwell ou que V reste solution des équations de Poisson.

Imposer un champ nul à l'infini des sources permet de sélectionner la solution *physique* : la force exercée par une charge sur une autre placée à l'infini doit être nulle. Cette considération physique contraint donc l'expression (3.18) à être l'unique solution acceptable pour l'expression du champ électrique.

La valeur de $V = 0$ à l'infini est, en revanche, purement conventionnelle quoique souvent satisfaisante⁵. La situation générale est toutefois souvent plus compliquée. On peut chercher à calculer le champ et le potentiel électrique dans une région finie de l'espace entourée de conducteurs. Imposer une valeur du potentiel à l'infini, en dehors de ce volume, n'a alors pas de sens. De surcroît, l'unicité de l'expression du champ électrique ne permet pas non plus d'imposer une valeur unique au potentiel puisque si $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad} V(\mathbf{r})$, alors $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad} V'(\mathbf{r})$ où $V'(\mathbf{r})$ ne diffère de $V(\mathbf{r})$ que par une constante quelconque.

Le problème est en fait plus large que cela. En dehors des charges, le potentiel électrique est solution de l'*équation de Laplace*

$$\Delta V = 0, \quad (3.27)$$

qui a perdu toute trace du détail des sources du potentiel. Comment alors trouver la solution qui correspond au problème considéré ? La réponse tient encore une fois à l'imposition de *conditions aux limites du domaine*. Si l'on impose sur une surface fermée

— les valeurs du potentiel $V(\mathbf{r})$, on parle des conditions aux limites de Dirichlet,

4. On peut remarquer que toutes les composantes cartésiennes de \mathbf{E} sont solution d'une équation de Poisson scalaire.

5. Notons toutefois que dans certains problèmes, les « satisfactions » se contredisent. Le potentiel créé par un fil ou cylindre chargé infini, par exemple, ne peut pas être pris nul à l'infini. Il faut choisir entre un potentiel nul loin du fil et un fil infini qui ne peut pas l'être vraiment.



— ou la composante normale du champ électrique, *i.e.* des dérivées de $V(\mathbf{r})$, on parle des conditions aux limites de von Neumann,

alors l'équation de Laplace seule permet de trouver l'expression du potentiel à l'intérieur de cette surface (à une constante près si l'on choisit les conditions de von Neumann).

Ce théorème d'unicité est particulièrement puissant. Si l'on considère deux distributions de charges quelconques telles que les potentiels qu'elles créent soient égaux aux limites du domaine considéré, on est alors certain que leurs potentiels sont égaux en tout point du domaine. C'est cette constatation qui est à la base de la méthode dite « méthode des images » [voir Jackson, sec 2.1].

Références

Voir Jackson sec. 1.9 pour une discussion plus poussée et des références supplémentaires, ainsi que le chapitre 2 pour des cas particuliers.

3.2 MAGNÉTOSTATIQUE

3.2.1 ÉQUATION DE MAXWELL-FLUX

L'équation de Maxwell-flux est inchangée au passage au cas statique, et s'écrit

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (3.28)$$

Le champ magnétique s'écrit alors comme un rotationnel : on introduit le *potentiel vecteur*, noté \mathbf{A} , tel que

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3.29)$$

On peut aussi dire que le champ magnétique est à *flux conservatif* : le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est nul. Autrement dit, le flux du champ magnétique à travers un contour fermé ne dépend pas du choix de la surface d'intégration.

Cette propriété se démontre de manière équivalente au théorème de Gauss pour le champ électrique, mais avec une « densité de charge magnétique » toujours nulle⁶ : l'équation de Maxwell-flux s'apparente à l'équation de Maxwell-Gauss avec $\rho = 0$. La « charge magnétique » contenue à l'intérieur d'une surface fermée quelconque étant alors toujours nulle, le flux du champ magnétique à travers une surface fermée l'est tout autant.

6. On retrouve ici l'absence de monopôle magnétique et l'asymétrie entre champs électrique et magnétique.

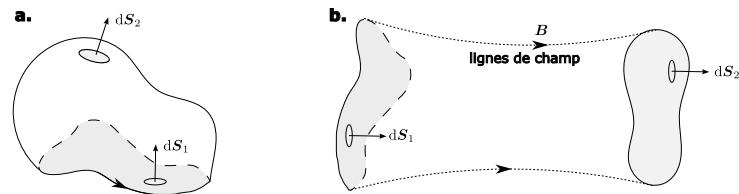


FIGURE 3.3 – Dans ces deux situations, le flux du champ magnétique à travers la surface 1 est égal à son flux à travers la surface 2. (a.) Les deux surfaces sont portées par un même contour. Les surfaces doivent être orientées de la même façon par rapport au contour, ici en respectant la règle de la main droite. b. Les deux surfaces forment un tube de champ avec des lignes du champ magnétique.

Un corolaire est l'égalité du flux du champ magnétique à travers deux surfaces qui forment un *tube de champ*. On définit figure 3.3.b une surface fermée à partir de deux surfaces notées 1 et 2, et d'une surface latérale tangente en tout point à des lignes du champ magnétique. Le flux à travers cette surface fermée est nul par propriété du champ magnétique. Par ailleurs, le flux du champ magnétique est nécessairement nul à travers la surface latérale puisque \mathbf{B} est toujours tangent à cette surface. Le flux à travers S_1 et le flux à travers S_2 sont donc égaux.

C'est notamment cette propriété des tubes de champ qui est utilisée dans les électroaimants pour augmenter la valeur du champ magnétique produit avec des pièces tronc-coniques (voir TP Magnétisme).

3.2.2 ÉQUATION DE MAXWELL-AMPÈRE

L'équation de Maxwell-Ampère dans le cas statique prend la forme simplifiée

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}. \quad (3.30)$$

On considère alors un contour fermé et orienté C . En utilisant une nouvelle fois le théorème de Stokes, on écrit l'égalité entre la circulation du champ magnétique le long de ce contour et le flux de son rotationnel à travers une surface S portée par ce contour⁷. L'orientation de la surface doit respecter la règle de la main droite par rapport à l'orientation préalablement fixée du contour (voir figure 3.3). On aboutit ainsi au *théorème d'Ampère* :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\ell = \mu_0 \iint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}. \quad (3.31)$$

7. Le vecteur $\operatorname{rot} \mathbf{B}$ s'écrit bien évidemment comme un rotationnel, il est à flux conservatif. Le choix de la surface est donc sans conséquences, tant que l'orientation est toujours choisie de la même façon.

Le flux du champ magnétique à travers la surface S est proportionnel au courant enlacé par le contour C .

Cas dynamique Dans le cas général, le théorème d'Ampère doit seulement être modifié en prenant en compte le *courant de déplacement*

$$\mathbf{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.32)$$

Le courant enlacé qui apparaît dans l'équation (3.31) est la somme du courant porté par \mathbf{j} et du courant porté par \mathbf{j}_D .

3.2.3 CHAMP MAGNÉTIQUE D'UNE DISTRIBUTION DE COURANTS QUELCONQUE

Références

Jackson, sec. 5.3 et 5.4.

La procédure à suivre pour calculer le champ magnétique créé par une densité volumique de charge $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ quelconque est en tous points similaire à celle suivie pour le champ électrique. On montre en effet que le champ magnétique est solution d'une équation similaire à l'équation de Poisson, à savoir

$$\Delta \mathbf{B} = -\mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{j}. \quad (3.33)$$

En imposant, pour le salut de la physique, le champ magnétique comme nul à l'infini des sources, on écrit, en utilisant une nouvelle fois le fait que $\Delta \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^{-1} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$,

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \operatorname{rot} \mathbf{j} \, d^3 r'. \quad (3.34)$$

En procédant par intégration par parties, on obtient la *loi de Biot et Savart* :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \wedge (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} \, d^3 r'. \quad (3.35)$$

Il est assez rapide, à partir de cette équation, de trouver *une* solution pour le potentiel vecteur \mathbf{A} . On peut en effet récrire

$$\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|^3} = -\operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \quad (3.36)$$

et donc

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}') \wedge \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \, d^3 r'. \quad (3.37)$$

Une intégration par parties et l'identité $\operatorname{rot}_{\mathbf{r}}[\mathbf{j}(\mathbf{r}') f(\mathbf{r})] = \mathbf{j}(\mathbf{r}') \wedge \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} f(\mathbf{r})$ nous donnent alors

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \, d^3 r'. \quad (3.38)$$

Cette expression est une expression possible du potentiel vecteur. Elle a la particularité de s'annuler à l'infini et d'être de divergence nulle. On peut en effet écrire

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \sum_{k=x,y,z} j_k(\mathbf{r}') \partial_{r_k} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \, d^3 r' \quad (3.39)$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \sum_{k=x,y,z} j_k(\mathbf{r}') \partial_{r'_k} \left(\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \right) \, d^3 r' \quad (3.40)$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\operatorname{div}_{\mathbf{r}'} \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \, d^3 r', \quad (3.41)$$

la dernière égalité ayant été obtenue par intégration par parties et en utilisant le fait que \mathbf{j} est nul à l'infini. L'équation de Maxwell-Ampère impose enfin à \mathbf{j} d'être de divergence nulle puisque $\mathbf{j} = \mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{B}$. La divergence de \mathbf{A} donné par l'équation (3.38) est donc bien nulle.

Rien n'impose pourtant au potentiel vecteur de vérifier $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. En fait, tout vecteur \mathbf{A}' qui s'écrit

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \operatorname{grad} f(\mathbf{r}), \quad (3.42)$$

où $f(r)$ est une fonction scalaire quelconque, est un potentiel vecteur : $\operatorname{rot} \mathbf{A}' = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Pour fixer la valeur du potentiel vecteur, ou de la fonction f dans l'équation précédente, on impose une condition dite *condition de jauge*. La jauge de la magnétostatique est la *jauge de Coulomb* :

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (3.43)$$

Avec ce choix de jauge, le potentiel vecteur est solution de l'équation de Poisson

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}. \quad (3.44)$$

Nous connaissons déjà la solution de cette équation puisqu'elle prend exactement la même forme que l'équation de Poisson (3.20) vérifiée par le champ électrique. L'équivalent de l'équation (3.22) est directement le potentiel vecteur (3.38).



3.3 EXTENSION AU CAS DYNAMIQUE, NOTION DE JAUGE

Références

- Jackson, sec. 6.3
- Gié, Sarmant, I, chap. 13.2

Si nous ne supposons plus les champs comme statiques, la résolution des équations est plus complexe : les champs électrique et magnétique sont maintenant couplés. Seule une équation est inchangée et sa conclusion est préservée, l'équation de Maxwell-flux : $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$. Le champ magnétique est toujours à flux conservatif et on peut définir un potentiel vecteur, *i.e.* écrire

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (3.45)$$

En revanche, le champ électrique n'est plus à circulation conservative, puisque $\operatorname{rot} \mathbf{E} \neq 0$. Toutefois, on a

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\partial \operatorname{rot} \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \Rightarrow \operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (3.46)$$

Puisque $\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{A}$ est à circulation conservative, on peut une nouvelle fois définir un potentiel scalaire V tel que

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (3.47)$$

Le calcul des solutions des équations de Maxwell n'en est pas pour autant facilité. On établit les relations suivantes sur les champs et potentiels :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \end{array} \right. \quad (3.48)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \operatorname{grad} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) \end{array} \right. \quad (3.49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (3.50)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = -\mu_0 \operatorname{rot} \mathbf{j}. \end{array} \right. \quad (3.51)$$

Si les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} ont des solutions uniques, on retrouve la même indétermination que dans le cas statique. Plus précisément, les champs sont invariants par la

transformation de jauge

$$(V, \mathbf{A}) \rightarrow \left(V + \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, t), \mathbf{A} - \operatorname{grad} f(\mathbf{r}, t) \right), \quad (3.52)$$

où $f(\mathbf{r}, t)$ est un champ scalaire quelconque. On peut alors imposer une condition supplémentaire aux potentiels pour lever, au moins partiellement, cette indéterminée, qu'on appelle, une nouvelle fois, *condition de jauge*.

JAUGE DE LORENZ

La jauge la plus couramment utilisée est la jauge de Lorenz

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (3.53)$$

- Elle est invariante par changement de référentiel relativiste. Contrairement aux autres jauge, elle ne porte donc pas implicitement trace du référentiel d'étude ;
- Elle permet de découpler les équations sur les potentiels V et \mathbf{A} . Sous cette condition de jauge, en effet, les potentiels sont solutions de deux équations de propagation avec termes de source (le courant \mathbf{j} pour \mathbf{A} et la densité ρ pour V) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{j}, \end{array} \right. \quad (3.54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \end{array} \right. \quad (3.55)$$

Remarque Les potentiels A et V ne sont en pas déterminés de façon unique, et il faut encore préciser des conditions aux limites. En effet, les solutions de la jauge de Lorenz sont invariantes par le changement de jauge (3.52) pour peu que le champ scalaire $f(\mathbf{r}, t)$ soit solution de l'équation de d'Alembert $\Delta f - c^{-2} \partial_t^2 f = 0$.

JAUGE DE COULOMB

Cette jauge, aussi appelée *jauge de rayonnement*, s'écrit

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \quad (3.56)$$

C'est la jauge déjà rencontrée en magnétostatique. Dans ce cadre, le potentiel scalaire est solution de l'équation de Poisson

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3.57)$$



dont les solutions sont connues. On peut en effet écrire

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} d^3\mathbf{r}'. \quad (3.58)$$

On constate que le potentiel au point \mathbf{r} et au temps t dépend de la valeur de la densité de charge en d'autres lieux mais *au même instant*. Les causes (charges) ont donc un effet instantané sur le potentiel en tout point de l'espace, ce qui semble violer le principe relativiste : la propagation des champs ne peut pas être plus rapide que la vitesse de la lumière. Il faut en fait s'intéresser exclusivement aux champs, seules quantités avec une réalité physique. Un calcul complet montrerait que les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} se propagent bien à c malgré ce caractère instantané pour V . Cette jauge est en fait utile en l'absence sources⁸. Dans ce cas en effet, $\Delta V = 0$ en tout point donc $V = 0$ et on a

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \text{avec} \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}. \quad (3.59)$$

On peut se contenter de calculer le potentiel vecteur pour trouver tous les champs.

AUTRES JAUGES

Références

- K-H Yang, Am. J. Phys 73, 742
- J. D. Jackson, Am. J. Phys. 70. 917

On peut de façon plus générale définir une *jauge de vitesse* dont les jauge de Lorenz et de Coulomb sont des cas limites :

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{1}{v^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0. \quad (3.60)$$

On montre alors que $V(\mathbf{r}, t)$ se propage à la vitesse v alors que \mathbf{A} a une composante qui se propage à v et une autre qui se propage à c . Seule cette dernière composante contribue à l'expression des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} .

8. Ou loin des sources, d'où le nom de jauge de rayonnement.



4 PROPRIÉTÉS DU CHAMPS DANS LE VIDE ET LES MILIEUX

Références

- BFR, Électromagnétisme 4,
- Jackson chapitre 6

Un champ électromagnétique s'accompagne de quantités mécaniques importantes à considérer notamment lors de l'étude de la propagation des ondes électromagnétiques et de l'interaction du champ avec la matière : énergie, quantité de mouvement, moment cinétique. L'objectif de ce chapitre est de rappeler ou de donner l'expression de ces différentes quantités, aussi bien dans le vide que dans les milieux. Nous aurons donc dans un premier temps à construire les équations de Maxwell dans les milieux et, pour cela, préciser la notion même de champ électrique ou magnétique dans un milieu.

4.1 CHAMPS ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS LES MILIEUX

Références

- Jackson, sec. 6.6
- BFR 4, sec. 1.4, 3.4 et 9.1

4.1.1 CHAMPS NIVELÉS

Les équations de Maxwell écrites au premier chapitre en présence de densités de charge et de courant n'ont aucune raison d'être modifiées a priori dans un traitement classique des champs dans la matière. En effet, elles sont vérifiées jusqu'aux très petites distances, tant que les autres interactions ou la mécanique quantique n'ont pas à être prises en compte. On pourrait se contenter d'y inclure les densités de charge et courant microscopique, *i.e.* non nivellées, pour connaître l'expression des champs électrique et magnétique en tout point du milieu. On notera, à l'instar de [Jackson] et [BFR IV] \mathbf{e} et \mathbf{b} ces champs « microscopiques ».

Le problème qui se pose à nous est le même que celui qui nous a amené à introduire les quantités nivellées pour les densités ρ et \mathbf{j} : le détail des variations « microscopiques » des sources comme des champs est trop complexe et le plus souvent

inutile à connaître pour comprendre le comportement « macroscopique » des systèmes physiques auquel nous sommes sensibles.

Plutôt que de calculer les champs microscopiques \mathbf{e} et \mathbf{b} , nous préférions donc calculer leurs valeurs nivellées, leurs moyennes sur un volume macroscopique que nous préciserons plus tard. Ces champs macroscopiques dans les milieux sont notés \mathbf{E} et \mathbf{B} , comme les champs *non moyennés* dans le vide :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{e}(\mathbf{r}, t) \rangle_r, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \langle \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \rangle_r. \quad (4.1)$$

Il s'agit maintenant d'obtenir les équations de Maxwell mais pour les grandeurs moyennées.

4.1.2 ÉQUATIONS DE STRUCTURE

Les deux équations de structure sur les champs microscopiques sont les plus simples à traiter :

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}. \quad (4.2)$$

Peu importe le volume sur lequel on procède à la moyenne des champs, cette opération commute toujours avec les opérations de dérivation qui sont linéaires. Autrement dit, on obtient

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (4.3)$$

4.1.3 ÉQUATIONS AUX SOURCES

Procéder à la moyenne des équations aux sources est a priori tout aussi simple. On peut en effet écrire

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \rho_{\text{micro}} \rangle, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \langle \mathbf{j}_{\text{micro}} \rangle + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (4.4)$$

En utilisant les grandeurs moyennées, on souhaite négliger toutes les sources de fluctuations spatiales ou temporelles des densités de charge et courants. Ces sources sont multiples, on peut citer

- les fluctuations de charge liées à la délocalisation dans les orbitales électroniques,
- la vibration des atomes ou des molécules dans un réseau cristallin sous l'effet de l'*agitation thermique*,



- la délocalisation des atomes ou molécules elles-mêmes au nœud du réseau, même en l'absence d'agitation thermique, appelée *fluctuation de point zéro*.

Ces fluctuations microscopiques ont typiquement lieu à des échelles atomiques, de l'ordre de 10^{-10} m. Elles peuvent être plus ou moins rapides, de quelques 10^{-13} s pour la vibration des noyaux sur les sites du réseau à 10^{-17} s pour les fluctuations électriques des orbitales atomiques ou moléculaires.

Pour s'en affranchir, on considère que l'on procède à une moyenne sur des volumes de taille caractéristique de l'ordre de $L_0 = 10^{-8}$ m :

- c'est une distance suffisamment grande par rapport aux échelles des fluctuations microscopiques,
- on constate qu'on obtient une bonne description de la propagation des ondes électromagnétiques dans les milieux traités ainsi de façon continue pour des longueurs d'onde optique ou UV, *i.e.* de l'ordre de 10^{-7} m. En-deçà, dans le régime des rayons X par exemple, la propagation des ondes est affectée par le détail microscopique du milieu, et on ne peut pas procéder à ces moyennes spatiales.

Qu'en est-il des fluctuations temporelles ? Le temps caractéristique de propagation des ondes sur le volume d'intégration est de l'ordre de $L_0/c = 3 \times 10^{-17}$ s. C'est a priori beaucoup trop rapide pour considérer que les fluctuations temporelles sont bien moyennées. Pourtant, nous n'aurons pas besoin de procéder à une moyenne temporelle en sus de la moyenne spatiale. Cela tient au fait que dans la matière « typique », on compte environ 10^{30} m^{-3} noyaux ou charges, soit $\approx 10^6$ entités dans le volume d'intégration $L_0 = 10^{-24} \text{ m}^3$. Les oscillations de ces 10^6 noyaux ou charges n'ont aucune raison d'être en phase, et la moyenne spatiale suffit donc déjà pour annuler les fluctuations temporelles.

ÉQUATION DE MAXWELL-GAUSS

On considère la densité de charges microscopique $\rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t)$ dont on souhaite calculer la valeur moyenne :

$$\langle \rho_{\text{micro}}(\mathbf{r}, t) \rangle = \left\langle \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \right\rangle. \quad (4.5)$$

On souhaite toutefois dans cette moyenne distinguer la contribution des charges libres de se déplacer dans le milieu et des charges liées à un noyau, une molécule ou tout autre arrangement fixe de charges. On représente par exemple sur la figure 4.1 inspirée de [Jackson, 6.6] des charges libres repérées par les vecteurs \mathbf{r}_i et des charges liées, repérées par un vecteur $\mathbf{r}_j^{(k)}$ par rapport à la position \mathbf{R}_k de leur centre d'attache, ici le

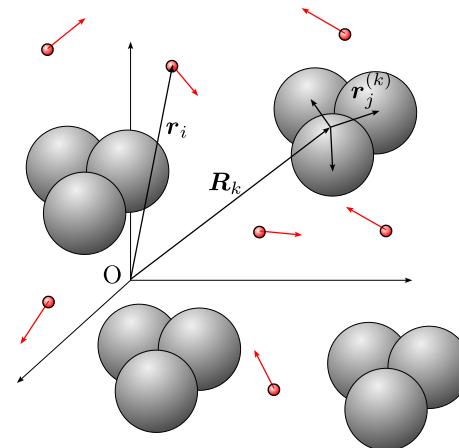


FIGURE 4.1 – Les charges dans un milieu peuvent être libres de se déplacer (sphères rouges) ou fixes (sphères grises). On représente ici des molécules où chaque charge est repérée par le vecteur $\mathbf{r}_j^{(k)}$ par rapport au centre \mathbf{R}_k de la molécule.

centre d'une molécule. On séparera alors par la suite la densité volumique moyennée de *charges libres*

$$\rho_{\text{libre}}(\mathbf{r}, t) = \left\langle \sum_i q_i \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)] \right\rangle \quad (4.6)$$

et celle pour les *charges liées*

$$\rho_b(\mathbf{r}, t) = \left\langle \sum_k \sum_j q_j \delta[\mathbf{r} - (\mathbf{R}_k(t) + \mathbf{r}_j^{(k)})] \right\rangle. \quad (4.7)$$

On procède alors à un développement multipolaire de $\rho_b(\mathbf{r}, t)$ comme nous l'avions fait chapitre 2.5 dans la définition de moments d'une distribution de charges quelconques.

- Le terme d'ordre 0 revient à réunir toutes les charges au point $\mathbf{R}_k(t)$:

$$\rho_b^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \left\langle \sum_k Q_{k,\text{tot}} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_k(t)] \right\rangle, \quad Q_{k,\text{tot}} = \sum_j q_j^{(k)}. \quad (4.8)$$

Comme l'assemblage est a priori lui aussi libre de se déplacer, on inclut en fait ce terme d'ordre 0 dans la définition d'une densité volumique de charges

macroscopique, parfois aussi appelée libres, ρ_ℓ :

$$\rho_\ell(\mathbf{r}, t) = \rho_{\text{libre}}(\mathbf{r}, t) + \rho_b^{(0)}(\mathbf{r}, t). \quad (4.9)$$

- Le terme d'ordre 1 fait ensuite apparaître les dipôles électriques des assemblages. On définit ainsi une densité volumique de dipôle

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \mathbf{p}_k \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_k(t)], \quad \mathbf{p}_k = \sum_j q_j^{(k)} \mathbf{r}_j^{(k)}. \quad (4.10)$$

En définissant soigneusement ce que la moyenne $\langle \cdot \rangle$ implique mathématiquement [voir Jackson, 6.6], on obtient finalement le terme d'ordre 1 sous la forme

$$\langle \rho_b^{(1)} \rangle = -\text{div } \mathbf{P}. \quad (4.11)$$

- On procède de même pour les ordres suivants. Par exemple, le terme d'ordre 2 fait, sans surprise, intervenir le quadrupôle \hat{Q}_k des assemblages de charges :

$$\langle \rho_b^{(2)} \rangle = \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \hat{Q}_{\alpha\beta}, \quad (4.12)$$

qui peut également se mettre sous la forme d'une divergence :

$$\langle \rho_b^{(2)} \rangle = \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\sum_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} \hat{Q}_{\alpha\beta} \right) = \text{div} \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \hat{Q}_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\alpha. \quad (4.13)$$

On peut en fait montrer que tous les termes d'ordre supérieur à 1 s'écrivent sous la forme de la divergence d'un vecteur. Il est donc possible d'écrire le développement multipolaire de $\langle \rho_{\text{micro}} \rangle$ sous la forme :

$$\langle \rho_{\text{micro}} \rangle = \rho_\ell - \text{div} \tilde{\mathbf{P}}, \quad (4.14)$$

$$\tilde{\mathbf{P}} = \mathbf{P} - \sum_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \hat{Q}_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\alpha + \dots \quad (4.15)$$

On retourne maintenant à l'équation de Maxwell-Gauss. Le résultat précédent permet d'écrire

$$\text{div} (\epsilon_0 \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{P}}) = \rho_\ell. \quad (4.16)$$

On définit alors l'*induction électrique* \mathbf{D} comme

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \tilde{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} + \text{termes quadrupolaires, octopolaires, ...} \quad (4.17)$$

que l'on restreint le plus souvent aux deux premiers termes, les contributions quadrupolaires et supérieures étant la plupart du temps négligeables. L'équation de Maxwell-Gauss dans les milieux prend finalement la forme

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_\ell. \quad (4.18)$$

ÉQUATION DE MAXWELL-AMPÈRE

Il faut procéder de même avec la densité volumique de courant, dans laquelle nous isolerons une nouvelle fois la contribution des charges libres. Le calcul est très similaire, et mène à la définition de la densité volumique de dipôle magnétique, appelée *aimantation magnétique*

$$\mathbf{M} = \sum_k \mathbf{m}_k \delta[\mathbf{r} - \mathbf{R}_k(t)], \quad (4.19)$$

où \mathbf{m}_k est un dipôle magnétique élémentaire. En introduisant, à l'instar de \mathbf{D} , l'*induction magnétique* \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} + \text{termes quadrupolaires, octopolaires, ...}, \quad (4.20)$$

que l'on réduit également le plus souvent aux deux premiers termes, on obtient la nouvelle expression de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_\ell + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (4.21)$$

où \mathbf{j}_ℓ est la densité volumique de courants libres.

Remarque Si le milieu considéré est en mouvement à la vitesse \mathbf{v} , il faut en fait ajouter à l'induction magnétique une contribution de la forme $\mathbf{v} \wedge \tilde{\mathbf{P}}$ [voir Jackson, 6.6 pour des détails].

ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LES MILIEUX

On dispose maintenant de quatre nouvelles équations de Maxwell

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_\ell \quad (4.22)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_\ell + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (4.23)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.24)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (4.25)$$

Le problème est toutefois loin d'être fini si on veut pouvoir calculer les champs dans les milieux. Il faut en effet pouvoir spécifier le lien entre les inductions (\mathbf{D}, \mathbf{H}) et les



champs (\mathbf{E}, \mathbf{B}). En effet, les champs électrique \mathbf{E} et \mathbf{B} peuvent modifier la répartition des charges et les valeurs des courants microscopiques, modifiant alors les valeurs de \mathbf{D} et \mathbf{H} . Il faut donc pour pouvoir continuer préciser la forme des fonctions

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}[\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}[\mathbf{E}, \mathbf{B}], \quad (4.26)$$

auxquelles on ajoute souvent la loi d'Ohm généralisée

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]. \quad (4.27)$$

Pour préciser la forme de ces fonctions, il faut entrer dans le domaine de la physique des solides. Toutefois, pour la plupart des milieux, et en dehors des ferroélectriques et des ferromagnétiques, la réponse des milieux est souvent linéaire pour les faibles champs. On définit alors le tenseur de *permittivité diélectrique* [ϵ] et le tenseur de *perméabilité magnétique* [μ] (ou son inverse) pour écrire

$$\mathbf{D} = [\epsilon] \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = [1/\mu] \mathbf{B} \quad (4.28)$$

Si le milieu est en plus homogène, les tenseurs [ϵ] et [μ] ne dépendent pas de la position. Si le milieu est isotrope, *i.e.* la réponse du milieu ne dépend pas de l'orientation des champs, on peut remplacer les tenseurs par un scalaire. Un milieu linéaire homogène et isotrope est donc caractérisé par la donnée de deux scalaires, la permittivité diélectrique ϵ ou la permittivité diélectrique relative $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$, et la perméabilité magnétique μ ou la perméabilité magnétique relative $\mu_r = \mu/\mu_0$:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}. \quad (4.30)$$

On introduit de même la *susceptibilité diélectrique* χ_e telle que

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \chi_e = \epsilon_r - 1. \quad (4.31)$$

Les équations (4.29) et (4.30) sont en fait le plus souvent trop simples. On y oublie le fait que la réponse du milieu dépend quasiment toujours de la fréquence du champ électromagnétique. Par exemple, pour l'eau, ϵ_r vaut entre 88 (à 0 °C) et 56 (à 100 °C) à fréquence nulle, mais vaut seulement 1,8 dans le visible (où elle est quasi-indépendante de la température). De même, la réponse du milieu peut dépendre du passé, *i.e.* de l'histoire du champ électrique et du champ magnétique. Une équation « instantanée » de la forme (4.29) ne permet pas de décrire cela.

Pour un milieu linéaire, on écrit donc plutôt les relations entre inductions et champs dans le domaine de Fourier, c'est-à-dire des relations entre les composantes spectrales

de ces grandeurs :

$$\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{k}, \omega) = [\epsilon(\mathbf{k}, \omega)] \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega), \quad \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{k}, \omega) = \left[\frac{1}{\mu}(\mathbf{k}, \omega) \right] \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.32)$$

Pour les milieux homogènes et isotropes, la dépendance en \mathbf{k} de [ϵ] et [$1/\mu$] disparaît. Un modèle microscopique est nécessaire pour donner l'expression de $\epsilon_r(\omega)$ ou de $\mu_r(\omega)$ [cf. TDs Électromagnétisme dans les milieux].

4.2 PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DU CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

La propagation d'une onde électromagnétique s'accompagne d'une propagation d'énergie. On cherche donc ici à quantifier l'énergie portée par une onde, ou plutôt son flux d'énergie. Nous calculerons pour cela dans un premier temps l'énergie qui correspond à une distribution de charges ou de courants, dans le vide ou dans un milieu.

4.2.1 ÉNERGIE ÉLECTROSTATIQUE

Références

- Jackson, sec. 1.11
- Perez, sec. 3.IV

Considérons une assemblée de charges $\{q_i\}$ dans le vide. Pour estimer l'énergie « stockée » dans cette distribution de charges, on calcule l'énergie nécessaire pour amener la n^{e} charge de l'infini (où elles n'interagissent pas avec les autres charges et où on prend le potentiel électrique comme nul) à sa position finale \mathbf{r}_n . Elle correspond au travail

$$W_n = q_n V_n, \quad \text{où} \quad V_n = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j < n} \frac{q_j}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_n\|}, \quad (4.33)$$

où V_n est le potentiel créé par les charges 1, 2, …, $n-1$ au point \mathbf{r}_n . L'énergie totale stockée dans la distribution de charges est la somme de ces travaux individuels :

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^N \sum_{j < n} \frac{q_n q_j}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_n\|} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 \|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|}. \quad (4.34)$$

On passe alors à la limite continue en transformant

$$q_i \rightarrow \int d^3 \mathbf{r} q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (4.35)$$



et en introduisant la densité volumique de charges

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i). \quad (4.36)$$

L'énergie W prend alors la forme

$$W = \frac{1}{2} \iint d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{r}' \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|}. \quad (4.37)$$

On reconnaît dans l'intégrale sur \mathbf{r}' le potentiel $V(\mathbf{r})$ créé par l'assemblée de charges au point \mathbf{r} . L'énergie électrostatique portée par la distribution de charges prend donc la forme simple

$$W = \int d^3\mathbf{r} u_E(\mathbf{r}), \quad u_E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \rho(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}), \quad (4.38)$$

où $u_E(\mathbf{r})$ est la densité d'énergie électrostatique.

On obtient une autre expression pour $u_E(\mathbf{r})$ en remplaçant dans l'intégrale $\rho(\mathbf{r})$ par $-\epsilon_0 \Delta V$ grâce à l'équation de Poisson sur le potentiel. En intégrant par parties et en écrivant que $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} V$, on aboutit alors à une forme de u_E qui ne dépend que du champ :

$$W = \int d^3\mathbf{r} u_E(\mathbf{r}), \quad u_E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}). \quad (4.39)$$

Remarques

- Les deux expressions (4.39) et (4.38) ne sont pas égales, mais diffèrent pas un terme donc l'intégrale sur l'espace est nulle.
- Dans le passage à l'équation (4.37), on a d'une certaine façon remplacé la somme $\sum_{i \neq j}$ par la somme $\sum_{i,j}$. Autrement dit, nous avons pris en compte des termes d'« auto-énergie », où une charge interagirait avec elle-même, puisqu'on n'interdit plus à \mathbf{r} et \mathbf{r}' d'être égaux. C'est a priori très discutables puisque d'une part ces termes d'auto-énergie n'ont pas de sens physique et que, d'autre part, ils mènent à des divergences mathématiques. En pratique, dans un milieu continu, ces termes ont une contribution négligeable à la densité d'énergie finalement calculée, tant qu'on se garde de regarder au lieu des charges.

C'est très différent si on s'intéresse à un ensemble discret de charges ! Si on considère par exemple deux charges de signes opposés, l'expression (4.34) est évidemment négative alors que la densité d'énergie (4.39) est toujours positive. Il y a donc une apparente contradiction qui tient à la prise en compte de ces termes d'auto-énergie [voir Jackson 1.11 pour une discussion plus complète].

DANS UN MILIEU DIÉLECTRIQUE

Références

- Jackson, sec. 4.7
- BFR IV, sec 4.2

La construction précédente est loin d'être évidente quand on s'intéresse à la propagation d'une onde dans un milieu. D'une part, les champs et inductions calculés sont des grandeurs moyennes. Il n'est donc pas évident que l'on puisse utiliser directement les relations non-linéaires établies dans le vide pour le transport d'énergie dans un milieu. D'autre part, la propagation des champs s'accompagne d'une modification du milieu, par exemple d'une modification des états de polarisation du milieu « déjà en place ». L'onde s'accompagne d'une onde de polarisation dont la contribution est à prendre en compte. On ne peut plus s'intéresser qu'au champ électrique seul mais aussi à l'induction électrique \mathbf{D} .

Pour trouver une expression de la densité d'énergie électrostatique, on considère plutôt une variation infinitésimale de la densité de charge ρ dans le potentiel V . Le travail nécessaire pour faire varier ρ de $\delta\rho$ est

$$\delta W = \int d^3\mathbf{r} \delta\rho(\mathbf{r}) \times V(\mathbf{r}). \quad (4.40)$$

La variation de ρ s'accompagne d'une variation $\delta\mathbf{D}$ de \mathbf{D} qui inclut les variations de polarisation du milieu, et qui est reliée à $\delta\rho$ par

$$\delta\rho = \text{div}(\delta\mathbf{D}). \quad (4.41)$$

En procédant alors une nouvelle fois par intégrations par parties, et en considérant que $\delta\mathbf{D}$ est nul à l'infini (obtenu par exemple en supposant qu'il n'y a pas de charges à l'infini), on obtient

$$\delta W = \int d^3\mathbf{r} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{D}(\mathbf{r}). \quad (4.42)$$

On ne peut pas conclure si on ne connaît pas le lien entre \mathbf{D} et \mathbf{E} , c'est-à-dire si on ne connaît pas la réponse du milieu $\mathbf{D} = \mathcal{D}[\mathbf{E}]$. Si le milieu est linéaire, en revanche, on peut écrire

$$\delta(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) = \delta(\mathbf{E} \cdot [\epsilon]\mathbf{E}) = \delta(\epsilon_x E_x^2 + \epsilon_y E_y^2 + \epsilon_z E_z^2) = 2\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}. \quad (4.43)$$

Il est donc finalement possible d'écrire

$$\delta W = \int d^3\mathbf{r} \delta u_E(\mathbf{r}), \quad u_E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}. \quad (4.44)$$



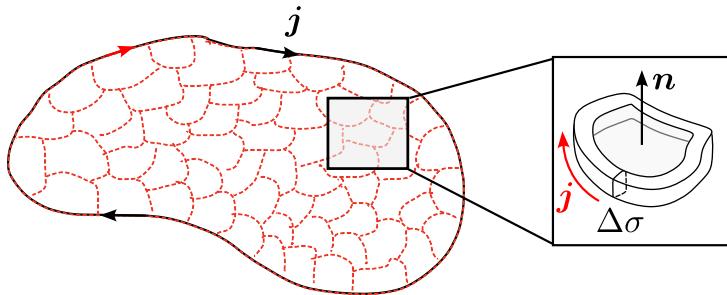


FIGURE 4.2 – Décomposition d'une spire de courant de densité j en des spires élémentaires parcourues par le même courant, de normales n et de même section $\Delta\sigma$ que la grande spire.

On retrouve ainsi une expression identique à l'expression (4.39) *uniquement* si le milieu est linéaire.

4.2.2 ÉNERGIE MAGNÉTOSTATIQUE

Références

Jackson, sec. 5.16

Le calcul de l'énergie magnétostatique est plus complexe, nous en donnons ici des éléments de démonstration. On se référera à [Jackson, 5.16] pour plus de détails.

Plutôt qu'une distribution de charges, nous considérons ici dans un premier temps un circuit fermé, ou une spire, parcouru par un courant I . Si le champ magnétique au niveau du circuit est modifié, le flux ϕ du champ à travers la spire est lui-même modifié. La loi de Faraday prévoit alors l'apparition d'une force électromotrice $e = -d\phi/dt$. Maintenir le courant à la valeur I dans la spire demande alors aux sources de courant la puissance $\mathcal{P} = -eI$. On peut se convaincre du signe en constatant que si e est de même signe que I , la force électromotrice tend à augmenter la valeur de I et les sources doivent donc « freiner », i.e. absorber de l'énergie, pour maintenir le courant à sa valeur initiale. Il faut donc $\mathcal{P} < 0$.

Finalement, la variation élémentaire d'énergie de la distribution de courant correspondant à une variation $\delta\phi$ du flux est

$$\delta W = I \times \delta\phi. \quad (4.45)$$

Considérons maintenant une distribution de courants quelconque, représentée par la densité volumique j . En régime stationnaire, $\mu_0 j = \text{rot } \mathbf{B}$, ou encore $\text{div } j = 0$. Le

courant j est rotationnel et on peut donc toujours le décomposer comme une somme de petites spires (voir figure 4.2). Une spire élémentaire s de section $\Delta\sigma$ est parcourue par le courant $I = j\Delta\sigma$. Le travail élémentaire nécessaire pour faire varier le champ magnétique au niveau de cette spire est donc

$$\Delta(\delta W) = (j\Delta\sigma) \times \int_s \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (4.46)$$

En utilisant le théorème de Stokes pour remplacer le flux du champ magnétique $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ par la circulation de \mathbf{A} sur le contour élémentaire fermé c défini par s , on peut écrire

$$\Delta(\delta W) = \oint_c \delta \mathbf{A} \cdot (j\Delta\sigma \mathbf{d}\ell) \quad (4.47)$$

$$j\Delta\sigma \mathbf{d}\ell = j \, d^3 r \quad \Rightarrow \quad \delta W = \iiint j \cdot \delta \mathbf{A} \, d^3 r \quad (4.48)$$

En écrivant enfin que $\text{rot } \mathbf{H} = j$, et en intégrant par parties, on peut montrer que

$$\delta W = \int \mathbf{H} \cdot \delta \mathbf{B} \, d^3 r. \quad (4.49)$$

On se ramène ainsi à une situation très proche que celle de l'équation (4.42) pour l'énergie électrostatique. Un calcul similaire permet alors de montrer que, pour un *milieu linéaire*, on peut écrire la densité d'énergie magnétostatique comme

$$u_B = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad \text{ou} \quad u_B = \frac{1}{2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}. \quad (4.50)$$

4.2.3 THÉORÈME DE POYNTING

Références

- Jackson, sec. 6.7
- Pérez, chap 23, pour les calculs dans les milieux LHI ou dans le vide

Il s'agit maintenant de calculer, connaissant les densités de charge et courant, ainsi que la valeur des champs et inductions, la puissance portée par le champ électromagnétique. Dans son interaction avec la matière, la puissance fournie au milieu s'écrit

$$\mathcal{P} = \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, d^3 r. \quad (4.51)$$

L'intégrale est ici faite sur un volume \mathcal{V} quelconque. On remplace alors \mathbf{j} en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère ($\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}_\ell + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$) et on obtient, après quelques manipulations [cf Jackson 6.7],

$$\mathcal{P} = - \int \left(\text{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d^3r. \quad (4.52)$$

Les deux derniers termes sont similaires à ceux rencontrés équations (4.42) et (4.49), on voit donc d'ores-et-déjà apparaître les densités d'énergie connues. Pour retrouver l'expression connue du théorème de Poynting, il nous faut toutefois faire deux hypothèses supplémentaires : on suppose que le milieu est

- linéaire,
- sans dispersion, ou de façon équivalente sans pertes.

La dernière hypothèse signifie que la réponse du milieu ne dépend pas de la fréquence¹ des champs. Dans cette situation, les inductions $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ et $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ ne dépendent que des champs électrique et magnétiques calculés *au même instant* t .

Sous ces hypothèses seulement, nous pouvons procéder aux mêmes transformations que celles utilisées pour le calcul des densités d'énergie. Nous pouvons donc finalement écrire

$$\mathcal{P} = - \int_{\mathcal{V}} \left(\text{div} \mathbf{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) d^3r, \quad \text{avec} \quad u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = u_E + u_B, \quad (4.53)$$

où nous retrouvons donc les densités d'énergie établies dans le cas statique. En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky, on peut par ailleurs récrire cette équation sous la forme

$$\mathcal{P} = - \frac{\partial}{\partial t} \int u d^3r - \oint_S \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.54)$$

où S est la surface fermée sortante qui entoure le volume \mathcal{V} . On procède alors par identification pour donner un sens physique à ces termes : la puissance fournie par le champ est la somme d'un flux sortant et de la dérivée d'une densité volumique :

- le vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$ est le courant d'énergie porté par le champ,
- la densité $u = u_E + u_B$ est la densité d'énergie électromagnétique.

La perte d'énergie par le champ, énergie fournie au milieu, est la somme d'une variation due à la modification de la densité d'énergie dans le volume \mathcal{V} et d'une variation due à un flux d'énergie sortant du volume \mathcal{V} .

1. C'est en général une hypothèse très fausse, mais si on considère des champs qui n'occupent qu'un domaine de fréquences restreint, il suffit que le milieu soit non dispersif sur ce domaine restreint seulement.

On obtient finalement le théorème de Poynting en constatant que les intégrales (4.51) et (4.53) sont égales quel que soit le volume \mathcal{V} . On peut donc écrire l'égalité des intégrales :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div} \mathbf{\Pi} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (4.55)$$

Cette équation constitue *l'équation locale de conservation de l'énergie*.

Milieux dispersifs L'analyse est bien plus complexe si l'on ne peut pas négliger la dispersion du milieu [cf. Jackson 6.8]. On se restreint dans ce cas à une analyse composante spectrale par composante spectrale, avec de possibles variations temporelles « lentes » des amplitudes spectrales, et on ne considère que des grandeurs moyennées sur une période. Les expressions restent malgré tout bien plus complexes que dans le cas précédent. La densité d'énergie électromagnétique effective s'écrit par exemple

$$u_{\text{eff}}(\omega_0) = \frac{1}{2} \left[\Re \left(\frac{d\omega\epsilon}{d\omega}(\omega_0) \right) \langle \tilde{E}^2(\omega_0) \rangle + \Re \left(\frac{d\omega\mu}{d\omega}(\omega_0) \right) \langle \tilde{H}^2(\omega_0) \rangle \right], \quad (4.56)$$

et il faut ajouter deux termes au théorème de Poynting :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\text{eff}}(\omega_0)}{\partial t} + \text{div} \mathbf{\Pi}(\omega_0) &= -\mathbf{j}(\omega_0) \cdot \mathbf{E}(\omega_0) \\ &\quad - \omega_0 \Im[\epsilon(\omega_0)] \langle \tilde{E}^2(\omega_0) \rangle - \omega_0 \Im[\mu(\omega_0)] \langle \tilde{H}^2(\omega_0) \rangle. \end{aligned} \quad (4.57)$$

4.3 QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET MOMENT CINÉTIQUE

Références

Jackson, sec 6.7

À l'instar de ce que nous avons fait pour l'énergie, il est possible d'écrire une loi de conservation pour la quantité de mouvement. On se limite ici à un calcul dans le vide que nous extrapolerons pour les champs dans les milieux.

La variation de quantité de mouvement transmise par le champ au milieu est donnée par la force de Lorentz. On écrit ainsi le principe fondamental de la dynamique²

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \int (\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \wedge \mathbf{B}) d^3r \quad (4.58)$$

2. On peut bien sûr faire la même chose dans un cadre purement relativiste. Voir [JMR, chap 4.3].



On remplace alors ρ par $\epsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E}$ et \mathbf{j} par $\operatorname{rot} \mathbf{B}/\mu_0 - \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$. Nous ne nous intéresserons en fait qu'à cette dérivée par rapport au temps. On écrit

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \wedge \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) - \mathbf{E} \wedge \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{E} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (4.59)$$

pour finalement obtenir

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \epsilon_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} d^3r \right) \\ &\quad + \epsilon_0 \int ((\operatorname{div} \mathbf{E}) \mathbf{E} - c^2 \mathbf{B} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{B} - \mathbf{E} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{E}) d^3r \end{aligned} \quad (4.60)$$

Cette équation prend la même forme que l'équation de conservation de l'énergie (4.54), le vecteur $\epsilon_0 \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}$ jouant alors le rôle de densité d'impulsion. Pour que l'analogie soit complète, il faut en revanche montrer que la seconde intégrale dans (4.60) s'écrit sous la forme d'un flux, le flux d'un tenseur. Ce tenseur est le courant de quantité de mouvement porté par le champ, l'équivalent du vecteur de Poynting pour la quantité de mouvement. On pourra se référer à [Jackson, 6.7] pour cette démonstration et l'expression du tenseur d'impulsion dont on pourra oublier l'expression. On retient en revanche l'expression de la *densité de quantité de mouvement*, notée \mathbf{g} :

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{\Pi}}{c^2}. \quad (4.61)$$

Cette expression reste valable dans les milieux. On retient ainsi que \mathbf{g} s'exprime aussi comme

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}}{c^2}. \quad (4.62)$$

Remarquons que cette densité de quantité de mouvement ne tient pas compte du mouvement des charges du milieu elles-mêmes, mais bien seulement de l'impulsion portée par les champs.

INTERPRÉTATION CORPUSCULAIRE

Références

Pérez, chap 29, II.8

Le lien (4.61) entre densité de quantité de mouvement et vecteur de Poynting se retrouve facilement via une interprétation corpusculaire des ondes électromagnétiques.

Considérons en effet une onde plane de pulsation ω , de vecteur d'onde \mathbf{k} , associée à une densité volumique de photons n_γ . La densité volumique d'énergie est alors

$$u = n_\gamma \times \hbar\omega. \quad (4.63)$$

Si on considère une surface orientée infinitésimale quelconque de vecteur $d\mathbf{S}$, l'énergie $d\mathcal{E}$ qui traverse cette surface sur un temps dt est l'énergie contenue dans le cylindre de surface dS et de longueur $c dt$, les photons se propageant tous dans la direction de \mathbf{k} à la vitesse c :

$$d\mathcal{E} = u \times c dt \times d\mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{k}}{k} = (n_\gamma, \hbar\omega c) \cdot d\mathbf{S}, \quad (4.64)$$

où $\mathbf{c} = ck/k$ est le vecteur vitesse des photons de l'onde plane. Puisque, par ailleurs, $d\mathcal{E} = \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S}$ quel que soit $d\mathbf{S}$, on en déduit l'égalité

$$\mathbf{\Pi} = n_\gamma \hbar\omega c. \quad (4.65)$$

Puisque la quantité de mouvement d'un photon est donnée par $\hbar\mathbf{k} = (\hbar\omega/c^2)\mathbf{c}$, la densité volumique de quantité de mouvement s'écrit directement comme

$$\mathbf{g} = n_\gamma \frac{\hbar\omega}{c^2} \mathbf{c} = \frac{\mathbf{\Pi}}{c^2}. \quad (4.66)$$

MOMENT CINÉTIQUE

Le champ électromagnétique porte aussi un moment cinétique. Sa valeur dépend de l'hélicité de l'onde, déterminée par la polarisation de l'onde [cf. TDs d'Optique]. En prenant comme « axe de quantification » la direction de propagation de l'onde,

- une polarisation σ^+ correspond à une hélicité $+1$ et à un moment cinétique de valeur $+\hbar$,
- une polarisation σ^- correspond à une hélicité -1 et à un moment cinétique de valeur $-\hbar$.

De façon générale, on peut calculer l'hélicité moyenne d'une onde à partir du champ électrique en notation complexes :

$$h = \frac{\underline{\mathbf{E}} \wedge \underline{\mathbf{E}}^*}{\|\underline{\mathbf{E}}\|^2}. \quad (4.67)$$

Intrinsèquement, cette hélicité s'apparente à un spin pour le photon, un spin 1 mais dont les projections ne peuvent prendre que les valeurs ³ $+1$ et -1 . Une polarisation



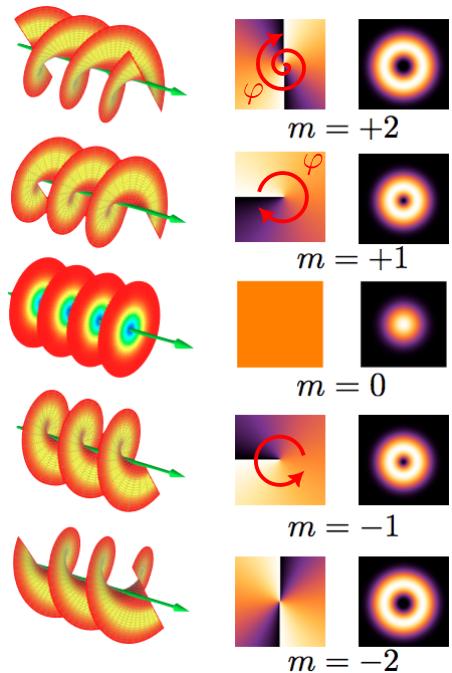


FIGURE 4.3 – Profil spatial 3D de modes de Laguerre-Gauss d’ordre 0, ± 1 et ± 2 et leurs profils de phase et d’intensité dans un plan orthogonal à la direction de propagation. Le moment cinétique porté par ces modes est $m \hbar$.

linéaire, dont le moment cinétique moyen est nul, correspond en fait à une assemblée de photons dont la moitié porte une hélicité > 0 et l’autre une hélicité < 0 .

Le moment cinétique de l’onde dépend également du profil d’intensité lui-même. En effet, une onde électromagnétique peut aussi porter un moment cinétique orbital, qui correspond à une rotation de phase autour de la direction de propagation (voir figure 4.3). Les modes de Laguerre-Gauss portent ainsi un moment cinétique, même pour une polarisation linéaire.

3. Donc en particulier pas la valeur 0, contrairement à ce qu’on attendrait pour un spin « usuel ».