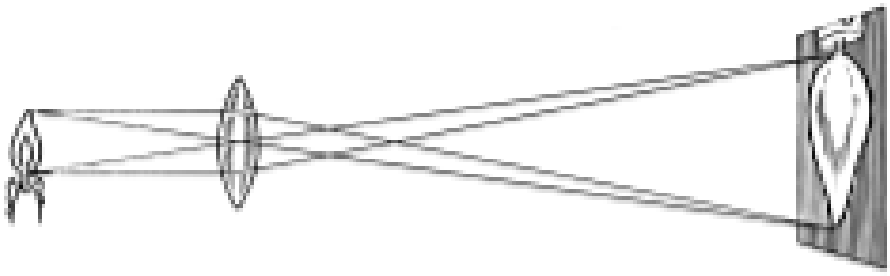
Optique

30 August 2024 19:08

TP_Optique

Travaux pratiques d'optique

Agrégation de Physique



École normale supérieure — Lyon 2024-2025
version du 19 août 2024

Préambule

Ce fascicule contient les énoncés destinés à vous guider pendant les travaux pratiques d'optique de la première série de TP. La plupart des manipulations présentées dans ce fascicule sont importantes, et nous vous conseillons de les travailler avec soin. Elles vous seront utiles à la fois lors des montages et pour comprendre la physique sous-jacente. Celles qui sont moins importantes sont signalées comme telles. Cependant, ce fascicule n'est pas exhaustif, et il est tout à fait possible (et même conseillé) de développer de nouvelles expériences au cours de l'année. Vous pouvez alors demander aux responsables, encadrants et techniciens des conseils pour concevoir et monter de nouvelles expériences pertinentes.

Une séance de TP se prépare à l'avance. Il faut arriver en séance de TP en sachant quelles expériences vous voulez réaliser, pourquoi vous les faites et avoir compris au minimum la théorie sous-jacente. Le jour de l'oral, les seules ressources auxquelles vous aurez accès de façon certaine sont les ouvrages qui seront envoyés au lycée où se déroulent les épreuves. Il est donc extrêmement important que vous ne vous limitiez pas à la lecture de ce document, mais que vous connaissiez les livres dans lesquels trouver la description de ces expériences et vous portiez un regard critique sur celles-ci. Ce fascicule est une base de travail mais les manipulations que vous allez présenter le jour J doivent être personnelles, abouties et réfléchies.

Ce fascicule est une sélection de manipulations qui peut aussi contenir quelques erreurs ou oublis. Toute suggestion d'ajouts, de corrections, ... est la bienvenue ; merci de contacter pour cela le responsable des TP. Les futures promotions d'agrégatifs vous en sauront gré.

Bon travail à tous,

Christophe Winisdoerffer, responsable de la préparation à l'agrégation de Physique

C'est à Arnaud Le Diffon, Étienne Thibierge, Sabin Guichardaz et Michel Fruchart qu'il revient d'avoir conçu la version originale de ce fascicule. Qu'ils en soient ici tout particulièrement remerciés. Merci également à tous ceux, étudiants ou encadrants, qui, d'une façon ou d'une autre, ont permis d'apporter des améliorations successives à ce document.

Mise en garde

Les TP décrits dans ce fascicule ont, comme finalité, de permettre aux étudiants préparant l'agrégation non seulement de développer leurs compétences expérimentales, mais également d'approfondir leur compréhension de la physique. Il s'agit donc d'un objectif de formation beaucoup plus large que ne pourraient l'être des "fiches" adaptées à chaque montage apparaissant au concours. C'est la raison pour laquelle le lecteur est souvent renvoyé vers des références extérieures (pour la description précise d'un protocole, la justification d'une formule, ...), lui permettant ainsi d'élargir sa culture bibliographique, ou que des questions sont posées sans que les réponses ne soient données dans l'énoncé. Il appartient ensuite à chacun d'identifier, pour l'ensemble des expériences proposées, dans quel(s) contexte(s) elles pourraient être exploitées. Évidemment, cela nécessite de la part de chaque étudiant d'être acteur de sa propre formation, en préparant en amont chaque séance de TP qui, encore une fois, ne saurait se limiter à seulement suivre un protocole...

À l'issue de ce travail, les étudiants auront développé, en plus de leurs compétences expérimentales, un point de vue élargi sur différents domaines de physique. Cela devrait leur permettre d'envisager de façon sereine l'épreuve du "Montage" de l'agrégation, en consultant éventuellement des ressources plus spécifiques mises à disposition sur le site du concours. Mais au-delà de cet exercice, c'est l'ensemble de leur culture (théorique et expérimentale) qui profitera du travail accompli, **avant, pendant et après** chaque séance de TP.

Table des matières

TP 1 – Optique géométrique et instruments d'optique 7
1 Formation d'une image 7
2 Focométrie 7
3 Aberrations 11
4 Étude d'un instrument d'optique : exemple de la lunette astronomique 12
A Obtenir des images de bonne qualité 16
TP 2 – Physique des interférences 23
1 Interférences par division du front d'onde 23
2 Interférences par division d'amplitude, interféromètre de Michelson 25
3 Interférences en lumière polarisée 29
4 D'autres expériences relativement simples (en seconde lecture) 29
5 Interféromètre de Fabry-Pérot (en seconde lecture) 30
TP 3 – Mesures interférométriques 33
1 Mesure d'indices et d'épaisseurs 33
2 Mesures spectroscopiques 35
3 Spectrométrie à l'aide d'une cavité d'analyse Fabry-Pérot 37
4 Mesures possibles avec un interféromètre de Fabry-Pérot (en seconde lecture) 38
TP 4 – Diffraction 39
1 Différents régimes de diffraction 39
2 Diffraction de Fresnel 40
3 Diffraction de Fraunhofer 41
4 Optique de Fourier 42
5 Résolution des instruments d'optique, critère de Rayleigh 44
TP 5 – Spectroscopie 45
1 Observation d'un spectre sur un écran 45
2 Spectrométrie et applications 48
A Fonctionnement et calibration d'un spectromètre 51
TP 6 – Lumière polarisée et biréfringence 53
1 Polarisation de la lumière 53
2 Biréfringence linéaire 56
3 Biréfringence circulaire 58
TP 7 – Photorécepteurs 61
1 Caractéristiques d'un photorécepteur 61
2 Photodiode 62
3 Étude de la linéarité 65
4 Étude de la réponse spectrale 65
5 Étude de la réponse dynamique 67
6 D'autres expériences (en seconde lecture) 68
7 Mesure de la fréquence de lecture 69
8 Mesure de la largeur d'un pixel 70
TP 8 – Compléments sur les lasers 71
1 Propriétés spatiales 71
2 Propriétés spectrales 72

TP 1 – Optique géométrique et instruments d'optique

Dernière modif. : 2020/08/18 par ???

Pendant la séance de TP, vous aurez besoin du livre « Optique expérimentale » du collectif Sextant [1] et du livre « Expériences d'optique » de Roger Duffait [10]. Vous pouvez emprunter ces livres en BU agreg pour la durée de la séance, ou en BU Marie Curie pour une durée plus longue.

Objectifs

L'objectif général du TP est de démarrer l'année en douceur par des expériences assez simples à mettre en œuvre. Pendant la séance, vous allez

- mesurer une distance focale par autocollimation et par une méthode utilisant une régression linéaire, ce qui est une première occasion de prendre en main votre futur logiciel préféré, à savoir Regressi ;
- observer les aberrations des lentilles et comprendre leur origine ;
- construire un instrument d'optique modèle et étudier ses performances, tant qualitativement que quantitativement.

Les expériences des deux premières parties sont d'intérêt général en optique. Les expériences de la dernière partie peuvent quant à elles être présentées dans le montage MP07 (Instruments d'optique), et vous permettront d'avoir un peu de recul expérimental pour préparer la leçon LP 32 (Microscopies optiques).

Attention ! L'utilisation d'une lampe Quartz-Iode nécessite systématiquement de la faire suivre d'un filtre anticalorique ! Ces lampes chauffent énormément (pour s'en rendre compte, il suffit de condenser la lumière sur sa main). L'oubli du filtre peut conduire à détériorer les différentes optiques utilisées (achromats, miroirs du Michelson, polariseurs, etc.).

1 Formation d'une image

Savoir réaliser correctement l'image d'une fente ou d'un trou est un prérequis à presque toutes les expériences d'optique. En cas de besoin, n'hésitez pas à demander à un encadrant. Les méthodes permettant d'y parvenir sont présentées en détail dans le complément A (p. 16) ou dans les livres de Sextant [1, p. 16] et R. Duffait [10, p. 33].

- Avec une lampe QI (suivie d'un anticalorique) et une lentille bien choisie, réaliser l'image d'une fente sur un écran. L'image doit être nette et uniformément éclairée.
- Sans déplacer l'écran, comment changer de lentille pour réaliser une image plus grande ?
- Sans changer de lentille, comment faut-il déplacer l'écran pour réaliser une image plus grande ?

2 Focométrie

Pour déterminer la distance focale d'une lentille, plusieurs méthodes sont possibles et donnent lieu à des résultats plus ou moins précis. Faisant partie intégrante du programme, ces méthodes sont détaillées dans la plupart des livres de première année de CPGE, par exemple celui de M.N. Sanz [21, ch. 13].

2.1 Méthode d'autocollimation

Le premier usage de cette méthode n'est pas tant la focométrie que la formation à l'infini de l'image d'un objet. Il s'agit de placer précisément l'objet dans le plan focal objet d'une lentille. Se contenter de placer l'objet à la distance focale annoncée est en effet trop imprécis pour former des images de bonne qualité. Une fois la lentille placée, on peut estimer l'ordre de grandeur de sa distance focale en mesurant la distance la séparant de l'objet. La méthode est décrite par Sextant [1, p. 21].

- Réaliser grossièrement le montage décrit figure 1.

  > *Il est préférable de prendre pour objet une grille, un trou ou une diapositive simple, ainsi la netteté de l'image est facile à contrôler et le grandissement aisé à estimer. Une fois le réglage fait, il suffit de fixer les pieds sur le banc optique pour changer ensuite l'objet.*

- Accoler le miroir à la lentille puis les déplacer conjointement jusqu'à ce que l'image de l'objet se forme dans le même plan que lui. Le grandissement doit alors valoir 1.

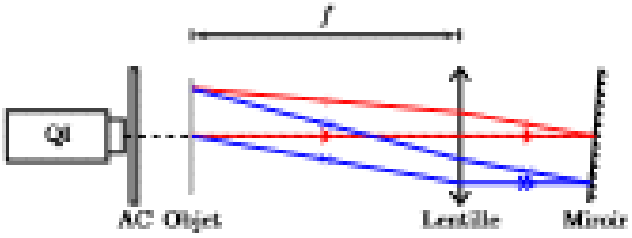


Figure 1 – Schéma de principe de l'autocollimation. L'objet étant situé dans le plan focal objet, l'image en sortie de lentille est à l'infini. Le miroir inverse géométriquement ce faisceau, et ainsi, pour le trajet retour, le faisceau incident provient de l'infini. En retraversant la lentille, les rayons convergent dans le plan focal, et donc sur l'objet. Le miroir doit être légèrement incliné par rapport à l'axe optique pour que l'image ne se superpose pas complètement à l'objet.

> *Attention, l'image de l'objet doit bien réaliser sur l'objet lui même et non pas sur une monture qui ne serait pas dans le même plan que lui.*

Déplacer lentement le miroir le long de l'axe optique. Si l'image reste nette et de même taille que l'objet, ce dernier est situé dans le plan focal objet de la lentille.

> *Cette étape permet de s'assurer que l'image est bien à l'infini.*
>
> *Pour mesurer la focale, il faut être vigilant aux mesures de distance entre les éléments. En particulier, l'utilisation de pieds pour les fixer sur un banc optique peut induire une erreur de mesure qu'il faut prendre en compte. Remarquer toutefois que la principale source d'incertitude sur les mesures est l'existence d'une plage de netteté de plusieurs millimètres pour laquelle l'image observée semble nette.*

2.2 Vérification de la relation de conjugaison (en deuxième lecture)

Cette expérience permet de mesurer la distance focale d'une lentille en vérifiant la relation de conjugaison avec origine au centre d'une lentille mince. La méthode est décrite par Sextant [1, p. 22].

2.2.1 Rappels théoriques

En notant O le centre de la lentille, A un point de l'axe optique et A' son image à travers la lentille, on rappelle la relation de conjugaison de Descartes

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA}. \tag{1}$$

Avec les notations définies figure 2, et en utilisant des distances géométriques, il vient pour une lentille convergente

$$\boxed{\frac{1}{L} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{L'}}. \tag{2}$$

Nous allons exploiter cette relation pour la lentille d'étude et en déduire sa distance focale.

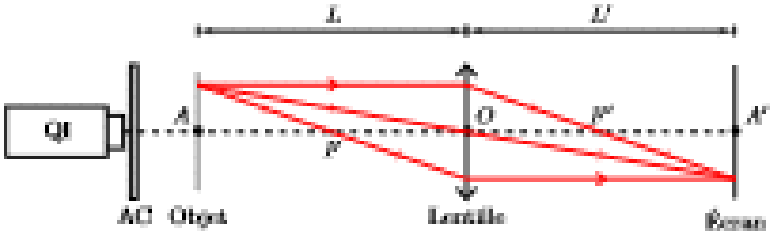


Figure 2 – Schéma de principe de mesure par méthode de conjugaison. On note F (resp. F') le foyer objet (resp. image) de la lentille. La distance focale algébrique de la lentille est notée f'. Les distances géométriques L et L' sont reliées par la relation de conjugaison (2).

2.2.2 Protocole

- Réaliser le montage décrit figure 2 en fixant précisément la distance objet-lentille L.

> *Il faut nécessairement prendre $L > f'$, sinon l'image est virtuelle et son observation impossible.*

- Déplacer l'écran pour trouver la position de l'image.

> *Comme pour l'autocollimation, l'incertitude sur la mesure de L' est généralement dominée par l'incertitude d'appréciation de la netteté, car la plage de netteté de l'image est assez grande. Il faut donc bien prendre soin de mesurer les positions extrêmes où la figure à l'écran semble nette. L'écart entre ces positions donne l'incertitude de mesure.*
>
> *Pour mesurer la focale, il faut être vigilant aux mesures de distance entre les éléments. En particulier, l'utilisation de pieds pour les fixer sur un banc optique peut induire une erreur de mesure qu'il faut prendre en compte.*

- Reproduire le processus pour différentes valeurs de L, et faire la régression linéaire appropriée pour obtenir la valeur de f.

2.2.3 Analyse des erreurs

- ▷ Estimer l'incertitude sur la distance focale résultant d'une seule mesure (un seul L) ? Comparer à la méthode par autocollimation.
- ▷ Quelle est l'incertitude sur la distance focale en utilisant plusieurs mesures ? (celle-ci vous est donnée numériquement par le logiciel Regressi, la formule permettant de la calculer vous sera démontrée en cours d'analyse statistique et traitement du signal)

Conclusion importante et très générale : exploiter plusieurs mesures permet d'obtenir un résultat bien plus précis qu'en exploiter une seule.

2.3 Méthode de Bessel

La méthode de Bessel exploite à nouveau la relation de conjugaison, mais d'une façon plus subtile. Elle permet une mesure très précise de la distance focale. La méthode est décrite par exemple dans le livre de M.N. Sanz [21, p. 303].

2.3.1 Analyse théorique

Modifions un peu les notations : la distance notée L correspond maintenant à la distance géométrique fixée par l'expérimentateur entre l'objet et l'écran. Cherchons les positions de la lentille qui conjuguent ces deux plans. Notons x la distance géométrique lentille-objet correspondant à l'une de ces positions. La relation (2) s'écrit alors

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{f'} = \frac{1}{L-x}, \tag{3}$$

que l'on peut réécrire sous la forme d'une équation du second degré

$$x^2 - Lx + f'L = 0. \tag{4}$$

Pour que des positions de lentille conjuguant l'objet et l'écran existent, cette équation doit admettre des solutions réelles. Son discriminant $L(L-4f')$ doit donc être positif. On retiendra que pour que deux plans soient conjugués par une lentille donnée, il faut qu'ils soient séparés d'une distance supérieure à quatre fois la distance focale de celle-ci.

> *Ce critère est essentiel pour choisir une lentille adaptée à l'encombrement d'un montage.*

Dans ce cas, deux positions de la lentille conjuguant l'objet et l'écran existent. Ces positions sont représentées figure 3. La distance qui les sépare s'écrit

$$\Delta x = \sqrt{L(L-4f')}, \tag{5}$$

d'où

$$\boxed{L^2 - \Delta x^2 = 4f'L.} \tag{6}$$

En mesurant L et Δx, il est aisé d'en déduire f.

2.3.2 Protocole

- Fixer la distance entre l'objet et l'écran puis chercher les deux positions de la lentille qui conjuguent ces deux positions.

> *Comme pour les méthodes précédentes, il faut prendre soin de mesurer la plage de positions qui, selon le jugé de l'expérimentateur, conjuguent les deux plans.*
>
> *Pour mesurer la focale, il faut être vigilant aux mesures de distance entre les éléments. En particulier,*

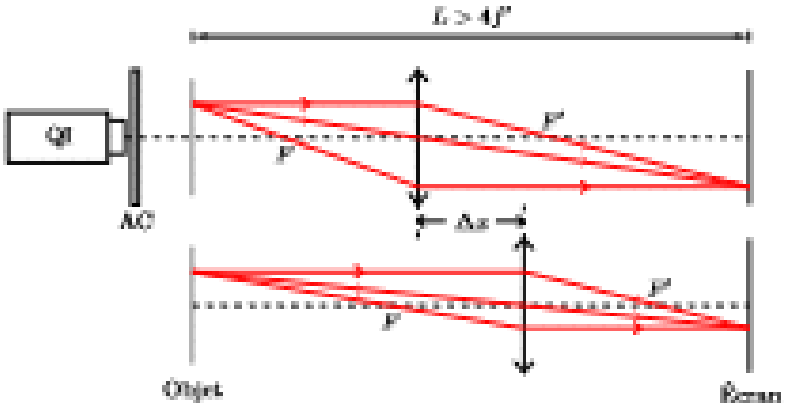


Figure 3 – Schéma de principe de la méthode de Bessel. Pour une distance L donnée entre l'objet et l'écran, supérieure à quatre fois la distance focale de la lentille, il existe deux positions séparées de Δx qui conjuguent l'écran et l'objet.

> *l'utilisation de pieds pour les fixer sur un banc optique peut induire une erreur de mesure qu'il faut prendre en compte.*

- Reproduire le processus pour différentes valeurs de L, et réaliser la régression linéaire adéquate pour en déduire f.

2.3.3 Analyse des erreurs

- Estimer l'incertitude sur la distance focale résultant d'une seule mesure (un seul L) ? Comparer à la méthode par autocollimation.
- Quelle est l'incertitude sur la distance focale en utilisant plusieurs mesures ? (celle-ci vous est donnée numériquement par le logiciel Regressi, la formule permettant de la calculer vous sera démontrée en cours d'analyse statistique et traitement du signal)

Conclusion importante et très générale : exploiter plusieurs mesures permet d'obtenir un résultat bien plus précis qu'en exploiter une seule.

2.4 Cas particulier : méthode de Silbermann (en deuxième lecture)

Un cas particulier de la méthode de Bessel est celui où $L = 4f'$. Il n'existe alors qu'une seule position de la lentille qui conjugue l'écran et l'objet.

On déplace donc alternativement l'écran et la lentille de façon à ce que l'on ne puisse plus distinguer deux positions distinctes conjuguant l'objet et l'écran. Pour affiner le résultat, on bouge à nouveau l'écran et la lentille afin que la plage de netteté à l'écran soit la plus restreinte possible. La mesure de L permet alors d'obtenir la focale. La précision finale de la mesure sera au mieux celle de l'autocollimation et la méthode est fastidieuse à appliquer.

2.5 Petites focales et lentilles divergentes (en deuxième lecture)

Pour mesurer des petites distances focales comme celle d'un objectif de microscope (de l'ordre du centimètre), les méthodes présentées ici ne permettent pas d'atteindre une précision suffisante. On effectue alors des mesures de grandissement dans des conditions expérimentales judicieuses. Pour plus de détails, on pourra se référer aux méthodes décrites par Sextant [1, p. 23].

Nous n'avons traité que des lentilles convergentes, de focale positive. Pour les lentilles divergentes (de focale négative), on leur adjoint une lentille convergente de telle sorte que le doublet soit équivalent à une lentille convergente. La vergence du doublet étant la somme des vergences de chaque lentille, il faut choisir $f_{conv} < |f_{div}|$. On en mesure alors la distance focale par une des méthodes présentées ci-avant et on peut en déduire la focale recherchée.

3 Aberrations

Une lentille est constituée de deux dioptres sphériques de rayons de courbure R_1 et R_2. Lorsque l'un des deux rayons est infini, on parle de lentille plan-convexe ou plan-concave suivant le signe de l'autre rayon.

L'étude détaillée des aberrations des lentilles minces est proposée par Sextant [1, p. 37] et Duffait [10, p. 25]. Les protocoles sont résumés ici, mais vous êtes chaudement invités à vous servir de ces deux références pour monter les expériences. Les différents types d'aberrations sont très bien présentés, à grand renfort de photos, dans l'excellent livre de Sylvain Bonnet [15, ch. 6].

3.1 Aberrations géométriques

Un objet à l'infini n'est exactement conjugué avec le foyer de la lentille que pour un dioptre présentant un profil particulier (complexe à calculer), mais en aucun cas sphérique. Dans le cas d'un miroir "sphérique", le profil idéal serait parabolique par exemple. De plus, même si la relation de conjugaison est vérifiée pour l'infini et le foyer, elle ne l'est alors pas forcément pour un autre couple de plans orthogonaux à l'axe optique ... Les lentilles sont sphériques pour des raisons pratiques de fabrication, mais présentent nécessairement des défauts lorsqu'on s'éloigne des conditions de Gauss, i.e. lorsque la sphère s'éloigne de la surface idéale. Les défauts associés sont appelés aberrations géométriques.

3.1.1 Caustique

Les rayons lumineux traversant une lentille idéale éclairée sous incidence normale se croisent en un point unique, le foyer image. Dans le cas d'une lentille réelle, ils se croisent sur un ensemble de points contenus dans un volume fini. La lumière se concentre sur l'axe et sur la surface extérieure de ce volume, formant une figure géométrique appelée caustique. Cette caustique est séparée en deux nappes de taille finie : la nappe *tangentielle* et la nappe *sagittale*. Le foyer de la lentille est situé à l'extrémité de ces deux nappes.

- Faire converger la lampe QI sur un trou de 1 ou 2mm de diamètre (diaphragme à iris).
- Placer une lentille de grande ouverture assez loin du trou pour que l'éclairage soit presque parallèle. Typiquement, il faut que le faisceau lumineux recouvre toute la surface de la lentille. Utiliser un filtre coloré derrière le trou pour s'affranchir de l'aberration chromatique.

  > *Les lentilles plan-convexe Leybold de 20cm de focale et 11cm de diamètre conviennent très bien, côté plat face au trou.*

- Déplacer un écran derrière la lentille et visualiser les différentes figures observées qui sont des sections de la caustique de la lentille.

  > *La nappe tangentielle donne les anneaux lumineux, la nappe sagittale est responsable du centre lumineux.*

- Diaphragmer la lentille : l'extension longitudinale des deux nappes diminue rapidement. On tend vers une convergence du faisceau en un point qui est l'image paraxiale (i.e. dans les conditions de Gauss) du trou source.

3.1.2 Règle "plus plat plus près"

- Retourner la lentille (face plane vers l'image qui est plus près que la source), et observer de nouveau la caustique : est-elle plus ou moins étendue ?

Conclusion : pour minimiser les aberrations géométriques, la face la plus plane de la lentille doit être placée du côté où la lumière est la plus convergente, c'est-à-dire vers le plus proche de l'objet ou de l'écran.

3.1.3 Coma

Il existe dans la collection une lentille « spéciale coma » (P108.7), dont le profil a été spécialement dessiné pour corriger les autres aberrations et ne voir que l'aberration de coma. Avec une lentille usuelle, le risque est de confondre la coma avec une caustique déformée car vue de côté.

- Se placer dans le plan de l'image paraxiale et diaphragmer légèrement (diamètre 5cm).
- Incliner la lentille ou la faisant tourner autour d'un axe vertical.

  > *Le point brillant se décentre par rapport à l'anneau de forme elliptique allongé horizontalement et la tache prend une forme évoquant celle d'une comète.*

3.1.4 Astigmatisme

- Diaphragmer encore la lentille (2 cm) et l'incliner davantage : la coma se transforme en un segment horizontal. En déplaçant l'écran du côté de la lentille, on trouve une autre position pour laquelle la tache est un segment vertical.

3.1.5 Distorsions

- Eclairer un objet étendu (grille de pas 1 cm et de 5 à 10 cm de côté) poloïdé d'un verre dépoli.
- Former son image avec la lentille précédente.
- Placer un diaphragme contre la lentille : le contraste de l'image, homothétique de l'objet, s'améliore.
- Déplacer le diaphragme longitudinalement : s'il est placé après la lentille, on observe une distorsion en croissant ou "coussinet" ; s'il est placé avant la lentille, on observe une distorsion dite en "barillet".

> *Une construction géométrique permet de comprendre ces effets si l'on se rappelle qu'une lentille convergente est trop convergente pour les rayons marginaux qui passent loin de l'axe optique.*

3.2 Aberrations chromatiques

Les considérations précédentes sur les aberrations géométriques ne tiennent pas compte de la dispersion des verres constituant les lentilles. L'indice dépendant de la longueur d'onde, les propriétés optiques vont également varier suivant la longueur d'onde employée : ce sont les aberrations chromatiques.

3.2.1 Mise en évidence

- Revenir à la situation expérimentale utilisée pour visualiser la caustique en orientant et en diaphragmant la lentille de manière à diminuer les aberrations géométriques.
- Placer successivement des filtres colorés (rouge, vert, bleu) et déterminer l'emplacement de l'image paraxiale.

> *Elle est plus proche de la lentille pour les courtes longueurs d'onde.*

- Faire ensuite l'image du trou en utilisant non plus une lentille simple mais un doublet achromatique : l'image n'est plus irisée.

3.2.2 Analyse quantitative

La distance focale d'une lentille de rayons de courbure algébriques R_1 et R_2 est donnée par la relation [14]

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) . \tag{7}$$

On en déduit des formules de conjugaisons que pour une image réelle (distance lentille-image $\overline{OA'} > f$), les variations de l'indice entraînent une variation de cette distance :

$$\Delta(\overline{OA'}) = -\frac{\overline{OA'}^2}{f(n-1)}\Delta n . \tag{8}$$

- Obtenir une estimation de la dispersion Δn du verre dans lequel la lentille est formée.

> *Au vu de l'équation (8), le phénomène est d'autant mieux visible que $\overline{OA'}$ est grand.*

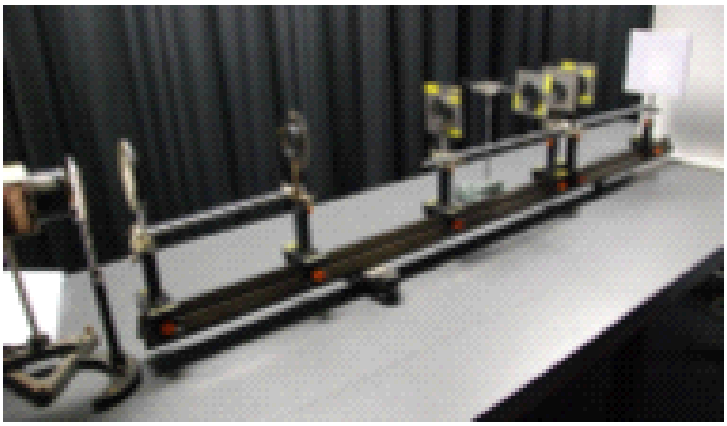
4 Étude d'un instrument d'optique : exemple de la lunette astronomique

Une lunette astronomique est un instrument afocal, un objet à l'infini donnant une image à l'infini, formé de deux lentilles convergentes dont les foyers sont confondus

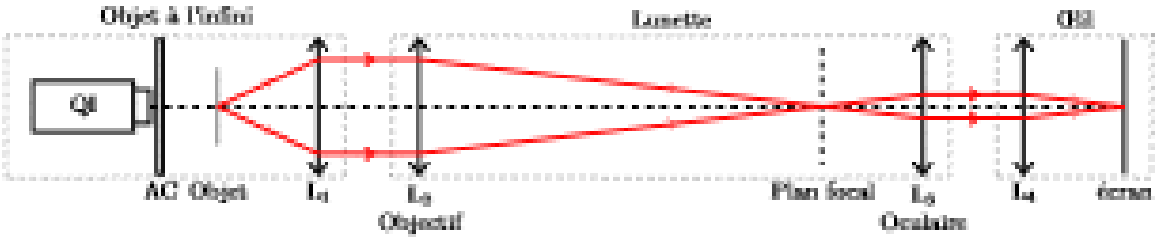
- l'objectif (côté *objet*) est une lentille de longue focale par où entre la lumière ;
- l'oculaire (côté *œil*) est une lentille de courte focale par où sort la lumière.

Une étude détaillée de la lunette astronomique est proposée par Duffait [10, p. 101]. Un protocole d'étude est proposé dans ce fascicule, mais il est chaudement recommandé d'utiliser des livres pour monter les expériences. Par ailleurs, S. Houard [15] présente de façon particulièrement lumineuse (sans jeu de mot, ou p'têt que si quand même) les propriétés des instruments d'optique.

4.1 Réalisation expérimentale d'une lunette astronomique sur banc optique



(a) Photographie de la lunette d'étude



(b) Schéma de principe de la lunette

Figure 4 – Photographie et schéma de la lunette astronomique. De gauche à droite : un objet (grille ou diapositive d'une photo), disposé dans le plan focal objet d'une lentille convergente (L_1) et solidaire de cette dernière, constitue l'objet à l'infini ; deux lentilles solidaires forment la lunette (un verre de champ est intercalé entre l'objectif (L_2) et l'oculaire (L_3), dont nous expliquerons plus loin l'utilité) ; une lentille (L_4) et un écran, situé dans le focal image (L_4), jouent le rôle d'œil simplifié, où la lentille correspond au cristallin et l'écran à la rétine. Ces deux derniers éléments sont rendus également solidaires.

- **Réalisation d'un objet à l'infini :** placer l'objet dans le plan focal objet d'une lentille L_1 par auto-collimation.

  > *On choisit la monture de L_1 suffisamment grande pour que le faisceau lumineux en sortie d'objet éclaire l'intégralité de la monture de l'objectif (lentille L_2). Ceci permet par la suite de faire varier l'ouverture du diaphragme d'ouverture en positionnant un diaphragme devant la monture de l'objectif. La focale est choisie pour minimiser l'encombrement. Une fois l'objet à l'infini créé, rendre solidaires la lentille et l'objet à l'aide d'une barre et les fixer sur le banc définitivement.*

- **Réalisation de l'œil :** l'œil est construit à l'aide d'un écran placé dans le plan focal image d'une lentille L_4. Ces deux éléments doivent être rendus solidaires également, pour faciliter les déplacements de l'œil simplifié sur le banc optique.

  > *Pour s'assurer d'être dans le plan focal de la lentille, il faut d'une part que l'image de l'objet à l'infini soit nette sur l'écran de l'œil simplifié, et d'autre part que toute translation de l'œil simplifié sur le banc optique n'affecte pas la netteté de l'image.*

- **Réalisation d'une lunette :** Prendre une lentille L_2 pour l'objectif et L_3 pour l'oculaire. Pour avoir un grossissement supérieur à 1, il faut choisir $f_2' > f_3'$. Construire un système afocal entre l'objet et l'œil en faisant correspondre le plan focal image de L_2 avec le plan focal objet de L_3. La lunette est alors réalisée.

  > *Le système afocal est réalisé quand l'image sur l'écran est nette.*
  >
  > *Vérifier que les longueurs entre les objets correspondent aux focales des lentilles. Si ce n'est pas le cas, vérifier tous les éléments du montage.*

4.2 Mesure du grossissement

4.2.1 Définition et rappel

L'objet et l'image à travers une lunette sont tous deux situés à l'infini. Par conséquent, le grandissement transversal n'a aucun sens ici. La grandeur adaptée à ce cas de figure s'appelle le grossissement optique G, ou grandissement angulaire. Avec les notations de la figure 5, il est défini par

$$G = \frac{\theta'}{\theta}. \tag{9}$$

En se plaçant dans les conditions de Gauss (approximation des petits angles), on peut exprimer le grossissement en fonction des distances focales de l'objectif et de l'oculaire,

$$\boxed{G = -\frac{f'_{obj}}{f'_{oc}}} \tag{10}$$

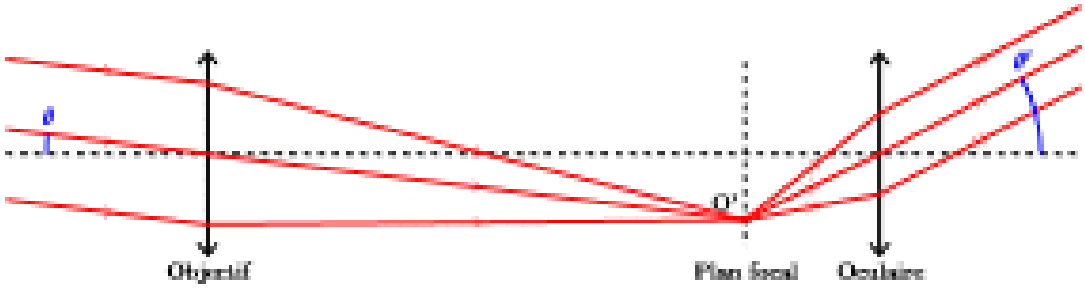


Figure 5 – Schéma définissant le grossissement.

Prenons un objet à l'infini dont l'image sur l'écran a une taille ℓ_0 sans lunette et une taille ℓ avec la lunette. Dans les conditions de Gauss, on trouve alors

$$G = \frac{\ell}{\ell_0}. \tag{11}$$

Nous utilisons dans la suite cette dernière relation pour vérifier expérimentalement l'expression du grossissement donnée par l'équation (10).

4.2.2 Protocole

- Choisir un objectif et un oculaire de distances focales connues et mesurer le grossissement en utilisant la relation (11).
- Si le temps le permet (les parties suivantes sont plus importantes), on peut répéter la mesure précédente pour différents jeux d'objectifs et d'oculaires.

> *Une grille a par exemple l'avantage de donner un motif périodique, qui permet de réduire les incertitudes. Attention aux aberrations qui pourraient fausser la mesure.*

4.3 Diaphragmes et mailles

> *Les notions de diaphragme et surtout leur illustration expérimentale, abordées dans cette section et la suivante, sont subtiles et les observations peuvent facilement être mal interprétées. Ne pas hésiter à faire appel aux encadrants et à poser des questions en cours d'optique !*

4.3.1 Identification des diaphragmes

Dans une lunette astronomique réelle, la monture de l'objectif joue le rôle de diaphragme d'ouverture et contrôle la luminosité de l'image. En revanche, la monture de l'oculaire joue le rôle de diaphragme de champ et contrôle le champ visible de l'image. C'est également le cas sur la lunette modèle construite sur banc optique dès lors que les montures des lentilles jouant le rôle d'objectif et d'oculaire ont un diamètre comparable. Attention lorsque vous placerez des diaphragmes devant lesdites lentilles : si l'un des diaphragmes est beaucoup plus fermé que l'autre, il se peut qu'il devienne à la fois diaphragme d'ouverture et diaphragme de champ.

- Placer deux diaphragmes à iris contre l'objectif et l'oculaire et montrer leur rôle distinct sur l'image définitive : l'un contrôle la luminosité de l'image (ouverture), l'autre le champ (partie de l'objet visible à travers l'instrument).

> *Les conjugués du diaphragme d'ouverture dans les différents espaces (objet ou image) sont appelés pupilles. Les conjugués du diaphragme de champ sont nommés lucarnes.*

4.3.2 Diaphragme d'ouverture et cercle oculaire

Le diaphragme d'ouverture dans un système optique est par définition le diaphragme qui limite la luminosité de l'image. Ce diaphragme peut être un diaphragme placé à dessein pour contrôler la quantité de lumière entrant dans l'instrument, ou plus généralement la monture d'un élément optique. Pour la lunette, il s'agira de la monture de l'objectif. Le lecteur intéressé par les différentes notions de diaphragme d'ouverture et de champ, de pupilles d'entrée et de sortie, ainsi que de lucarnes d'entrée et de sortie, peut consulter avec profit les ouvrages de Luc Dettwiller [9] et bien sûr celui de Sylvain Bouard [15].

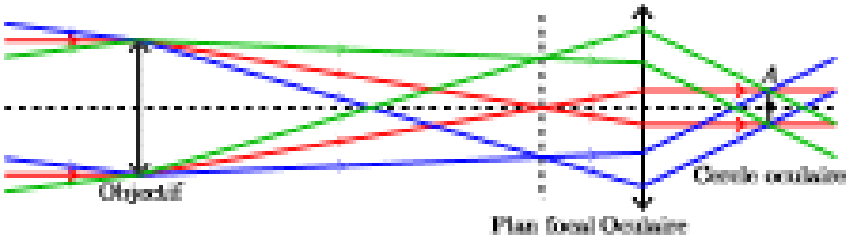


Figure 6 – Schéma décrivant la construction géométrique du cercle oculaire.

Le cercle oculaire est l'image géométrique de la monture de l'objectif par l'ensemble des éléments optiques qui le suivent, réduits ici au seul oculaire. Étant donné que l'objectif joue le rôle de diaphragme d'ouverture dans la lunette astronomique, le cercle oculaire est la pupille de sortie du système optique. Par un calcul géométrique, on obtient la position du cercle oculaire, représentée par le point A, par rapport au centre de l'oculaire,

$$\overline{O_{oc}A} = (f'_{oc} + f'_{obj})\frac{f'_{oc}}{f'_{obj}}, \tag{12}$$

et le diamètre du cercle oculaire D_{CO} est lié au diamètre du diaphragme d'ouverture D_{DO} par la relation

$$\boxed{D_{CO} = \frac{D_{DO}}{G}.} \tag{13}$$

Concrètement, le cercle oculaire est à l'endroit où la section du faisceau lumineux après l'oculaire est la plus petite, la plus brillante et la plus nette. Il faudra placer la lentille de l'œil simplifié systématiquement au niveau du cercle oculaire pour bénéficier d'une observation optimale.

- Prendre un objet diffusant, par exemple un verre dépoli, pour augmenter la luminosité transmise et ne pas avoir à se soucier d'éventuelles images intermédiaires de l'objet initial.
- Mesurer la position du cercle oculaire et comparer à la formule théorique.

> *Pour trouver le cercle oculaire, déplacer un écran ou une feuille de papier derrière la lunette. L'image formée en aval de la lunette qui sera la plus petite, la plus nette et la plus lumineuse, constitue le cercle oculaire.*

- Mesurer le diamètre du cercle oculaire correspondant au diamètre fixe d'un diaphragme placé devant l'objectif, qui joue alors le rôle de diaphragme d'ouverture de diamètre modifiable.

> *On place un diaphragme accolé à l'objectif pour contrôler le flux lumineux d'entrée dans le système optique et piloter la taille du diaphragme d'ouverture. Pour mesurer le diamètre du diaphragme, on peut d'abord fixer une longueur sur un pied à coulisse puis refermer le diaphragme autour.*

4.3.3 Diaphragme de champ et verre de champ

On peut améliorer l'instrument en plaçant dans le plan de l'image intermédiaire une lentille convergente de grand diamètre ($f \simeq 15$cm). Le grossissement de la lunette n'est pas modifié et le cercle oculaire est rapproché de l'oculaire. Cette lentille supplémentaire est le verre de champ. Le fonctionnement du verre de champ est expliqué à l'aide de schémas figure 7.

- Placer un diaphragme de champ et un verre de champ au niveau de l'image intermédiaire et observer l'effet sur l'image. Attention à bien replacer l'œil au cercle oculaire après avoir placé le verre de champ pour maximiser la luminosité de l'image.

> *Pour notre lunette, le fait de ne pas placer le verre de champ sur l'image intermédiaire a un impact apparent sur le grossissement de la lunette. En réalité, le système global n'est plus afocal et la notion de grossissement n'est plus adaptée au système car les rayons en sortie ne sont plus parallèles entre eux, pour une inclinaison donnée. Le verre de champ sera correctement placé lorsque l'image sera la même taille avec et sans verre de champ.*

4.4 Autres instruments d'optique

La lunette astronomique est un exemple d'instrument d'optique particulièrement bien adapté à la mise en évidence des diaphragmes et lunettes. Ce ne sont néanmoins pas toujours les caractéristiques les plus intéressantes à étudier! Les notions de plans principaux ou de profondeur de champ ne sont par exemple pas pertinentes pour caractériser une lunette. Pour les mettre en évidence, étudier d'autres instruments est nécessaire. Parmi eux, mentionnons l'objectif photographique [1, p. 31] [10, p. 113] et le microscope [1, pp. 30 et 50] [11, p. 191] (pour les deux, voir aussi [15]) qui se prêtent bien à une étude sur banc optique.

Si le temps est limité en fin de TP pour une étude exhaustive, une étude sommaire d'un appareil photo modélisé par une lentille simple peut être intéressante.

- Visualiser et interpréter la profondeur de champ et diaphragme d'ouverture est intuitif (l'interprétation fait appel à la résolution du récepteur).

Complément A – Obtenir des images de bonne qualité

A.1 Choisir une lentille de projection

A.1.1 Choisir la distance focale

Considérons la situation représentée figure 8. Un objet AB, réel au sens optique du terme, est situé à une distance D d'un écran où l'on en forme l'image $A'B'$ avec une lentille convergente de distance focale image f'. L'image étant formée sur un écran, il s'agit d'une image réelle. Cherchons où placer la lentille pour assurer la conjugaison.

Soit $x > 0$ la distance entre l'objet et la lentille. En vertu de la loi de conjugaison de Descartes [14, 15],

$$\frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}\,. \tag{14}$$

Il s'agit donc de trouver les solutions de cette équation, qui s'écrit sous la forme d'une équation du second degré de discriminant $D(D-4f')$. Celui-ci doit être positif pour que l'équation admette des solutions réelles. Ainsi, une lentille ne peut former l'image d'un objet sur un écran situé à une distance D de l'objet que si sa focale f' est telle que

$$\boxed{f' \leq \frac{D}{4}\,.} \tag{15}$$

Ce critère est extrêmement utile en pratique, et il faut toujours l'avoir à l'esprit au moment de choisir une lentille. En supposant cette contrainte respectée, deux positions symétriques par rapport au milieu du segment objet – écran permettent d'assurer la conjugaison :

$$x_\pm = \frac{D}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{D(D-4f')}\,. \tag{16}$$

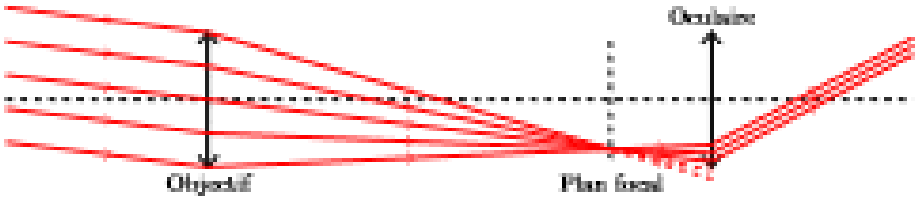
> *Repérer ces deux positions permet de mesurer la distance focale de la lentille : c'est le principe de la méthode de Bessel (voir la section 2 sur la focométrie, page 7.)*

La lentille inversant l'image, le grandissement à chacune de ces positions est négatif et vaut

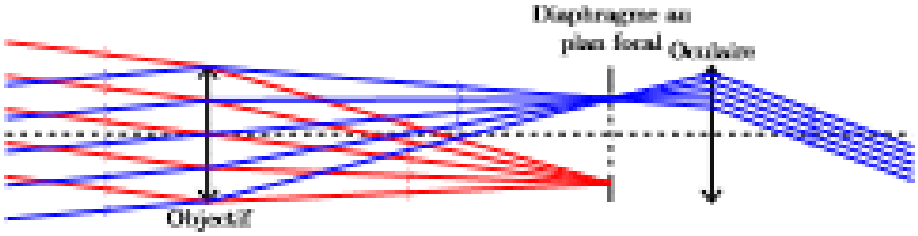
$$\gamma(x_\pm) = -\frac{D-x_\pm}{x_\pm} = 1 - \frac{2}{1 \mp \sqrt{1-4f'/D}}\,. \tag{17}$$

Ainsi, à distance D et focale f' données, le grandissement est maximal en $x = x_-$, c'est-à-dire pour la position de la lentille la plus proche de l'objet. En outre, le grandissement est d'autant plus important que le rapport f'/D est faible, ce qui invite à maximiser D et minimiser f'.

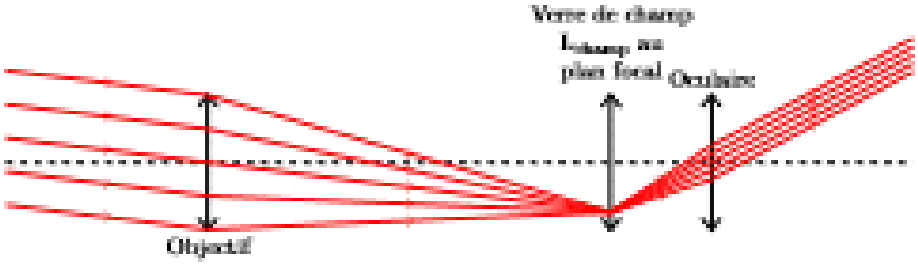
Par conséquent, pour obtenir une image de grandissement maximal, il faut placer l'écran le plus loin possible de l'objet, choisir une lentille de focale aussi petite que possible et la placer à la position permettant d'assurer la conjugaison la plus proche de l'objet. Néanmoins, l'usage d'une lentille de focale trop courte a des conséquences en termes d'aberrations et de luminosité, ce qui nécessite de modérer la course aux petites focales. En général, choisir une lentille de focale 10 cm à 15 cm est un bon choix. Des lentilles de plus courte focale, jusqu'à 5 cm, peuvent être utilisées dans des cas où augmenter le grandissement est essentiel.



(a) Marche des rayons marginaux expliquant l'origine du champ de contour.



(b) Marche des rayons lumineux en présence d'un diaphragme de champ. Le faisceau rouge est complètement arrêté, le bleu passe entièrement. Certains rayons du faisceau rouge constituent les rayons marginaux qui produisent le phénomène de champ de contour.



(c) Marche des rayons en présence d'un verre de champ. Le faisceau rouge est ramené dans les conditions de Gauss. Les rayons périphériques passent en totalité dans l'oculaire. La focale du verre de champ est choisie de manière à conserver un système afocal.

Figure 7 – Schéma expliquant le phénomène de champ de contour, et l'utilisation d'un diaphragme de champ et d'un verre de champ.

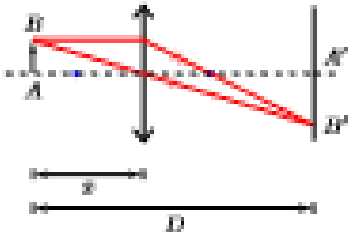


Figure 8 – Conjugaison par une lentille mince. Un objet réel est situé à une distance D d'un écran où l'on en forme l'image avec une lentille convergente de distance focale image f'. L'objet est situé à une distance x de la lentille. Les foyers de la lentille sont représentés par les croix bleues.

A.1.2 Minimiser les aberrations

La présence d'aberrations géométriques et chromatiques est inhérente à l'usage des lentilles. Pour obtenir des images d'aussi bonne qualité que possible, il est nécessaire de minimiser leur influence. Une étude détaillée des aberrations est proposée dans la suite du TP.

Les aberrations chromatiques proviennent de la dispersion du verre constituant les lentilles. Pour limiter leur influence, il est conseillé d'utiliser un doublet achromatique, ou achromat. Il s'agit d'un doublet de lentilles accolées, constituées de matériaux différents dont les aberrations chromatiques tendent à se compenser naturellement.

Les aberrations géométriques sont quant à elles dues aux écarts aux conditions de Gauss, c'est-à-dire aux angles d'incidence des rayons sur les dioptres air – verre : plus les angles d'incidence sont grands, plus il y a d'aberrations. Pour les limiter, il faut donc mettre le dioptre air – lentille le plus plat du côté où l'angle d'ouverture du faisceau est le plus grand. Si la lentille est placée à la position x_- définie précédemment pour maximiser le grandissement, il faut placer sa face la plus plate du côté de la source. Ce résultat est souvent cité sous le nom de règle des 4p : « plus plat, plus près ».

> *Dans la pratique, il n'est pas toujours aisé de repérer la face la plus plate d'une lentille, et certaines sont d'ailleurs symétriques.*
>
> *Notons que la forme de certaines lentilles est étudiée pour limiter les aberrations géométriques. C'est par exemple le cas des ménisques convergents et des doublets achromatiques.*

A.1.3 Synthèse : choisir une lentille de projection en pratique

En conclusion de ce paragraphe, le choix pratique d'une lentille de projection doit se faire de la façon suivante :

- sa focale doit vérifier le critère $f' \leq D/4$;
- elle ne doit cependant pas être trop petite car cela engendre davantage d'aberrations, choisir $f' \simeq 10$–$15\,\mathrm{cm}$ est en général un bon choix ;
- pour minimiser les aberrations chromatiques, privilégier l'usage de doublets achromatiques ;
- pour minimiser les aberrations géométriques, privilégier à nouveau les doublets achromatiques et respecter la règle des 4p.

A.2 Aligner un montage optique

Pour obtenir des images de bonne qualité, l'alignement vertical et horizontal du montage doit être soigneusement réalisé. D'une part, cela assure une transmission optimale de la lumière au travers du montage, et donc que l'image sur l'écran est la plus lumineuse possible. D'autre part, cela permet que l'ajout, le retrait ou le déplacement d'un élément optique sur le trajet du faisceau ne modifie pas la position de l'image, ce qui rend par exemple la réalisation d'une série de mesures pour différents paramètres du montage d'autant plus facile.

Pour simplifier la discussion, notons x la direction de l'axe optique du montage, y la direction qui lui est orthogonale dans le plan de la table de travail et z la direction verticale.

Réunir tous les éléments optiques, incluant la lampe source et l'éventuel photorécepteur, montés sur des pieds réglables. Régler les pieds de telle sorte que tous les éléments soient à la même hauteur. Pour ce faire, il est conseillé de les accoler.

> *Si le réglage en y ou z d'un élément particulier est crucial, ne pas hésiter à utiliser un pied spécifique, muni d'un chariot de réglage avec une vis millimétrique. De même, si le positionnement selon x est critique, il est possible d'utiliser un banc optique.*
>
> *Il est préférable d'avoir une marge de manœuvre pour baisser ou monter légèrement chaque élément par la suite. Toutefois, il est possible que certains éléments soient particulièrement bas (respectivement*

> *hauts), auquel cas il faut les lever (respectivement les baisser) au maximum et aligner le reste du montage par rapport à cette référence.*

Dans le matériel de l'ENS de Lyon, les photorécepteurs Calrec ont des tiges notoirement trop courtes : prendre alors les pieds les plus grands possibles. Certains interféromètres de Michelson sont également trop bas, mais il est possible de les surélever en les posant sur une caisse en bois. Au contraire, les prismes à vision directe sont munis de montures très grandes qui empêchent parfois de les baisser suffisamment.

- Allumer la lampe source, la faire suivre du filtre anticalorique le cas échéant. Régler son inclinaison si besoin afin que le faisceau soit bien dirigé selon x.

> *La « bonne » position est repérée en vérifiant que la tâche lumineuse est approximativement centrée sur l'écran et à la même hauteur que le centre de la lampe.*

- Ajouter un à un chaque élément du montage, en commençant par le plus proche de la lampe et en terminant par le plus proche de l'écran. Les placer approximativement à la bonne position x. Vérifier l'alignement en y et z de la même façon que précédemment, en s'assurant de plus que le centre de la tâche lumineuse ne bouge pas lors de l'ajout ou du retrait de l'élément.

- Ajuster enfin la position x de chaque élément. L'image sur l'écran doit être parfaitement nette, mais il est possible qu'elle ne soit pas uniformément éclairée. Cela est dû à un mauvais réglage de la lampe, discuté section suivante.

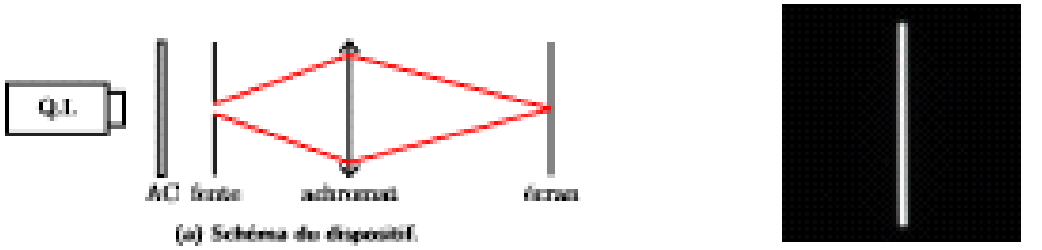
A.3 Éclairer un objet pour que son image soit lumineuse

Une fois l'alignement du montage réalisé, il reste à régler la lampe source pour obtenir une image lumineuse et uniformément éclairée. Les deux paramètres à ajuster sont les positions relatives de l'ampoule, du condenseur, et de l'élément d'entrée du montage.

> *Un condenseur est une lentille convergente de courte focale, non traitée contre les aberrations, qui permet de faire converger les faisceaux lumineux.*
>
> *Les lampes quartz-iode sont en général munies d'un condenseur intégré. Au contraire, les lampes spectrales ne sont jamais munies de condenseur, mais il est presque toujours préférable d'en ajouter un au montage pour maximiser la luminosité des images.*

Comme illustration, nous choisissons l'expérience la plus simple qui soit : la formation de l'image d'une fente sur un écran, dont le schéma est représenté figure 9a. Une photo de l'image à obtenir qui sert de référence dans la discussion est représentée figure 9b. Toutes les photos sont à la même échelle et ont été prises avec les mêmes paramètres d'exposition de l'appareil photo, ce qui permet de les comparer.

> *L'intérêt d'utiliser une fente pour illustrer cette expérience est que ses deux dimensions transverses sont très différentes, ce qui permet de mettre en évidence qu'un mauvais réglage a une influence maximale sur l'extérieur des images.*



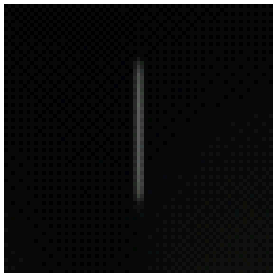
(a) Schéma du dispositif.

(b) Photographie de l'écran.

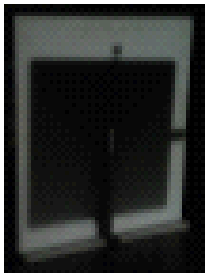
Figure 9 – Image d'une fente sur un écran. (a) Une lampe quartz-iode munie d'un condenseur et suivie d'un filtre anticalorique éclaire une fente. Une lentille achromatique en forme l'image sur un écran. (b) L'image de la fente est nette, lumineuse et uniformément éclairée, signe que le montage est bien réglé. Cette photo sert de référence dans la discussion.

A.3.1 Importance du condenseur

Commençons par illustrer l'importance du condenseur en étant celui de la lampe QI utilisée. Le faisceau émis directement par l'ampoule de la lampe QI est très divergent. En l'absence de condenseur, seule une faible fraction de la lumière traverse le montage, voir figure 10. Par conséquent, le tour de l'écran est aussi lumineux que l'image, seules les ombres des montures permettant de la repérer.



(a) Vue de l'écran.



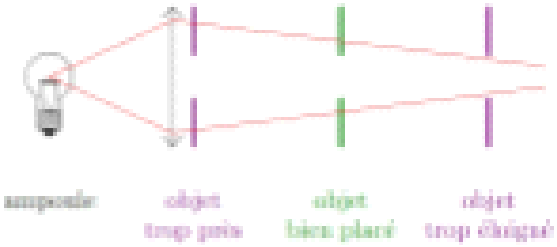
(b) Vue d'ensemble.

Figure 10 – Image obtenue sans condenseur. L'image obtenue sur l'écran n'est pas très lumineuse, car beaucoup de lumière est perdue par ailleurs. L'ombre des montures est bien visible sur l'écran.

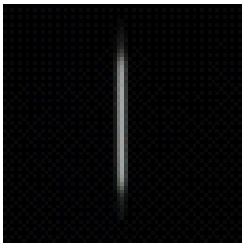
A.3.2 Position relative du condenseur et de l'objet

Pour maximiser la luminosité de l'image, l'objet doit être placé à une distance du condenseur telle que la quantité de lumière traversant l'objet est d'une part maximale et d'autre part uniforme, voir figure 11. La distance en question dépend bien sûr de la taille de l'objet : un objet étendu (fente, grille) doit être placé au plus près du condenseur alors qu'un objet plus petit (trou) doit être placé plus loin. Si l'objet est placé trop près du condenseur, l'image est uniformément éclairée mais moins lumineuse, alors que si l'objet est placé trop loin l'image est lumineuse mais sa luminosité n'est pas uniforme. Les effets d'un éloignement trop grand de l'objet par rapport au condenseur s'observent principalement sur les bords de l'image.

> *Rappelons qu'une lampe QI doit impérativement être suivie d'un filtre anticalorique. Dans ce cas, « aussi près que possible » signifie que l'objet doit être accolé au filtre, lui-même très proche du condenseur de la lampe.*



(a) Positions relatives du condenseur et de l'objet.



(b) Cas d'un objet trop éloigné du condenseur.

Figure 11 – Positions du condenseur et de l'objet. L'objet doit être placé à une distance du condenseur telle que la quantité de lumière traversant l'objet est d'une part maximale et d'autre part uniforme, comme illustré en (a). L'image d'un objet placé trop près est moins lumineuse, alors que l'effet d'un éloignement trop grand est maximal sur les bords de l'image, comme on le voit sur la photographie (b), qui correspond au cas d'un objet trop éloigné.

En pratique, si l'objet est trop proche du condenseur et que ce dernier présente des défauts (poussières, rayures, etc.) l'image de ces derniers peut être visible sur l'écran. Il faut alors reculer légèrement le condenseur : ce qui est perdu en luminosité est gagné en qualité d'image.

A.3.3 Position relative de l'ampoule et du condenseur

Le dernier paramètre de réglage est la distance entre l'ampoule et le condenseur. Plusieurs contraintes parfois antagonistes sont à satisfaire.

> *Pour une lampe QI, la distance entre l'ampoule et le condenseur se règle à l'aide de la tige située à l'arrière de la lampe.*

D'une part, le faisceau doit être suffisamment convergent pour faire passer un maximum de lumière au travers de l'objet, mais s'il est trop convergent l'objet n'est pas éclairé de façon uniforme, conduisant à des effets analogues à ceux décrits section A.3.2. Les deux réglages étant intriqués, il est parfois intéressant voire indispensable de retoucher à ce stade la position relative du condenseur et de l'objet.

D'autre part, le condenseur est une lentille qui forme une image de l'ampoule quelque part dans le montage. Pour que l'image désirée soit de bonne qualité, elle ne doit pas être superposée à celle de l'ampoule, qu'il faut chercher à isoler en amont dans le montage. En pratique, il est souvent efficace de former l'image de l'ampoule par le condenseur sur la lentille de projection. Celle-ci conjugue alors l'image intermédiaire de l'ampoule avec elle-même, et elle ne gêne pas l'observation. Néanmoins, si la lentille de projection est de courte focale, l'image de l'ampoule par le condenseur est trop proche de l'objet et elle peut être floue mais visible sur l'écran. Cela peut aussi rendre le faisceau trop convergent pour que l'objet soit uniformément éclairé. Il faut alors rapprocher la lampe du condenseur : l'image de la lampe est formée en aval de la lentille de projection, elle est donc éloignée de l'objet d'intérêt et le faisceau est moins convergent.

> *Avec une lampe quartz-iode, c'est l'image du filament de l'ampoule qu'on repère.*

A.4 Conclusion : préparer un montage optique

Récapitulons la marche à suivre pour construire un montage optique conduisant à des images de bonne qualité. Les étapes doivent être réalisées dans l'ordre indiqué pour ne pas avoir à modifier des réglages antérieurs.

- Commencer par régler l'alignement vertical et horizontal (y et z) des différents éléments optiques.
- Régler ensuite précisément la position x des différents éléments afin d'obtenir une image nette sur l'écran.
- Régler la position relative du condenseur et de l'objet, afin que celui-ci soit éclairé de façon uniforme.
- Terminer par régler la position de l'ampoule par rapport au condenseur afin d'avoir une image de luminosité uniforme. Former l'image de l'ampoule sur la première lentille est un bon point de départ à ce réglage.

Les deux dernières étapes sont intimement reliées l'une à l'autre, et il est souvent utile de les mener de front par itérations successives.

TP 2 – Physique des interférences

Dernière modif. : 2020/08/18 par ???

Objectifs

Au cours de ce TP, nous allons étudier la physique associée aux phénomènes d'interférences. L'utilisation des interférences en métrologie ou spectroscopie fera quant à elle l'objet du TP *Mesures interférométriques*. Au cours de cette séance, il s'agira de

- ▷ mettre en évidence et caractériser le phénomène d'interférences ;
- ▷ illustrer et quantifier les notions de cohérence temporelle et spatiale ;
- ▷ apprendre à régler un interféromètre de Michelson rapidement et efficacement ;
- ▷ faire expérimentalement le lien entre division d'amplitude, source étendue et localisation de la figure d'interférences ;
- ▷ comprendre qualitativement l'influence de la polarisation sur le phénomène d'interférences.

1 Interférences par division du front d'onde

1.1 Les fentes d'Young

Les fentes d'Young constituent le dispositif de base de l'étude des interférences. Son étude est proposée dans tous les ouvrages traitant d'optique niveau licence ou CPGE, par exemple celui de V. Renvoisé [19, p. 745]. Il s'agit de deux fentes identiques, de largeur d séparées d'une distance a. Un interféromètre de type fentes d'Young repose sur la diffraction par chacune des fentes, les deux ondes diffractées interférant.

Éclairer deux fentes d'Young à l'aide d'un laser. En utilisant plusieurs bifentes, observer et interpréter l'influence de l'espacement entre les fentes a, de la distance D entre les fentes et l'écran, et de la largeur d des fentes (l'interprétation fait alors appel à la diffraction).

> *L'interaction entre diffraction et interférences est encore mieux visible à l'aide de trous d'Young.*

Attention ! Prendre les précautions usuelles lors de l'utilisation d'un laser : ne pas regarder directement le faisceau, empêcher le faisceau de quitter la paillasse (avec des écrans), éteindre ou obturer le laser lorsqu'il n'est pas utilisé, en particulier quand vous quittez la salle.

Le montage utilisé par la suite est représenté figure 1, qui correspond plus ou moins à celui proposé par Sextant [1, p. 161]. Pour réaliser des mesures, on conseille d'utiliser une barette de capteurs CCD (Caliens) reliée à un ordinateur [1].

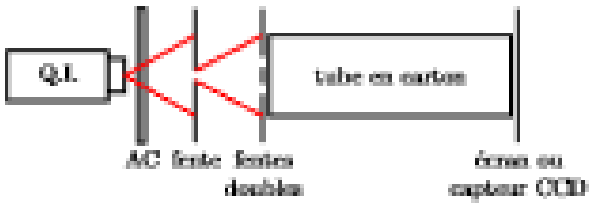


Figure 1 – Dispositif d'étude des fentes d'Young. Le tube en carton sert à limiter la lumière parasite arrivant sur le capteur CCD. Évidemment, il n'y a pas lieu de l'ajouter pour observer la figure d'interférences sur un écran.

Lors de l'étude des cohérences temporelle et spatiale, il faudra avoir un montage de bonne qualité, car les figures sont très peu lumineuses. Les conseils qui suivent concernent cet expérience.

- ▷ Pour éviter les lumières parasites, placer un tube de carton entre les fentes d'Young et le capteur CCD.
- ▷ Pour perdre le moins de lumière possible, rendre le montage aussi compact que possible, aligner correctement les différents éléments, et éclairer au maximum la bifente. Focaliser la lumière de la QI sur la fente source à l'aide d'un condenseur.
- ▷ Utiliser les fentes d'Young les plus fines et rapprochées possibles pour obtenir une figure d'interférence aussi large que possible et un interfrange aussi grand que possible.

(1). À défaut, on peut utiliser un objectif microscopique puis observer sur un écran.

1.2 Autres interféromètres à division du front d'onde (en deuxième lecture)

Les expériences proposées par la suite peuvent être montées avec bien d'autres interféromètres que les fentes d'Young. Les miroirs de Fresnel constituant un autre interféromètre disponible dans la collection permettant d'illustrer ces notions. Néanmoins, leur réglage n'est pas simple, et on conseille dans un premier temps de se limiter aux fentes d'Young. Un protocole de réglage de ces miroirs est proposé par R. Duffait [10, p. 55].

1.3 Cohérence temporelle

En utilisant des filtres interférentiels, on met en évidence que chaque longueur d'onde contenue dans le rayonnement émis par la lampe QI crée son propre système d'interférences, caractérisé par un interfrange différent. La théorie est bien expliquée dans de nombreux ouvrages, citons entre autres celui de V. Renvoizé [19, p. 757] ou encore Sextant [1, p. 167].

L'expérience proposée ici permet de mettre en évidence le mécanisme physique, et accessoirement de vérifier la relation $i = \lambda D/a$ entre interfrange i, distance d'observation D et écart entre les fentes a. En revanche, elle ne permet pas de mesurer une longueur de cohérence temporelle.

- Éclairer les fentes d'Young (ou l'interféromètre de votre choix) par une source de lumière blanche. La figure est généralement peu lumineuse.
- En utilisant des filtres interférentiels (de bonne qualité), observer la figure d'interférence pour différentes longueurs d'ondes, toutes autres choses étant fixées. Interpréter.

Une observation qualitative sur un écran est possible mais sera peu lumineuse et donc peu démonstrative.

> *Pour une mise en évidence qualitative de l'effet de la longueur d'onde sur la figure d'interférences (par exemple en leçon) on pourra se contenter d'utiliser comme source deux lasers, l'un vert l'autre rouge, rendant la manipulation plus simple et lumineuse.*

On observe que la figure d'interférence s'élargit avec la longueur d'onde, tous les autres paramètres étant fixés. Sans filtre interférentiel, ces figures d'interférence se superposeraient, ce qui conduirait à un brouillage. À la lumière de ces observations, interpréter la figure d'interférence en lumière blanche et discuter de l'effet de la cohérence temporelle de la source.

- Vérifier par une régression linéaire que l'interfrange est proportionnel à la longueur d'onde du rayonnement incident. Par des mesures indépendantes, vérifier la valeur de la pente.

1.4 Cohérence spatiale

Étudions maintenant l'influence de la taille de la source sur la figure d'interférences. En prenant une fente source fine, bien que la source de lumière soit polychromatique, il est possible d'observer des interférences. Les différents points de la fente réglable sont autant de points source a priori incohérents entre eux, ils vont donc produire des figures d'interférences qui vont se brouiller, mais si la source a une extension spatiale faible, ce brouillage est faible. Si on élargit la fente source, le brouillage se fait plus fort et la figure d'interférences disparaît progressivement.

La théorie est bien expliquée dans de nombreux ouvrages, citons à nouveau Sextant [1, p. 167], mais mentionnons également le livre de Richard Taillet [23, p. 72], qui dégage très clairement le concept d'aire de cohérence. L'expérience présentée ici est celle décrite par Sextant [1, p. 173]. Reportez-vous au livre pour la monter et l'interpréter.

- Éclairer les fentes d'Young par une lumière monochromatique (QI avec filtre interférentiel).
- Élargir peu à peu la fente source réglable et observer l'évolution du contraste de la figure d'interférence.
- Pour différentes largeurs ℓ de la fente source, déterminer le contraste $\Gamma = (I_{max} - I_{min})/(I_{max} + I_{min})$ de la figure d'interférence. Tracer le contraste en fonction de la largeur de la fente source $\Gamma(\ell)$. Interpréter.

> *Cette expérience permet d'illustrer le rôle de la fente source. Elle n'est assurément pas là en tant qu'objet diffractant, mais en tant que diaphragme pour faire une source de petite dimension à partir de la lampe quartz-iode. En raison des symétries des fentes d'Young, la fente source peut être étendue dans la direction parallèle aux fentes. Ce résultat se démontre comme le théorème de localisation, voir par exemple le livre de J.M. Brébec [3].*

Attention, contrairement à ce qu'on lit souvent, la grandeur caractéristique de la cohérence spatiale d'une source n'est pas une longueur mais un angle, l'angle sous lequel l'interféromètre voit la source étendue. Ce concept peut se traduire sous forme d'une aire, voir par exemple le livre de R. Taillet [23, p. 72].

2 Interférences par division d'amplitude, interféromètre de Michelson

Attention ! L'interféromètre de Michelson est un outil de précision, fragile et coûteux. Il doit donc être manipulé avec soin : ne pas toucher les miroirs ou la séparatrice-compensatrice, ne pas faire subir de chocs à l'appareil, utiliser un filtre antiolorique avec les lampes QI.

2.1 L'interféromètre de Michelson

Une présentation claire et concise du Michelson est proposée par Sextant [1, p. 143].

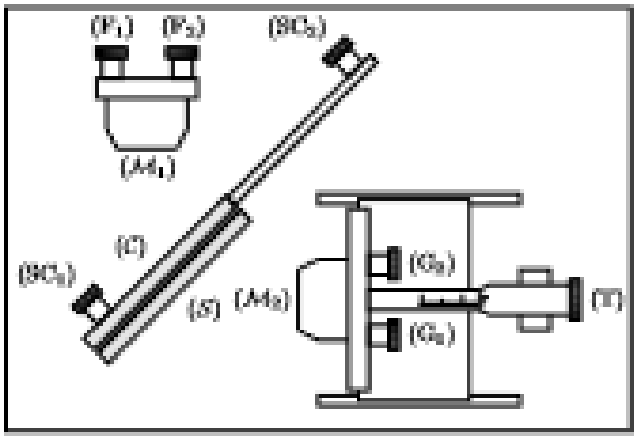


Figure 2 – Interféromètre de Michelson. On y retrouve les deux miroirs (M_1) et (M_2), la séparatrice (S) et la compensatrice (C), ainsi qu'un certain nombre de vis de réglage.

Un interféromètre de Michelson représenté figure 2 est constitué de trois éléments optiques de haute qualité : deux miroirs placés à environ 90° l'un de l'autre et un dispositif semi-réfléchissant assurant la division d'amplitude. À cela s'ajoutent divers éléments mécaniques permettant son réglage. Un schéma simplifié est représenté figure 2, où seuls les éléments communs à tous les modèles d'interféromètre sont représentés.

Afin de respecter la parfaite symétrie entre les deux trajets, une lame de verre appelée compensatrice (C) est placée devant la séparatrice et possède la même épaisseur e. Un des deux faisceaux traverse deux fois la compensatrice puis une fois la séparatrice, tandis que l'autre traverse une fois la compensatrice puis deux fois la séparatrice. Ainsi les deux faisceaux traversent la même épaisseur de verre $3e$.

> *Le rôle de la compensatrice peut parfois donner lieu à des confusions : elle n'est ajoutée que pour compenser la dispersion du verre. Ainsi, elle n'est pas là pour compenser une différence de marche constante, et n'aurait aucune utilité en lumière monochromatique. Il peut être bon de lire Sextant [1, p. 143] à ce sujet.*

Identifier la séparatrice, la compensatrice, et la face métallisée de la séparatrice.

Une procédure de réglage de l'interféromètre est donnée par exemple par Sextant [1, p. 141]. Ceux qui préféreraient des explications en vidéo peuvent consulter le site de G. Vincent, http://gerald.vincent.free.fr/. Néanmoins, soyons clair : en fin d'année, vous devrez savoir régler le Michelson sans vous aider d'aucun livre.

Le réglage de l'interféromètre est un des principaux objectifs du jour : n'hésitez pas à vous entraîner en réglant et déréglant l'interféromètre plusieurs fois d'affilée. Par ailleurs, plutôt qu'une mémoire technique des gestes, il faut que vous acquériez une mémoire de la logique du protocole, ce qui nécessite de le comprendre physiquement. Si vous avez des questions sur le pourquoi d'une étape, sollicitez les enseignants.

2.2 Réglage préliminaire à l'aide d'un laser

2.2.1 Avant de commencer

Afin d'éviter de partir d'une situation trop défavorable, commencer par régler grossièrement à l'œil le parallélisme entre les deux miroirs à l'aide des vis (G_1) et (G_2). Faire de même pour régler grossièrement le parallélisme entre la séparatrice et la compensatrice avec les vis (SC_1) et (SC_2).

Vérifier l'allure des lames métalliques qui permettent d'effectuer le réglage fin : des lames trop déformées conduiront non seulement à un réglage fin de mauvaise qualité, mais se détérioreront également. Un bon compromis est d'avoir une marge de deux ou trois tours dans chaque direction.

> On entend parfois qu'il faut régler les vis « à mi-course » : cela n'a pas d'intérêt, et conduit à une déformation trop forte des lames.

2.2.2 Parallélisme entre séparatrice et compensatrice

- Éclairer l'interféromètre de côté avec un laser en incidence normale sur la séparatrice, et placer l'écran parallèlement à la compensatrice. Rassembler les taches du mieux possible à l'aide des deux vis (SC_1) et (SC_2).

2.2.3 Interférences avec un laser

- Placer le laser en entrée de l'interféromètre, de telle sorte que le faisceau arrive approximativement au centre du miroir (M_2) en incidence normale. Vérifier qu'il en est de même pour (M_1), à défaut retoucher l'orientation ou la hauteur du laser. Placer l'écran en sortie de l'interféromètre, à une distance de l'ordre du mètre. On observe sur l'écran de multiples taches. Les faire se recouvrir au mieux à l'aide des vis (G_1) et (G_2) de réglage grossier.

- Pour faciliter la suite du réglage, on peut élargir le faisceau laser à l'aide d'un objectif de microscope ou d'une lentille de courte focale. Régler sa hauteur et son orientation de sorte que la tache lumineuse soit approximativement centrée sur les miroirs. On observe sur l'écran des anneaux ou des fractions d'anneaux.

> Cette étape est facultative, mais si elle est omise elle devra être remplacée par la suite par une observation directe dans l'interféromètre (dans cas projection sur un écran) lors du réglage avec une lampe spectrale.

La suite du réglage dépend de la configuration voulue. Pour régler l'interféromètre en lame d'air, passer à la section 2.3. Pour régler l'interféromètre en coin d'air, passer à la section 2.4.

2.3 Réglage de l'interféromètre en lame d'air

2.3.1 Réglage avec un laser

- À l'aide des vis de réglage grossier (G_1) et (G_2), centrer les anneaux sur l'écran. Utiliser la vis de translation (T) pour faire rentrer les anneaux vers leur centre, ce qui doit les faire grossir.

- Répéter en alternance ces deux étapes jusqu'à n'observer plus qu'un ou deux anneaux brillants centrés sur l'écran. L'interféromètre est alors prêt pour être utilisé avec une lampe spectrale.

> Lorsque les anneaux rentrent vers leur centre, cela signifie que l'on rapproche l'interféromètre du contact optique, c'est-à-dire que l'épaisseur e de la lame d'air diminue. On montre également que l'angle de coin d'air α diminue lorsque le centre des anneaux se rapproche du centre de la figure sur l'écran.

2.3.2 Réglage avec une lampe spectrale

- Remplacer le laser par une lampe spectrale. Condenser la lumière de la lampe sur les miroirs avec un condenseur ou une lentille de courte focale, par exemple 5 cm. Placer une lentille de grande focale, par exemple 1 m, à la sortie de l'interféromètre, et placer l'écran dans le plan focal image de la lentille afin d'observer la surface de localisation, située à l'infini.

> Condenser la lumière a toujours pour objectif d'augmenter le nombre d'angles d'incidence sur les miroirs.
>
> Une lampe spectrale n'étant pas spatialement cohérente[2], il est dès lors nécessaire de former sur l'écran l'image de la surface de localisation. Le réglage du parallélisme des miroirs étant approximativement atteint, cette dernière se trouve approximativement à l'infini, d'où la position de la lentille de projection.

- Si le réglage au laser a été fait correctement, on doit observer sur l'écran des anneaux ronds et bien contrastés. Translater le miroir mobile de sorte que deux ou trois anneaux soient visibles sur l'écran.

- Les anneaux peuvent être elliptiques, ce qui est le signe caractéristique d'un mauvais réglage du parallélisme entre la séparatrice et la compensatrice. Tourner en alternance les deux vis (SC) jusqu'à obtenir des anneaux ronds.

- Les anneaux peuvent être mal contrastés, ce qui est le signe d'un angle de coin d'air résultant non nul. Il faut alors retoucher aux vis (F) pour le diminuer.

> Si les anneaux sont observés avec une lampe à vapeur de sodium, la perte de contraste peut être liée à une antécoïncidence dans les balèvements des deux raies du doublet jaune. Pour s'en assurer, il suffit de translater le miroir mobile, ce qui doit augmenter le contraste. Si rien ne change, le problème est dû à un angle résiduel entre les miroirs.

(2). Le laser, lui, l'est.

2.3.3 Optimisation du réglage : minimisation de l'angle de coin d'air résultant

L'angle de coin d'air obtenu par la méthode précédente est très faible, mais pas tout à fait nul. Cela risque de perturber certaines expériences nécessitant d'explorer une large gamme de différences de marche, par exemple celles de spectroscopie. Il est alors nécessaire d'optimiser le réglage.

- Translater le miroir mobile de façon à observer deux ou trois anneaux sur l'écran. Placer un dépoli devant la lampe spectrale, enlever la lentille de projection, et regarder directement dans l'interféromètre sans accommoder.
- Hocher la tête successivement dans deux directions perpendiculaires (faire « oui » puis « non » de la tête). Toucher avec beaucoup de délicatesse aux vis de réglage fin. L'angle de coin d'air est minimum lorsque les anneaux ne défilent plus lors des hochements de tête. En pratique, cela se repère par la conservation du nombre d'anneaux visibles et surtout la couleur du centre de la figure d'interférences.

> *Le centre des anneaux suit les mouvements de tête. Pour que les effets soient bien visibles, faire des mouvements d'une amplitude raisonnable.*

2.3.4 Approche du contact optique, teinte plate de la lampe spectrale

- Faire rentrer les anneaux vers leur centre. Le rayon des anneaux augmente jusqu'à devenir plus grand que la tache lumineuse sur l'écran. Lorsque l'on observe une couleur uniforme sur l'écran, identique à celle de la lampe, l'interféromètre est très proche du contact optique. Cette couleur est appelée *teinte plate de la lampe*.

> *Avant toute nouvelle modification du montage, il est chaudement recommandé de noter la position du miroir mobile lue sur le vernier. Cela permettra de retrouver facilement la proximité du contact optique en cas de fausse manœuvre ultérieure.*

2.3.5 Repérage exact du contact optique à l'aide des teintes de Newton

La précision sur le repérage du contact optique obtenue à l'aide d'une lampe spectrale peut être améliorée car il est impossible à l'œil de repérer la teinte plate de façon parfaite. En utilisant le caractère temporellement moins cohérent de la lumière blanche, les nuances de couleur sont visibles à l'œil pour des différences de marche infimes, permettant une détermination quasi-parfaite du contact optique. Néanmoins, observer la teinte plate de la lumière blanche nécessite un réglage extrêmement précis de l'interféromètre.

- Remplacer la lampe spectrale par une lampe quartz-iode. Faire converger la lumière sur les miroirs.

Attention ! Penser absolument à ajouter un filtre anti-calorique au montage, et ne pas oublier d'allumer la lampe quartz-iode.

- Toucher avec les plus grandes précautions à la vis de translation. Tourner dans un sens, puis dans l'autre si besoin. On doit observer sur l'écran des teintes colorées presque uniformes : ce sont les teintes de Newton. Le contact optique est atteint lorsque la teinte plate de la lumière blanche est visible sur l'écran.

L'interféromètre est désormais réglé au contact optique en lame d'air.

> *La distinction entre la teinte plate et le blanc d'ordre supérieur se fait en touchant le chassis de l'interféromètre, ce qui a pour effet de modifier très légèrement la différence de marche. S'il apparaît des teintes colorées très vives, alors le blanc correspond à la teinte plate. Au contraire, si la couleur ne change pas ou est peu marquée, le blanc est du blanc d'ordre supérieur, signe que l'interféromètre n'est pas réglé au contact optique.*

2.4 Réglage de l'interféromètre en coin d'air

2.4.1 Réglage avec un laser

Partons de la situation décrite section 2.2.3.

- Quelle que soit la figure observée sur l'écran, utiliser la vis de translation (T) pour faire défiler les anneaux ou les portions d'anneaux vers leur centre de courbure, ce qui a pour effet de déplacer le centre de courbure et de l'éloigner du centre de l'écran. Lorsque le centre est nettement sortie de l'écran, cesser la translation et utiliser les vis de réglage grossier (G_1) et (G_2) pour augmenter l'interfrange.
- Répéter en alternance ces deux étapes jusqu'à n'observer plus que quelques franges rectilignes sur l'écran. L'interféromètre est alors prêt pour être utilisé avec une lampe spectrale.

> *L'étape de translation n'est pas nécessaire, mais plus pratique. Elle a l'inconvénient d'éloigner l'interféromètre du contact optique.*

2.4.2 Réglage avec une lampe spectrale

- Remplacer le laser par une lampe spectrale. À l'aide d'un condenseur, rendre le faisceau incident aussi parallèle que possible. Former ensuite l'image des miroirs sur l'écran à l'aide d'une lentille de projection. On observe sur l'écran des franges rectilignes.

> *La lampe étant une source étendue, il n'est pas possible de former un faisceau parfaitement parallèle. Un bon compromis est de régler le condenseur de sorte que l'image de l'ampoule de la lampe apparaisse sur la lentille de projection, ce qui assure par ailleurs qu'elle ne gêne pas l'observation des franges.*
>
> *Rappelons que pour former une image réelle d'un objet réel avec une lentille de focale f', la distance entre objet et image doit être supérieure à $4f'$. Attention donc au choix de la lentille de projection. Pour être sûr de bien former l'image des miroirs, on peut placer devant un miroir un papier optique nettoyant et en former l'image sur l'écran.*

- Jouer sur les vis de réglage fin pour remarquer leur rôle dissymétrique. Interpréter.

2.4.3 Repérage exact du contact optique en lumière blanche

Pour que cette étape du réglage puisse être réussie, il est nécessaire que l'interféromètre soit déjà très proche du contact optique. Il est donc nécessaire de s'en être assuré en observant la teinte plate d'une lampe spectrale, voir section 2.3.4, puis d'être passé en coin d'air sans charlotter.

- Toucher délicatement à la vis de translation. Tourner dans un sens, puis dans l'autre si besoin. On observe sur l'écran des franges rectilignes colorées, formant une figure symétrique de part et d'autre d'une frange centrale noire ou blanche. Centrer cette frange sur l'écran, elle est le lieu du contact optique.

L'interféromètre est désormais réglé au contact optique en coin d'air.

2.5 Passage d'une configuration à l'autre

2.5.1 Passage de la lame d'air au coin d'air

Il est nécessaire que l'interféromètre soit réglé au voisinage du contact optique, mais la précision obtenue avec la teinte plate de la lampe spectrale suffit.

- Commencer par modifier l'éclairage des miroirs et le système de projection. Tourner une des vis de réglage grossier pour imposer un angle entre les miroirs.

- On observe sur l'écran des franges rectilignes, verticales ou horizontales en fonction de la vis qui a été tournée. L'interféromètre est alors dans une configuration proche de celle qu'il aurait à la fin de la section 2.4.2, la proximité du contact optique étant a priori meilleure.

2.5.2 Passage du coin d'air à la lame d'air

- Jouer sur les vis de réglage fin pour placer les franges horizontalement ou verticalement. Repérer la vis permettant de modifier l'interfrange. Jouer ensuite sur les vis de réglage grossier pour faire diverger l'interfrange, jusqu'à n'obtenir plus qu'une teinte uniforme sur l'écran.

- Changer l'éclairage des miroirs et le système de projection.

- On doit alors observer sur l'écran ou bien un ou deux anneaux, ou bien une teinte plate de lampe spectrale, ou bien des teintes de Newton en lumière blanche. L'interféromètre est alors dans une configuration identique à celle qu'il aurait à la fin des étapes 2.3.4 ou 2.3.5.

- Si la lampe utilisée est une lampe spectrale, translater légèrement le miroir mobile de façon à observer deux ou trois anneaux sur l'écran. Jouer sur la vis de réglage fin précédemment repérée pour optimiser le contraste des anneaux observés, ce qui annule du mieux possible l'angle de coin d'air.

2.6 Cohérence temporelle

Une fois l'interféromètre réglé en coin d'air et lumière blanche, l'étude est très simple.

- Ajouter une case de filtre interférentiels, et mesurer l'interfrange pour différentes longueurs d'ondes. Vérifier la formule théorique par une régression linéaire et interpréter la pente.

Une telle méthode permet de mettre en évidence l'existence d'un blanc d'ordre supérieur, c'est-à-dire un blanc interprété comme tel par l'œil mais dû au recouvrement des systèmes de franges de chaque longueur d'onde. Duffait propose de le mettre en évidence à l'aide d'un PVD [10, p. 83]. Vous êtes invités à faire cette expérience, qui permet de plus d'anticiper (ou de réviser) le TP *Spectroscopie* sur l'observation de spectres.

> *Une expérience un peu anachronique à ce stade mais instructive sur la physique des lampes à vapeur consiste à se placer à environ 2 mm du contact optique et à éclairer l'interféromètre avec une lampe spectrale haute pression froide (éteinte depuis un moment). Allumer la lampe et observer l'apparition des anneaux avec un fort contraste, puis une diminution progressive du contraste. Interpréter, si besoin*

en demandant à un escadrant.

2.7 Cohérence spatiale

Le protocole proposé ci-dessous est voisin de celui suggéré par Duffait [10, p. 83]. Sextant [1, p. 162] propose un protocole sans doute plus pédagogique pour étudier la localisation des figures d'interférence, mais l'expérience proposée est malheureusement très peu lumineuse.

- Se placer en coin d'air en lumière blanche (éventuellement avec un filtre coloré).
- Diaphragmer la source qui éclaire les miroirs (faire converger la lumière de la QI sur une fente de largeur variable placée parallèlement aux franges du coin d'air).
- Quand la fente est fine, il est possible d'enlever la lentille de projection, ce qui revient à ne plus observer la surface de localisation. En élargissant la fente, on observe d'abord un brouillage des franges puis une réapparition en contraste faible et inversé. Lorsque la fente est large ou absente, il faut replacer la lentille de projection : la localisation des franges est liée à la taille de la source.

La localisation peut être testée de même dans une configuration en lame d'air. Néanmoins, la localisation est plus stricte en coin d'air qu'en lame d'air : l'expérience est donc plus spectaculaire dans la première des deux configurations.

3 Interférences en lumière polarisée

En plus de la cohérence spatiale et de la cohérence temporelle, il existe un troisième type de cohérence, la *cohérence de polarisation*.

Deux expériences sont possibles pour la mettre en évidence. La première utilise un interféromètre de Michelson, son protocole étant donné par Sextant [1, p. 165]. Une expérience voisine et un peu plus simple à mettre en œuvre peut être réalisée sur une petite table optique : le protocole est alors donné par Duffait [10, p. 56]. Enfin, le département possède un interféromètre de Mach-Zehnder, dont le réglage repose sur le même principe que celui de la table optique, mais qui est d'utilisation plus pratique. Il s'agit d'éclairer l'interféromètre à l'aide d'un laser, de faire se recouvrir les faisceaux passés par chacune des voies, et d'agrandir le champ d'interférences en le projetant sur un écran à l'aide d'un objectif de microscope.

- Vous êtes invités à monter l'une de ces deux expériences en vous référant au livre adéquat.

> *Pour l'expérience utilisant un Michelson, il est possible d'utiliser les miroirs de Calicot en les maintenant avec des pinces. Les polariseurs n'étant pas plans, l'expérience doit absolument être menée en coin d'air avec observation au bon endroit (sur le coin d'air, donc sur les polariseurs) car les franges sont localisées.*
>
> *Pour l'expérience utilisant une table optique, une disposition spéciale a été conçue, contant deux demi-polariseurs dont les axes passants sont gradués. Elle est rangée dans l'un des deux chasseurs bleus.*

Ces deux expériences permettent de mettre en évidence deux résultats majeurs, historiquement dus à Fresnel et Arago :

- deux ondes polarisées orthogonalement ne peuvent interférer ;
- l'observation d'interférences avec un interféromètre dont les voies sont polarisées orthogonalement puis projetées sur une polarisation intermédiaire ne peut se faire que si la source est également polarisée.

4 D'autres expériences relativement simples (en seconde lecture)

4.1 Les anneaux de Newton

Lorsque deux dioptres sont séparés d'une fine épaisseur e, des interférences entre la lumière réfléchie par ces deux surfaces peuvent être observées. Le déphasage est alors de e/λ lorsque l'éclairage est sous incidence normale et l'on parle de franges d'égale épaisseur. Lorsque l'un des dioptres est sphérique et l'autre plan, on observe des anneaux centrés sur le point de contact entre les surfaces, dits anneaux de Newton. L'expérience est proposée par Duffait [10, p. 33], auquel vous êtes invités à vous référer.

4.2 Irisations d'un film de savon

- Éclairer un film de savon à 45° en lumière blanche parallèle (on veut observer des franges d'égale épaisseur). Observer simultanément le film en réflexion et en transmission à l'aide de deux lentilles.

> *Recette pour réaliser un liquide pour film de savon :* un volume de liquide vaisselle, un volume de *glycérol*, huit volumes d'eau.

- Lorsque le film est encore épais, on n'observe pas de teintes. Intercaler un filtre interférentiel pour observer les interférences en lumière monochromatique. Quelle était la nature du blanc observé précédemment ? Comparer le contraste en réflexion et en transmission. Expliquer.

- Lorsque les franges deviennent larges, repasser en lumière blanche. On observe alors les teintes de Newton. En déduire une mesure de l'épaisseur du film. Quelle est la dernière teinte observée en réflexion avant la rupture du film ?

5 Interféromètre de Fabry-Pérot (en seconde lecture)

L'analyse théorique du Fabry Pérot se trouve par exemple dans les livres de R. Taillet [23, p. 106] et S. Houard [15, p. 235]. Une description de l'appareil et un protocole de réglage sont proposés par Sextant [1, p. 263] comme par Duffait [10, p. 91].

5.1 Principe

Il s'agit d'un interféromètre à ondes multiples formé par une cavité à faces parallèles. Pour que les ondes successives qui interfèrent puissent avoir des amplitudes comparables, le facteur de réflexion R sur les faces de l'appareil doit être proche de 1. Ceci permet de n'avoir de la lumière en sortie de l'appareil que dans certaines directions privilégiées, et cela avec une très grande finesse. On distingue les cavités étalon pour lesquelles la distance e entre les lames est fixe de l'interféromètre de Fabry-Pérot équipé d'un vernier permettant de translater une lame par rapport à l'autre.

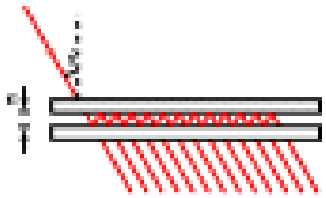


Figure 3 — Principe de l'interféromètre de Fabry-Pérot.

L'ordre d'interférence au centre (pas nécessairement entier) est noté

$$P = \frac{2e}{\lambda} = P_0 + \varepsilon \ , \ 0 \leq \varepsilon < 1 \ . \tag{1}$$

Les anneaux se trouvent aux incidences i telles que $2e\cos i = p\lambda$, le k^{e} anneau correspondant à l'ordre d'interférence $p = P_0 - k$. On en déduit pour i petit :

$$i_k = \sqrt{\frac{\lambda(k+\varepsilon)}{e}} \ . \tag{2}$$

5.2 Réglage de l'appareil

Le réglage du Fabry-Pérot consiste à avoir le parallélisme le meilleur possible entre les faces. Pour cela on dispose en général de quatre vis : deux vis de réglage grossier et deux vis de réglage fin.

On commence par régler l'appareil avec un laser.

Attention ! Prendre les précautions usuelles lors de l'utilisation d'un laser : ne pas regarder directement le faisceau, empêcher le faisceau de quitter la paillasse (avec des écrans), éteindre ou obturer le laser lorsqu'il n'est pas utilisé, en particulier quand vous quittez la salle.

- Diriger le faisceau en incidence normale sur le Fabry-Pérot.

> *On voit plusieurs taches brillantes correspondant aux réflexions multiples sur les faces qui pour l'instant présentent un petit angle entre elles.*

- Agir sur les vis de réglage grossier pour faire se confondre ces images.

> *Il existe également des images parasites provenant de réflexions sur les faces avant du Fabry-Pérot (ces faces avant sont présentées pour diminuer le phénomène).*

- Placer un écran diffusant devant le faisceau et une lentille de projection derrière le Fabry-Pérot. On doit voir des franges que l'on écarte avec les vis de réglage grossier jusqu'à avoir des anneaux très fins.

> *Il est possible que ces anneaux soient déjà visibles si le réglage précédent était déjà très bon.*

- Remplacer le laser par une lampe à vapeur de sodium, en gardant l'écran diffusant, et enlever la lentille de projection dans un premier temps. En regardant à travers le Fabry-Pérot, on voit normalement un système d'anneaux. En déplaçant la tête vers l'une des vis de réglage, on voit ce système évoluer, signe que le parallélisme n'est pas satisfaisant (l'épaisseur de la lame d'air n'est pas constante sur tout le champ).
- Agir alors sur la vis de réglage fin pour que le système n'évolue plus (il faut en général serrer cette vis si les anneaux meient). Répéter l'opération avec la deuxième vis. Comme les deux vis sont à 120° l'une de l'autre, le réglage de l'une influe sur l'autre.
- Reprendre donc le réglage de la première vis puis de la deuxième jusqu'à ce que le système d'anneaux n'évolue plus quelque soit le sens dans lequel on bouge la tête.
- Replacer alors la lentille de projection. On doit voir apparaître un système d'anneaux sur l'écran.

5.3 Caractérisation de l'appareil

5.3.1 Finesse

La finesse F caractérise l'épaisseur des anneaux. Elle est définie comme le rapport entre le décalage entre deux anneaux successifs et la largeur à mi-hauteur d'un anneau. On peut montrer que: $F = \pi\sqrt{\frac{R}{(1-R)}}$: vérifier cette formule (chercher la valeur annoncée de R dans les notices).

5.3.2 Variation du rayon des anneaux

En utilisant une barrette de capteurs CCD (Calicaa), faire un enregistrement du système d'anneaux obtenus avec un laser. Comment peut-on vérifier que l'on mesure bien le rayon des anneaux avec la barrette CCD, c'est-à-dire que la barrette est bien dirigée suivant un diamètre? Vérifier que le carré du rayon des anneaux suit une progression arithmétique.

5.3.3 Détermination de l'épaisseur d'un étalon

L'utilisation de l'interféromètre de Fabry-Pérot n'a de sens que si l'on connaît son épaisseur avec une précision inférieure à la longueur d'onde étudiée, autrement dit si l'on connaît la partie entière de l'ordre d'interférence. La mesure de l'excédent fractionnaire ε permet ensuite de déterminer une longueur d'onde très précisément [3]. La première étape consiste à avoir une valeur approchée de l'épaisseur de la cavité : pour l'interféromètre on la lit sur le vernier, pour l'étalon il faut consulter la notice [4]. On a alors l'ordre à ±5 près en général. Ensuite, en utilisant les raies d'une lampe Hg-Cd, on mesure les excédents fractionnaires de chaque raie. Des dix valeurs possibles de l'ordre au centre, une seule donnera les bons excédents fractionnaires pour chaque raie. Si l'on arrive à mesurer cet excédent au dixième près, on a alors l'épaisseur de l'étalon au dixième de longueur d'onde près.

(3). En effet, si l'ordre d'interférence est de l'ordre de 10^6, ce qui correspond à une épaisseur e de quelques mm, une mesure de ε au centième permet de connaître λ à 10^{-8} en erreur relative, soit à 0.008 nm près.

(4). S'il n'y en a pas, il faut le démonter et mesurer les cales au palmer. Demander de l'aide aux encadrants ou aux techniciens.

TP 3 – Mesures interférométriques

Dernière modif. : 2024/07/03 par ???

Objectifs

Ce TP traite de l'utilisation des interférences en métrologie, où elles permettent d'atteindre d'excellentes précisions. Les objectifs du TP consistent à

- utiliser un interféromètre pour mesurer une épaisseur optique ;
- mesurer la largeur spectrale d'une raie par transformée de Fourier ;
- utiliser des interférences à ondes multiples pour améliorer la précision des mesures spectroscopiques ;
- caractériser le spectre d'un laser ;
- au passage, améliorer sa dextérité pour régler un interféromètre de Michelson.

Outre les montages d'optique pure, ce TP vous servira pour préparer les montages MP 26 (Mesure de longueur) et MP 31 (Résonance).

Attention ! L'interféromètre de Michelson est un outil de précision, fragile et coûteux. Il doit donc être manipulé avec soin : ne pas toucher les miroirs ou la séparatrice-compensatrice, ne pas faire subir de choc à l'appareil, utiliser un filtre anticalorique avec les lampes Qi.

1 Mesure d'indices et d'épaisseurs

Les mesures interférométriques permettent de mesurer une différence de chemin optique, qui tient donc compte à la fois des distances géométriques et des indices optiques. En conséquence, il est impossible d'en déduire l'un sans connaître l'autre.

1.1 Mesure de l'épaisseur d'une lame de verre

L'objectif est de mesurer l'épaisseur optique d'une lame de verre, de type lamelle couvre-objet de microscope, avec un interféromètre de Michelson. L'expérience présentée est très classique, mais souvent mal exploitée. Dans une version naïve, elle ne permet pas d'utiliser la précision permise par les interférences.

1.1.1 Version naïve

Cette exploitation naïve de l'expérience est proposée par exemple par Duffait [10, p. 88], mais les remarques qu'il soulève sur l'observation de franges secondaires et la dispersion sont très intéressantes : allez les lire !

- Régler l'interféromètre en configuration coin d'air en lumière blanche. En noter la position.
- Intercaler une lame de verre fine dans un des bras : on perd les franges irisées.

  > *Les lamelles sont rangées dans le placard de la salle d'optique, ainsi qu'un bloc métallique adapté pour les fixer à la bonne hauteur.*

- Les retrouver en chariotant : mesurer le déplacement à l'aide du vernier. En déduire l'épaisseur optique de la lame, produit de son indice optique n par son épaisseur e. Connaissant l'indice du verre constituant la lame (le chercher dans les notices), en déduire l'épaisseur e de la lame.

  > *Il est nécessaire de connaître avec précision l'indice de la lame pour espérer avoir une précision acceptable.*

Estimer l'incertitude sur la mesure de l'épaisseur (pour simplifier, vous pouvez considérer que l'indice optique est connu parfaitement). Une telle mesure n'est pas plus précise qu'une mesure simple au palmer. En effet, dans les deux cas, l'épaisseur se lit sur un vernier de précision comparable. Réfléchir au rôle joué par les interférences dans le protocole décrit : elles servent à repérer le début et la fin du décompte de longueur, mais pas d'étalon (l'étalon de mesure est ici la graduation du vernier). En fait, cette mesure n'est pas une mesure interférométrique.

1.1.2 Version optimisée

Pour exploiter pleinement la puissance des mesures interférométriques, le protocole précédent doit être amélioré. À la connaissance de l'auteur de ce paragraphe, un tel protocole ne se trouve pas dans les livres d'usage courant en prépa agreg. Ceux qui souhaitent plus de précision peuvent se reporter au poly du MP 26 (Mesure de longueurs) édition 2013-2014.

- À l'aide d'une lame semi-réfléchissante, envoyer simultanément dans l'interféromètre de Michelson le faisceau d'un laser et celui de la lampe Qd, de telle sorte que les deux figures d'interférences soient visibles et distinctes sur l'écran. Faire très attention aux réflexions parasites avec le laser.
- Comme précédemment, charioter le miroir doucement (il peut être plus pratique d'utiliser le moteur dont sont munis les Michelson). Utiliser les interférences en lumière blanche comme repérage du contact optique avant et après l'ajout de la lame, mais compter le nombre de franges laser qui défilent.

Justifier alors que l'épaisseur de la lame est connue avec une précision de l'ordre de la demi-longueur d'onde du laser. En pratique, ce protocole est « trop bon » pour la lame étudiée : pourquoi ?

1.1.3 Version spectrométrique

On peut aussi exploiter le spectre cannelé du blanc d'ordre supérieur (avec et sans lame) pour mesurer l'épaisseur optique d'une lame, et donc son épaisseur si l'indice est connu. Avec un spectromètre numérique, cette méthode est très rapide. Néanmoins, il n'existe à la connaissance de l'auteur pas de livre usuel contenant le protocole de cette expérience : référez-vous au poly du MP 26 (Mesure de longueurs) de l'année 2015.

- Déplacer le chariot de l'interféromètre à mi-chemin entre le contact optique (sans lame) et le « contact optique avec lame ».
- Enregistrer le spectre cannelé du blanc d'ordre supérieur avec la lame et sans la lame.
- À partir des longueurs d'ondes des minima (ou des maxima) successifs des deux spectres cannelés au voisinage d'une longueur d'onde λ_0 et de l'indice du verre $n(\lambda_0)$, déterminer l'épaisseur de la lame.

1.1.4 Défauts de surface

L'expérience d'étude des défauts de surface est proposée par Sextant [1, p. 150]. Vous êtes invités à vous y référer pour bien comprendre l'expérience.

- Régler l'interféromètre en lame d'air sur la teinte plate d'un laser élargi.
- Insérer la lamelle dans un des bras de l'interféromètre, et former son image sur un écran de projection.

Justifier qu'on observe alors les franges d'égale épaisseur d'un coin d'air déformé engendré par les défauts de planéité de la lame. Estimer l'ordre de grandeur de ces défauts.

1.2 Visualisation d'écoulement dans un gaz (en seconde lecture)

- Régler l'interféromètre en lame d'air, au contact optique et en lumière blanche. Intercaler un briquet (éteint) dans un des bras de l'interféromètre.
- Faire son image à l'aide d'une lentille, et laisser couler un peu de gaz : la grande sensibilité de la teinte plate permet de voir les moindres variations d'indice.

1.3 Mesure de l'indice d'un gaz (en seconde lecture)

L'indice d'un solide se mesure généralement au goniomètre. Il est en revanche pertinent d'utiliser l'interférométrie pour mesurer l'indice de l'air, et illustrer ainsi la dépendance de l'indice vis-à-vis de la masse volumique d'un tel milieu dilué (loi [empirique] de Gladstone, $n - 1 = k\rho$). Le protocole est également décrit dans le chapitre "Capteurs" du fascicule de TP "Électromagnétisme".

- Régler l'interféromètre afin d'observer les franges d'égale épaisseur d'une lampe à vapeur de sodium.
- Intercaler une cellule transparente dans un des bras du Michelson et retrouver les franges.
- Faire le vide dans la cellule (0.5 bar suffisent). Les franges se déplacent.
- Rétablir progressivement la pression atmosphérique et compter les franges qui défilent.
- Connaissant la longueur d'onde du doublet du sodium et l'épaisseur de la cellule, en déduire l'indice de l'air. Comparer avec la valeur tabulée.

> Les vibrations dues à la pompe altèrent beaucoup la qualité des figures observables.

2 Mesures spectroscopiques

La plupart des interféromètres de Michelson de la collection sont munis d'un moteur permettant de translater le miroir lentement ; on l'utilisera pour compter des franges précisément, la translation se lisant ensuite sur le vernier.

2.1 Mesure d'une longueur d'onde

L'expérience est proposée par Sextant [1, p. 328]. Elle est conceptuellement importante, mais la monter ne fait pas partie des priorités du TP.

- Régler l'interféromètre de Michelson en configuration lame d'air. S'éloigner du contact optique pour obtenir des anneaux d'égale inclinaison avec la lampe étudiée.
- Mesurer le déplacement du chariot nécessaire pour faire défiler N anneaux ($N = 100$ par exemple).
- En déduire la longueur d'onde de la source. Quelle précision peut-on obtenir ? Connaissez vous une méthode plus précise ?

2.2 Écart en longueur d'onde du doublet du sodium

La couleur jaune des lampes à vapeur de sodium est dûe à un doublet de longueurs d'onde $\lambda_1 = 589.0\,\mathrm{nm}$ et $\lambda_2 = 589.6\,\mathrm{nm}$. La longueur d'onde moyenne du doublet peut être déterminée avec précision par exemple à l'aide d'un réseau, mais ce n'est pas le cas de l'écart en longueur d'onde, qui nécessite une mesure interférométrique. L'expérience est très classique et présentée dans presque tous les livres traitant d'interférences. Vous la trouverez par exemple dans celui de Sextant [1, p. 219] ou de Duffait [10, p. 36].

- Éclairer l'interféromètre par une lampe à vapeur de sodium et le régler en configuration lame d'air.
- Translater le miroir mobile de l'interféromètre pour s'éloigner du contact optique. On observe une succession de coïncidences et d'anticoïncidences. Pour avoir la meilleure précision possible, il faut observer le plus grand nombre d'anticoïncidences possible, et donc translater le miroir mobile suffisamment.
- Revenir ensuite vers le contact optique, et relever la position x_p du miroir mobile par lecture du vernier à chaque anticoïncidence p.

  > *Les anticoïncidences sont plus faciles à repérer que les coïncidences, pourquoi ?*

- En traçant x_p en fonction de p et en connaissant la longueur d'onde moyenne λ_0 du doublet, déterminer l'écart entre les longueurs d'onde $\Delta\lambda$ en utilisant la relation suivante (que vous êtes invités à démontrer).

$$x_p = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda}\,p + C^{te}. \tag{1}$$

- Comparer à la valeur tabulée. Quelle est l'incertitude sur cette mesure ? Discuter de la précision du résultat.

Lorsque l'interféromètre est très loin du contact optique, le contraste des coïncidences diminue drastiquement. Pourquoi ?

2.3 Spectroscopie par transformée de Fourier

2.3.1 Principe

Considérons un Michelson en lame d'air éclairé par une raie (ou un doublet, par exemple celui du sodium) de nombre d'onde moyen $\sigma_0 = 1/\lambda_0$. Pour une différence de marche δ entre les deux bras, l'éclairement au centre des anneaux vaut

$$\mathcal{E}(\delta) = \mathcal{E}_0\big[1 + \Gamma(\delta)\cos(2\pi\sigma_0\delta)\big] \tag{2}$$

Le contraste local $\Gamma(\delta)$ (correspondant à l'enveloppe) est le module de la transformée de Fourier du spectre de la source, auquel on peut donc remonter. Le principe de la spectrométrie par TF est expliqué avec beaucoup de détail et surtout d'exemples par Sextant [1, p. 232], mais vous pouvez aussi lire avec profit la présentation qu'en fait Duffait [10, p. 77].

Une telle méthode permet donc d'accéder à la largeur spectrale des raies constituant la source, et donc d'estimer sa longueur de cohérence temporelle. Par exemple, une raie gaussienne donnera un interférogramme dont le contraste en fonction du déplacement du chariot est gaussien. La largeur de cette gaussienne mesurée permet de déduire celle de la gaussienne de départ.

Le point délicat est donc de pouvoir mesurer fidèlement le contraste Γ sur une plage de différence de marche δ suffisamment grande pour que les phénomènes étudiés soient observables. Il est tentant d'utiliser cette expérience pour comparer l'élargissement spectral de lampes à vapeur de mercure haute pression et basse pression, comme propose Sextant. En pratique, cela ne marche pas très bien (parce que les raies des lampes à décharge sont peu élargies) et

nous vous suggérons de commencer par mesurer la largeur d'un filtre interférentiel (dont le spectre beaucoup plus large), et seulement ensuite de vous intéresser aux lampes spectrales.

2.3.2 Réalisation à l'aide du moteur

Ce protocole est théoriquement celui qui donne accès aux meilleurs résultats, mais il ne donne généralement pas les résultats escomptés. Il me semble toutefois important de monter cette expérience pour en comprendre le principe et les limitations.

- Régler l'interféromètre en lame d'air avec la lampe à étudier, éventuellement associée à un filtre interférentiel pour isoler une de ses raies.
- Placer un détecteur linéaire de petite surface au centre des anneaux : prendre par exemple une photodiode, le mieux est la Thorlabs à gain réglable PIN35. Préparer une acquisition de plusieurs minutes à l'aide d'un logiciel type Synchronie ou LatisPro, il peut être utile voire nécessaire d'ajouter un filtre passe-bas.
- Démarrer l'acquisition, puis allumer le moteur du Michelson pour se rapprocher du contact optique (faire rentrer les anneaux).
- Calculer une FFT à partir d'une plage pertinente du signal mesuré, et en déduire le spectre de la source en connaissant la vitesse v de déplacement du moteur qui permet de remonter à $\delta(t)$.

> *Faites vraiment les calculs, en réfléchissant trois fois aux facteurs 2! D'expérience, vous devez obtenir une valeur plausible pour la longueur d'onde moyenne, mais la largeur de raie obtenue n'a probablement aucun sens.*

Pourquoi ça ne marche pas? Plusieurs réponses sont envisageables.

- Certains moteurs ne tournent pas de manière assez régulière, et ne vérifient pas du tout $\delta \propto vt$. Leur comportement présente des fluctuations de la vitesse de translation, ce qui a pour effet d'élargir artificiellement les raies mesurées. Encore plus critique, des défauts d'axe peuvent[1] empêcher la translation de se faire parallèlement à la normale au miroir : un couple parasite modifie progressivement le réglage de lame d'air en coin d'air en « tordant » le support sur lequel est monté le miroir.
- Idéalement, le détecteur placé au centre des anneaux devrait être ponctuel. Sa largeur finie provoque un élargissement effectif des raies, et on obtient une valeur aberrante, en tout cas pour les lampes basse pression (car leur largeur spectrale est du même ordre, voire petite devant cet élargissement artificiel)[2].

> *Ces deux problèmes devraient pouvoir être résolus. Il est possible d'utiliser un laser de référence et d'effectuer une « transformée de Hilbert » pour s'affranchir des fluctuations de vitesse des moteurs (voir l'article [18] du BUP 815(2)), et il est envisageable d'utiliser e.g. un capteur CCD avec des pixels assez petits pour réduire suffisamment l'élargissement artificiel des raies. L'auteur de ces lignes n'a pas encore essayé. Quoiqu'il en soit, n'oubliez pas de faire ça tant que vous ne maîtriserez pas le reste des manips du TP!*

2.3.3 Réalisation manuelle

Pour éviter les problèmes dus au moteur, il est possible de réaliser l'expérience à la main.

- Régler l'interféromètre en lame d'air avec la lampe à étudier, éventuellement associée à un filtre interférentiel pour isoler une de ses raies. Placer une barrette CCD, type Calina, au centre des anneaux.
- Pour plusieurs différences de marche δ, mesurer le contraste local $\Gamma(\delta)$ à l'aide du logiciel associé à la barrette CCD. Pour cela, considérer deux anneaux brillant et sombre consécutifs :

$$\Gamma(\delta) = \frac{\mathcal{E}_{\text{brillant}} - \mathcal{E}_{\text{sombre}}}{\mathcal{E}_{\text{brillant}} + \mathcal{E}_{\text{sombre}}} \tag{3}$$

En principe, si vous avez mesuré suffisamment de points, vous pouvez faire une TF de la courbe obtenue. En pratique, il est plus raisonnable d'estimer un ordre de grandeur de sa largeur (éventuellement par un fit) et d'en déduire un ordre de grandeur de la largeur spectrale de la raie étudiée. Une solution intermédiaire consiste à calculer la transformée de Fourier du fit, ce qui ne sera pertinent que si le fit est de bonne qualité.

(1). Pour vérifier si c'est le cas avec votre interféromètre, vous pouvez régler l'interféromètre en coin d'air où faire défiler les franges avec le moteur. Si leur direction change (elles tournent), c'est le signe que l'axe du coin d'air n'est pas préservé par le moteur.

(2). Pour plus de détails, je vous invite à consulter le document http://polymes.esc.fr/lasmarcom/documents/Spectre.pdf.

2.3.4 Spectrométrie statique par TF (en seconde lecture)

Une très jolie expérience décrite dans le BUP 967 [12] permet de réaliser de la spectroscopie par transformée de Fourier en utilisant une barrette CCD, ce qui permet d'enregistrer le spectre d'une source d'un coup (sans déplacer le chariot). L'expérience est donc nettement plus rapide! La résolution n'est hélas pas suffisante pour étudier la largeur des raies.

3 Spectrométrie à l'aide d'une cavité d'analyse Fabry-Pérot

On se restreint ici à l'usage d'une cavité d'analyse Fabry-Pérot. Des mesures utilisant un vrai interféromètre de Fabry-Pérot sont proposées section 4.

3.1 Motivations

À l'aide d'une cavité d'analyse Fabry-Pérot, il est possible de montrer qu'un laser n'émet pas une unique raie mais un spectre composé de plusieurs raies discrètes. Comme ces raies sont très rapprochées, la longueur de cohérence temporelle du laser demeure très grande, et le détail du spectre n'est pas observable avec un interféromètre de Michelson, qui ne permet pas d'atteindre des différences de marche suffisantes.

> *Rappelons que la longueur de cohérence temporelle est l'ordre de grandeur de la différence de marche à partir de laquelle les effets de polychromatisme se manifestent.*

On utilise donc plutôt un interféromètre de type Fabry-Pérot, où les interférences à ondes multiples permettent d'obtenir une bien meilleure précision sur le spectre de la source. L'analyse théorique de l'interféromètre de Fabry-Pérot se trouve par exemple dans les livres de R. Taillet [23, p. 168] et S. Huard [15, p. 235], qui mettent tous les deux l'accent sur la spectroscopie. À propos du fonctionnement des lasers, consulter le livre de D. Dangoisse [8].

3.2 Analyse théorique

On utilise ici une cavité de marque Melles-Griot (P17.11) pour étudier les modes longitudinaux d'un laser hélium-néon. Il s'agit d'une cavité Fabry-Pérot à miroirs sphériques, comme représenté figure 1. Utiliser la notice pour comprendre comment est réalisée la cavité et comment elle est pilotée. L'expérience est décrite par Duffait [10, p. 97].

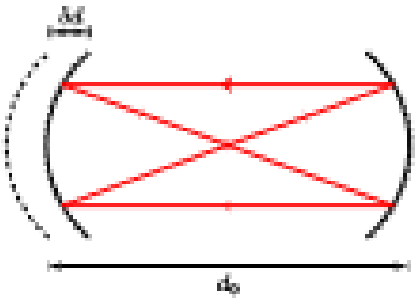


Figure 1 – Cavité d'analyse. Un des miroirs d'une cavité Fabry-Pérot est déplacé périodiquement par un actuateur piézo-électrique, ce qui modifie sa longueur.

Les foyers des deux miroirs étant confondus, on parle de cavité confocale. On envoie sur ce Fabry-Pérot une lumière à analyser, ici celle d'un laser. On peut montrer qu'un rayon lumineux quelconque dans la cavité se superpose à lui même après deux réflexions sur chaque miroir. Il a parcouru alors une distance $4d$, où d est la distance entre les miroirs. La condition de résonance de la cavité (on parle aussi de condition d'accord de phase) s'écrit dans ces conditions

$$4d = k\lambda \qquad \text{où } k \in \mathbb{N} \tag{4}$$

On fait varier la longueur de la cavité en appliquant une tension à un cristal piézo-électrique. Ces variations sont très faibles et l'on note :

$$d = d_0 + \delta d\,, \qquad \delta d \ll d_0 \tag{5}$$

La condition de résonance n'est alors plus vérifiée pour la même longueur d'onde λ, ou pour la même valeur de l'ordre d'interférence k. En plaçant un photodétecteur en sortie de la cavité Fabry-Pérot, on reçoit un signal pour les différentes longueurs d'onde (à un ordre k donné) ou les différents ordres (à un λ donné) qui satisfont à la condition de résonance. Supposons que la condition de résonance soit vérifiée pour la distance d et la longueur d'onde λ_1 . On a $4(d_0 + \delta d_1) = k\lambda_1$. Pour l'ordre d'interférence suivant, on doit avoir une variation δd de la longueur de la cavité telle

que $4(d_0 + \delta d_1 + \delta d) = (k+1)\lambda_1$, soit

$$\delta d = \frac{\lambda_1}{4} \tag{6}$$

En revenant à l'ordre k, on a une résonance pour une longueur d'onde λ_2 si $4(d_0 + \delta d_2) = k\lambda_2$, soit

$$\delta d_1 - \delta d_2 = \frac{k}{4}(\lambda_1 - \lambda_2) \tag{7}$$

On préfère en général travailler avec les fréquences. Les deux équations précédentes s'écrivent

$$\delta d = \frac{c}{4\nu_1} \qquad \text{et} \qquad \delta d_1 - \delta d_2 = \frac{kc}{4}\left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2}\right) \tag{8}$$

Ces deux quantités sont celles que l'on peut mesurer. On ne connaît pas k, mais il est légitime de le supposer grand : on a alors $k \approx 4D/\lambda_1$. De plus, la largeur spectrale du laser étant très étroite, les différentes fréquences mesurées seront proches. Les deux équations s'écrivent donc en introduisant la fréquence moyenne $\nu = (\nu_1 + \nu_2)/2$:

$$\delta d = \frac{c}{4\nu} \qquad \text{et} \qquad \delta d_1 - \delta d_2 = \frac{\delta c}{4\nu}(\nu_2 - \nu_1) \tag{9}$$

d'où

$$\frac{\delta d_1 - \delta d_2}{\delta d} = \frac{\nu_2 - \nu_1}{c/4D} \tag{10}$$

On peut donc déterminer l'écart de fréquence entre deux modes du laser par une simple règle de trois en mesurant à l'écran de l'oscilloscope la distance entre ces deux modes et la distance entre deux pics analogues correspondant au même mode mais à deux ordres d'interférence successifs. Les écarts de distance sont proportionnels au temps car on applique une rampe de tension sur le cristal piézo-électrique. La quantité $c/4D$ est appelée étendue spectrale libre (en anglais, Free Spectral Range, soit FSR) et est une propriété de la cavité Fabry-Pérot (à chercher dans la notice).

3.3 Réalisation expérimentale

- Choisir un laser hélium-néon non polarisé.
- Aligner le laser avec la cavité d'analyse, et observer le spectre obtenu.

N'hésitez pas à consulter le livre de Duffait [10, p. 97] pour vous guider dans les interprétations.

▷ Expliquer la courbe en cloche dans laquelle prennent place les modes du laser.

▷ Si le laser est en fonctionnement depuis moins d'une heure, on observe un déplacement des modes. Quelle explication peut-on donner ?

La mesure de la largeur des pics peut se faire si celle-ci est supérieure à la résolution du Fabry-Pérot. Connaissant sa finesse, déterminer la résolution de la cavité : est-elle suffisante ? De ces analyses déduire la longueur caractéristique de la cohérence temporelle du laser étudié ($L = c/\Delta\nu$).

Pour compléter cette expérience, il est intéressant de visualiser la polarisation des modes du laser :

- Placer un polariseur entre le laser et la cavité Fabry-Pérot. En le tournant vous devez faire disparaître certains modes. On a généralement des polarisations rectilignes des modes, deux modes successifs étant croisés (il s'agit d'un phénomène complexe de compétition de modes, et les phénomènes ne sont pas toujours reproductibles, mais l'expérience marche généralement bien avec un laser hélium-néon rouge).

4 Mesures possibles avec un interféromètre de Fabry-Pérot (en seconde lecture)

D'autres expériences pertinentes sont possibles avec un tel interféromètre : si elles vous intéressent dans un second temps, reportez-vous comme toujours à Sextant [1, p. 252] et Duffait [10, p. 94].

▷ **Mesure du doublet du sodium :** Avec un interféromètre de Michelson, on peut observer un brouillage des anneaux dû à l'antécédence des deux systèmes donnés par chacune des raies du doublet. A-t-on le même phénomène avec l'interféromètre de Fabry-Pérot ? Comment mesurer l'écart entre les deux raies D du sodium ?

▷ **Mesure du rapport M_p/m_e :** En utilisant une lampe spectrale hydrogène-deutérium, on peut mesurer l'écart de longueur d'onde entre les raies de la série de Balmer de l'hydrogène et du deutérium, et en déduire le rapport M_p/m_e de la masse du proton par celle de l'électron.

TP 4 – Diffraction

Dernière modif. : 2020/08/18 par ???

Objectifs

Ce TP concerne le phénomène de diffraction et certaines de ses conséquences. L'application de la diffraction à la spectroscopie (réseau) fait l'objet du TP *Spectroscopie*. Au cours de la séance, vous devrez

- ▷ caractériser les deux régimes de Fraunhofer et de Fresnel pour la diffraction par une pupille simple ;
- ▷ les étudier quantitativement ;
- ▷ caractériser l'influence du nombre d'objets diffractants dans le régime de Fraunhofer ;
- ▷ illustrer les propriétés de la diffraction de Fraunhofer en lien avec la transformation de Fourier.

1 Différents régimes de diffraction

1.1 Nombre de Fresnel

Pour caractériser les différents régimes de diffraction, trois longueurs caractéristiques représentées figure 1 entrent en jeu : la taille caractéristique de l'objet diffractant a, la longueur d'onde λ et la distance D entre la pupille diffractante et l'écran d'observation.

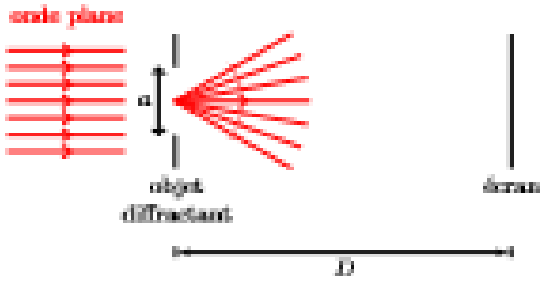


Figure 1 – Échelles caractéristiques en diffraction.

On peut construire à partir de ces grandeurs caractéristiques un nombre sans dimension appelé nombre de Fresnel, défini[1] comme

$$\mathcal{F} = \frac{a^2}{D\lambda} \tag{1}$$

Mathématiquement, $\mathcal{F}$ représente l'ordre de grandeur des termes d'ordre 2 dans le développement de la phase dans le principe de Huygens Fresnel. Plus de détails à ce sujet sont donnés dans les livres de R. Taillet [23, p. 130] et S. Houard [15, p. 301]. Selon la valeur de ce nombre, on distingue deux régimes limites diffraction :

- ▷ si $\mathcal{F} \ll 1$ la diffraction est dite en champ lointain ou en régime de Fraunhofer ;
- ▷ si $\mathcal{F} \gg 1$ la diffraction est dite en champ proche ou en régime de Fresnel.

Rappelons que la diffraction de Fraunhofer ne se limite pas au cas d'école de l'observation à l'infini, mais est également celle qui est observée au voisinage des images géométriques. Ce dernier point lui confère une grande importance pratique.

1.2 De Fresnel à Fraunhofer

L'expérience présentée ici est décrite par Sextant [1, p. 141] : reportez-vous au livre pour les détails du protocole et le schéma de l'expérience.

- **#** Former une source quasi-ponctuelle en faisant converger un faisceau laser avec une lentille de courte focale ou un objectif de microscope comme représenté figure 2. À l'aide d'une lentille de plus grande focale (de l'ordre de 30 cm), former l'image du point source sur un écran.
- **#** Placer une fente réglable juste derrière la deuxième lentille et la fermer jusqu'à obtenir une figure de diffraction bien étalée : il s'agit de la figure de diffraction de Fraunhofer. Comme signature caractéristique, déplacer la fente dans son plan : la figure de diffraction n'est pas modifiée.

(1). Il s'agit d'une définition qualitative en ordre de grandeur : il est général nécessaire de spécifier la définition au cas particulier étudié.

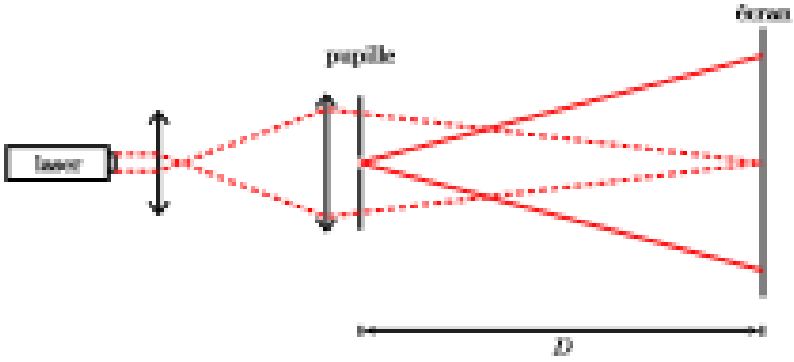


Figure 2 – Diffraction à partir d'une source quasi-ponctuelle. La source quasi-ponctuelle est fabriquée en faisant converger un faisceau laser à l'aide d'une lentille de courte focale.

> *Ce résultat est caractéristique de la diffraction de Fraunhofer. Pour le comprendre qualitativement, se rappeler que cette dernière a lieu à l'image géométrique de la source, qui n'a pas bougé.*

- Rapprocher l'écran de la fente. Au bout de quelques centimètres, l'invariance par translation de la fente n'est plus vérifiée. Encore plus près, des franges sombres finissent par apparaître dans la tâche centrale. On a alors atteint le régime de diffraction de Fresnel : la figure de diffraction prend place *à l'intérieur* du faisceau géométrique, et les propriétés d'invariance par translation de la fente ne sont pas non plus vérifiées.
- En déplaçant l'écran dans l'autre sens, on repasse dans le régime de Fraunhofer, puis de nouveau dans le régime de Fresnel une fois l'image du point source dépassée.

2 Diffraction de Fresnel

Duffait [10, p. 59] propose une étude quantitative de la figure de diffraction de Fresnel par une ouverture circulaire. Reportez-vous au livre pour monter et comprendre l'expérience. Attention, les notations qu'il utilise diffèrent de celles de la section 1. L'indice k qu'il utilise correspond au nombre de Fresnel introduit précédemment : vous en avez là une interprétation plus physique, en termes de zones de Fresnel.

- Réaliser le montage de la figure 26 du livre de Duffait [10, p. 59], mais sans la lentille L_2 qui a le mérite de grossir la figure de diffraction mais le gros inconvénient de compliquer les manipulations. La lentille L_2 joue le rôle de *lentille de projection* : à quoi cela correspond-il ? Au besoin, demandez à un encadrant.

> *Deux points sont critiques pour la réussite de l'expérience. Le premier est la qualité du trou utilisé comme pupille diffractante, qui doit avoir des bords parfaitement nets. Le second est la qualité de l'alignement du faisceau laser, du trou et du lieu d'observation. L'utilisation d'un banc optique est incontournable pour la bonne réussite de l'expérience.*

- Faire varier la distance d'observation b en déplaçant la lentille L_2. Remarquez que le centre de la figure de diffraction passe en alternance de sombre à brillant.

> *La relation entre lieu d'observation, position de la lentille et écran découle immédiatement de la relation de conjugaison. Déplacer l'écran en laissant la lentille fixe produirait le même effet que déplacer la lentille sans toucher à l'écran.*

- À l'aide d'une régression linéaire, vérifier la relation donnée par Duffait. Connaissant la longueur d'onde du laser, en déduire le rayon du trou et la distance source-trou.

> *L'expérience donne habituellement des résultats convenables : si les ordres de grandeurs sont aberrants, vérifiez les calculs.*

3 Diffraction de Fraunhofer

3.1 Diffraction par une fente ou un trou circulaire

L'expérience proposée ici est décrite par Sextant [1, p. 100]. Elle est décrite avec une fente fine, mais si vous préférez vous pouvez tout aussi bien utiliser un trou.

- Avec un laser, former un point source et son image sur un écran de la même façon que pour l'expérience présentée section 1.2, voir figure 2. Placer une fente réglable, idéalement en largeur et en orientation, contre la lentille.

- Mettre en évidence les propriétés de la diffraction de Fraunhofer : la figure de diffraction s'étale quand on ferme la fente, est perpendiculaire à cette dernière (faire tourner la fente) et elle est sensible à la translation du point source mais pas à celle de la fente diffractante. Interpréter ces résultats à l'aide des propriétés de la transformée de Fourier.

  > *Rappelons que l'éclairement d'une figure de diffraction de Fraunhofer correspond au module carré de la transformée de Fourier spatiale de la fonction de transparence de l'objet diffractant. C'est une conséquence du principe de Huygens Fresnel dans la limite de Fraunhofer. Pour des rappels rapides, reportez-vous au livre de Sextant [1, p. 105]. Pas de panique si vous avez besoin de « rappels » plus conséquents, ils seront traités en cours. Vous pouvez aussi vous reporter au livre de E. Hecht [14, ch. 10 et 11], qui présente toutefois l'inconvénient d'être très mathématique.*

- Vérifier que la figure de diffraction vérifie la forme théorique attendue, par exemple en repérant les positions des minima d'intensité .

  > *L'étude quantitative est à mener seulement si vous avez le temps : les expériences suivantes sont plus importantes. Pour avoir de beaux résultats dans l'étude quantitative, il est chaudement conseillé de remplacer la fente réglable par une fente déjà montée sur un support et dont la taille est indiquée. Ces fentes sont de bien meilleure qualité car fabriquées spécialement pour l'étude de la diffraction.*
  >
  > *Rappelons que pour une abscisse X sur l'écran comptée par rapport à l'image géométrique de la source et les notations définies section 1.1, l'éclairement diffracté par une fente est*
  >
  > $$\mathcal{E}(X) \propto \mathrm{sinc}^2\left[\frac{\pi\, a\, X}{\lambda\, D}\right] \tag{2}$$

3.2 Théorème de Babinet (en deuxième lecture)

Le théorème de Babinet stipule que les figures de diffraction de deux objets complémentaires sont les mêmes excepté à l'image géométrique de la source. Sextant [1, p. 112] indique comment illustrer quantitativement ce théorème.

- Illustrer le théorème à l'aide de diapositives représentant un trait opaque et la fente complémentaire.

  > *En pratique, les figures de diffraction diffèrent non seulement à l'image géométrique, mais aussi un peu autour. Pourquoi ?*

3.3 Diffraction par plusieurs objets identiques

Un cas important de diffraction est celui d'une pupille composée de plusieurs motifs identiques. La répartition des motifs joue alors un rôle clé, puisque la figure de diffraction est basée des interférences des ondes diffractées par chaque motif individuel.

3.3.1 Mise en évidence du phénomène

Commençons par illustrer ces interférences. Sextant [1, p. 115] propose de faire l'expérience avec une bifente (fentes d'Young), mais je pense qu'elle est plus spectaculaire avec deux trous (trous d'Young) car les figures de diffraction et d'interférences n'ont pas les mêmes symétries, ce qui permet de distinguer aisément où intervient chaque phénomène.

- Partir du montage représenté figure 2 pour former la figure de diffraction par un puis deux trous. Interpréter *(a)* en termes d'interférences, *(b)* de transformée de Fourier et *(c)* de facteur de forme et de structure.

  > *Au besoin, vous pouvez vous aider des explications de Sextant [1, p. 115] pour l'interprétation.*

3.3.2 Les objets sont répartis régulièrement

- Répéter l'expérience avec quelques fentes et/ou quelques trous. Interpréter en termes de facteur de forme et de structure. Comparer les amplitudes relatives des maxima principaux et secondaires.

> *Des schémas représentant l'éclairement sur l'écran sont donnés par Duffait [10, p. 41]*

- Au passage, vérifier que la signature caractéristique de la diffraction de Fraunhofer est (heureusement) préservée : la figure est insensible à une translation de l'objet diffractant dans son plan.

- Dans la limite où le nombre de fentes devient grand, on parle d'un réseau de diffraction. Vérifier que seuls les maxima principaux sont visibles.

> *L'étude exhaustive des réseaux de diffraction faisant l'objet d'une partie du TP Spectroscopie, nous n'y passons pas plus de temps ici.*

3.3.3 Les objets sont répartis aléatoirement

On propose ici d'étudier la diffraction par une poudre de lycopodes. Les lycopodes sont une famille de plantes[2] dont les spores ont un diamètre typique de 20 µm. L'expérience est proposée par Sextant [1, p. 123].

- Utiliser la diapositive couverte de spores de lycopode (la plus poussiéreuse du classeur, et de loin). Former sa figure de diffraction sur l'écran, toujours par le montage représenté figure 2.

- On observe une tâche de diffraction typique d'un objet circulaire, mais beaucoup plus lumineuse. Interpréter une nouvelle fois en termes de facteur de structure et de facteur de forme.

> *Lire si besoin les explications données par Sextant [1, p. 123].*

- Estimer un ordre de grandeur de la taille des spores.

4 Optique de Fourier

4.1 Voir une image et sa transformée de Fourier

Dans la suite, nous nous intéressons à une conséquence des propriétés de Fourier du phénomène de diffraction : le filtrage des fréquences spatiales. Rappelons que la figure de diffraction de Fraunhofer correspond à la transformée de Fourier spatiale de l'objet diffractant. C'est donc les fréquences spatiales de ce dernier qui sont impliquées. En particulier, la forme exacte de la source ne joue aucun rôle.

Les expériences de filtrage peuvent se faire avec un laser ou une lampe QI mais vous ne pourrez pas visualiser les mêmes choses. L'action du filtrage sur l'image est visible dans les deux cas. En revanche la visualisation du plan de Fourier, c'est-à-dire le plan dans lequel on voit la figure de diffraction, est bien mieux observable avec le laser.

> *Pensez à tester cette affirmation. Il est intéressant de comprendre l'origine du phénomène : en lumière blanche la figure de diffraction n'est pas visible à cause d'un problème de cohérence temporelle. Demandez à un encadrant si besoin.*

Le plan de Fourier est par définition le plan contenant la figure de diffraction. Il s'agit ici d'identifier les fréquences spatiales et de visualiser l'influence de ces fréquences sur l'image géométrique d'un objet diffractant. Les fréquences (points lumineux) les plus proches de l'axe optique sont les basses fréquences, et celles en périphérie constituent les hautes fréquences. L'expérience décrite est proposée par Sextant [1, p. 128], et le montage représenté figure 3

- Placer un point source (faisceau laser convergent) au foyer objet d'une lentille (L_1). Ajouter un objet diffractant (commencer par une grille de pas très petit) derrière la lentille (L_1). Ajouter une deuxième lentille (L_2) de façon à former l'image de la grille sur un écran.

> *En déplaçant l'écran, vous avez accès au choix à la figure de diffraction et à l'image de l'objet diffractant. La figure de diffraction est située dans le plan focal image de (L_2) (pourquoi ?).*
>
> *Le choix de la grille est important : un pas du quadrillage trop grand conduira à une figure de diffraction trop resserré dans le plan de Fourier pour être exploitable.*

(2). http://fr.wikipedia.org/wiki/Lycopodiales

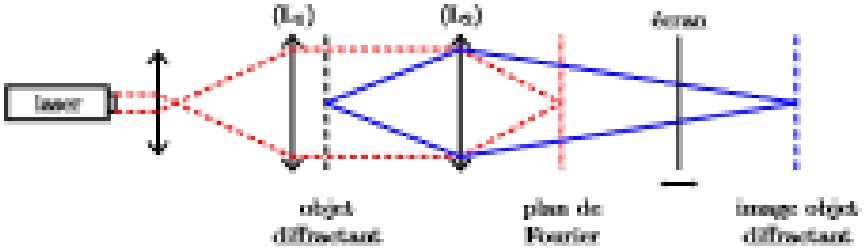


Figure 3 – Montage pour les expériences de filtrage. Déplacer l'écran permet de voir au choix le plan de Fourier et l'image de l'objet diffractant.

4.2 Filtrage des fréquences spatiales

Il s'agit maintenant de modifier à volonté la transformée de Fourier de l'objet diffractant et d'en analyser les conséquences sur l'image.

4.2.1 Analyse qualitative, expérience d'Abbe

- Modifier les composantes spectrales spatiales transmises en plaçant dans le plan de Fourier un diaphragme, une fente ou tout autre dispositif permettant d'occulter une partie des fréquences spatiales. Interpréter systématiquement les observations.

> *Vous pouvez bien évidemment changer d'objet diffractant ou sélectionner différentes fréquences pour réaliser un filtrage passe-bas ou passe-haut, et observer le résultat sur l'image.*
>
> *On fait ici du filtrage au sens le plus strict : on enlève certaines fréquences de la transformée de Fourier.*
>
> *L'expérience historique d'Abbe et Porter (fin du XIXe et début du XXe siècle) consiste à filtrer l'image d'une grille en insérant une fente dans le plan de Fourier.*

Dans un second temps, quand vous serez plus familiers avec les concepts d'optique de Fourier, la lecture du paragraphe de Scotant [1, p. 132] sur la réciprocité de la transformée de Fourier optique permettra de compléter utilement votre compréhension de cette expérience.

Dans la suite, nous proposons de travailler en lumière blanche et de se concentrer sur le traitement des images.

4.2.2 Strioscopie et schlieren

Un objet diffractant n'est pas forcément qu'un « trou » parfaitement transparent à bords parfaitement opaques : il peut également s'agir d'un objet complètement transparent mais qui altère la phase de l'onde traversée, par exemple parce que son indice optique n'est pas uniforme. Un phénomène de diffraction a lieu et bien lieu, et convertit alors les modulations de phase en modulations d'éclairement. Si ces modulations sont faibles, il est intéressant d'enlever sur la figure de diffraction l'intensité non diffractée (appelée aussi mode 0 dans l'espace de Fourier) pour améliorer le contraste.

- Prendre une plume avec des bords nets comme objet diffractant.
- Placer dans le plan de Fourier une tête d'épingle ou tout autre dispositif permettant d'occulter le mode 0, situé à l'intersection du plan de Fourier et de l'axe optique. Interpréter l'allure de l'image filtrée.

> *Vous pouvez remplacer l'objet diffractant par un dispositif permettant d'élever un film de savon. Sans filtrage, les mouvements de fluide à l'intérieur du film sont peu visibles. En revanche, en effectuant l'opération de filtrage, les canaux de vidange sont les seuls à être visible. Pourquoi ?*

4.2.3 Détramage

- Prendre une photo tramée comme objet diffractant et un diaphragme circulaire comme filtre.

> *Une diapositive tramée représentant Joseph Fourier est disponible dans les chaumes bleus. Vous verrez alors la transformée de Fourier de Fourier.*

- Fermer le diaphragme et observer la disparition des hautes fréquences, c'est-à-dire des composantes spectrales spatiales contenant l'information sur le tramage. On perd également les détails (variations spatiales brutales) sur l'image.

4.3 Épurateur de faisceau

Un épurateur permet d'élargir un faisceau laser tout en conservant sa cohérence spatiale. Il utilise un élargisseur de faisceau à deux lentilles, et du filtrage de hautes fréquences spatiales. Le principe de l'épuration est présenté par Sextant [1, p. 195], mais on conseille d'utiliser un véritable épurateur plutôt que le dispositif qu'il envisage.

Un objectif de courte focale focalise le faisceau sur un trou micrométrique placé au foyer d'une lentille de plus grande focale. Le faisceau est élargi dans un rapport égal au rapport des focales, et est d'autant plus cohérent spatialement que le trou est petit et correctement aligné. C'est ici aussi une sélection du mode 0 par filtrage passe-bas.

- S'entraîner à régler l'épurateur, ce qui demande de l'ouvrir. Le réglage consiste à placer le trou exactement centré sur le point de convergence du laser. Cela peut vite être fastidieux lorsque vous n'avez pas encore l'habitude. Demandez à un encadrant de vous montrer.
- Analyser l'influence de ces déplacements (anneaux, perte d'intensité) pour mieux comprendre le réglage de l'épurateur.

5 Résolution des instruments d'optique, critère de Rayleigh

La diffraction par les montures des lentilles constitue une limitation intrinsèque aux performances des instruments d'optique. C'est pour cela que ces derniers utilisent en général des lentilles de très grand diamètre. La lecture à ce sujet du livre de S. Hossed [15, ch. 7] est enrichissante. L'expérience proposée ici, proche de celles suggérées par Sextant [1, p. 135] et Duffait [10, p. 109], illustre cette limitation.

- Former sur un écran l'image agrandie d'une bifente d'Young.
- Diaphragmer la lentille avec une fente réglable jusqu'à ne plus séparer les deux fentes.
- Enlever la lentille de projection, et éclairer la seule fente diaphragme à l'aide d'un laser. La largeur de la tâche centrale sa figure de diffraction doit à peu près correspondre à l'écart entre les deux fentes qu'on observait sur l'écran.

> *L'expérience marche encore mieux avec un laser vert dont la longueur d'onde est plus voisine du maximum de sensibilité de l'œil.*
>
> *Le « à peu près » provient du fait que l'expérience de départ est réalisée en lumière blanche et en éclairage incohérent.*

TP 5 – Spectroscopie

Dernière modif. : 2020/08/18 par ???

Objectifs

La spectroscopie est l'étude de la composition spectrale d'une lumière : il s'agit essentiellement de déterminer quelles longueurs d'ondes sont présentes dans la lumière étudiée, et éventuellement en quelle « quantité ». Dans ce TP, on s'intéresse aux spectroscopes à fente utilisant un élément dispersif (prisme ou réseau), qui sépare spatialement les différentes composantes spectrales (dans le cas du visible, les différentes couleurs). Deux autres méthodes reposant sur le phénomène d'interférences sont étudiées dans un autre TP : il s'agit d'une part de la spectroscopie par transformée de Fourier, qui utilise un interféromètre de Michelson, et d'autre part de la spectroscopie à ondes multiples, qui utilise un interféromètre de Fabry-Pérot.

À la fin de la séance, vous devrez être en mesure de

- déterminer le spectre d'une lumière ;
- mesurer les caractéristiques d'un élément dispersif pour la spectroscopie et comprendre leur influence sur le spectre obtenu ;
- mettre en évidence et quantifier les propriétés d'absorption et d'émission lumineuse de la matière.

1 Observation d'un spectre sur un écran

1.1 Principe

Pour obtenir le spectre d'une lumière, on utilise un élément dispersif (prisme, réseau) qui sépare spatialement les couleurs. Un schéma de principe valant pour n'importe quel dispositif est représenté figure 1.

- La largeur de la fente d'entrée par laquelle passe la lumière à analyser contrôle à la fois la résolution spectrale et la luminosité du spectre : il faut trouver un compromis entre deux exigences antagonistes.
- L'élément dispersif doit être utilisé en lumière parallèle ce qui nécessite de le placer entre deux lentilles. La seconde lentille doit être de grande focale pour avoir un spectre suffisamment dispersé sur l'écran.
- En pratique, un montage avec une seule lentille donne des résultats comparables ; il faut alors que la lentille (de grande focale) soit placée avant l'élément dispersif, le plus près possible, et l'écran assez loin.
- Pour éviter les problèmes d'aberrations, utiliser des doublets achromatiques.

Ces grands principes sont présentés par Sextant [1, p. 215].

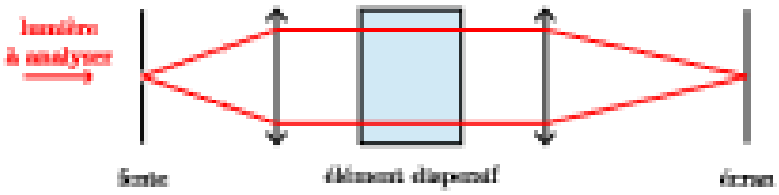


Figure 1 – Montage générique de spectroscopie par élément dispersif. L'image d'une fente sur un écran est réalisée par deux lentilles entre lesquelles le faisceau lumineux est parallèle (la première lentille conjugue la fente à l'infini, la seconde l'infini à l'écran). Dans la zone où le faisceau est parallèle, on intercale un élément dispersif (réseau ou prisme) qui sépare les composantes spectrales. Divers écarts à ce montage idéal sont faisables en pratique.

- Choisir une source de lumière à analyser (lampe QI, lampe spectrale), et réaliser le montage de la figure 1.
- En l'absence d'élément dispersif, obtenir l'image de la fente source sur l'écran.
- Placer ensuite l'élément dispersif aussi près que possible de la lentille (la première dans le montage à deux lentilles) pour perdre le moins de lumière possible.
- Observer l'influence de la largeur de la fente d'entrée.

1.2 Utilisation d'un prisme à vision directe

1.2.1 Généralités

Un prisme exploite la dispersion du verre (c'est-à-dire la dépendance de l'indice en la longueur d'onde) pour séparer les différentes composantes spectrales d'une lumière. Cependant, un prisme simple dévie beaucoup les faisceaux lumineux, ce qui rend son utilisation peu pratique pour projeter un spectre sur un écran.

Pour pallier cet inconvénient, on peut utiliser un prisme à vision directe, qui est un assemblage de plusieurs prismes accolés, taillés dans des verres différents. Grâce à un choix judicieux de forme et de matériau, la déviation moyenne est compensée, ce qui permet à un prisme à vision directe de ne pas dévier un faisceau d'une certaine longueur d'onde, tout en dispersant les autres longueurs d'onde autour de cette longueur d'onde centrale. On bénéficie ainsi de la dispersion d'un prisme, mais sans sa déviation. Le prisme à vision directe le plus souvent rencontré est le double prisme d'Amici, représenté figure 2.

Dans le cas des prismes, la relation entre la longueur d'onde et la position sur un écran n'est pas linéaire. En effet, la dispersion d'un verre est décrite par la loi de Cauchy, qui ne l'est pas :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \,. \tag{1}$$

On réserve donc les prismes, en général plus lumineux, à l'observation qualitative des spectres continus (spectre cannelé, absorption).

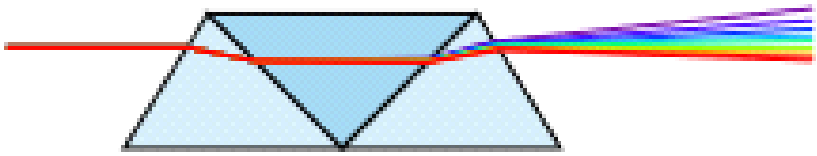


Figure 2 – Principe du prisme à vision directe. La marche des rayons dans un prisme à vision directe d'Amici est déterminée à partir des lois de Descartes. Le prisme d'Amici est composé de trois prismes accolés : un prisme central en verre flint, assez dispersif, encadré de part et d'autre par deux prismes en verre crown, peu dispersif. Les angles caractérisant ces prismes sont ajustés de manière à ce qu'une longueur d'onde centrale (généralement le centre du doublet D du sodium) ne soit pas du tout déviée.

1.2.2 Protocole de base

Présentons maintenant le protocole pour obtenir un spectre, que vous pouvez retrouver par exemple dans le Sextant [1, p. 217]. Un schéma du montage réalisé est représenté figure 3.

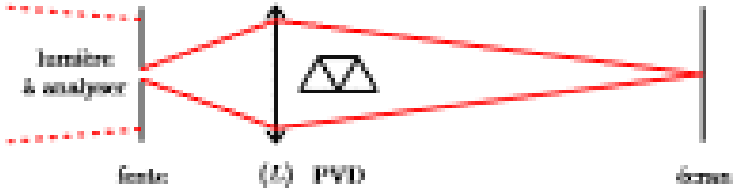


Figure 3 – Dispositif de projection d'un spectre par un prisme à vision directe. Une fente est introduite dans le faisceau lumineux à analyser, et son image est réalisée sur un écran. Un prisme à vision directe est intercalé entre la lentille de projection et l'écran, aussi loin que possible de l'écran.

- Placer une fente à l'endroit du montage où se trouve la lumière à analyser. En former l'image sur l'écran avec un achromat.

  > *Pour obtenir un spectre le plus lumineux possible, il peut être intéressant de condenser la lumière sur la fente.*
  >
  > *La lumière issue de chaque point de la source est dispersée sur l'écran autour de l'image du point en question. La largeur de la fente source contrôle donc simultanément la luminosité de l'image et la résolution du spectromètre : il s'agit d'un effet géométrique.*
  >
  > *Dans le cadre d'une expérience qualitative, la largeur de la fente n'est pas un paramètre critique, mais l'absence de fente conduit à un spectre de très mauvaise qualité.*

- Intercaler le prisme à vision directe juste après la lentille, puis ajuster son orientation pour optimiser la qualité de l'image.

> *Le prisme à vision directe est placé après la lentille pour éviter qu'elle ne mélange à nouveau les couleurs. En outre, le prisme fait correspondre un angle d'émergence à chaque longueur d'onde. Il faut donc placer le prisme à vision directe aussi loin que possible de l'écran pour que le spectre soit aussi étendu que possible.*

Une étude détaillée de l'influence de la largeur de la fente source et de la largeur éclairée du dispositif est proposée par Sextant [1, p. 218]. Le protocole étant bien détaillé, il n'est pas reproduit ici, mais vous êtes invités à monter l'expérience à partir du livre.

1.2.3 Remarques complémentaires

Placer une fente à l'endroit du montage où est la lumière à analyser peut ne pas être possible. C'est en particulier le cas pour analyser une figure d'interférences localisée. Il faut alors former l'image de la zone d'intérêt à un autre endroit où il est possible de placer une fente. Cela nécessite d'ajouter une lentille au montage.

Par définition, seules les couleurs appartenant au domaine visible peuvent être directement vues à l'œil. Il est toutefois possible de rendre observables des rais du proche ultraviolet, par exemple celles d'une lampe au mercure, en plaçant une feuille de papier sur l'écran. La fluorescence d'agents azurants[(1)] contenus dans le papier rend ces rais visibles en augmentant la longueur d'onde à laquelle elles apparaissent.

1.3 Utilisation d'un réseau de diffraction

Une fois encore l'étude d'un spectroscope à réseau est très bien détaillée par Sextant [1, p. 221]. Vous êtes invités à monter les expériences à partir des protocoles de ce livre. Pour vous guider dans l'interprétation des résultats en termes de diffraction et de transformée de Fourier, vous pouvez vous référer à la discussion menée par Sextant dans le chapitre sur la diffraction [1, pp. 112 à 122]. La spectroscopie à réseau faisait partie intégrante des programmes de CPGE jusqu'en 2014. N'hésitez donc pas à vous référer à des livres couvrant ces programmes si vous préférez une approche plus simple. Celui de M.N. Sanz [22, ch. 5] est par exemple complet et pédagogique.

1.3.1 Propriétés du réseau

- Reprendre le montage précédent avec un réseau, d'abord sous incidence normale, éclairé avec une lampe spectrale (Hg-Cd par exemple).
- Montrer et interpréter l'influence du nombre n de traits par unité de longueur, de l'ordre p et du nombre de traits éclairés du réseau en le diaphragmant par une fente.

  > *L'influence du nombre de traits éclairés est souvent délicate à mettre en œuvre.*

- Rechercher le minimum de déviation. On travaille à cet angle car le montage est alors le moins sensible à l'éventuel manque de parallélisme du faisceau incident. Il permet également de s'affranchir d'une mesure d'angle de référence.
- Vous pouvez ensuite reprendre le montage avec un réseau blazé et en montrer l'intérêt (la plupart de la lumière est concentrée dans un certain ordre, le spectre est donc plus lumineux).

1.3.2 Mesures relatives de longueurs d'onde

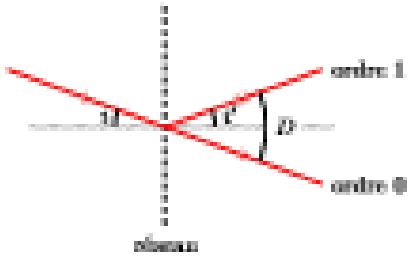


Figure 4 – Principe du réseau.

- Utiliser un réseau de nombre de traits par unité de longueur n grand. En tournant le réseau autour d'un axe vertical, repérer le minimum de déviation D.

On a alors $i = -i'$ et $D = 2i$, d'où à l'ordre p :

$$\frac{2\sin(D/2)}{n\lambda} = p. \tag{2}$$

(1). Les agents azurants sont des produits fluorescents, absorbant dans l'ultraviolet et émettant dans le bleu, de sorte que le papier et les tissus auxquels ils sont ajoutés apparaissent plus blancs (ils sont initialement plus ou moins jaunes).

- Repérer sur l'écran la position de deux raies connues et effectuer une interpolation linéaire entre ces deux raies connues pour calculer les longueurs d'onde des autres raies. Quelle précision peut-on avoir compte tenu des incertitudes de mesure et de l'approximation faite ? Comment améliorer cette précision ?
- Comparer cette précision avec celle d'une mesure absolue de longueur d'onde utilisant directement la formule des réseaux sans observer d'autres raies.

1.3.3 Mesures absolues de longueurs d'onde (en seconde lecture)

Pour des mesures absolues de longueurs d'onde, on utilise un goniomètre qui permet de mesurer des angles de déviation à $15''$ d'arc près. Néanmoins, le réglage du goniomètre est vite fastidieux et ne se prête pas vraiment à un travail en binôme : attendez un peu pour le travailler si vous le souhaitez.

Un protocole de réglage est proposé par R. Duffait [10, p. 136] ou M.N. Sanz [22, p. 180]. Ceux qui préfèrent une vidéo peuvent aller visiter le site de Gérald Vincent : http://gerald.vincent.free.fr/.

1.4 Comparaison entre prisme et réseau

Bien que donnant des résultats visuellement proches et s'utilisant dans des montages expérimentaux proches, un prisme et un réseau fonctionnent sur des principes complètement différents. Les prismes sont décrits par les lois de l'optique géométrique, alors que le fonctionnement d'un réseau repose sur la diffraction, qui est un phénomène ondulatoire. Malheureusement, beaucoup de confusion peut découler de ces « recettes » identiques.

Le rôle de chacune des composantes du montage diffère : prenez quelques minutes pour y réfléchir. Dans le cas du PVD, le montage sert à faire correspondre une position sur l'écran à un angle de réfraction en sortie du prisme. L'observation se fait autour de l'image géométrique car c'est là que le faisceau est d'extension la plus limitée et donc que l'étalement du spectre est le mieux visible (moins de recouvrement des différentes couleurs). Dans le cas du réseau, il s'agit de placer le réseau de diffraction dans les conditions de Fraunhofer. L'observation ne se fait autour de l'image géométrique de la fente que parce que c'est là qu'est la figure de diffraction de Fraunhofer. L'influence de la largeur de la fente doit rigoureusement s'interpréter en termes de source incohérente spatialement.

Les spectres obtenus avec un réseau sont en général moins lumineux que ceux obtenus avec des prismes. En effet, un réseau est une succession de fentes, et donc une fraction non négligeable de sa surface est opaque, ce qui limite d'autant la quantité de lumière le traversant. Toutefois, la dispersion d'un prisme à vision directe n'est pas linéaire vis-à-vis de la longueur d'onde, au contraire de la position des maxima d'intensité en sortie d'un réseau utilisé dans les conditions de Fraunhofer. On ne les utilise donc pas de façon complètement interchangeable.

2 Spectrométrie et applications

2.1 Utilisation d'un spectromètre commercial

Un spectromètre est composé d'une fente source, de deux miroirs sphériques, d'un réseau et d'une barrette CCD qui enregistre directement le spectre (pour des détails, lire le complément A). Nous disposons d'un spectromètre appelé SPID-HR de marque Ulice dont on peut ouvrir le capot pour observer les différents éléments[7]. Cet appareil se connecte à un ordinateur pour afficher et enregistrer les spectres. En consulter la notice au besoin.

- Ouvrir le capot de l'appareil, et identifier chacun des éléments du spectromètre à l'aide de la notice et/ou du complément A. Comment l'utilisation de deux miroirs sphériques permet-elle de placer le réseau dans les conditions de Fraunhofer ? Pourquoi travailler uniquement avec des miroirs, et non pas avec un réseau par transmission et des lentilles (il y a deux raisons) ? À quoi sert le cache rouge sur la barrette CCD ?
- Vérifier l'étalonnage du spectromètre avec une lampe spectrale présentant de nombreuses raies dont les longueurs d'onde sont connues. Par exemple, vous pouvez utiliser la lampe Hg-Cd présente dans la collection.

> *Régler (ou au moins vérifier) cet étalonnage est un préalable indispensable à toute expérience utilisant un tel instrument. Le jury y est particulièrement sensible.*

- Observant le spectre continu d'une lampe QI, mettre en évidence le rôle du filtre anticalorique. Remarquer aussi que des oscillations de l'intensité sont très clairement visibles sur les spectres enregistrés.

> *Ces oscillations sont dues à des interférences se produisant sur une fine lame d'épaisseur optique estimée à 3 µm située contre le capteur CCD (cf. notice du capteur). Ces oscillations ne sont toutefois pas gênantes pour les mesures d'absorption car elles disparaissent lors de la normalisation T = spectre/référence. En revanche, il faut faire plus attention pour les mesures d'émission. Le logiciel a toutefois en mémoire la courbe de réponse spectrale de l'appareil (qui contient, entre autres la réponse spectrale du capteur CCD) et offre la possibilité de normaliser les spectres enregistrés par cette réponse (option « activer*

(7). On dispose aussi de spectromètres Ocean Optics, à réserver à des mesures plus précises. En lire la notice avant emploi et manipuler avec soin.

réponse plate »), ce qui fait en général disparaître les oscillations (mais ça ne marche pas toujours).

- A l'aide de ce spectromètre, réaliser une mesure de longueur d'onde, ou bien déterminer la bande passante d'un filtre interférentiel.

2.2 Mesure de la constante de Rydberg

Une brève présentation théorique ainsi que les valeurs utiles sont données par Sentant [1, p. 238] alors que Duffait [10, p. 136] se contente de donner les valeurs numériques.

2.2.1 Analyse théorique

Les longueurs d'ondes du spectre de raies d'émission de l'hydrogène sont données par la formule de Rydberg

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = R_{\mathrm{H}}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right) \qquad \text{où} \qquad R_{\mathrm{H}} = \frac{1}{hc}\cdot\frac{1}{2}\frac{m_e M_p}{m_e + M_p}\alpha^2 c^2 \simeq 1.09678 \times 10^7\ \mathrm{m}^{-1} \tag{3}$$

est la constante de Rydberg. Dans cette formule, m et n sont des entiers naturels strictement positifs vérifiant $m > n$, h est la constante de Planck, c la vitesse de la lumière dans le vide, m_e est la masse de l'électron, M_p celle du proton, et α est la constante de structure fine définie par $\alpha = e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$ où e est la charge élémentaire, et ε_0 la permittivité diélectrique du vide.

Les raies de ce spectre sont traditionnellement regroupées en *séries*, qui correspondent à une même valeur de n, c'est-à-dire qui proviennent de la désexcitation vers un même niveau E_n (les séries $n = 1$ à $n = 3$ sont bien séparées). La série $n = 2$ est appelée série de Balmer. C'est la seule à présenter des raies dans le domaine visible (de 400 nm à 800 nm) : celles qui vont de $m = 3$ (raie H_α) à $m = 6$ (raie H_δ). Ce sont ces quatre raies qui font l'objet de notre étude expérimentale.

> *Les raies atomiques prévues par la formule de Rydberg (3) sont infiniment fines. En pratique, les raies atomiques ont une certaine largeur spectrale, qui provient de plusieurs sources d'élargissement (naturel, Doppler, collisionnel).*

2.2.2 Étude expérimentale

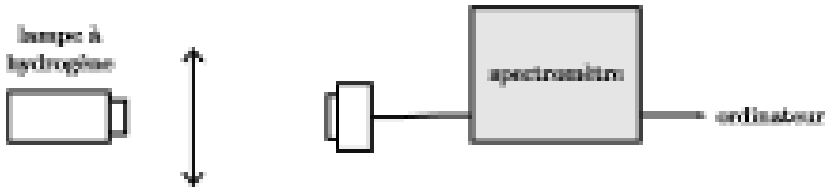


Figure 5 – Schéma du dispositif.

- Condenser la lumière d'une lampe à décharge à vapeur d'hydrogène sur l'entrée du spectromètre. Ajuster l'angle d'incidence de la fibre de manière à ce que l'intensité du spectre observé soit maximale.
- Régler la sensibilité (temps d'intégration) du spectromètre et le nombre d'acquisitions moyennées de manière à observer les quatre raies de l'hydrogène sous la forme de pics d'intensité sur le spectre.

> *Dans un capteur CCD, plus le temps d'intégration est important, plus on capte de lumière, ce qui permet de réduire l'importance relative du bruit de photons (shot noise) poissonnien, proportionnel à la racine du nombre de photons détectés, et celle du bruit électronique, principalement dû au bruit de lecture (read noise) qui ne dépend pas de l'intensité du signal. Cependant, il faut faire attention de ne pas saturer le capteur CCD ce qui impose de limiter le temps d'intégration. Pour réduire encore le bruit, on peut alors procéder à la moyenne de différentes acquisitions.*
>
> *On peut observer d'autres pics que ceux de l'hydrogène (quelle en est l'origine ?). La connaissance des longueurs d'onde approximatives des raies de l'hydrogène est nécessaire pour les discriminer.*

- Mesurer les longueurs d'onde correspondant aux quatre raies de l'hydrogène et en déduire sa constante de Rydberg.

> *L'incertitude sur la longueur d'onde du maximum d'un pic dépend du spectromètre utilisé ainsi que de la qualité de sa calibration.*

2.3 Mise en évidence du phénomène d'absorption et d'émission sur le sodium

L'atome de sodium présente une résonance à deux longueurs d'onde voisines dans le jaune (on parle du doublet du sodium). Des vapeurs de sodium peuvent donc absorber ces longueurs d'onde lors de l'excitation des atomes et les réémettre lors de la désexcitation.

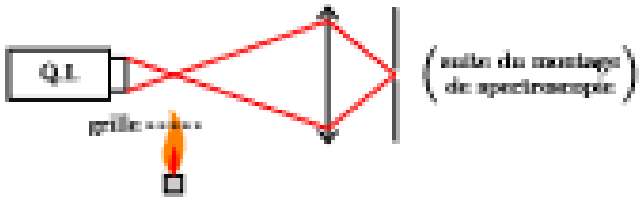


Figure 6 – Mise en évidence de l'absorption et de l'émission du sodium.

- Réaliser un montage de spectroscopie à prisme, et ajouter une lentille avant la fente d'entrée du montage. Régler le condenseur de la lampe QI de manière à obtenir un point de convergence entre la lampe et la lentille (figure 6).
- Pour générer des vapeurs de sodium, on utilise une solution de NaCl saturée que l'on fait s'évaporer dans la flamme d'un bec Bunsen (on évite ainsi les crépitements que l'on aurait avec du sel pur). Utiliser pour cela une fine grille de laiton repliée sur elle-même que l'on trempe dans la solution et que l'on porte dans la flamme à l'aide d'une pince.
- Placer la flamme sous le point de convergence des faisceaux (figure 6). On utilise ainsi un maximum de lumière. Observer.
- Remplacer la QI par une lampe au sodium. Observer.

> *On illustre ainsi les applications en astronomie pour la détermination des éléments d'une étoile en montrant que la raie d'absorption correspond à la raie d'émission d'une lampe au Sodium.*
>
> *R. Duffait propose de réaliser une expérience analogue avec du sodium solide. Une telle expérience est vraiment dangereuse, et au vu de sa faible plus-value on vous déconseille de la présenter au jury.*

2.4 Absorption d'une solution, loi de Beer-Lambert

La couleur des solutions aqueuses dépend de la manière dont les solutés présents vont absorber la lumière. Ces notions sont très utilisées en chimie analytique, et à ce titre c'est dans des ouvrages de chimie que vous trouverez les protocoles les plus intéressants, par exemple celui de J.F. Le Maréchal [17, ch. 10] (noyons chauvins !).

- À l'aide d'un spectrophotomètre, ou bien en faisant des mesures point par point, réaliser le spectre d'absorption d'une solution suffisamment diluée de permanganate de potassium ou de sulfate de cuivre.
- Relier la couleur de la solution au spectre obtenu.

> *Remarque culturelle : La physique de la vision colorée n'est pas chose facile. Pour parfaire votre culture à ce sujet, le livre de S. Renard [15, ch. 1] est très enrichissant.*

La loi de Beer-Lambert relie l'absorbance A d'une solution à la concentration c de cette solution et à la longueur ℓ de solution traversée, $A = \varepsilon\ell c$. On rappelle que l'absorbance A est définie par

$$A = \log\left(\frac{I_{\text{incident}}}{I_{\text{transmis}}}\right) = \log\left(\frac{1}{T}\right) , \tag{4}$$

où T est la transmittance, ε est appelé coefficient d'absorption molaire ou massique (selon que c est une concentration molaire ou massique) et dépend *a priori* de la température et de la longueur d'onde. Il se mesure en $m^2 \cdot mol^{-1}$ ou en $m^2 \cdot kg^{-1}$ suivant l'unité dans laquelle c est exprimée.

- Vérifier la proportionnalité avec la concentration c en utilisant des solutions de différentes concentrations connues.
- Déterminer la valeur de ε et la comparer à une valeur tabulée.
- Vérifier la proportionnalité avec la longueur ℓ, par exemple en utilisant un photorécepteur linéaire et une cuve dans le sens de la longueur puis de la largeur.

> *Les précautions d'usage en chimie demeurent ici, notamment l'importance de rincer au blanc.*

La linéarité de A avec ℓ est très bien vérifiée. En revanche il faut garder à l'esprit que la linéarité avec c n'est valable que pour les solutions diluées.

2.5 Le monochromateur (en deuxième lecture)

Un monochromateur permet d'extraire une petite partie du spectre d'une lumière (pour l'utiliser dans un montage optique aval ou l'analyser avec un photocapteur), selon le même principe que le spectromètre. Il est composé d'une fente source, de deux miroirs sphériques (jouant le rôle des lentilles), d'un réseau pouvant tourner sur lui-même (ce qui permet une mesure précise comme au goniomètre) et d'une fente de sortie. Cette dernière est l'image de la fente d'entrée par les deux miroirs. Si ces deux derniers ont la même focale, la fente d'entrée et de sortie doivent avoir la même taille pour avoir une importance symétrique.

Sextant [1, p. 223] propose une présentation et une étude expérimentale du fonctionnement d'un monochromateur.

Complément A – Fonctionnement et calibration d'un spectromètre

Le principe de fonctionnement d'un spectromètre (figure 7) est simple : la lumière à analyser entre par une fente, qui sert de source. La lumière est envoyée sur un réseau, ce qui a pour effet de séparer les longueurs d'onde, puis sur une ligne de capteurs (par exemple une barrette CCD). Dans le cas le plus courant d'un réseau en réflexion, chaque longueur d'onde est réfléchie dans une direction différente. Deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont résolues par le dispositif si elles sont détectées par deux pixels différents. La fente d'entrée est parallèle aux traits du réseau, ce qui permet d'éclairer toute la hauteur des pixels du capteur CCD sans élargissement géométrique des raies, et donc de détecter plus de lumière sans altérer la résolution. Dans le dispositif de la figure 7, le miroir sphérique M_1 est positionné de manière à ce que le réseau soit éclairé en incidence parallèle, et le capteur CCD est placé dans le plan focal du miroir sphérique M_2 de manière à ce que tous les rayons correspondant à la même longueur d'onde arrivent sur le même pixel. Il va sans dire que de nombreuses difficultés technologiques sont à surmonter dans la réalisation pratique d'un spectromètre.

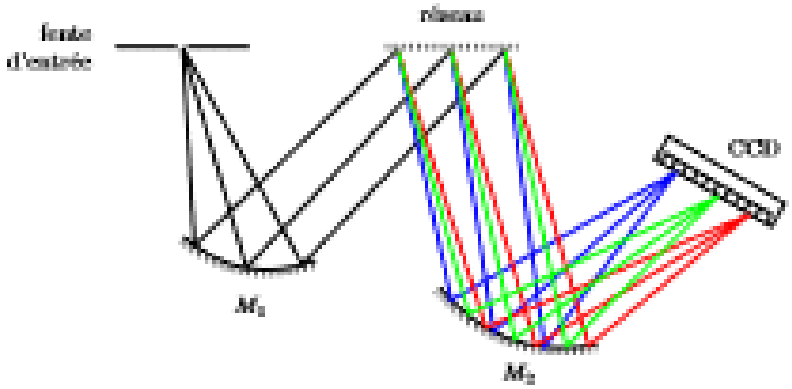


Figure 7 – Fonctionnement d'un spectromètre. La lumière à analyser passe par une fente d'entrée, puis est réfléchie par un miroir sphérique M_1 en un faisceau parallèle. Ce faisceau est réfléchi par un réseau en réflexion qui en sépare les longueurs d'onde, puis par un second miroir sphérique M_2 qui focalise le spectre sur le plan du détecteur CCD. Nous avons représenté un monochromateur de Czerny-Turner. En pratique, les spectromètres commerciaux utilisent souvent un montage de Czerny-Turner croisé qui a l'avantage d'être plus compact.

Un spectromètre est capable de donner l'éclairement correspondant à un pixel du capteur CCD. Cependant, cette information est sans valeur tant que l'on n'est pas capable d'attribuer une longueur d'onde à chaque pixel : c'est le but de la calibration. Il s'agit de repérer la position sur le capteur CCD du spectromètre de raies dont les longueurs d'onde sont connues. Pour calibrer un spectromètre, il faut disposer d'une (ou de plusieurs) lampe spectrale émettant des raies de longueurs d'onde connues dans tout le domaine d'utilisation du spectromètre, parce que la relation entre numéro du pixel et longueur d'onde n'est jamais exactement linéaire.

- Éclairer le spectromètre avec une lampe spectrale possédant des raies de longueurs d'onde connues.
- Lire la notice d'utilisation du spectromètre et la suivre.

Même quand un spectromètre semble donner des valeurs cohérentes, il est souhaitable de vérifier sa calibration de manière indépendante, par exemple avec une lampe au mercure dans la mesure de la constante de Rydberg de l'hydrogène.

Nous avons insisté sur la calibration en longueur d'onde, qui est la plus importante pour les applications courantes. Pour pouvoir relier la valeur de l'intensité donnée par le spectromètre à une grandeur photométrique ou radiométrique, il est nécessaire de calibrer le spectromètre en intensité. En effet, la réponse spectrale des différents éléments qui constituent le montage de spectrométrie (condenseur, fibre optique, réseau, etc.) n'est pas plate. Il est donc nécessaire

de disposer d'une source dont le spectre est connu, de manière à pouvoir calibrer l'appareil. Néanmoins, la calibration en intensité n'est pas nécessaire pour des mesures consistant à repérer la position d'une raie ou sa largeur à mi-hauteur, et on peut la plupart du temps s'en passer.

Il peut être utile d'utiliser le mode de « réponse plate » dans le logiciel SpectBR accompagnant le spectromètre Ulire de manière à compenser en partie l'effet Fabry-Pérot dans l'optique du spectromètre.

TP 6 – Lumière polarisée et biréfringence

Dernière modif. : 2020/08/18 par ???

Objectifs

Le caractère vectoriel des ondes électromagnétiques constituant la lumière est décrit par sa polarisation. Certains matériaux (dits *biréfringents*) agissent sur l'état de polarisation de la lumière. Le but de ce TP est l'étude de ces phénomènes. À la fin du TP, vous devrez être en mesure de

- ▷ produire de façon contrôlée de la lumière polarisée ;
- ▷ analyser l'état de polarisation d'une lumière « inconnue » ;
- ▷ mettre en évidence et quantifier les propriétés de biréfringence linéaire et circulaire d'un matériau.

Remarques préliminaires

Le matériel utilisé dans ce TP (notamment les lames cristallines) existe en quantité limitée, ce qui implique deux choses :

- ▷ il faut y faire particulièrement attention ;
- ▷ vous devez vous organiser entre vous pour ne pas tous faire la même expérience en même temps.

Enfin, les notions d'optique anisotrope nécessaires à la compréhension des phénomènes de biréfringence devraient idéalement être révisées avant le TP.

Attention ! Les polariseurs type polaroïds sont fabriqués dans un matériau polymère, ce qui les rend extrêmement sensibles à la chaleur. Penser absolument à faire suivre la lampe quartz-iode d'un filtre anticalorique.

1 Polarisation de la lumière

1.1 Généralités

Commencer par vous rappeler les différentes polarisations existantes. Elles sont présentées dans de multiples livres, mais la description qu'en fait R. Taillet [23, ch. 6] me semble la plus enrichissante. Prenez aussi un moment pour vous rappeler l'action des polariseurs dichroïques (polaroïds) et autres lames à retard sur les différentes polarisations. Faisant partie du programme, celles-ci sont bien décrites dans les livres de CPGE, par exemple celui de M.N. Sanz [22, ch. 18].

Sur quels principes physiques fonctionnent ces objets ? Une lecture du livre de Sextant [1, p. 264 et 279] peut vous aider à vous rafraîchir les idées.

1.2 Polarisation rectiligne, loi de Malus

La vérification de cette loi est très classique : si vous ne retenez pas le protocole directement, vous le retrouverez chez Sextant [1, p. 265] (qui a dit comme toujours ?). Attention toutefois, la méthode proposée ici pour réduire l'incertitude n'y est pas détaillée.

Considérons une onde électromagnétique polarisée rectilignement dans la direction $\vec{u}$. Cette onde traverse un analyseur dont l'axe passant est orienté dans la direction $\vec{v}$, formant un angle θ avec $\vec{u}$. La loi de Malus stipule que l'éclairement reçu par un photorécepteur placé après l'analyseur est

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2 \theta \,. \tag{1}$$

On veut vérifier cette loi en utilisant le dispositif expérimental représenté figure 1, qui peut être séparé en deux blocs de production puis d'analyse de la lumière polarisée. Le bloc de production se compose de la lampe QI et d'un polaroïd (P) jouant le rôle de polariseur. La lumière polarisée rectilignement produite par le premier bloc est analysée par le second, qui se compose d'un autre polaroïd (A) jouant le rôle d'analyseur et d'un photorécepteur linéaire, par exemple une photodiode.

- # Placer la lampe source assez loin du photorécepteur, et le polariseur et l'analyseur proches du récepteur. On utilisera idéalement comme récepteur une photodiode munie d'un circuit intégré de polarisation, par exemple PIN.35.

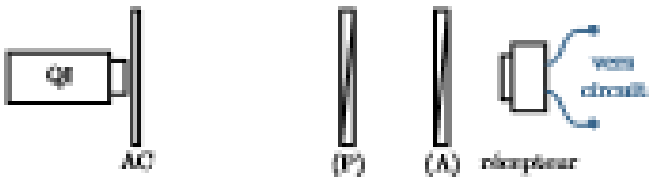


Figure 1 – Dispositif expérimental. Une lampe quartz-iode suivie d'un filtre anticalorique éclaire un polariseur (P) et un analyseur (A). L'éclairement sortant est mesuré à l'aide d'un photorécepteur linéaire et de son éventuel circuit de mesure.

> *On entend parfois qu'un montage utilisant des polariseurs doit s'utiliser en éclairage parfaitement parallèle, en plaçant un trou source au foyer d'une lentille convergente. Ce n'est pas nécessaire, et c'est même parfois contre-productif puisque cela réduit considérablement la luminosité des images. Cette précaution est liée à l'angle d'acceptance du polariseur, qui ne fonctionne « comme prévu » que pour des incidences suffisamment faibles, typiquement inférieures à cinq ou dix degrés. En pratique, placer la lampe source à une cinquantaine de centimètres en amont du polariseur suffit à vérifier cette condition.*

- Placer l'analyseur sur la graduation 90°, puis tourner le polariseur afin de le placer dans la position où polariseur et analyseur sont croisés, correspondant au minimum de lumière transmise. Ne plus toucher au polariseur par la suite.
- Relever la réponse du photorécepteur pour différents angles entre 90° et −90°. Pour s'affranchir de l'erreur systématique discutée par la suite, mesurer à la fois $S(+\theta)$ et $S(-\theta)$, puis vérifier la loi de Malus par une régression linéaire. Comparer le résultat obtenu en considérant seulement $S(+\theta)$ et la moyenne $[S(+\theta) + S(-\theta)]/2$.

Considérer la moyenne entre $S(+\theta)$ et $S(-\theta)$ permet de diminuer l'influence de l'erreur sur le repérage de la position où polariseur et analyseur sont croisés. Le justifier par un développement limité, et préciser alors ce qu'on entend par « diminuer l'influence ».

> *On peut aussi utiliser des prismes de Nicol en tant que polariseur, plutôt que des dichroïques.*

Analyser les incertitudes, et s'interroger sur le sens qu'on leur donne ici : pour une fois, le but n'est pas de mesurer un paramètre mais de vérifier une loi.

1.3 Production d'une polarisation rectiligne par réflexion non totale, angle de Brewster

Le coefficient de réflexion à une interface entre deux diélectriques (ici l'air et le verre) dépend non seulement de l'angle d'incidence mais aussi de la polarisation de l'onde incidente. Pour une incidence particulière $i_B = \arctan(n_{verre}/n_{air})$, le coefficient de réflexion correspondant à une polarisation dans le plan d'incidence s'annule. Le protocole suivant se trouve avec un peu plus de détails dans le livre de Sextant [1, p. 270], alors que la théorie est détaillée par exemple dans celui de S. Houard [15, p. 208].

- Disposer une source de lumière non polarisée, une lame de verre, et un photodétecteur sensible à l'intensité lumineuse de manière à pouvoir faire varier ou le mesurant l'angle d'incidence sur le verre (en tournant la lame), tout en mesurant l'intensité de la lumière réfléchie (en déplaçant le détecteur). Intercaler un polariseur entre détecteur et lame de verre.

> *Bien entendu, le photodétecteur n'est pas nécessaire pour une mise en évidence qualitative.*

- Repérer l'angle de Brewster : montrer qu'à l'incidence i_B, l'intensité lumineuse s'annule dans une certaine direction de polarisation. Vérifier sa valeur en se rappelant que $n_{verre} \simeq 1.5$ (c'est un ordre de grandeur qu'il est bon d'avoir en tête).
- Pour faire une étude plus quantitative du phénomène, vous pouvez tracer les intensités lumineuses pour l'orientation du polariseur où l'intensité s'annule ainsi que pour l'orientation orthogonale en fonction de l'angle d'incidence. Cela permet par exemple de vérifier les formules de Fresnel, données par exemple par Bruhat [8, §202].

Utilisation de l'appareil de Nörremberg (en seconde lecture)

Pour réaliser une polarisation rectiligne en utilisant l'angle de Brewster, on peut aussi utiliser l'appareil de Nörremberg. La structure de cet appareil est présentée par Duffait [10, p. 178]. Il comporte deux plaques de verre ternies sur la face arrière (on observe la réflexion vitreuse sur la première face). On peut faire varier à la fois les angles d'incidence sur chaque vitre et l'angle entre les deux plans d'incidence. L'intensité lumineuse en sortie est nulle lorsqu'on a simultanément les plans d'incidence croisés et chacun des miroirs à l'incidence de Brewster i_B.

1.4 Production d'une polarisation elliptique par réflexion

La réflexion sur un dioptre ne génère un déphasage entre les polarisations transverses et incidente que lorsque les coefficients de réflexion en amplitude présentent une partie imaginaire. C'est le cas pour la réflexion totale sur les diélectriques ($n_1 > n_2$) et pour la réflexion sur les métaux. Pour plus de détail sur la théorie et si besoin un schéma du montage, reportez-vous à Sentant [1, pp. 272 et 296]. La méthode est très bien exposée également par M.N. Sans [22, p. 757].

- Mettre en évidence le phénomène en utilisant un miroir non recouvert d'une couche protectrice. Utiliser une lampe QI et un filtre interférentiel.

Attention ! Un tel miroir est évidemment très fragile.

> *Pour identifier ces miroirs poser délicatement dessus une mine de crayon : la mine touche alors son image.*

- Analyser la polarisation elliptique en menant l'analyse jusqu'à son terme, à savoir le sens de parcours de l'ellipse.

> *Cela nécessite de savoir distinguer l'axe lent de l'axe rapide de la lame $\lambda/4$. Si jamais ceux-ci n'étaient pas renseignés (c'est malheureusement le cas sur presque toutes les lames de la collection), faites une hypothèse pour vous entraîner.*
>
> *Si vous préférez, vous pouvez sauter cette étape d'analyse : les lames biréfringentes produisent également une polarisation elliptique, vous pourrez l'analyser au moment de l'étude de ces lames.*

1.5 Détermination de la nature d'une vibration quelconque

L'analyse d'une vibration « inconnue » se fait grâce à une lame quart d'onde pour lever le doute sur l'éventuelle présence de lumière non polarisée.

Duffait [10, p. 190] propose un diagramme très bien fait récapitulant la méthode générale d'analyse d'une polarisation inconnue. M.N. Sans propose un diagramme très semblable [22, p. 763]. Vous devez comprendre ce schéma et être en mesure d'expliquer chacune des étapes.

1.6 Analyse d'une polarisation rectiligne avec un analyseur à pénombre (en seconde lecture)

La description d'un analyseur à pénombre est proposée par Duffait [10, p. 183]. Cet appareil permet le pointé précis d'une variation de direction de polarisation (mesure par différence). Il est constitué d'un analyseur A solidaire d'une lame demi-onde L dont la direction d'une des lignes neutres fait un angle β faible avec la direction de l'analyseur. La lame demi-onde ne recouvre que la moitié de l'analyseur, si bien que lorsque l'on réalise l'image de l'appareil on obtient deux demi-disques d'éclairement différents I_1 et I_2 lorsque l'on l'éclaire avec une lumière polarisée rectilignement. Si α est l'angle entre la polarisation incidente et l'axe neutre de L, on a (le vérifier)

$$I_1 = I_0 \sin^2(\beta - \alpha) \qquad \text{et} \qquad I_2 = I_0 \sin^2(\beta + \alpha) \tag{2}$$

- Vérifier expérimentalement ces relations.

Le passage de l'obscurité d'une plage à l'autre se fait donc sur l'intervalle $[-\beta, \beta]$, et l'égalité des intensités se fait pour $\alpha = 0$.

> *Il existe une autre position de l'analyseur pour laquelle $I_1 = I_2$, mais elle n'est pas entourée d'extinctions et n'est donc pas pertinente pour le pointage précis.*

2 Biréfringence linéaire

Pour des rappels succints sur le phénomène de biréfringence, vous pouvez vous reporter aux livres de S. Huard [15, p. 268] ou de R. Duffait [10, p. 137], sans doute plus pertinent. Ceux qui souhaitent (beaucoup) plus (trop) de détails peuvent se reporter aux livres de C. Brèhat [6] ou de M. Born et E. Wolf [3, ch. XV]. De façon générale, le déroulement du TP qui est proposé ici suit de très près le chapitre VII du livre de R. Duffait [10]. Une page précise est indiquée à chaque expérience, mais n'hésitez pas à travailler directement avec le livre.

Comme pour les expériences utilisant des polariseurs, il est préférable d'utiliser toujours un éclairage à peu près parallèle, en éloignant la lampe source du montage.

Terminons par un point de vocabulaire : le terme biréfringence désigne aussi bien le phénomène physique que la grandeur Δn qui sert à le quantifier.

2.1 Mise en évidence

La propriété la plus spectaculaire et donc la plus anciennement connue des matériaux biréfringents est de pouvoir séparer un rayon lumineux non polarisé en deux rayons de polarisations orthogonales. Pour mettre en évidence ce phénomène, le matériau doit être taillé et utilisé de manière particulière. Deux dispositifs, représentés figure 2 permettent des observations spectaculaires.

(a) Prisme biréfringent.

(b) Rhomboèdre biréfringent. La figure est représentée en vue de côté, il ne s'agit pas d'une perspective.

Figure 2 – Dispositifs permettant de séparer en deux un faisceau lumineux.

2.1.1 Le prisme biréfringent

Il s'agit d'un prisme pour lequel l'axe optique du milieu est parallèle aux arêtes du prisme, voir figure 2a. Suivant sa polarisation, la lumière voit deux indices différents, donc subit deux déviations différentes. L'utilisation d'un tel prisme est proposée par R. Duffait [10, p. 141].

- Faire l'image d'une fente en lumière blanche sur un écran.
- Intercaler le prisme de spath : on observe deux spectres colorés, correspondant aux rayons ordinaire et extraordinaire.
- Repérer à l'aide d'un analyseur en sortie ou d'un polariseur en entrée la nature de chaque spectre. En déduire le signe de $n_o - n_e$ pour le matériau considéré.

> *Monté sur un goniomètre, le prisme permet une mesure de n_o et de n_e séparément.*

2.1.2 Le rhomboèdre biréfringent

Le cristal est ici taillé en rhomboèdre, l'axe optique étant selon sa diagonale, incliné par rapport aux faces d'entrée et de sortie, voir figure 2b. L'utilisation du rhomboèdre est proposée par Sentant [1, p. 277] et Duffait [10, p. 143].

- Faire l'image d'un petit diaphragme circulaire sur un écran assez éloigné.
- Intercaler le rhomboèdre. Le faire tourner sur lui-même.
- Interpréter en s'aidant d'un analyseur ou d'un polariseur. Est-ce l'image ordinaire qui tourne autour de l'image extraordinaire ou l'inverse ?

> *Le rhomboèdre peut s'utiliser également sur un rétroprojecteur en montage.*
>
> *Deux rhomboèdres sont présents dans la collection, l'un donnant des résultats beaucoup plus spectaculaires et probants que l'autre.*
>
> *Un tel dispositif est également parfois appelé « canon de spath ».*

2.2 Lignes neutres des lames parallèles uniaxes

Une lame parallèle est une lame taillée de telle sorte que ses faces soient parallèles à l'axe optique. Rappelons qu'une onde polarisée parallèlement à l'axe optique d'un matériau uniaxe voit l'indice extraordinaire, alors qu'une onde polarisée dans le plan orthogonal voit l'indice ordinaire. Les lames de la collection sont stockées dans deux boîtes en bois, rangées en salle d'optique. L'expérience est présentée par Sextant [1, p. 283] et Duffait [10, p. 144].

- Faire l'image de la lame sur un écran.
- Placer un polariseur P avant la lame (ne pas oublier l'antiralorique) et un analyseur A après.
- En l'absence de la lame, croiser P et A. Replacer la lame : la lumière réapparaît en général. Faire tourner la lame dans son plan. On trouve deux directions perpendiculaires qui rétablissent l'extinction : les directions de P et A sont celles des lignes neutres de la lame. Une des deux est l'axe optique du cristal.

2.3 Interférences en lumière polarisée

2.3.1 Couleurs d'interférences

Ces expériences (et leur interprétation) sont proposées comme toujours par Sextant [1, p. 286] et Duffait [10, p. 145]. La discussion de Sextant [1, p. 285] sur ce qu'on entend par le terme « lame mince » est à lire.

- Effectuer l'expérience des lignes neutres décrite section 2.2 avec une lame biréfringente assez mince. La lumière qui réapparaît est colorée et le maximum de coloration est obtenu lorsque les lignes neutres sont à 45° de P et A. Passer en P et A parallèles : on voit apparaître les couleurs complémentaires. Interpréter.
- Intercaler une lame demi-onde puis une lame quart d'onde. Comment évoluent les couleurs ? Vérifier sur l'échelle des teintes de Newton, que vous trouverez dans le livre de Duffait [10, p. 148].

Un point important dans cette expérience est de comprendre pourquoi il s'agit bel et bien d'interférences et pas d'un autre effet chromatique.

2.3.2 Spectre cannelé de biréfringence

Lorsque la lame est épaisse (1 mm à 4 mm de spath taillé parallèlement à l'axe), on n'observe plus de teinte mais un blanc d'ordre supérieur.

- Former le spectre de la lumière correspondante sur un écran ou en utilisant un spectromètre numérique (voir le TP *Spectroscopie* si besoin).
- En comptant les cannelures, remonter à la biréfringence $|n_e - n_o|$.

2.3.3 Le compensateur de Babinet

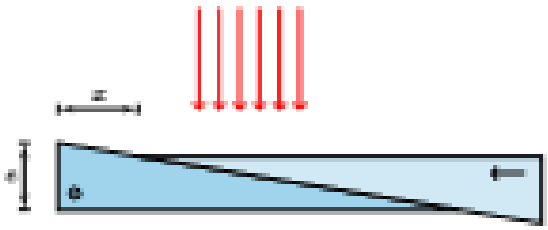


Figure 3 – Principe du compensateur de Babinet. En faisant coulisser l'un par rapport à l'autre deux prismes d'axes optiques orthogonaux, on peut compenser et mesurer la différence de marche entre rayon ordinaire et extraordinaire introduite par une lame biréfringente. En pratique, l'angle au sommet des prismes est de l'ordre de 1°.

On peut aussi mesurer la biréfringence d'une lame épaisse en utilisant un appareil appelé compensateur de Babinet. L'utilisation d'un Babinet est décrite par ... Duffait [10, p. 149] et Sextant [1, p. 291].

Le compensateur de Babinet est composé de deux prismes de faible ouverture, taillés dans le même matériau biréfringent, et pouvant glisser l'un sur l'autre à l'aide d'un vernier. Les axes optiques des deux prismes sont parallèles à la face d'entrée de l'appareil et perpendiculaires entre eux. Un zéro est matérialisé par un trait gravé sur un des deux prismes. À cet endroit, l'épaisseur du prisme gravé est $e/2$.

- Placer le compensateur à la place de la lame précédente, à 45° par rapport à l'analyseur et au polariseur.
- Former sur l'écran l'image de la face gravée du compensateur.
- Tourner le vernier jusqu'à l'apparition de franges irisées et d'une frange noire centrale, semblables aux franges de coin d'air observables avec un Michelson. Lorsque la frange noire est sur le repère, le compensateur est au zéro : l'épaisseur totale au niveau du repère est alors e, les deux prismes sont traversés sur la même épaisseur, et la polarisation n'est pas altérée (frange noire car A et P croisés).

- En intercalant un filtre interférentiel, étalonner le vernier en repérant le passage d'une frange (ou plusieurs pour être plus précis). On a ainsi une correspondance entre les graduations du vernier et la différence de marche introduite entre les deux polarisations.
- Repasser en lumière blanche et remettre le compensateur à zéro.
- Intercaler la lame biréfringente à étudier et la placer à 45° par rapport à l'analyseur et au polariseur, de manière à avoir une luminosité maximale sur l'écran. Les franges sont décalées, éventuellement hors du champ.
- Tourner le vernier pour ramener la frange centrale au niveau du repère.
- À partir du décalage des franges, mesurer la différence de marche $\delta = e\Delta n$ introduite par la lame biréfringente d'épaisseur e et en déduire sa biréfringence $\Delta n = n_o - n_e$.

> *La dépendance en la longueur d'onde de la biréfringence fait qu'à priori il n'y a qu'une frange quasi-achromatique en présence de la lame (si la lame est dans le même matériau que le compensateur, la compensation est parfaite).*

2.4 D'autres expériences (en seconde lecture)

- ▷ **Étude en lumière convergente [10, p. 156]** : Observer les interférences obtenues à l'infini à la sortie d'une lame perpendiculaire entre polariseurs croisés (croix noire) puis entre polariseurs parallèles (croix blanche). L'interprétation n'est pas simple et demande une bonne compréhension des phénomènes de biréfringence.
- ▷ **Le barreau magique [1, p. 294]** : Prendre un barreau de plexiglas et l'éclairer longitudinalement par un faisceau laser polarisé. Lorsque les lignes neutres du barreau (dans le plan de la plaque de départ et sa perpendiculaire) sont à 45° de la vibration incidente, le faisceau à l'intérieur du barreau paraît pointillé lorsqu'on regarde transversalement suivant la direction de la vibration initiale : au cours de la progression de la lumière dans le barreau, la vibration passe successivement par des natures rectiligne, elliptique, circulaire, elliptique, rectiligne perpendiculaire, etc.
- ▷ **Photoélasticimétrie** : Remplacer la lame biréfringente par exemple par une touillette à café, et en former l'image sur l'écran. Interpréter les lignes noires et les colorations. Le même effet est illustré différemment par Duffait [10, p. 163].
- ▷ **Effet Kerr [1, p. 308] ou [10, p. 163]** : À faire avec le cristal de PZLT. Éventuellement superposer le compensateur de Babinet.
- ▷ **Biréfringence d'un nématique [1, p. 308]** En plaçant un cristal liquide nématique dans un contenant prismatique, mettre en évidence ses propriétés biréfringentes.

3 Biréfringence circulaire

Certains cristaux présentent des propriétés de biréfringence circulaire (on parle aussi de polarisation rotatoire) : l'asymétrie de leur structure cristalline fait tourner la polarisation de la lumière lorsque celle-ci se propage selon une direction particulière. Dans le cas du quartz par exemple, la polarisation rotatoire s'observe selon l'axe optique. L'effet est beaucoup plus faible que celui de la biréfringence linéaire (on le néglige donc lorsque l'on se propage selon un autre axe que l'axe optique).

Notons que contrairement à la biréfringence linéaire, la biréfringence circulaire ne nécessite pas une structure cristalline. Ainsi, certains composés mis en solution permettent d'observer le phénomène, comme par exemple le saccharose. Cet effet est très utilisé en chimie car c'est le seul qui permette de distinguer deux énantiomères.

On distingue les milieux lévogyres et dextrogyres selon le sens de rotation de la polarisation pointant vers le haut vu par l'observateur.

3.1 Mise en évidence et propriétés

L'expérience est proposée par Duffait [10, p. 167] et Sentant [1, p. 316].

- Utiliser un laser He-Ne (polarisé d'origine ou avec un polariseur) et l'éteindre avec un analyseur.
- Placer une lame de quartz taillée perpendiculairement à entre P et A et bien perpendiculairement au faisceau (se servir du faisceau réfléchi) : la lumière est partiellement rétablie.
- On retourne à l'extinction en tournant l'analyseur d'un angle θ. Vérifier que cette rotation dépend de l'épaisseur et de la nature dextrogyre ou lévogyre de la lame, mais qu'en revanche elle ne dépend pas du sens de traversée de la lame ni de sa rotation autour de son axe.

3.2 Mesure du pouvoir rotatoire

L'angle de rotation est, pour un cristal donné, proportionnel à l'épaisseur traversée : $\theta = \rho e$. Le montage permettant de mesurer ρ est décrit par Sextant [1, p. 318].

- Étudier diverses lames dont on vérifiera l'épaisseur au palmer, et faire une mesure de ρ. Il est nécessaire d'avoir une estimation préalable de ρ (chercher les valeurs tabulées) pour déterminer θ sans ambiguïté, une mesure de polarisation se faisant à π près.

  > *Attention à ne pas rayer les lames avec le palmer ...*

3.3 Dispersion rotatoire et spectre cannelé

L'expérience est présentée par Duffait [10, p. 170]. Sa réalisation est très semblable à celle du spectre cannelé de biréfringence mais l'effet physique est très différent : c'est important de bien comprendre pourquoi !

- Éclairer une lame présentant de la dispersion rotatoire (par exemple une lame de quartz taillé perpendiculairement) avec une QI en faisceau sensiblement parallèle (agir sur le condenseur) et faire son image sur l'écran.

- Placer un polariseur et un analyseur de part et d'autre de la lame : on observe une image colorée dont la couleur dépend de l'angle entre polariseur et analyseur. On peut étudier la loi $\delta(\lambda)$ au moyen de filtres interférentiels.

  > *Ces couleurs ne proviennent pas d'interférences mais de l'extinction plus ou moins complète des vibrations dont la direction dépend de la longueur d'onde.*
  >
  > *Cette dispersion est de la même nature que celle des indices de réfraction des solides (on peut interpréter le pouvoir rotatoire comme une double réfraction circulaire). Une loi en $A + B/\lambda^2$ donne une bonne première approximation pour le quartz dans le domaine visible.*

- On peut également observer le spectre cannelé de polarisation rotatoire. En tournant l'analyseur ou le polariseur, on déplace les cannelures. Comment peut-on déterminer le caractère lévogyre ou dextrogyre d'une lame par l'observation de ce déplacement ?

3.4 Loi de Biot et applications

La loi de Biot relie l'angle α de rotation du plan de polarisation de la lumière lors de la traversée d'une solution de la concentration c. La convention usuelle en chimie est de donner un signe positif à α si l'observateur qui voit la lumière arriver observe une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre (inverse du sens trigonométrique). Cette loi s'écrit

$$\alpha = [\alpha]_{\lambda T} \ell c \tag{3}$$

où ℓ est la longueur de solution traversée, c la concentration (molaire ou massique) de l'espèce considérée, et $[\alpha]_{\lambda T}$ le pouvoir rotatoire spécifique de la substance considérée, dépendant de la température, de la longueur d'onde, et du solvant. Cette grandeur peut être positive ou négative : deux molécules énantiomères ont pouvoirs rotatoires spécifiques opposés. En mesurant α on peut connaître la concentration d'une solution en une espèce optiquement active. Le principal champ d'application de cette loi étant la chimie, c'est sans surprise dans un livre de chimie que vous trouverez un protocole pertinent. Mentionnons par exemple celui de J.F. Le Maréchal [16, p. 17], livre incontournable en prépa agrég s'il en est.

- En utilisant une solution de saccharose, démontrer la proportionnalité en ℓ et en c de l'angle α.

  > *Attention à l'hydrolyse lente du saccharose en glucose et fructose (qui provoque l'inversion du signe du pouvoir rotatoire de la solution). Il ne faut pas utiliser une solution trop ancienne.*

3.5 Effet Faraday

Certaines substances deviennent optiquement actives lorsqu'elles sont soumises à un champ magnétique parallèle à la direction de propagation de la lumière : c'est l'effet Faraday. Il est observé avec certains verres (flint) ou certains liquides (CS_2, eau). Un barreau de longueur ℓ composé d'une telle substance, caractérisée par sa constante de Verdet V, est placé dans un champ magnétique B. L'angle de rotation β du plan de polarisation de la lumière lors de la traversée du barreau est $\beta = V\ell B$. Se référer au livre de C. Garing [13] pour plus de détails théoriques, en particulier sur la modélisation microscopique, et à cours de Duffait [10, p. 174] et Sextant [1, p. 320] pour l'étude expérimentale.

- Un barreau de flint est placé dans l'entrefer d'un électroaimant à pièces polaires percées. Le faisceau laser polarisé (naturellement ou avec polariseur P) traverse le barreau, et sa polarisation tourne dans un sens dépendant de celui du courant dans les bobines.

- Placer un analyseur A en sortie de l'électroaimant, et le faire suivre d'un écran ou d'un photodétecteur.

- Croiser P et A. En établissant le champ B, la lumière est rétablie et il faut tourner A d'un angle $\alpha(B)$ pour rétablir l'extinction.
- Inverser le sens de B : la rotation est inversée.

  > *On améliore la précision de l'angle en mesurant 2α (on éteint pour $+B$, on rétablit l'extinction pour $-B$).*

- Vérifier que α est proportionnel à B (en mesurant B avec une sonde de Hall ou simplement en mesurant le courant I qui traverse les bobines : la présence d'entrefer fait que B est pratiquement proportionnel à I). En déduire la constante de Verdet du matériau.

3.6 D'autres expériences (en seconde lecture)

- **Afficheur à cristaux liquides** : Placer l'afficheur entre polariseur et analyseur croisés. Quelle est l'action de l'afficheur sur la polarisation de la lumière lorsqu'il n'est pas alimenté ? Appliquer une tension de quelques volts entre les électrodes. Observer et conclure quant au fonctionnement de l'appareil.
- **Modulateur de Faraday** [10, p. 174] : En utilisant l'effet Faraday, on peut moduler un signal optique pour le transporter.
- **Observation des domaines de Weiss** ... mais ça c'est pour la deuxième partie de l'année.

TP 7 – Photorécepteurs

Dernière modif. : 2023/03/08 par Ch. Wainbacher

Objectifs

Ce TP propose d'étudier les récepteurs de lumière, ou photorécepteurs. En particulier, on cherchera à

- comprendre quelles grandeurs permettent de caractériser un photorécepteur ;
- mesurer les propriétés d'un photorécepteur de type détecteur de flux (linéarité, temps de réponse, réponse spectrale) ;
- comprendre comment choisir un capteur et son circuit électronique adaptés à un montage optique donné.

Remarques préliminaires

Pour des raisons pédagogiques (l'étude des photorécepteurs est a priori un sujet que vous découvrez), on se restreint volontairement dans le texte du TP à l'étude des détecteurs de flux, dont la finalité est de mesurer l'éclairement en un point, et même dans un premier temps à un unique détecteur de flux, la photodiode. On omet donc le cas des détecteurs d'image sur lequel vous pourrez travailler dans la suite de l'année si vous le souhaitez. Une bibliographie vous est proposée à ce sujet. Ces restrictions n'ont pas lieu d'être en montage.

Pour les mêmes raisons et pour rester expérimental, ce texte de TP ne détaille pas les mécanismes physiques microscopiques sur lesquels reposent le fonctionnement des photorécepteurs. Dans l'optique de l'oral, vous devez vous renseigner vous-même sur ce sujet, par exemple à l'aide du livre de Sentant [1, ch. II], concis, ou de celui de B. Saleh et M. Teich [20, ch. 18], beaucoup plus détaillé, ainsi que du livre de Asch [2, ch. 5]. Mentionnons simplement que deux principales classes de photorécepteurs se dégagent :

- les récepteurs photoniques, pour lesquels l'absorption d'un photon fait passer un porteur de charge du matériau dans un état excité, donnant lieu à un courant dépendant d'abord du nombre de photons reçus ;
- les récepteurs thermiques, pour lesquels l'absorption du rayonnement entraîne une élévation de température mesurable du matériau, sensible d'abord à l'énergie transportée.

Une des difficultés de l'étude des photorécepteurs est que leurs propriétés sont intriquées les unes avec les autres. Il faut donc prêter une attention particulière à ne faire varier qu'un seul et unique paramètre pour isoler la contribution voulue. Pour chaque expérience, demandez-vous quelles sont les grandeurs fixes et quelle est la grandeur variable.

1 Caractéristiques d'un photorécepteur

Un photorécepteur peut être défini comme étant un transducteur convertissant l'énergie lumineuse en un signal électrique exploitable par une chaîne de mesure ou de traitement de signal. On appelle grandeur photosensible la grandeur électrique (courant ou tension le plus souvent) dont la mesure donne accès au flux lumineux.

> *Dans cette définition, la finalité d'un photorécepteur est donc de mesurer l'énergie transportée par le rayonnement, et pas le nombre de photons. Ce n'est qu'un choix : l'objectif inverse peut tout à fait être poursuivi.*

Commençons par une remarque essentielle : on parle (très) souvent des « propriétés du photorécepteur » pour désigner celles de la grandeur qui est mesurée. Attention alors à ne pas oublier que les propriétés de la grandeur photosensible mesurée dépendent au moins autant du circuit électrique dans lequel le capteur est intégré que du capteur lui-même. Cette idée essentielle se retrouvera tout au long du TP.

1.1 Sensibilité

La sensibilité d'un photorécepteur décrit la variation δS de la grandeur photosensible répondant à une petite variation $\delta\Phi$ du flux incident,

$$\Gamma = \frac{\delta S}{\delta \Phi}. \tag{1}$$

Pour faciliter l'exploitation des mesures, on cherche en général à ce que la sensibilité ne dépende pas du flux Φ, c'est-à-dire que la grandeur photosensible varie linéairement avec ce dernier :

$$S(\Phi) = \Gamma\,\Phi + S_0. \tag{2}$$

La constante S_0 est la valeur d'obscurité de la grandeur photosensible. Si un photorécepteur vérifie une telle relation, il est dit linéaire. Attention, même pour un récepteur linéaire, la sensibilité Γ peut dépendre de la composition spectrale du rayonnement, comme expliqué dans le paragraphe suivant.

1.2 Réponse spectrale

Physiquement parlant, la réponse spectrale décrit les variations de la grandeur photosensible associée à deux rayonnements monochromatiques de longueur d'onde différentes, mais transportant le même flux.

De façon plus précise, la grandeur photosensible dépend de la composition spectrale du rayonnement, décrite par le flux spectral $\varphi(\lambda)$. Ainsi,

$$S = \int s(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,. \tag{3}$$

Si le récepteur est linéaire, ce résultat s'écrit sous la forme

$$S = \int \gamma(\lambda)\varphi(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda\,, \tag{4}$$

où $\gamma(\lambda)$ est la réponse spectrale ou sensibilité spectrale du récepteur. Si le récepteur n'est pas linéaire, définir mathématiquement la réponse spectrale est moins simple car cette dernière peut dépendre du flux.

Dans le cas où la dépendance en λ peut être négligée sur la gamme de longueurs d'onde explorée ($\gamma(\lambda) = \mathrm{C}^{\mathrm{te}}$), la réponse spectrale est dite plate. Si la réponse spectrale n'est pas plate, la sensibilité totale Γ du photorécepteur dépend de la composition spectrale du rayonnement.

1.3 Temps de réponse

Les grandeurs précédentes décrivent la réponse statique du capteur. Sa capacité à suivre les variations temporelles du flux lumineux joue également un rôle clé. Elle est caractérisée par son (ou ses) temps de réponse. Pour le définir en pratique, on soumet le détecteur à une variation brutale d'éclairement, et on mesure le temps nécessaire pour que la grandeur photosensible S atteigne une fraction arbitraire de sa valeur asymptotique. Les temps de réponse en montée et en descente ne sont pas nécessairement identiques, puisque les mécanismes microscopiques impliqués diffèrent.

> *Rappelons que le propre d'un récepteur optique adapté au domaine visible est d'avoir un temps de réponse bien plus grand que la période de l'onde électromagnétique ($\sim 10^{-15}$ s). Par conséquent, la réponse qu'il délivre n'est proportionnelle qu'à l'énergie moyenne qu'il reçoit pendant un temps de l'ordre de son temps de réponse, appelé temps d'intégration.*

1.4 Autres caractéristiques

Les caractéristiques précédentes sont celles qui sont les plus pertinentes pour des détecteurs de flux, dont la finalité est de mesurer l'éclairement en un point de l'espace. Pour des détecteurs d'image, d'autres caractéristiques entrent en jeu, en particulier la résolution spatiale. Mentionnons aussi qu'il devient nécessaire de distinguer plusieurs temps de réponse. Pour plus de détail, vous pouvez vous reporter au livre de Sentant [1, p. 86] et à l'article de J. Cazenave dans le BUP 762 [7].

En outre, en tant qu'instrument de mesure, toutes les autres caractéristiques métrologiques propres aux capteurs en général s'appliquent également aux photorécepteurs. Mentionnons en particulier la fidélité, la justesse, la précision, ou encore la reproductibilité. Pour une définition de ces caractéristiques métrologiques, vous pouvez vous reporter au dictionnaire de Richard Taillet [24].

2 Photodiode

Attention ! Les expériences nécessitent d'utiliser une photodiode nue (par exemple P18.38), et non pas une photodiode munie d'un circuit électrique intégré (par exemple P18.35) qui ne pourrait pas être caractérisée correctement.

2.1 Comportement

Une photodiode est une diode, c'est-à-dire une jonction PN entre deux semi-conducteurs dopés différemment. À l'interface entre les deux semi-conducteurs se forme une zone appauvrie en porteurs majoritaires, la zone de déplétion ou zone de charge d'espace. Lorsque la photodiode est éclairée, des paires électron-trou se forment dans la zone de déplétion et quittent la jonction de part et d'autre, donnant naissance à un courant électrique. Ce courant, appelé photocourant est la grandeur photosensible de la photodiode : l'objectif est donc de le mesurer.

Ainsi, du point de vue électrocinétique, une photodiode se comporte comme une diode dont la caractéristique courant-tension est décalée d'une quantité correspondant au photocourant. C'est ce qui est représenté sur la figure 3, que nous commenterons un peu plus tard.

2.2 Mesure de caractéristique électrique

La première étape pour appréhender le comportement d'un photorécepteur est de mesurer sa caractéristique électrique courant-tension pour plusieurs flux lumineux, ce qui permet d'identifier sans ambiguïté sa grandeur photosensible. Pour ce faire, on utilise les montages présentés figures 1 et 2.

Sextant [1, p. 62] propose un protocole de mesure de caractéristiques, mais diffèrent de celui que nous envisageons ici. Les montages électriques sont proches, mais le montage optique proposé ici permet une étude vraiment plus simple de la linéarité par la suite.

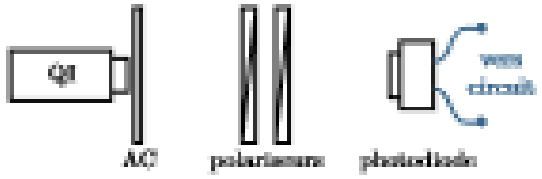
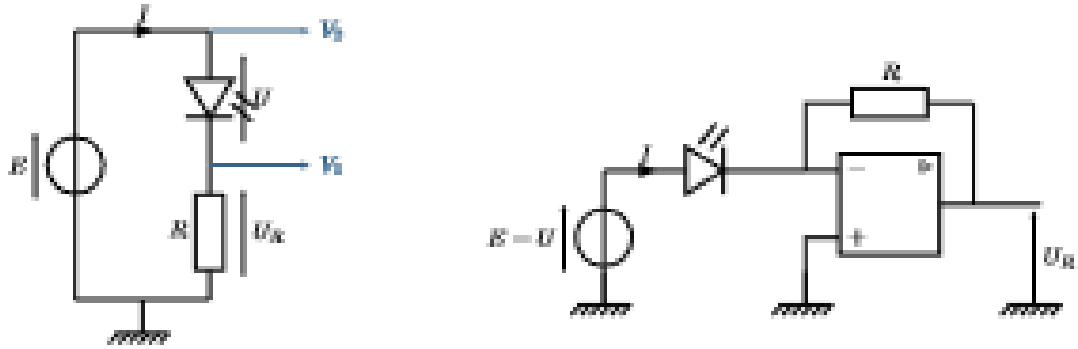


Figure 1 – Montage optique pour la mesure d'une caractéristique. Un dispositif optique basé sur deux polariseurs permet de faire varier le flux lumineux suivant la loi de Malus, et donc le photocourant.



(a) Montage à résistance de charge.

(b) Montage à amplificateur opérationnel.

Figure 2 – Montages électriques pour la mesure d'un réseau de caractéristiques I(U) d'une photodiode. Dans les deux montages, la tension E peut varier. (a) La tension U est obtenue par soustraction des deux tensions mesurées, V_1 et V_2, alors que le courant est obtenu via la mesure de tension aux bornes de la résistance. (b) La photodiode est soumise à la tension E et parcourue par le courant I, que l'on obtient via la mesure de U_R. Ce montage permet en général de s'affranchir de l'impédance d'entrée de l'appareil mesurant U_R.

Deux choix sont possibles pour le montage électrique. Le premier consiste à opter pour un montage à résistance de charge, figure 2a, habituel pour une mesure de caractéristique : la photodiode est montée en série avec une résistance, et la caractéristique s'obtient à partir des tensions aux bornes des deux composants. L'autre choix est un montage à amplificateur opérationnel, figure 2b, reposant sur un convertisseur courant-tension. Comme les courants de polarisation de l'amplificateur opérationnel sont négligeables devant le photocourant, le convertisseur courant-tension a une impédance d'entrée nulle, et ce montage permet de s'affranchir de l'impédance d'entrée de l'appareil mesurant U_R.

> *Pour bien comprendre le montage à résistance de charge, il est utile de s'intéresser à son point de fonctionnement. Ce dernier est l'intersection de la caractéristique de la photodiode $I = I_{phot}(U; \Phi)$ avec la droite de charge d'équation $I = (E - U)/R$, voir figure 3. En faisant varier la tension de polarisation E à flux lumineux fixé, on parcourt ainsi la caractéristique en déplaçant la droite de charge parallèlement à elle-même, puisqu'on fait varier son ordonnée à l'origine E/R en préservant sa pente $-1/R$.*

8 Mettre en place un des montages électriques. Le montage à AO est plus simple, mais le montage à résistance de charge donne accès à une physique plus riche, c'est pourquoi on conseille plutôt d'étudier ce dernier dans ce TP [1]. Les deux montages se rencontrent en pratique car leurs performances diffèrent.

> *On conseille de faire toutes les mesures de tension avec une carte d'acquisition reliée à un ordinateur, afin de pouvoir superposer plusieurs caractéristiques sur une même figure.*

(1). Par contre, si vous voulez utiliser la photodiode comme simple capteur dans une autre expérience, utiliser le montage à AO peut être une meilleure idée.

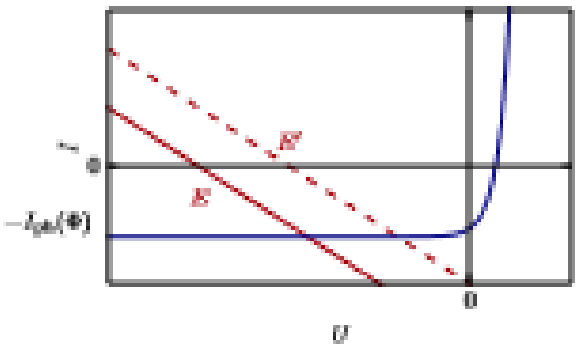


Figure 3 – Point de fonctionnement d'un montage à résistance de charge. Le point de fonctionnement se trouve à l'intersection de la caractéristique de la photodiode, en bleu, et de la droite de charge, en rouge. Deux droites de charge, correspondant à deux tensions E et E' différentes pour une même résistance R, ont été représentées.

Pour moduler à volonté le flux lumineux, on utilise un montage optique utilisant deux polariseurs dont on fait varier l'orientation relative.

- Pour un flux donné, relever une caractéristique de la photodiode.

  > *On pourrait relever la courbe point par point en utilisant une alimentation continue réglable, mais on conseille plutôt de balayer directement la caractéristique en appliquant une tension E variable. Dans ce cas, la période imposée par le générateur doit être très grande devant le temps de réponse du montage (incluant tous les effets capacitifs du circuit) afin d'acquérir une caractéristique quasi-statique. Choisir une fréquence de quelques Hertz convient (la mesure du temps de réponse permettra de le justifier à la fin du TP).*

- Faire varier le flux lumineux à l'aide du dispositif choisi, et réitérer la mesure autant de fois que voulu.

- Tracer le réseau de caractéristiques $U_R(I)$.

2.3 Choix des composants pour une utilisation future de la photodiode

Pour mener la suite des expériences, il est pédagogiquement important de fixer la valeur de la tension E (constante) et de la résistance R. En effet, il n'est pas raisonnable dans une optique « capteur » d'avoir à tracer une caractéristique complète et de lire l'ordonnée du plateau pour en déduire le flux. Au contraire, on cherche plutôt à ce qu'une seule mesure de tension, lue sur un voltmètre, puisse directement être convertie en la valeur du flux.

2.3.1 Montage à amplificateur opérationnel

Le montage à AO ne nécessite pas de polariser la photodiode : prendre $E = 0$ convient, et on peut donc enlever le GBF imposant cette tension. Le seul composant à choisir est donc la résistance R, qui assure la conversion courant-tension, puisque $U_R = RI$. Pour obtenir les plus grandes valeurs de tension, privilégier de grandes valeurs de résistance.

2.3.2 Montage à résistance de charge

Le courant I n'est égal en bonne approximation au photocourant $-I_{ph}(\Phi)$ que sur le plateau de la caractéristique. Le point de fonctionnement du circuit doit donc être dans le quadrant $(U < 0, I < 0)$, c'est-à-dire pour une tension U aux bornes de la photodiode négative. La tension de polarisation E_0 doit donc être choisie pour imposer le signe de $U < 0$, c'est-à-dire de telle sorte que la photodiode soit polarisée en inverse, et aussi grande que possible en valeur absolue. La valeur de $|E_0|$ ne doit néanmoins pas être excessive, pour éviter des non-linéarités dans le comportement de la photodiode.

Le choix de la résistance de charge R relève quant à lui de deux exigences antagonistes. D'une part, à flux lumineux et donc photocourant fixé, il faut que la tension U_R soit la plus élevée possible, et donc que R soit le plus grand possible, afin de maximiser la sensibilité de la mesure. D'autre part, une fois la tension de polarisation fixée, il ne faut pas que R soit trop grand, sous peine que le point de fonctionnement du circuit quitte le palier de la caractéristique, où le courant est assimilable au photocourant : il faut donc $R \ll R_c(\Phi) = \left|\frac{E_0}{I_{ph}(\Phi)}\right|$.

- Éclairer la photodiode avec ce qui sera l'éclairement maximal reçu pendant l'expérience.

  > *Pour un montage « normal », c'est-à-dire où la photodiode reçoit l'essentiel de l'éclairement, éclairer la photodiode directement avec la lampe source.*

> *Le fait de régler le circuit de polarisation sous éclairement maximal permet de s'assurer que le réglage demeure correct pour tous les éclairements rencontrés dans l'expérience, nécessairement inférieurs, et donc correspondant à des photocourants plus faibles et des caractéristiques plus hautes.*

- Imposer la tension de polarisation V_0, en veillant à son signe. En termes d'amplitude, $|V_0| \sim 5\,\mathrm{V}$ est un ordre de grandeur raisonnable. Choisir la résistance de charge de l'ordre de $10\,\mathrm{k\Omega}$.
- Pour s'assurer d'être dans le bon quadrant de la caractéristique, faire varier rapidement la valeur R de la résistance de charge. Sa valeur convient tant que U_R demeure proportionnelle à R. Choisir la résistance de charge la plus élevée possible parmi les valeurs permises, ce qui assure la meilleure sensibilité.

> *Ce faisant, on s'assure que le courant traversant le circuit ne dépend pas de la résistance de charge. L'étude précédente montre que ce n'est le cas que sur le plateau de la caractéristique, où doit être le point de fonctionnement du circuit.*

3 Étude de la linéarité

Le présent protocole permet d'étudier la linéarité de n'importe quel photorécepteur, et on propose de l'appliquer à la photodiode. Il s'agit d'exploiter la loi de Malus pour faire varier de façon contrôlée le flux reçu par un photorécepteur. Un tel protocole n'est à la connaissance de l'auteur de ce TP pas détaillé dans les livres dont l'usage est fréquent en prépa agreg.

- Préparer le photorécepteur et le dispositif électronique servant à mesurer la grandeur photosensible S.
- Le montage optique est celui représenté figure 1. Placer le polariseur sur la position 90°, puis tourner l'analyseur afin de le placer dans la position où polariseur et analyseur sont croisés, correspondant au minimum de lumière transmise. Ne plus toucher à l'analyseur par la suite.
- Relever la réponse du photorécepteur pour différents angles entre 90° et −90°. Mesurer à la fois $S(+\theta)$ et $S(-\theta)$, ce qui permet de s'affranchir de l'erreur systématique discutée par la suite.
- Tracer

$$S(\theta) = \frac{S(+\theta) + S(-\theta)}{2} \tag{5}$$

en fonction de $\cos^2\theta$ pour avoir accès à la réponse du photorécepteur.

> *Cette méthode permet de s'affranchir de l'erreur sur le repérage de la position où polariseur et analyseur sont croisés. Plus précisément, il réduit son influence à un terme d'ordre 2 plutôt qu'un terme d'ordre 1. Vous pouvez démontrer ce résultat par un développement limité.*
>
> *La courbe $S(\cos^2\theta)$ pourrait servir d'étalonnage au photorécepteur, mais il est nécessaire de connaître également la valeur du flux qu'il reçoit. C'est en pratique assez difficile car il n'est pas simple de contrôler avec précision la surface de récepteur éclairée, ou inversement la quantité de lumière ne servant pas à éclairer la zone sensible du récepteur. En outre, comme mentionné section 1.2, il ne s'agirait d'un étalonnage que pour la composition spectrale sortant de l'analyseur, ce qui est d'une portée pour le moins restreinte.*

- Si le temps le permet, il est intéressant de reproduire la mesure pour deux valeurs de résistance de charge, l'une bien choisie et l'autre supérieure à la résistance critique R_c définie section 2.3.2.

Cela permet d'illustrer que la linéarité d'un photorécepteur dépend du circuit de lecture de la grandeur photosensible. Comme mentionné en introduction, le terme « linéarité du photorécepteur » doit ici être compris comme « linéarité de la grandeur mesurée ».

4 Étude de la réponse spectrale

Le point clé de l'étude de la réponse spectrale d'un récepteur est d'isoler la dépendance en longueur d'onde de la grandeur photosensible des autres, ce qui exige de travailler avec des rayonnements monochromatiques de longueurs d'onde variables mais dont toutes les autres caractéristiques sont fixées. De façon générale, pour mesurer la réponse spectrale d'un photorécepteur « inconnu », le flux lumineux doit être le même pour toutes les longueurs d'onde utilisées. Une source produisant de tels rayonnements n'étant pas accessible facilement, on peut se contenter, dans le cas particulier d'un photorécepteur linéaire (ici, une photodiode), de normaliser les résultats à l'aide de mesures complémentaires réalisées avec un photorécepteur dont la dépendance de la réponse vis-à-vis de la longueur d'onde est négligeable (ici, une thermopile).

Le présent protocole se retrouve dans le livre de Duffait [10, p. 195], mais appliqué à des récepteurs différents.

4.1 Étalonnage de la source avec une thermopile

Une thermopile est un récepteur thermique, dont on sait par construction que la réponse spectrale est plate en très bonne approximation. Le fonctionnement des récepteurs thermiques est bien expliqué par Sentant [1, p. 77].

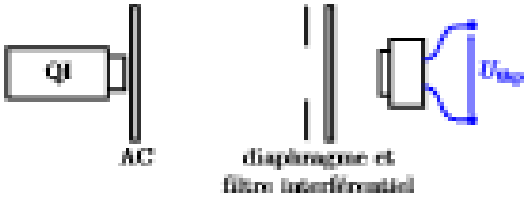


Figure 4 – Étalonnage de la source. La source est constituée de la lampe quartz-iode et du filtre interférentiel. La thermopile convertit le flux qu'elle reçoit en tension, qu'on mesure.

- Aligner une lampe quartz-iode et son filtre anti-calorique, une roue de filtres interférentiels et la thermopile, comme représenté figure 4.

  > *Placer le filtre interférentiel assez proche de la thermopile, pour la protéger des éventuelles réflexions parasites et de la lumière ambiante résiduelle. Si le filtre n'est pas de très bonne qualité, notamment au niveau des bords, il peut être intéressant d'ajouter un diaphragme juste devant lui.*

- Pour différents filtres interférentiels, relever la tension $U_{thp}(\lambda)$ aux bornes de la thermopile à l'aide d'un micro- ou nano-voltmètre. On a alors accès, à une constante multiplicative près, au flux lumineux entrant dans la thermopile.

  > *Les thermopiles sont étalonnées, et leur notice donne la constante de proportionnalité entre tension et flux lumineux. Néanmoins, celle-ci dépend sensiblement de l'âge de la thermopile, et la valeur rapportée sur la notice n'est pas toujours fiable.*
  >
  > *Au vu des variations du signal donné par la thermopile, il peut être intéressant de faire plusieurs mesures avec le même filtre et de moyenner les tensions obtenues.*
  >
  > *Nous conseillons l'usage du nanovoltmètre Keithley, PS2.2.*

4.2 Mesure de la réponse spectrale d'un photorécepteur linéaire

Insistons : ce protocole n'est valable que pour un photorécepteur linéaire ! Défaut propre de l'appliquer à une photorésistance, qui est un récepteur non-linéaire : c'est une erreur, le résultat obtenu n'ayant aucun sens.

- Remplacer la thermopile par le photorécepteur à caractériser. L'éventuel circuit électronique de lecture doit être construit de telle sorte que la grandeur S_{vis} finalement mesurée varie linéairement avec le flux.

  > *Pour que les résultats soient comparables, il faut placer le récepteur inconnu à peu près à l'endroit où était placée la thermopile. Pour les mêmes raisons, il ne faut déplacer ni la lampe QI, ni la roue de filtres interférentiels.*
  >
  > *La réponse spectrale est intrinsèque au récepteur et indépendante du circuit électronique de mesure. Par conséquent, le fonctionnement linéaire est l'unique contrainte qui pèse sur ce dernier.*

- Pour différents filtres interférentiels, relever la grandeur d'intérêt $S_{vis}(\lambda)$.

- La courbe $S_{vis}(\lambda)/U_{thp}(\lambda)$ donne accès à la réponse spectrale du photorécepteur à une constante (dimensionnée) multiplicative près.

4.3 Pistes pour la mesure de la réponse spectrale d'un photorécepteur non-linéaire

La lampe quartz-iode émettant un spectre de type corps noir, le flux spectral dépend fortement de la longueur d'onde, et par conséquent le protocole envisagé précédemment ne permet pas de mesurer la réponse spectrale d'un récepteur non-linéaire. On pourrait envisager d'utiliser une lampe quartz-iode et des filtres interférentiels associés à un doublet de polariseurs pour modifier le flux sortant de façon contrôlée. Le réglage de l'orientation relative des polariseurs se fait en mesurant le flux par un récepteur de réponse spectrale plate, par exemple une thermopile, dont le temps de réponse rend l'opération particulièrement fastidieuse.

5 Étude de la réponse dynamique

5.1 Principe

L'expérience consiste à éclairer un photorécepteur avec une source produisant un flux variable. Le profil d'oscillation doit s'approcher le plus possible d'un profil de type créneau : le temps de montée et de descente de l'éclairement doit être plus faible que le temps de réponse du photorécepteur pour que ce dernier puisse être mesuré.

Une première idée est d'utiliser une source lumineuse continue dont le flux est modulé mécaniquement par un hacheur optique [2]. Les hacheurs optiques disponibles dans la collection ne permettent pas d'atteindre des temps caractéristiques inférieurs à la milliseconde, ce qui est en général insuffisant.

Une autre possibilité consiste à utiliser un stroboscope, qui permet de produire des flashs de fréquence variable. Néanmoins, ces flashs sont mal caractérisés, et le principe même de fonctionnement d'un stroboscope, basé sur la surtension aux bornes d'une bobine, fait qu'ils sont dissymétriques à la montée et à la descente. En outre, l'éclairement est tel qu'il peut conduire à la saturation du photorécepteur. L'utilisation d'un stroboscope est donc déconseillée pour des expériences quantitatives, mais peut permettre des illustrations qualitatives ou des comparaisons entre deux récepteurs.

La solution pour laquelle nous proposons d'opter est d'utiliser une diode laser commandée par un signal TTL. Les temps caractéristiques du signal TTL et de la diode laser trouvés dans la documentation technique sont du même ordre de grandeur, à savoir quelques nanosecondes, ce qui est donc le temps caractéristique de l'éclairement produit par un tel dispositif.

5.2 Protocole

Un schéma du dispositif utilisé est représenté figure 5. La diode laser est commandée par un signal TTL provenant d'un générateur basse fréquence. Elle éclaire un photorécepteur, dont on mesure la grandeur photosensible. Nous proposons d'utiliser la diode PS.16, qui ne marche efficacement que si la fréquence du TTL est suffisamment élevée, de l'ordre de quelques kHz. Les idées permettant d'interpréter correctement l'expérience sont détaillées par Sextant [1, p. 69].

Ce protocole permet en principe d'étudier n'importe quel photorécepteur, mais nous allons nous concentrer sur l'étude d'une photodiode. Pour faciliter l'interprétation quantitative des résultats, on conseille d'utiliser un montage à résistance de charge et de choisir comme grandeur photosensible la tension aux bornes de la photodiode, mais l'étude peut être réalisée sans problème avec un autre montage.

Figure 5 – Schéma de l'expérience. Une diode laser commandée par un générateur de signal TTL éclaire un photorécepteur. La grandeur photosensible du photorécepteur est mesurée à l'oscilloscope via un circuit électronique.

- Éclairer la photodiode par la diode laser commandée par un signal TTL.
- Acquérir la grandeur photosensible sur un oscilloscope et mesurer les temps de montée et de descente du signal.

  > *Il est cette fois conseillé d'utiliser un oscilloscope plutôt qu'une carte d'acquisition interfacée car la bande passante d'un oscilloscope étant plus grande que celle d'une carte d'acquisition, elle risque moins d'affecter le résultat des mesures.*

- Commencer par vérifier que les temps de montée et de descente de la photodiode diffèrent, quel que soit le circuit utilisé.
- Dans le cas où vous avez choisi le montage à résistance de charge, vérifier que les deux temps varient linéairement avec la résistance R. Justifier que cela s'interprète comme étant dû à des effets capacitifs, et en déduire l'ordre de grandeur de la capacité (appelée capacité de jonction de la photodiode) mise en jeu.

  > *Attention, cette capacité apparaît comme montée en parallèle avec celle du câble coaxial reliant le circuit à l'oscilloscope et avec la capacité d'entrée dudit oscilloscope. L'étude électrocinétique d'un*

(2). Un hacheur optique se compose d'un disque alternant zones opaques et transparentes et tournant à une vitesse de rotation contrôlée.

circuit équivalent conduit à un temps caractéristique $\tau = R(C_{\text{amplis}} + C_{\text{câble}} + C_{\text{jonction}})$.

La notion de capacité de jonction est subtile : cette capacité dépend du point de fonctionnement de la photodiode, ce qui inclut la tension à ses bornes et le flux lumineux qui l'éclaire. Pour des variations de flux on-off comme celles étudiées ici, il n'y a aucune raison pour que la capacité de jonction soit la même à la montée et à la descente.

Dans le cas où vous avez choisi le montage à AO, le temps de réponse ne dépend pas de la résistance R, mais il est limité par le slew rate de l'AO.

Cela permet d'illustrer que les temps de réponse d'un photorécepteur dépendent du circuit de lecture de la grandeur photosensible. Une nouvelle fois, le terme « photorécepteur » doit ici être compris comme « grandeur mesurée ».

6 D'autres expériences (en seconde lecture)

6.1 Étude d'une photorésistance

Une photorésistance est un conducteur ohmique, fait d'un matériau semi-conducteur dopé, dont la conductivité est modifiée lorsqu'il est éclairé. Elle peut s'étudier à l'aide de protocoles analogues à ceux présentés pour l'étude de la photodiode.

Sa grandeur photosensible est sa résistance, qui peut directement être mesurée à l'ohmmètre. Toutefois, une photorésistance est un récepteur fortement non-linéaire, dont la résistance peut varier sur plusieurs ordres de grandeur. L'étude de sa réponse spectrale est donc particulièrement compliquée, voir paragraphe 4. Ses temps de réponse diffèrent beaucoup à la montée et à la descente mais sont longs, ils peuvent donc facilement être mis en évidence.

L'étude de la photorésistance est proposée par Sextant [1, p. 70] et Duffait [10, p. 195]. Attention, le protocole proposé par Duffait pour mesurer la réponse spectrale d'une photorésistance est erroné. Une utilisation amusante et proche des applications de la photorésistance consiste à l'utiliser pour allumer une lampe lorsque la lumière ambiante est trop faible. Un circuit utilisant un relai est proposé dans le BUP 676 [8], mais vous pouvez aussi envisager un circuit basé sur un pont de Wien et une DEL. Les photorésistances sont référencées P18.12.

6.2 Étude d'une photopile

Un photorécepteur peut ne pas avoir pour finalité de mesurer l'éclairement qu'il reçoit, mais plus prosaïquement d'assurer la conversion d'énergie lumineuse en énergie électrique, par exemple dans le but d'assurer l'alimentation d'une maison. Comme une portion de la caractéristique d'une photodiode se trouve dans le quadrant $(U > 0, I > 0)$, cette dernière peut agir en dipôle actif : on parle alors de photopile.

Sextant [1, p. 84] propose de déterminer simplement le rendement d'une telle photopile. Attention alors au matériel utilisé : les photopiles et photodiodes ne sont pas les mêmes, une photopile a notamment une surface sensible beaucoup plus grande. Les photopiles sont référencées P18.30.

6.3 Étude d'un capteur CCD

Le fonctionnement d'un détecteur d'image (comme l'est une barrette CCD) doit obéir à des contraintes bien différentes de celles d'un détecteur de flux. Sextant toujours [1, p. 86] et J. Cazenave dans le BUP 762 [7] (qui date un peu) présentent le fonctionnement des capteurs CCD. N'hésitez pas également à jeter un œil à la notice de Caliens. Sur le plan expérimental, il est possible de mesurer la résolution de Caliens à l'aide d'une expérience du type critère de Rayleigh. Cette expérience est décrite dans le cahier laissé en permanence en salle d'optique. Une caractérisation plus précise de la barrette Caliens est présentée ci-après.

6.3.1 Fonctionnement d'un photorécepteur CCD

Les CCD (Coupled Charge Device) ont été inventés en 1970. ces composants échantillonnent l'image par des cellules élémentaires nommées pixels (Picture Elements). Fondé sur la conversion du flux lumineux en un signal électrique, le CCD silicium travaille majoritairement dans le domaine visible. Les CCD ont de nombreux domaines d'applications dans la vie courante : camécopes, télécopieurs, scanners informatiques, systèmes à code barre, etc.

Lorsqu'un pixel est éclairé, les photons produisent dans la partie semi-conductrice des paires électron-trou ; les charges s'accumulent ensuite sur une électrode. Une fois les électrons stockés (la charge stockée est proportionnelle à l'intensité lumineuse en l'absence de saturation), il faut les transférer vers une diode pour analyse. Ce transfert est assuré par un ou plusieurs registres de lecture (souvent un pair et l'autre impair). Le signal optique est donc converti en signal électrique, qui est amplifié puis échantillonné en temps.

Dans cette expérience, nous utiliserons la barrette CCD Caliens. Il s'agit d'un photorécepteur composé d'une ligne de $N = 2048$ pixels de largeur $d_{px} = 14\,\mu\text{m}$ et de profondeur $200\,\mu\text{m}$. La fréquence de lecture pixel à pixel est $\nu \leq 1$ MHz en ordre de grandeur. Une caméra CCD transforme ainsi un signal spatial en un signal temporel. Pour

Calieu, l'échantillonnage du signal est synchrone des horloges de lecture pixel à pixel, ce qui signifie que la fréquence d'échantillonnage correspond à la fréquence de lecture.

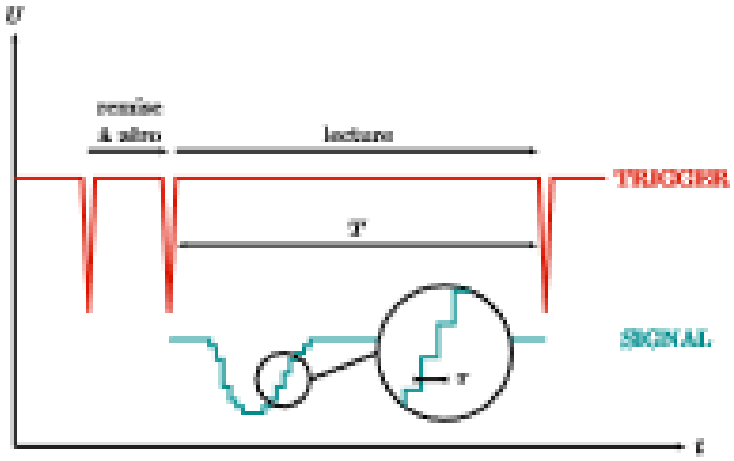


Figure 6 – Allure du signal de déclenchement (TRIGGER) et du signal d'intérêt (SIGNAL) à l'oscilloscope. Le signal lumineux qui éclaire le capteur CCD représente ici l'image d'une fente, qui conduit à une augmentation de luminosité par rapport à la valeur d'obscurité, et à donc une baisse de tension. La durée de la phase de lecture ($T \simeq 7\,\mathrm{ms}$ pour Calieu) est une caractéristique du capteur CCD (indépendante de la sensibilité lorsque celle-ci est réglable). Un pixel est parcouru en un temps τ (de 3.5 µs pour Calieu).

La barrette CCD Calieu dispose de deux sorties analogiques ; une sortie TRIGGER et une sortie SIGNAL. La sortie TRIGGER renvoie le signal de déclenchement, composé de pics de tensions séparant les phases de balayage des registres de lecture. La figure 6 montre l'allure des signaux de déclenchement et d'intérêt. On distingue deux phases du signal de déclenchement : une phase de lecture (d'environ 7 ms), et une phase de remise à zéro (plus courte), qui ne nous intéresse pas pour imager le signal lumineux. La sortie SIGNAL renvoie le signal électrique échantillonné, image du signal lumineux. Un minimum de tension de ce signal à l'oscilloscope correspond en fait à un maximum d'intensité lumineuse. Cette propriété vient de l'effet photoélectrique : plus l'intensité lumineuse est élevée, plus le nombre d'électrons émis et donc la charge électrique négative stockée est grande, ce qui conduit à une chute de tension. La tension maximale plate correspond au signal d'obscurité.

7 Mesure de la fréquence de lecture

Mesurer la fréquence de lecture revient à mesurer l'étendue temporel d'un pixel, noté τ, sur l'oscilloscope. Pour distinguer les pixels individuellement à des fins pédagogiques, plusieurs techniques sont possibles.

- Créer une variation abrupte de luminosité sur la barrette CCD en faisant l'image d'une fente fine ou d'un bord d'écran. Pour le montage, on se reportera à la section suivante. L'inconvénient de cette approche est que pédagogiquement, elle peut mener à des confusions (dans la section suivante nous ferons l'image d'une fente mais dans un tout autre but).
- En l'absence de montage optique, augmenter la sensibilité de la barrette CCD jusqu'à observer les fluctuations de luminosité et distinguer ainsi les pixels à l'oscilloscope. On observe typiquement des plateaux séparés par de courtes phases de décharge induites par le transfert de charge d'un pixel à son voisin.

Pour mesurer précisément l'étendue temporelle d'un pixel, il suffit de mesurer la durée de lecture $T = N\tau$ de la barrette entière, qui contient un nombre $N = 2048$ connu de pixels. On obtient l'étendue temporelle d'un pixel

$$\tau = 3.5\,\mu\mathrm{s}. \tag{6}$$

Il est aussi possible de mesurer τ sur une dizaine de pixels uniquement, puis de mesurer indépendamment la durée de lecture T et en déduire le nombre de pixels N en comparant aux données constructeurs ; ce choix relève de la liberté pédagogique du candidat. Mais nous avons besoin de connaître τ précisément pour déterminer la taille d'un pixel dans la section suivante.

L'étendue temporelle d'un pixel donne également la fréquence de lecture

$$\nu = \frac{1}{\tau} = 0.29\,\mathrm{MHz}. \tag{7}$$

En ordre de grandeur, on trouve bien une fréquence proche du MHz.

8 Mesure de la largeur d'un pixel

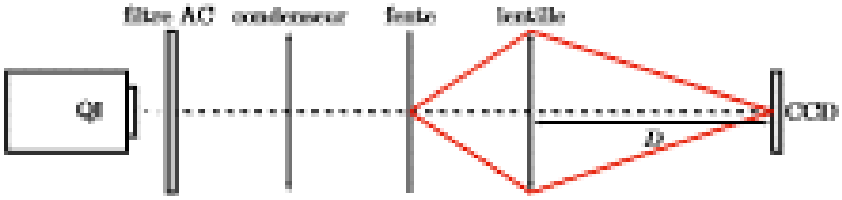


Figure 7 – Schéma du dispositif de projection d'une fente sur la barette CCD. La lentille réalise l'image de la fente (verticale) sur la barette CCD (horizontale). On note D la distance lentille - capteur.

Pour mesurer la largeur d'un pixel, nous avons besoin d'un étalon de longueur. L'image par une lentille d'une fente large de diamètre a connu peut jouer ce rôle. La figure 7 représente le montage correspondant.

- Produire une image nette et agrandie d'une fente large (typiquement de diamètre $a = 480\,\mu m$) par une lentille de grande focale (typiquement $f' = 20\,cm$) sur la barette CCD.
- Si f' n'est pas connue précisément, la déterminer, par exemple par la méthode de Bessel. Mesurer également la distance D séparant la lentille de la barette, et en déduire le grandissement transversal γ. Dans la limite où la barette est très éloigné de la lentille,

$$\gamma = \frac{D}{f'}. \tag{8}$$

- Visualiser les sorties TRIGGER et SIGNAL du capteur à l'oscilloscope. Avec le potentiomètre du capteur, augmenter la sensibilité de sorte à saturer sur l'image lumineuse de la fente mais pas en dehors. S'il n'est pas possible de régler la sensibilité, utiliser les atténuateurs ou polariseurs fournis avec la caméra CCD.
- On observe alors le signal représenté sur la figure 8. Si le signal est fortement asymétrique, ajuster l'alignement du montage pour obtenir une image de meilleur qualité. Il subsiste souvent un saut abrupte sur la partie droite du plateau de saturation, qui est absent de la partie gauche. Il s'agit du *blooming* : la saturation des pixels illuminés affecte les pixels suivants non illuminés et conduit aussi à leur saturation, parce que la charge transférée est trop importante.
- Mesurer le temps Δt séparant les deux bords de la fente.

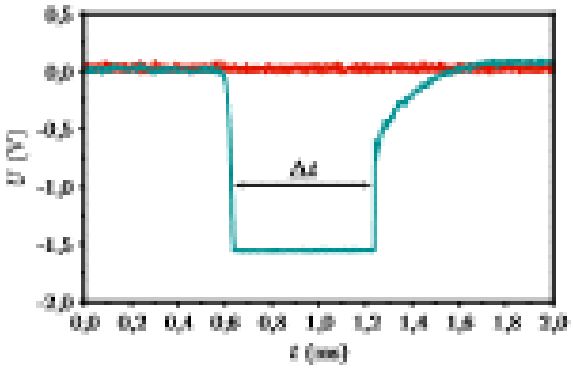


Figure 8 – Signaux en sortie de la barette CCD sur laquelle est projetée l'image d'une fente, observés à l'oscilloscope. Le signal rouge correspond au signal de déclenchement ; le signal vert au signal d'intérêt. La largeur temporelle de la fente Δt permet de remonter à la taille d'un pixel, connaissant la vitesse de lecture et sa largeur spatiale. Ici, le signal l'intérêt est fortement asymétrique ; il faut ajuster l'alignement pour améliorer la qualité de l'image. On observe également un saut abrupte de tension par rapport au plateau de saturation au niveau du bord gauche de la lentille, qui est absent au bord droit : il s'agit de l'effet de *blooming*.

Par un produit en croix, on obtient la taille d'un pixel,

$$d_{px} = a\gamma\frac{v}{\Delta t}. \tag{9}$$

On trouve bien $d_{px} = 14\,\mu m$, en accord avec les données constructeur.

TP 8 – Compléments sur les lasers

Dernière modif. : 2020/08/18 par ???

Remarque préliminaire

Au vu de l'importance des lasers, tant dans la vie courante que dans le quotidien d'un agrégatif, il nous semble utile d'avoir les idées claires sur ce qui sort vraiment du laser et qu'on n'a pas le droit de regarder dans les yeux. Les expériences présentées dans ce TP-complément ne se rapportent à aucun montage[1], c'est pourquoi aucune séance ne leur est explicitement consacrée : faites-les seulement si vous avez le temps et si ça vous intéresse, sachant qu'il est prioritaire de comprendre et savoir monter les expériences plus directement exploitables.

Objectifs

Les expériences présentées ici ont pour but de

- caractériser et déterminer les propriétés géométriques d'un faisceau laser ;
- mettre en évidence ses propriétés spectrales et comprendre leur origine.

Comme prérequis à ces expériences, il est très utile de comprendre les grandes lignes de l'émission laser (rôles respectifs de l'émission stimulée, du milieu amplificateur, de la cavité laser). Les livres de D. Dangoisse [8] et R. Taillet [23] présentent efficacement ces notions théoriques.

1 Propriétés spatiales

Un faisceau laser est décrite en bonne approximation par un faisceau gaussien. On propose dans cette partie de vérifier expérimentalement le caractère gaussien d'un faisceau laser, et d'en mesurer les paramètres.

1.1 Profil gaussien

Dans un plan orthogonal au faisceau, l'intensité lumineuse est gaussienne (du moins dans le mode transverse fondamental TEM_{00}), c'est-à-dire de la forme

$$I(r) = I_0 \exp\left(-2\frac{r^2}{w^2}\right) \tag{1}$$

où r est la coordonnée radiale par rapport au centre du faisceau, et w une longueur appelée rayon du faisceau.

Avec une barette CCD (e.g. Caleos), enregistrer le profil du faisceau d'un laser He-Ne de bonne qualité. Idéalement, il faut placer la barette sur le centre du faisceau. Avec un logiciel de traitement de données, vérifier que le profil d'intensité est bien gaussien. Déterminer w.

> *Le département a récemment fait l'acquisition de caméras CCD bidimensionnelles : vous pouvez les utiliser pour visualiser l'ensemble du faisceau laser, et en particulier tester si sa géométrie est ou non invariante par rotation.*

1.2 Divergence et waist

Le long de la direction de propagation z, le rayon $w(z)$ du faisceau varie selon

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\frac{z^2}{z_0^2}} \qquad \text{avec} \qquad z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \tag{2}$$

Dans cette formule, $w_0 = w(0)$ est le minimum de $w(z)$, atteint par convention en $z = 0$. Ce rayon minimal est appelé waist du faisceau gaussien. Il s'agit d'une des caractéristiques géométriques principales du faisceau. La grandeur z_0 est appelée longueur de Rayleigh, et représente l'ordre de grandeur de la distance sur laquelle le faisceau reste focalisé ; à grande distance, la demi-ouverture angulaire du faisceau est $\theta = w_0/z_0 = \lambda/\pi w_0$.

Toujours avec un laser He-Ne, mesurer le profil du faisceau et déterminer $w(z)$ pour différentes positions z. Comparer à la forme attendue et déterminer le waist w_0.

(1). Elles se rapportaient en fait à l'ancien montage « Laser » qui a disparu de la liste depuis 2014.

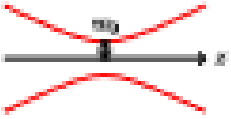


Figure 1 – Variation du rayon du faisceau le long de la direction de propagation. On représente le rayon $w(z)$ du faisceau le long de la direction z le long de laquelle il se propage.

> En pratique, le waist est généralement situé à la sortie de la cavité laser.

1.3 Diode laser

Le faisceau émis par une diode laser est assez divergent, à cause de la diffraction. Cette divergence est en général corrigée par une lentille collimatrice. En mesurant la divergence du faisceau dans les deux directions transverses pertinentes (après avoir fixé la lentille), on peut remonter, par une formule de diffraction $\sin\theta = \lambda/a$ à un ordre de grandeur des dimensions transverses a et b du barreau constituant la diode laser.

2 Propriétés spectrales

2.1 Modes longitudinaux d'un laser Hélium-Néon

À l'aide d'une cavité d'analyse Fabry-Pérot de marque Melles-Griot (P17.11), on peut étudier les modes longitudinaux d'un laser hélium-néon. Cette expérience est détaillée dans le TP *Spectroscopie* (page 46).

2.2 Modes longitudinaux d'une diode laser

Avec une diode laser dont la longueur de la cavité ne fait que 300 µm à 400 µm, les modes sont suffisamment distants pour pouvoir être résolus avec un bon spectroscope sans avoir recours à la cavité d'analyse.

> *Le réglage est pour obtenir la résolution nécessaire est fastidieux : utiliser un réseau très dispersif (au moins 1200 trait/mm^{-1}) et une barrette CCD pour la détection.*

On peut aussi mettre en évidence ces modes régulièrement espacés avec un interféromètre de Michelson réglé en anneaux d'égale inclinaison, on observe en effet que le contraste chute à zéro pour un déplacement du chariot de l'ordre du millimètre, puis réapparaît périodiquement.

2.3 Influence de la cavité

Il existe dans la collection un laser dont le boîtier est transparent, ce qui permet d'observer la lumière diffusée sur les côtés de la cavité. Ce laser étant plus puissant que les autres, il est rangé sous clé : demander aux techniciens.

- En utilisant un spectromètre interfacé (type Spid-HR), observer le spectre de la lumière diffusée et comparer à celui du faisceau.

Sous l'effet simultané de l'émission stimulée et des interférences dans la cavité, le spectre du faisceau est beaucoup mieux résolu. On peut également observer plusieurs raies parasites dans le spectre de la lumière diffusée.

Bibliographie

[1] Sextant (collectif). *Optique expérimentale*. Hermann, 1997.

[2] G. Asch. *Les capteurs en instrumentation industrielle – Nouvelle édition*. Dunod, 2010. isbn : 9782100554977.

[3] Max Born et Emil Wolf. *Principles of Optics : Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. 7e éd. Cambridge University Press, 1999.

[4] Anne-Marie Bouriot. *À propos de certains récepteurs de lumière*. BUP 676, juil. 1985.

[5] Jean-Marie Brébec et al. *Optique ondulatoire MP-PSI-PC-PT*. H-Prépa. Hachette, 2004.

[6] Georges Bruhat. *Optique*. 6e édition revue et augmentée par Alfred Kastler. Masson, 1965. isbn : 2-10-048856-3.

[7] Jacques Cazimovic. *Les capteurs CCD : initiation à la théorie et à la pratique*. BUP 763, mars 1994.

[8] Didier Dangoisse, Daniel Hennequin et Véronique Zehnlé. *Les lasers*. Dunod, 2009.

[9] Luc Dettwiller. *Instruments d'optique : étude théorique, expérimentale et pratique*. Ellipses, 1997.

[10] Roger Duffait. *Expériences d'optique à l'agrégation de sciences physiques*. Bréal, 1997.

[11] Roger Duffait. *Expériences de physique au CAPES de sciences physique*. Bréal, 2008.

[12] Youssef El Azhari et Saïd Taghouti. *Spectrométrie statique par transformée de Fourier*. BUP 967, oct. 2014.

[13] Christian Garing. *Magnétisme : statique, induction et matériaux*. Ellipses, 1999.

[14] Eugene Hecht. *Optics*. 4e éd. Addison-Wesley, août 2001. isbn : 978-0805385663.

[15] Sylvain Houard. *Optique : une approche expérimentale et pratique*. de Boeck, 2011.

[16] Jean-François Le Maréchal et Romain Barbe. *La chimie expérimentale – Tome 2 : chimie organique et minérale*. Dunod, 2006.

[17] Jean-François Le Maréchal et Bénédicte Nowak-Leclerq. *La chimie expérimentale – Tome 1 : chimie générale*. Dunod, 2004.

[18] Jean-Pierre Lecardonnel et Rémi Barbier-Martin. *Une manipulation de spectrométrie par transformation de Fourier*. BUP 815(2), juin 1999.

[19] Vincent Renvoizé et al. *Physique PC-PC*. Cap Prépa. Pearson, 2010.

[20] Bahaa E. A. Saleh et Malvin C. Teich. *Fundamentals of Photonics*. 2e éd. Wiley Interscience, 2007. isbn : 978-0471358329.

[21] Marie-Noëlle Sanz, Anne-Emmanuelle Badel et François Claudet. *Tout-en-un Physique PCSI-MPSI-PTSI*. Dunod, 2003.

[22] Marie-Noëlle Sanz et Bernard Salamito. *Tout-en-un Physique PC-PC*. Dunod, 2010.

[23] Richard Taillet. *Optique physique*. de Boeck, 2006. isbn : 9782804150365.

[24] Richard Taillet, Loïc Villain et Pascal Febvre. *Dictionnaire de physique*. 3e éd. de Boeck, 2013. isbn : 9782804175542.

Électronique

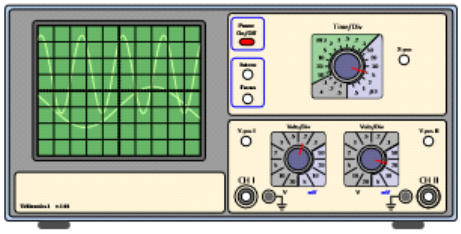
06 July 2024 12:45

TP_Electronique

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

PRÉPARATION À L'AGRÉGATION DE PHYSIQUE

Fascicule de TP
Électronique



École normale supérieure — Lyon 2024-2025
version du 19 août 2024

Préambule

Ce fascicule contient les énoncés des huit premières séances de travaux pratiques d'électronique. Il a pour but de vous aider à réaliser des expériences de base, que vous pourrez présenter lors de vos leçons et montages. Chaque TP contient de nombreuses expériences, et il sera difficile de toutes les réaliser au cours d'une seule séance. Les expériences dites de « seconde lecture » ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pourrez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Cependant, ce fascicule n'est pas exhaustif, et il est tout à fait possible (et même conseillé) de développer de nouvelles expériences au cours de l'année. Vous pourrez alors demander aux responsables, encadrants et techniciens des conseils pour concevoir et monter de nouvelles expériences pertinentes.

Une séance de TP se prépare à l'avance. Il faut arriver en séance de TP en sachant quelles expériences vous voulez réaliser, pourquoi vous les faites et avoir compris un minimum la théorie sous-jacente. Le jour de l'oral, les seules ressources auxquelles vous aurez accès de façon certaine sont les ouvrages qui seront envoyés au lycée où se déroulent les épreuves, ainsi que les documents envoyés par les différents centres de préparation à l'agrégation. Il est donc extrêmement important que vous ne vous limitiez pas à la lecture de ce document, mais que vous connaissiez les livres dans lesquels trouver la description de ces expériences et vous portiez un regard critique sur celles-ci. Ce fascicule est une base de travail mais les manipulations que vous allez présenter le jour J doivent être personnelles, absolues et réfléchies.

Ce fascicule est une sélection de manipulations non exhaustive qui peut aussi contenir quelques erreurs ou oublis. Toute suggestion d'ajouts, de corrections, ... est la bienvenue; merci de contacter pour cela le responsable des TP. Les futures promotions d'agrégatifs vous en saurront gré.

Bon travail à tous,

Christophe Winisdoerffer, responsable de la préparation à l'agrégation de Physique

C'est à Charles-Edouard Lecomte, Vincent De Zotti et Valentin Raban qu'il revient d'avoir commis la version originale de ce fascicule. Qu'ils en soient ici tout particulièrement remerciés. Merci également à tous ceux, étudiants ou encadrants, qui, d'une façon ou d'une autre, ont permis d'apporter des améliorations successives à ce document.

Afin de prendre en compte les modifications des règles du concours apportées par les jurys successifs, une refonte majeure de ce document a depuis été entreprise; ce travail est encore en cours. À terme, il existera deux versions de ce fascicule de TP : une version « sobre », susceptible d'être acceptée par le jury comme ressource accessible pendant les oraux du concours, et une version enrichie de discussions détaillées, de remarques, d'exemples, ... Ces informations apparaissent en couleur dans le document accessible sur le portail des études, afin d'attirer votre attention sur le fait qu'à terme, vous devez pouvoir vous en passer en ayant acquis la distance nécessaire par rapport aux expériences que vous présentez.
C'est à Benjamin Guinelin que l'on doit l'essentiel du travail effectué jusqu'à présent, et c'est donc à lui que doivent s'adresser les remerciements de tous ceux qui en profiteront!

Mise en garde

Les TP décrits dans ce fascicule ont, comme finalité, de permettre aux étudiants préparant l'agrégation non seulement de développer leurs compétences expérimentales, mais également d'approfondir leur compréhension de la physique. Il n'agit donc d'un objectif de formation beaucoup plus large que ne pourraient l'être des "fiches" adaptées à chaque montage apparaissant au concours. C'est la raison pour laquelle le lecteur est souvent renvoyé vers des références extérieures (pour la description précise d'un protocole, la justification d'une formule, ...), lui permettant ainsi d'élargir sa culture bibliographique, ou que des questions sont posées sans que les réponses ne soient données dans l'énoncé. Il appartient ensuite à chacun d'identifier, pour l'ensemble des expériences proposées, dans quel(s) contexte(s) elles pourraient être exploitées. Évidemment, cela nécessite de la part de chaque étudiant d'être acteur de sa propre formation, en préparant en amont chaque séance de TP qui, encore une fois, ne saurait se limiter à seulement suivre un protocole...

À l'issue de ce travail, les étudiants auront développé, en plus de leurs compétences expérimentales, un point de vue élargi sur différents domaines de physique. Cela devrait leur permettre d'envisager de façon sereine l'épreuve du "Montage" de l'agrégation, en consultant éventuellement des ressources plus spécifiques mises à disposition sur le site du concours. Mais au-delà de cet exercice, c'est l'ensemble de leur culture (théorique et expérimentale) qui profitera du travail accompli, *avant, pendant et après* chaque séance de TP.

Table des matières

(TP 1) Acquisition et traitement de base d'un signal en électronique
(TP 2) Autour de l'électronique numérique
(TP 3) Microcontrôleurs
(TP 4) Amplificateur linéaire intégré et transistor bipolaire
(TP 5) Circuits amplificateurs à transistors bipolaires
(TP 6) Oscillateurs quasi-sinusoïdaux
(TP 7) Oscillateurs à relaxation et non-linéarité en électronique
(TP 8) Télécommunications

Acquisition et traitement de base d'un signal en électronique

Table des expériences

I.	Observation d'un signal aux bornes de l'oscilloscope ✓	3
II.	Tracé de caractéristique et problème de masse	5
III.	Impédance de sortie d'un générateur basses fréquences (*)	7
IV.	Impédance d'entrée de l'oscilloscope (*) [MP 61] ✓ → python	8
V.	Utilisation de la carte d'acquisition SYSAM et du logiciel Latis-Pro	9
VI.	Limite de la carte d'acquisition : la quantification de la mesure [MPs 44, 45 et 61]	10
VII.	Analyse de Fourier à l'aide de la carte d'acquisition	11
VIII.	Étude du filtre passe-bas RC [MPs 33 et 58]	15
IX.	Étude du filtre passe-bande RLC (*) [MPs 33, 35 et 58]	21

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Observation d'un signal aux bornes de l'oscilloscope

Les paramètres et réglages mentionnés peuvent varier pour les différents oscilloscopes ou générateurs basses fréquences (GBF) utilisés, mais restent tout de même assez universels. Ici, les réglages seront détaillés pour l'oscilloscope numérique Keysight DSOX3014A et le générateur de fonctions Agilent 33220A.

> Avant de commencer, il est conseillé de réinitialiser les paramètres de base de l'oscilloscope, ainsi que ceux du GBF. Pour l'oscilloscope numérique Keysight DSOX3014A, on appuiera sur le bouton `Default Setup`, tandis que pour le GBF Agilent 33220A, on appuiera sur `Store/Recall`, puis on sélectionnera `Set to Default`.
> On pourra ensuite parameétrer ensuite le GBF en mode *High Z* (bouton `Utility`, puis `Output Setup`, et sélectionner `High Z`).
> Une fois les paramètres du GBF choisis, on pensera bien à le faire fonctionner effectivement. En effet, certains GBF prennent un bouton `Output` (ou équivalent) sur lequel il faut appuyer pour que le GBF délivre effectivement un signal. C'est le cas des GBF de la collection.

On pourra se référer à la Réf. [6] (pp. 10-20) pour de plus amples détails sur le fonctionnement d'un oscilloscope.

1. Mesures à l'oscilloscope

Liste du matériel :
- un oscilloscope numérique Keysight DSOX3014A `P16.7` (par exemple),
- un GBF Agilent 33220A `P44.11` (par exemple).

> On peut commencer par observer sur l'oscilloscope le signal d'un GBF délivrant une tension sinusoïdale d'ampli-

5 - Observation d'un signal aux bornes de l'oscillo.

c.

Mode Δw : bornes (charge) | la différence
mode Δw : borne (décharge) | valeur à Rmax.
le courant passe pas de ce Rmax.
$\Rightarrow \tau = \frac{1}{RC}$?

→ fct de transfert : $H(\omega) = \frac{2\omega_0 \tau_0}{1+j\tau_0\omega}$

Ici aux bornes de R : $H(\omega) = \frac{R}{R+1/jC\omega} = \frac{RjC\omega}{1+jRC\omega}$ passe-haut

Ici aux bornes de C : $H_2(\omega) = \frac{1/jC\omega}{R+1/jC\omega} = \frac{1}{1+jRC\omega}$ passe-bas

IV Impédance d'entrée oscillo

→ on envoie un signal . i.e v.s. [Mesu] ou [Appro]

ici : ~~$V_0 = 3.36\,V$~~ avec R court circuit (en moyenne) $V_0 = 10.3\,V$
↳ on voit de loin amplitude ?

et V_i :

En moyenne : $V_0 = 11.964\,V \pm 5\,mV$
10 Ω : $V_i = 3.35\,V \pm 95\,mV$

$R_e \approx 851\,k\Omega \pm 10\,k\Omega$

PythonLyon
Utils

Pour la mesure de Cac :

Mesure de $\Delta\varphi$ → φ_{app} : phase du court circuit → A) effet du cable de 100 pF/m

Puis on mesure $\varphi(f)$ → regression linéaire pour obtenir Cac ou poly et ord.

$C_{ac} = 1.39 \pm 8\,pF$ pour 1.6 m de cabl.

$C_{ac} = 106 \pm 4\,pF$ pour 75 cm de cabl.

En charge $\tau_c = 6.8 \pm 0.5\,\mu s$

en decharge $\tau_d = 720 \pm 10\,\mu s$

$R_{ac} = R \times \frac{\tau_d}{\tau_c} = 1.06\,M\Omega$

$\Delta R_{ac} = R_{ac} \times \sqrt{\left(\frac{\Delta\tau_d}{\tau_d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\tau_c}{\tau_c}\right)^2}$

Acquisition et traitement de base d'un signal en électronique

Table des expériences

I.	Observation d'un signal aux bornes de l'oscilloscope ✓	3
II.	Tracé de caractéristique et problème de masse	5
III.	Impédance de sortie d'un générateur basses fréquences (*) à faire.	7
IV.	Impédance d'entrée de l'oscilloscope (*) [MP 44] ✓ → poly.	8
V.	Utilisation de la carte d'acquisition 5755AM et du logiciel Latis-Pro	9
VI.	Limite de la carte d'acquisition : la quantification de la mesure [MPs 44, 45 et 61]	10
VII.	Analyse de Fourier à l'aide de la carte d'acquisition	11
VIII.	Étude du filtre passe-bas RC [MPs 33 et 58]	15
IX.	Étude du filtre passe-bande RLC (*) [MPs 33, 35 et 58]	21

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Observation d'un signal aux bornes de l'oscilloscope

Les paramètres et réglages mentionnés peuvent varier pour les différents oscilloscopes ou générateurs basses fréquences (GBF) utilisés, mais restent tout de même assez universels. Ici, les réglages seront détaillés pour l'oscilloscope numérique Keysight DSOX3014A et le générateur de fonctions Agilent 33220A.

> Avant de commencer, il est conseillé de réinitialiser les paramètres de base de l'oscilloscope, ainsi que ceux du GBF. Pour l'oscilloscope numérique Keysight DSOX3014A, on appuiera sur le bouton `Default Setup`, tandis que pour le GBF Agilent 33220A, on appuiera sur `Store/Recall`, puis on sélectionnera `Set to Default`. On pourra ensuite paramétrer ensuite le GBF en mode *High Z* (bouton `Utility`, puis `Output Setup`, et sélectionner `High Z`).
> Une fois les paramètres du GBF choisis, on pensera bien à le faire fonctionner effectivement. En effet, certains GBF prétendent un bouton `Output` (ou équivalent) sur lequel il faut appuyer pour que le GBF délivre effectivement un signal. C'est le cas des GBF de la collection.

On pourra se référer à la Réf. [6] (pp. 10-20) pour de plus amples détails sur le fonctionnement d'un oscilloscope.

1. Mesures à l'oscilloscope

Liste du matériel :

- un oscilloscope numérique Keysight DSOX3014A `P36.7` (par exemple),
- un GBF Agilent 33220A `P44.11` (par exemple).

> On peut commencer par observer sur l'oscilloscope le signal d'un GBF délivrant une tension sinusoïdale d'amplitude crête-à-crête 1V, de fréquence 1kHz et une tension de décalage (*offset*) de 2V. Mesurer les caractéristiques de ce signal (fréquence, amplitude, moyenne) avec les mesures automatiques de l'oscilloscope (bouton `Meas`).

L'utilisation du bouton `Auto scale` (ou équivalent) peut se révéler pratique pour observer rapidement un signal, mais n'est pas toujours efficace, et il est alors indispensable de savoir synchroniser l'oscilloscope.

3+2

2. Synchronisation de la base de temps

Liste du matériel :

- une résistance sur plaquette ou bien un rhéostat de résistance variable `P56.32`,
- un condensateur sur plaquette ou bien un condensateur de capacité variable `P58.33`,
- un interrupteur `P30.23`,
- un oscilloscope numérique,
- un GBF Agilent 33220A.

Pour observer de manière stable un signal périodique, il faut que le balayage en temps de l'oscilloscope soit synchronisé sur le signal pour démarrer toujours au même moment. Pour cela, il faut choisir l'amplitude que doit dépasser le signal pour commencer le balayage avec la molette `Level` (ou équivalent). Avec le bouton `Trigger`, il faut ensuite choisir la source (voie d'entrée) et le type de déclenchement (front montant ou descendant). Enfin, le bouton `Mode Coupling` permet 2 modes d'observation :

- le mode *Auto*, utilisé le plus souvent, pour lequel l'oscilloscope force le balayage, même lorsque le critère de déclenchement n'est pas vérifié pendant une certaine période, le signal défile alors sur l'écran sans synchronisation ;
- le mode *Normal*, pour lequel le balayage ne se déclenche que si la tension appliquée est supérieure au niveau de déclenchement. Le mode *Normal* est particulièrement utile pour visualiser des régimes transitoires, car en appuyant sur le bouton `Single` de l'oscilloscope, il gardera affiché sur l'écran le signal qui a suivi le déclenchement (il suffit ensuite d'appuyer sur le bouton `Run Stop` pour le relancer).

> On pourra commencer par délivrer une rampe de tension à l'aide d'un générateur basses fréquences qu'on reliera à la voie 1 de l'oscilloscope. On pourra alors relier la sortie *Sync* (ou équivalent) du GBF (tension créneau de même fréquence que le signal, utilisée pour la synchronisation) à la voie 2 de l'oscilloscope. On affichera les signaux sur l'écran et on pourra tester les différentes synchronisations (*Auto*et *Normal* ou équivalents). On pourra notamment changer la voie de synchronisation, le type de déclenchement et le niveau de déclenchement de la base de temps.

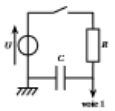


Figure 1 – Charge et décharge d'un circuit *RC*.

> On pourra ensuite réaliser un circuit *RC* série, avec $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 1\,\mathrm{\mu F}$, alimenté par une tension continue *U* de l'ordre de quelques V délivrée par un GBF (bouton `Utility`, puis sélectionner `DC`), et on intercalera un interrupteur entre l'alimentation et le circuit (voir Fig. 1). On fermera l'interrupteur pour observer la charge du condensateur en mesurant la tension à ses bornes. On pourra utiliser le bouton `Single` (ou équivalent) en mode *Normal* pour déclencher la synchronisation au moment de la charge et garder la courbe affichée sur l'écran.

Les valeurs de résistance et capacité sont choisies de sorte que le temps de réponse du circuit soit $\tau = RC = 10^{-2}\,\mathrm{s}$. Cela correspond à une fréquence de l'ordre de 100 Hz, qui est largement dans la bande passante de l'oscilloscope (de l'ordre de la dizaine de MHz). Par ailleurs, pour ne pas être trop sensible au bruit électronique, on choisira un niveau de déclenchement assez haut, typiquement *U*/2.

3. Couplage d'entrée

Liste du matériel :

- un oscilloscope numérique,
- un générateur basses fréquences.

Il existe 2 modes de couplages pour visualiser un signal envoyé sur l'oscilloscope :

- le couplage CC (ou DC), qui permet d'observer la totalité du signal sur l'écran (composante continue et alternative);
- le couplage CA (ou AC), qui permet d'éliminer la composante continue d'un signal (grâce à un condensateur), pour n'observer que sa composante alternative. La fréquence de coupure étant d'environ 10Hz, ce mode peut altérer la forme des signaux de basses fréquences.

Dans la pratique, la quasi-totalité des signaux doit être observée en couplage CC, le passage en CA doit toujours se faire dans un second temps.

> Pour observer qualitativement la différence entre les deux modes de couplage, on pourra délivrer à l'aide d'un GBF une tension sinusoïdale présentant une tension de décalage (offset), et l'observer sur l'oscilloscope en couplage CC (bouton `1`, puis `Coupling`), puis en couplage CA.

On pourra alors constater que la tension de décalage a disparu, et que le signal affiché par l'oscilloscope est maintenant centré sur une tension nulle.

> On peut faire la même chose en délivrant un signal créneau basse fréquence à l'aide du GBF, et observer comment le signal se déforme lors du passage de CC à CA.

Pour que l'effet soit visible, il faut que la fréquence du signal créneau soit faible, de l'ordre de 10Hz. On observe alors un signal toujours périodique mais qui n'est plus constant sur une demi-période et décroît vers 0 (voir Réf. [6], p. 19). Cela s'explique par le fait que le couplage CA coupe partiellement les basses fréquences qui peuplent le spectre du signal créneau, et se comporte donc approximativement comme un dérivateur.

En première approximation, le couplage CA correspond à un filtre *RC* du premier ordre. On pourra alors se référer à l'Exp. VIII pour une description plus quantitative de ce filtre.

II. Tracé de caractéristique et problème de masse

Nous proposons de réaliser l'expérience suivante, décrite dans la Réf. [6] (pp. 29-31) qu'on pourra consulter pour de plus amples détails.

Liste du matériel :
- un transformateur d'isolement `P46.24`,
- une sonde différentielle `P37.12`,
- une diode de redressement 1N4007 `P29.4` ou une diode signal 1N4148 `P29.2`,
- une résistance sur plaquette ou un rhéostat de résistance variable `P56.32`,
- un oscilloscope numérique,
- un générateur basses fréquences.

> On propose de réaliser la caractéristique intensité-tension d'un dipôle D (par exemple une diode) sur l'oscilloscope (voir Fig. 2, gauche). Pour cela, on lui appliquera une tension sinusoïdale basse fréquence, puis on visualisera la tension à ses bornes (voie 1) en fonction du courant qui le parcourt (voie 2) grâce au mode XY (bouton `Horiz`, puis `XY`), en utilisant le mode « Haute résolution » de l'oscilloscope (bouton `Acquire`, puis dans `Mode acquisition` sélectionner `Haute résolution`). En effet, le signal aux bornes de la résistance peut être bruité, et le mode « Haute résolution » permet de diminuer l'amplitude du bruit.
> Il est possible de laisser le tracé affiché sur l'écran en utilisant le mode Persistance (bouton `Display`, puis sélectionner `Persistance`ou, appuyer sur `Effacer Persistance` pour remettre à zéro).

Le fonctionnement en mode «Haute résolution» de l'oscilloscope repose sur un circuit analogique réalisant une moyenne glissante (intégration) du signal sur une période qui dépend de la fréquence d'échantillonnage. Cette première étape permet de filtrer le bruit haute fréquence (à toute fréquence supérieure à l'inverse de la période sur laquelle l'intégration est effectuée) qui s'ajoute au signal. Ces signaux intégrés dans le temps sont ensuite moyennés sur plusieurs périodes pour filtrer le bruit basse fréquence. Cette méthode permet donc d'augmenter fortement le rapport signal sur bruit (voir ci-dessous) en filtrant à la fois les composantes hautes fréquences et basses fréquences du bruit s'ajoutant au signal d'intérêt. Le signal résultant à l'écran est alors plus lisse et plus résolu.

Le courant est obtenu en mesurant la tension aux bornes d'une résistance placée en série avec D. Pour cela, il faut s'assurer que le GBF est à « masse flottante » , c'est-à-dire que sa masse est isolée de la terre.

Les tensions mesurées par un oscilloscope sont toujours mesurées par rapport au potentiel d'une référence (la masse), qui est commune entre les différentes voies de l'oscilloscope et reliée à la terre. Cela a plusieurs conséquences pour les montages réalisés nécessitant un électrique :

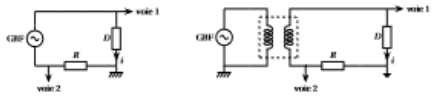


Figure 2 – *Tracé de caractéristique d'un dipôle D : avec un GBF à « masse flottante » (à gauche), en isolant la masse du GBF (à droite).*

- la masse de l'oscilloscope, doit donc être placée entre R et D, comme indiqué sur la Fig. 2, et il faudra alors inverser la tension mesurée par la voie 2 (bouton `2`, puis `Invert`);
- la masse du GBF doit être isolée de la terre, afin d'éviter un court-circuit de masse.

La plupart des générateurs, comme le Agilent 33220A, sont à masse flottante (ils sont isolés de la terre, voir Fig. 3). C'est donc la solution à privilégier pour tracer une caractéristique.

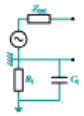


Figure 3 – Schéma électrique illustrant le principe d'un générateur à masse flottante. Ce schéma électrique est issu de la notice du GBF Agilent 33220A (pour lequel $R_i = 1$ MΩ et $C_i = 45$ nF). La tension délivrée par le GBF est celle entre les deux cercles vides.

Si le GBF n'est pas à masse flottante, il existe différents dispositifs pour isoler la masse entre le GBF et le circuit, comme par exemple un transformateur d'isolement (voir Fig. 2, droite). Attention que le transformateur d'isolement est conçu pour des signaux de fréquence égale à 50Hz, et de fait sa bande passante n'est pas très large (comprise entre 10Hz et 10kHz environ). Cela peut induire des déformations du signal en sortie du transformateur, ainsi qu'un enrichissement spectral dû au comportement non linéaire du transformateur. Pour de plus amples détails sur le fonctionnement du transformateur, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [5] (pp. 247-268).

Une autre solution consiste à insérer une sonde différentielle. Elle fonctionne pour une gamme de fréquences très large (jusqu'à 100MHz pour les oscilloscopes numériques de la collection), et produit en sortie un signal identique au signal d'entrée, mais atténué d'un facteur 10 (ou 100). Elle est constituée de plusieurs amplificateurs linéaires intégrés (ALIs) jouant le rôle d'amplificateurs et de soustracteurs. Un autre avantage des sondes différentielles est qu'elles acceptent des tensions d'entrée de plusieurs centaines de V ensuite, ce qui peut s'avérer utile en électronique de puissance.

Enfin, dans le cas où on possède un oscilloscope numérique, on peut également réaliser le circuit de la Fig. 4, qui ne présente plus de court-circuit de masse. Il suffit alors d'utiliser les fonctions de calculs de l'oscilloscope (bouton `Math` ou équivalent) pour effectuer la soustraction entre les voies 1 et 2 de l'oscilloscope, afin de récupérer la tension aux bornes du dipôle D. On notera alors que, dans ce cas, la mesure de la tension aux bornes de la résistance fournit directement une image de l'intensité i du courant, sans avoir besoin de prendre l'opposé du signal. Cette méthode présente néanmoins l'inconvénient de ne pas permettre de tracer directement la caractéristique du dipôle sur l'oscilloscope en mode XY. Il faudra alors enregistrer les signaux, par exemple sur une clé USB, pour ensuite les traiter et les afficher sur un ordinateur (par exemple à l'aide de Python).

Dans tous les cas, il faut choisir avec soin la fréquence à utiliser pour tracer la caractéristique. En effet, comme l'on souhaite obtenir la caractéristique statique d'un dipôle, il faut choisir une fréquence bien inférieure à celle de son comportement dynamique. Si ce n'est pas le cas, la caractéristique présentera une allure différente lorsque la tension en entrée sera croissante ou décroissante [1]. Pour une diode, par exemple, il faudra se contenter de fréquences inférieures à 1kHz. Dans la

1. Cela est analogue à un phénomène d'hysterésis, mais il n'en est rien. En effet, la différence de réponse du dipôle quand la tension d'entrée est

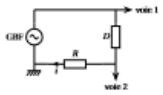


Figure 4 – Tracé de caractéristique d'un dipôle D par méthode différentielle.

pratique, il est donc conseillé de tracer les caractéristiques entre 1 Hz et 10 Hz. En ce qui concerne l'amplitude de la tension délivrée par le GBF, il faut s'assurer qu'elle permette de parcourir la région d'intérêt de la caractéristique du dipôle, tout en vérifiant qu'elle n'endommage pas le dipôle en question. Pour les diodes proposées, une amplitude de l'ordre de 5 V convient.

III. Impédance de sortie d'un générateur basses fréquences (*)

Nous proposons de réaliser l'expérience suivante, décrite dans la Réf. [6] (pp. 20-21), que nous reproduisons ci-dessous.

Liste du matériel :

- un générateur basses fréquences,
- un rhéostat de résistance variable P56 . 32,
- un oscilloscope numérique.

Un générateur basses fréquences peut être modélisé comme un générateur idéal de force électromotrice E en série avec une résistance interne $Z_{\text{int}} = 50\,\Omega$ (voir Fig. 5). Lorsque le GBF est relié à un circuit d'impédance Z, la tension aux bornes de la charge est celle d'un pont diviseur de tension

$$V = \frac{Z}{Z + Z_{\text{int}}} E. \tag{1}$$

Cela signifie que la tension aux bornes du circuit délivrée de façon apparente par le GBF est $V < E$ où E est la tension affichée sur l'écran du GBF (en mode *High Z* ou équivalent). Pour la plupart des circuits électriques étudiés, $Z \gg Z_{\text{int}}$, et la tension aux bornes de la résistance interne est alors négligeable. La différence entre V et E est alors minime. Cependant, cette différence devient plus importante quand $Z \approx Z_{\text{int}}$. Pour des raisons de commodité, on peut vouloir que la tension affichée sur le GBF coïncide avec la tension V. Pour cela, il est possible d'utiliser le mode `Load` (ou équivalent) du GBF (bouton `Utility`, puis `Output Setup`, et sélectionner `Load`) en rentrant l'impédance Z du circuit (50 Ω par défaut). Cependant, l'utilisation de ce mode nécessite de connaître exactement l'impédance du circuit. Il est conseillé de ne pas l'utiliser (autrement dit, il faut toujours rester en mode *High Z*), mais plutôt de mesurer la tension de sortie du GBF avec un oscilloscope, puis de l'ajuster manuellement si besoin.

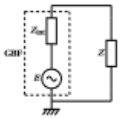


Figure 5 – Schéma équivalent d'un générateur basses fréquences.

> Pour mesurer l'impédance de sortie (interne) du GBF, on peut directement réaliser le circuit de la Fig. 5, en alimentant la charge d'impédance Z variable avec un signal sinusoïdal d'amplitude E de quelques volts. On pourra partir d'une impédance $Z \gg Z_{\text{int}}$, et observer à l'oscilloscope que l'amplitude de la tension aux bornes de la charge est de l'ordre de E. Puis, on pourra diminuer Z jusqu'à ce que l'amplitude de la tension vérifie $V = E/2$, afin d'en déduire Z_{int}.

Bien entendu, on ne peut pas diminuer Z à l'infini, car le courant circulant dans le circuit va augmenter et risquer de détériorer le générateur ou le dipôle. Il est donc conseillé de tracer les caractéristiques entre 1 Hz et 10 Hz. En ce qui concerne l'amplitude de la tension délivrée par le GBF, il faut s'assurer qu'elle permette de parcourir la région d'intérêt de la caractéristique du dipôle, tout en vérifiant qu'elle n'endommage pas le dipôle en question. Pour les diodes proposées, une amplitude de l'ordre de 5 V convient.

[6] Il est à noter que le résultat du fait que la tension d'entrée varie trop lentement par rapport au temps de réponse du dipôle.

Bien entendu, dans ce dernier cas, on a $Z_{\text{int}} = Z$ d'après le pont diviseur de tension (méthode de la tension moitié).

IV. Impédance d'entrée de l'oscilloscope (*) [MP 61]

En couplage CC, l'impédance d'entrée de l'oscilloscope est équivalente à une résistance d'entrée R_{osc} (entre 1 MΩ et 50 MΩ selon l'oscilloscope [6]) en parallèle avec un condensateur de capacité C_{osc} (de quelques dizaines de pF [6]), comme représenté sur la Fig. 6.

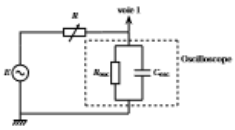


Figure 6 – Schéma équivalent d'un oscilloscope.

Il est possible de passer d'une résistance à l'autre avec le bouton correspondant à la voie correspondante, puis en sélectionnant l'impédance. Pour la plupart des mesures, il faut utiliser la haute résistance (de l'ordre de 1 MΩ) pour éviter que du courant passe dans l'oscilloscope, mais la résistance de 50 Ω peut être utile dans des cas d'adaptation d'impédance à très hautes fréquences (pour l'étude de la fonction de transfert d'un câble coaxial par exemple). L'effet de la capacité est négligeable pour des signaux à basses fréquences, mais elle ne l'est plus à hautes fréquences. Cela se produit quand l'impédance de l'impédance C_{osc} devient comparable à celle de la résistance R_{osc}, soit $f \gtrsim 1/(2\pi R_{\text{osc}} C_{\text{osc}}) \approx 10\,\text{kHz}$.

Liste du matériel :

- un générateur basses fréquences,
- un rhéostat de résistance variable P56 . 32,
- un oscilloscope numérique.

> On pourra tout d'abord mesurer la résistance d'entrée R_{osc}. Pour cela, il suffira de réaliser le schéma électrique de la Fig. 6, en alimentant le circuit par un GBF délivrant une tension sinusoïdale d'amplitude E de quelques volts et de fréquence f de l'ordre de 100 Hz. En court-circuitant la résistance R, la tension aux bornes de l'oscilloscope (voie 1) doit être sinusoïdale, d'amplitude E. On peut alors faire varier R, jusqu'à trouver sur la voie 1 de l'oscilloscope un signal sinusoïdal d'amplitude $E/2$, qui correspond alors à $R = R_{\text{osc}}$ (méthode de la tension moitié).

La notice de l'oscilloscope numérique Keysight DSOX3014A indique $R_{\text{osc}} = 1\,\text{M}\Omega$ à 1 % près. La fréquence a été choisie en respectant le critère précédent, de sorte que les effets capacitifs en entrée de l'oscilloscope sont négligeables.

Pour comprendre cette expérience, notons $e(t) = \text{Re}\left[Ee^{j\omega t}\right]$ la tension délivrée en sortie du GBF, et $v(t) = \text{Re}\left[\underline{V}e^{j\omega t}\right]$ celle observée sur l'oscilloscope, avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation des signaux. L'application d'un pont diviseur de tension donne que l'amplitude complexe du signal aux bornes de l'oscilloscope est

$$\underline{V} = \frac{E}{1 + R/R_{\text{osc}} + j\omega R C_{\text{osc}}}. \tag{2}$$

On observera donc un signal sinusoïdal d'amplitude (réelle)

$$\left|\underline{V}\right| = \frac{E}{\sqrt{(1 + R/R_{\text{osc}})^2 + (\omega R C_{\text{osc}})^2}} \tag{3}$$

et déphasé de

$$\phi = \arg \underline{V} = -\arctan\left(\frac{\omega R C_{\text{osc}}}{1 + R/R_{\text{osc}}}\right) \tag{4}$$

par rapport au signal délivré par le GBF. Pour des résistances $R \lesssim R_{\text{max}}$, on pourra s'affranchir des effets capacitifs si $\omega R_{\text{max}} C_{\text{max}} \ll 1$, soit $f \ll 10\,\text{kHz}$ comme annoncé ci-dessus. Dans ce cas, on a $\phi \ll 1$, et

$$v(t) \simeq \frac{E}{1 + R/R_{\text{esc}}} \cos(\omega t), \tag{5}$$

ce qui permet directement d'utiliser la méthode de la tension moitié.

> On pourra, à partir du même circuit, obtenir une estimation de C_{esc}. La notice de l'oscilloscope numérique Keysight DSOX3014A indique $C_{\text{esc}} = 14\,\text{pF}$, sans préciser d'incertitude. Pour la déterminer, on gardera $R = R_{\text{esc}}$ et on considérera une fréquence $f = 10\,\text{kHz}$. On pourra alors mesurer la différence entre la phase ϕ du signal sur la voie 1 de l'oscilloscope et la phase ϕ_{ref} du même signal quand on court-circuite la résistance à partir des curseurs de l'oscilloscope (bouton `Curseurs`).

On peut faire cette mesure pour différentes fréquences pour augmenter la précision, et effectuer une régression linéaire de $\tan(\phi - \phi_{\text{ref}})$ en fonction de f. La pente $-R_{\text{esc}} C_{\text{esc}}/\pi$ permettra alors de remonter à la capacité. On remoie le lecteur à l'Exp. VIII pour la réalisation d'un ajustement affine via Python. Un exemple de courbe expérimentale qu'il est possible d'obtenir est donné Fig. A1.

> On pourra également utiliser la réponse indicielle du filtre RC du premier ordre que constitue l'oscilloscope (voir également les Exp. I et VIII), en gardant $R = R_{\text{esc}}$ et en alimentant le circuit à l'aide d'une tension créneau entre 0V et 2V, et de fréquence $f \simeq 100\,\text{Hz}$. On effectuera alors une succession de charges et décharges du condensateur, et la mesure de la constante de temps $\tau = R_{\text{esc}} C_{\text{esc}}/2$ avec les curseurs permet de remonter à C_{esc}.

Par exemple, au cours d'une phase de décharge, la valeur du signal passe de 1 V à 0,368 V sur le temps τ.

On termine par mentionner que pour effectuer ces mesures de C_{esc}, on a tout intérêt à prendre des fils les plus courts possibles pour minimiser la capacité parasite des câbles coaxiaux, dont la valeur par unité de longueur est de l'ordre de $100\,\text{pF}\cdot\text{m}^{-1}$ [4] (p. 27).

V. Utilisation de la carte d'acquisition SYSAM et du logiciel Latis-Pro

1. Description

La carte d'acquisition SYSAM (Eurosmart) est constituée d'un Convertisseur Analogique Numérique (CAN) de 12 bits, et d'un Convertisseur Numérique Analogique (CNA). Les 8 voies d'entrée analogique (EA0 à EA7) et les 2 voies de sortie analogique (SA1 et SA2) sont situées sur un périphérique externe relié à l'ordinateur. L'impédance d'entrée de la carte est d'environ 1 MΩ (il est possible de la mesurer par une méthode similaire à celle de l'oscilloscope, voir l'Exp. IV).

Le logiciel Latis-Pro permet de programmer la carte d'acquisition, de visualiser les signaux mesurés, puis de les traiter et de les enregistrer.

Il existe d'autres cartes d'acquisition avec leurs logiciels dédiés, et les expériences que nous proposons ci-dessous sont évidemment adaptables à toute autre carte d'acquisition. On pourra, si besoin, se référer à la notice de l'appareil correspondant.

2. Acquisition et traitement d'un signal

Liste du matériel :

- un générateur basses fréquences,
- une carte d'acquisition.

a. Acquisition d'un signal

> On pourra utiliser un GBF qui délivre une tension sinusoïdale d'amplitude de quelques volts (attention à ne pas dépasser 5 V, voir plus loin), et de fréquence de l'ordre de 1000 Hz, et on branchera sa sortie sur une voie de la carte d'acquisition (par exemple EA0). On lancera le logiciel Latis-Pro (cliquer sur l'icône au centre de l'écran pour démarrer), puis on viendra paramétrer la carte avec la fenêtre à gauche `Paramètres` puis l'onglet `Paramétrage de l'Acquisition` : on sélectionnera la voie correspondante au branchement (par exemple EA0), réglera le calibre (clic-droit sur la voie) sur au moins ±5 V (si le signal en entrée est d'amplitude supérieur au calibre, celui-ci sera écrêté), le nombre de points sur 2000, puis le pas de temps T_e sur 50 µs (voir plus loin le critère de Shannon).

> Il est également possible de choisir le mode de déclenchement pour la synchronisation. On pourra enfin lancer l'acquisition en appuyant sur F10.

b. Gestion des courbes

> On invite l'étudiant à se familiariser avec la gestion des courbes sur le logiciel associé à la carte d'acquisition (ici Latis-Pro).

Voici quelques procédures qu'il faut savoir réaliser : renommer la courbe tracée (fenêtre `Paramètres`, puis onglet `Liste des courbes`, et double-clic), modifier les axes (double-clic), retirer une courbe (clic-droit sur son nom), ajouter une courbe (faire glisser le nom de la courbe sur l'axe des ordonnées), etc.

c. Mesure automatique des caractéristiques

> Mesurer les caractéristiques (amplitude, fréquence, valeur moyenne) du signal précédent.

Pour cela, on ira dans `Outils/Mesures Automatiques`.

d. Modélisation par un modèle

> Modéliser la courbe expérimentale par une sinusoïde, puis comparer ses paramètres au signal.

Pour cela, on ira dans `Traitement/Modélisation`, et on choisira le modèle « Sinus ».

e. Utilisation de la feuille de calcul

Il est possible de traiter les données et de définir de nouvelles variables et fonctions dans la feuille de calculs (ou équivalent) en allant dans `Traitement/Feuille de calculs`. Chaque ligne tapée est considérée comme une nouvelle commande qui sera calculée en appuyant sur F2 (ou `Calcul/Exécuter`). Par défaut, les variables mesurées ont les noms EA0, ..., EA7, et le temps d'acquisition s'écrit `Temps`. On se réfèrera à l'aide du logiciel qui décrit les principales fonctions proposées et leur syntaxe en cliquant sur la fenêtre `Aide`.

> On pourra utiliser la feuille de calculs pour créer une fonction sinusoïdale de même fréquence et amplitude que le signal mesuré (la syntaxe est `U=sin(2*pi*100*Temps)`), et afficher les 2 courbes en mode XY (pour cela, glisser le nom d'une des courbes sur l'axe des abscisses). Puis on pourra calculer le déphasage entre cette courbe et le signal (syntaxe : `phi=Dephasage(U;EA0)`).

VI. Limite de la carte d'acquisition : la quantification de la mesure [MPs 44, 45 et 61]

On renvoie le lecteur à la BdE [4] (p. 46) pour de plus amples détails.

Liste du matériel :

- un générateur basses fréquences,
- une carte d'acquisition.

1. Pas de quantification

Lors de la conversion analogique-numérique d'un signal, la résolution de la mesure est donnée par le nombre de bits n du convertisseur. Pour une étendue de mesure (un calibre) ΔX, le pas de quantification de la mesure vaut $\delta X = \Delta X/2^n$. Il convient donc d'utiliser toujours le calibre le plus petit permettant de réaliser une mesure plus résolue pour réduire cet effet. La carte SYSAM étant une carte 12 bits, pour le calibre ±10,24 V ($\Delta V = 20{,}48\,\text{V}$) on obtient un pas élémentaire $\delta V = 5\,\text{mV}$.

> Pour illustrer la quantification d'un signal numérique, on peut alimenter la carte sur l'entrée EA0 avec un générateur basses fréquences pour délivrer une tension sinusoïdale d'amplitude ±1 V et de fréquence 10 Hz. (On peut également utiliser une sortie analogique de la carte, en allant dans la fenêtre `Paramètres` puis onglet `Paramètres de l'émission`, sélectionner fenêtre pendant l'acquisition, cocher « Mode GBF ».) Lancer une acquisition avec 2000 points, un pas de temps de 10 µs et essayer avec deux calibres différents ±1 V et ±10 V pour EA0.

On observera dans chacun des deux cas le signal obtenu. Pour le plus grand calibre, on notera que le signal est déformé (en zoomant), ce qui permettra de remonter au pas de quantification du signal δV puis au nombre de bits n de la carte d'acquisition : on parle alors de « bruit de quantification ». En effet, tout se passe comme si une tension de bruit était ajoutée à la tension réelle, permettant d'avoir une tension ne prenant comme valeurs que des multiples du pas de quantification δV. L'amplitude relative du signal d'intérêt par rapport à celle du bruit est quantifiée par le rapport signal sur bruit, dont plusieurs définitions existent selon le contexte considéré. Ici, on peut le définir d'ordinairement comme le rapport de l'écart-type du bruit de quantification sur la valeur efficace du signal : le calcul est réalisé dans la Réf. [1] (p. 263) ou bien dans la Réf. [7] (p. 607). En pratique, on peut, dans ce cas particulier, estimer un rapport signal sur bruit par

$$\mathrm{RSB} = \frac{\text{Amplitude du signal}}{\text{Amplitude du bruit}} = \frac{\Sigma}{\delta V}, \tag{6}$$

avec $\Sigma = 1\,\mathrm{V}$ et δV le pas de quantification, qu'on peut estimer.

Pour bien réaliser cette expérience, il est important de prendre une période d'échantillonnage du signal très petite devant la période du signal, sous peine de surestimer le bruit de quantification δV (voir ci-dessous).

2. Application à la dérivée et au lissage d'une courbe

La quantification peut poser des problèmes lors du traitement d'un signal, en particulier pour la dérivation numérique.

> Pour l'illustrer, on peut dériver le signal obtenu précédemment avec le plus gros calibre sur Latis-Pro (menu `Traitement/Dérivée`).

On observe que la dérivée est fortement bruitée à cause de la quantification. On peut comparer avec la même opération effectuée sur le signal enregistré sur un calibre plus petit.

On peut également réduire le bruit en augmentant le pas de temps de l'acquisition. En effet, en augmentant le pas de temps, on augmente la variation du signal entre deux points enregistrés, ce qui rend la mesure moins sensible au pas de quantification. Pour un signal de 100 Hz, on veut donc que sur le temps d'échantillonnage T_e, la variation du signal d'intérêt $s(t)$ soit grande devant δV, soit pour la sinusoïde ici, en effectuant un développement limité,

$$\left|A\cos(2\pi f(t+T_e)) - A\cos(2\pi f t)\right| > \delta V \implies \sin(\pi f T_e) \gtrsim \frac{\delta V}{2A} \implies T_e \gtrsim 1\,\mathrm{ms}. \tag{7}$$

Évidemment, la condition ci-dessus est plus difficile à vérifier quand le signal varie faiblement (ici aux extrema de la sinusoïde).

> On peut donc recommencer l'acquisition avec un pas de temps de 1 ms toujours sur le plus gros calibre, et calculer la dérivée du signal obtenu.

On constatera alors que cette dernière est beaucoup moins bruitée.

Pour réduire encore ce bruit, il est conseillé de lisser les courbes expérimentales avant de les dériver (pour cela, on ira dans le menu `Traitement/Lissage`).

> On pourra donc lisser fortement la courbe obtenue avec un pas de 1 ms avant de la dériver.

Le bruit est encore davantage réduit.

VII. Analyse de Fourier à l'aide de la carte d'acquisition

Pour tous ces aspects, on se réfèrera aux Réf. [4] (pp. 47-53) et [5] (pp. 96-98).

Liste du matériel :

- un générateur basses fréquences,
- une carte d'acquisition.

Ici on propose de travailler avec une carte d'acquisition, mais les oscilloscopes numériques permettent également de réaliser des transformées de Fourier discrètes (bouton *FFT* ou équivalent). Il est parfois plus simple de commencer par calculer le spectre d'un signal avec l'oscilloscope, avant de se rabattre sur la carte d'acquisition (plus facile à appréhender). Il est laissé au soin de l'étudiant de se familiariser avec la transformée de Fourier discrète sur l'oscilloscope.

De même, l'utilisation des libraries de Python permet de calculer facilement le spectre de Fourier discret d'un signal, pour autant qu'on puisse enregistrer le signal voulu sur l'ordinateur (par exemple au format *.txt*). L'étudiant intéressé peut se référer à la documentation de Numpy pour apprendre à calculer un spectre de Fourier discret sous Python.

1. Quelques rappels théoriques sur la transformée de Fourier discrète

En mathématiques, ou lorsqu'on fait des calculs de fonctions de transfert, on est très souvent amené à calculer les transformées de Fourier (continues) des signaux. On rappelle que pour un signal $x(t)$ continu, sa transformée de Fourier continue est définie par

$$\mathrm{TF}[x](f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, \mathrm{d}t. \tag{8}$$

La relation d'inversion s'écrit alors

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{TF}[x](f)\, e^{2\pi i f t}\, \mathrm{d}f. \tag{9}$$

En pratique, les signaux manipulés sont échantillonnés à une période d'échantillonnage T_e et de durée finie, c'est-à-dire qu'on a une liste $\{x_k = x(kT_e)\}_k$ pour $k = 0 \ldots N-1$, avec $T = NT_e$ la durée totale d'analyse. Dans ce cas, on définit la transformée de Fourier discrète (DFT pour *Discrete Fourier Transform*) par

$$\mathrm{DFT}\left[\{x_k\}_k\right]_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k\, e^{-2\pi i k n/N}, \tag{10}$$

calculée à N fréquences discrètes régulièrement espacées et séparées de $1/T = f_e/N$ (avec $f_e = 1/T_e$ la fréquence d'échantillonnage). On dispose en outre de la relation d'inversion

$$x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{DFT}\left[\{x_k\}_k\right]_n e^{2\pi i k n/N}. \tag{11}$$

On pourrait naïvement penser que cela représente simplement une approximation de l'intégrale définissant la transformée de Fourier continue par la méthode des rectangles, mais cela est plus subtil, et dans le cas général, la transformée de Fourier discrète ne coïncide pas avec la transformée de Fourier continue (au-delà de l'approximation de l'intégrale par une somme discrète).

On peut en réaliné faire un lien entre la transformée de Fourier discrète et la transformée de Fourier continue. Pour cela, on introduit $x_p(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(t + kT)$ le signal périodique de période T, construit à partir de $x(t)$. On peut alors montrer que si on avait échantillonné un tel signal sur $[0,\ T]$, sa transformée de Fourier discrète serait

$$\mathrm{DFT}\left[\{x_{p,k}\}\right]_n = f_e \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \mathrm{TF}[x]\left(\frac{n}{T} + \ell f_e\right) = f_e \mathrm{TF}[x]_p\left(\frac{n}{T}\right), \tag{12}$$

c'est-à-dire qu'elle coïncide (à un facteur multiplicatif près) avec le signal périodique $\mathrm{TF}[x]_p(f) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \mathrm{TF}[x](f + \ell f_e)$ de période f_e dans l'espace de Fourier construit à partir de la transformée de Fourier continue de $x(t)$. Le calcul est fait dans la Réf. [8], mais nous le reproduisons ci-dessous car cette référence est difficilement accessible.

Avant cela, on en conclut que la transformée de Fourier discrète est une bonne estimation de la transformée de Fourier continue si les conditions suivantes sont vérifiées.

- D'une part, il faut que le signal $x(t)$ coïncide avec $x_p(t)$ sur $[0,\ T]$ (membre de gauche de l'Éq. (12)), ce qui se produit si le signal $x(t)$ est de support borné inclus dans $[0,\ T]$, ou bien si le signal $x(t)$ est périodique et que l'intervalle $[0,\ T]$ contient un nombre entier de périodes.
- D'autre part, il faut que la transformée de Fourier continue du signal $x(t)$ coïncide avec $\mathrm{TF}[x]_p$ sur[2] $[-f_e/2,\ f_e/2]$ (membre de droite de l'Éq. (12)), ce qui se produit si la transformée de Fourier continue de $x(t)$ est à support borné inclus dans $[-f_e/2,\ f_e/2]$. Il en découle alors le critère de Shannon : « la fréquence d'échantillonnage doit être supérieure à deux fois la plus haute fréquence[3] du signal à échantillonner ». Si ce critère n'est pas respecté, on se trouve en situation de sous-échantillonnage, ce qui se manifeste par l'apparition de « fausses fréquences » dans le spectre (repliement spectral).

Les conséquences de ces propriétés vont être explorées dans les expériences qui suivent.

Abordons maintenant la preuve de l'Éq. (12). On commence par utiliser la transformée de Fourier inverse continue :

$$\begin{aligned} x(kT_e) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{TF}[x](f)\, e^{2\pi i k f T_e}\, \mathrm{d}f &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_{\ell f_e}^{(\ell+1) f_e} \mathrm{TF}[x](f)\, e^{2\pi i k f T_e}\, \mathrm{d}f = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_0^{f_e} \mathrm{TF}[x](f + \ell f_e)\, e^{2\pi i k (f+\ell f_e) T_e}\, \mathrm{d}f \\ &= \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \int_0^{f_e} \mathrm{TF}[x](f + \ell f_e)\, e^{2\pi i k f T_e}\, \mathrm{d}f \\ &= \int_0^{f_e} \mathrm{TF}[x]_p(f)\, e^{2\pi i k f T_e}\, \mathrm{d}f. \end{aligned} \tag{13}$$

2. On considère ici un intervalle symétrique centré sur la fréquence nulle du fait de la symétrie hermitienne de la transformée de Fourier des signaux réels, qui indique que $\mathrm{TF}[x](-f) = \overline{\mathrm{TF}[x](f)}$: f_e.
3. Ce critère est généralement énoncé sur le plus haut des signaux ont un spectre qui s'étend pas borné en fréquence. Il y a eu de fait du repliement spectral, mais qui ne sera visible que si la partie « repliée » est d'amplitude non négligeable devant la partie du spectre entre $-f_e/2$ et $f_e/2$.

Le signal $f \mapsto \mathrm{TF1d}_p(f)$ étant périodique de période $f_e = 1/T_e$, on peut le décomposer en série de Fourier sous la forme

$$\mathrm{TF1d}_p(f) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{-j2\pi k f T_e}, \tag{14}$$

et il est facile de montrer, en réinjectant dans l'Éq. (13), que $c_k = x(kT_e)T_e$, ce qui se traduit par

$$\mathrm{TF1d}_p(f) = T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e) e^{-j2\pi k f T_e}. \tag{15}$$

On évalue alors cette transformée de Fourier continue périodisée à une fréquence $f_n = n/T = n f_e/N$:

$$\mathrm{TF1d}_p\left(\frac{n}{T}\right) = T_e \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(kT_e) e^{-j2\pi k n/N} = T_e \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(\ell T_e + lNT_e) e^{-j2\pi(k\times lN + \ell N)n/N} = T_e \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} x(\ell T_e + lT) e^{-j2\pi k n/N}. \tag{16}$$

On reconnaît alors le signal périodisé en temps $x_p(t)$, ce qui permet de conclure que

$$\mathrm{TF1d}_p\left(\frac{n}{T}\right) = T_e \sum_{\ell=0}^{N-1} x_p(\ell T_e) e^{-j2\pi k n/N} = T_e \mathrm{DFT}\left[[x_p]_\ell\right]_n, \tag{17}$$

ce qui achève la preuve.

Terminons par mentionner le cas particulier des signaux sinusoïdaux de la forme $x(t) = A\cos(2\pi t/\tau + \phi)$. Pour ces derniers, la DFT s'écrit

$$\mathrm{DFT}\left[[x_k]_\ell\right]_n = \frac{Ae^{j\phi}}{2} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j2\pi\ell(\tau/\tau - m/N)} + \frac{Ae^{-j\phi}}{2} \sum_{\ell=0}^{N-1} e^{j2\pi\ell(-T_e/\tau - m/N)}. \tag{18}$$

Si un nombre entier de périodes a été enregistré, c'est-à-dire s'il existe un entier m tel que $T = m\tau$, soit $T_e/\tau = m/N$, alors on obtient que

$$\mathrm{DFT}\left[[x_k]_\ell\right]_n = \begin{cases} NAe^{j\phi}/2 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \tag{19}$$

ce qui coïncide avec la transformée de Fourier continue dans la limite où $N \to +\infty$ (pic de Dirac). Si, à l'inverse, on n'a pas enregistré un nombre entier de périodes, alors la transformée de Fourier discrète est à priori non nulle pour toute fréquence discrète de la DFT. Elle est néanmoins maximale pour des entiers n tel que $T_e/\tau \simeq n/N$, ce qui conduit à quelques pics (typiquement moins d'une dizaine) non nuls dans la DFT autour de la fréquence « vraie » $1/\tau$.

2. Tracé du spectre d'un signal

> Il est possible de tracer le spectre en fréquence d'un signal sur le logiciel de la carte d'acquisition (Latis-Pro) dans le menu `Traitements/Calculs Spécifiques/Analyse de Fourier`. Pour illustrer cela, on pourra acquérir une tension sinusoïdale de fréquence 100 Hz avec un pas de temps de 100 µs, puis tracer sa transformée de Fourier discrète (DFT). On pourra alors la comparer aux DFT d'une tension triangulaire et d'une tension créneau de même fréquence.

Le calcul de la Transformée de Fourier Discrète se fait à l'aide de l'algorithme de FFT pour *Fast Fourier Transform*, diablement efficace.

Dans le premier cas, on s'attend, dans le domaine des fréquences positives, à observer un seul pic centré sur la fréquence d'oscillation de la sinusoïde. A l'inverse, les spectres seront plus riches en fréquences pour les signaux créneau et triangulaire, avec la présence d'harmoniques à des multiples entiers de la fréquence fondamentale.

La DFT est très utilisée en physique pour la caractérisation des systèmes, mais son utilisation pratique présente plusieurs limites dont il faut être conscient lors de son utilisation.

3. Échantillonnage et critère de Shannon

Pour conserver l'information sur la fréquence d'un signal, l'échantillonnage doit respecter le critère de Shannon.

> Pour illustrer cela, on peut acquérir une tension sinusoïdale de fréquence 1130 Hz avec un pas d'échantillonnage de 100 µs, et tracer sa DFT. On peut alors refaire la même chose, mais avec un pas d'échantillonnage de 1 ms, et commenter les deux spectres obtenus.

Dans le premier cas, la fréquence d'échantillonnage est $f_e = 10\,\mathrm{kHz}$, bien supérieure au double de la fréquence de la sinusoïde, et le critère de Shannon est bien vérifié. Le spectre ne contient alors que la fréquence du signal, bien que la courbe ne contienne que quelques points pour chaque oscillation. Dans le second cas, la fréquence d'échantillonnage est $f_e = 1\,\mathrm{kHz}$, qui ne vérifie pas le critère de Shannon. On observera alors dans le spectre un pic à une fréquence basse de 130 Hz dû au repliement spectral.

Les effets du repliement spectral induits par un non-respect du critère de Shannon deviennent plus dramatiques pour des signaux aux spectres plus riches.

> Pour illustrer cela, on peut acquérir une tension créneau de fréquence 1130 Hz avec un pas de temps de 100 µs, et tracer sa DFT.

On peut alors essayer d'interpréter les différents pics du spectre (normalement ils se trouvent aux multiples entiers impairs de la fréquence fondamentale). Avec ce pas de temps, le critère de Shannon nous permet de détecter les fréquences inférieures ou égales à 5 kHz dans le spectre. On pourra donc bien observer le fondamental à 1130 Hz, ainsi que son premier harmonique à 3390 Hz, mais l'harmonique suivant (théoriquement à 5650 Hz) apparaît autour de 4360 Hz. Il y a repliement du spectre : tous les harmoniques de fréquence supérieure à 5000 Hz sont « repliés » (comme le reflet d'un miroir). Un harmonique de fréquence f peut alors se retrouver dans le spectre à une fréquence $\pm f \pm n f_e$ pour toute valeur entière de n. Pour le cas de l'harmonique à 5650 Hz, on observe un pic à une fréquence $-5650 + 10000 = 4350\,\mathrm{Hz}$. De la même manière, on peut essayer de retrouver dans le spectre les harmoniques suivants à 7910 Hz (qui devrait s'observer vers $-7910 + 10000 = 2090\,\mathrm{Hz}$), 10 170 Hz (visible vers $10170 - 10000 = 170\,\mathrm{Hz}$), etc.

4. Sélection de la durée d'analyse

Le choix de la durée d'analyse est capital pour faire une bonne analyse spectrale, et il est possible de la sélectionner manuellement sur le logiciel associé à la carte d'acquisition (sur Latis-Pro, il faut aller dans le `Mode Avancé`, et utiliser la `Sélection de Période` en `Manuelle` plutôt que `Automatique`). Elle fixe notamment la résolution du spectre obtenu. C'est une conséquence de la relation d'incertitude de Heisenberg-Gabor : la résolution fréquentielle Δf d'un spectre est liée à la durée T du signal correspondant par la relation $T\Delta f \simeq 1/4\pi$. On en conclut que plus la durée d'analyse est grande, et plus le spectre sera résolu en fréquence.

a. Spectre d'un signal périodique

Pour un signal périodique, il est préférable que la durée d'analyse soit constituée d'un nombre entier de périodes, pour reconstituer un signal infini similaire à celui d'origine, et pour que la DFT représente une mesure raisonnable de la transformée de Fourier continue. Dans ce cas, la notion de résolution temporelle n'a plus de sens. Si ce n'est pas le cas, il apparaît des fréquences parasites dans le spectre (à cause des problèmes de raccordement du signal périodisé), conduisant à un élargissement des pics et à une erreur systématique sur la mesure des fréquences du fondamental et des harmoniques. On retiendra donc que le fait de prendre un nombre non entier de périodes revient à élargir les pics dans le spectre d'un signal, et donc à perdre en résolution fréquentielle. On veillera également à sélectionner un maximum de périodes pour améliorer la résolution fréquentielle (en vertu de ce qui a été dit précédemment).

> On peut appréhender ce phénomène en traçant la FFT sur Latis-Pro d'une tension sinusoïdale de fréquence 100 Hz avec un pas de temps de 100 µs (le critère de Shannon est bien vérifié), en sélectionnant manuellement une durée d'analyse qui est un multiple de sa période, puis recommencer avec une durée d'analyse quelconque.

On peut alors comparer les deux spectres, notamment la largeur des pics dans les spectres.

b. Spectre d'un signal non périodique

Pour un signal non périodique (régime transitoire par exemple), il faut sélectionner une durée d'analyse la plus longue possible (avec un maximum de points), pour obtenir une bonne résolution en fréquence (voir l'Exp. VIII). Mais dans ce cas, la DFT est une mesure approchée et biaisée de la transformée de Fourier continue d'un signal comme cela a déjà été mentionné plus haut, car le signal $x(t)$ ne peut coïncider avec le signal périodisé $x_p(t)$.

Pour rendre la mesure de la DFT plus proche de la transformée de Fourier continue, on peut utiliser des fenêtres de pondération (dans le `Mode Avancé`, puis `Fenêtres de pondération`). Le principe consiste à multiplier le signal $x(t)$ par une fonction de pondération $w(t)$ (Hamming par exemple) qui s'annule sur les bords de la fenêtre d'enregistrement avant de calculer sa DFT. Dans ce cas, le signal $y(t) = x(t)w(t)$ est à support borné, et coïncide donc avec le signal $y_p(t)$. Du vertu de ce qui a été vu plus haut, la DFT donne alors une bonne estimation de la transformée de Fourier continue de $y(t)$ (au repliement spectral près), qui est égale à la transformée de Fourier continue du signal $x(t)$ convoluée par la transformée de Fourier continue de la fonction de pondération $w(t)$. Pour plus de détails, il est conseillé de lire le paragraphe correspondant dans la Réf. [4] (p. 51), ou bien dans la Réf. [5] (p. 98).

Enfin, le nombre de points utilisé pour calculer une DFT par FFT a également une influence. En effet, l'algorithme de calcul de FFT est historiquement[4] réalisé avec un nombre de points qui est une puissance de 2 (1024, 2048, etc.). Si la durée d'analyse ne contient pas exactement 2^n points, plusieurs traitements peuvent *être réalisés* selon l'algorithme utilisé. Par exemple, un signal de 2^n points peut être recalculé par interpolation avant d'appliquer l'algorithme de FFT sur ce signal [4] (c'est ce que réalise Latis-Pro). On peut aussi ajouter des *zéros* à la fin du signal (*zero-padding*) pour augmenter la taille d'un signal jusqu'à avoir un nombre de points égal à une puissance de 2. Dans tous les cas, cela peut conduire à une légère déformation du spectre. Il est donc préférable de sélectionner une durée d'analyse composée de 2^n points (mais ce critère est moins important que les précédents).

5. Conditions de bonne conduite avec la carte d'acquisition

Pour réaliser une bonne acquisition et une bonne analyse spectrale d'un signal avec la carte d'acquisition (ou l'oscilloscope), il faut :

- faire une acquisition avec un calibre adapté,
- utiliser un pas de temps suffisamment petit pour respecter le critère de Shannon, c'est-à-dire au moins inférieur à $1/(2f_{max})$ (bien qu'un pas inférieur à $1/(10f_{max})$ soit préférable), mais suffisamment grand pour éviter d'être perturbé par la quantification,
- lisser fortement la courbe (plusieurs fois si nécessaire) avant de la dériver numériquement,
- pour la FFT : si le signal est périodique, sélectionner une durée d'analyse qui correspond à un maximum de périodes entières ; si le signal n'est pas périodique, sélectionner la durée d'analyse la plus longue possible.

VIII. Étude du filtre passe-bas RC [MPs 33 et 59]

1. Quelques rappels sur les filtres

À ce sujet, on pourra consulter n'importe quel ouvrage de classe préparatoire, ou bien les Réf. [4] (pp. 139–140) ou [6] (p. 34).

Considérons un système linéaire et invariant dans le temps (SLIT) qui reçoit un signal d'entrée sinusoïdal $e(t) = \mathrm{Re}(\underline{E}e^{j\omega t})$ et qui délivre un signal de sortie sinusoïdal $s(t) = \mathrm{Re}(\underline{S}e^{j\omega t})$. Il est caractérisé par sa fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E}(j\omega)}. \tag{20}$$

Pour la représenter, on trace dans un diagramme de Bode son gain $G_{dB} = 20\log|\underline{H}(j\omega)|$ et sa phase $\phi = \arg \underline{H}(j\omega)$.

Pour un signal d'entrée quelconque, la réponse d'un SLIT s'écrit sous la forme d'un produit de convolution :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t')e(t')\mathrm{d}t' \tag{21}$$

où $h(t)$ est une fonction qui contient toute l'information sur le système. Or la transformée de Fourier[5] de cette convolution donne : $\underline{S}(j\omega) = \mathrm{TF}[h](\omega)\underline{E}(j\omega)$. Avec la définition de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$, on déduit que $\mathrm{TF}[h](\omega) = \underline{H}(j\omega)$. Il y a alors différents moyens de déterminer la fonction de transfert, en excitant le système avec différents types de signaux en entrée.

- Si le système est excité par une impulsion (delta de Dirac) $e_{imp}(t) = \delta(t)$, alors $s_{imp}(t) = h(t)$, c'est la réponse impulsionnelle du système. On déduit des relations précédentes que la fonction de transfert peut s'exprimer comme

$$\underline{H}(j\omega) = \mathrm{TF}[s_{imp}](\omega). \tag{22}$$

- Si le système est excité par un échelon de tension (fonction de Heaviside) $e_{ech}(t<0) = 0$ et $e_{ech}(t>0) = 1$, alors $s_{ech}(t) = \int_0^{+\infty} h(t-t')\mathrm{d}t'$, et comme le filtre est causal ($h(t<0) = 0$), on a :

$$s_{ech}(t) = \int_0^t h(t')\mathrm{d}t'. \tag{23}$$

C'est la réponse indicielle du système. On déduit que la fonction de transfert peut s'exprimer comme

$$\underline{H}(j\omega) = \mathrm{TF}\left[\frac{\mathrm{d}s_{ech}}{\mathrm{d}t}\right](\omega) = j\omega\,\mathrm{TF}[s_{ech}](\omega). \tag{24}$$

4. Ce n'est plus forcément le cas de nos jours, où les algorithmes de FFT peuvent aussi gérer le cas de signaux dont le nombre de points est une puissance de 3 ou de 5.
5. On considère maintenant la transformée de Fourier fonction de la pulsation $\omega = 2\pi f$.

Les deux méthodes précédentes sont à priori applicables pour obtenir une estimation expérimentale d'une fonction de transfert. Sinon, on peut toujours mesurer directement le rapport $\underline{H}(j\omega) = \underline{S}(j\omega)/\underline{E}(j\omega)$ en balayant une large gamme de fréquences pour des excitations sinusoïdales.

En pratique, il est difficile de réaliser une réponse impulsionnelle. En effet, si l'impulsion est trop courte, l'amplitude du signal de sortie sera très faible. À l'inverse si elle est trop longue, elle ne peut plus être considérée comme une impulsion. On préfèrera donc mesurer une réponse indicielle, plus simple à réaliser.

Dans la suite, nous proposons d'illustrer la mesure d'une fonction de transfert par méthode directe et par la méthode de la réponse indicielle sur le filtre passe-bas *RC* (voir Fig. 7), dont la fonction de transfert vaut :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}. \tag{25}$$

On trouve alors facilement

$$|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}, \qquad G_{dB} = -10\log[1 + (\omega RC)^2], \qquad \phi = -\arctan(\omega RC). \tag{26}$$

Figure 7 – Filtre passe-bas *RC*.

2. Tracé du diagramme de Bode par mesure directe : utilisation de Python

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [4] (pp. 141–142) pour une autre description de l'expérience.

Liste du matériel :

- une résistance $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$,
- un condensateur $C = 10\,\mathrm{nF}$,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

> On propose de réaliser un filtre passe-bas *RC* (voir Fig. 7), avec $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 10\,\mathrm{nF}$. Ce filtre est alimenté par un GBF en régime sinusoïdal d'amplitude de l'ordre de quelques volts. On pourra afficher la tension d'entrée et celle aux bornes du condensateur sur un oscilloscope, puis utiliser les mesures automatiques pour obtenir leurs amplitudes et le déphasage entre les courbes. Il faut ensuite balayer une large gamme de fréquence (de 10 Hz à 100 kHz par exemple) pour pouvoir tracer le diagramme de Bode sur plusieurs décades.

Avec ces valeurs, on trouve une fréquence de coupure $f_0 = 1/(2\pi RC) = 1{,}6\,\mathrm{kHz}$ dans la bande passante de l'oscilloscope, et facilement délivrable par un GBF.

Pour tracer une courbe expérimentale (comme ce diagramme de Bode par exemple), nous conseillons d'enregistrer les données dans un fichier .txt puis d'utiliser Python[6]. On commencera par créer un fichier (par exemple .txt) à 8 colonnes en allant dans l'application Bloc-notes, en indiquant la fréquence f, l'amplitude U_e du signal d'entrée, celle U_s du signal de sortie, ϕ le déphasage entre les deux signaux, ainsi que leurs incertitudes :

f [Hz] u(f) [Hz] Ue [V] u (Ue) [V] Us [V] u (Us) [V] phi [deg] u (phi) [deg]

6. Il était d'usage d'utiliser le logiciel Regressi avant. Cependant, nous ne pouvons que recommander d'utiliser Python en lieu et place pour différentes raisons. Par exemple, au-delà du non-sens d'écrire mille-et, Regressi souffre de nombreux dysfonctionnements, a la fâcheuse tendance de s'arrêter intempestivement, et le traitement des données est plus limité. Par contre, un certain avantage est qu'il permet (normalement) de gérer les incertitudes et leur propagation. En utilisant Python, il faudra donc gérer soi-même les incertitudes (mais cela permettra d'en montrer la maîtrise).

Puis on effectuera les mesures et on importera à chaque fois les valeurs trouvées dans le fichier .txt. On pensera à enregistrer régulièrement, et une fois les mesures terminées.

Afin de traiter les données, on propose d'utiliser le code Python suivant à l'aide du logiciel Spyder, qu'on reproduit et commente ci-dessous :

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Benjamin GOUSELOW
Version du 22/07/2022
"""

#\\\ Importation des librairies À NE PAS MODIFIER
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.optimize as opt

#\\\ Définition de fonctions pour effectuer des modélisations affine et non linéaire de données À NE PAS
    MODIFIER
def modele_NL(X,Y,u_X,u_Y,params_test,f,f_deriv):
    """
    Effectue une modélisation non linéaire Y = f(X,params), en tenant compte des incertitudes sur X (u_X)
    et Y (u_Y).
    La fonction utilise la méthode des moindres carrés à partir de paramètres d'essai contenus dans le
    tableau params_test.
    La fonction renvoie un tableau qui contient dans l'ordre :
        - les paramètres optimisés dans l'ordre (params_opt),
        - leurs incertitudes dans l'ordre (u_params_opt),
        - la valeur du chi2 réduit (chi2_opt).
    f_deriv désigne la dérivée de la fonction f pour le calcul des résidus.
    """
    def residu_NL(params,x,y,u_x,u_y):
        return ( y - f(x,params) ) / np.sqrt ( u_y + u_y + ( f_deriv(x,params) * u_x ) ** 2 )

    opt_NL = opt.least_squares(residu_NL,params_test,args=(X,Y,u_X,u_Y))
    params_opt = opt_NL.x
    hessian_NL = np.matmul(opt_NL.jac.transpose(),opt_NL.jac)
    u_params_opt = np.sqrt( 2. / np.diag( np.diagonal(hessian_NL) ) )
    chi2_opt = np.sum( residu_NL(params_opt,X,Y,u_X,u_Y) ** 2 )/( len(X) - 2 )
    return np.hstack((params_opt,u_params_opt,np.array([chi2_opt])))

def modele_affine(X,Y,u_X,u_Y,a_test,b_test):
    """
    Effectue une modélisation affine Y = a * X + b, en tenant compte des incertitudes sur X (u_X) et Y (
    u_Y).
    La fonction utilise la méthode des moindres carrés à partir de paramètres d'essai a_test et b_test.
    La fonction renvoie un tableau qui contient dans l'ordre :
        - la valeur de a optimisée (a_opt),
        - la valeur de b optimisée (b_opt),
        - l'incertitude sur la valeur de a (u_a_opt),
        - l'incertitude sur la valeur de b (u_b_opt),
        - la valeur du chi2 réduit (chi2_opt).
    """
    def affine(x,a,b):
        return a * x + b

    def residu_affine(p_affine,x,y,u_x,u_y):
        a = p_affine[0]
        b = p_affine[1]
        return ( y - affine(x,a,b) ) / np.sqrt ( u_y + u_y + ( a * u_x ) ** 2 )

    opt_affine = opt.least_squares(residu_affine,np.array([a_test, b_test]),args=(X,Y,u_X,u_Y))
    a_opt = opt_affine.x[0]
    b_opt = opt_affine.x[1]
    hessian_affine = np.matmul(opt_affine.jac.transpose(),opt_affine.jac)
    u_a_opt = np.sqrt( 2. / hessian_affine[0,0]]
    u_b_opt = np.sqrt( 2. / hessian_affine[1,1]]
    chi2_opt = np.sum( residu_affine(np.array([a_opt,b_opt]),X,Y,u_X,u_Y) ** 2 )/( len(X) - 2 )
    print("Résultats de l'ajustement :")
    print("- pente = {0:.2e} +/- {1:.1e}".format(a_opt,u_a_opt))
    print("- ordonnée à l'origine = {0:.2e} +/- {1:.1e}".format(b_opt,u_b_opt))
    return np.array([a_opt,b_opt,u_a_opt,u_b_opt,chi2_opt])

#\\\ Paramètres À MODIFIER
filename = 'bode.txt' # nom du fichier avec f, u(f), Ge, u(Ge), Ge, u(Ge), phi, u(phi) dans les unités SI
R = 1e4 # résistance en ohm
```



```
u_R = 1 # incertitude sur la résistance en ohm
C = 1e-8 # capacité en F
u_C = 1e-9 # incertitude sur la capacité en ohm

#\\\ Importation des données
data = np.genfromtxt(filename)
freq = data[:,0]
u_freq = data[:,1]
Ge = data[:,2]
u_Ge = data[:,3]
Ge = data[:,4]
u_Ge = data[:,5]
phi = data[:,6] * np.pi / 180. # conversion des degrés en radians
u_phi = data[:,7] * np.pi /180. # conversion des degrés en radians

#\\\ Définition de variables auxiliaires
puls = 2. * np.pi * freq
u_puls = 2. * np.pi * u_freq
gain = Ge / Ge
u_gain = gain * np.sqrt( (u_Ge / Ge) ** 2 + (u_Ge / Ge) ** 2 ) # utilisation de la formule de propagation
    des incertitudes pour un produit
tauRC = R * C
u_tauRC = tauRC * np.sqrt( (u_R / R) ** 2 + (u_C / C) ** 2 ) # utilisation de la formule de propagation
    des incertitudes pour un produit

#\\\ Effectuer une modélisation non linéaire du gain et de la phase (non recommandée)
def gain_th(w,tau): # fonction de modélisation
    x = w * tau
    return 1. / np.sqrt( 1. + x * x )

def gain_th_deriv(w,tau): # dérivée de la fonction de modélisation en fonction de la pulsation
    x = w * tau
    return - x * tau / ( 1. + x * x ) ** (3./2.)

def phase_th(w,tau): # fonction de modélisation
    x = w * tau
    return - np.arctan(x)

def phase_th_deriv(w,tau): # dérivée de la fonction de modélisation en fonction de la pulsation
    x = w * tau
    return - tau / ( 1. + x * x)

param_NL_gain = modele_NL(puls,gain,u_puls,u_gain,np.array([tauRC]),gain_th,gain_th_deriv)
tau_gain = param_NL_gain[0] # valeur optimale de tau
u_tau_gain = param_NL_gain[1] # incertitude associée
chi2_gain = param_NL_gain[2] # chi2 réduit

param_NL_phase = modele_NL(puls,phi,u_puls,u_phi,np.array([tauRC]),phase_th,phase_th_deriv)
tau_phase = param_NL_phase[0] # valeur optimale de tau
u_tau_phase = param_NL_phase[1] # incertitude associée
chi2_phase = param_NL_phase[2] # chi2 réduit

#\\\ Effectuer une modélisation linéaire du gain et de la phase (recommandée)
puls2 = puls * puls # carré de la pulsation
u_puls2 = 2. * puls * u_puls # incertitude sur le carré de la pulsation
gain_m2 = 1. / gain /gain # inverse du carré du gain
u_gain_m2 = gain_m2 * 2. * u_gain / gain # incertitude sur l'inverse du carré du gain
tan_phi = np.tan(phi) # tangente de la phase
u_tan_phi = u_phi * ( 1. + tan_phi * tan_phi ) # incertitude sur la tangente de la phase

param_affine_gain = modele_affine(puls2,gain_m2,u_puls2,u_gain_m2,tauRC + tauRC,1.)
a_affine_gain = param_affine_gain[0] # extraction de la pente
u_a_affine_gain = param_affine_gain[2] # extraction de l'incertitude sur la pente
b_affine_gain = param_affine_gain[1] # extraction de l'ordonnée à l'origine
u_b_affine_gain = param_affine_gain[3] # extraction de l'incertitude sur l'ordonnée à l'origine
chi2_affine_gain = param_affine_gain[4] # extraction du chi2 réduit
tau_affine_gain = np.sqrt( a_affine_gain ) # extraction de tau à partir de la pente
u_tau_affine_gain = tau_affine_gain * 0.5 * u_a_affine_gain / a_affine_gain # incertitude de tau à partir
    de celle de la pente

param_affine_phase = modele_affine(puls,tan_phi,u_puls,u_tan_phi,tauRC,0.)
a_affine_phase = param_affine_phase[0] # extraction de la pente
u_a_affine_phase = param_affine_phase[2] # extraction de l'incertitude sur la pente
b_affine_phase = param_affine_phase[1] # extraction de l'ordonnée à l'origine
u_b_affine_phase = param_affine_phase[3] # extraction de l'incertitude sur l'ordonnée à l'origine
chi2_affine_phase = param_affine_phase[4] # extraction du chi2 réduit
tau_affine_phase = - param_affine_phase[0] # extraction de tau à partir de la pente
u_tau_affine_phase = u_a_affine_phase # incertitude de tau à partir de celle de la pente
```

```
143
144 #%%% Tracé des données
145 plt.figure()
146 plt.errorbar(puls,gain,u_gain,u_puls,'o') # ajustement non linéaire
147 plt.plot(puls,gain_th(puls,tau_gain),label=r'$\tau=({0:.2e}$\pm$ {1:.1e}) s, $\chi_2=${2:.2f}'.format(
    tau_gain,u_tau_gain,chi2_gain))
148 plt.xscale('log')
149 plt.xlabel(r'$\omega$ (rad/s)')
150 plt.ylabel(r'GAIN')
151 plt.legend()
152 plt.show()
153
154 plt.figure()
155 plt.errorbar(puls,phi,u_phi,u_puls,'o') # ajustement non linéaire
156 plt.plot(puls,phase_th(puls,tau_phase),label=r'$\tau=({0:.2e}$\pm$ {1:.1e}) s, $\chi_2=${2:.2f}'.format(
    tau_phase,u_tau_phase,chi2_phase))
157 plt.xscale('log')
158 plt.xlabel(r'$\omega$ (rad/s)')
159 plt.ylabel(r'$\phi$ (rad)')
160 plt.legend()
161 plt.show()
162
163 plt.figure()
164 plt.errorbar(puls2,gain_m2,u_gain_m2,u_puls2,'o') # ajustement linéaire
165 plt.plot(puls2,a_affine_gain * puls2 + b_affine_gain,label=r'$\tau=({0:.2e}$\pm$ {1:.1e}) s, $\chi_2=
    {2:.2f}'.format(tau_affine_gain,u_tau_affine_gain,chi2_affine_gain))
166 plt.xscale('log')
167 plt.yscale('log')
168 plt.xlabel(r'$\omega^2$ (rad^2/s^2)')
169 plt.ylabel(r'$1/H^2$')
170 plt.legend()
171 plt.show()
172
173 plt.figure()
174 plt.errorbar(puls,tan_phi,u_tan_phi,u_puls,'o') # ajustement linéaire
175 plt.plot(puls,a_affine_phase * puls + b_affine_phase,label=r'$\tau=({0:.2e}$\pm$ {1:.1e}) s, $\chi_2=
    {2:.2f}'.format(tau_affine_phase,u_tau_affine_phase,chi2_affine_phase))
176 plt.xscale('log')
177 plt.xlabel(r'$\omega$ (rad/s)')
178 plt.ylabel(r'$\tan\phi$')
179 plt.legend()
180 plt.show()
```

> **Il commencera de créer un dossier dans lequel on mettra une copie du code Python et le fichier de données, et de travailler directement dans ce dossier. On vérifiera alors d'une part que Spyder est paramétré pour travailler dans le répertoire courant (voir le Menu `Outils/Préférences` puis `Le répertoire de travail actuel` et choisir « Le répertoire de travail actuel»). D'autre part, on s'assurera en haut à droite que le chemin du dossier de travail correspond bien au dossier qu'on vient de créer, sinon il faudra le modifier en conséquence en cliquant sur l'icône de dossier.**

Le code est constitué de différents blocs délimités par `#%%` qu'on peut exécuter de façon indépendante en plaçant son curseur dans le bloc correspondant, puis en allant dans le menu `Run/Run Cell` ou bien dans `Run/Run cell and advance` (cette dernière commande déplaçant alors le curseur dans le bloc suivant du programme pour une exécution future). Le programme peut également être exécuté entièrement en allant dans le Menu `Run/Run`.

Les premier et second blocs constituent très souvent le début de tout code d'analyse que vous utiliserez (ou mieux réécrirez). Le premier bloc (lignes 8 à 11) permet d'introduire les librairies nécessaires : numpy pour la gestion des tableaux, matplotlib pour le tracé des courbes, et scipy.optimize pour l'ajustement des données sur un modèle. Le second bloc (lignes 13 à 63) contient des fonctions génériques qui permettent d'effectuer des ajustements linéaire et non linéaire et d'extraire les paramètres optimaux de modélisation, ainsi que leurs incertitudes et le χ_2 réduit correspondant. Pour tous ces éléments, nous renvoyons au chapitre « Incertitudes et ajustements» de la Réf. [5]. Ces fonctions pourront être à l'avenir copiées dans n'importe quel code Python si l'on souhaite effectuer des ajustements, et il est important de bien les comprendre.

Puis viennent les blocs adaptés spécifiquement au problème du filtre RC (même s'il a logique sera la même pour tout autre code d'analyse de données). Le troisième bloc (lignes 65 à 70) permet d'indiquer l'ensemble des paramètres, notamment le nom du fichier de données, et les valeurs de R et C. Le quatrième bloc (lignes 72 à 81) permet de définir les différentes variables d'intérêt. Le cinquième bloc (lignes 83 à 89) permet de calculer des variables auxiliaires, comme la pulsation, le module de la fonction de transfert ou la constante de temps du filtre. Le sixième bloc (lignes 91 à 116) permet d'effectuer une modélisation non linéaire du gain et de la phase à partir de l'Eq. (26). Cependant, en physique, on préfèrera effectuer des régressions affines, dont la modélisation est plus aisée, et l'estimation des incertitudes sur les paramètres d'ajustement plus robuste. Pour cela, on définit des nouvelles variables et on effectue les ajustements correspondants $1/|\underline{H}(\omega)|^2$ en fonction de ω^2 et $\tan\phi$ en fonction de ω dans le septième bloc (lignes 118 à 142). Enfin, le huitième bloc (lignes 144 à 180) permet de

tracer les différentes courbes et les ajustements correspondants. Les paramètres optimaux pour les modélisations, ainsi que le χ_2 réduit, apparaissent dans la légende des figures.

3. Étude de la réponse à un signal complexe (*)

On peut rendre l'expérience précédente plus automatique en envoyant un signal présentant un spectre riche, qui permettra donc, par un seul enregistrement, d'obtenir la fonction de transfert sur une large gamme de fréquences.

> **On propose de réaliser le circuit de la Fig. 7. Cette fois-ci on générera à l'aide d'un générateur basses fréquences un bruit blanc de bande passante de l'ordre de 50kHz. On mesurera les tensions aux bornes du condensateur et du GBF à l'aide d'une carte d'acquisition. On pourra ensuite déterminer les spectres de Fourier en amplitude du signal aux bornes du GBF et du condensateur, et en déduire le module de la fonction de transfert en faisant le rapport des deux spectres en amplitude. On pourra de même calculer les spectres de Fourier en argument des deux tensions, et en déduire la phase de la fonction de transfert en faisant la différence des deux spectres en phase. Il faut pour cela aller dans le mode `Avancé`. L'argument peut varier très brusquement de $-\pi$ à π, notamment à hautes fréquences. Il peut alors être nécessaire de remettre « à la main » les déphasages dans le bon intervalle.**

Un bruit blanc est un signal présentant un spectre de Fourier quasiment plat sur la bande passante du GBF (qui est de l'ordre de 20 MHz au maximum dans le cas du Agilent 33220 A). Ici, on la prend de l'ordre de 50kHz, bien supérieure à la fréquence de coupure du filtre RC qui est ici de l'ordre de 1,6kHz. On peut utiliser un signal d'entrée différent dont le spectre n'est pas forcément constant, mais il faut juste s'assurer qu'il présente bien une amplitude suffisante sur tout le domaine fréquentiel d'intérêt (ici entre 0Hz et 50kHz environ) afin que la mesure de la fonction de transfert ne soit pas trop bruitée.

Pour cette expérience, on prendra la durée d'acquisition la plus longue possible afin d'augmenter la résolution fréquentielle sur la mesure des spectres. Par ailleurs, il faudra choisir la fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la bande passante du bruit blanc pour éviter le repliement spectral. Une fréquence d'échantillonnage de l'ordre de 100kHz ($T_e = 10\mu s$) convient alors. La durée d'acquisition doit être suffisamment longue pour avoir une bonne résolution fréquentielle. Un nombre de points de l'ordre de 2000 est suffisant.

Un exemple de réalisation expérimentale avec du matériel d'enseignement est donné Fig. A2. Le module et l'argument de la fonction de transfert sont bruités, une fenêtre de pondération avant de calculer les transformées de Fourier discrètes peut aider à nettoyer les courbes.

4. Étude du régime transitoire et réponse indicielle

Pour réaliser cette expérience, on pourra consulter la Réf. [4] (p. 144).

Liste du matériel :

- une résistance $R = 10\text{k}\Omega$,
- un condensateur $C = 10\text{nF}$,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope,
- une carte d'acquisition.

> **On propose de reprendre le filtre RC précédent (voir Fig. 7) en l'alimentant cette fois-ci avec une tension créneau entre 0 V et quelques volts et de basse fréquence (par exemple une dizaine de hertz).**

La période de ce créneau étant beaucoup plus grande que le temps de relaxation $\tau = RC = 0{,}1\text{ms}$, la réponse du système lors d'une phase de montée s'assimile à sa réponse indicielle.

> **On peut alors mesurer la constante de temps τ à l'oscilloscope à l'aide des curseurs et la comparer à la valeur prédite.**

Une fois ceci réalisé, on peut aller plus loin et chercher à obtenir la fonction de transfert du système.

> **Pour cela, on propose de mesurer la tension aux bornes du condensateur et du GBF avec une carte d'acquisition. On paramétrera le logiciel `Latis-Pro` pour que l'acquisition se déclenche dès que la tension créneau dépasse un seuil montant (de 100mV par exemple).**

Il faut choisir la période d'échantillonnage de sorte qu'il soit très faible devant le temps caractéristique τ du circuit RC. De plus, la durée de l'acquisition doit être grande devant τ, ce qui donne une borne inférieure au nombre de points. Un pas de temps de $10\mu s$ et un nombre de points égal à 2000 conviennent alors.

> On peut enfin obtenir le diagramme de Bode du système à partir de sa réponse indicielle, en dérivant la courbe (on pensera à la lisser plusieurs fois au préalable pour diminuer le bruit), puis en faisant une analyse de Fourier en Amplitude (pour obtenir $|\underline{H}|$). Pour diminuer le bruit sur la mesure de la dérivée, on pourra moyenner le signal sur plusieurs acquisitions.

On prendra une durée d'analyse la plus longue possible (contenant le régime transitoire et un maximum du régime permanent) afin d'avoir une bonne résolution fréquentielle.

> On pourra également tracer la FFT en Argument (pour obtenir $\arg \underline{H}$) avec le mode `Avanoé`.

La courbe est moins satisfaisante à hautes fréquences que celle obtenue par mesure directe (voir les paragraphes précédents).

Tracer un diagramme de Bode avec une réponse indicielle permet donc de balayer un large spectre de fréquence très rapidement. Cependant, sa résolution étant limitée, le diagramme de Bode (en échelle logarithmique) paraît plus incomplet aux basses fréquences que par mesure directe (attention à la composante continue, qui correspond à $\log = -\infty$). De plus, l'évolution de la phase n'est pas concluante à hautes fréquences à cause d'un problème de position d'échantillonnage (pour plus de détails et une correction de ce problème, voir la Réf. [6] p. 200).

IX. Étude du filtre passe-bande RLC (*) [MPs 33, 35 et 59]

L'expérience est décrite dans les Réf. [4] (pp. 145-146) et [6] (pp. 206-207).

Liste du matériel :

- une résistance $R = 100\,\Omega$ ou un rhéostat de résistance variable P56 . 32,
- un condensateur $C = 100\,\mathrm{nF}$,
- une bobine $L = 0{,}1\,\mathrm{H}$,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope,
- une carte d'acquisition.

Nous proposons de recommencer la même étude que précédemment (voir l'Exp. VIII) pour le filtre passe-bande *RLC* (voir Fig. 8). L'amplificateur linéaire intégré (ALI) joue le rôle de suiveur dont l'impédance de sortie, faible, permet de s'affranchir de la résistance interne du GBF (voir Réf. [2] p. 106). Par contre, il limite le courant appelé en sortie à quelques dizaines de mA, ce qui peut être problématique à la résonance. Une solution serait de remplacer l'ALI par un amplificateur de puissance.

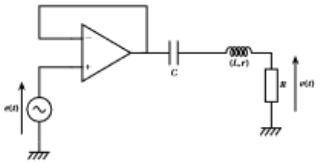


Figure 8 – Filtre passe-bande *RLC*.

En mesurant la tension aux bornes de la résistance, on obtient la fonction de transfert

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 - \omega^2 LC + j\omega(R + r)C}. \tag{27}$$

où il faut penser à prendre en compte la résistance r de la bobine. La résonance en intensité est obtenue pour $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, avec un facteur de qualité $Q = L\omega_0/(R + r)$. Avec les valeurs de composants données plus haut, on trouve $f_0 = \omega_0/(2\pi) = 1{,}6\,\mathrm{kHz}$ et $Q \lesssim 10$.

1. Diagramme de Bode par mesure directe

> On peut déterminer le diagramme de Bode par mesure directe des amplitudes de $e(t)$ et $s(t)$ et de leur déphasage pour une large gamme de fréquences en utilisant les mesures automatiques de l'oscilloscope. On pourra alors adapter l'analyse proposée dans l'Exp. VIII pour le traitement des données.

En particulier, on pourra mesurer la fréquence de résonance du filtre, ainsi que son facteur de qualité $Q = f_0/(f_2 - f_1)$ où f_1 et f_2 correspondent aux limites de la bande passante du filtre (pour ces fréquences, l'amplitude de $s(t)$ est égale à celle de $s(t)$ à résonance divisée par $\sqrt{2}$), et les comparer aux valeurs prédites.

2. Réponse indicielle

> On pourra aussi alimenter le filtre de la Fig. 8 avec une tension créneau basse fréquence, et mesurer la réponse indicielle du filtre avec la carte d'acquisition. On pourra alors effectuer le traitement proposé dans l'Exp. VIII pour en déduire le gain et la phase de la fonction de transfert du système.

Ceci permettra là encore de remonter aux caractéristiques du filtre ω_0, Q, etc. Par ailleurs, le suiveur permet de rendre l'expérience plus visuelle, en s'assurant que la tension aux bornes du GBF est effectivement un créneau. En effet, en présence du suiveur, le courant circulant dans le GBF est quasiment nul (courant de polarisation de l'ALI de l'ordre de quelques pA). En l'absence de suiveur, la tension aux bornes du GBF est $e(t) = e_c(t) - (Z_{\mathrm{int}}/R)s(t)$, où $e_c(t)$ désigne le créneau désiré et Z_{int} la résistance interne du GBF. On voit alors que $e(t)$ ne correspond pas au créneau, et le signal aux bornes du GBF est fortement déformé.

Cette méthode a l'avantage de fonctionner quelle que soit la valeur du facteur de qualité, autrement dit, que le système soit en fonctionnement apériodique ou pseudo-périodique.

> On pourra s'en convaincre en reproduisant l'expérience pour une valeur plus grande de R de l'ordre de plusieurs kΩ.

Cette méthode est à comparer à une autre méthode qui consiste, lorsque $Q > 1/2$, à mesurer la pseudo-pulsation

$$\Omega = \omega_0\sqrt{1 - 1/4Q^2}. \tag{28}$$

des oscillations amorties du régime transitoire pour différentes valeurs de R, tout en conservant $Q > 1/2$, puis à remonter par régression linéaire à ω_0. Le facteur de qualité, lui, peut s'obtenir par la méthode du décrément logarithmique, ou en comptant simplement le nombre d'oscillations visibles dans le signal (si on se contente d'un ordre de grandeur). Cette méthode a l'inconvénient de ne pas marcher quand $Q < 1/2$ (régime apériodique), et ne permet pas de remonter à la fonction de transfert complète.

Nous nous sommes limités à l'étude de filtres passifs dans cette expérience (et la précédente). Cependant il pourrait être intéressant d'étudier également des filtres actifs (avec amplificateur linéaire intégré), comme un passe-bas du 1er ordre (voir Réf. [1] p. 145), ou un passe-bande du second ordre (voir Réf. [6] p. 47). Par ailleurs, nous nous sommes focalisés dans ce TP sur la fonction de transfert, mais nous aurions pu étudier d'autres propriétés des filtres, notamment leurs impédances d'entrée et de sortie.

Références

[1] G. Asch *et coll.*, *Acquisition de données. Du capteur à l'ordinateur*, Dunod (1999).

[2] J.-P. Bellier, C. Boulay, D. Guéant, *Physique expérimentale aux concours de l'enseignement - Électricité, électromagnétisme, électronique, acoustique*, Dunod (2012).

[3] J. Cooley, P. Lewis et P. Welch, « Application of the Fast Fourier Transform to computation of Fourier integrals, Fourier series, and convolution integrals. », *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* 15(2) (1967).

[4] R. Duffait et J.-P. Lièvre, *Agrégation de Sciences Physiques - Expériences d'électronique*, Bréal (1999).

[5] Jolidon, *Physique expérimentale - Optique, magnétisme, électrotechnique, mécanique, thermodynamique et physique non linéaire*, EDP Sciences (2021).

[6] M. Krob, *Électronique expérimentale*, Ellipses (2002).

[7] J.-P. Pérez, C. Laguste, J.-Y. Fourniols et S. Boubeurs, *Électronique. Fondements et applications*, Dunod (2012).

Exemples de résultats expérimentaux

Figure A1 – Exemple de mesure de déphasage en fonction de la fréquence permettant de remonter, par régression linéaire, à la capacité d'entrée C_{osc} de l'oscilloscope (voir l'Exp. IV).

Figure A2 – Exemple de mesure de la fonction de transfert du filtre RC à partir de sa réponse à un bruit blanc (voir l'Exp. VIII).

Autour de l'électronique numérique

Table des expériences

I.	Généralités sur la chaîne d'acquisition	24
II.	Généralités sur l'électronique numérique [MPs 8 et 9]	24
III.	Mesure numérique d'une fréquence temporelle [MP 45]	27
IV.	Conversion analogique-numérique (*) [MPs 44 et 45]	29
V.	Échantillonnage [MP 45]	33
VI.	Stratégie d'acquisition [MPs 42, 44 et 52]	34
VII.	Filtrage numérique (*) [MPs 43, 44 et 45]	37

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

Nous vous conseillons de terminer dans un premier temps le TP n°1, avant de commencer celui-ci.

I. Généralités sur la chaîne d'acquisition

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] pour une description générique d'une chaîne d'acquisition ou pour de plus amples explications.

Les capteurs sont les premiers éléments d'une chaîne d'acquisition. À chaque mesurande est associé un capteur dont le rôle est de traduire la valeur m de cette dernière en une grandeur électrique $x(m)$. La plupart des dispositifs ne sont aptes qu'à traiter des signaux sous forme de tension électrique. Si $x(m)$ est une autre grandeur électrique, on utilise un conditionneur afin de convertir cette grandeur électrique en une tension dont la valeur est déterminée par la sortie du capteur.

Un amplificateur est parfois utilisé pour assurer d'une part la protection du signal vis-à-vis des parasites, et d'autre part un transfert optimal du signal. Les différents types de parasites et les moyens de lutter contre sont exposés dans la Réf. [1], aux chapitres 11 à 13.

Lorsque l'on veut acquérir un signal variable, et où l'amplitude du signal porte l'information, on utilise un échantillonneur-bloqueur. Il prélève et mémorise un échantillon du signal à un instant connu avec précision, et délivre pendant un temps T_e, appelé temps d'échantillonnage, une tension égale à celle de l'échantillon mémorisé. Il fournit alors une tension stable et représentative du signal au convertisseur analogique-numérique. Son but est de convertir la tension analogique issue du début de la chaîne en une suite de n bits.

Le traitement du signal permet d'extraire l'information utile d'un signal. Il peut être analogique (filtrage par exemple) ou numérique. Dans le premier cas, il est placé avant l'échantillonnage. Dans le second cas, il est réalisé après l'acquisition d'un signal en utilisant un logiciel adapté.

L'ensemble de la chaîne d'acquisition est résumé Fig. 1.

II. Généralités sur l'électronique numérique [MPs 8 et 9]

1. Présentation des éléments de base de l'électronique numérique

Pour de plus amples détails, nous renvoyons le lecteur aux Réf. [2] (pp. 244-258) ou [4] (p. 569).

Les capteurs physiques fournissent des signaux analogiques : ce sont eux que vous avez étudiés jusqu'ici. La chaîne d'acquisition les transforme en signaux numériques, qui sont plus faciles à transmettre, moins lourds à stocker et surtout moins sensibles au bruit. Les signaux numériques, qualifiés aussi de logiques (ou binaires, ou encore booléens), ne peuvent prendre que deux valeurs : 0 ou 1. En pratique, on utilise deux états électriques nettement séparables : le plus souvent 0V et 5V. Par exemple, une tension inférieure à 0,5V sera considérée comme le chiffre 0, une tension supérieure à 4,5V sera considérée

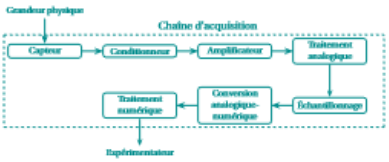


FIGURE 1 – Schéma typique d'une chaîne d'acquisition.

comme le chiffre 1, et on s'arrange pour qu'il soit presque impossible d'obtenir une tension comprise entre ces deux valeurs.

On distingue différents éléments listés ci-dessous.

- Les portes logiques (gates) : ce sont les éléments de base de la logique combinatoire. L'état de sortie des portes ne dépend que des variables d'entrée à cet instant[1]. Elles sont faciles à réaliser et disponibles sous forme de circuits intégrés. Le tableau ci-dessous présente la sortie de différentes portes logiques en fonction des valeurs des variables d'entrée. Ce tableau est appelé table de vérité de la porte logique.

Entrée 1	Entrée 2	Porte ET	Porte NON ET	Porte OU	Porte OU exclusif
0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

Ces portes logiques seront schématisées ainsi dans la suite du document :

Porte ET/AND Porte NON ET/NAND Porte OU/OR Porte OU exclusif/XOR

Notons qu'il est possible de réaliser toutes les fonctions logiques avec des portes NON ET. On dit que c'est une fonction complète. Quelques exemples de ces réalisations sont exposés dans la Réf. [2] (p. 251).

On trouve deux technologies différentes pour la réalisation de ces portes logiques : TTL (pour *Transistor-Transistor logic*) et CMOS (pour *Complementary Metal Oxide Semi-conductor*). La première technologie repose sur l'utilisation de transistors bipolaires (voir le TP4) en régime de commutation (soit bloqué, soit en régime de saturation). Ces éléments sont décrits dans la Réf. [2] (pp. 263-264). La seconde technologie repose sur l'utilisation de transistors à effet de champ métal-oxyde-semi-conducteur. Ceux-ci sont décrits dans la Réf. [2] (pp. 264-266). La comparaison de ces deux technologies est faite dans la Réf. [2] (p. 246).

Certaines de ces portes logiques sont câblées dans des boîtiers disponibles dans la collection.

- Les bascules : leur sortie dépend des entrées à l'instant présent, mais aussi de la sortie à l'état antérieur[2]. Ils obéissent à une logique dite séquentielle. On pourra se reporter pour plus de détails à la Réf. [2] (p. 256) ou à la Réf. [4] (p. 578).

2. Prise en main des portes logiques

On propose quelques expériences pour se familiariser avec les portes logiques.

Liste du matériel :

1. Évidemment ces portes logiques ont un certain temps de réponse. On entend surtout ici que ces portes n'ont pas de fonction mémoire.
2. Lui-aussi, ces éléments logiques présentent un certain temps de réponse, mais on insiste surtout sur le fait que ces composants peuvent stocker une information dans leur mémoire.

- un générateur de tension continue (module Hameg P27.18 par exemple),
- deux portes NON ET (boîtier P42.52),
- un multimètre.

> Pour une première approche des portes logiques, on pourra, à l'aide d'un générateur de tension continue, vérifier la table de vérité d'une porte NON ET. On rappelle que le 1 logique correspond à 5V et le 0 logique à 0V (connexion à la masse).
>
> Vous pouvez aussi câbler un circuit intégré 7400, disponible dans la réserve. Les schémas de branchement sont donnés dans la notice ou à la dernière page de la Réf. [2]. Les composants logiques doivent être alimentés sous 5V.

On peut illustrer le caractère complet de la porte NON ET.

> On pourra, par exemple, vérifier qu'en connectant les deux entrées d'une porte NON ET, on fabrique un opérateur NON (renvoyant 0 si l'entrée est 1, et inversement).

On peut également combiner plusieurs portes logiques entre elles.

> On pourra commencer par boucler deux portes NON ET, voir fig. 2. Imposer 0 à l'entrée de la première porte (en la reliant à la masse). Retirer ensuite la masse et observer l'état du système. On peut faire de même en imposant 1 (en la reliant à l'alimentation).

On peut vérifier que le système conserve bien le bit en mémoire dans chaque cas. Ce principe est à la base de la bascule *RS*, qui permet de mémoriser un bit. Le fonctionnement de cette dernière est explicité dans la Réf. [2] (pp. 256-257).

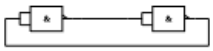


FIGURE 2 – Deux portes NON ET en série bouclées.

3. Réalisation d'un oscillateur de fréquence variable

À partir des portes logiques, on peut construire un oscillateur, c'est l'expérience que nous proposons ci-contre.

Liste du matériel :

- trois portes NON ET (boîtier P42.52),
- trois rhéostats de résistance variable P54.32,
- trois condensateurs de capacité $C \simeq 100\,\mathrm{nF}$,
- un oscilloscope.

> On pourra dans un premier temps boucler maintenant trois portes NON ET en série, et observer le signal en sortie de chacune des portes à l'oscilloscope.

On doit observer des oscillations dont on pourra mesurer la période T. Cette dernière permet de remonter au temps de commutation d'une porte τ par la relation $T = 2n\tau$, où n désigne le nombre (impair) de portes. Usuellement, on a $\tau \simeq 100\,\mathrm{ns}$. Dès que le nombre de portes NON ET est impair, le système est instable. Par exemple, pour $n = 3$, si on a initialement 0 en entrée de la première, on aura 1 en entrée de la seconde, puis 0 en entrée de la troisième, ce qui renvoie 1 à l'entrée de la première porte, etc. On observe alors des oscillations dont la période est proportionnelle au temps de commutation τ : $T = 2n\tau$. Le signal à l'oscilloscope doit être un créneau, mais selon la bande passante de l'oscilloscope, celui-ci peut être déformé et prendre la forme d'une sinusoïde. En l'occurrence, pour les oscilloscopes de la collection, la bande passante est de 100 MHz, grande devant la fréquence d'oscillation (mais pas démesurément grande) : les créneaux sont donc déformés. Par ailleurs, on pourra vérifier que les signaux en sortie de chacune des portes sont déphasés de $2\pi/n$.

Pour le moment, la fréquence de l'oscillateur est fixe, contrôlée par le temps de commutation d'une porte NON ET. On peut contrôler la fréquence en intercalant entre chaque porte NON ET un filtre *RC*, comme le montre le schéma de la Fig. 3. En d'autres termes, si on considère la nouvelle porte constituée de la porte NON ET et du filtre *RC*, on peut contrôler son temps de commutation en jouant sur les valeurs de *R* et *C*.

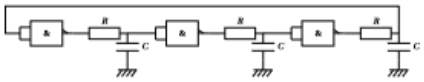


FIGURE 3 – Trois portes NON ET en série bouclées entre lesquelles ont été intercalés des filtres RC.

> On propose de câbler le montage de la Fig. 3. On prendra une capacité $C \simeq 100\,\mathrm{nF}$ et trois résistances variables identiques. On pourra alors observer à l'oscilloscope les tensions en sortie des trois portes logiques. On pourra ensuite faire varier les trois résistances de concert, et mesurer la fréquence d'oscillation des portes.

On peut alors vérifier que la période T d'oscillation varie de façon affine avec la résistance R. Les oscillations prennent cette fois-ci la forme de charges et décharges des filtres RC, là encore déphasées de $2\pi/3$.
Lors de la réalisation de l'expérience, on ajustera les résistances des échoïstats à l'ohmmètre pour qu'elles aient toutes les trois la même valeur. Quant aux capacités, on pourra utiliser des condensateurs de capacité variable pour qu'elles soient toutes identiques. Dans tous les cas, ces capacités devront être mesurées au RLC-mètre. Étant donné que les fréquences d'oscillations des trois portes varient entre quelques centaines de hertz et quelques kHz, on fixera la fréquence du RLC-mètre sur 1 kHz. Dans le cas où les condensateurs ne sont pas de capacité variable, les fluctuations de capacité entre les trois condensateurs correspondront à une incertitude supplémentaire sur la capacité, qui s'ajoutera à la résolution du RLC-mètre. Un exemple de réalisation expérimentale avec du matériel d'enseignement est présenté Fig. A1.

III. MESURE NUMÉRIQUE D'UNE FRÉQUENCE TEMPORELLE [MP 45]

1. Principe du fréquencemètre

Nous proposons de réaliser l'expérience suivante, décrite ci-dessous, ainsi que dans la Réf. [2] (pp. 274-276).

Liste du matériel :
- deux générateurs basses fréquences,
- une alimentation continue,
- le boîtier P42.49 « Principe du fréquencemètre »,
- un compteur P70.9,
- un oscilloscope.

La façon la plus simple de mesurer une fréquence est de compter le nombre d'oscillations au cours d'un temps fixé. On peut ainsi compter le nombre d'oscillations d'un pendule pendant un temps que l'on mesure au chronomètre.

Ici, on désire mesurer la fréquence d'un signal créneau numérique (entre 0 V et 5 V) issu d'un GBF. Pour cela, on cherche à compter le nombre de fois où ce signal atteint 5 V pendant 1 s. Pour cela, on propose (voir Fig. 4) de réaliser un ET logique entre le signal dont on veut mesurer la fréquence, et un signal d'horloge créneau très basse fréquence (TBF) à 0,5 Hz (valant par conséquent 5 V pendant 1 s, puis 0 V pendant 1 s). Enfin, on utilisera un compteur numérique (voir Fig. 4) qui se chargera de compter le nombre de seuils montants du signal ainsi obtenu.
Pour remettre à zéro le compteur, il faut que la tension de l'horloge TBF passe de 5 V à 0 V. On propose d'utiliser une bascule JK : pour $J = K = 1$, la sortie change d'état à chaque front montant de l'horloge TBF. C'est-à-dire que si l'état était 0 (resp. 1), il passe à 1 (resp. 0) lorsque l'horloge TBF passe de 0 à 1.
Finalement, le compteur compte le nombre de seuils montants pendant 1 s, laisse l'affichage pendant 1 s, remet à zéro pendant 2 s puis recommence le comptage.

> On propose de réaliser le circuit de la Fig. 4, en alimentant les différents éléments logiques ainsi que le compteur avec une tension continue de 5 V. Les signaux d'entrée et d'horloge TBF sont des créneaux entre 0 V et 5 V délivrés par des générateurs basses fréquences, par exemple 400 Hz pour le premier, 0,5 Hz pour le second. On pourra observer simultanément sur un oscilloscope à quatre voies les signaux d'entrée, le signal arrivant sur le compteur et le signal de remise à zéro (RAZ). On peut alors en déduire la fréquence du signal.

Un exemple de réalisation expérimentale est donné dans la Réf. [2] (p. 275).

La fréquence maximale mesurable dépend du nombre de chiffres affichables. Cela est vrai uniquement dans la limite

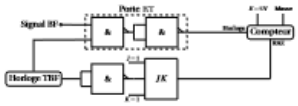


FIGURE 4 – Principe du fréquencemètre.

où le signal d'entrée est de période très grande devant le temps de commutation d'une porte, ce qui est le cas pour les expériences qu'on réalise ici. Pour les compteurs de la collection, qui dispose de deux afficheurs, on ne peut mesurer que des fréquences inférieures à 100 Hz. Il faut parfois utiliser plusieurs compteurs, et les relier tous entre-eux.

> On propose d'utiliser plusieurs compteurs si cela est possible. Pour cela, la sortie « Débassement » (ou équivalent, souvent située sur le côté) du premier compteur doit être branchée sur l'entrée « Horloge » (ou équivalente) du second. Les remises à zéro, les alimentations et les masses doivent être connectées. On peut alors vérifier le bon fonctionnement du fréquencemètre à des fréquences supérieures à 100 Hz.

On termine par mentionner que dans les fréquencemètres commerciaux, l'affichage ne se rafraîchit qu'une fois la mesure effectuée.

> On peut utiliser un registre à décalage pour ne rafraîchir l'affichage du fréquencemètre qu'après mesure. On renvoie pour cela à la Réf. [2] (p. 275). Cela est facultatif, et il est conseillé de réaliser ceci uniquement en seconde lecture.

2. Mesure de la fréquence d'une note émise par un diapason

Liste du matériel :
- deux générateurs basses fréquences,
- un diapason P71.1,
- un microphone cravate P74.37 (à demander aux techniciens),
- un adaptateur pour microphone cravate P74.38,
- deux amplificateurs linéaires intégrés,
- des résistances sur plaquette,
- une diode de redressement P29.4,
- une alimentation continue,
- le boîtier P42.49 « Principe du fréquencemètre »,
- un compteur P70.9,
- un oscilloscope.

Pour mesurer la fréquence d'un signal quelconque, il faut d'abord transformer ce signal en un signal créneau entre 0 V et 5 V, de même fréquence. Pour cela, on va utiliser un comparateur à hystérésis (voir Fig. 5) : ce montage sera vu plus en détail dans le TP sur les amplificateurs linéaires intégrés.

Le comparateur à hystérésis renvoie une tension de sortie $s_c(t)$ qui dépend de la valeur du signal $u(t)$, et qui est de la forme

$$s_c(t) = \begin{cases} +V_{\mathrm{sat}} \text{ si } u(t) < -\dfrac{R_1}{R_1+R_2}V_{\mathrm{sat}}, \\ -V_{\mathrm{sat}} \text{ si } u(t) > \dfrac{R_1}{R_1+R_2}V_{\mathrm{sat}}, \\ \text{état antérieur si } |u(t)| < \dfrac{R_1}{R_1+R_2}V_{\mathrm{sat}}. \end{cases} \tag{1}$$

On a donc tout intérêt à prendre un rapport R_1/R_2 assez petit : par exemple $R_2 = 390\,\mathrm{k\Omega}$ et $R_1 = 100\,\Omega$. En effet, on verra par la suite que le signal en sortie du microphone est souvent très faible, de l'ordre de quelques dizaines de millivolts, et il est nécessaire que le seuil de basculement du comparateur soit en-deçà de cette valeur pour que la numérisation du signal

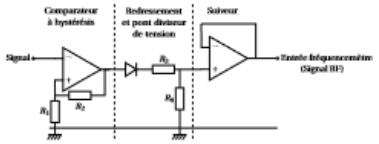


FIGURE 5 – Transformation d'un signal sinusoïdal en un signal numérique de même fréquence. Le signal en sortie est ensuite envoyé à l'entrée du fréquencemètre schématisé Fig. 4.

fonctionne correctement. Pour le choix de résistances proposé, le basculement se produit pour une tension de l'ordre de 4mV. S'il est constaté que la tension aux bornes du microphone est plus faible, on prendra une résistance R_2 encore plus grande, mais cela rend le système plus sensible au bruit électronique. C'est également pour cela qu'on n'amplifie pas le signal avant de l'envoyer dans le comparateur, pour éviter d'amplifier le bruit.

La seconde partie du montage convertit les tensions de $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$ en 5V et 0V, la diode ne laissant passer que les alternances positives du signal créneau en sortie du comparateur. Les deux résistances permettent de réaliser un pont diviseur de facteur 1/3 tension avec $R_3 = 2R_4$, afin d'obtenir un signal numérique (on rappelle que $V_{sat} = 15$V). On peut choisir $R_3 = 6{,}2$kΩ et $R_4 = 3{,}9$kΩ qui permette de réaliser approximativement cette condition. Par ailleurs, on prendra des résistances de l'ordre du kΩ pour s'affranchir de résistances parasites.

Enfin, le second amplificateur linéaire intégré, câblé en suiveur, permet une bonne adaptation d'impédance avec l'entrée du fréquencemètre. En effet, il présente une faible impédance de sortie et une haute impédance d'entrée.

> On propose donc de câbler le montage de la Fig. 5, et de le tester avec un signal de faible amplitude (de l'ordre de 20mV) et de fréquence connue (attention à la fréquence maximale mesurable par le fréquencemètre) délivré par un GBF. On pourra alors vérifier à l'oscilloscope que la sortie du suiveur est un créneau entre 0V et 5V à la fréquence du GBF. Si ce n'est pas le cas, on pourra vérifier la tension de décalage (offset) de l'AL1.

Une fois ceci fait, on peut appliquer ce dispositif à un signal non synthétique, par exemple la note émise par un diapason.

> À l'aide d'un microphone, dont la sortie est branchée à l'entrée du montage de la Fig. 5, enregistrer le son émis par un diapason et lire la fréquence de la note sur le compteur.

IV. CONVERSION ANALOGIQUE-NUMÉRIQUE (*) [MPs 44 ET 45]

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1] (p. 261), Réf. [2] (pp. 268-273) et Réf. [4] (p. 604) pour plus de détails.

1. Généralités

On rappelle (voir également TP1) que la conversion analogique-numérique consiste à transformer une tension analogique et continue, en un nombre binaire de n bits, prenant 2^n valeurs différentes s'échelonnant entre 0 et $2^n - 1$. Un convertisseur analogique-numérique est caractérisé par :

- la plage de tension analogique convertible (par exemple 0V à 10V),
- le nombre de bits,
- le temps nécessaire pour effectuer la conversion.

2. Principe du convertisseur analogique-numérique simple rampe

Nous proposons de réaliser un convertisseur analogique-numérique simple rampe, également décrit dans la Réf. [2] (pp. 269-271).

Liste du matériel :

- un générateur basses fréquences,
- un générateur de tension continue (type module HAMEG),

- une résistance $R = 4{,}7$MΩ,
- un condensateur $C = 1\mu F$,
- deux amplificateurs linéaires intégrés,
- un double interrupteur mécanique `P30.24`,
- une diode de redressement,
- un relais `P29.13`,
- un chronocompteur numérique `P96.26`.

Le principe du convertisseur analogique-numérique simple rampe est le suivant, voir Fig. 6. Une tension de référence est intégrée à l'aide d'un montage intégrateur, à partir du temps $t = 0$ où l'on ouvre l'interrupteur. À l'instant initial (interrupteur fermé), la tension de sortie du premier AL1 est nulle, et on a également $v_- = v_+ = 0$. Pour $t > 0$, le double interrupteur s'ouvre et le premier AL1 se comporte comme un intégrateur, la tension en sortie du premier AL1 vaut alors

$$V(t) = \frac{E_{ref}}{RC}\, t. \tag{2}$$

Le second montage est un montage comparateur simple à AL1, qui fonctionne en régime de saturation, et qui permet de repérer le moment où l'on dépasse la tension à mesurer U (constante pour simplifier). Le temps d'intégration est directement relié à la tension à mesurer par la relation

$$T = RC\frac{U}{E_{ref}}. \tag{3}$$

En effet, tant que $V(t) < U$, la tension en sortie du second AL1, et donc aux bornes du relais, vaut $+V_{ref}$. Par contre, quand $V(t) > U$, le second AL1 passe en saturation négative, et la tension aux bornes du relais devient nulle car la diode est bloquée. Cela conduit à une ouverture de l'interrupteur en aval.

Enfin, un chronomètre permet de mesurer le temps T en comptant le nombre de fronts montants d'une horloge interne. Nous venons ainsi de transformer une tension U en un temps. On pourra par la suite (voir le paragraphe suivant) transformer ce temps en un nombre et achever la quantification de la tension U.

> On propose de câbler le montage de la Fig. 6 pour illustrer le principe de la conversion analogique-numérique. On choisira une constante de temps RC autour de la seconde, par exemple, et une valeur de tension de référence autour de 5V. On fera attention que la tension en amont de la résistance doit être $-E_{ref}$: il conviendra donc d'utiliser un générateur à masse flottante. On enverra une tension U continue de 1 V (à l'aide d'un GBF), que l'on souhaite mesurer. On doit utiliser en parallèle un double interrupteur mécanique, le premier sert à débuter la rampe de tension, l'autre à déclencher le chronomètre dès son ouverture. L'arrêt du chronomètre est causé par l'ouverture d'un relais.

Le convertisseur analogique-numérique simple rampe est unipolaire, c'est-à-dire que les signaux d'entrée que l'on peut convertir sont nécessairement de signe fixé (ici positifs si E_{ref}>0, voir l'Éq. (3)). Par ailleurs, son temps d'acquisition dépend des propriétés du chronocompteur, mais aussi, et surtout, de la constante de temps RC et de la tension de référence. Il est d'une dizaine de secondes ici. Par ailleurs, le déclenchement mécanique de la conversion analogique-numérique requiert de travailler avec des signaux continus.

> Observer à l'oscilloscope la rampe de tension en sortie de l'intégrateur, la tension à mesurer U puis le signal en sortie du comparateur. On pourra vérifier le déclenchement du chronomètre au départ de la rampe (ouverture de l'interrupteur) et son arrêt après le dépassement de la tension à mesurer. On pourra comparer la valeur de T donnée par le chronomètre à celle lue directement à l'oscilloscope (en utilisant les curseurs). On pourra ensuite être plus quantitatif, et vérifier expérimentalement l'Éq. (3).

Nous avons choisi ici les composants de telle sorte que $E_{ref}/(RC)$ soit de l'ordre de 1 V/s. Cela permet de faciliter la vérification de l'Éq. (3). Un exemple de vérification expérimentale de l'Éq. (3) avec le matériel disponible dans la collection est donné Fig. A2, tandis qu'un exemple de signaux obtenus à l'oscilloscope peut être trouvé dans la Réf. [2] (voir p. 270).

3. Quantification du signal

L'expérience que nous proposons ici est également décrite dans la Réf. [2] (pp. 271-272). Elle permet d'illustrer la quantification d'une tension à partir de la mesure d'un temps, à l'aide de portes logiques, voir Fig. 7.

Liste du matériel :

- deux générateurs basses fréquences,
- un générateur de tension continue (type module HAMEG),

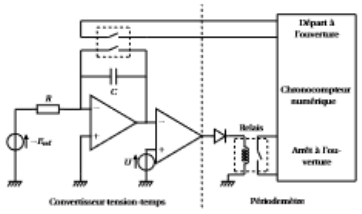


FIGURE 6 – Principe du convertisseur analogique-numérique.

- une résistance $R = 4{,}7\,\mathrm{M\Omega}$,
- un condensateur $C = 1\,\mathrm{pF}$,
- deux résistances $R_1 = 2{,}2\,\mathrm{k\Omega}$,
- deux résistances $R_2 = 3{,}9\,\mathrm{k\Omega}$,
- trois amplificateurs linéaires intégrés,
- un interrupteur simple,
- deux diodes de redressement,
- une porte logique `OU EXCLUSIF` (circuit intégré 7486 dans la réserve),
- deux portes `NON ET` (circuit intégré 7400 ou boîtier `P42.52`),
- un compteur `P70.9`,
- un oscilloscope.

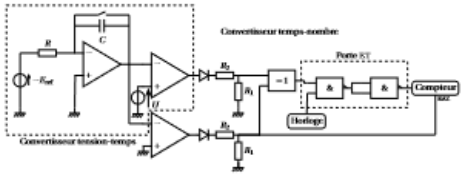


FIGURE 7 – Convertisseur analogique-numérique : illustration de la quantification.

Le bloc supérieur est analogue à celui de la Fig. 6 et renvoie une tension égale à $+V_{ref}$ quand U est supérieure à la rampe en sortie du premier AL1 et nulle sinon. Le pont diviseur constitué des résistances R_1 et R_2 permet de ramener ce signal créneau entre 0V et 5V. Le bloc inférieur est un second comparateur qui détecte le début de la rampe. En effet la tension après la diode du bas vaut $+V_{ref}$ si l'intégration de la tension de référence n'a pas commencé[3] et est nulle après. Là encore, le pont diviseur de tension permet de ramener la tension entre 0V et 5V.

3. Il peut être nécessaire de jouer sur la tension de décalage de l'AL1, voir plus bas.

La première porte logique en aval est un `OU EXCLUSIF`, dont la sortie vaut 1 uniquement quand les deux entrées sont différentes. Les deux portes suivantes sont des portes `NON ET` dont la mise en série revient à une porte `ET` entre la sortie de la porte `OU EXCLUSIF` et un signal d'horloge. En clair, la mise en série de ces portes logiques permet au compteur de compter le nombre de fronts montants du signal d'horloge (signal créneau entre 0V et 5V de fréquence connue) entre le début de la rampe de tension et le moment où elle atteint la tension U (voir également Fig. 4). En effet, avant l'ouverture de l'interrupteur, les deux entrées de la porte `OU EXCLUSIF` sont égales à 1, et sa sortie est donc 0. Pendant la rampe et avant qu'elle n'atteigne la valeur de la tension U, l'entrée supérieure reste égale à 1, mais l'entrée inférieure devient égale à 0. La porte `OU EXCLUSIF` renvoie donc une sortie 1, et le compteur compte le nombre de fronts montants du signal d'horloge à l'aide de la porte `ET`. Enfin, quand la rampe dépasse la tension U, l'entrée supérieure de la porte `OU EXCLUSIF` passe à 0, tout comme la sortie de la porte `OU EXCLUSIF`, et le comptage s'arrête. Connaissant la fréquence du signal d'horloge, on connaît ainsi le temps d'intégration.

> On propose de câbler le circuit 7. On prendra des résistances R_1 et R_2 de sorte d'effectuer un pont diviseur de tension de rapport 1/3. Pour la porte `OU exclusif`, on pourra utiliser un circuit intégré 7486, et pour les portes `NON ET` deux sorties d'un circuit intégré 7400. On commencera par observer les différents signaux (rampe, tension U, horloge et entrée du compteur) sur un oscilloscope. Si la tension en sortie de l'amplificateur linéaire intégré du bas n'est pas égale à $+V_{ref}$ quand l'interrupteur est fermé, on pourra jouer légèrement sur sa tension de décalage (offset).

Dans la suite, on va s'intéresser au rôle de la fréquence d'horloge, en lien avec la notion de pas de quantification.

> On commencera par une fréquence élevée du signal d'horloge (autour du kHz). On vérifiera alors la linéarité de la valeur affichée par le compteur N en fonction de la tension à mesurer U. Pour cela, on fera varier la tension U et on effectuera une régression linéaire en fonction de N, voir un exemple Fig. A3.

> On pourra par la suite baisser la fréquence du signal d'horloge (autour de la dizaine de Hz). On pourra alors observer l'évolution de N en fonction de U de nouveau, et en déduire le pas de quantification du CAN. On pourra également discuter la plage de mesure du CAN, ainsi que le nombre total de valeurs différentes qu'il peut mesurer.

Quand on diminue la fréquence du signal d'horloge, le nombre de fronts montants diminue, et le pas de quantification devient non négligeable. On observera alors que le nombre N évolue avec la tension U par paliers.

On peut estimer le pas de quantification en notant que le plus petit temps que le convertisseur temps-nombre peut mesurer est donné par la période T_{H} du signal d'horloge. En utilisant l'Éq. (3) donnant la relation entre le temps d'intégration et U pour le convertisseur tension-temps, on en déduit que le pas de quantification en tension est δU, correspondant à U quand $T = T_{\mathrm{H}}$, soit

$$\delta U = V_{ref}\frac{T_{\mathrm{H}}}{RC}. \tag{4}$$

Par ailleurs, la plage de tension mesurable dépend à la fois de la tension de saturation des amplificateurs linéaires intégrés et du compteur. En effet, on a d'une part que $0 \leq U \leq V_{sat}$ (avec $V_{sat} \approx 15\mathrm{V}$ la tension de saturation de l'AL3). Mais par ailleurs, une tension est mesurable si elle ne fait pas saturer le convertisseur temps-nombre, c'est-à-dire si le nombre de fronts montants du signal d'horloge comptés pendant la durée d'intégration est inférieur au nombre maximal N_{max} que peut compter le compteur (typiquement 99 pour un compteur à deux afficheurs). Cela conduit alors à une plage de tension $[0, \Delta U]$ avec

$$\Delta U = \min\left\{V_{sat}, N_{max}V_{ref}\frac{T_{\mathrm{H}}}{RC}\right\}, \tag{5}$$

et donc à un nombre de valeurs différentes possibles de

$$N = \frac{\Delta U}{\delta U} = \min\left\{\frac{V_{sat}}{V_{ref}}\frac{RC}{T_{\mathrm{H}}}, N_{max}\right\}. \tag{6}$$

On notera que, dans le cas général, N ne coïncide pas avec une puissance de 2, contrairement aux convertisseurs analogique-numérique usuellement utilisés (comme une carte d'acquisition).

4. Comportement du convertisseur en présence de bruit électronique

L'expérience que nous proposons ici permet de montrer le comportement du convertisseur en présence de bruit électronique.

> On propose de garder le montage de la Fig. 7 et de remplacer la tension continue U par une tension sinusoïdale présentant une tension de décalage (offset) positive afin de mimer l'acquisition d'un signal bruité. On observera alors la dépendance de la valeur N affichée en fonction de l'amplitude et de la fréquence du bruit. On pourra

> alors quantifier un rapport signal sur bruit pour rendre cela plus quantitatif et étudier ses dépendances avec l'amplitude et la fréquence du bruit.

Ici on peut définir le rapport signal sur bruit par

$$RSB = \frac{\overline{N}}{\delta N}, \tag{7}$$

où $\overline{N}$ désigne la valeur moyenne lue sur le compteur au cours du temps, et δN son écart-type (amplitude typique des fluctuations de N la autour de la valeur moyenne $\overline{N}$). On s'attend à ce que le rapport signal sur bruit diminue quand l'amplitude du bruit augmente, à fréquence fixée. En effet, si la tension à mesurer est fortement bruitée, cela induit de nombreux basculements du comparateur. De la même manière, on s'attend à ce que le rapport signal sur bruit diminue quand la fréquence du bruit diminue à amplitude fixée. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder la Fig. A4.

5. Protection du convertisseur simple rampe face au bruit (*)

L'expérience précédente a permis de mettre en évidence un problème majeur du convertisseur simple rampe, à savoir sa grande sensibilité au bruit[4]. On propose de mettre en évidence comment l'intégration de la tension à mesurer permet de rendre le montage plus robuste vis-à-vis du bruit. Cela est à la base du convertisseur double rampe qui intègre d'abord la tension à mesurer, ce qui a pour effet également de la lisser, avant d'intégrer la tension de référence. Un exemple de réalisation est présenté dans la Réf. [2] (pp. 272-273).

Ici nous proposons une expérience plus simple que le câblage du convertisseur double rampe.

> On propose de câbler le montage de la Fig. 7 en échangeant les tensions de référence et à mesurer. On pourra commencer par le cas où U n'est pas bruitée (tension continue). Puis on considérera le cas où U est une tension sinusoïdale avec une tension de décalage (offset), et on déterminera le nouveau rapport signal sur bruit, et sa dépendance avec l'amplitude et la fréquence du bruit.

D'autres types de CAN sont détaillés dans la Réf. [1] (p. 270), avec leurs avantages et inconvénients. Un exemple de réalisation est présenté sur le site `culturescienceprhysique.ens-lyon.fr`.

V. Échantillonnage [MP 45]

La conversion analogique-numérique nécessite une tension stable pendant l'acquisition. Pour réaliser l'acquisition de signaux variables dans le temps, on échantillonne le signal, c'est-à-dire que la valeur de la tension variable $u(t)$ est maintenue constante, ou bloquée, pendant la durée de la conversion analogique-numérique. La numérisation d'un signal résulte alors de ce double travail : échantillonnage et quantification.

Nous proposons une mise en oeuvre expérimentale de l'échantillonnage avec le montage échantilonneur-bloqueur, également décrit dans la Réf. [2] (pp. 280-281). D'autres systèmes d'échantillonnage sont également présentés dans les Réf. [1] (p. 251) et Réf. [2] (pp. 279-282), et on consultera ces références pour de plus amples détails.

Liste du matériel :

- le boîtier échantillonneur-bloqueur `P41.24`,
- une alimentation spécifique pour boîtier `P42.39`,
- un condensateur de capacité $C = 47\,nF$,
- un générateur basses fréquences,
- un multimètre,
- un oscilloscope,
- une carte d'acquisition.

Le principe du montage est représenté Fig. 8. Pour réaliser expérimentalement un échantillonneur, on utilise un interrupteur commandé par un signal d'horloge U_H. La fréquence de ce signal est la fréquence d'échantillonnage. Lorsque la valeur du signal d'horloge est strictement positive, l'interrupteur est fermé, il est ouvert si U_H est nulle. On place ensuite un condensateur qui se charge quand l'interrupteur est fermé et qui bloque la valeur de la tension quand l'interrupteur est ouvert.

4. Un autre problème majeur est la sensibilité de la mesure du temps d'intégration à toute variation du produit RC (en particulier en fonction de la température).

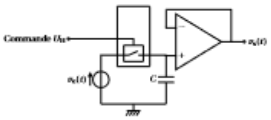


FIGURE 8 – Échantillonneur-bloqueur.

> On propose de commencer par appréhender le fonctionnement de l'interrupteur commandé. Pour cela, on pourra mesurer à l'ohmmètre la résistance entre l'entrée et la sortie de l'interrupteur, pour une tension de commande U_H continue de $U_H = 0\,V$, puis de $U_I = 10\,V$ (cette valeur peut dépendre du type d'interrupteur commandé utilisé, se reporter à la notice).

La résistance varie de quelques ohms (fil) à une valeur importante (interrupteur ouvert).

Une fois le comportement de l'interrupteur commandé compris, on peut réaliser l'échantillonnage d'un signal.

> On commencera par câbler le circuit 8 avec une capacité $C = 10\,nF$. Pour réaliser le signal d'horloge, on utilisera un GBF délivrant des impulsions entre U_a et U_I. On pourra commencer par un signal de commande $U_H(t)$ pulsé à 1kHz et une largeur d'impulsion de quelques dizaines de µs, et un signal à échantillonner $u_e(t)$ sinusoïdal de fréquence 100 Hz et d'amplitude égale à quelques volts. On pourra noter l'échantillonnage du signal $u_e(t)$ sur la sortie $u_s(t)$ en observant ces deux signaux à l'oscilloscope.

La durée des impulsions doit être la plus petite possible (pendant que le signal vaut $U_I = 10\,V$, l'interrupteur commandé se comporte comme un fil et le signal n'est pas constant), mais pas trop courte pour laisser le temps au condensateur de se charger.

La valeur de la capacité C du condensateur est également importante. En effet, si on veut que le condensateur se charge rapidement (cela va constituer une borne inférieure au temps d'échantillonnage), alors on aura tout intérêt à prendre C la plus petite possible : le temps de charge est de l'ordre de quelques rC, avec r la résistance de l'interrupteur commandé quand il est fermé (de l'ordre de quelques ohms). Le temps de charge du condensateur doit aussi être inférieur à la durée d'une impulsion. Comme cette dernière est de l'ordre de quelques dizaines de µs, cela impose de prendre rC de l'ordre de quelques µs, soit $C = 10^{-8}\,F$ pour $r = 10\,\Omega$.

Quand l'interrupteur est ouvert, le signal $u_s(t)$ décroît légèrement car le condensateur se décharge dans sa résistance de fuite (de l'ordre du MΩ). Pour une capacité $C = 10^{-8}\,F$, le temps typique de décharge est de l'ordre de 0,1 s, quasiment invisible pour une fréquence d'échantillonnage de 1kHz. Par contre, ce phénomène peut s'observer si on diminue drastiquement la fréquence d'échantillonnage (voir ci-dessous) pour une dizaine de hertz. Cela est encore plus visible si on diminue la valeur de C, et donc cela peut pousser à ne pas prendre une valeur de capacité trop faible.

> On pourra calculer la transformée de Fourier du signal (à l'oscilloscope ou sur le logiciel de la carte d'acquisition après acquisition du signal échantillonné). Dans ce second cas, on s'assurera que le critère de Shannon est bien respecté par la carte d'acquisition. On pourra ensuite abaisser la fréquence du signal d'horloge pour mettre en évidence le critère de Shannon ainsi que le repliement spectral. On pourra également noter dans ce cas la décroissance du signal échantillonné pendant les phases de blocage.

VI. Stratégie d'acquisition [MPs 42, 44 et 52]

1. Principe

Pour illustrer une stratégie d'acquisition, on va considérer le problème suivant[5] : on désire mesurer la fréquence du do_4 (notation scientifique : C_4) émis par un diapason dans un environnement très bruité[6]. Sa fréquence théorique est $f = 512\,Hz$ ou $f = 523{,}25\,Hz$ selon l'échelle de hauteur musicales considérée[7]. On suppose également que la carte d'acquisition ne

5. On pourrait aussi étudier le signal variable émis par une lampe à incandescence au sein d'une pièce éclairée par différentes sources par ailleurs.
6. L'expérience peut également être réalisé pour un mi_3 (notation scientifique : E_3).
7. Il existe plusieurs standards pour accorder un instrument en fonction de différentes échelles de hauteurs musicales. L'échelle la plus courante fixe la fréquence du la_3 à 440Hz, mais une autre échelle fixe plutôt le $ré_3$ à 294Hz. Dans cette seconde échelle, le la_3 monte à 430,64Hz. Par ailleurs, le mi_3 monte à 329,63Hz dans la première échelle, et 322,34Hz dans la seconde échelle. On peut également construire une échelle de hauteurs où le mi_3 monte à 330Hz.

peut échantillonner que jusqu'à 200 Hz. C'est un problème qu'on rencontre souvent lors de l'acquisition de signaux hautes fréquences (GHz à THz). Par ailleurs, la fréquence de la note émise par un diapason peut être différente de celle donnée ci-dessus, et on aimerait donc mesurer celle-ci plus précisément. On supposera donc simplement qu'on sait que le $\mathrm{d}i_{\mathrm{A}}$ a une fréquence autour de 500 Hz. Ce problème sera l'occasion d'illustrer les éléments successifs de la chaîne d'acquisition, qui ont été présentés au début de ce TP.

Le principal outil pour le traitement du signal sera un dispositif analogique à la détection synchrone [8]. Pour plus de détails, on se référera à la Réf. [2] (pp. 219-222) ou bien à la Réf. [3] (chapitre « Étude de l'effet Doppler par détection synchrone »). Cette technique est très utilisée en instrumentation pour extraire un signal informatif d'un bruit. Le bruit est présent le plus souvent sur une très large gamme de fréquences (pour le bruit blanc, le spectre est constant sur l'ensemble du domaine fréquentiel).

2. Réalisation expérimentale

Liste du matériel :

- un diapason (par exemple émettant un $\mathrm{d}i_{\mathrm{A}}$ P71.1),
- un microphone cravate P74.37 (à demander aux techniciens),
- un adaptateur pour microphone cravate P74.38,
- un amplificateur linéaire intégré,
- deux résistances $R_1 = 100\,\Omega$ et $R_2 = 39\,\mathrm{k}\Omega$,
- un multiplieur P41.15,
- un générateur basses fréquences,
- un filtre de Butterworth P41.21,
- une radio P74.8,
- un oscilloscope,
- une carte d'acquisition.

> On propose de commencer par réaliser l'acquisition du signal physique par un microphone : le signal sonore est converti en une tension. On observera sur l'oscilloscope le signal en sortie du microphone après avoir frappé le diapason.

Il conviendra de placer le microphone à l'entrée de la caisse de résonance du diapason pour obtenir un signal le plus intense possible.
Le signal étant une tension, il n'est pas nécessaire d'utiliser un conditionneur.

Avant de réaliser l'acquisition numérique, on va devoir réaliser un traitement analogique du signal pour extraire le signal du bruit d'une part, et résoudre le problème de la fréquence d'échantillonnage d'autre part. Par ailleurs, la tension en sortie du microphone étant de faible amplitude, il faudra l'amplifier. Pour répondre à ces trois objectifs, on propose de réaliser le montage de détection synchrone de la Fig. 9.
On peut également mentionner que la résistance interne du microphone est élevée. En clair, on ne peut donc pas assurer un transfert optimal du signal entre le microphone et la suite de la chaîne d'acquisition, ce qui justifie l'utilisation d'un amplificateur à ALI qui a une faible impédance de sortie.

Le premier étage du circuit de la Fig. 9 est un amplificateur non inverseur tel que :

$$v_{\mathrm{s}} = v_{\mathrm{e}}\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right). \tag{8}$$

Le second étage est celui de détection synchrone. Pour gagner en résolution sur le spectre en fréquence du signal, tout en évitant le repliement lié à une fréquence d'échantillonnage trop faible, on translate le spectre du signal dans un domaine de plus basse fréquence (voir Fig. 10 pour une illustration de la méthode dans le domaine spectral). Pour ce faire, on multiplie le signal d'intérêt (ici celui en sortie de l'amplificateur non inverseur) $a_1(t) = V_1\cos(2\pi f t)$ par un signal de fréquence f_0 connue : $a_{\mathrm{ref}}(t) = V_0\cos(2\pi f_0 t)$, tel que $\delta f = f - f_0$ soit dans la bande passante du système d'acquisition numérique :

$$V_{\mathrm{s}}(t) = kV_1V_0\cos(2\pi f_0 t)\cos(2\pi f t) = \frac{kV_1V_0}{2}\cos(2\pi\delta f t) + \frac{kV_1V_0}{2}\cos(2\pi(f_0 + \delta f)t), \tag{9}$$

8. Il ne s'agit pas strictement d'un processus de détection synchrone, qui correspond au fait de multiplier une porteuse sinusoïdale dont l'amplitude est modulée par un signal basse fréquence par un signal sinusoïdal de même fréquence que la porteuse. Néanmoins, comme les deux procédés sont très semblables, on appellera cette expérience « détection synchrone » par abus de langage.

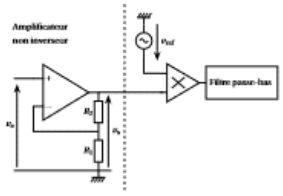


FIGURE 9 – Schéma électrique pour l'expérience de détection synchrone.

où k désigne le gain du multiplieur. On élimine ensuite la composante haute fréquence grâce à un filtre passe-bas sélectif pour obtenir le signal

$$V_1(t) = \frac{kV_1V_0}{2}\cos(2\pi\delta f t). \tag{10}$$

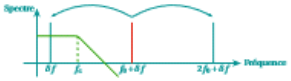


FIGURE 10 – Principe de la détection synchrone dans le domaine spectral.

Pour permettre une détection synchrone efficace, il faut :

- connaître précisément f_0 et assurer sa stabilité pendant l'acquisition,
- que le filtre passe-bas soit sélectif tout en conservant une réponse plate autour de δf (pas de résonance parasite).

Nous proposons d'utiliser un GBF pour émettre le signal $v_{\mathrm{ref}}(t)$ afin de répondre au premier point. Par ailleurs, nous proposons d'utiliser un filtre de Butterworth (voir une réalisation expérimentale Fig. 12) pour répondre au second point. On rappelle que ces filtres sont spécialement conçus pour posséder un gain aussi constant que possible dans leur bande passante. Pour le filtre de Butterworth d'ordre n de fréquence de coupure f_c, le gain peut s'écrire en fonction de la fréquence f

$$G(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f/f_c)^{2n}}}. \tag{11}$$

L'utilisation du filtre permet également d'éliminer une grande partie du bruit car seules les composantes fréquentielles proches de f_0 ne sont pas filtrées. Pour plus de détails sur le filtre de Butterworth, nous renvoyons à l'Disp. VII.

> Au préalable, on pourra tracer le diagramme de Bode du filtre de Butterworth pour une fréquence de coupure $f_c = 10\,\mathrm{Hz}$, et vérifier les propriétés énoncées ci-dessus (facultatif).
> On propose ensuite de câbler le schéma de la Fig. 9. On réalisera un amplificateur avec un gain au moins égal à 100. Pour la tension de référence, on choisira une tension sinusoïdale d'amplitude égale à quelques volts et de fréquence $f_0 = 500\,\mathrm{Hz}$.
> On observera le signal en sortie de l'amplificateur linéaire intégré, puis en sortie du multiplieur et du filtre passe-bas à l'oscilloscope. On pourra calculer leur spectre de Fourier pour se familiariser avec le principe de la détection synchrone. Enfin, on pourra, à partir du signal en sortie du filtre passe-bas, remonter à la fréquence de la note émise par le diapason.

On a tout intérêt à prendre V_0 de l'ordre de plusieurs volts, sans dépasser la valeur maximale admissible en entrée du multiplieur (de l'ordre de 10 V), afin de maximiser l'amplitude du signal en sortie du filtre.

3. Utilisation de l'ensemble de la chaîne d'acquisition et sensibilité au bruit

Le principe de l'acquisition est schématisé ci-dessous :

On désire maintenant illustrer la sensibilité de l'ensemble de la chaîne d'acquisition au bruit.

> On propose de placer à côté du diapason une radio dans le but de bruiter fortement le signal issu du microphone. On pourra faire l'acquisition des signaux en sortie de l'amplificateur non inverseur et du filtre passe-bas avec une carte d'acquisition. On calculera ensuite leurs spectres pour en déduire un rapport signal sur bruit dans les deux cas, en comparant les amplitudes du pic principal et des autres pics.

On doit constater l'amélioration du rapport signal sur bruit grâce à l'utilisation du dispositif de détection synchrone.

VII. FILTRAGE NUMÉRIQUE (*) [MPs 43, 44 ET 45]

1. Présentation et exemple

Le principe du filtrage numérique est de pouvoir réaliser un traitement des signaux après leur acquisition [9]. Ce qui suit est un résumé de ce que l'on peut faire, et nous renvoyons à la Réf. [5] (pp. 167-171) pour de plus amples détails.

On propose de réaliser un filtre numérique passe-bas du premier ordre de pulsation de coupure ω_c et de gain statique unité, dont la fonction de transfert est

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}(j\omega)}{\underline{V_e}(j\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_c}. \tag{12}$$

Sa représentation dans le domaine temporel est alors

$$\frac{dv_s}{dt}(t) + \omega_c v_s(t) = \omega_c v_e(t). \tag{13}$$

Pour pouvoir utiliser ce filtre sur des signaux numériques, c'est-à-dire échantillonnés en temps, il faut discrétiser l'équation précédente, et notamment la dérivée temporelle. Pour cela, on l'écrit sous la forme

$$\frac{dv_s}{dt}[n] = \frac{v_s[n] - v_s[n-1]}{T_e}, \tag{14}$$

où T_e désigne le pas d'échantillonnage et $1 \leq n \leq N-1$ (avec N le nombre total de points enregistrés). On obtient donc pour la représentation temporelle du filtre passe-bas

$$\begin{cases} v_s[0] = v_e[0], \\ v_s[n] = \dfrac{1}{1+\omega_c T_e} v_s[n-1] + \dfrac{\omega_c T_e}{1+\omega_c T_e} v_e[n] \text{ pour } 1 \leq n \leq N-1. \end{cases} \tag{15}$$

On termine par mentionner quelques limitations des filtres numériques [5] :

- erreurs d'arrondis pendant le calcul,
- quantification du signal par l'étape de conversion analogique-numérique,
- perturbations de la fonction de transfert à hautes fréquences (par rapport à la fréquence d'échantillonnage).

2. Réalisation expérimentale

Nous proposons de réaliser l'expérience suivante, dont le schéma est donné Fig. 11 afin d'illustrer le filtrage numérique passe-bas d'un signal dans le but d'améliorer le rapport signal sur bruit.

Liste du matériel :

- deux générateurs basses fréquences,
- trois résistances $R = 100\text{k}\Omega$,
- un amplificateur linéaire intégré,

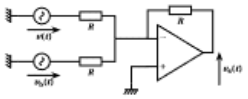


FIGURE 11 – Circuit électrique pour le filtrage numérique d'un signal sinusoïdal bruité.

- une carte d'acquisition.

Le circuit représente un montage sommateur de gain -1, tel que

$$v_s(t) = -[v(t) + v_b(t)]. \tag{16}$$

> On propose de câbler le montage de la Fig. 11 pour une résistance $R = 100\text{k}\Omega$. On prendra pour $v(t)$ un signal sinusoïdal d'amplitude égale à environ 2 V et de fréquence de l'ordre de 200 Hz. On prendra pour $v_b(t)$ un bruit blanc généré par un second générateur basses fréquences. On fera alors l'acquisition de plusieurs « périodes » du signal $v_s(t)$ à l'aide d'une carte d'acquisition.

L'utilisation d'une grande résistance R permet d'augmenter le taux de réjection en mode commun (TRMC) du montage sommateur. Pour plus de détails sur ce point, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [2] (p. 83). Pour l'acquisition sur Latis-Pro, on prendra garde de bien respecter le critère de Shannon, par exemple en prenant un pas d'échantillonnage $T_e = 10\mu\text{s}$ et une durée totale d'enregistrement de l'ordre de 25 ms (correspondant à 2500 points).

L'objectif est maintenant d'exécuter un filtrage numérique du signal acquis précédemment.

> On propose donc d'exporter le signal enregistré sur Latis-Pro au format .txt pour pouvoir le traiter par la suite avec Python. Pour cela on ira dans `Fichier/Exportation`. Attention que les décimales doivent être notées avec des points pour être lues par Python.

Une fois ceci fait, on peut exécuter un code Python qui effectue le filtrage numérique passe-bas donné par l'Eq. (15). Nous en proposons une réalisation ci-dessous, suffisamment commentée pour être explicite.

```python
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Benjamin DESDEVISE
Version du 28/07/2022
"""

#\\\ Importation des librairies À NE PAS MODIFIER
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#\\\ Paramètres À MODIFIER
filename = 'signal_sommateur.txt' # nom du fichier avec t, v(t)
fc = 1e4 # fréquence de coupure (Hz)

#\\\ Importation des données
data = np.genfromtxt(filename)
t = data[:,0]
v = data[:,1]
v_filter = np.zeros(len(t))
v_filter[0]=v[0]
Te = t[1] - t[0]
wTe = 2. * np.pi * fc * Te
for i in range(1,len(t)):
    v_filter[i] = wTe * v[i] + v_filter[i-1]
    v_filter[i] /= ( 1. + wTe )

#\\\ Calcul du spectre
vTF = np.fft.rfft(v)
v_filterTF = np.fft.rfft(v_filter)
```

9. Cela permet par exemple d'avoir des informations en temps réel sur le système, et par exemple de réaliser un asservissement (voir le TP8).

```
freq = np.fft.rfftfreq(len(t),Te)

#\#\# Tracé des spectres
plt.figure()
plt.loglog(freq,np.absolute(vTF))
plt.loglog(freq,np.absolute(v_filterTF))
plt.xlabel("f (Hz)")
plt.ylabel("FFT")
plt.show()

#\#\# Tracé des données
plt.figure()
plt.plot(t,v)
plt.plot(t,v_filter,label='filtre')
plt.xlabel("t (s)")
plt.ylabel("v(t) (V)")
plt.show()
```

On appliquera le filtrage numérique au signal enregistré. On pourra alors calculer le rapport signal sur bruit avant et après filtrage (qu'on pourra définir comme le rapport entre l'amplitude du signal et la «largeur» de la sinusoïde du fait de la présence de bruit). On constatera également l'influence du filtre dans le domaine de Fourier en calculant les spectres des signaux. On pourra enfin regarder l'influence de la fréquence de coupure. Des exemples de courbe obtenues sont données Fig. A5.

Le filtrage numérique permet d'améliorer le rapport signal sur bruit en coupant le bruit hautes fréquences dans le spectre. Par contre, ce processus n'est pas adapté au bruit basses fréquences et le processus de détection synchrone est donc mieux adapté, si le signal informatif a son spectre centré sur une fréquence bien précise (voir l'Exp. VI). On a donc tout intérêt à diminuer la fréquence de coupure tout en la gardant supérieure à la fréquence du signal $v(t)$.

3. Application à la détection synchrone (*)

On propose d'illustrer le principe du filtrage numérique en reprenant l'expérience de détection synchrone (voir l'Exp. VI), mais en effectuant le filtrage du signal en sortie du multiplieur à l'aide d'un filtre de Butterworth numérique. Pour cela, nous renvoyons le lecteur à la librairie scipy.signal de Python.

Comme mentionné dans l'Exp. VI, le filtre de Butterworth est caractérisé par son gain, donné par l'Éq. (11). Cela permet d'en déduire une fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ possible pour ce filtre par la condition

$$\underline{H}(j\omega)\underline{H}(-j\omega) = |\underline{H}(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}} = \frac{1}{1+[-(j\omega/\omega_c)^2]^n}, \tag{17}$$

où ω_c est la pulsation de coupure, et n l'ordre du filtre. Si on note p_k les pôles de $\underline{H}(p)$ dans le plan complexe (au sens de la transformée de Laplace), ceux de $\underline{H}(p)\underline{H}(-p)$ sont $\pm p_k$, et sont donnés par la condition

$$\underline{H}(p)\underline{H}(-p) = \frac{1}{1+[-(p/\omega_c)^2]^n}, \tag{18}$$

de sorte que $-p_k^2/\omega_c^2$ est une racine n-ième de -1. On en déduit donc que

$$-\left(\frac{p_k}{\omega_c}\right)^2 = e^{i\pi\frac{2k}{n}} \times e^{-i\frac{\pi}{2}} \Longrightarrow p_k = \omega_c e^{i\frac{(2k+n-1)\pi}{2n}} = \omega_c e^{i\frac{(2k-1)\pi}{2n}}, \tag{19}$$

où les signes sont fixés par le fait que tous les pôles doivent être de partie réelle négative pour que le système soit stable, voir la dernière égalité. L'expression des pôles permet alors d'en déduire la fonction de transfert

$$\underline{H}(p) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(-p_k)}{\prod_{k=1}^{n}(p-p_k)}. \tag{20}$$

C'est comme cela que le filtre de Butterworth est réalisé numériquement, en donnant les coefficients du polynôme intervenant au dénominateur de la fonction de transfert. Les premiers polynômes sont donnés Tab. 1. Expérimentalement, le filtre de Butterworth d'ordre n peut être réalisé de différentes manières à partir de circuits passifs couplant bobines et condensateurs, ou de circuits actifs à base de condensateurs et d'amplificateurs linéaires intégrés. On montre, à titre d'exemple en Fig. 12, une réalisation expérimentale d'un filtre de Butterworth d'ordre 4, où les capacités sont choisies de sorte à reproduire le polynôme au dénominateur de la fonction de transfert.

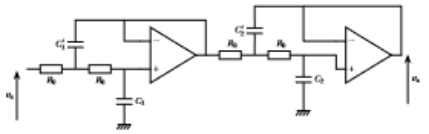


FIGURE 12 – Réalisation expérimentale d'un filtre de Butterworth d'ordre 4. Les capacités sont $C_1 = C_0\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$, $C_2 = C_0\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$, $C_1' = 2C_0/\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $C_2' = 2C_0/\sqrt{2-\sqrt{2}}$, où $\omega_c = 1/(R_0C_0)$. Pour obtenir un gain unité, il faudrait mettre en aval un amplificateur non inverseur.

Ordre n	Polynôme
1	$j\omega + \omega_c$
2	$\omega_c^2 - \omega^2 + j\omega\omega_c\sqrt{2}$
3	$(j\omega + \omega_c)(\omega_c^2 - \omega^2 + j\omega\omega_c)$
4	$(\omega_c^2 - \omega^2 + j\omega\omega_c\sqrt{2-\sqrt{2}})(\omega_c^2 - \omega^2 + j\omega\omega_c\sqrt{2+\sqrt{2}})$

TABLE 1 – Premiers polynômes au dénominateur de la fonction de transfert du filtre de Butterworth dans le domaine de Fourier.

RÉFÉRENCES

[1] G. Asch *et coll.*, *Acquisition de données. Du capteur à l'ordinateur*, Dunod (1999).

[2] R. Duffait et J.-P. Lièvre, *Agrégation de Sciences Physiques - Expériences d'électronique*, Bréal (1999).

[3] M. Fruchart *et coll.*, *Physique expérimentale - Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, De Boeck Supérieur (2016).

[4] J.-P. Pérez, C. Laguzzi, J.-Y. Fourniols et S. Bouhours, *Électronique. Fondements et applications*, Dunod (2012).

[5] B. Salamito, M.-N. Sanz, F. Vandenbrouck et M. Tuloup, *Physique tout-en-un MPSI*, Dunod (2014).

Exemples de résultats expérimentaux

Figure A1 – Évolution de la fréquence d'oscillation de trois portes NON ET séparées par des filtres RC en fonction de la résistance R (voir l'Exp. II).

Figure A2 – Exemple de vérification du comportement du CAN simple rampe (voir l'Exp. IV).

Figure A3 – Exemple de vérification du processus de quantification par le CAN simple rampe (voir l'Exp. IV).

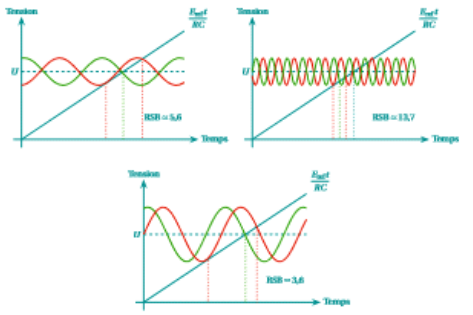


Figure A4 – Illustration de l'influence du bruit sur le convertisseur simple rampe dans les cas limites. Dans le cas d'un bruit de faible amplitude et de basse fréquence, on n'observe pas d'erreur systématique et un grand rapport signal sur bruit. Par contre, une erreur systématique peut apparaître à haute fréquence. Par ailleurs, le rapport signal sur bruit diminue quand l'amplitude du bruit augmente.

Figure A5 – Illustration du filtrage passe-bas numérique sur un signal sinusoïdal bruité.

Microcontrôleurs

Table des expériences

I.	Introduction	42
II.	Prise en main	44
III.	Application : moteur Stirling	44
IV.	Application : contrôle de température	47
V.	Application : mesures d'accélération	50
VI.	Limite : échantillonnage des voies d'entrée	51
VII.	Limite : charge en sortie	52
VIII.	Scripts	52

À l'évidence, les expériences présentées dans ce TP trouvent leur place dans le montage MP 61 « Microcontrôleurs : applications et limites », mais d'autres montages sont évidemment concernés. En l'état, le texte du TP est trop proche d'un plan « tout fait » pour ce montage ; il sera donc remanié d'une manière ou d'une autre pour pouvoir obtenir l'approbation du jury [1].
Vous serez amenés à développer des scripts pour programmer le microcontrôleur ou pour analyser les données. Ces codes seront envoyés aux coeur du concours et vous pourrez donc les utiliser le jour de l'oral. Cependant, avant de pouvoir les exploiter, ces scripts doivent être validés par le jury. Il est donc fondamental que vous respectiez les règles de « bonne programmation », en commentant vos codes et en explicitant à quoi ils servent et comment les utiliser (cf exemples à la fin du document). D'autre part, le jury exige que les noms donnés à ces scripts respectent la règle suivante : ils doivent commencer par `arduino_` ou `python_` et se terminer par `_lyon.ino` ou `_lyon.py` selon qu'il s'agit d'un programme Arduino ou Python. À vous de vous constituer tout au long de l'année une banque de scripts respectant ces règles pour pouvoir en tirer profit pendant vos oraux.

I. Introduction

1. Microcontrôleur Arduino UNO

Wikipedia : "Un microcontrôleur (MCU en anglais) est un circuit intégré qui rassemble les éléments essentiels d'un ordinateur : processeur, mémoires (mémoire morte et mémoire vive), unités périphériques et interfaces d'entrées-sorties. Les microcontrôleurs se caractérisent par un plus haut degré d'intégration, une plus faible consommation électrique, une vitesse de fonctionnement plus faible (de quelques MHz jusqu'à plus d'un GHz) et un coût réduit par rapport aux microprocesseurs polyvalents utilisés dans les ordinateurs personnels."
Dans ce document, seule la plateforme de prototypage Arduino UNO (plus précisément le modèle [2] R3) sera présentée et utilisée.

1. Faites choix d'un concour solide et solidaire, Que la maison resplendisse et le savoir éclaire. — (Nicolas Boileau, L'Art poétique)
2. https://docs.arduino.cc/hardware/uno-rev3-ehttps://en.wikipedia.org/wiki/Arduino.Uno

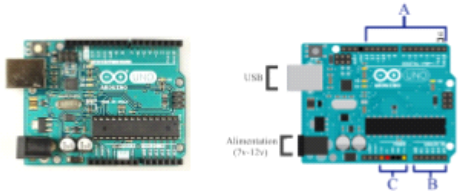


FIGURE 1 – Arduino UNO R3 : vue de dessus et schéma des broches (crédit : Wikipedia)

L'élément clef de cette carte est le microcontrôleur ATmega328P (la puce à 28 broches) ; elle possède également :

- 14 broches (pin en anglais) d'entrées-sorties digitales (les broches "A" sur le schéma) ; ces broches peuvent prendre 2 états possibles, l'état "haut" (~ 5 V) ou l'état "bas" (~ 0 V), et acceptent en entrée n'importe quelle tension entre 0 et 5 V qui sera interprétée comme un état haut ou bas de la même façon ;
- 6 broches d'entrées analogiques (les broches "B"), qui acceptent en entrée n'importe quelle tension entre 0 et 5 V (qui sera interprétée via un convertisseur analogique-numérique) ;
- les broches d'alimentation ("C"), qui ont chacune leur fonctionnement spécifique : les noires GND correspondent à la masse, la rouge et l'orange délivrent 5 V ou 3,3 V (qui correspondent plus ou moins directement à la tension alimentant la carte via éventuellement un régulateur). La broche jaune (identifiée VIN ou RAW en général), elle, correspond véritablement à une broche d'alimentation 7 V-12 V de la carte.
- un port USB-A femelle, qui permet de communiquer avec un ordinateur mais également d'alimenter la carte ;
- une entrée jack (pour l'alimentation 7 V-12 V).

Parmi les 14 broches digitales, 6 d'entre-elles permettent de faire de la modulation de largeur d'impulsion (Pulse Width Modulation, PWM[3] en anglais) ; il s'agit des broches 3, 9, 10, 11 (avec une fréquence à 490 Hz) ainsi que 5 et 6 (avec une fréquence à 980 Hz). Ces broches permement ainsi de générer un signal "assimilable" à une sortie analogique car sa valeur moyenne peut être contrôlée en modifiant le rapport cyclique.

2. Programmation du microcontrôleur

La programmation du microcontrôleur s'effectue via une interface logicielle libre et mise à disposition sur le site `https://www.arduino.cc/en/software`. Le langage est très proche du C, et sans difficulté particulière. La communication ordinateur-microcontrôleur s'effectue via le câble USB (qui assure en même temps l'alimentation de la carte). Le programme est stocké sur la mémoire FLASH de l'Arduino (capacité : 32 ko), et est donc conservé même après arrêt de l'alimentation. De très nombreux exemples de prise en main plus ou moins élémentaires se trouvent sans peine sur internet. L'interface logicielle fournit de nombreux exemples de scripts qui permettent de se familiariser avec la programmation du microcontrôleur (menu File/Examples). La structure d'un script est toujours plus ou moins la même :

- un premier bloc correspondant aux déclarations de variables (et de leur type) ;
- la fonction `void setup()` qui est exécuté une seule fois, au lancement du programme ; y sont notamment précisés les "status" des broches (entrée ou sortie, `INPUT` ou `OUTPUT`) ;
- la fonction principale `void loop()` qui est exécutée en boucle, dans laquelle on peut notamment lire l'état d'une broche digitale (`digitalRead()`), modifier l'état d'une broche digitale (`digitalWrite()`), modifier l'état d'une broche digitale PWM (`analogWrite()`), lire l'état d'une broche analogique (`analogRead()`), ou attendre un certain temps (`delay()`, l'unité de temps étant la milliseconde).

On peut bien entendu également déclarer d'autres fonctions à la suite de la fonction `loop()`, utiles pour structurer le code. Attention, la mémoire SRAM (qui stockent les données temporaires, notamment les variables nécessaires) n'est que de 2ko pour un Arduino UNO et peut "rapidement" être saturée.

⚠ On ne saurait trop insister sur le fait qu'un code sans commentaires a une date de péremption très courte... Cet aspect

3. `https://www.arduino.cc/en/Tutorial/PowerSupplies/PWM` et `https://docs.arduino.cc/tutorials/generic/secrets-of-arduino-pwm`

est d'autant plus important dans le cadre du concours qu'il est parfaitement imaginable qu'un code insuffisamment commenté soit rejeté par le jury de l'agrégation et ne puisse donc pas figurer dans la banque de scripts utilisables. Il est donc essentiel que figure en en-tête du programme le descriptif du code sous la forme d'un bloc-commentaire, qui commence par les 2 caractères `/*` et se termine par les 2 caractères `*/`. On peut également faciliter la lecture du code en insérant des commentaires en les faisant précéder par les 2 caractères `//`.

Remarque : il est possible de programmer une carte Arduino à partir d'un script python (sans avoir à écrire de script `.ino` donc) en installant au préalable sur le MCU un firmware (`StandardFirmata` disponible dans le menu File/Examples/Firmata) et en exploitant la librairie python `pyfirmata`. Cependant, ce mode de fonctionnement ne permet pas d'exploiter pleinement certaines capacités du MCU (notamment en lien avec la fréquence maximale d'échantillonnage) et ne sera pas mis en œuvre dans ce TP.

3. Bibliographie

- *Débuter avec Arduino*, Delphine Chareyron & Antoine Bérut.
  `https://culturescienceosphynique.ens-lyon.fr/ressource/TP-Arduino-debut.xml`
- *Programmer la carte Arduino en langage Arduino*, Frederik Brand, Samuel Cocu & Sylvain Desblancs.
  `https://ewl.ac-poitiers.fr/sc.phys/sites/sc.phys/IMG/pdf/prise_en_main_carte_arduino_langage_arduino.pdf`
- *Détection de 3 niveaux de luminosité et pilotage de sorties d'un micro-contrôleur Arduino*, Delphine Chareyron & Antoine Bérut.
  `https://culturescienceosphynique.ens-lyon.fr/ressource/TP-Arduino-controle-sorties.xml`
- *Mesure de la température à l'aide d'un montage Arduino et représentation graphique des données avec python*, Antoine Bérut.
  `https://culturescienceosphynique.ens-lyon.fr/ressource/TP-Arduino-temperature-berut.xml`
- *Simulateur de scripts*.
  `https://www.tinkercad.com/things/fUpO8hJlOH-arduino-simulator-and`

II. Prise en main[4]

Enfojet de cette section est de se familiariser avec le matériel et l'environnement logiciel.

- *Alimenter l'Arduino via le port USB (qui permet également la récupération des données par le port série)*
- Uploader / *télévenser* le script Arduino arduino_AnalogReadSerial.ino
- Afficher les données brutes à l'aide du "Serial Monitor" (menu Tools > Serial Monitor)
- Visualiser graphiquement les données brutes à l'aide du "Serial Plotter" (menu Tools > Serial Plotter)

A ce stade, les données, qui correspondent à la tension (codée sur 10 bits) de la broche A0 (en l'air) sont difficilement exploitables. Le programme python_AnalogReadSerial.py permet de les récupérer et fournit l'environnement permettant de les post-traiter et de les visualiser. Ce programme se lance avec la commande suivante : `python python_AnalogReadSerial.py`
Deux paramètres doivent être spécifiés : le taux de transfert (baudrate), par défaut égal à 9600 baud, et le port-série utilisé (tel qu'apparaissant dans le menu Tools > Port), par défaut COM3. Ces paramètres peuvent être modifiés au niveau de la ligne de commande, par exemple sous la forme : `python python_AnalogReadSerial.py -b 57600 -p '/dev/ttyACM0'`
Il suffit alors de définir (et appeler) dans le script python_AnalogReadSerial.py les fonctions appropriées pour effectuer le post-traitement souhaité.

⚠ Le baudrate doit être le même que celui défini dans le script téléversé sur l'Arduino.

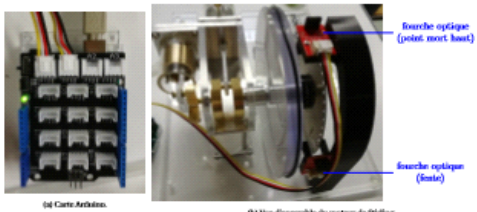
III. Application : moteur Stirling[5]

Enfojet de cette section est de mettre en œuvre plusieurs capteurs pilotés par un unique Arduino.

1. Mise en marche

- On alimente la carte Arduino avec le port USB relié à l'ordinateur (fig. 2a).
- On branche le capteur de pression et les deux fourches optiques sur trois entrées analogiques de la carte Arduino. La carte Arduino utilisée (modèle UNO) comprend quatre entrées analogiques (de A0 à A3, Fig. 2a).
- Le capteur de pression est le capteur différentiel linéaire MPX2100DP qui mesure la différence entre la pression du gaz dans la chambre et la pression atmosphérique dans une de gamme de pression 100 kPa. Il renvoie une tension égale à la moitié de la tension crête-à-crête (V_{cc} = 40 mV) à différence de pression nulle. La sortie du capteur de pression est une valeur de tension U_p codée sur 10 bits[6] ($2^{10} = 1024$), à partir de laquelle on détermine la surpression p par rapport

4. © Ch. Wiesbrouffe, 2023
5. © H. Gainville & H. Reiflaus, 2023
6. Il s'agit du nombre de bits sur lesquels les entrées analogiques de la carte Arduino UNO sont codées.



(a) Carte Arduino.

(b) Vue d'ensemble du moteur de Stirling.

FIGURE 2 – (a) Carte Arduino (modèle UNO) fournie avec le moteur Stirling. Elle comprend plusieurs entrées analogiques (de A0 à A5), ainsi qu'un port d'alimentation USB. Sur cet exemple, deux capteurs sur les trois des deux fourches optiques et le capteur de pression) sont branchés. (b) La grande poulie d'entraînement est reliée par un arbre de rotation à un volant d'inertie qui joue le rôle de hacheur optique. Le passage des fentes courtes est détecté par la fourche optique du bas; le passage de la fente longue (point mort haut) est repéré par la fourche optique du haut.

à la pression atmosphérique selon la loi affine

$$p(\mathrm{kPa}) = 100 \times \frac{U_p(\mathrm{bits})}{1023} - 50. \tag{1}$$

- La fourche optique du haut détecte le point mort haut (fente longue) ; elle permet de compter le nombre de tours du volant d'inertie attaché à l'arbre de rotation du moteur (Fig. 2b), et donc le nombre n de cycles effectués par le moteur. Au passage de la fente longue, la fourche optique renvoie une tension égale à 5 V (alors qu'elle est nulle sinon). Un code Arduino permet alors de compter le nombre n de fronts montants de la tension qui s'assimile au nombre de tours.
- La fourche optique du bas détecte le passage des fentes (courtes et longue) ; elle permet de déterminer la position angulaire du volant d'inertie, qui contient $N = 50$ fentes. Cette donnée permet de remonter au volume du gaz dans la chambre du moteur. Dans la notice, on lit que le volume minimal de la chambre vaut $V_{\min} = 32\,\mathrm{cm}^3$ et le volume maximal $V_{\max} = 44\,\mathrm{cm}^3$. Le volume minimal correspond au point mort (fente longue en face de la fourche optique supérieure). Il est important de vérifier que cela est bien le cas avant de réaliser l'acquisition en plaçant le moteur à son point mort haut, puis en faisant pivoter la roue dentée jusqu'à placer la fente longue en face de la fourche optique supérieure! En effet, la roue dentée n'est pas totalement liée à la roue mise en rotation par le moteur, et un décalage peut alors être observé. Au passage d'une fente, la tension aux bornes de la fourche devient égale à 5 V. Un code Arduino permet alors de remonter au nombre de fronts montants i de la tension depuis le point mort haut, et finalement au volume (pour $1 \leq i \leq N$)

$$V = \frac{V_{\min} - V_{\max}}{2} \cos\left(\frac{2\pi(i-1)}{N}\right) + \sqrt{\left(\frac{V_{\max} + V_{\min}}{2}\right)^2 - \left(\frac{V_{\max} - V_{\min}}{2}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi(i-1)}{N}\right)}. \tag{2}$$

2. Utilisation du moteur

- On se sert du réservoir d'éthanol comme source chaude en brûlant la mèche.
- Il faut alors attendre un peu pour que l'extrémité du tube soit à température suffisamment haute. On peut alors lancer le moteur en faisant tourner manuellement le volant (dans le sens indiqué par une flèche sur le volant d'inertie), qui se met alors à tourner tout seul.
- Le code Arduino donné dans ci-joint permet alors de remonter au cycle parcouru par le gaz de la chambre dans le diagramme (p, V) et donc au travail mécanique, tandis que la mesure de la masse d'éthanol brûlée permet de remonter au transfert thermique de la source chaude, et finalement au rendement (connaissant l'enthalpie de combustion de l'éthanol). Le code Arduino produit un document texte à trois colonnes dont voici un exemple.

```
# Numero cycle      Numero fentes      Pression
```

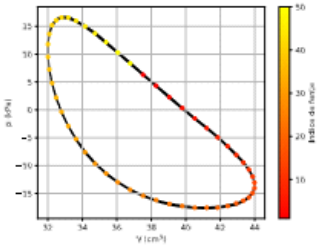



FIGURE 3 – Cycle du moteur de Stirling obtenu après traitement des données du port série de la carte Arduino.

```
315     46      373
315     47      358
315     48      351
315     49      350
315     50      359
316     1       378
316     2       410
316     3       456
```

- L'exploitation des données du port série de la carte Arduino peut se faire avec le code Python également ci-joint. Un exemple de tracé de cycle est donné ci-joint (Fig. 3), tandis qu'un exemple de sortie du code Python est donnée ci-dessous. Le cycle est parcouru dans le sens horaire, comme cela est attendu pour un moteur. L'aire du cycle donne le travail W fourni par cycle par le moteur. Il est possible d'estimer le transfert thermique reçu pendant un cycle Q par l'enthalpie de combustion de la masse d'éthanol brûlée par cycle. On trouve typiquement un rendement $\eta = W/Q$ très faible (inférieur à ou de l'ordre de 1 %), parce qu'une grande partie de la chaleur libérée par la combustion de l'éthanol n'est pas captée par le gaz.

```
Travail moyen fourni durant un cycle = 0.18810838524431145 J.
Transfert thermique moyen reçu durant un cycle = 61.47672289026168 J.
Rendement moyen = 0.0029634231108866183.
```

- Le moteur de Stirling, par un système de poulies, fait tourner une génératrice à courant continu, qu'on peut brancher à un composant électrique afin d'étudier le comportement en charge. On pourra, par exemple, utiliser une diode électroluminescente P29.25. Il faut alors placer l'interrupteur associé à la génératrice vers le bas (circuit fermé).

3. Précautions d'utilisation

- Le branchement des capteurs avec les fils de connexion à la carte Arduino est difficile : il est préférable de laisser les fils constamment branchés à la carte Arduino.
- Le moteur présente un sens privilégié de rotation, non indiqué dans la notice, mais que nous avons marqué par une flèche sur le volant d'inertie.

- La sensibilité du capteur de pression n'est pas indiquée correctement dans les notices. Il faut donc se référer uniquement à l'fig. (1).
- Le code Arduino donné dans la notice n'est pas utilisable en l'état, car le *baud number* (nombre de bits par seconde pour la transmission de données vers le port série) indiqué est insuffisant pour un fonctionnement normal du moteur. Il faut donc utiliser le code ci-joint qui, lui, donne des résultats acceptables. Le *baud number* peut être diminué jusqu'à 57 600, mais pas en deçà.

IV. Application : contrôle de température [7]

Objet de cette section est de mettre en œuvre les capacités de calculs du MCU pour effectuer un asservissement de température.

Principe de l'expérience.

On se propose de réaliser un asservissement de température à l'aide d'un module Arduino R3.

Il s'agira de réguler et commander la température d'un cylindre à section circulaire de cuivre ou Dural de 60 mm de diamètre et 40 mm d'épaisseur. Un capteur de température de type LM35DZ de sensibilité 10 mV/°C [8] est placé environ au centre du bloc (collé à l'aide d'une pâte thermique).

Un module Peltier de type xxx est pris en sandwich entre le bloc de métal et un dissipateur. Une pâte permet un bon contact thermique indispensable (amélioration possible par la mise en place d'un ventilateur côté dissipateur). Le bloc peut être entouré d'un isolant cela permet de plus grande variations de température pour une même puissance thermique mise en jeu.

Deux modes d'utilisation sont possibles : le signal de commande de température peut être appliqué par un générateur de tension ou bien de façon purement numérique (sketch Arduino).

Le module Arduino permet d'acquérir la tension délivrée par le capteur (après une amplification d'un facteur 10) et éventuellement la tension de commande. Ces grandeurs converties sont ensuite traitées numériquement de façon à obtenir une correction de type PID (pour l'instant seulement PI). Ces grandeurs numériques sont sont ensuite converties en une tension dite de commande qui leur est proportionnelle.

Cette tension de commande doit "piloter" le courant circulant dans le module Peltier (en effet les modules Peltier exploitent le fait qu'une jonction entre deux matériau parcourue par un courant échange de la chaleur proportionnellement à ce courant). Le courant sera délivré par un montage de type Push-Pull inclus dans une boucle d'asservissement mettant en œuvre un amplificateur différentiel.

L'ensemble est schématisé par le diagramme de la figure 4, et le cablage est présenté sur la figure 5.

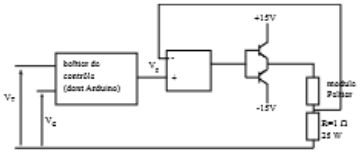


Figure 4 – Schéma de principe d'un asservissement de température. V_T est le tension délivrée par le capteur de température et V_C la tension de commande. Le boîtier de contrôle qui contient essentiellement un module Arduino délivre une tension V_Σ. Cette tension est appliquée à l'aide d'une boucle impliquant un A.O. aux bornes d'une résistance de puissance de valeur 1 Ω. Le module Peltier est donc parcouru par un courant V_Σ/R.

7. 49 P. Bigard, 2022

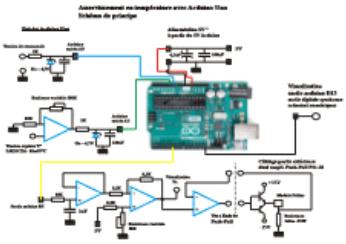


Figure 5 – Schéma électrique de l'asservissement de température.

Boîtier de contrôle

Conversion analogique numérique

La tension V_T est amplifiée d'un facteur 10 (à régler) à l'aide d'un montage non-inverseur elle est appliquée à l'entrée analogique A_0 du module Arduino par l'intermédiaire d'un circuit de protection (diode Zener 4,7 V) polarisée par une résistance de 1 kΩ. La tension de commande est appliquée de même à l'entrée analogique A_1. Ces tensions sont converties en nombres N_T et N_C respectivement avec un facteur de conversion de 256/5 V^{-1} (convertisseur 10 bits entre 0 et 5 V : 1024/5V). Dans le cas où le signal de commande est purement analogique l'étape de conversion V_C vers N_C est inutile, la commande est donnée par une tension fictive traduite en nombre N_C via le même facteur de conversion.

- Le gain global après conversion est donc de : 20,48 °C^{-1}

PID

Un filtre numérique de type PI est ensuite appliqué au signal d'erreur ($N_C - N_T$). Il s'agit d'un gain G_0 et d'une intégration de temps caractéristique τ_I. Le signal filtré au temps $(n+1)t_e$ est donné par la fonction de transfert suivante (t_e est la période d'échantillonnage du signal) :

- $N_s(n+1) = G_0(N_C - N_T)(n) + N_s(n) + \frac{1}{\tau_I} t_e(N_C(n) - N_T(n))$

Conversion numérique analogique

Ce nombre est de signe quelconque. Le module Arduino ne possède pas réellement de convertisseur numérique analogique. Il possède cependant des sorties numérique fonctionnant selon le principe de la MLI (modulation de largeurs d'impulsions) ou PWM en anglais. Ces modulations opèrent sur des signaux numériques (entre 0 et 5V) de fréquence 980 Hz environ sur la sortie D6 de l'Arduino Uno R3 (d'autres sortie offrent une fréquence moitié). La valeur moyenne de ces signaux est proportionnelle à un nombre compris entre 0 et 255. Ces sorties se comportent donc comme des convertisseurs numériques-analogiques 8 bits pour des variations relativement lentes comparées aux 980 Hz ce qui sera bien le cas pour ces asservissements de température. Le défaut de ce principe est que l'on ne peut convertir que des nombres positifs en tension moyennes positives. L'astuce consiste donc à translater l'erreur numérique de manière à se placer autour du milieu de la gamme de conversion, soit en ajoutant le nombre 128 à l'erreur. Un décalage de tension équivalente à 128 est opposé est ensuite appliquée au signal analogique soit −2,5 V.

- Le gain de cette conversion est de 0,0195 V.

ÉTAGE DE PUISSANCE : CONVERSION TENSION–COURANT ET MODULE PELTIER

La boucle impliquant le module Peltier permet de commander un courant proportionnel au signal de commande en tension. Le gain de ce dernier étage est de 1 $A\,V^{-1}$ (résistance de 1 Ω). Le module TEC1-12106 est donné pour 50 W/6A.

- Le gain du module vaut environ 8 $W\,V^{-1}$.

EN RÉSUMÉ

En l'absence d'intégrateur le gain global de l'ensemble est de 3,2 G_0 $W/°C^{-1}$, soit 6,4 $W/°C^{-1}$ pour une valeur de G_0 de 2 qui semble donner des résultats "raisonnables" (pas d'instabilité et une précision "correcte"). Autrement dit un écart de 1°C entre température de commande et température mesurée résulte en une puissance thermique de 6.4 W pour rétablir l'équilibre. L'ensemble est résumé figure 6.

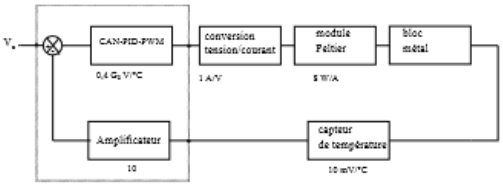


FIGURE 6 – schéma complet de la boucle d'asservissement : la valeur des gains connus est indiqué sous les blocs. Le gain du PID est indiqué dans le cas d'une simple correction proportionnelle (se reporter au texte pour son expression générale). Le bloc de métal se comporte en première approximation comme un système du premier ordre dont l'étude reste à faire. Sur ce schéma la tension délivrée par le capteur de température et amplifiée est comparée à une tension de commande V_c (mode EXTERNE). Un autre mode de fonctionnement (mode INTERNE) utilise une commande purement numérique (sous forme de créneaux réglables en amplitude et fréquence). Le boîtier de commande contenant entre autre le module Arduino est schématisé par le cadre en pointillés.

La capacité thermique du bloc de cuivre est de 385 $J\,kK^{-1}$. Pour un écart de température de 1 °C et un courant Peltier de 1 A la durée pour atteindre l'équilibre thermique est de 48 s. Ce temps est beaucoup plus petit que le temps caractéristique d'évolution naturelle du bloc (dépendant de son isolation thermique) mais plus grand que le temps de diffusion sur la taille du bloc qui vaut environ 15 s.

CONSEILS PRATIQUES, DÉFAUTS ET AMÉLIORATIONS POSSIBLES

- On pourra dans un premier temps effectuer un asservissement de ± 1 ou ± 2 °C autour de la température ambiante,
- Les alimentations de puissance du Push-Pull seront limitées à 1 ou 2 A. Le courant limite est de 6 A mais plus le courant est élevé plus des non-linéarités pourraient devenir gênantes (effet joule),
- Des durées des 5 à 10 minutes sont nécessaires pour observer correctement les régimes transitoires,
- Deux potentiomètres permettent de régler le gain d'un amplificateur (x10) et un décalage de tension (−2,5 V), ils sont a priori réglés en sortie d'usine,
- Pour le mode EXTERNE (commande par une tension), se souvenir que le gain du capteur de température est de 10 $mV/°C^{-1}$ mais que la tension de commande doit prendre en compte un gain INTERNE x10 (100 $mV/°C^{-1}$),
- en mode INTERNE (commande purement numérique), seul des signaux carrés ont été programmés. Il serait très facile de générer n'importe quel type de signal de commande,
- toujours en mode INTERNE aucun signal analogique de commande n'est disponible (à ajouter dans une future version ?) pour comparaison au signal de température mesuré,
- la stabilité de la boucle d'asservissement dépend du sens du branchement du module Peltier, à tester au cas par cas.
- le correcteur dérivé est à programmer et tester.

Exemples d'asservissements

Voici figure (7) deux exemples d'asservissement en mode INTERNE. On remarque les oscillations de température plus importantes lorsque le gain du correcteur intégral est plus élevé (temps d'intégration plus faible).

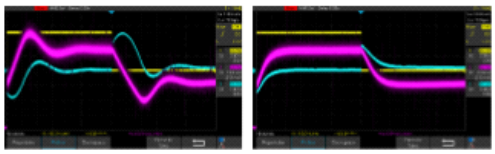


FIGURE 7 – Deux exemples d'asservissements en mode INTERNE (en jaune : signal de synchronisation (sortie numérique D5), en bleu : courant du module Peltier, en rose : température) : la commande en température est un créneau de 22.0 ± 1 °C, $G_0 = 2$. Figure de droite le temps d'intégration vaut 12 s, de gauche 100 s. La période du signal de commande est de 700 s.

ANNEXE

Quelques grandeurs caractériques du cuivre et de l'aluminium (source wikipedia) :

	Cuivre	Dural
masse volumique ($kg\,m^{-3}$)	8960	2900
conductivité thermique ($W\,m^{-1}\,°K^{-1}$)	390	237
capacité thermique massique ($J\,kg^{-1}\,°K^{-1}$)	385	897
diffusivité thermique ($m^2\,s^{-1}$)	117	90.8

V. APPLICATION : MESURES D'ACCÉLÉRATION[8]

Objet de cette section est d'illustrer l'aspect "capteur embarqué" et "communication sans fil" (ici bluetooth) que permet un MCU.

Le principe de l'expérience consiste à équiper la pale d'une hélice d'un accéléromètre piloté par un arduino, et de récupérer les données *via* bluetooth. Pour le principe de fonctionnement de l'accéléromètre MPU-6050 présent sur la carte GY-521, et plus généralement des capteurs MEMS, on pourra consulter par exemple le site des Techniques de l'ingénieur[9], du BUP[10] ou le sujet de l'agrégation de physique-chimie, concours interne, session 2021[11].

⚠ Le dispositif expérimental est un prototype, il n'en existe qu'un unique exemplaire. Prenez en soin ! En particulier, si vous devez le déplacer, il faut le porter par la base (noire) et surtout pas par le plateau ou par le mât.

⚠ Pour que les deux modules Arduino puissent communiquer à l'aide des cartes Bluetooth, il faut que celles-ci aient été appairées au préalable. Ce travail (pas insurmontable) a déjà effectué pour vous. Cela signifie qu'en l'état, seule la carte HT qui est montée sur la plaquette de prototypage identifiée par le post-it "SLAVE" peut communiquer avec celle fixée sur la pale de l'hélice. Faites attention à l'ensemble du dispositif !

1. Principe de l'expérience

Notations : le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est associé au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ supposé galiléen, le plan (Oxy) coïncidant avec le plan du plateau tournant (sur lequel est fixé le mât de l'hélice) et l'axe (Oz) avec la verticale. Le mouvement de la pale de l'hélice définit un plan $(Ox'y')$, de normale (Oy'), les axes (Ox') et (Oz) étant confondus. Ce repère est associé à un second référentiel, $\mathcal{R}'$. Le plateau tournant est en rotation à la vitesse de rotation $\Omega\vec{k}$, et la pale de l'hélice en rotation à la vitesse de rotation $\omega\vec{y}'$. Ces vitesses sont supposées constantes, le régime stationnaire étant établi. La cinématique du système est ainsi parfaitement déterminée, et l'on peut expliciter les accélérations centrifuge et de Coriolis dans le référentiel $\mathcal{R}'$ (travail laissé à vos soins).

8. 43 Ch. Wentzcoffin, 2023
9. https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/genie-industriel-thb/capteurs-42470210/les-capteurs-mems-r430/generalites-et-procedes-de-fabrication-r430ni10001.html
10. Bull. Un. Prof. Phys. Chim., janvier 2010, vol. 104, n°920, p. 3-24
11. http://www.agregation-interne-physique-chimie.org/annales-des-minatgreaves-nanotecnics.html

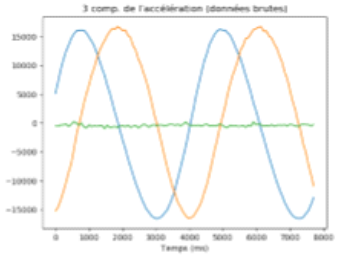


FIGURE 8 – Exemple de résultats bruts (G1 = 0)

À ces accélérations, il faut ajouter la projection de la gravité, qui va induire une modulation (à la fréquence ω) des valeurs de a_x et a_y. Cet effet est mis à profit pour déterminer la vitesse de rotation de la pale, celle du plateau tournant devant être déterminée (en l'état) à l'aide d'un tachymètre. Un exemple de résultats est présenté sur la figure 8. La conversion "amplitude du signal → accélération" peut être effectuée également en exploitant la pesanteur (les plus courageux pourront vérifier que le résultat est compatible avec les spécifications du capteur [12]...).

VI. Limite : échantillonnage des voies d'entrée [13]

L'objet de cette section est de mettre en évidence les limites associées au CAN ainsi qu'à la fréquence d'échantillonnage.

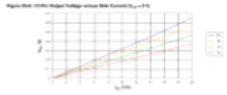
Les tensions appliquées sur les 6 broches d'entrées analogiques sont échantillonnées en grandeurs numériques quantifiées, via un convertisseur analogique-numérique (CAN), avec un pas de quantification fixé par le nombre de bits de la carte (10 bits pour l'Arduino UNO R3) et le calibre (0-5 V). Ainsi, la carte quantifie la tension d'entrée sur $2^{10} = 1024$ valeurs possibles, avec un pas de quantification égal à $\Delta e = 5/2^{10} = 4,9$ mV. L'échantillonnage temporel s'effectue lui aussi avec un pas de temps minimal δt (à déterminer).

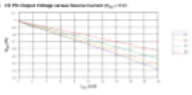
Afin de pouvoir analyser les mesures effectuées par la carte, on récupère les tensions (après numérisation par l'Arduino) sur un ordinateur à travers le port série (physiquement associé à la connectique USB) en exploitant la fonction `Serial.print()` (ou `Serial.println()`). Ces tensions peuvent être affichées en temps réel dans le "moniteur série", accessible par le menu Tools > Serial Monitor. Le post-traitement des données est effectué à l'aide d'un script python.

Protocole : alimenter l'Arduino via le port USB (qui permet également la récupération des données par le port série) et uploader le script Arduino arduino_EchantillonnageAnalog.ino. Un booléen permet de choisir entre la version "résolution en tension" ou "résolution temporelle". On pourra à cette occasion également relever l'occupation substantielle des espaces mémoires disponibles (alors que le programme est très simple...), ce qui constitue également une limite de ce MCU. Pour la discussion des limites Δe et δt, il sera utile d'exploiter les possibilités de post-traitement des données à l'aide d'un programme python, par exemple en adaptant le script python AnalogReadSerial.py (travail laissé à vos soins).

- **Résolution en tension**
  - Appliquer une rampe de tension 0-5 V sur l'une des broches analogiques (avec une fréquence "faible", 10 Hz par exemple).
  - Vérifier à l'aide du moniteur série que les tensions sont relevées par la carte.
  - Mettre en évidence le pas de quantification Δe.
- **Résolution temporelle**

12. https://inventeur.tdk.com/wp-content/uploads/2015/02/MPU-6000-Register-Map1.pdf, p 29
13. © Ch. Wiesbeaulin, 2022





- Appliquer une tension sinusoïdale d'amplitude $\simeq 2$ V (avec l'offset adéquat pour travailler sur la plage 0-5 V) sur l'une des broches analogiques (avec une fréquence "faible").
- Vérifier à l'aide du moniteur série que les tensions sont relevées par la carte.
- Augmenter la fréquence de la tension d'entrée, et mettre en évidence une borne supérieure au-delà de laquelle le signal ne peut plus être correctement échantillonné.

⚠ Il faut prendre soin de vérifier que ce n'est pas le transfert des données via le port série qui limite la fréquence d'échantillonnage, mais bien la "lecture" par le MCU de la tension appliquée sur une broche. Le plus "simple" consiste à accumuler plusieurs telles mesures avant d'en effectuer le transfert (avec une limite imposée par la taille de la RAM).

Ces considérations montrent que l'Arduino UNO R3, doté d'un processeur cadencé à 16 MHz, fait "beaucoup d'autres choses" à l'insu de l'utilisateur. Il faut cependant noter qu'on peut exploiter les possibilités de la carte de manière plus astucieuse pour arriver, par exemple, à estimer [14] la fréquence de signaux jusqu'à $\simeq 8$ MHz avec une précision tout à fait convenable.

VII. Limite : charge en sortie [15]

L'objet de cette section est de mettre en évidence les limites concernant les courants que le MCU est capable de fournir en sortie de broche.

On se restreint dans cette discussion au cas où une seule broche est concernée. Dans le cas contraire, la situation est plus compliquée car plusieurs broches sont associées à différents ports, et les courants maximaux admissibles à considérer concernent en réalité les ports du MCU et non pas les broches individuellement. Pour le MCU ATmega328P, il existe 3 ports, le port PB (associé aux broches 8 à 13), le port PC (associé aux broches A0 à A5) et le port PD (associé aux broches 0 à 7). Les personnes les plus motivées pourront consulter les 294 pages de la documentation technique [16]. On ne prétendra de cette présentation que la valeur du courant nominal, 20 mA, qui correspond à la fois au courant maximal qu'une broche est capable de fournir ou de drainer, et on veillera donc à ne pas dépasser cette valeur.

À la page 271 du datasheet sont présentées deux courbes reproduite ci-dessus. Retrouver ces courbes en relevant des couples (tension-courant) pour modifiant la valeur de la résistance de charge. Le script arduino se réduit essentiellement à imposer qu'une broche soit dans l'état haut ou bas (HIGH ou LOW); à peu près n'importe quel script que l'on peut trouver dans le menu File > Exemple peut être adapté pour obtenir ce résultat. C'est par exemple le cas de DigitalInputPullup.ino, qui présente l'intérêt de discuter [17] les "résistances de tirage/rappel", qui permettent de déterminer en toute circonstance l'état d'une broche qui serait reliée à un interrupteur.

VIII. Scripts

1. **Prise en main**
   a. **arduino_ReadSerial_lyon.ino**

```
/*
  AnalogReadSerial

  Reads an analog input on pin 0, prints the result to the Serial Monitor.
  Graphical representation is available using Serial Plotter (Tools > Serial Plotter menu).

  This example code is in the public domain.

  https://www.arduino.cc/en/Tutorial/BuiltInExamples/AnalogReadSerial
*/

// the setup routine runs once when you press reset:
```

14. https://www.gammon.com.au/timers
15. © Ch. Wiesbeaulin, 2022.
16. http://ww1.microchip.com/downloads/en/DeviceDoc/Atmel-7810-Automotive-Microcontrollers-ATmega328P_Datasheet.pdf
17. https://arduino.developpez.com/cahiers-pratiques/resistances-pullup-pulldown/

```
void setup() {
  // initialize serial communication at 9600 bits per second:
  Serial.begin(9600);
}

// The loop routine runs over and over again forever:
void loop() {
  // read the input on analog pin 0:
  int sensorValue = analogRead(A0);
  // print out the value you read:
  Serial.println(sensorValue);
  delay(1);        // delay in between reads for stability
}
```

b. python_ReadSerial_lyon.py

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

"""
Récupération, post-traitement et visualisation des données échantillonnées par un Arduino et transférées
    via le port série
Par défaut: nom du port série: COM3
            baudrate: 9600   (!!! doit être identique à celui défini dans le script Arduino)

Dépendances: python_Arduino0tils_lyon.py (modifier en conséquence la variable d'environnement PYTHONPATH
    ou placer ces                                   deux fichiers dans le même répertoire)

Usage: python python_ReadSerial_lyon.py [-h] [-r BAUDRATE] [-p PORT]

Exemple de spécification du port série: python python_ReadSerial_lyon.py -p "/dev/ttyACM0"
Exemple de spécification du baudrate:   python python_ReadSerial_lyon.py -r 115200

Auteurs: C. Winisdoerffer (21/03/2022)
         Révisions apportées par les agrégatifs de lyon 2021-2022
"""

# Importation des libraires
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import sys
import python_Arduino0tils_lyon as A0
import scipy.optimize as scopt

# Définition des fonctions
def convertdata(data, Nbits=10):
    *** Conversion des données brutes (issues de l'Arduino) en données physiques ***
    # Transformation affine
    data = 5.* data/(2**Nbits-1.)
    return data

def postprocess(data):
    *** Exemple de post-traitement des données : recherche d'un ajustement harmonique ***
    x = data[:,0]
    y = data[:,1]
    # Initial guess
    coeff = np.array([np.mean(y), np.mean(y)/10, 1.e-4, 0.])
    # Fit
    lsq = scopt.least_squares(residuals, coeff, args=(x,y))
    lsq = lsq.x # keep only the optimized parameters among the outputs
    print("Best fit parameters: {}".format(lsq))
    # Visualisation
    plt.plot(x,y,"-", label="data")
    plt.plot(x,functional(x, coeff), "-", label="initial guess")
    plt.plot(x,functional(x, lsq), "-", label="best fit")
    plt.legend()
    plt.show()
    return

def functional(x, coeff):
    *** Forme fonctionnelle pour le fit ***
    # cste + A * sin(2*pi *nu x + phi)
    res = coeff[0] + coeff[1]*np.sin(2.*np.pi*coeff[2]*x+coeff[3])
    return res

def residuals(coeff, x, y):
    *** Residuals to be used in lsq fitting ***
    res = y - functional(x, coeff)
    return res

# Programme principal
if __name__ == "__main__":
    # Accès au port série par le script python
    serialport = A0.manage_SerialPort(sys.argv)
    # Récupération dynamique des données (pour visualisation)
    if True:
        A0.getdata_dynamic(serialport,yrange=[0,50])
        A0.getdata_dynamic(serialport,Ublck=4,yrange=[-20000,20000],Mfields=4,verbose=True)
    # Récupération statique des données (pour post-traitement)
    if True:
        data = A0.getdata_static(serialport,imax=1000,Mfields=4)
    # Post-traitement
    if False:
        # Récupération (éventuelle) des données si elles ne proviennent pas du "getdata_static"
        if False:
            # Nom du fichier qui contient les données
            fname = 'data_220401.txt'
            data = np.loadtxt(fname)
        # Conversion
        #data = convertdata(data)
        #data[:,1:] = convertdata(data[:,1:])
        # Visualisation
        #plt.plot(data)
        #plt.plot(data[:,0],data[:,1])
        #plt.show()
        # Post-traitement des données
        #postprocess(data)
```

c. python_Arduino0tils_lyon.py

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

"""
Utilitaires de récupération sous python de données échantillonnées par un Arduino et transférées via le
    port série

Dépendances:

Usage: (pas d'usage direct a priori)

Auteurs: C. Winisdoerffer (17/03/2022)
         Révisions apportées par les agrégatifs de lyon 2021-2022
"""

# Importation des libraires
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import sys, time, argparse, collections
import serial

# Définition des fonctions
def progress_bar(progress):
    *** Barre de visualisation de la progression ***
    barLength = 10                  # longueur de la barre
    progress  = float(progress) # conversion (éventuelle)
    block = int(round(barLength*progress))
    text = "\rProgression: [{}]".format( "#"*block + "-"*(barLength-block))
    #text = "\rProcentage: [{}] {}%".format( "#"*block + "-"*(barLength-block), progress*100)
    sys.stdout.write(text)
    sys.stdout.flush()
    return

def manage_SerialPort(argv):
    *** Gestion du port série ***
    # Définition de valeurs par défaut
    baudrate = 9600   # doit être identique à celui défini dans le script Arduino
    port     = 'COM3' # port série utilisé pour établir la comm. ordi-Arduino
    # Traitement des arguments optionnels passés sur la ligne de commande
    if argv[1:]:
        # Defining valid arguments and added them into a parser
```

```
    parser = argparse.ArgumentParser()
    parser.add_argument("-r", "--baudrate",   type=int, help="baudrate")
    parser.add_argument("-p", "--port",       type=str, help="port série")
    args = parser.parse_args()
    # Parse the arguments
    if args.baudrate:   baudrate = args.baudrate
    if args.port:       port = args.port
# Création et spécification du port série
serialport          = serial.Serial()
serialport.baudrate = baudrate
serialport.port     = port
return serialport

def check_SerialPort(serialport):
    """ Test de la communication avec le port série """
    # Message
    print("Port série considéré: port = {}, baudrate = {}".format(serialport.port, serialport.baudrate))
    # Test du port
    try:
        serialport.open()                   # ouverture du port serie
    except:
        print("Port série spécifié invalide; utiliser (la prochaine fois) l'option '-p nomdeport'")
        print("Recherche automatique d'un port valide (sans garantie, en particulier si plusieurs sont disponibles)")
        ok_port = False
        for prefix in ['COM', '/dev/ttyACM']:
            i = 0
            while i < 10 and not(ok_port):
                serialport.port = '{}{}'.format(prefix,i)
                try:
                    serialport.open()
                    ok_port = True
                except:
                    i += 1
        if not(ok_port):
            print("Echec de la recherche automatique")
            serialport.port = input("Entrez un nom de port valide: ")
            try:
                serialport.open()
            except:
                sys.exit("Nom de port invalide")
        else:
            print("Port série considéré après recherche automatique: port = {}".format(serialport.port))
    time.sleep(0.1)
    # Purge du port série
    serialport.reset_input_buffer()
    # Test du port série
    try :
        print("Lecture d'une ligne (affichage brut): {}".format(serialport.readline()))
        print("Si le résultat n'est pas satisfaisant, modifier le baudrate avec l'option '-r baudrate'")
        time.sleep(1)
    except:
        print("Problème de réception des données")
    return

def detect_Fields(serialport):
    """ Détermine le nombre de données présentes sur une ligne transmise par le port série """
    guess = []
    while len(guess) < 10:
        try :
            # Recuperation des donnees ligne a ligne
            data_byte   = serialport.readline()
            # Conversion binaire --> chaine de caract.
            data_string = data_byte.decode('utf8')
            if data_string[0] != '#': # skip lines beginning with '#'
                guess += [len(data_string.split('\t'))]  # fields are separated by tabulations
        except:
            pass
    # Sanity check
    # todo
    Nfields = collections.Counter(guess).most_common(1)[0][0]
    print("Nfields = {}".format(Nfields))
    return Nfields

def getdata_static(serialport, imax=100, Nfields=None, verbose=False):
    """ Récupère un jeu de données de longueur prédéfinie (default: imax=100) et le sauve dans un fichier.
        Idéal pour le post-traitement. """
    # Test de la comm.
```



```
    check_SerialPort(serialport)
    # Detection du nombre de données par ligne
    if not(Nfields):
        Nfields = detect_Fields(serialport)
    # Initialisation
    data = np.nan * np.ones((imax, Nfields))
    # Message
    print("\n> Récupération de {} données consécutives. Pour interrompre le programme, Ctrl+C".format(imax))
    start = time.time()
    # Récuperation des données
    i = 0
    while i < imax:
        try:
            # Recuperation des donnees ligne a ligne
            data_byte   = serialport.readline()
            # Conversion binaire --> chaine de caract.
            data_string = data_byte.decode('utf8')
            # Affichage de la ligne
            if False: print(data_string.strip())
            # Conservation des données numériques
            if data_string[0] != '#': # skip lines beginning with '#'
                try:
                    line = np.fromstring(data_string, dtype=float, sep='\t')
                    if verbose: print(line,len(line))
                    # Conservation des données
                    if len(line) == Nfields:
                        data[i,:] = line
                        i += 1
                    # Affichage d'une barre de progression
                    progress_bar(float(i+1)/imax)
                except: # skip the line if not possible
                    pass
        except KeyboardInterrupt: # correspond à un Ctrl + C
            print("Lecture interrompue")
            return
    end = time.time()
    print("\n Temps d'acquisition : {:4f}".format(end-start))
    # Fermeture du port serie
    serialport.close()
    # Sauvegarde
    fname = 'data.{}.txt'.format(time.strftime("%y%m%d.%H%M"))
    print("\n> Sauvegarde des données dans le fichier: {}".format(fname))
    np.savetxt(fname, data)
    return data

def getdata_dynamic(serialport, imax=500, ihick=1, yrange=None, Nfields=None, verbose=False):
    """ Récupère les données et les visualise "comme sur un oscillo"
        Adapté de A. Hérut, https://github.com/aberut/arduino-oscillo) """
    # Test de la comm.
    check_SerialPort(serialport)
    # Detection du nombre de données par ligne
    if not(Nfields):
        Nfields = detect_Fields(serialport)
    # Initialisation
    block = np.zeros((ihick, Nfields))    # les données sont affichées par blocs (de longueur ihick)
    data = np.zeros((imax, Nfields))
    # Oscilloscope
    fig  = plt.figure()
    ax   = fig.add_subplot(111)
    # Voies de l'oscillo
    channels = [[] for i in range(Nfields)]
    for ifield in range(Nfields):
        channels[ifield], = ax.plot(data[:,ifield])
    # Curseur repérant le dernier point tracé
    curser, = ax.plot([0,0],[0,2*ihick-1],'r--')
    # min et max de l'axe des ordonnées
    if yrange:
        ax.set_ylim(yrange[0],yrange[1])
    else:
        ax.set_ylim(0,2*ihick-1)
    ax.grid()
    # Message
    print("\n> Récupération des données. Pour interrompre le programme, Ctrl+C")
    ibeg = 0
    iend = 0
    t0 = time.time()
    while True:
```

```
        try:
            i = 0
            while i < ishok:
                # Recuperation des donnees ligne a ligne
                data_byte = serialport.readline()
                # Conversion binaire --> chaine de caract.
                data_string = data_byte.decode("utf8")
                # Affichage de la ligne
                if verbose: print(data_string.strip())
                # Conservation des données numériques dans le bloc à visualiser
                if data_string[0] != '#': # skip lines beginning with '#'
                    try:
                        line = np.fromstring(data_string, dtype=float, sep="\t")
                        if False: print(line,len(line))
                        # Conservation des données
                        if len(line) == Nfields:
                            block[i,:] = line
                            i += 1
                    except:
                        pass
        # Sauvegarde du dernier bloc de données à la suite du préc. avec le module
        ibeg = iend
        iend += ishok
        if iend == imax:
            data[ibeg:iend,:] = block[:,:]
        else:
            delta_i = imax-ibeg
            data[ibeg:imax,:]     = block[:-delta_i,:]
            data[0:ishok-delta_i,:] = block[delta_i:,:]
            iend = ishok-delta_i
        # Visualisation
        for ifield in range(Nfields):
            channels[ifield].set_ydata(data[:,ifield])
        cursor.set_xdata([iend,iend])
        plt.pause(0.01)
        plt.title("Temps écoulé : {:.4} s".format(time.time()-t0))
        fig.canvas.draw()
    except KeyboardInterrupt: # correspond a un Ctrl + C
        print("Lecture interrompue")
        serialport.close()
        raise
    serialport.close()
    return

# Programme principal
if __name__ == "__main__":
    pass
```

2. Moteur Stirling

a. arduino_MoteurStirling_lyon.ino

```
/*
  Gestion d'un moteur Stirling equipe d'un capteur de pression et de 2 fourches optiques

  Auteurs: B. Guinelin & E. Brillaux (27/02/2022)
           C. Winisdorffer (17/03/2022)
*/

// Define basic variables
const int PinPres = A0;   // Entrée analogique A0 associée au capteur de pression
const int PinFHS = A1;    // Entrée analogique A1 associée à la fourche supérieure
const int PinFbasse = A2; // Entrée analogique A2 associée à la fourche inférieure
int nbcycles = 0;         // Compteur du nombre de cycle
int nbcfentes = 0;        // Compteur du nombre de fente atteinte dans un cycle
int etatphotogateFHS;     // Etat de la fourche du point mort haut
int etatphotogate;        // Etat de la fourche inférieure
int memoireFHS = LOW;     // Etat garde en mémoire de la fourche du point mort haut
int memoire = LOW;        // Etat garde en mémoire de la fourche inférieure

// The setup routine runs once when you press reset:
void setup() {
  // Initialisation des variables
  pinMode(PinPres,INPUT);           // Init. comme variable d'entrée
  pinMode(PinFHS,INPUT_PULLUP);     // Init. comme variable d'entrée
                                    // input_pullup permet d'éliminer le bruit de détection
  pinMode(Pinbasse,INPUT_PULLUP); // Init. comme variable d'entrée
  // Initialisation de la communication port-série
  Serial.begin(115200); // # 115200 bauds
  // Purge
  Serial.flush();
  // Message d'initialisation
  Serial.println(String("# Numero cycle"+"\t"+"Numero fentes"+"\t"+"Pression"));
}

// The loop routine runs over and over again forever:
void loop() {
  etatphotogateFHS = digitalRead(PinFHS);    // Lecture de l'état de la fourche supérieure
  etatphotogate    = digitalRead(Pinbasse); // Lecture de l'état de la fourche inférieure
  // Si l'état de la fourche sup. est haut alors qu'il était bas avant à l'itération préc.,
  // le nombre de cycle est incrémenté de 1 et le nombre de fente réinitialisé à 0
  if (etatphotogateFHS != memoireFHS) && (etatphotogateFHS == HIGH)) {
    nbcycles++;
    nbcfentes = 0;
  }
  // Si l'état de la fourche inf. est haut alors qu'il était bas avant à l'itération préc.,
  // le nombre de fente est incrémenté de 1 et les données sont transférées via le port-série
  if (etatphotogate != memoire) && etatphotogate == HIGH) && (nbcycles>-1)) {
    nbcfentes++;
    Serial.print(nbcycles);
    Serial.print("\t");
    Serial.print(nbcfentes);
    Serial.print("\t");
    Serial.print(analogRead(PinPres)); // donnée 'brute'
    Serial.println();
  }
  // Conserve les états des deux fourches
  memoire = etatphotogate;
  memoireFHS = etatphotogateFHS;
}
```

b. python_MoteurStirling_lyon.py

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

"""
Post-traitement des données (enregistrées dans un fichier) correspondant à un moteur Stirling equipé d'un
    capteur de pression
et de 2 fourches optiques
Format des données: numéro du cycle, numéro de la fente dans le cycle, pression

Dépendances:

Usage: python python_MoteurStirling_lyon.py

Auteurs: B. Guinelin & E. Brillaux (27/02/2022)
         C. Winisdorffer (17/03/2022)
         Révisions apportées par les agrégatifs de lyon 2021-2022
"""

# Importation des librairies
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import time

# Definition des fonctions
def basic_parameters():
    """ Définition des paramètres techniques du moteur Stirling de l'ENS Lyon """
    # Parametres à ne pas modifier
    Nfentes = 50     # Nombre de fentes
    Vmin    = 32.    # Volume minimal en cm3
    Vmax    = 44.    # Volume maximal en cm3
    deltaP  = 100.   # Différence de pression maximale en kPa
    Nbits   = 10     # Nombre de bits du CNA de la carte arduino
    return Nfentes, Vmin, Vmax, deltaP, Nbits

def read_datafile(fname):
    """ Récupération des données contenues dans le fichier fname """
    try:
        data = np.genfromtxt(fname)
    except IsADirectoryError:
```

```
        raise ImportError("Impossible d'accéder au fichier {}".format(fname))
    return data

def process_data(data):
    *** Traitement des données et conversion ***
    # Le format des données est supposé être:
    #     1ère colonne - numéro du cycle
    #     2ème colonne - numéro de la fente dans le cycle
    #     3ème colonne - pression (codée sur 10 bits)
    cycles = data[:,0]
    fentes = data[:,1]
    press  = data[:,2]
    # Récupération des paramètres du dispositif mis en marche
    NFentes, Vmin, Vmax, deltaV, NBits = basic_parameters()
    # Conversion de la pression "sur 10 bits" en pression "en Pa"
    press  = 1.e3 * deltaV * (press/(2**NBits-1.)-0.5)
    # Calcul du volume de la chambre
    arg = 2.*np.pi*(fentes-1.)/NFentes
    #
    ##################################################################################################

    # Attention, dans la formule suivante établissant le lien entre indice de fente et volume, il est
        crucial
    # que l'indice 1-1 corresponde au volume minimal Vmin
    #
    ##################################################################################################

    V = -0.5*(Vmax-Vmin)*np.cos(arg) + 0.5*np.sqrt((Vmin+Vmax)**2-((Vmin-Vmax)*np.sin(arg))**2)
    # Conversion cm3 --> m3
    V = 1.e-6
    # Extraction de cycles entiers
    ibeg = np.where(fentes == 1)[0][0]          # début du 1er cycle complet
    iend = np.where(fentes == NFentes)[0][-1]   # fin du dernier cycle complet
    Ncycles = (iend-ibeg+1)/NFentes
    return Ncycles, NFentes, press[ibeg:iend], V[ibeg:iend], fentes[ibeg:iend]

def compute_thermo(Ncycles, press, V):
    *** Considérations thermodynamiques ***
    # Calcul du travail fourni (en J)
    W = np.trapz(press,V)
    print("Travail moyen fourni durant un cycle = {} J (moyenne sur {} cycles)".format(W/Ncycles, Ncycles))
    # Transfert thermique reçu de la source chaude (en J)
    m = input("Masse d'éthanol brûlé (en g): ")
    try:
        m = float(m)
    except ValueError:
        print("réponse non valable --> 10 g par défaut")
        m = 10.
    L = 29693. # chaleur latente de combustion de l'éthanol en J/g
    Qc = m*L   # transfert thermique reçu de la source chaude en J
    eta = W/Qc  # rendement du moteur
    print("Transfert thermique moyen reçu durant un cycle = {} J (moyenne sur {} cycles)".format(Qc/Ncycles
        , Ncycles))
    print("Rendement moyen = {}.".format(eta))
    return

def plot_data(fname, NFentes, press, V):
    *** Visualisation des données dans le diagramme de Watt ***
    plt.grid()
    # Visualisation de l'ensemble des données
    plt.plot(1.e6*V,1.e-3*press,marker=',',color='k')
    # Visualisation d'un cycle
    if False:
        ibeg = int(NFentes*Ncycles/2) # celui 'du milieu'
    else:
        ibeg = 0                      # le premier
    iend = ibeg + NFentes
    plt.scatter(1.e6*V[ibeg:iend],1.e-3*press[ibeg:iend],c=np.arange(NFentes),s=40,cmap='Accent_r',zorder
        =2)
    # Dessous
    plt.colorbar(label='Indice de fente')
    plt.xlabel('V (cm$^3$)')
    plt.ylabel('p (kPa)')
    if True:
        plt.savefig(fname+time.strftime("%y%m%d.%H%M")+".png")
    plt.show()
    return

# Programme principal
if __name__ == "__main__":
    # Interaction avec l'utilisateur
    fname = input("Nom du fichier contenant les données: ")
    # Récupération des données brutes
    data = read_datafile(fname)

    # Couples (pression, volume) (en unités SI) sur des cycles complets
    Ncycles, NFentes, press, V, fentes = process_data(data)

    # Calculs de considérations thermodynamiques
    compute_thermo(Ncycles, press, V)

    # Visualisation
    plot_data(fname, NFentes, press, V)
```

5. Contrôle de température

a. arduino_Asservissement/NumeriquePID_lyon.ino

```
/*
  Asservissement PID numerique (version 2)

  Auteurs: F. Bigoni (26/8/202)
*/
//
// choix du type de commande ; commande en tension : TENSION-TRUE ; commande numérique : TENSION-FALSE
//
// bool TENSION = false ;
bool TENSION = true ;
float epsilon ; // erreur
float command ;
int command_pwm ;
//
// paramètres du correcteur PID
//
float G0 = 2.0 ; // gain proportionnel
float int_epsilon=0.0 ; // initialisation intégrale signal d'erreur
float t_i=25000 ; // temps caractéristique de l'intégrateur (ms)
//
float t_e = 100 ; // période échantillonnage (ms) (millis() donne le temps en millisecondes)
//
// réalisation d'un signal créneau de commande
//
float T_square = 4000.0 ; // période des créneaux (millisecondes)
float Mean_Temperature = 22.0 ; // valeur moyenne de température de commande en deg.C (température
    ambiante par exemple)
float Delta_Temperature = 2.0 ; // amplitude crête à crête des créneaux de température en deg.C
//
// conversion en nombres (facteur de conversion 20.48 /deg.C)
//
float MeanSensorValue = Mean_Temperature*0.1*(1024.0/5.0) ;
float Delta_Square = Delta_Temperature*0.1*(1024.0/5.0) ;
float SensorValue_S = MeanSensorValue + Delta_Square/2.0 ;
//
boolean pinState = HIGH ; // initialisation état sortie digitale Pin 13
//
float t_before = millis() ; // initialisation du temps pour échantillonnage
float t_print = millis() ; // initialisation du temps pour affichage
float t_square_0 = millis() ; // mémorisation temps de 'bascule' des créneaux de commande
//
void setup() {
  // initialize serial communication at 9600 bits per second:
  pinMode(5, OUTPUT) ; // sortie PID (PWM à 980 Hz)
  pinMode(LED_BUILTIN,OUTPUT) ; // indication "état" du créneau de commande (la sortie 13 est associée à
      une LED sur la plaquette Arduino)
  digitalWrite(9,HIGH) ;
}

// the loop routine runs over and over again forever:
void loop() {
//
// calcul du signal carré de commande SensorValue_S
//
if ( millis()-t_square_0) > (T_square/2.0) ) {
    if (TENSION==false) {
```

```
    SensorValue_0 = MeanSensorValue - Delta_Square/2.0 ;
    }
    else {
    SensorValue_0 = analogRead(A0);
    }
  Delta_Square= - Delta_Square ;
  t_square_0=millis() ;
    if (pinStatus == LOW) {
      digitalWrite(LED_BUILTIN,HIGH) ;
      pinStatus = HIGH ;
    }
    else {
      digitalWrite(LED_BUILTIN,LOW) ;
      pinStatus = LOW ;
    }
}
  float SensorValue_1 = analogRead(A1);
  epsilon = -1.0*(SensorValue_1 - SensorValue_0) ; // Signal d'erreur numérique
  command = epsilon * G0 ; // Correction proportionnelle de gain G0
  int_epsilon=int_epsilon+epsilon*t_e/t_i ; // intégrale du signal d'erreur (t_i est le temps
    caractéristique de l'intégrateur)
  //int_epsilon=0.0; // aucune intégration
  command = command + int_epsilon; // correction intégrale
  command = command + 128; // décalage du signal d'erreur. Un décalage analogique de - 2.5 V devra être
    appliqué ensuite pour rétablir un signal de commande analogique correct
  //
  // Test de dépassement du signal numérique de commande et conversion en entier entre 0 et 255 (pwm sur 8
    bits).
  //
  command_pwm=command; // conversion en entier
  if (command<0.0) {
    command_pwm=0;
  }
  else if (command>255) {
    command_pwm=255;
  }
  else {
    command_pwm=command;
  }
  //
  // cadencement sur la durée d'échantillonnage t_e
  //
  while ((millis()-t_before)<t_e) {
  }
  analogWrite(5,command_pwm) ;
  t_before=millis();
//
// print out the value you read toutes les t_i milli secondes
//
if ((millis()-t_print)>2500) {
  /*
  Serial.print("temps : ");
  Serial.println(t_before/1000);
  Serial.print("pin 13 Status : ");
  Serial.println(pinStatus);
  Serial.print("MeanSensorValue : ");
  Serial.println(MeanSensorValue);
  Serial.print("sensorValue_0 : ");
  Serial.println(SensorValue_0);
  Serial.print("sensorValue_1 : ");
  Serial.println(SensorValue_1);
  Serial.print("epsilon : ");
  Serial.println(epsilon);
  Serial.print("command : ");
  Serial.println(command);
  Serial.print("command_pwm : ");
  Serial.println(command_pwm);
  Serial.print("int_epsilon : ");
  Serial.println(int_epsilon);
  */
t_print = millis() ;
}
}
```


6. Mesures d'accélération

a. arduino Coriolis_lyon.ino

```
/*
 * Echantillonnage d'accelerations et transmission par BlueTooth
 *
 * Point critique du code: chaque composante de l'acceleration est stockee sur 16 bits, soit 2 octets, cf
   p.29 de
 *                         https://invensense.tdk.com/wp-content/uploads/2015/02/MPU-6000-Register-Map1.
   pdf.
 *                         La lecture des 3 composantes correspond donc à 6 registres, cf Wire.requestFrom
   (..., 6, ...).
 *                         Accéder à plus (ou moins) de données issues du module MPU-6050 necessite d'
   adaptor en
 *                         consequence le nombre de registres requis
 *
 * Ameliorations envisageables: transfert des données sous forme binaire (plutot qu'une chaine de
   caracteres)
 *
 * Auteurs: C. Winisdoerffer (13/04/2022)
 */

//#define DEBUG // debug trick

// Libraries
#include <SoftwareSerial.h>      // https://www.arduino.cc/en/Reference/SoftwareSerial
#include <Wire.h>                // https://www.arduino.cc/en/reference/wire

// MPU-6050 constants (see
    https://invensense.tdk.com/wp-content/uploads/2015/02/MPU-6000-Register-Map1.pdf)
#define MPU6050_I2C_ADDRESS 0x68   // Default MPU-6050 address
#define MPU6050_PWR_MGMT_1 0x6B    // Power Management 1 Register

// User-defined constants
const int delta_t = 50;            // Periode d'echantillonnage (en ms)

// Define basic variables
int16_t Ax, Ay, Az;
unsigned long timing;
String mystringData;

// Broches pour la carte BT: RX sur la broche 10 | TX sur la broche 11
SoftwareSerial HTSerial(10, 11);

// The setup routine runs once when you press reset:
void setup(){
   // Init. de la comm. port-serie (@ 9600 bauds)
   Serial.begin(9600);
   Serial.flush();
   // Init. de la comm. BlueTooth (@ 9600 bauds)
   HTSerial.begin(9600);
   HTSerial.flush();
   // Init. de la comm. I2C avec l'accelerometre
   Wire.begin();
   Wire.beginTransmission(MPU6050_I2C_ADDRESS);
   Wire.write(MPU6050_PWR_MGMT_1);     // access to MPU6050_PWR_MGMT_1 register
   Wire.write(0);                      // wake up the MPU-6050 by writing 0 on it
   Wire.endTransmission(true);         // release the bus
   // Init. digital pin LED_BUILTIN as an output
   pinMode(LED_BUILTIN, OUTPUT);
   digitalWrite(LED_BUILTIN, HIGH);   // turn the LED on (HIGH is the voltage level)
   // Message
   Serial.println("# End of setup...");
}

// The loop routine runs over and over again forever:
void loop(){

   mystringData = String("");
   // recuperation de l'instant de la mesure (en ms)
   timing = millis();
   mystringData += String(timing);
   // Recuperation des données de l'accelerometre
   Wire.beginTransmission(MPU6050_I2C_ADDRESS);
   Wire.write(0x3B);                   // access to register 0x3B (ACCEL_XOUT_H)
   Wire.endTransmission(false);        // keep the connection active
   Wire.requestFrom(MPU6050_I2C_ADDRESS,6,true);  // request a total of 6 registers and release the bus
```

```
    Rx3-Wire.read()<<8|Wire.read();                // 0x33 (ACCEL_XOUT_H) & 0x3C (ACCEL_XOUT_L)
    Rx4-Wire.read()<<8|Wire.read();                // 0x35 (ACCEL_YOUT_H) & 0x3E (ACCEL_YOUT_L)
    Rx5-Wire.read()<<8|Wire.read();                // 0x37 (ACCEL_ZOUT_H) & 0x40 (ACCEL_ZOUT_L)
    //
    // Conversion des donnees brutes en donnees "physiques"
    // A faire ici, ou a la reception...
    // cf p.13 https://invensense.tdk.com/wp-content/uploads/2015/02/MPU-6000-Datasheet1.pdf
    //
    // Construction de la chaine de caracteres contenant les donnees mises en forme
    mystringdata += "\t"+String(Ax3);
    mystringdata += "\t"+String(Ax4);
    mystringdata += "\t"+String(Ax5);
    mystringdata += "\n";
    // Transfert des donnees par BT
    BTSerial.print(mystringdata);
#ifdef DEBUG
    // Transfert des donnees par port serie
    Serial.print(mystringdata);
#endif
    // Temporisation
    digitalWrite(LED_BUILTIN, LOW);    // turn the LED off by making the voltage LOW
    delay(delta_t);
    digitalWrite(LED_BUILTIN, HIGH);   // turn the LED on (HIGH is the voltage level)
}
```

b. arduino_ReadBT_lyon.ino

```
/*
 * Recuperation de donnees transmises par BlueTooth et affichage (brut) sur le port serie
 *
 * Point critique du code: l'appairage des cartes BT est supposé avoir eté effectué par ailleurs!
 *
 * Ameliorations envisageables: etablir un protocole pour "securiser" les donnees (caracteres de debut,
 *                              de fin, volume des donnees attendu, ...)
 *
 *
 * Conseil de lecture: http://www.gammon.com.au/serial
 *
 * Auteurs: https://forum.arduino.cc/t/reading-data-from-one-arduino-to-another-via-bluetooth/372408/5
 *          C. Winisdoerffer (13/04/2022)
 */
//#define DEBUG // debug trick

// Bibliotheques
#include <SoftwareSerial.h>     // https://www.arduino.cc/en/Reference/softwareSerial

// Define basic variables
String readData;

// Broches pour la carte BT: RX sur la broche 10 | TX sur la broche 11
SoftwareSerial BTSerial(10, 11);

// The setup routine runs once when you press reset:
void setup() {
    // Init. de la comm. port-serie (@ 9600 bauds)
    Serial.begin(9600);
    Serial.flush();
    // Init. de la comm. BlueTooth (@ 9600 bauds)
    //BTSerial.begin(38400); // HC-05 default speed in AT command mode
    BTSerial.begin(9600);  // HC-05 default speed in data command mode
    BTSerial.flush();
    // Initialisation
    readData = "";
    // Message
    Serial.println("# End of setup...");
}

// The loop routine runs over and over again forever:
void loop() {
    // Recuperation des donnees BT disponibles, aussi rapidement que possible. Do NOT use any delay() !!!
    while (BTSerial.available()) {
        char c = BTSerial.read();
        readData += c;
#ifdef DEBUG
        // Transfert des donnees en l'etat par port serie. Might result in side effects
        Serial.print(readData);
```



```
#endif
    }
    if (readData.length() > 0) {
        // Transfert des donnees par port serie
        Serial.print(readData);
        // reinitialisation
        readData = "";
    }
}
```

5. Échantillonnage

a. arduino_Echantillonnage_lyon.ino

```
/*
  Echantillonnage d'une tension d'entrée
    --> mise en évidence de la limitation du au CAN 10 bits
    --> mise en évidence de la limitation temporelle du MCU
  Le switch entre les 2 s'effectue en modifiant la ligne "if (1)" en "if (0)"

  Auteur: C. Winisdoerffer (15/02/2022)
*/

// Define basic variables
const int PinMes = A0;                  // pin sur laquelle on applique la tension
const int nmax = 100;                   // taille du tableau de données
int measure[nmax];                      // tableau des données
int i;                                  // variable des boucles

// The setup routine runs once when you press reset:
void setup() {
  // initialisation du tableau des valeurs (ça ne coûte presque rien de le faire...)
  for (i = 0; i < nmax; i += 1) {
    measure[i] = 0;
  }
  Serial.begin(9600); // init. de la communication port-serie (@ 9600 bauds)
  Serial.flush();     // purge
  Serial.println("Debut de l'acquisition"); // msg d'init.
}

// The loop routine runs over and over again forever:
void loop() {
  if (1) {  // switch 0/1 = False/True
    //
    // Mise en évidence du pas de discrétisation dû au CAN 10 bits
    //
    // recuperation de la mesure
    measure[0] = analogRead(A0);
    // transfert des données via le port serie
    Serial.println(measure[0]);
    // delay in between reads for stability
    delay(200);
  } else {
    //
    // Mise en évidence de la limitation temporelle du MCU
    //
    for (i = 0; i < nmax; i += 1) {
      measure[i] = analogRead(A0);
    }
    // transfert des données via le port serie
    for (i = 0; i < nmax; i += 1) {
      Serial.println(measure[i]);
    }
    // delay in between reads for stability
    delay(200);
  }
}
```

Amplificateur linéaire intégré et transistor bipolaire

Table des expériences

I.	Généralités sur l'amplificateur linéaire intégré	65
II.	Utilisation de l'amplificateur linéaire intégré en boucle ouverte (*)	67
III.	Utilisation de l'amplificateur linéaire intégré en boucle fermée stable	70
IV.	Utilisation de l'amplificateur linéaire intégré en boucle fermée instable	75
V.	Quelques rappels théoriques sur le transistor bipolaire	76
VI.	Tracé des caractéristiques du transistor bipolaire [MP 43]	77
VII.	Utilisation du transistor bipolaire en régime de commutation (*)	80

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Généralités sur l'amplificateur linéaire intégré

Avant de commencer les manipulations, il est utile de rappeler quelques généralités sur l'amplificateur linéaire intégré[1] (ALI) :

1. Le composant

C'est un circuit intégré, comportant normalement huit broches. Étant par nature un amplificateur différentiel, les trois broches utiles sont les deux entrées V_+ et V_- (nommées respectivement entrées non-inverseuse et inverseuse) ainsi que la sortie V_s. L'énergie nécessaire à l'amplification est fournie grâce aux deux broches d'alimentation E_+ et E_-, qui ne figurent jamais sur les schémas mais qu'il ne faut évidemment pas oublier en pratique. Enfin, deux autres broches servent au réglage de la tension de décalage (*offset*) : il faut pour cela intercaler un potentiomètre entre celles-ci et ajouter la valeur de la résistance. La dernière broche ne sert à rien. La répartition de ces huit broches est donnée dans la notice du composant.

2. Modèle de l'ALI idéal

L'objectif des manipulations qui suivent est de mettre en évidence les limites du comportement de l'ALI. On commence donc par rappeler les caractéristiques de son fonctionnement *idéal* :

- courants d'entrée (de polarisation) nuls (équivalent à impédances d'entrée infinies),
- impédance de sortie nulle,
- gain statique infini,
- bande passante infinie,
- tension de décalage (*offset*) nulle,
- taux de rejection en mode commun infini : l'ALI se comporte comme un amplificateur différentiel entre ses deux entrées non-inverseuse et inverseuse,
- pas d'effet de *slew-rate* : il n'y pas de limite à la pente du signal (en V/s) que peut fournir l'ALI en sortie.

En d'autres termes, la caractéristique statique d'un ALI *idéal* est analogue à celle donnée Fig. 1 (courbe rouge), où $\varepsilon = V_+ - V_-$.

En pratique, les courants de polarisation sont effectivement très faibles (de l'ordre de 10pA) et seront donc considérés nuls. Au contraire, les autres critères seront mis en défaut dans les expériences qui suivent.

1. Celui-ci étant majoritairement appelé amplificateur opérationnel (AO).

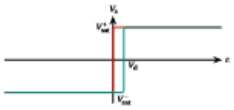


Figure 1 – Caractéristique statique de l'ALI idéal (rouge) et d'un ALI présentant une tension de décalage (*offset*) $V_0 \neq 0$ (bleue).

3. Tester le bon fonctionnement d'un ALI

Pour commencer, il n'y a pas de test miracle pour vérifier qu'un ALI fonctionne correctement, mais on peut déjà vérifier qu'il sature à environ ±15 V. On pourrait également effectuer un montage suiveur (voir plus loin).

Liste du matériel :

- un amplificateur linéaire intégré en boîtier P41.4,
- un oscilloscope,
- un multimètre,
- un générateur basses fréquences.

Pour tous vos montages, il est conseillé de prendre un ALI en boîtier ζ, car ils s'alimentent facilement par une prise secteur. Ce sont des TL081. Un récapitulatif de leurs valeurs typiques est proposé dans la Réf. [5] (p. 90).

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 2. On imposera une tension continue $V_+ = 1$ V et $V_- = 0$ V (par exemple en reliant l'entrée inverseuse à la masse) en entrée, et on mesurera V_s en sortie (à l'aide d'un oscilloscope ou d'un multimètre). On attend $V_s \simeq 15$ V. De même, on attend $V_s \simeq -15$ V si $V_+ = -1$ V.

Si l'ALI est grillé, on n'obtient pas les tensions voulues.

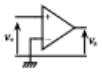


Figure 2 – Test de saturation de l'ALI.

4. Régler la tension de décalage

La tension de décalage (*offset*) est un défaut interne à l'ALI, illustré Fig. 1 sur sa caractéristique statique (en bleue). Pour pouvoir la compenser, il faut relier deux broches de l'ALI par un potentiomètre dont on ajuste la résistance.

Liste du matériel :

- un amplificateur linéaire intégré en boîtier P41.4,
- un sèche-cheveux P101.10,
- un oscilloscope.

Le potentiomètre est déjà intégré sur les boîtiers P41.4, ce qui rend ce réglage très facile. Son ajustement se fait par le bouton de réglage en haut à gauche.

> On propose de câbler le montage suivant de la Fig. 3. On observera la tension V_s en sortie de l'ALI à l'oscilloscope en mode *AC*. Tourner le potentiomètre jusqu'à obtenir une tension nulle en sortie (on a $V_s = \pm 15$ V si la tension

de décalage est mal réglée). On remarquera la faible plage pour passer de la saturation positive à la saturation négative de l'ALI : annuler l'offset est un travail minutieux.

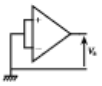


FIGURE 3 – Montage rapide pour régler (annuler) la tension de décalage de l'ALI.

Au-delà de l'aspect minutieux (mais parfois nécessaire[2]) de ce travail, on pourra remarquer que le réglage de la tension de décalage de l'ALI est extrêmement sensible.

Par exemple, on pourra souffler (éventuellement avec un sèche-cheveux) sur l'ALI : il devrait saturer directement de nouveau.

L'annulation de l'offset n'est donc pas définitive : il faut souvent la refaire.

II. UTILISATION DE L'AMPLIFICATEUR LINÉAIRE INTÉGRÉ EN BOUCLE OUVERTE (*)

Toute cette partie concerne l'ALI en boucle ouverte hors saturation, ce qui n'est quasiment jamais réalisé en pratique. L'énorme gain statique (infini dans le modèle de l'ALI idéal) conduit en effet très rapidement à la saturation de la tension de sortie. Par conséquent les manipulations suivantes sont difficiles, car il faudra probablement régler la tension de décalage très souvent. Il est néanmoins utile de les avoir en tête car elles permettent de comprendre certains problèmes qui peuvent apparaître même lorsqu'il y a une rétroaction.

1. Tracé de la caractéristique statique de l'ALI

Il s'agit de tracer V_s en fonction de $\varepsilon = V_+ - V_-$ en régime statique. Le comportement attendu dans le régime linéaire est :

$$V_s = \mu\,(V_+ - V_- - V_d) \tag{1}$$

avec μ le gain statique de l'ordre de 10^5 et V_d la tension de décalage déjà introduite précédemment. Hors du régime linéaire, l'ALI est saturé. Cela conduit à la caractéristique donnée en Fig. 4, qui généralise celle de la Fig. 1 dans le cas où le gain statique est fini (mais grand). On considérera dans toute la suite que $V_{sat}^+ = V_{sat}$ et $V_{sat}^- = -V_{sat}$.

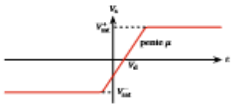


FIGURE 4 – Caractéristique statique de l'ALI non idéal.

Liste du matériel :

- un amplificateur linéaire intégré en boîtier P41.4,
- deux résistances $R_1 = 1\,\mathrm{M\Omega}$ et $R_2 = 620\,\Omega$,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

On peut également utiliser un ALI TL081 seul, alimenté par deux batteries P54.21 pour tracer la caractéristique, car la tension d'alimentation des ALI dans les boîtiers est bruitée. Ceci n'est pas gênant pour la plupart des manipulations, mais peut s'avérer primordial ici.

2. Peu de montages en boucle fermée sont sensibles à la présence d'un offset non nul. L'exception notable est le montage intégrateur.

On propose de réaliser le montage de la figure 5 avec R_1 de l'ordre du MΩ et R_2 de l'ordre de quelques centaines de ohms. On alimente ensuite le circuit avec une tension u_1 sinusoïdale de très basse fréquence (de l'ordre de 0,1 Hz par exemple) et d'amplitude de l'ordre de 1 V. En mesurant u_2 et u_1 à l'oscilloscope et en se plaçant en mode XY, on peut tracer l'allure de la caractéristique donnée Fig. 4.

La pente α de la caractéristique obtenue permet de remonter au gain μ de l'ALI par la relation $\alpha = \mu R_2/(R_1 + R_2)$. On peut également obtenir les valeurs de tensions de saturation positive et négative. On peut enfin observer la tension de décalage si l'offset n'est pas convenablement réglé (la caractéristique ne passe alors pas par l'origine).

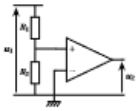


FIGURE 5 – Schéma pour le tracé de la caractéristique statique de l'ALI.

Le pont diviseur de tension permet d'alimenter l'ALI à l'aide d'une faible tension à l'entrée non-inverseuse. En effet, l'ALI saturera vers $\pm 15\,\mathrm{V}$ et en supposant $V_d = 0\,\mathrm{V}$, le régime linéaire est délimité par $|\varepsilon| = |V_+ - V_-| < V_{sat}/\mu = 15\,\mu\mathrm{V}$. Le pont diviseur permet d'assurer des valeurs aussi faibles pour ε vu le choix fait des valeurs de résistances.

Le choix de la fréquence de balayage est également important. En effet, il faut choisir cette fréquence très faible devant la fréquence de coupure de l'ALI (de l'ordre de 10 Hz, voir plus loin). Cela permet également de ne pas être limité par le slew-rate de l'ALI.

2. Mesure des impédances d'entrée et de sortie

Outre le gain statique μ, les impédances d'entrée Z_e et de sortie Z_s sont des propriétés importantes des ALIs. La Fig. 6 représente une situation générique où figure un étage d'amplification. Les signaux d'entrée et de sortie sont e et u_s, mais l'amplification concerne u_e et v (on a $v = \mu u_e$, avec μ le gain en tension, par exemple celui de l'ALI). Par un pont diviseur de tension, on obtient :

$$u_e = \frac{Z_e}{Z_g + Z_e}\,e, \tag{2}$$

où Z_g désigne l'impédance interne en amont de l'amplificateur (par exemple, ici, l'impédance interne du GBF). Si on ne veut pas de chute de tension à l'entrée de l'amplificateur, c'est-à-dire $u_e = e$, alors il faut que $Z_e \gg Z_g$. En sortie, on a de la même manière

$$u_s = \frac{Z_{ch}}{Z_s + Z_{ch}}\,v, \tag{3}$$

où Z_{ch} désigne l'impédance de la charge en aval de l'étage d'amplification. Il faut donc cette fois que $Z_s \ll Z_{ch}$ pour ne pas avoir de chute de tension en sortie de l'amplificateur (et alor $u_s = v$). On retiendra donc qu'en pratique, un « bon amplificateur » est tel que son impédance d'entrée Z_e est très grande (devant celle du montage en amont) et son impédance de sortie Z_s très petite (devant celle du montage en aval).

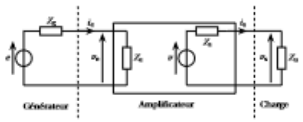


FIGURE 6 – Schéma pour les impédances d'entrée et de sortie d'un amplificateur.

De manière générale, les impédances d'entrée et de sortie d'un quadripôle se mesurent par la méthode de la « tension moitié ». Cela se fait en deux temps : on mesure la tension directement aux bornes de la sortie (à vide), puis on rajoute un rhéostat de résistance variable et on ajuste cette résistance pour obtenir la moitié de la tension précédente. Un calcul par pont diviseur de tension montre que la résistance de sortie et la résistance rajoutée sont alors égales (voir TP1).

L'impédance d'entrée d'un amplificateur linéaire intégré est uniquement résistive, et $Z_e = 10^{11}\,\Omega$, ce qui est bien supérieure à l'impédance de tout rhéostat usuellement trouvé dans un laboratoire d'enseignement. Il est par conséquent impossible de mesurer l'impédance d'entrée de l'ALI par cette méthode. Par ailleurs, cette impédance est aussi bien supérieure à celles des multimètres et oscilloscopes (de l'ordre de $10^6\,\Omega$). Par une méthode de tension moitié, on mesurerait par conséquent plutôt l'impédance de l'appareil de mesure.

L'impédance de sortie, elle-aussi quasi uniquement résistive, peut se mesurer par la méthode de la tension moitié et s'obtient quasi à elle en réalisant à nouveau le montage de la Fig. 5.

Liste du matériel :
- un amplificateur linéaire intégré en boîtier P41 . 4,
- deux résistances $R_1 = 1\,\mathrm{M}\Omega$ et $R_2 = 620\,\Omega$,
- un rhéostat de résistance variable P56 . 32,
- un générateur basses fréquences,
- un multimètre.

> On propose de reprendre le montage de la Fig. 5 en l'alimentant cette fois-ci par une tension u_1 continue de l'ordre du volt, mais suffisamment faible pour être dans le régime linéaire (pas de saturation en sortie). On mesurera alors la valeur de la tension u_2 en sortie à l'aide d'un multimètre. On branchera ensuite en sortie de l'ALI un rhéostat de résistance variable, et on fera varier sa résistance de sorte à mesurer une valeur de u_2 moitié de celle mesurée au début de l'expérience. La valeur de résistance correspondante est alors l'impédance de sortie Z_s de l'ALI.

L'ordre de grandeur attendu est de quelques centaines de ohms. Pour les modèles de la collection en boîtier, on trouve $Z_s \simeq 300\,\Omega$.

$Z_s = 252 \pm 10\,\Omega$.

3. Comportement dynamique de l'ALI

Pour illustrer le comportement dynamique de l'ALI, on propose de réaliser l'expérience suivante, qui consiste à mesurer son diagramme de Bode.

Liste du matériel :
- un amplificateur linéaire intégré en boîtier P41 . 4,
- deux résistances $R_1 = 1\,\mathrm{M}\Omega$ et $R_2 = 620\,\Omega$,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

> On propose de toujours réaliser le montage de la Fig. 5 avec u_1 d'amplitude de l'ordre du volt (mais en s'assurant de rester dans le régime linéaire) et sinusoïdal de fréquence f (comprises entre 0,1 Hz et 1 kHz). Pour différentes valeurs de fréquences, on pourra mesurer l'amplitude de u_2, ainsi que le déphasage entre u_1 et u_2, ce qui permet de remonter aux diagrammes de Bode en gain et en phase de l'ALI.

Le comportement linéaire de l'ALI en régime dynamique est très bien modélisé par un filtre passe-bas d'ordre 1 jusqu'aux plus hautes fréquences utilisées en pratique (MHz). En fréquentiel, on peut écrire: $V_s(j\omega) = \underline{\mu}(j\omega)\,\varepsilon(j\omega)$ avec:

$$\underline{\mu}(j\omega) = \frac{\mu}{1 + j\omega/\omega_c}, \tag{4}$$

ce qui correspond du point de vue temporel à l'équation différentielle suivante :

$$\tau\frac{dV_s}{dt} + V_s = \mu\,\varepsilon, \tag{5}$$

où $\varepsilon = V_+ - V_-$ et $\tau = 1/\omega_c$. On a toujours $\mu = 10^5$ et la fréquence de coupure $f_c = \omega_c/(2\pi) = 10\,\mathrm{Hz}$.

À partir des équations précédentes, on peut en déduire l'expression du gain et de la phase en fonction de la fréquence, et remonter aux propriétés μ et τ par un ajustement non linéaire des données (voir le TP1).

III. Utilisation de l'amplificateur linéaire intégré en boucle fermée stable

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1, 3, 5] pour l'obtention des lois théoriques.

Dans la série d'expériences que nous proposons, il s'agit de voir ou revoir les montages courants utilisant un ALI en boucle fermée stable, et illustrer sur chacun de ceux-ci une des limitations du composant. Évidemment, les limitations exhibées pour un montage donné ne sont pas spécifiques au montage sur lequel elles sont présentées.

Pour rappel, le bouclage de V_s sur V_- conduit d'après l'équation différentielle (5) ci-dessus à une solution exponentiellement décroissante pour V_s. C'est donc une situation stable pour l'ALI. En pratique, les expériences seront donc plus aisées que celles en boucle ouverte.

1. Montage suiveur et limitation en courant

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [3] (p. 85) ou à la Réf. [5] (p. 105) pour de plus amples détails. Le montage suiveur (voir la Fig. 7) est utilisé généralement pour découpler deux parties d'un circuit, grâce au courant i_+ nul de l'AO.

Liste du matériel :
- un amplificateur linéaire intégré en boîtier P41 . 4,
- un rhéostat de résistance variable P56 . 32,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

> On propose de réaliser le montage suiveur de la Fig. 7. Pour cela, on alimente le circuit avec u_1 sinusoïdale de fréquence de l'ordre de 1 kHz et d'amplitude de l'ordre de 10 V, et on branche la sortie de l'ALI sur un rhéostat de résistance variable. On commencera par une haute valeur de résistance (par exemple 10 kΩ), puis on diminuera la valeur de la résistance. On observera les deux signaux à l'oscilloscope et on s'intéressera à l'évolution du signal u_s. On peut alors en déduire la gamme d'intensités $i_s \in [i_{sat}^-, i_{sat}^+]$ que peut délivrer l'ALI en sortie.

Pour les hautes valeurs de résistance, on doit observer que $u_s = u_e$. Par contre, pour des valeurs de R plus faibles, on doit observer la tension u_s écrêtée. Cela vient du fait qu'on a atteint l'intensité maximale délivrable par l'ALI en sortie. On peut alors mesurer alors i_{sat}^+ et i_{sat}^- comme les tensions saturées positive et négative divisées par la résistance R. On attend $i_{sat}^+ = -i_{sat}^- \simeq 20\,\mathrm{mA}$.

Attention que la saturation observée ici n'est pas due à la saturation de la tension de sortie en dehors du régime linéaire! En effet, du fait de la rétroaction sur l'entrée inverseuse, on a pour toute valeur de résistance R, $u_s = u_e < V_{sat}$. Elle est donc bien due au fait que l'ALI ne peut pas délivrer un courant d'intensité trop importante.

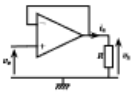


FIGURE 7 – Montage suiveur, avec une résistance en sortie.

$U_s : u_s \to i_s = \frac{u_s}{R}$

$\to$ Si beaucoup R : $R = 200\,\Omega$; $u_s = 10\,V$ $\Big)$ $i_s = \frac{10}{200} = \frac{1}{20}\,A$

2. Montage amplificateur inverseur et *slew-rate*

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [3] (p. 86) ou à la Réf. [5] (pp. 104-106) pour de plus amples détails.

Sur le montage amplificateur inverseur (voir Fig. 8), on a, dans l'hypothèse d'un ALI en fonctionnement idéal, $V_- = V_+ = 0\,V$ et $i_- = 0\,A$. Ainsi, un pont diviseur de tension donne

$$u_s = -\frac{R_2}{R_1}u_e, \tag{6}$$

d'où le nom d'amplificateur « inverseur ».

Liste du matériel :

- un amplificateur linéaire intégré en boîtier P41 . 4,
- deux résistances $R_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega$ et $R_2 = 10\,\mathrm{k}\Omega$,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 8. Pour cela, on pourra prendre R_1 de l'ordre du kΩ et R_2 de l'ordre de la dizaine de kΩ, et u_e d'amplitude $V_e = 1\,V$ et de fréquence f qu'on pourra faire varier entre 10 kHz et 1 MHz. On pourra observer à l'oscilloscope les signaux u_1 et u_2 lorsqu'on fait varier la fréquence f. On pourra également, à fréquence fixée de l'ordre de 200 kHz, diminuer l'amplitude du signal d'entrée et observer de nouveau l'allure du signal en sortie de l'ALI.

À basses fréquences, on doit observer que le signal de sortie u_s est sinusoïdal et vérifie $u_s = -10\,u_e$. Par contre, à hautes fréquences (en ordre de grandeur, pour des fréquences $f \gtrsim 100\,\mathrm{kHz}$), on doit voir une triangularisation du signal de sortie, et la pente de ce triangle ne varie pas quand la fréquence est augmentée davantage : c'est une caractéristique interne à l'ALI. La mesure de cette pente constitue le *slew-rate* ou vitesse de balayage de l'ALI. On attend une pente de l'ordre de 13 V/µs. En diminuant l'amplitude du signal d'entrée à fréquence fixée, on doit voir disparaître la triangularisation du signal.

Pour être plus précis, le phénomène se produit quand la pente maximale du signal en sortie, égale à $2\pi f V_e R_2/R_1$ dépasse la vitesse de balayage maximale autorisée par l'ALI. Avec la valeur donnée précédemment de la vitesse de balayage, on obtient une fréquence $f \gtrsim 2 \times 10^6\,\mathrm{Hz}$ au-delà de laquelle la limite en *slew-rate* de l'ALI peut être observée.

L'origine du *slew-rate* est complexe. Il provient en partie des condensateurs présents dans le circuit intégré de l'ALI, mais c'est un effet clairement non linéaire puisque la sortie correspondant à une entrée sinusoïdale n'est pas elle-même sinusoïdale.

Même si on peut penser que le *slew-rate* induit une fréquence maximale d'utilisation de l'ALI, ce n'est pas exact. En effet, il s'agit davantage d'un compromis amplitude/fréquence, ou encore une limitation en fréquences dans le régime des signaux de forte amplitude. En particulier, à fréquence fixée f, la triangularisation devrait disparaître si on diminue l'amplitude de u_e (et par conséquent de u_s). C'est l'objectif de la dernière manipulation proposée ci-dessus.

utf-8''TP_04 (glissé(e...

- un amplificateur linéaire intégré en boîtier P41 . 4,
- deux résistances $R_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega$ et $R_2 = 2\,\mathrm{k}\Omega$,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 8. On prendra $R_1 = 1\,\mathrm{k}\Omega$, $R_2 = 2\,\mathrm{k}\Omega$, et u_e telle que u_s soit juste inférieure à la tension de saturation. On fera varier la fréquence f entre 10 kHz et 1 MHz. On observera à l'oscilloscope les signaux u_1 et u_2 lorsqu'on fait varier la fréquence f. On pourra également, à fréquence fixée de l'ordre de 200 kHz, diminuer l'amplitude du signal d'entrée et observer de nouveau l'allure du signal en sortie de l'ALI.

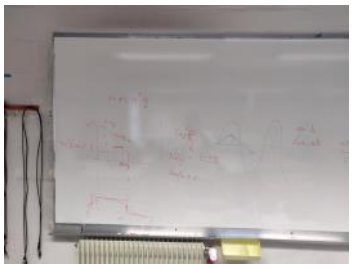
À basses fréquences, on doit observer que le signal de sortie u_s est sinusoïdal et vérifie $u_s = -2\,u_e$. Par contre, à hautes fréquences (en ordre de grandeur, pour des fréquences $f \gtrsim 100\,\mathrm{kHz}$), on doit voir une triangularisation du signal de sortie, et la pente de ce triangle ne varie pas quand la fréquence est augmentée davantage : c'est une caractéristique interne à l'ALI. La valeur de cette pente constitue le *slew-rate* ou vitesse de balayage de l'ALI. On attend une pente de l'ordre de 13 V/µs. En diminuant l'amplitude du signal d'entrée à fréquence fixée, on doit voir disparaître la triangularisation du signal.

Pour être plus précis, ce phénomène se produit quand la pente maximale du signal en sortie, égale à $2\pi f V_e$, dépasse la vitesse de balayage maximale autorisée par l'ALI. Avec une vitesse de balayage maximale de 13 V/µs et une tension de sortie de 15 V, on obtient une fréquence $f \gtrsim 1{,}5 \times 10^6\,\mathrm{Hz}$ au-delà de laquelle la limite en *slew-rate* peut être observée.

Il est essentiel pour cette observation d'être en deçà de la fréquence de coupure linéaire de l'ALI, qui est définie par le produit gain × BP de ce dernier, égal à environ 10^6 Hz (cf section II.3). Sinon, la coupure linéaire limitera l'amplitude lorsqu'on augmentera la fréquence, rendant impossible d'atteindre la limite du *slew-rate*. C'est pourquoi nous avons choisi un gain très faible ($R_2/R_1 = 2$), ce qui place la fréquence de coupure linéaire à environ 500 kHz (produit gain × BP=1 MHz), donc bien au-delà de la fréquence d'apparition du *slew-rate*, calculée à $f \gtrsim 1{,}5 \times 10^6\,\mathrm{Hz}$.

L'origine du *slew-rate* est complexe. Il provient en partie des condensateurs présents dans le circuit intégré de l'ALI, mais c'est un effet clairement non linéaire puisque la sortie, pour une entrée sinusoïdale, n'est pas elle-même sinusoïdale.

Même si on peut penser que le *slew-rate* induit une fréquence maximale d'utilisation de l'ALI, ce n'est pas exact. En effet, il s'agit davantage d'un compromis amplitude/fréquence, ou encore une limitation en fréquences dans le régime des signaux de forte amplitude. En particulier, à fréquence fixée f, la triangularisation devrait disparaître si on diminue l'amplitude de



Pour voir le slew-rate, on doit ne pas être limité par la bande passante (d'où le gain 2), faire gaffe, l'amplitude est affecté mais effet conjugué avec le fait que le gain diminue passé la freq de coupure

Le déphasage est du au fait qu'on s'approche de la fréqu de coupure

c'est un effet clairement non linéaire puisque la sortie correspondant à une entrée sinusoïdale n'est pas elle-même sinusoïdale.

Même si on peut penser que le *slew-rate* induit une fréquence maximale d'utilisation de l'ALI, ce n'est pas exact. En effet, il s'agit davantage d'un compromis amplitude/fréquence, ou encore une limitation en fréquences dans le régime des signaux de forte amplitude. En particulier, à fréquence finie f, la triangularisation devrait disparaître si on diminue l'amplitude de v_e (et par conséquent de v_s). C'est l'objectif de la dernière manipulation proposée ci-dessus.

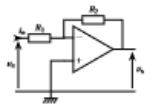


FIGURE 8 – Mesure du slew-rate sur un circuit amplificateur inverseur.

3. Montage amplificateur non-inverseur et intégration non souhaitée

Nous proposons de réaliser le montage de la Fig. 9. Pour de plus amples détails, nous renvoyons à la Réf. [3] (pp. 88-89).

Liste du matériel :

- un amplificateur linéaire intégré en boîtier P4.1 . 4,
- deux résistances $R_1 = 1\text{k}\Omega$ et $R_2 = 10\text{k}\Omega$,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 9. On pourra prendre R_1 de l'ordre du kHz et R_2 de l'ordre de la dizaine de kHz. On alimentera le circuit avec v_e sinusoïdale d'amplitude de l'ordre de d'une dizaine de volts et de fréquence f. On pourra observer les signaux v_e et v_s à l'oscilloscope et faire varier la fréquence f sur une gamme comprise entre 10Hz et 100kHz. On pourra également alimenter le circuit avec un signal créneau de

donc bien au-delà de la fréquence d'apparition du *slew-rate*, calculée à $f \gtrsim 1{,}5 \times 10^6$ Hz.

L'origine du *slew-rate* est complexe. Il provient en partie des condensateurs présents dans le circuit intégré de l'ALI, mais c'est un effet clairement non linéaire puisque la sortie, pour une entrée sinusoïdale, n'est pas elle-même sinusoïdale.

Même si on peut penser que le *slew-rate* induit une fréquence maximale d'utilisation de l'ALI, ce n'est pas exact. En effet, il s'agit davantage d'un compromis amplitude/fréquence, ou encore une limitation en fréquences dans le régime des signaux de forte amplitude. En particulier, à fréquence finie f, la triangularisation devrait disparaître si on diminue l'amplitude de v_e (et par conséquent de v_s). C'est l'objectif de la dernière manipulation proposée ci-dessus.

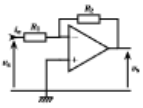


FIGURE 8 – Mesure du slew-rate sur un circuit amplificateur inverseur.

3. Montage amplificateur non-inverseur et intégration non souhaitée

Nous proposons de réaliser le montage de la Fig. 9. Pour de plus amples détails, nous renvoyons à la Réf. [3] (pp. 88-89).

Liste du matériel :

- un amplificateur linéaire intégré en boîtier P4.1 . 4,
- deux résistances $R_1 = 1\text{k}\Omega$ et $R_2 = 10\text{k}\Omega$,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 9. On pourra prendre R_1 de l'ordre du kHz et R_2 de l'ordre de la dizaine de kHz. On alimentera le circuit avec v_e sinusoïdale d'amplitude de l'ordre de d'une dizaine de volts et de fréquence f. On pourra observer les signaux v_e et v_s à l'oscilloscope et faire varier la fréquence f sur une gamme comprise entre 10Hz et 100kHz. On pourra également alimenter le circuit avec un signal créneau de

71

gain diminue passe la freq de coupure

Le déphasage est du au fait qu'on s'approche de la fréqu de coupure

> haute fréquence (de l'ordre de 100kHz) et observer le signal récupéré en sortie.

La rétroaction est sur l'entrée inverseuse donc, dans l'hypothèse d'un ALI en fonctionnement idéal, on aura $V_+ = V_- = v_e$. Un pont diviseur de tension (possible car $i_- = 0$A dans l'hypothèse d'un ALI en fonctionnement idéal) donne

$$v_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) v_e. \tag{7}$$

C'est donc un circuit amplificateur non-inverseur. Cependant, si on tient compte de l'écart à l'idéalité, et notamment de la bande-passante finie de l'ALI, on peut visualiser ce montage comme un circuit bouclé, dans lequel l'ALI joue le rôle de filtre passe-bas d'ordre 1 en chaîne directe de fonction de transfert donnée par l'Éq. (4), et le pont diviseur celui de filtre d'ordre 0 de la chaîne de retour, voir Fig. 9. La fonction de transfert en boucle fermée est alors encore un filtre passe-bas d'ordre 1, et le circuit se comporte comme un montage intégrateur du premier ordre à hautes fréquences (au-delà de sa fréquence de coupure). Ainsi, dans le cas des signaux sinusoïdaux, on doit observer que les signaux v_e et v_s sont en phase à basse fréquence, mais déphasés à haute fréquence de $\pi/2$ (comportement passe-bas attendu). De la même manière, dans le cas du signal créneau en entrée, on doit observer que v_s est un signal triangulaire.

Pour être plus quantitatif sur le comportement fréquentiel du circuit, on peut calculer la fonction de transfert en boucle fermée de ce système, qui s'écrit

$$H(j\omega) = \frac{v_s(j\omega)}{v_e(j\omega)} = \frac{\beta(j\omega)}{1 + \beta(j\omega)B(j\omega)} = \frac{\mu}{1 + \mu B} + j\frac{\omega}{\omega_c} = \frac{\mu}{1 + \mu B} \times \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c(1 + \mu B)}} = \frac{\mu'}{1 + j\frac{\omega}{\omega'_c}}. \tag{8}$$

Le produit gain-bande passante vaut alors

$$\mu'\omega'_c = \frac{\mu}{1 + \mu B} \times \omega_c(1 + \mu B) = \mu\omega_c = 10^6 \text{ rad s}^{-1}, \tag{9}$$

autrement dit, le produit gain-bande passante est inchangé lors du bouclage de l'ALI avec une fonction de transfert d'ordre 0. Pour un retour de faible gain, par exemple $B = R_1/(R_1 + R_2) = 10^{-4}$ comme dans l'expérience ci-dessus, la pulsation de coupure devient $\omega'_c \simeq 10^6\omega_c = 10^8$ rad s^{-1}, et par conséquent l'amplificateur non-inverseur se comportera comme un intégrateur pour des signaux de fréquence supérieure à la vingtaine de kHz.

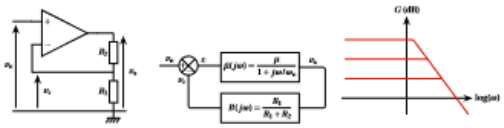


FIGURE 9 – À gauche, schéma d'un montage amplificateur non-inverseur. Au centre, modélisation du montage amplificateur non-inverseur en un système bouclé. À droite, illustration graphique de la conservation du produit gain-bande passante sur le diagramme de Bode asymptotique du montage amplificateur non-inverseur : plus le gain statique est faible, plus la fréquence de coupure est grande.

4. Montage intégrateur et problème d'offset

Pour de plus amples détails, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [5] (pp. 106-109) ou à la Réf. [3] (pp. 90-91).

Liste du matériel :

- un amplificateur linéaire intégré en boîtier P4.1 . 4,
- deux résistances $R_1 = 10\text{k}\Omega$ et $R_2 = 100\text{k}\Omega$,
- un condensateur de capacité $C = 10\text{nF}$,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

L'objectif de cette expérience est de mettre en évidence la dérive de la tension en sortie d'un montage intégrateur du fait de la présence d'une tension de décalage non nulle. On considère tout d'abord le montage de gauche de la Fig. 10. Dans l'hypothèse d'un ALI de gain infini et en fonctionnement linéaire (assuré par la rétroaction stabilisante sur l'entrée inverseuse), on a

$$V_+ = V_- = V_d = 0 \Longrightarrow V_- = -V_d. \tag{10}$$

Par ailleurs, la loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse donne

$$\frac{v_e + V_d}{R_1} = I_- - C\frac{dv_s}{dt} \Longrightarrow v_s(t) - v_s(0) = \frac{1}{C}\left(I_- - \frac{V_d}{R_1}\right)t - \frac{1}{R_1C}\int_0^t dt' v_e(t'), \tag{11}$$

où I_- désigne le courant de polarisation dans l'entrée inverseuse de l'ALI. Il s'agit bien d'un circuit intégrateur. On constate alors qu'en plus du signal d'entrée, la tension de décalage V_d, ainsi que le courant de polarisation I_-, sont aussi intégrés par ce montage. Cela conduit à une dérive linéaire en temps dans v_s qui finira par atteindre sa valeur de saturation.

Pour empêcher cela, on peut utiliser le montage pseudo-intégrateur de la Fig. 10 (montage de droite). En procédant de façon analogue à précédemment, on obtient par la loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse

$$\frac{v_e + V_d}{R_1} = I_- - C\frac{dv_s}{dt} - \frac{V_d + v_s}{R_2} \Longrightarrow \frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{R_2C} = -\frac{v_e}{R_1C} + \frac{I_-}{C} - \frac{V_d}{C}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \tag{12}$$

dont la solution exacte est

$$v_s(t) - v_s(0) = \left[V_d\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + v_s(0) - R_2I_-\right]\left(1 - e^{-t/(R_2C)}\right) - \frac{1}{R_1C}\int_0^t dt' v_e(t')e^{-(t-t')/(R_2C)}. \tag{13}$$

On peut alors constater que $v_s(t)$ ne subit plus une dérive temporelle linéaire, car l'influence de la tension de décalage ou des courants de polarisation décroît exponentiellement au cours du temps. Par ailleurs, le montage a toujours un rôle d'intégrateur, mais dans une gamme réduite de fréquences. Pour le voir, il suffit de se placer en régime sinusoïdal forcé. Alors, la fonction de transfert du circuit, en négligeant maintenant la tension de décalage et les courants de polarisation, s'écrit

$$\frac{v_s(j\omega)}{v_e(j\omega)} = -\frac{R_2/R_1}{1 + j\omega R_2C}. \tag{14}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas d'ordre 1, qui n'intègre que les fréquences typiquement supérieures à $1/(R_2C)$. Un choix judicieux de R_2 permet donc de ne pas intégrer la tension de décalage (de fréquence nulle), tout en intégrant le signal d'intérêt de fréquence caractéristique f : il faut pour cela $R_2 \gtrsim 1/(Cf)$.

> On propose de câbler le montage de droite de la Fig. 10. On pourra prendre R_1 de l'ordre de la dizaine de kΩ, $C = 10\text{nF}$, et R_2 de l'ordre de la centaine de kΩ. On alimentera le circuit avec un signal sinusoïdal de fréquence de l'ordre de 5kHz et d'amplitude de l'ordre du volt. On pourra alors constater que le filtre joue bien le rôle d'intégrateur (regarder le déphasage entre v_e et v_s). On pourra ensuite retirer la résistance R_2 pour observer la dérive du signal de sortie. On pourrait aller plus loin, et mesurer le diagramme de Bode de ce filtre en présence de la résistance R_2 (voir le TP1).

Le choix de la fréquence de 5kHz permet bien de se placer dans le régime de fréquences où le circuit se comporte comme un intégrateur. En effet, la fréquence de coupure du filtre passe-bas vaut $1/(2\pi R_2C) = 160\text{Hz}$.

Il peut être nécessaire de toucher le bouton de réglage de l'offset pour le désrégler, puisque le phénomène de dérive est d'autant plus marqué que ce dernier est grand.

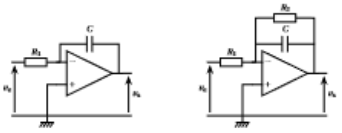


FIGURE 10 – Montage intégrateur (gauche) et pseudo-intégrateur (droite).

utf-8"TP_04 (glisse(e...

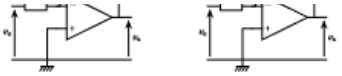


FIGURE 10 – Montage intégrateur (gauche) et pseudo-intégrateur (droite).

5. Diode sans seuil

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [5] (pp. 113-115).

L'association « diode-résistance » est très utilisée pour redresser un signal, c'est-à-dire couper toutes ses valeurs négatives. Elle souffre néanmoins du fait que les tensions inférieures à 0,6V sont aussi coupées, à cause de la tension de seuil de la diode. On peut utiliser le montage de la Fig. 11 pour s'affranchir de ce problème. On dit alors qu'on a réalisé une « diode sans seuil ». Un calcul expliquant ce montage est proposé dans la référence mentionnée ci-dessus, mais on peut également raisonner par l'absurde.

- On suppose d'abord que v_e est négative, dans ce cas on veut v_s nulle pour redresser. On suppose alors que la diode est passante, dans ce cas $i_{diode} = v_s/R$ (car $I_- = 0$) mais la boucle de rétroaction est fermée donc $v_s = v_e < 0$ (en négligeant la tension de décalage de l'ALI), et donc $i_{diode} < 0$. Cela est absurde car la diode est passante. On en conclut donc que la diode est bloquée donc: $i_{diode} = 0$ et $v_s = 0$ dès lors que $v_e < 0$.
- On suppose maintenant que v_e est positive, dans ce cas on veut $v_s = v_e$. On suppose alors que la diode est bloquée, alors il n'y a pas de courant qui traverse la résistance, et donc $v_s = V_- = 0$. Il n'y a pas de rétroaction (car la diode est bloquée) et $v_e - V_- > 0$, donc la sortie de l'ALI est à $V_{sat}^+ = 15$V (toujours en négligeant la tension de décalage de l'ALI). La tension aux bornes de la diode est donc égale à V_{sat}^+, bien supérieure à sa tension de seuil, de l'ordre de 0,6V. La diode devrait donc être passante. L'hypothèse de départ étant ainsi absurde, la diode est effectivement passante, donc la boucle de rétroaction est fermée et $v_s = v_e$ comme souhaité.

Liste du matériel :

- **un amplificateur linéaire intégré en boîtier** P41.4,
- **une résistance** $R = 10$kΩ,
- **une diode « signal » 1N4148 ou 1N4107** P29.2,
- **un générateur basses fréquences,**
- **un oscilloscope.**

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 11 avec une diode « signal » (par exemple 1N4148 ou 1N4107) et une résistance R de l'ordre de la dizaine de kΩ. On pourra alors observer le redressement sans seuil en alimentant le circuit en entrée avec une tension v_e sinusoïdale de quelques volts d'amplitude, et d'une fréquence de l'ordre du kHz. On pourra comparer au redressement avec seuil qu'on obtient avec un simple montage diode-résistance en série (en retirant l'ALI du montage de la Fig. 11).

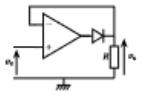


FIGURE 11 – Montage d'une diode sans seuil pour redresser un signal.

6. Autres montages impliquant un amplificateur linéaire intégré en boucle fermée stable (*)

Il existe bien d'autres montages impliquant un ALI, et permettant d'effectuer des opérations variées, comme ajouter, soustraire, ou dériver des signaux. Ces montages sont décrits dans la Réf. [3] (pp. 89-92). Ces montages permettent de mettre en évidence d'autres défauts de l'ALI, comme la réjection en mode commun, c'est-à-dire le fait que la réponse de l'ALI est de la forme

$$V_s = \mu(V_+ - V_-) + \mu_{mc}\left(\frac{V_+ + V_-}{2}\right), \tag{15}$$

où μ_{mc} est le gain de l'ALI en mode commun (voir la Réf. [3], pp. 83-84). Cela est parfois quantifié par le taux de réjection en mode commun, défini par

$$\mathrm{TRMC} = 20\log\left(\frac{\mu}{\mu_{mc}}\right). \tag{16}$$

On trouve typiquement TRMC = 90dB en régime statique, mais il diminue avec la fréquence des signaux en entrée.

Typiquement, dans le cas du montage soustracteur, on aura tendance à prendre des grandes valeurs de résistances (au moins de la centaine de kΩ) pour être moins sensible à cette amplification du mode commun.

IV. UTILISATION DE L'AMPLIFICATEUR LINÉAIRE INTÉGRÉ EN BOUCLE FERMÉE INSTABLE

Le bouclage de V_s sur V_+ conduit d'après l'équation différentielle (5) de l'ALI à une solution exponentiellement croissante. Ce dernier est donc dans une situation instable. Ce sont les non-linéarités (ici la saturation en tension de sortie) qui arrêtent la croissance exponentielle. Ainsi, en pratique, l'ALI est toujours saturé dans cette configuration.

1. Comparateur simple

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [3] (pp. 93-94) pour de plus amples détails.

Ce montage très simple n'a pas de rétroaction. Il ne sert qu'à introduire l'utilisation de l'ALI comme comparateur. On branche l'entrée inverseuse à la masse ($V_- = 0$), tandis que le signal d'intérêt est branché sur l'entrée non-inverseuse, voir Fig. 12. Si $V_+ > V_0$, alors $V_s = V_{sat}^+$, sinon $V_s = V_{sat}^-$.

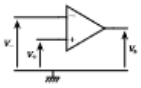


FIGURE 12 – Comparateur simple.

Le comparateur simple est très sensible au bruit : pour un signal de faible amplitude, les fluctuations peuvent être suffisantes pour changer le signe de la tension d'entrée et ainsi provoquer des basculements intempestifs du comparateur. On peut s'affranchir de cela en réalisant un comparateur à double seuil ou « à hystérésis ».

2. Comparateur à hystérésis

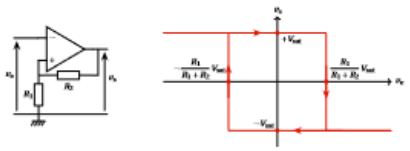


FIGURE 13 – Comparateur à hystérésis et cycle.

Pour plus de détails sur cette expérience, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [3] (pp. 94-96).

Le circuit comparateur est schématisé Fig. 13 (il s'agit d'un comparateur inverseur, mais une variante de comparateur non-inverseur existe également, voir Réf. [3]). La rétroaction permet cette fois de comparer $V_- = v_e$ à $V_+ = \pm R_1/(R_1+R_2)\,V_{sat}$ (en supposant que $V_{sat}^\pm \simeq \pm V_{sat}$) plutôt qu'à une tension nulle, ceci afin d'être moins sensible au bruit.

On peut raisonner par hypothèse sur les différents cas :

- On suppose tout d'abord que $v_s = +V_{sat}$. Cela n'est possible que si $V_+ - V_- > 0$ (en négligeant la tension de décalage de l'ALI). Le pont diviseur de tension donne $V_+ = R_1/(R_1+R_2)\,V_{sat}$ (en négligeant les courants de polarisation de l'ALI), donc cela impose que $V_- < R_1/(R_1+R_2)\,V_{sat}$.
- On suppose maintenant que $v_s = -V_{sat}$. Cela n'est possible que tant que $V_+ - V_- < 0$. Le pont diviseur de tension donne alors $V_+ = -R_1/(R_1+R_2)\,V_{sat}$, et il faut donc que $V_- > -R_1/(R_1+R_2)\,V_{sat}$.

On peut alors tracer le portrait de phase de la Fig. 13, avec le sens de parcours mentionné.

Liste du matériel :

- un amplificateur linéaire intégré en boîtier P41 , 4,
- deux résistances $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $R_2 = 4\,\mathrm{k\Omega}$,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

> On propose de réaliser le circuit de la Fig. 13 et d'obtenir le cycle d'hystérésis en mode XY à l'oscilloscope. On pourra prendre deux résistances R_1 et R_2 de l'ordre du kΩ et pour e_e une tension sinusoïdale d'amplitude de l'ordre de 5 V et de basse fréquence (par exemple 0,5 Hz) pour observer le sens du cycle.

Il faut choisir la fréquence inférieure à la fréquence de coupure de l'ALI (typiquement de l'ordre de 10 Hz).

Bien que le comparateur à hystérésis règle le problème de sensibilité au bruit du comparateur simple, il ne permet pas de résoudre d'autres problèmes, notamment le fait que la vitesse de balayage de l'ALI est finie (limite de *slew-rate*), et le signal obtenu pour e_s n'est pas rectangulaire mais triangularisé au niveau de ses fronts montants et descendants.

V. Quelques rappels théoriques sur le transistor bipolaire

Cette partie a pour but de se familiariser avec le transistor bipolaire, qui est probablement un composant nouveau. On se contentera dans ce TP du tracé des caractéristiques et d'un exemple d'utilisation en régime de commutation (voir les expériences qui suivent). Un autre TP beaucoup plus complet lui sera entièrement consacré. On pourra se référer pour des détails supplémentaires aux Réf. [2, 6].

Les expériences décrites ci-dessous sont données dans le cas d'un transistor bipolaire NPN 2N2222, mais peuvent être généralisées à d'autres types de transistors NPN ou même PNP (à quelques modifications près). La notice du transistor NPN 2N2222 est disponible dans les classeurs de la salle de TP.

1. Schéma

C'est un composant à trois broches : la base B (dopée *p*), l'émetteur E et le collecteur C (dopés *n*, mais pas de la même façon : le transistor n'est donc pas symétrique). En salle de TP, ils sont montés sur une plaquette sur laquelle ces trois dernières sont indiquées par B, E et C.

FIGURE 14 – Schéma d'un transistor bipolaire NPN.

2. Tester un transistor et identification de B, C et E

Ce test est proposé dans le cas d'un transistor NPN, et serait à adapter pour un transistor PNP.

Liste du matériel :

- un transistor NPN 2N2222,
- un multimètre.

> On utilisera un multimètre en mode « diode ». On déterminera la base B comme la broche telle que si on mesure sa tension de seuil par rapport aux deux autres (B→E et B→C), on obtient une tension de seuil de l'ordre de 0,6 V.

Cette expérience peut se comprendre en voyant grossièrement le transistor comme deux diodes[3] B→E et B→C. Attention qu'on obtiendra *overload* si en mesure dans le sens contraire. Le transistor est grillé s'il est impossible d'obtenir deux fois une tension de seuil de 0,6 V en partant d'une broche donnée.

Il reste maintenant à reconnaître l'émetteur du collecteur, et pour cela on identifie C comme la borne qui est reliée à la carcasse du transistor.

3. On rappelle que la diode est une jonction PN.

3. Grandeurs pertinentes

Le transistor peut être vu comme une source de courant i_C commandée en courant par i_B. Ce sont donc à priori les deux grandeurs les plus pertinentes. Le courant i_E se déduit par une loi des nœuds $i_E = i_C + i_B$. Pour décrire complètement l'état du transistor, il faut aussi préciser deux tensions. On choisit le plus souvent V_{BE} et V_{CE}. La tension V_{BC} s'en déduit par une loi des mailles $V_{BC} = V_{BE} - V_{CE}$. Toute la phénoménologie du transistor peut alors être représentée sur les trois caractéristiques suivantes : $i_C = f(i_B)$ à V_{CE} fixée, $V_{BE} = f(i_B)$ à V_{CE} fixée, et $i_C = f(V_{CE})$ à i_B fixée. La quatrième, $V_{BE} = f(V_{CE})$ à i_B fixée traduit l'effet de la sortie V_{CE} sur l'entrée V_{BE}, qui est négligeable en pratique.

Une première loi de comportement est $i_C = \beta i_B$ *avec* $\beta = 160$ pour un 2N2222, c'est elle qui justifie que le transistor peut amplifier des signaux : c'est justement l'« effet transistor ». Mais attention, cette loi n'est valable que hors du régime de saturation. On peut aussi retenir que V_{BE} vaut environ 0,6 V dès lors que $i_B > 0$, et est nulle si $i_B = 0$ (caractéristique de diode). Ces deux lois sont résumées sur les deux quadrants de gauche de la Fig. 15.

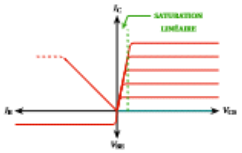


FIGURE 15 – Tracé schématique des caractéristiques en quatre quadrants pour le transistor bipolaire. Le faisceau de courbes dans le quadrant en haut à droite correspond à des caractéristiques pour des courants de base fixés distincts. La caractéristique en régime bloqué du transistor est représentée d'une couleur différente des autres. La caractéristique dans le quadrant en haut à gauche est elle représentée pour une valeur fixée de V_{CE} indiquée par la ligne pointillée verticale dans le quadrant en haut à droite. Cette tension permet également de distinguer les régimes de fonctionnement linéaire et en saturation. La caractéristique dans le quadrant en bas à gauche, enfin, est tracée pour une valeur fixée de V_{CE}.

Notons enfin qu'on ne peut pas avoir $i_B < 0$ puisque le transistor équivaut à deux diodes B→E et B→C.

4. Les différents régimes de fonctionnement

On peut ensuite identifier sur le quadrant en haut à droite de la Fig. 15 les différents régimes d'utilisation du transistor.

- Le premier régime est celui pour lequel i_B est nul. Alors i_C est aussi nul : on parle de régime *bloqué*. Le transistor équivaut alors à un interrupteur ouvert entre C et E, et V_{CE} est fixée par le reste du montage.
- Le second régime, qui occupe quasiment l'ensemble de la caractéristique $i_C = f(V_{CE})$, est celui pour lequel i_C a une valeur quasiment constante et indépendante de V_{CE}. Dans ce cas, on a également $i_C = \beta i_B$: on parle de régime *linéaire*. Là encore, V_{CE} est donnée par le circuit extérieur.
- Le dernier régime correspond à la partie non constante des caractéristiques dans le quadrant en haut à droite. Dans ce cas, V_{CE} est faible, et $i_C = I_C^{sat} \neq \beta i_B$. Le transistor équivaut à un fil entre E et C. Le courant βi_B appelé par le transistor ne peut pas être fourni par le circuit extérieur. Dans le régime de saturation, c'est donc bien le circuit extérieur qui « sature » dans le sens où il ne peut pas délivrer le courant appelé par le transistor!

VI. Tracé des caractéristiques du transistor bipolaire [MP 43]

On propose dans cette expériences des méthodes pour obtenir les caractéristiques du transistor bipolaire expérimentalement. De manière générale, le but est toujours de faire varier un paramètre et de regarder la réponse d'un deuxième en gardant les autres constants. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [3] (pp. 65–70).

1. Tracé de la caractéristique d'entrée

Il s'agit de la courbe $V_{BE} = f(i_B)$ à V_{CE} fixée.

Liste du matériel :

- un transistor bipolaire 2N2222,
- une résistance $R_B = 100\,k\Omega$,
- une source continue de tension,
- un générateur basses fréquences,
- un multimètre,
- une carte d'acquisition.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 16, avec une acquisition sur une carte d'acquisition. On pourra prendre $R_B = 100\,k\Omega$. Ici, e_C est une tension continue qu'on pourra prendre égale à 2 V. Pour e_B, on pourra prendre une tension triangulaire délivrée par un GBF à basse fréquence (de l'ordre du Hz) entre 0 V et 3 V. On acquiert à l'aide d'une carte d'acquisition e_B et V_{BE}, et on peut en déduire $I_B = (e_B - V_{BE})/R_B$, pour finalement tracer la caractéristique $I_B = f(V_{BE})$. Si on ne possède pas de carte d'acquisition, on peut prendre e_B continue qu'on fera varier manuellement entre 0 V et 3 V, et pour chaque valeur de e_B, on mesurera au voltmètre la tension V_{BE}, et à l'ampèremètre en série avec la résistance le courant I_B. Pour cela, on préfèrera un montage longue dérivation [4], comme indiqué Fig. 16.

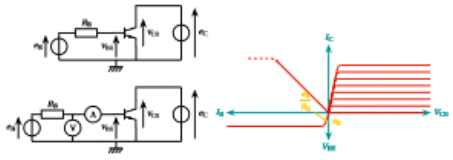


Figure 16 – **Montage pour le tracé de la caractéristique $V_{BE} = f(I_B)$, avec carte d'acquisition (en haut) ou sans (en bas).** Interprétation du montage en termes de caractéristiques, où on a également représenté la caractéristique de la mise en série de la source e_B avec la résistance R_B.

En premier lieu, on constate qu'il n'y a pas de résistance en sortie du transistor, de sorte que e_C fixe V_{CE}. Mais cela a l'inconvénient de pouvoir appeler des courants en sortie du collecteur arbitrairement grands, ce qui peut conduire à la détérioration du transistor. Pour ne pas le griller, il faut lui fournir une puissance inférieure à la puissance maximale qu'il peut dissiper[4]. On doit donc s'assurer que $V_{CE} I_C < \mathcal{P}_{max}$, soit $e_C \beta I_B < \mathcal{P}_{max}$. Ici, pour $e_C = 2\,V$, $\beta = 100$, cela impose que $I_B < \frac{\mathcal{P}_{max}}{e_C} \simeq 1{,}5\,mA$. Le choix d'une grande valeur de résistance R_B se justifie alors, car pour la valeur mentionnée ci-dessus, cela impose de respecter la condition $e_B < 100\,V$, ce qui est assez simple en pratique.

On pensera également à mesurer à l'ohmmètre la valeur de R_B avant de la mettre dans le circuit, avoir d'avoir une mesure juste du courant de base.

Ce montage peut également être interprété en utilisant les caractéristiques idéales du transistor, voir Fig. 16. En effet, dans le quadrant en bas à gauche, on a représenté la caractéristique d'entrée du transistor et celle du générateur de Thévenin construit à partir de la source e_B et de la résistance R_B ($V_{BE} = e_B - R_B I_B$). Le point de fonctionnement se trouve à l'intersection de ces deux courbes, et on voit qu'en faisant varier e_B, on déplace le point de fonctionnement, et on peut ainsi reconstruire la caractéristique complète.

On peut mentionner qu'en toute rigueur, le courant I traversant la résistance n'est pas égal au courant de base, du fait du courant entrant dans la carte d'acquisition pour la mesure de V_{BE}. Plus précisément, on a $I = I_B + V_{BE}/Z_e$, où $Z_e = 1\,M\Omega$ désigne l'impédance d'entrée de la carte d'acquisition. Or, on a $I \simeq 10\,\mu A$, et $V_{BE}/Z_e \simeq 0{,}6\,\mu A$, ce qui correspond à une erreur relative de 6 %, qui est faible certes, mais non négligeable. À l'inverse, le montage, certes plus fastidieux, utilisant les deux multimètres et également représenté Fig. 16 s'affranchit de cette erreur *systématique* sur la mesure du courant de base, mais ne mesure pas exactement la tension V_{BE}. En effet, dans ce second cas, la tension U mesurée par le voltmètre vaut $U = V_{BE} + R_A I_B$, où $R_A = 10\,\Omega$ désigne l'impédance de l'ampèremètre. Cela conduit alors à $R_A I_B = 0{,}1\,mV \ll 0{,}6\,V$.

Un exemple de tracé de caractéristiques qu'il est possible d'obtenir avec le matériel de la collection est donné Fig. A1.

4. Celle-ci est donnée dans sa notice ($\mathcal{P}_{max} = 500\,mW$), mais on peut lui ajouter un radiateur à ailettes pour l'augmenter.

2. Tracé des caractéristiques de sortie

Il s'agit du réseau de caractéristiques $I_C = f(V_{CE})$ pour plusieurs valeurs fixées de I_B.

Liste du matériel :

- un transistor bipolaire 2N2222,
- deux résistances $R_B = 100\,k\Omega$ et $R_C = 200\,\Omega$,
- une source continue de tension,
- un générateur basses fréquences,
- un multimètre,
- une carte d'acquisition.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 17. On prendra pour commencer e_B continue de l'ordre de 2 V, tandis qu'on pourra prendre pour e_C un signal triangulaire de basse fréquence (de l'ordre du Hz) et compris entre 0 V et 3 V. On pourra prendre $R_B = 100\,k\Omega$ et $R_C = 200\,\Omega$. On peut ensuite acquérir e_C et V_{CE} à l'aide d'une carte d'acquisition, et on obtient $I_C = (e_C - V_{CE})/R_C$. On peut alors tracer la caractéristique $I_C = f(V_{CE})$. On peut ensuite changer la valeur de e_B plusieurs fois, et recommencer. On notera à chaque fois la valeur de I_B lue à l'ampèremètre. Si on ne possède pas de carte d'acquisition, alors on prendra e_C continue qu'on fera varier manuellement entre 0 V et 3 V, et pour chaque valeur de e_C, on mesurera la tension V_{CE} à l'aide d'un voltmètre et le courant I_C à l'aide d'un ampèremètre en série avec R_C, comme indiqué Fig. 17 également. On préfèrera dans ce cas un montage courte dérivation [4].

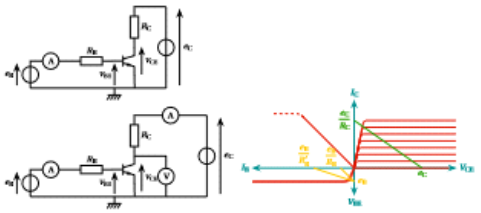


Figure 17 – **Montage pour le tracé des caractéristiques $V_{CE} = f(I_C)$ avec carte d'acquisition (en haut) ou avec des multimètres (en bas).** Interprétation du montage en termes de caractéristiques, où on a également représenté les caractéristiques de la mise en série des sources e_B et e_C avec les résistances R_B et R_C (avec $R_B > R'_B$).

Le fonctionnement du circuit, ainsi que le choix des composants peut se comprendre, là encore, par une analyse des caractéristiques (voir Fig. 17). La résistance R_B doit être choisie suffisamment grande pour que le courant I_B varie peu quand on fait varier e_C. En effet, en lien avec l'effet Early, le courant de base diminue à V_{BE} fixée quand V_{CE} augmente. Ainsi, dans le quadrant en bas à gauche, on a un faisceau de caractéristiques pour plusieurs valeurs de V_{CE}, et on voit alors clairement que les fluctuations de I_B seront minimisées par une grande valeur de R_B.

En ce qui concerne la résistance R_C, elle doit être choisie suffisamment faible pour pouvoir appeler des courants suffisamment importants dans le collecteur, observer l'ensemble de la caractéristique de sortie, et retarder le régime de saturation du circuit. Par contre, la résistance R_C doit être suffisamment grande pour que la puissance appelée dans le collecteur ne dépasse pas la puissance maximale $\mathcal{P}_{max}$ que peut délivrer le transistor sans se détériorer. Cela impose donc que $V_{CE} I_C = e_C I_C - R_C I_C^2 = e_C^2/(4R_C) < \mathcal{P}_{max}$. Cela impose donc que $R_C > 10\,\Omega$.

Comme dans l'expérience précédente, la variation de e_C déplace le point de fonctionnement dans le quadrant en haut à droite (mais bouge peu celui en bas à gauche), ce qui permet de reconstruire la caractéristique de sortie.

On notera là encore que la mesure du courant à partir de la tension aux bornes de R_C ne correspond pas au courant traversant effectivement le collecteur, du fait du courant faible, mais non nul, qui entre dans la carte d'acquisition. Mais

contrairement à l'expérience précédente, cette erreur est négligeable, et vaut, en valeur relative $V_{CE}/(Z_e I_C) \simeq 0{,}1$ % pour des courants $I_C = 1$ A, des tensions $V_{CE} = 1$ V et $Z_e = 1$ MΩ l'impédance d'entrée de la carte d'acquisition.

Des exemples de caractéristiques de sortie du transistor obtenues expérimentalement avec le matériel de la collection sont donnés Fig. A2.

Enfin, on rappelle que pour tracer plusieurs courbes d'abscisses différentes sur une même figure avec Latis-Pro, il faut tracer chacune de ces courbes dans une fenêtre (à raison d'une courbe par fenêtre). Les noms de ces courbes apparaissent alors en bas à gauche. Il faut ensuite ouvrir une nouvelle fenêtre, et cliquer-glisser les noms un par un dans celle-ci.

3. Tracé de la relation « effet transistor »

À partir de l'expérience réalisée précédemment, on peut relever les plateaux de I_C pour chaque valeur de I_B et remonter à β. Il suffit pour cela d'effectuer un ajustement affine (voir TP1). On trouve typiquement $\beta \simeq 160$. Un exemple de données expérimentales obtenues à partir du matériel de la collection est montré Fig. A3.

VII. UTILISATION DU TRANSISTOR BIPOLAIRE EN RÉGIME DE COMMUTATION (*)

Dans le TP suivant on utilisera le transistor en régime linéaire (montage émetteur commun). On propose ici un exemple de circuit dans lequel le transistor fonctionne sur les régimes bloqué et saturé. On se place dans un contexte d'électronique logique. Les tensions valent 0 V ou 5 V (correspondant respectivement aux 0 et 1 logiques).

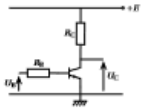
1. Porte NON

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la *BdE*. [3] (pp. 71-73).

Liste du matériel :

- un transistor bipolaire 2N2222,
- deux résistances $R_B = 10$ kΩ et $R_C = 250$ Ω,
- un générateur basses fréquences,
- une alimentation continue de tension,
- un oscilloscope.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 18 avec $R_B = 10$ kΩ, $R_C = 250$ Ω et $E = 5$ V délivrée par une alimentation continue de tension. On alimentera le circuit avec un générateur basses fréquences délivrant un signal U_B créneau de basse fréquence (de l'ordre du Hz) entre 0 V et 5 V, et on observera à l'oscilloscope les tensions U_B et U_C. On pourra alors obtenir la table de vérité de cette porte logique.



U_B	U_C
0V	5V
5V	0V

FIGURE 18 – Schéma d'une porte NON avec un transistor. À droite, sa table de vérité.

On raisonne sur la Fig. 18 pour montrer qu'il s'agit bien d'une porte NON.

- Si U_B est nul, $I_B = I_C = 0$ A. Le transistor est bloqué, et par conséquent $U_C = E$.
- Sinon, $U_B = 5$ V, et alors $I_B = 0{,}4$ mA. Le courant appelé est $I_C = \beta I_B = 70$ mA, ce qui est supérieur au courant que peut fournir le circuit extérieur, qui vaut $E/R_C = 20$ mA. Le transistor est donc en régime saturé, avec $U_C = V_{CE} \ll E$.

On comprend, à partir de la discussion précédente, le choix des valeurs de résistances. En effet, on veuille dans ce cas que le transistor fonctionne en régime de saturation, ce qui impose de prendre R_C suffisamment grande. Cela sera d'autant plus facile qu'on prendra R_B plus petit pour augmenter la valeur de I_B. Cela se voit bien en traçant les caractéristiques dans le diagramme à quatre quadrants.

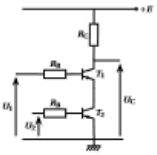
2. Porte NON ET

On propose de réaliser l'expérience suivante, schématisée Fig. 19.

Liste du matériel :

- deux transistors bipolaires 2N2222,
- deux résistances $R_B = 10$ kΩ et une résistance $R_C = 250$ Ω,
- deux alimentations continues de tension,
- un multimètre.

> On propose de réaliser la porte NON ET de la Fig. 19 avec $R_B = 10$ kΩ, $R_C = 250$ Ω et une alimentation continue $E = 5$ V. On pourra alors obtenir la table de vérité de cette porte logique en utilisant une seconde alimentation continue pour U_1 et U_2.



U_1	U_2	U_C
0V	0V	5V
5V	0V	5V
0V	5V	5V
5V	5V	0V

FIGURE 19 – Schéma d'une porte NON ET avec deux transistors. À droite, sa table de vérité.

Sur le montage de la Fig. 19, si l'un des deux transistors est bloqué ($I_B = 0$ A), l'intensité en sortie du collecteur du transistor T_1 est nulle [5] et U_C vaut 5 V. Par contre, si les deux fonctionnent en régime de saturation, alors le courant I_C sature et $U_C \ll E$. On a donc construit une porte NON ET.

La justification du choix des composants est analogue à celle de la porte NON introduite dans l'expérience précédente.

On rappelle que cette porte est universelle puisque toutes les autres portes logiques peuvent être obtenues à partir de portes NON ET : c'est donc un élément très répandu en électronique logique. En pratique cependant, les technologies ont évolué et les circuits intégrés avec des transistors bipolaires se font rares.

RÉFÉRENCES

[1] P. Brenders, G. Buffiat, L. Douchet, M. Sauzeix et S. Tisserant, *Électronique PSI*, Bréal (2013).

[2] J.-M. Donnini et L. Quaranta, *Introduction à l'électronique*, Masson (1998).

[3] R. Duffait et J.-P. Lièvre, *Agrégation de Sciences Physiques - Expériences d'électronique*, Bréal (1999).

[4] Jolidon, *Physique expérimentale - Optique, magnétisme, électrotechnique, mécanique, thermodynamique et physique non linéaire*, EDP Sciences (2021).

[5] M. Krob, *Électronique expérimentale*, Ellipses (2002).

[6] A. P. Malvino et D. J. Bates, *Principes d'électronique*, Dunod (2016).

5. On remarquera que l'émetteur de T_1 collectée avec le collecteur de T_2, et on a la loi des noeuds $I_B = I_B + I_C$.

EXEMPLES DE RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

FIGURE A1 – Exemple de mesure de la caractéristique d'entrée d'un transistor NPN 2N2222.

FIGURE A2 – Exemple de mesure de caractéristiques de sortie d'un transistor NPN 2N2222 pour plusieurs courants de base.

FIGURE A3 – Exemple de mesure de caractéristiques de sortie d'un transistor NPN 2N2222 pour plusieurs courants de base.

CIRCUITS AMPLIFICATEURS À TRANSISTORS BIPOLAIRES

TABLE DES EXPÉRIENCES

I.	Généralités sur l'amplification de signaux	84
II.	Première approche du montage émetteur commun : émetteur à la masse et résistance de base	85
III.	Montage émetteur commun robuste : résistance d'émetteur découplée et pont de base [MP 43]	90
IV.	Le montage push-pull [MP 43]	96

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. GÉNÉRALITÉS SUR L'AMPLIFICATION DE SIGNAUX

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [2] (pp. 116-119) ou à la Réf. [6] (p. 158).

1. Définition

L'objectif de ce TP est de construire une chaîne complète d'amplification. Pour cela, on cherchera à diffuser le son enregistré par un microphone à l'aide d'un haut-parleur. On va voir que cet exercice requiert plusieurs étages d'amplification.

Liste du matériel :

- un microphone `P74.37` (à demander aux techniciens),
- un adaptateur pour microphone `P74.38`,
- un haut-parleur `P74.29`.

> On propose de brancher directement un microphone sur un haut-parleur. Si on enregistre un son avec le microphone, alors on n'entend rien en sortie du haut-parleur.

Un amplificateur est un quadripôle unidirectionnel transformant une grandeur électrique g_e imposée en entrée en une grandeur g_s délivrée en sortie, de façon à ce que :

$$g_s = A g_e. \tag{1}$$

On peut distinguer les amplificateurs inverseurs, pour lesquels $A < 0$, des amplificateurs non inverseurs, pour lesquels $A > 0$. Ces grandeurs peuvent être complexes et dépendre de la fréquence.

2. Description générale d'un amplificateur

En pratique, on considérera un amplificateur transformant les grandeurs d'entrées (v_e, i_e) en grandeurs de sortie (v_s, i_s). On présente le schéma général d'un amplificateur en Fig. 1 (voir également TP4).

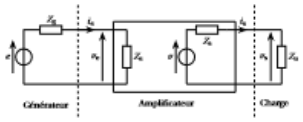


FIGURE 1 – Quadripôle amplificateur.

L'amplificateur est alors caractérisé par plusieurs grandeurs.

- On peut tout d'abord citer son *impédance d'entrée* Z_e :

$$Z_e = \frac{v_e}{i_e}, \quad v_e = \frac{Z_e}{Z_e + Z_g} e. \tag{2}$$

Il faut s'assurer que $Z_e \gg Z_g$ pour éviter une chute de tension en entrée de l'amplificateur.

- On peut également introduire son *impédance de sortie* Z_s. Pour la charge (d'impédance Z_u), le quadripôle se comporte comme un générateur de Thévenin dont la force électromotrice est reliée à la tension d'entrée v_e et dont la résistance est Z_s. En sortie, on aura donc :

$$v_s = \frac{Z_u}{Z_u + Z_s} A_0 v_e, \tag{3}$$

avec A_0 le gain en tension (voir après). L'impédance de sortie doit donc être la plus petite possible pour un amplificateur dont la grandeur de sortie est une tension. En général, les impédances d'entrée et de sortie sont globalement résistives et dépendent assez faiblement de la fréquence (tant qu'on reste à relativement basse fréquence).

- Enfin, on peut mentionner le gain *en tension en sortie ouverte* A_0. Celui-ci dépend de manière générale de la fréquence. Si on note $A_{0,max}$ la valeur maximale que prend l'amplification en tension en fonction de la fréquence, on définit alors la *bande passante* comme l'intervalle de fréquence pour lequel le gain est au moins égal à $A_{0,max}/\sqrt{2}$.

On pourra alors définir des gains d'amplification lorsque la sortie est reliée à une charge Z_u (qui dépendront de cette dernière) :

- le gain en tension $A_u = v_s/v_e$;
- le gain en courant $A_i = i_s/i_e$;
- le gain en puissance $A_p = \mathrm{Re}\left(v_s i_s^*\right)/\mathrm{Re}\left(v_e i_e^*\right)$.

Pour les amplificateurs de puissance, on peut enfin s'intéresser à leur rendement énergétique, rapport de la puissance fournie à la charge et des puissances fournies (puissance en entrée et puissance fournie par l'alimentation du circuit) :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_{alim} + \mathcal{P}_e} \simeq \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_{alim}} \tag{4}$$

La puissance fournie en entrée $\mathcal{P}_e$ est en effet souvent négligeable dans le bilan énergétique de l'amplificateur.

II. Première approche du montage émetteur commun : émetteur à la masse et résistance de base

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la BOE [2] (pp. 119-120) et à la BOE [4] (p. 235).

On propose d'étudier le montage représenté Fig. 2, qui permettra de comprendre comment est construit un amplificateur à transistor et son principe. L'expérience est proposée dans le cas d'un transistor NPN. L'objectif est de mettre en évidence des concepts importants, comme la notion de point de polarisation. Ce montage souffre néanmoins de quelques défauts que nous mettrons en évidence. La réalisation d'un circuit amplificateur à transistor plus robuste sera l'objectif de l'expérience qui suit.

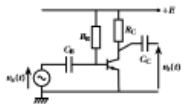


Figure 2 – Montage émetteur commun : première méthode.

1. Polarisation du transistor

La polarisation du circuit consiste à placer le circuit dans un point de fonctionnement statique (en l'absence de signal d'entrée $v_e(t)$), qu'on choisira dans le régime linéaire de fonctionnement du transistor (voir TP4) par un choix judicieux des résistances. En effet, l'objectif va être par la suite d'imposer un signal variable $v_e(t)$ qui va déplacer ce point de fonctionnement. Pour éviter la distorsion du signal en sortie, on a alors tout intérêt à ce que le point de fonctionnement reste dans le régime linéaire de fonctionnement du transistor. Dans toute la suite, les quantités statiques (relatives au point de fonctionnement) seront notées en majuscules, et les quantités purement variables avec un prime, par exemple $i_B(t) = I_B + i'_B(t)$.

Les deux condensateurs du montage de la Fig. 2 permettent le découplage entre la polarisation statique du transistor, maintenue constante, et les tensions d'entrée et de sortie, variables et imposées par l'utilisateur de l'amplificateur. En effet, ils se comportent comme des interrupteurs ouverts pour le courant continu, et comme des fils pour les signaux variables à suffisamment haute fréquence. On superpose alors les courants de polarisation du transistor aux signaux utiles. Ainsi, pour trouver le point de polarisation du transistor, il suffit d'étudier le circuit en ignorant les capacités, voir Fig. 3.

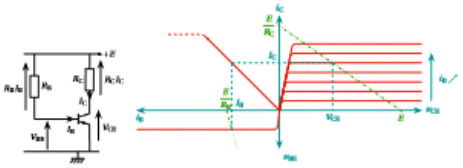


Figure 3 – Montage de polarisation du transistor et analyse du circuit du point de vue des caractéristiques du transistor.

Liste du matériel :

- un transistor bipolaire 2N2222,
- une résistance $R_C = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance de $10\,\mathrm{k\Omega}$,
- un rhéostat de résistance variable,
- une source continue de tension,
- un multimètre Fluke 187 ±0.25 ou de précision 8846A ±0.35 (pour la mesure du courant),
- un multimètre (pour la mesure de la tension).

> On propose de câbler le montage de la Fig. 3. On utilisera $R_C = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $E = 10\,\mathrm{V}$ continue, et une résistance variable pour R_B. On va être amené à faire varier cette résistance, mais il faut prendre garde à ce qu'elle ne s'annule jamais ! Pour s'en assurer, on propose de placer par sécurité une résistance de $10\,\mathrm{k\Omega}$ en série avec la résistance variable.

Le premier objectif est de mesurer la valeur de β pour le transistor étudié, ce qui sera important pour comparer aux résultats obtenus par la suite (voir également TP4). Une fois cette mesure faite, il est fortement recommandé de garder le même transistor pour toutes les expériences.

> On propose donc de mesurer V_{CE} au voltmètre et I_B à l'ampèremètre en série avec la résistance R_B. On peut alors faire varier R_B entre $100\,\mathrm{k\Omega}$ et $800\,\mathrm{k\Omega}$, et tracer $I_C = (E - V_{CE})/R_C$ en fonction de I_B.

On doit alors observer le régime linéaire (dont la pente permet de remonter à β) et le régime de saturation à forts courants de base. Il suffit alors de faire un ajustement affine de I_C en fonction de I_B (voir TP4). On attend une valeur proche de 200.

Le circuit considéré est présenté à gauche de la Fig. 3. L'analyse du circuit de polarisation donne alors :

$$V_{BE} = 0{,}6\,\mathrm{V} \quad , \quad I_B = \frac{E}{R_B} \quad , \quad I_C = \beta \frac{E}{R_B} \quad , \quad V_{CE} = E\left(1 - \beta \frac{R_C}{R_B}\right). \tag{5}$$

On veut se débrouiller pour que le point de polarisation se trouve au milieu du régime linéaire, c'est-à-dire $V_{CE} = E/2$. Cela donne donc que $R_B = 2\beta R_C$. Ensuite, on veut éviter de détériorer le transistor, ce qui impose que $V_{CE} I_C \leq \mathcal{P}_{max}$, soit $R_C \geq E^2/(4\mathcal{P}_{max}) = 100\Omega$. En prenant une certaine marge, on voit que $R_C = 1\,\mathrm{k}\Omega$ est une valeur acceptable de résistance, ce qui donne $R_B = 400\mathrm{k}\Omega$. On a pris une valeur plus élevée de R_C pour que R_B soit plus grande aussi : cela permet de rendre le courant de polarisation de base constant pendant toutes les manipulations.

On rappelle qu'on a vu dans le TP précédent que la mesure de I_C proposée ici n'est pas exacte du fait du courant qui circule dans le voltmètre. Mais étant donné que l'impédance équivalente du voltmètre est $R_V = 1\,\mathrm{M}\Omega$, l'erreur relative sur la mesure de I_C est négligeable (de l'ordre de $V_{CE}/(R_V I_C) = R_C/R_V = 0{,}1$ %).

Pour la suite, on va vouloir placer le point de fonctionnement au milieu de la droite de charge statique, soit $V_{CE} = E/2$. En effet, comme mentionné plus haut, les signaux variables vont déplacer le point de fonctionnement, et pour maximiser l'amplitude des signaux qu'on peut amplifier sans distorsion, on a tout intérêt à placer le point de fonctionnement au milieu du palier de fonctionnement linéaire du transistor.

> On pourra maintenant ajuster R_B pour avoir $V_{CE} = 5\,\mathrm{V}$. On retiendra la valeur de I_B correspondante.

2. Défauts du montage

La valeur de R_B que l'on doit choisir dépend du rapport d'amplification β. En effet, on rappelle qu'on a $R_B = 2\beta R_C$. Or, β dépend fortement de la température, et donc du courant circulant dans le transistor (car le transistor va nécessairement chauffer par effet joule). En d'autres termes, le point de polarisation changera donc aussi si les conditions d'utilisation de l'amplificateur changent. Il n'est pas rare d'observer une variation de l'ordre de 1 % par degré Celsius. Ainsi, si $\beta = 200$ à 20°C, on pourra observer $\beta \simeq 360$ à 70°C, de sorte que $V_{CE} \simeq 1{,}3\,\mathrm{V}$ à la frontière entre le régime linéaire et le régime de saturation.

Liste du matériel :

- un transistor bipolaire 2N2222,
- une résistance $R_C = 1\,\mathrm{k}\Omega$,
- une résistance de $10\,\mathrm{k}\Omega$,
- un rhéostat de résistance variable,
- une source continue de tension,
- un sèche-cheveux P101.10,
- deux multimètres.

> On propose de reprendre le montage de la Fig. 3 et d'observer le comportement de V_{CE} lorsque l'on chauffe le transistor au sèche-cheveux.

On doit alors constater sa dérive.

3. Paramètres hybrides de fonctionnement

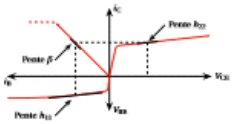


FIGURE 4 – Caractéristiques schématiques du transistor et interprétation graphique des paramètres hybrides de fonctionnement.

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (pp. 72–75), ou à la Réf. [2](pp. 68–70).

Lorsqu'on veut étudier le comportement du transistor au voisinage de son point de fonctionnement, si ce dernier est choisi dans le régime de fonctionnement linéaire, alors on peut relier linéairement les variations des grandeurs d'entrée et de sortie [1]. On rappelle la définition des paramètres hybrides de fonctionnement (qui dépendent du point de fonctionnement) :

$$\begin{pmatrix} v'_{BE} \\ i'_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i'_B \\ v'_{CE} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

où on rappelle nos notations, par exemple $v_{BE} = V_{BE} + v'_{BE}$, avec V_{BE} correspondant au point de polarisation statique, et v'_{BE} au signal variable qu'on souhaite amplifier. Leur signification est également reportée sur les caractéristiques schématiques de la Fig. 4. L'étude qui a précédé nous a déjà permis de déterminer le coefficient $h_{21} = \beta$. Il est possible d'avoir accès expérimentalement au coefficient h_{11}, qui correspond à la pente de la tangente à la caractéristique d'entrée au point de fonctionnement considéré.

Liste du matériel :

- un transistor bipolaire 2N2222,
- une résistance $R_C = 1\,\mathrm{k}\Omega$,
- une résistance de $10\,\mathrm{k}\Omega$,
- deux condensateurs électrochimiques de capacité $C_B = C_C = 10\,\mu\mathrm{F}$,
- un rhéostat de résistance variable,
- une source continue de tension,
- un générateur basses fréquences,
- un multimètre Fluke 187 P69.25 ou de précision 8846A P69.35 (pour la mesure du courant),
- un multimètre (pour la mesure de la tension).

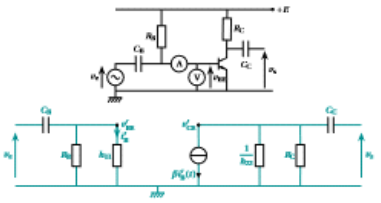


FIGURE 5 – Mesure du coefficient h_{11} dans le modèle petits signaux du transistor. À droite, circuit électrique petits signaux équivalent (en négligeant le paramètre hybride h_{12}).

> On propose de câbler le montage de la Fig. 5. On choisira $C_B = 10\,\mu\mathrm{F}$ et $C_C = 10\,\mu\mathrm{F}$. Il faut prendre garde que les condensateurs de grande capacité sont le plus souvent électrochimiques : ils doivent être placés dans le bon sens (avec la borne + vers les tensions continues les plus élevées, c'est-à-dire vers le transistor). On alimentera le circuit avec un signal v_e sinusoïdal de faible amplitude (inférieure à 50 mV) et de fréquence de l'ordre du kHz à l'aide d'un générateur basses fréquences. On pourra ensuite mesurer la valeur efficace de l'intensité du courant de base i_B à l'ampèremètre (de précision, car les courants appelés sont faibles), et la valeur efficace de la tension v_{BE} au voltmètre (lui aussi de précision, car les tensions en régime variable appelées sont faibles) pour différentes amplitudes du signal d'entrée v_e. On privilégiera un montage courte dérivation [3]. Le tracé de la valeur efficace de v_{BE} en fonction de celle de i_B permet de remonter à la valeur de h_{11}.

Il suffit d'effectuer une régression affine, dont la pente est h_{11}. On peut alors comparer à la valeur théorique (en ohms) qui est $25\,\mathrm{mV}/I_B$ avec I_B en mA. En effet, la caractéristique d'entrée du transistor est analogue à celle d'une diode, à savoir

1. Il s'agit du modèle petits signaux du transistor.

$$h_{11} = \left.\frac{\partial v_{BE}}{\partial i_B}\right|_{v_{BE}, I_B} = \frac{V_T}{I_B},$$

qui est le résultat énoncé plus haut. Au point de fonctionnement choisi, on attend $h_{11} \simeq 1\,\mathrm{k}\Omega$.

On justifie maintenant le choix des capacités de couplage C_B et C_C, ainsi que la fréquence et l'amplitude du signal d'entrée v_e.

Tout d'abord, on a mentionné que lorsque v_e était un signal non nul variable dans le temps, on allait déplacer le point de fonctionnement du système. Pour qu'il reste dans le domaine de fonctionnement linéaire du transistor, il faut que $|v'_{CE}| \leq E/2$. Or $v'_{CE} = -R_C i'_C$ car $v_{CE} = E - R_C i_C$. Donc cela impose que $|i'_C| \leq E/(2R_C)$, que $|i'_B| \leq E/(2\beta R_C) = E/R_B$, et donc que $|v'_{BE}| \leq h_{11} E/R_B = V_T = 25\,\mathrm{mV}$, ce qui correspond à l'ordre de grandeur mentionné plus haut.

Ensuite, on veut que les capacités de couplage n'induisent pas de chute de tension des signaux variables. On va donc vouloir qu'ils se comportent comme des fils, et cela impose que leur impédance soit négligeable aux autres impédances avec lesquelles ils sont en série. En d'autres termes, cela impose que $1/(\omega C_B) \ll h_{11} \parallel R_B = h_{11}$ (avec ω la pulsation des signaux variables) et que $1/(\omega C_C) \ll R_C \parallel 1/h_{22} \simeq R_C$ (car $1/h_{22} \simeq 20\,\mathrm{k}\Omega$), soit $C_B = C_C \gg 1/(\omega h_{11})$ (car $R_C \simeq h_{11} = 1\,\mathrm{k}\Omega$). Pour travailler avec des signaux dans le domaine de l'audible (soit $\omega/(2\pi) = 1\,\mathrm{kHz}$), cela donne $C_B, C_C \gg 0{,}7\,\mu\mathrm{F}$. La valeur choisie plus haut de $10\,\mu\mathrm{F}$ est donc raisonnable.

On rappelle (voir le TP4) que le montage courte dérivation suggéré ici permet d'avoir une mesure exacte de la tension v_{BE}. Par contre, cela induit une erreur systématique sur le courant de base qui aurait été amputé du courant circulant dans le voltmètre. Or ici $|i'_B| \lesssim E/R_B \simeq 25\,\mu\mathrm{A}$ et $|v'_{BE}| \lesssim 25\,\mathrm{mV}$, et l'erreur relative faite sur la mesure du courant est de l'ordre de $|v'_{BE}/(R_V i'_B)| = 0{,}1$ %. À l'inverse, si un montage longue dérivation avait été préféré, le courant de base aurait été mesuré exactement, mais c'est la tension v_{BE} qui aurait souffert d'une erreur systématique, qui en valeur relative est estimée à $|R_B i'_B / v_{BE}| \simeq 1$ % (avec $R_B \simeq 1\mathrm{k}\Omega$ la résistance équivalente de l'amplificateur). C'est bien le montage courte dérivation qui permet de minimiser l'erreur de mesure (contrairement à ce qu'on aurait pu imaginer spontanément).

L'impédance de sortie $1/h_{22}$ est grande devant R_C ($1/h_{22} \simeq 20\,\mathrm{k}\Omega$) : pour cette raison, il est difficile de la mesurer expérimentalement. En pratique, cette résistance n'intervient pas dans les montages courants.

Le coefficient de réaction de la sortie sur l'entrée h_{12} est négligeable ($h_{12} \simeq 10^{-4}$). Le modèle petits signaux du transistor peut donc se réduire à

1. Il s'agit du modèle petits signaux du transistor.

$$h_{11} = \left.\frac{\partial v_{BE}}{\partial i_B}\right|_{v_{BE},I_B} = \frac{V_T}{I_B},$$

qui est le résultat énoncé plus haut. Au point de fonctionnement choisi, on attend $h_{11} \simeq 1\,\mathrm{k\Omega}$.

On justifie maintenant le choix des capacités de couplage C_B et C_C, ainsi que la fréquence et l'amplitude du signal d'entrée v_E.

Tout d'abord, on a mentionné que lorsque v_e était un signal non nul variable dans le temps, on allait déplacer le point de fonctionnement du système. Pour qu'il reste dans le domaine de fonctionnement linéaire du transistor, il faut que $|v'_{CE}| \leq E/2$. Or $v'_{CE} = -R_C i'_C$ car $v_{CE} = E - R_C i_C$. Donc cela impose que $|i'_C| \leq E/(2R_C)$, que $|i'_B| \leq E/(2\beta R_C) = E/R_B$, et donc que $|v'_{BE}| \leq h_{11} E/R_B = V_T = 25\,\mathrm{mV}$, ce qui correspond à l'ordre de grandeur mentionné plus haut.

Ensuite, on veut que les capacités de couplage n'induisent pas de chute de tension des signaux variables. On va donc vouloir qu'ils se comportent comme des fils, et cela impose que leur impédance soit négligeable aux autres impédances avec lesquelles ils sont en série. En d'autres termes, cela impose que $1/(\omega C_B) \ll h_{11} \parallel R_B = h_{11}$ (avec ω la pulsation des signaux variables) et que $1/(\omega C_C) \ll R_C \parallel 1/h_{22} = R_C$ (car $1/h_{22} = 20\,\mathrm{k\Omega}$), soit $C_B = C_C \gg 1/(\omega R_C)$ (car $R_C = h_{11} = 1\,\mathrm{k\Omega}$). Pour travailler avec des signaux dans le domaine de l'audible (soit $\omega/(2\pi) = 1\,\mathrm{kHz}$), cela donne C_B, $C_C \gg 0{,}7\,\mu\mathrm{F}$. La valeur choisie plus haut de $10\,\mu\mathrm{F}$ est donc raisonnable.

On rappelle (voir le TP4) que le montage courte dérivation suggéré ici permet d'avoir une mesure exacte de la tension v_{RB}. Par contre, cela induit une erreur systématique sur le courant de base qui aurait été amputé du courant circulant dans le volumètre. Or ici $|i'_B| \lesssim E/R_B = 25\,\mathrm{\mu A}$ et $|v'_{BE}| \lesssim 25\,\mathrm{mV}$, et l'erreur relative faite sur la mesure du courant est de l'ordre de $|v'_{BE}/(R_B i'_B)| = 0{,}1\ \%$. À l'inverse, si un montage longue dérivation avait été préféré, le courant de base aurait été mesuré exactement, mais c'est la tension v_{RB} qui aurait souffert d'une erreur systématique, qui en valeur relative est estimée à $|R_B i'_B/v_{RB}| = 1\ \%$ (avec $R_B = 10\,\mathrm{k\Omega}$ la résistance équivalente de l'ampèremètre). C'est bien le montage courte dérivation qui permet de minimiser l'erreur de mesure (continuement à ce qu'on aurait pu imaginer spontanément).

L'impédance de sortie $1/h_{22}$ est grande devant R_C ($1/h_{22} = 20\,\mathrm{k\Omega} \gg$ pour cette raison, il est difficile de la mesurer expérimentalement. En pratique, cette résistance n'intervient pas dans les montages courants.

Le coefficient de réaction de la sortie sur l'entrée h_{12} est négligeable ($h_{12} = 10^{-4}$). Le modèle petits signaux du transistor peut donc se réduire à

$$\begin{cases} v'_{BE} = h_{11} i'_B \\ i'_C = h_{21} i'_B \end{cases}. \tag{7}$$

4. Fonctionnement en régime alternatif

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (pp. 75-77) ou bien à la Réf. [2] (pp. 120-124).

Liste du matériel :

- un transistor bipolaire 2N2222,
- une résistance $R_C = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance de $10\,\mathrm{k\Omega}$,
- un rhéostat de résistance variable,
- une source continue de tension,
- deux multimètres,
- un oscilloscope.

a. Mesure du gain en tension en sortie ouverte

> On propose de reprendre le montage de la Fig. 2 avec la valeur de R_B déterminée pour avoir $V_{CE} \simeq E/2$ (enlever l'ampèremètre qui servait à mesurer I_B). On pourra alors mesurer, pour des signaux sinusoïdaux d'entrée à 1 kHz et d'amplitude inférieure à 40 mV, l'amplitude en sortie v_S. On pourra alors calculer le rapport d'amplification $A_0 = v_S/v_E$. Il est conseillé de garder un œil sur la valeur de V_{CE} pour vérifier que le point de polarisation ne se déplace pas.

On s'attend à ce que

$$A_0 = -\frac{\beta R_C}{h_{11}}. \tag{8}$$

En effet, par définition, on a (voir le schéma électrique petits signaux équivalent avec $1/h_{22} \to 0$)

$$A_0 = \frac{v_S}{v_E} = -\frac{\beta R_C i'_B}{h_{11} i'_B} = -\frac{\beta R_C}{h_{11}}. \tag{9}$$

Pour le point de polarisation choisi, cela donne $A_0 \simeq \beta = 200$. Ce montage se comporte donc comme un très bon amplificateur de tension (mais variables uniquement).

b. Distorsion des signaux

> On peut continuer avec ce montage mais alimenter le circuit avec des tensions d'entrée d'amplitude plus importante (de l'ordre de la centaine de millivolts ou du volt). On pourra alors observer à l'oscilloscope le signal v_S et sa transformée de Fourier.

On doit alors constater que le signal en sortie se déforme (voire même s'écrête), et que la transformée de Fourier de v_S s'enrichit. Cela peut se quantifier par le taux de distorsion

$$\tau = \frac{\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n|^2}{\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2}, \tag{10}$$

où a_n désigne l'amplitude du fondamental ($n = 1$) ou des harmoniques ($n \geq 2$) dans le spectre de Fourier de v_S. Il pourra être commode de comparer à un signal d'entrée de faible amplitude pour interpréter la valeur de τ.

On peut évoquer deux raisons à cette distorsion. En premier lieu, pour des amplitudes modérées, le modèle petits signaux n'est plus valide. Il faudrait poursuivre le développement limité des caractéristiques autour du point de fonctionnement. Cela amènerait à des non-linéarités dans les équations, et donc à de l'enrichissement spectral avec apparition d'harmoniques aux multiples entiers de la fréquence fondamentale. En second lieu, à plus haute amplitude, le point de fonctionnement entre dans la zone de saturation, ce qui explique l'écrêtage du signal.

III. Montage émetteur commun robuste : résistance d'émetteur découplée et pont de base [MP 43]

Ce second montage permettra l'étude détaillée d'un amplificateur de tension, en particulier son gain et sa dépendance en fonction de la fréquence, ses impédances d'entrée et de sortie.

On considérera le montage de la Fig. 6. La tension d'entrée est v_E et celle de sortie est v_S.

1. Analyse du circuit de polarisation

Pour plus de détails sur le circuit, le lecteur est renvoyé aux Réf. [1] (pp. 46-47), [2] (pp. 121-122) et [4] (p. 267).

Liste du matériel :

- un transistor bipolaire 2N2222,
- une résistance $R_C = 820\,\Omega$,
- une résistance $R_E = 200\,\Omega$,
- une résistance $R_1 = 1{,}56\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_2 = 8{,}2\,\mathrm{k\Omega}$,
- une source continue de tension,
- un sèche-cheveux P101.10,
- deux multimètres.

Comme on l'avait fait précédemment, on commence par étudier le circuit de polarisation : là encore, les capacités servent à découpler les tensions d'entrée et de sortie des tensions et courants de polarisation.

> On propose de réaliser le montage de polarisation de la Fig. 7, avec $R_C = 820\,\Omega$, $R_E = 200\,\Omega$, $R_1 = 1{,}56\,\mathrm{k\Omega}$ et $R_2 = 8{,}2\,\mathrm{k\Omega}$. On pourra vérifier que le point de polarisation tombe au milieu du régime linéaire ($V_{CE} = 4{,}5\,\mathrm{V}$) avec une première jonction polarisée en direct ($V_{BE} \simeq 0{,}6\,\mathrm{V}$). À l'aide d'un sèche-cheveux, on pourra ensuite faire chauffer le transistor, tout en mesurant V_{CE}.

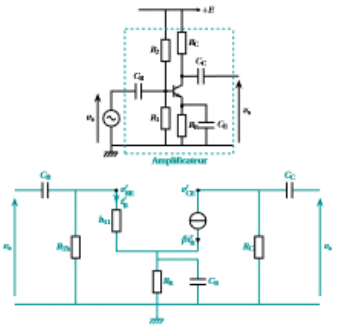


FIGURE 6 – **Amplificateur émetteur commun avec résistance d'émetteur découplée et pont de base.** On a également représenté le modèle petits signaux équivalent.

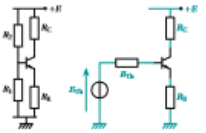


FIGURE 7 – **Analyse du circuit de polarisation.** À droite, circuit équivalent au circuit de polarisation où on a utilisé le théorème de Thévenin.

Ce montage a l'avantage d'avoir un point de polarisation moins sensible à la valeur de β, de sorte qu'il fluctue peu quand β fluctue (par chauffage).

Pour analyser le circuit de polarisation, on étudie le circuit électrique de la Fig. 7. Pour cela, on va utiliser le théorème de Thévenin entre la base et la masse. Pour le transistor, la source de tension continue et les deux résistances se comporte comme un générateur de Thévenin de force électromotrice $E_{Th} = R_1E/(R_1 + R_2)$ et de résistance interne $R_{Th} = R_1 \parallel R_2$. On peut alors introduire le circuit électrique équivalent représenté Fig. 7 (à droite). Il est alors facile de calculer les potentiels électriques à chacune des bornes du transistor :

$$\begin{cases} V_B = E_{Th} - R_{Th} I_B \\ V_E = R_E I_E = (\beta+1) R_E I_B \\ V_C = E - R_C I_C = E - \beta R_C I_B \end{cases} \tag{11}$$

On en déduit alors que

$$V_{BE} = V_B - V_E = E_{Th} - [(\beta+1)R_E + R_{Th}]\, I_B \Longrightarrow I_B = \frac{E_{Th} - V_{BE}}{(\beta+1)R_E + R_{Th}} \simeq \frac{E_{Th} - V_{BE}}{\beta R_E + R_{Th}}, \tag{12}$$

où $V_{BE} \simeq 0{,}6\,\mathrm{V}$ (tension de seuil de la jonction PN). On en déduit aussi les autres grandeurs statiques, comme le courant de collecteur

$$I_C = \beta I_B = \frac{E_{Th} - V_{BE}}{(1 + 1/\beta) R_E + R_{Th}/\beta} \simeq \frac{E_{Th} - V_{BE}}{R_E + R_{Th}/\beta} \tag{13}$$

ainsi que la tension

$$V_{CE} = V_C - V_E = E - R_C I_C - R_E I_E \simeq E - (R_E + R_C) I_C. \tag{14}$$

En premier lieu, on voudra que le point de polarisation dépende peu de la valeur de β, en particulier la valeur de I_C (et donc de V_{CE}). On cherchera donc à avoir $\beta R_E \gg R_{Th}$. De plus, on cherchera toujours à avoir le point de polarisation au milieu de la droite de charge statique, soit $V_{CE} = E/2$. Par ailleurs, on voudra limiter la puissance dissipée par le transistor, à savoir que $V_{CE} I_C \leq \mathcal{P}_{max}$, soit

$$I_C = \frac{E}{2(R_E + R_C)} \leq \frac{2\mathcal{P}_{max}}{E} \Longrightarrow R_E + R_C \geq \frac{E^2}{4\mathcal{P}_{max}} = 50\,\Omega. \tag{15}$$

On va prendre la même sécurité que précédemment, et on va considérer $R_E + R_C \simeq 1\,\mathrm{k\Omega}$ (comme ce qui est fait dans l'expérience, avec $R_E = 200\,\Omega$ et $R_C = 800\,\Omega$). Dans ce cas, on aura $I_C = 5\,\mathrm{mA}$, $I_B = 25\,\mu\mathrm{A}$. Pour réaliser la condition $\beta R_E \gg R_{Th}$, soit $R_{Th} \ll 40\,\mathrm{k\Omega}$, les valeurs de R_1 et R_2 mentionnées ci-dessus conviennent : elles sont choisies telles que $R_1 + R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et $R_{Th} = 800\,\Omega$.

2. Fonctionnement en régime alternatif

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1] (p. 91), [2] (pp. 122–124) et [4] (p. 328).

Liste du matériel :

- un transistor bipolaire 2N2222,
- une résistance $R_C = 820\,\Omega$,
- une résistance $R_E = 200\,\Omega$,
- une résistance $R_1 = 1{,}5\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_2 = 8{,}2\,\mathrm{k\Omega}$,
- deux condensateurs de capacité $C_B = C_C = 10\,\mu\mathrm{F}$,
- un condensateur de capacité $C_E = 1\,\mathrm{mF}$,
- une source continue de tension,
- un générateur basses fréquences,
- deux multimètres,
- un oscilloscope.

On utilise là encore des condensateurs afin de superposer les courants de polarisation du transistor aux signaux utiles. Ils se comportent comme des coupe-circuits pour le courant continu, et comme des fils pour les signaux variables.

a. Mesure du gain en tension en sortie ouverte

> On propose de câbler le montage de la Fig. 6. On choisira $C_B = C_C = 10\,\mu\mathrm{F}$ et $C_E = 1\,\mathrm{mF}$. Il faut prendre garde que les condensateurs de grande capacité sont le plus souvent électrochimiques : ils doivent être placés dans le bon sens (avec la borne + vers les tensions continues les plus élevées, c'est-à-dire vers le transistor). On alimentera le circuit avec un signal v_e sinusoïdal de faible amplitude (inférieure à 50 mV) et de fréquence de l'ordre du kHz à l'aide d'un générateur basses fréquences. On pourra ensuite mesurer la valeur efficace des tensions en entrée v_e et en sortie v_s à l'aide d'un voltmètre en mode AC pour remonter au gain en tension en sortie ouverte $A_e = v_s/v_e$.

On pourra vérifier que le gain en tension en sortie ouverte est donné par la relation :

$$A_e = -\frac{\beta R_C}{h_{11}} \tag{16}$$

En particulier, on pourra vérifier que le déphasage est bien égal à π entre les signaux en entrée et en sortie. Pour mesurer le gain, il suffit de tracer l'amplitude (ou la valeur efficace) de v_s en fonction de celle de v_e, puis effectuer une régression affine (voir le TP1).

On revient maintenant sur le choix des différentes capacités, en s'appuyant sur le modèle petits signaux simplifié de la Fig. 6, et toujours pour des signaux dont la fréquence est de l'ordre du kHz (domaine de l'audible). On va toujours vouloir que les condensateurs se comportent comme des fils, et donc que la tension à leur borne soit négligeable devant celle du transistor. En entrée, cela impose donc que $1/(\omega C_B) \ll h_{11} \parallel R_{T_1} = h_{11} \parallel R_1 \parallel R_2 = 600\,\Omega$. Cela impose donc que $C_B \gg 0{,}3\,\mu F$. Le même raisonnement en sortie amène à prendre C_C telle que $1/(\omega C_C) \ll R_C$, soit $C_C \gg 0{,}2\,\mu F$. Enfin, on voudra court-circuiter la résistance d'émetteur, ce qui pousse à prendre $1/(\omega C_E) \ll R_E$. Mais, on voudra simuler l'émetteur à la masse, ce qui impose que la chute de tension induite par le condensateur soit négligeable devant la tension en entrée du transistor, soit $h_{11} I_B' \gg 1/(\omega C_E) I_B'$, ou encore $1/(\omega C_E) \ll h_{11}/\beta$. Cette dernière condition est plus restrictive et pousse à prendre $C_E \gg 30\,\mu F$. Les valeurs de capacités prises expérimentalement sont en accord avec les conditions discutées ici.

Enfin, on mentionne que le déphasage entre v_e et v_s peut être différent de π si les capacités sont trop faibles. Pour trouver un déphasage de π, on peut augmenter ces capacités, ou alors augmenter la fréquence des signaux (ce qui fait diminuer l'impédance des condensateurs dans les deux cas).

On termine par faire remarquer qu'on a mesuré le gain en sortie ouverte, c'est-à-dire quand la charge est d'impédance très grande (ici de l'ordre du MΩ, correspondant à l'impédance du voltmètre). Pour une charge d'impédance plus faible, on s'attend à ce que le gain en tension dépende de l'impédance de la charge selon la relation :

$$A_v = -\frac{\beta(R_C \parallel Z_u)}{h_{11}}. \tag{17}$$

b. Distorsion des signaux

On peut procéder de la même manière que pour le montage à résistance de base (voir ci-dessus).

> On peut continuer avec le montage de la Fig. 6 mais alimenter le circuit avec des tensions d'entrée d'amplitude plus importante (de l'ordre de la centaine de millivolts ou du volt). On pourra alors observer à l'oscilloscope le signal v_s et sa transformée de Fourier.

On doit alors constater que le signal en sortie se déforme (voire même s'écrête), et que la transformée de Fourier de v_s s'enrichit. Cela peut se quantifier par le taux de distorsion

$$\tau = \frac{\sum_{n=2}^{+\infty} |a_n|^2}{\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2}, \tag{18}$$

où a_n désigne l'amplitude du fondamental ($n = 1$) ou des harmoniques ($n \geq 2$) dans le spectre de Fourier de v_s. Il pourra être commode de comparer à un signal d'entrée de faible amplitude pour interpréter la valeur de τ.

On peut évoquer deux raisons à cette distorsion. En premier lieu, pour des amplitudes modérées, le modèle petits signaux n'est plus valide. Il faudrait poursuivre le développement limité des caractéristiques autour du point de fonctionnement. Cela amènerait à des non-linéarités dans les équations, et donc à de l'enrichissement spectral avec apparition d'harmoniques aux multiples entiers de la fréquence fondamentale. En second lieu, à plus haute amplitude, le point de fonctionnement entre dans la zone de saturation, ce qui explique l'écrêtage du signal.

On peut se fixer un critère arbitraire sur l'amplitude pour pouvoir dire si la distorsion est acceptable ou non. Par exemple, l'amplitude de l'harmonique suivant doit être inférieur à une fraction de l'amplitude de l'harmonique principal. Ce critère dépendra de l'utilisation pratique de l'amplificateur.

c. Comportement fréquentiel

Ce qui a été fait plus haut dans le cas de signaux à une unique fréquence f peut être répété pour des signaux de différentes fréquences.

> On propose de mesurer le gain A_v en sortie ouverte pour des signaux d'entrée v_e de faible amplitude (inférieure à 40mV) et de différentes fréquences (entre 1 Hz et quelques MHz). On pourra alors tracer le diagramme de Bode de l'amplificateur, et en déduire sa bande passante.

On s'attend à observer un spectre relativement plat, avec des coupures haute fréquence (de l'ordre de quelques MHz) et basse fréquence (autour de 10 Hz). Un exemple de réalisation expérimentale est donné Fig. A1.

La coupure à basses fréquences s'explique par la présence des capacités de couplage, qui ne se comportent plus comme des fils à basses fréquences, et qui induisent alors des chutes de tension. On peut estimer cette fréquence de coupure en cherchant quand l'impédance des condensateurs n'est plus négligeable devant celle des résistances dans le circuit, et pour la capacité de base, on trouve $f = 1/(2\pi C_B(h_{11} \parallel R_1 \parallel R_2)) \simeq 25\,\text{Hz}$. La coupure à hautes fréquences s'explique quant à elle par les effets capacitifs des jonctions PN.

d. Mesure du gain en courant

On peut mesurer le gain en courant à l'aide d'ampèremètres en entrée et en sortie du montage. Pour cela, il faut brancher le montage à une charge (par exemple une résistance d'impédance Z_u). Mais le gain en courant dépend très fortement de la charge, et il est donné par la relation

$$A_i = \beta \frac{Z_u \parallel R_C}{Z_u} \frac{h_{11} \parallel R_1 \parallel R_2}{h_{11}}. \tag{19}$$

3. Impédances d'entrée et de sortie

Pour comprendre les expériences qui suivent, il est judicieux de se reporter à la Fig. 1 qui représente la structure usuelle d'un montage amplificateur. On désire maintenant accéder expérimentalement aux résistances d'entrée (notée Z_e) et de sortie (notée Z_s) de l'amplificateur.

Liste du matériel :

- un transistor bipolaire 2N2222,
- une résistance $R_C = 820\,\Omega$,
- une résistance $R_E = 200\,\Omega$,
- une résistance $R_1 = 1{,}56\,\text{k}\Omega$,
- une résistance $R_2 = 8{,}2\,\text{k}\Omega$,
- deux condensateurs de capacité $C_B = C_C = 10\,\mu F$,
- un condensateur de capacité $C_E = 1\,\text{mF}$,
- un rhéostat de résistance variable P56 . 32,
- une source continue de tension,
- un générateur basses fréquences,
- un multimètre.

a. Impédance d'entrée

Pour déterminer la résistance d'entrée de l'amplificateur, on utilise la méthode de la tension moitié.

> On propose de toujours travailler avec le montage de la Fig. 6, en revenant avec un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence de l'ordre du kHz et d'amplitude de l'ordre de 40mV. On intercalera entre le GBF et le condensateur de capacité C_B une résistance variable R (voir Fig. 8). On mesurera la valeur efficace de la tension en sortie v_s de l'amplificateur quand R est court-circuitée. On ajustera ensuite R pour diminuer de moitié la tension en sortie de l'amplificateur.

On pourra alors remonter à la valeur de Z_e, en notant que pour la valeur de R telle qu'on a atteint une valeur moitié de tension, on aura $R = R_{GBF} + Z_e$, où $R_{GBF} = 50\,\Omega$ désigne la résistance interne du GBF. On pourra alors comparer à la valeur théorique :

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{h_{11}}. \tag{20}$$

Pour le montage considéré ici, avec le point de polarisation choisi, on s'attend à $Z_e = 600\,\Omega$. On rappelle que cette expression peut s'obtenir très facilement en regardant le schéma électrique petits signaux équivalent de la Fig. 6.

On revient sur l'explication du montage, en s'appuyant sur le schéma de la Fig. 8. Si la résistance R est court-circuitée par un fil ($R = 0\,\Omega$), alors

$$v_s = \frac{Z_e}{Z_e + R_{GBF}} e, \tag{21}$$

avec e la force électromotrice du GBF. Lorsque R n'est plus court-circuitée, on a plutôt

$$v_s = \frac{Z_e}{Z_e + R + R_{GBF}} e. \tag{22}$$

Ainsi, lorsque $R = R_{GBF} + Z_e$, la tension v_s a pour amplitude la moitié de la valeur qu'elle a quand R est court-circuitée. Dans l'expérience, on travaille avec v_s plutôt qu'avec v_e car on profite de l'amplification pour être plus résolu sur la mesure de Z_e. Cela est possible car en sortie ouverte, on a simplement $v_s = A_v v_e$.

On termine par mentionner que l'impédance d'entrée obtenue ici est *élevée*, mais n'est pas très élevée. En d'autres termes, ce montage ne sera un bon amplificateur que si l'impédance intercalée en amont entre la tension à amplifier et l'amplificateur est inférieure à Z_e.

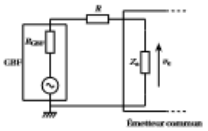


FIGURE 8 – Mesure de l'impédance d'entrée du montage émetteur commun.

b. Impédance de sortie

Pour déterminer la résistance de sortie de l'amplificateur, on utilise une méthode analogue à celle utilisée précédemment pour l'impédance d'entrée.

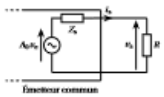


FIGURE 9 – Mesure de l'impédance de sortie pour le montage émetteur commun.

> On propose de toujours travailler avec le montage de la Fig. 6, en resonant avec un signal d'entrée sinusoïdal de fréquence de l'ordre du kHz et d'amplitude de l'ordre de 40 mV. On placera en sortie (entre le condensateur de capacité C_C et la masse) une résistance variable R (voir Fig. 9). On mesurera la valeur efficace de la tension en sortie v_s de l'amplificateur quand R est très grande (de l'ordre du MΩ). On ajoutera ensuite R pour diminuer de moitié la tension en sortie de l'amplificateur.

On pourra alors comparer à la valeur théorique, qui est :

$$Z_s = R_C \parallel (U/I_{C2}) \simeq R_C. \tag{23}$$

Pour le montage considéré ici, on s'attend à $Z_s = 820\,\Omega$. On rappelle que cette expression peut s'obtenir très facilement en regardant le schéma électrique petits signaux équivalent de la Fig. 6.

On revient sur l'explication du montage, en s'appuyant sur le schéma de la Fig. 9. Si la résistance R est très grande (devant Z_s), alors on a simplement $v_s = A_0 v_e$. Par contre, dans le cas général, il faut faire un pont diviseur de tension et on trouve

$$v_s = \frac{Z_s}{Z_s + R} A_0 v_e. \tag{24}$$

Ainsi, lorsque $R = Z_s$, la tension v_s a pour amplitude la moitié de la valeur qu'elle a quand R est infinie (circuit ouvert).

On termine par mentionner que l'impédance de sortie obtenue ici est élevée. En d'autres termes, ce montage ne sera un bon amplificateur que si l'impédance intercalée en aval est supérieure à Z_s. Ainsi, il ne pourra pas délivrer de forts courants. En clair, ce montage ne peut pas servir d'amplificateur de puissance.

Pour illustrer le fait qu'un second étage d'amplification est nécessaire, on peut revenir à la chaîne d'acquisition avec le microphone et le haut-parleur.

> On pourra intercaler l'amplificateur émetteur commun entre le microphone et le haut-parleur et constater qu'on n'entend toujours rien en sortie du haut-parleur. Pour être plus quantitatif, on peut mesurer l'impédance d'entrée

> du haut-parleur et la comparer avec l'impédance de sortie de l'amplificateur. Ne pas démonter l'amplificateur émetteur commun car il sera utile pour construire la totalité de la chaîne d'acquisition à la fin de ce TP.

En pratique, on trouve que l'impédance du haut-parleur est de l'ordre de quelques ohms, bien trop faible par rapport à l'impédance de sortie du montage émetteur commun.

IV. Le montage push-pull [MP 43]

Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la BdE [1] (p. 102), ou bien à la BdE [2] (pp. 129-132).

1. Première approche

On considère le montage push-pull dont une représentation simplifiée est donnée Fig. 10, constitué de deux transistors NPN et PNP placés tête-bêche.

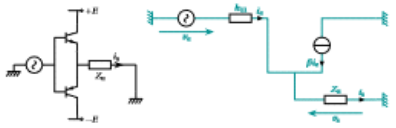


FIGURE 10 – Circuit push-pull : première approche. À droite, le schéma petits signaux équivalent du montage push-pull.

Liste du matériel :

- le montage push-pull déjà câblé P41.18,
- deux alimentations de tension continue (par exemple des modules HAMEG P27.18),
- un rhéostat de résistance variable P61.9 pouvant supporter des courants de plusieurs ampères (en clair, cela exclut les boîtes à décades utilisées habituellement!),
- un générateur basses fréquences,
- deux multimètres,
- un oscilloscope.

a. Fonctionnement en régime alternatif

> On propose de réaliser le circuit de la Fig. 10. On utilisera le circuit déjà câblé de la collection. On prendra $E = 15$ V et on travaillera pour le moment en sortie ouverte ($Z_s \to +\infty$). On pourra prendre pour commencer une tension sinusoïdale de fréquence 1 kHz et d'amplitude de l'ordre de quelques volts, délivrée par un générateur basses fréquences. On observera les signaux aux bornes du GBF et de la résistance à l'oscilloscope.

On pourra alors constater que le gain en tension en sortie ouverte de ce montage est de l'ordre de 1 (par contre, il diminue quand Z_s diminue). Par ailleurs, on pourra constater la distorsion du signal, qui vient de la tension de seuil de l'ordre de 0,6 V de la jonction PN base-émetteur. En effet, la loi des mailles appliquée entre l'entrée et la sortie en passant par le transistor NPN montre que $v_s = v_e - v_{BE}$, où $v_{BE} = V_{BE} \simeq 0{,}6$ V. On en déduit donc d'une part que la tension en sortie est décalée par rapport à la tension en entrée de la tension de seuil de la jonction PN base-émetteur. En outre, on en déduit que le transistor NPN ne délivre un courant non nul en sortie que si $v_e \geq 0{,}6$ V. Sinon, le courant de base est quasiment nul (transistor bloqué), tout comme le courant en sortie. De la même manière, la loi des mailles appliquée entre l'entrée et la sortie en passant par le transistor PNP montre que $v_s = v_e + v_{EB}$, où $v_{EB} = V_{EB} \simeq -0{,}6$ V (car la base est dopée n et l'émetteur dopé p). On en déduit donc d'une part que la tension en sortie est décalée par rapport à la tension en entrée de la tension de seuil de la jonction PN base-émetteur. En outre, on en déduit que le transistor PNP ne délivre un courant non nul en sortie que si $v_e \leq -0{,}6$ V. Sinon, le courant de base est quasiment nul (transistor bloqué), tout comme le courant en sortie. Finalement, si la tension d'entrée est telle que $-0{,}6\,\text{V} < v_e < 0{,}6$ V, alors la tension de sortie est nulle, tout comme les courants de sortie.

Pas de distortion en boucle ouverte, car impédance infini implique petit courant, donc carac non linéaire on atteint pas

Dans le cas où Z_R n'est pas infinie, on peut introduire le modèle petits signaux équivalents du montage push-pull (voir Fig. 10, à droite). On constate alors que $v_s = Z_R i_b = Z_R(\beta+1)i_b$. Par ailleurs, on a $i_b = (v_e - v_b)/h_{11}$, ce qui permet d'en conclure finalement que

$$A_v = \frac{v_s}{v_e} = \frac{Z_R(\beta+1)}{h_{11} + Z_R(\beta+1)}. \tag{25}$$

> On peut ensuite augmenter l'amplitude de la tension en entrée à des valeurs de l'ordre de 15V (de l'ordre de E), et observer à l'oscilloscope la tension v_s.

On pourra alors constater l'écrêtage du signal en sortie. En effet, en s'intéressant par exemple au transistor NPN, on voit que $v_{CE} = E - v_s = E - v_e$ (car le gain en tension du montage push-pull est environ égal à 1. On en conclut alors que si $v_e \gtrsim E - 1V$, on rentre dans le régime de saturation du transistor (partie non constante des caractéristiques de sortie du transistor), ce qui va conduire à un écrêtage du signal (comme dans le cas du montage émetteur commun).

> On propose maintenant de mesurer le gain en courant du montage push-pull. Pour cela, on réalisera toujours le montage de la Fig. 10 en mettant en sortie un rhéostat d'impédance de l'ordre de quelques dizaines d'ohms pouvant supporter des courants de plusieurs ampères. On intercalera un ampèremètre juste après le GBF pour mesurer la valeur efficace du courant en entrée i_e. On mesurera également la tension aux bornes de la résistance en sortie afin d'en déduire la valeur efficace du courant en sortie $i_s = v_s/Z_R$. On pourra alors en déduire le gain en courant A_i du montage push-pull.

Il suffit de tracer i_s en fonction de i_e pour différentes valeurs de i_e, puis d'effectuer une régression affine, dont la pente vaut A_i (voir TP1). On pourra alors comparer à la valeur théorique attendue :

$$A_i \simeq \beta + 1. \tag{26}$$

Ici, on attend $A_i = 200$. On peut justifier facilement l'expression précédente, en notant que le courant de sortie du montage push-pull est égal au courant en sortie de l'émetteur (par exemple du NPN pour les alternances positives de i_e), qui vaut dans le régime linéaire de fonctionnement des transistors $i_s = i_B + i_C = i_C + i_B = (\beta+1)i_B = (\beta+1)i_e$. On rappelle qu'un seul transistor n'est pas bloqué à chaque instant.

b. Mesure de l'impédance de sortie

On se focalise maintenant sur l'impédance de sortie du montage. En effet, on a vu précédemment que le montage push-pull avait un fort gain en courant, mais pour qu'il soit un bon amplificateur de puissance, il doit avoir une faible impédance de sortie (ce que n'avait pas le montage émetteur commun).

> On propose de réaliser la méthode de la tension moitié. Pour cela, on alimentera le circuit avec un signal sinusoïdal de fréquence de l'ordre du kHz et d'amplitude de l'ordre de quelques volts. On pourra alors mesurer au multimètre la valeur efficace de la tension en circuit ouvert. Puis on branchera un rhéostat variable pouvant supporter plusieurs ampères, et on mesurera la tension à ses bornes. On fera alors varier sa résistance jusqu'à obtenir une valeur efficace de tension égale à la moitié de celle mesurée en sortie ouverte. La valeur de résistance ainsi obtenue correspond à l'impédance de sortie Z_s du montage.

On peut alors comparer la valeur obtenue expérimentalement à celle attendue théoriquement :

$$Z_s = \frac{h_{11} + R_{GBF}}{\beta+1}, \tag{27}$$

où R_{GBF} désigne l'impédance interne du GBF. On attend alors une impédance de sortie de l'ordre de 10Ω assez faible. Le montage push-pull est donc un bon amplificateur de puissance.

Pour obtenir la formule donnée ci-dessus, on utilise la loi des mailles, qui donne que $v_e = v_b + (h_{11} + R_{GBF})i_b$, soit finalement

$$v_s = v_e - \frac{h_{11} + R_{GBF}}{\beta+1} i_b = A_v v_e - \frac{h_{11} + R_{GBF}}{\beta+1} i_s. \tag{28}$$

Par définition de Z_s, on obtient la relation donnée ci-dessus.

c. Mesure du rendement

On termine par estimer le rendement du montage push-pull, en comparant l'énergie consommée (puissance fournie aux alimentations continues) et la puissance récupérée en sortie (transmise à la charge utile).

> On mesurera la puissance $\mathcal{P}_{alim} = 2EI_{moy}$ que consomment les alimentations continues (où I_{moy} désigne l'intensité moyenne en sortie des alimentations mesurable avec un ampèremètre), et la puissance délivrée à la charge $\mathcal{P}_u = Z_R I_{eff,s}^2$ (avec $I_{eff,s}$ la valeur efficace du courant circulant en sortie), lorsque Z_R est égale à l'impédance de sortie du montage push-pull déterminée précédemment. On utilisera toujours un rhéostat pouvant supporter des courants de plusieurs ampères. On alimentera le circuit avec un signal sinusoïdal d'amplitude de l'ordre de E et de fréquence de l'ordre du kHz. Si le GBF n'est pas capable de délivrer une tension de l'ordre de E, on diminuera E pour qu'elle coïncide avec l'amplitude maximale que peut délivrer le GBF. On pourra alors en déduire le rendement maximal du push-pull.

On pourra alors comparer à la valeur attendue $\eta_{max} \simeq \pi/4 \simeq 0{,}78$. Pour déterminer ce rendement maximal, on commence par déterminer la puissance fournie aux alimentations. On notera tout d'abord que le point de polarisation de ce montage correspond à $I_B = I_C = 0A$ pour les deux transistors. Néanmoins, I_{moy} (qui correspond à la valeur moyenne du courant circulant dans le collecteur) est non nulle, car chaque transistor est bloqué pendant une demi-période. Par exemple, pour le transistor NPN, le courant est positif pendant une demi-période, et s'annule pendant la seconde demi-période. On peut alors estimer la valeur moyenne du courant circulant dans le collecteur :

$$I_{moy} = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} i_C(t)\mathrm{d}t = \frac{\beta}{T(\beta+1)}\int_0^{T/2} i_b(t)\mathrm{d}t = \frac{A_v\beta}{T(\beta+1)Z_R}\int_0^{T/2} v_b(t)\mathrm{d}t = \frac{A_v V_e \beta}{\pi(\beta+1)Z_R} = \frac{A_v V_e}{\pi Z_R}, \tag{29}$$

où V_e désigne l'amplitude de la tension v_e. On obtient ensuite la puissance fournie aux alimentations (où le facteur 2 vient du fait qu'il y a deux transistors :

$$\mathcal{P}_{alim} = \frac{2A_v E V_e}{\pi Z_R}. \tag{30}$$

On détermine ensuite la puissance en sortie reçue par la charge :

$$\mathcal{P}_u = \frac{1}{TZ_R}\int_0^T v_s(t)^2\mathrm{d}t = \frac{A_v^2 V_e^2}{2Z_R}. \tag{31}$$

On en déduit alors le rendement du montage :

$$\eta \simeq \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}_{alim}} = \frac{\pi A_v V_e}{4E}. \tag{32}$$

Or, on peut réécrire A_v sous la forme $A_v = Z_R/(Z_R + Z_s)$ où Z_s désigne l'impédance de sortie du montage push-pull (il faut tenir compte de R_{GBF} dans l'expression de A_v), et on trouve finalement

$$\eta = \frac{\pi}{4}\frac{V_e}{E}\frac{Z_R}{Z_R + Z_s}. \tag{33}$$

En fonctionnement nominal $Z_R = Z_s$, et pour V_e à la limite du fonctionnement en saturation, on trouve bien l'expression donnée ci-dessus. On notera que $\eta \to 1$ quand $Z_R \to \infty$, mais alors la puissance utile est nulle (d'où l'utilité de se placer en fonctionnement nominal).

Ce très bon rendement du montage push-pull s'explique par le fait que les transistors sont bloqués pendant une demi-période. Contrairement au montage émetteur commun, il ne travaille pas autour d'un point de fonctionnement non nul qui force les alimentations à fournir constamment de la puissance.

> On peut terminer en câblant l'ensemble de la chaîne d'amplification : microphone, puis montage émetteur commun, puis montage push-pull, et enfin haut-parleur. On peut alors constater qu'en enregistrant un son au microphone, on peut l'entendre en sortie du haut-parleur.

Cela est en accord avec le fait que Z_R est maintenant de l'ordre de l'impédance du haut-parleur.

3. Correction de la distorsion (*)

Comme mentionné plus haut, le montage push-pull crée de la distorsion. Pour réaliser une correction de cette distorsion, on pourra se référer à la Réf. [2] (pp. 131-132). Deux montages y sont proposés.

Dans le premier montage, la correction de la distorsion consiste à placer des diodes qui seront polarisées par les tensions $+E$ et $-E$. La tension aux bornes de la diode sera donc de 0,6 V, corrigeant ainsi la distorsion induite par les jonctions PN base-émetteur des transistors.

Dans le second montage, la correction de la distorsion est réalisée à l'aide d'une contre-réaction par amplificateur linéaire intégré. Le principe est le même que celui de la diode-sans seuil (voir TP6).

Cette correction de la distorsion est importante si on revient au cas de la chaîne d'acquisition avec microphone et haut-parleur. En effet, la distorsion enrichit le spectre des signaux, avec la présence d'harmoniques, qui peuvent nuire à la qualité sonore, ou détériorer le son enregistré.

Références

[1] J.-M. Dominici et L. Quaranta, *Introduction à l'électronique*, Masson (1998).

[2] R. Duffait et J.-P. Lièvre, *Agrégation de Sciences Physiques - Expériences d'électronique*, Bréal (1999).

[3] Jolidon, *Physique expérimentale - Optique, magnétisme, électrostatique, mécanique, thermodynamique et physique non linéaire*, EDP Sciences (2021).

[4] A. P. Malvino et D. J. Bates, *Principes d'électronique*, Dunod (2016).

[5] J.-P. Pérez, C. Laguste, J.-Y. Fourniols, S. Boubours, *Électronique. Fondements et applications*, Dunod (2012).

[6] R. Ménut, R. Moreau, L. Allag, J.-P. Dubos, J. Lafargue et R. Le Goff, *Génie électronique*, Nathan (1997).

Exemples de résultats expérimentaux

Figure A1 – **Diagramme de Bode expérimental du montage émetteur commun avec pont de base et résistance d'émetteur découplée.**

Oscillateurs quasi-sinusoïdaux

Table des expériences

I.	Généralités sur les oscillateurs	101
II.	Oscillateur de Wien [MPs 8, 9, 53 et 57]	104
III.	Oscillateur de Colpitts [MPs 8 et 53]	110
IV.	Oscillateur à résistance négative [MPs 8, 9, 35 et 53]	121

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de rétroions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituant également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Généralités sur les oscillateurs

Dans ce TP, on s'intéresse aux oscillateurs. Pour rappel, un oscillateur est un système qui génère un signal périodique. Dans le cas où la source est elle aussi périodique, on parle d'oscillateur forcé. On va s'intéresser ici au cas des oscillateurs auto-entretenus, c'est-à-dire dont l'excitation est une source continue. Pour de plus amples détails sur la description des oscillateurs, nous renverrons le lecteur à la Réf. [6] (pp. 119-125), à la Réf. [3] (p. 165 et pp. 179-181), ou à la Réf. [2] (pp. 235-241).

1. Propriétés générales des oscillateurs

Dans ce TP, nous allons voir les principes de base des oscillateurs quasi-sinusoïdaux en électronique. Le but est de créer des oscillations quasi-sinusoïdales à partir de sources de tension continues. On parle d'oscillations quasi-sinusoïdales, car il est rigoureusement impossible d'avoir des oscillations sinusoïdales.

- D'une part, l'existence de non-linéarités dans le circuit (qui permettent, entre autres, de fixer l'amplitude des oscillations) induit l'existence d'harmoniques dans le spectre du signal aux bornes de l'oscillateur. Cela est usuellement quantifié par le taux de distorsion

$$\tau = \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^{+\infty} |c_{nk}|^2}{\sum_{k=1}^{+\infty} |c_{nk}|^2}}, \tag{1}$$

  défini pour un signal périodique de fréquence fondamentale f dont la décomposition en série de Fourier est $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{nk} e^{jk\omega_0 t}$ (où on rappelle que $c_{-nk} = c_{nk}^*$ par symétrie hermitienne).
- D'autre part, la dérive au cours du temps des paramètres du circuit (dû au vieillissement ou à la variation de paramètres extérieurs comme la température) peut changer la fréquence fondamentale d'oscillation du système, conduisant à un élargissement effectif du spectre du signal aux bornes de l'oscillateur (s'il est obtenu par la transformée de Fourier de $s(t)$ mesuré sur un temps suffisamment long). Cela est quantifié par le coefficient de stabilité en fréquence

$$\sigma = \frac{f}{\Delta f}, \tag{2}$$

  où f désigne la fréquence moyenne fondamentale d'oscillation de l'oscillateur (correspondant à la fréquence pour laquelle le spectre de $s(t)$ est maximal si l'expérience est réalisée sur un temps suffisamment long), et Δf la variation de sa fréquence fondamentale au cours du temps (ou la largeur du pic fondamental dans le spectre si l'expérience est réalisée sur un temps suffisamment long).

Un bon oscillateur quasi-sinusoïdal est donc tel que $\tau \to 0$ et $\sigma \to +\infty$.

Pour les oscillateurs quasi-sinusoïdaux, on dit que les non-linéarités sont « faibles » (même si cela ne veut rien dire de façon absolue), par comparaison avec les oscillateurs à relaxation qui seront vus dans le TP suivant, et pour lesquels le spectre du signal à leurs bornes est beaucoup plus riche. Attention cependant que cette classification reste d'une part un certain arbitraire, et il faudrait être quantitatif sur ce que signifie « quasi-sinusoïdal » et « à relaxation » (par exemple en se donnant un critère sur le taux de distorsion). D'autre part, un circuit oscillateur n'est pas intrinsèquement un oscillateur quasi-sinusoïdal

ou à relaxation. Un oscillateur présente généralement l'un ou l'autre des comportements selon les valeurs de certains paramètres du circuit. On peut donc passer d'un oscillateur quasi-sinusoïdal à un oscillateur à relaxation ou réciproquement en faisant varier continûment un paramètre du circuit. Cela peut se comprendre en analysant l'oscillation du circuit en termes d'instabilité, ce qui est l'objectif du paragraphe suivant.

2. Rappels généraux sur la stabilité des systèmes linéaires

L'objectif est de faire le lien entre oscillateurs et instabilité des systèmes linéaires à contre-réaction. Avant de faire ce lien, il convient de rappeler quelques théorèmes généraux sur la stabilité des systèmes linéaires en électronique. Pour plus de détails sur ces aspects, on pourra consulter la Réf. [6] (pp. 121-123) ou la Réf. [7] (pp. 137-151). Dans ce paragraphe, nous allons rappeler les critères de stabilité de systèmes linéaires invariants dans le temps (SLITs).

Figure 1 – Représentation d'un système linéaire invariant dans le temps sous forme d'un schéma-bloc.

Pour cela, nous supposerons que le système dont on souhaite étudier la stabilité peut être schématisé sous la forme d'un schéma-bloc[1] faisant intervenir sa fonction de transfert $H(p)$, voir Fig. 1. On rappelle que la fonction de transfert $H(p) = Y(p)/X(p)$ d'un SLIT schématisé Fig. 1 est le quotient de la transformée de Laplace $Y(p)$ de la sortie $y(t)$ par celle $X(p)$ de l'entrée $x(t)$. On rappelle également que la transformée de Laplace est définie pour des signaux $x(t)$ causaux (c'est-à-dire nuls pour $t < 0$) par

$$X(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}t\, x(t) e^{-pt} \tag{3}$$

pour $p \in \mathbb{C}$. On notera que cette transformée de Laplace coïncide avec la transformée de Fourier d'un signal causal, lorsque p décrit l'axe imaginaire pur dans le plan complexe. Pour simplifier, nous allons supposer que la fonction du transfert du système est de la forme

$$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}, \tag{4}$$

où $N(p) = \sum_{k=0}^{m} b_k p^k$ et $D(p) = \sum_{k=0}^{n} a_k p^k$ sont des polynômes à coefficients réels (avec $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$ et $a_0 b_0 \neq 0$), et où $n \geq m$ pour les systèmes causaux. Cela revient à dire que la relation entrée-sortie du système considéré dans le régime temporel est de la forme

$$a_n \frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}(t) + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) + a_0 y(t) = b_m \frac{\mathrm{d}^m x}{\mathrm{d}t^m}(t) + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + b_0 x(t). \tag{5}$$

On peut préciser plusieurs choses. En premier lieu, il faut mentionner que tous les SLITs n'ont pas une fonction de transfert qui se met sous cette forme. Pour plus de détails sur ce point, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [6] (pp. 121-122). En second lieu, on peut comprendre à partir de l'équation différentielle précédente pourquoi $n \geq m$ pour des systèmes causaux, en considérant la version échantillonnée dans le temps de cette équation à la période T_0, et en notant $y[k] = y(kT_0)$, et pareillement pour $x(t)$ (voir également le TP2 sur le filtrage numérique). En approximant les dérivées par des différences finies, on obtient que le membre de droite fera intervenir $y[k]$, $y[k+1]$, …, $y[k+n]$, tandis que le membre de gauche fera intervenir $x[k]$, $x[k+1]$, …, $x[k+m]$. Cela revient à dire que $y[k+n]$ s'exprime en fonction de $y[k]$, …, $y[k+n-1]$, $x[k]$, …, $x[k+m]$, et la causalité impose que la sortie ne peut dépendre que des valeurs d'entrée dans le passé, soit $m \leq n$.

Les critères suivants sont alors équivalents pour établir la stabilité d'un système linéaire :

- la réponse du système à toute entrée bornée est bornée ;
- la fonction de transfert a des pôles (définis comme les zéros de $D(p)$) (i) de partie réelle strictement négative ou (ii) imaginaires purs non nuls et simples ;
- tous les éléments de la première colonne du tableau de Routh sont de même signe (critère de Routh).

En ce qui concerne le second point, le cas (i) correspond à une réponse impulsionnelle (définie comme la transformée de Laplace inverse de $H(p)$) qui décroît exponentiellement vers 0 à l'infini, et le cas (ii) à une réponse impulsionnelle sinusoïdale. Ce dernier est un cas limite de stabilité où la réponse à une entrée bornée sera bien bornée, mais ne décroîtra pas vers 0 à temps long.

1. Cela n'a rien d'évident a priori. Cela suppose d'une part que le système est linéaire. D'autre part, la plupart des systèmes qu'on considère en TP sont des quadripôles (deux grandeurs caractéristiques en entrée, et deux en sortie). Se ramener à un tel schéma-bloc revient à ne considérer qu'une seule variable d'entrée et une seule de sortie, et donc à considérer que les autres variables sont finies par le reste du circuit. En d'autres termes, cette modélisation schéma-bloc n'est pas intrinsèque et dépend des composants en amont et en aval.

3. Oscillations et systèmes bouclés

On peut maintenant faire le lien entre les oscillateurs et l'étude de la stabilité des systèmes linéaires décrite plus haut. Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à la Réf. [6] (pp. 123–124), à la Réf. [7] (pp. 151–171), à la Réf. [2] (pp. 237–241), ou encore à la Réf. [3] (pp. 179–181).

Il faut tout d'abord noter que tous les oscillateurs sont des systèmes bouclés, de sorte qu'une modélisation sous forme de schéma-bloc est donnée Fig. 2. Dans ce schéma, $A(p)$ désigne la chaîne directe (qui correspond typiquement à un système actif alimenté par une tension continue), tandis que $B(p)$ correspond à la chaîne de retour (ou contre-réaction qui correspond typiquement à un filtre passif). Les précautions concernant la modélisation du système sous forme de schéma-bloc énoncées précédemment restent valables ici. En particulier, la nécessité d'avoir une fonctionnement linéaire implique que cette modélisation n'est acceptable pour un oscillateur qu'au démarrage des oscillations, c'est-à-dire avant que l'amplitude ne soit trop grande et que les non-linéarités commencent à intervenir dans le comportement du circuit.

Figure 2 – Schéma-bloc d'un système bouclé à rétroaction positive (+) ou négative (-).

La sortie $S(p)$ s'exprime en fonction de l'entrée $E(p)$ par la relation

$$S(p) = \frac{A(p)}{1 \mp A(p)B(p)} E(p) = H(p)E(p), \tag{6}$$

où $H(p)$ est la fonction de transfert en boucle fermée (FTBF) du système, tandis que le produit $A(p)B(p) = T(p)$ désigne la fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO). Ce système sera alors un oscillateur si, lorsque l'entrée est quantiquement nulle[3], la réponse n'est pas bornée et conduit à une sortie $s(t)$ qui oscille avec une amplitude qui diverge exponentiellement. Le système bouclé est un oscillateur s'il est instable (selon les définitions du paragraphe précédent), et donc si sa FTBF $H(p)$ présente au moins un pôle de partie réelle strictement positive, ou encore si $T(p) = 1$ présente au moins un zéro de partie réelle strictement positive. Le cas limite de stabilité énoncé ci-dessus correspond au cas où la FTBF présente un pôle de partie réelle nulle.

Il existe alors un critère géométrique qui permet de déduire les propriétés de stabilité de la FTBF à partir de la FTBO, et qui s'appelle le critère de Nyquist[3]. Nous en présentons une version simplifiée, appelé critère du revers, dans l'hypothèse où le système est stable en boucle ouverte, c'est-à-dire que $T(p)$ ne présente pas de pôle de partie réelle strictement positive. Le système sera stable en boucle fermée si et seulement si, lors de l'analyse harmonique du système en boucle ouverte (ce qui revient à prendre $p = j\omega$), le lieu des points de la FTBO dans le diagramme de Nyquist $[\mathrm{Re}[\underline{T}(j\omega)], \mathrm{Im}[\underline{T}(j\omega)]]$ laisse le point $(\pm 1, 0)$ sur sa droite/gauche (ou n'entoure pas le point $(\pm 1, 0)$) quand ω décrit l'intervalle $[0, +\infty[$. En d'autres termes, un oscillateur (mais qui est stable en boucle ouverte) est tel que sa FTBO entoure le point $(\pm 1, 0)$ dans le diagramme de Nyquist. Une illustration schématique du critère du revers peut être trouvée dans la Réf. [6] (p. 124) dans le cas d'une rétroaction négative.

La limite de stabilité et le seuil d'oscillation sont donc décrits par l'existence de deux pôles de la FTBF non nuls imaginaires purs et complexes conjugués. Cela conduit donc à l'existence d'une pulsation ω telle que

$$\underline{T}(j\omega) = \underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega) = \pm 1, \tag{7}$$

c'est-à-dire qui vérifie la condition de Barkhausen. On rappelle que le signe + correspond au cas d'une rétroaction positive, et le − au cas d'une rétroaction négative. Cette condition doit être vérifiée en module et en phase pour la FTBO. Le gain de la boucle ouverte [le module de $\underline{T}(j\omega)$] doit donc être égal à 1. La condition sur la phase signifie que le signal de sortie de la boucle ouverte doit être en phase (ou en opposition de phase) avec le signal en entrée : le signal, après passage dans la boucle, doit s'ajouter constructivement avec le signal en entrée.

3. Dans les expériences, cela correspondra au bruit électronique dans le circuit.
3. La version complète du critère de Nyquist est la suivante. On considère dans le plan complexe un contour $\mathscr{C}$ entourant tout le demi-plan complexe de partie réelle positive, non-imaginaire incluse. Celui-ci est formé par l'axe imaginaire pur $p = j\omega$ (avec ω allant de $-\infty$ à $+\infty$) et d'un demi-cercle de rayon $R \to +\infty$, le tout parcouru dans le sens horaire. Le système décrit par la FTBF $H(p)$ sera stable si et seulement si, lorsque p décrit le contour $\mathscr{C}$, la FTBO $T(p)$ fait autour du point $(+1, 0)$ un nombre de tours égal à P dans le sens anti-horaire, où P désigne le nombre de pôles de partie réelle strictement positive de la FTBO $T(p)$. On retrouve alors le critère du revers en prenant $P = 0$.

4. Application des oscillateurs

Les oscillateurs ont plusieurs applications, du fait de la facilité de générer un signal alternatif à partir d'une excitation continue, et de leur grande stabilité en fréquence.

Ils sont tout d'abord beaucoup utilisés en électronique afin de faire des signaux d'horloge (on utilise alors des oscillateurs à relaxation). Le fonctionnement des générateurs de fonctions, comme les générateurs basses fréquences utilisés en TP, repose par exemple sur ce principe. Ces derniers possèdent une horloge interne à une fréquence de 50 MHz qui commande un convertisseur numérique-analogique permettant de générer des signaux de n'importe quelle forme, fréquence, et amplitude. Pour plus de détails sur ce point, nous renvoyons le lecteur à la documentation des GBF. Ces signaux d'horloge sont également très utilisés pour réaliser de la conversion analogique-numérique, par exemple dans les systèmes échantillonneurs (voir TP2).

On trouve également l'utilisation d'oscillateurs en modulation de fréquence (oscillateurs commandés en tension), dont la fréquence d'oscillation dépend d'une tension extérieure imposée. Pour plus de détails sur ce point, nous renvoyons le lecteur au TP8.

II. Oscillateur de Wien [MPs 8, 9, 53 et 57]

Nous proposons de réaliser l'expérience de l'oscillateur à pont de Wien, également détaillée dans les Réf. [6] (pp. 131–138) ou Réf. [3] (pp. 181–183), ou bien encore dans la Réf. [2] (pp. 242–250).

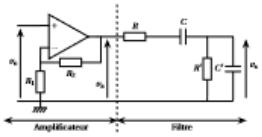


Figure 3 – Oscillateur à pont de Wien en boucle ouverte.

1. Description

Le pont de Wien est représenté en boucle ouverte Fig. 3. Ce montage peut se décomposer sous la forme de deux éléments incontournables pour réaliser un oscillateur (déjà mentionnés ci-dessus) :

- un amplificateur non-inverseur de fonction de transfert $A(p) = 1 + R_2/R_1$,
- un filtre passe-bande d'ordre 2 de fonction de transfert

$$B(p) = \frac{pR'C}{1 + pR'C(1 + R/R' + C'/C) + p^2 RR'CC'} = B_0 \frac{\frac{p}{\omega_0 Q}}{1 + \frac{p}{\omega_0 Q} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}, \tag{8}$$

où $\omega_0 = 1/\sqrt{RR'CC'}$ est la pulsation caractéristique du filtre, et où

$$\begin{cases} Q = \sqrt{\dfrac{RC'}{R'C}} \dfrac{1}{1 + \dfrac{R}{R'} + \dfrac{C'}{C}} \\ B_0 = \dfrac{1}{1 + \dfrac{R}{R'} + \dfrac{C'}{C}} \end{cases} \tag{9}$$

désignent respectivement le facteur de qualité Q et le gain à résonance B_0 du filtre.

En boucle ouverte, le circuit se comporte donc comme un filtre passe-bande de pulsation caractéristique ω_0, de facteur de qualité $Q_{\text{BO}} = Q$ et de gain à la résonance $G_{\text{max}} = B_0(1 + R_2/R_1)$. Le critère de Barkhausen donnant le seuil d'oscillation appliqué à ce système revient à chercher une pulsation ω telle que $\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega) = 1$, ce qui conduit à

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 \\ \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{R}{R'} + \dfrac{C'}{C} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \omega = \omega_0 \\ R_2 = R_{2,c} = R_1\left(\dfrac{R}{R'} + \dfrac{C'}{C}\right) \end{cases}. \tag{10}$$

C' = 97 nF
C = 101 nF

R = 301 Ω
R' = 990 Ω
R_1 = 1030 Ω

R2 = 2039Ω

Des oscillations peuvent alors naître lorsque la sortie est branchée sur l'entrée (fonctionnement en boucle fermée). Le bruit électronique va être amplifié par la chaîne directe, puis filtré par la chaîne de retour. Si la résistance R_2 est suffisamment grande, certaines composantes fréquentielles du bruit seront amplifiées par l'association de l'amplificateur et du filtre. Ces fréquences sont celles qui sont les moins atténuées par le filtre, c'est-à-dire celles qui se situent autour de la fréquence caractéristique de ce dernier. Si le gain de l'amplificateur est à peine plus grand que l'atténuation minimale du filtre, seule la fréquence caractéristique du filtre sera amplifiée, les autres étant atténuées. On crée donc ainsi un signal quasi-sinusoïdal.

Comme le circuit est en boucle fermée, ce signal dont seules certaines composantes fréquentielles ont été amplifiées est de nouveau amplifié puis filtré, etc. Cela conduit donc à une augmentation exponentielle de l'amplitude des oscillations. Toutefois, cette amplitude est limitée par les effets non-linéaires de l'amplificateur linéaire intégré.

Il peut également être instructif d'analyser la description temporelle du circuit à pont de Wien en boucle fermée (quand l'ALI fonctionne en régime linéaire), qu'on obtient aisément à partir des fonctions de transfert :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC'}\left(\frac{R}{R'} + \frac{C'}{C} - \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RR'CC'}u_s = 0. \tag{11}$$

Tant que le critère de Barkhausen n'est pas vérifié, c'est-à-dire tant que $A < 1 + R/R' + C'/C$, le terme en facteur de la dérivée d'ordre 1 est strictement positif. Toute excitation venant du bruit électronique est donc amortie exponentiellement, et le système est stable. Le système se comporte alors comme un oscillateur harmonique amorti de pulsation propre ω_0 et de facteur de qualité

$$Q_{\mathrm{of}} = \sqrt{\frac{RC'}{R'C}}\,\frac{1}{\dfrac{R}{R'} + \dfrac{C'}{C} - \dfrac{R_2}{R_1}}. \tag{12}$$

À mesure qu'on se rapproche du seuil d'instabilité, le facteur de qualité augmente, jusqu'à diverger quand le critère de Barkhausen est vérifié. Au-delà du seuil d'instabilité, $Q_{\mathrm{of}} < 0$, et le système est instable.

- Si

$$\frac{R}{R'} + \frac{C'}{C} < \frac{R_2}{R_1} < \left(\sqrt{\frac{R}{R'}} + \sqrt{\frac{C'}{C}}\right)^2, \tag{13}$$

  alors, partant d'une condition initiale quasiment nulle (bruit électronique), le système est le siège d'oscillations dont l'amplitude diverge exponentiellement, et le taux de croissance est alors donné par

$$s = \frac{\omega_0}{2Q_{\mathrm{of}}} = \frac{1}{2RC'}\left(\frac{R_2}{R_1} - \frac{R}{R'} - \frac{C'}{C}\right) = \frac{R_2 - R_{2,c}}{2R_1RC'} \tag{14}$$

- Si

$$\frac{R_2}{R_1} > \left(\sqrt{\frac{R}{R'}} + \sqrt{\frac{C'}{C}}\right)^2, \tag{15}$$

  alors, partant d'une condition initiale quasiment nulle (bruit électronique), le système est le siège d'un signal qui croît exponentiellement sans oscille.

2. Étude en boucle ouverte

Comme rappelé précédemment, on peut déduire si le système va osciller en boucle fermée à partir de l'étude de la fonction de transfert en boucle ouverte. Nous allons donc commencer l'étude de l'oscillateur de Wien en boucle ouverte.

Liste du matériel :
- deux résistances $R = R' = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- deux condensateurs de capacité $C = C' = 100\,\mathrm{nF}$,
- un amplificateur linéaire intégré,
- une résistance $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- un rhéostat de résistance variable R_2 `P56.32`,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope,
- une carte d'acquisition,
- l'analyseur de spectre `P0.18`.

a. Diagramme de Nyquist

On propose de réaliser le circuit de la Fig. 3. On pourra prendre $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, R_2 variable, $R = R' = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = C' = 100\,\mathrm{nF}$. On pourra alors déterminer le diagramme de Bode en gain et en phase du circuit en boucle ouverte pour $R_2 = 1{,}9\,\mathrm{k\Omega}$ (inférieure à la valeur de R_2 au seuil d'oscillation de Barkhausen), puis pour $R_2 = 2{,}1\,\mathrm{k\Omega}$ (supérieure à la valeur de R_2 au seuil d'oscillation de Barkhausen). Pour cela, on pourra se référer au TP3 où différentes méthodes ont été données pour obtenir le diagramme de Bode. On pourra ensuite vérifier le critère du revers dans les deux cas, en traçant le diagramme de Nyquist.

Si on note $G(\omega) = \left|\underline{G}(j\omega)\right|$ le gain de la FTBO et $\phi(\omega) = \arg \underline{G}(j\omega)$ la phase de la FTBO, le diagramme de Nyquist est obtenu en traçant $G(\omega)\sin\phi(\omega)$ en fonction de $G(\omega)\cos\phi(\omega)$. Un exemple de réalisation du diagramme de Nyquist avec le matériel de la collection est donné Fig. A1.

On rappelle que pour tracer le diagramme de Bode, on peut réaliser une mesure point par point en sollicitant le circuit en entrée avec un signal harmonique, et en mesurant l'amplitude du signal de sortie et son déphasage par rapport à la tension d'entrée. On peut également regarder la réponse indicielle du circuit en prenant pour $u_e(t)$ un signal créneau de très basse fréquence (de l'ordre de 0,5 Hz) dont la transformée de Fourier de la dérivée permet de remonter directement à la fonction de transfert. Enfin, on peut également solliciter le circuit avec un bruit blanc comme signal d'entrée, et le rapport des transformées de Fourier des signaux en sortie et en entrée permet là encore de reconstruire la fonction de transfert.

On mentionne qu'on peut également tracer le diagramme de Nyquist à l'aide d'un analyseur de spectre. Cela permet de voir l'évolution en direct du diagramme lorsqu'on change R_2. Le protocole est proposé ci-dessous, et pourra être réalisé dans un second temps. Attention cependant que la bande passante de l'analyseur HP35665A est limitée, et vaut typiquement 50 kHz en fonctionnement deux voies. Pour plus de détails sur le fonctionnement de l'analyseur de spectre, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1].

On propose de brancher en entrée du montage en boucle ouverte la sortie `SOURCE` de l'analyseur de spectre. On mesurera sur les deux chaînes de l'analyseur : `CHANNEL 1` et `CHANNEL 2` correspondant à l'entrée et la sortie du montage à pont de Wien en boucle ouverte respectivement. On mettra ensuite en fonctionnement la source de l'analyseur de spectre. Pour ce faire, on appuyera sur le bouton `Source`, on réglera l'amplitude sur 2V avec `Level`, on choisira `Random Noise` (correspondant à un bruit blanc) puis on choisira `On`.
On pourra ensuite calculer et afficher le diagramme de Nyquist. Pour cela, on appuiera sur le bouton `Inst mode`, puis on choisira `2 channel`. On pourra alors choisir d'afficher le diagramme de Nyquist avec le bouton `Trace coord`, puis `More` $\longrightarrow$ `Nyquist`. Pour que l'analyseur de spectre calcule bien le diagramme de Nyquist, il faut appuyer sur `Meas Data`, puis choisir `Frequency Response`. Il faut faire pareillement pour la deuxième voie en appuyant sur `Active Trace` puis de nouveau sur `Frequency Response`. On peut alors revenir au diagramme de Nyquist en appuyant encore sur `Active Trace`.
Pour limiter l'effet du repliement spectral, on appliquera une fenêtre de pondération en appuyant sur le bouton `Window` $\longrightarrow$ `Hanning`. Pour obtenir un affichage plus propre, on pourra moyenner le signal obtenu avec le bouton `Avg` : on réglera le nombre sur 10, on utilisera la fonction `Fast Avg` pour accélérer l'acquisition, et on appuyera sur `On`.
Il reste à régler la résolution fréquentielle (par défaut l'analyseur de spectre présente le résultat avec 400 pas de fréquences de 125 Hz chacun). Pour augmenter ce pas, on appuiera sur le bouton `Freq`, puis `Resolution lines`, et on pourra entrer la valeur 800 (valeur maximale). On peut également régler les fréquences minimale (`Start`, par exemple 1 Hz) et maximale (`Stop`, par exemple 50 kHz). Attention cependant que la fréquence maximale est limitée à 51,2 kHz.
Quand on fera varier la résistance R_2, il faudra rafraîchir l'affichage en appuyant sur le bouton `Start`. Pour que l'affichage s'adapte automatiquement aux valeurs mesurées, on appuiera sur la touche `Scale`, puis choisir `On` pour `Autoscale`.
On peut utiliser le bouton `Marker` pour parcourir le diagramme de Nyquist, et notamment voir si le point (1, 0) est laissé sur la gauche ou la droite.

On termine par justifier le choix des composants. On choisit $R = R'$ et $C = C'$ pour simplifier les expressions données ci-dessus et donc pour étudier plus facilement le comportement du circuit. Attention que les valeurs ne sont pas rigoureusement égales en pratique, et la dispersion entre les deux valeurs constitue une incertitude supplémentaire qui s'ajoute à l'incertitude des appareils de mesure donnée par les constructeurs. Par ailleurs, les valeurs de R et C sont telles que la fréquence caractéristique du filtre soit de l'ordre de 1 kHz. La valeur de R ne peut pas être prise trop petite. En effet, on a rappelé ci-dessus que dans la modélisation schéma-bloc des oscillateurs la fonction de transfert des deux blocs ne sont pas intrinsèques, et dépendent de l'extérieur du circuit. Ici, nous n'avons, par exemple, pas tenu compte de l'impédance de sortie Z_s de l'ALI pour établir la fonction de transfert du filtre. Cela revient à remplacer R par $R + Z_s$ dans les expressions précédentes. Ainsi, si on veut négliger l'impédance de sortie de l'ALI, on aura tout intérêt à prendre $R \gg Z_s = 50\,\Omega$.

b. Critère de Barkhausen

Si on s'intéresse uniquement au seuil d'instabilité, on n'est pas obligé de tracer le diagramme de Nyquist complet, et on peut simplement réaliser l'expérience qui suit.

> Pour différentes valeurs de résistance R_2, on cherchera la fréquence du résonance du circuit en boucle ouverte. Pour cela, on alimentera le circuit avec un GBF, et on pourra alors faire varier la fréquence d'excitation. On mesurera alors le gain à la résonance, ce qui permettra d'en déduire la résistance $R_{2,c}$ critique au-delà de laquelle les oscillations vont apparaître en boucle fermée quand ce gain à résonance vaut 1 (critère de Barkhausen).

On rappelle que $R_{2,c}$ est donnée par l'Eq. (10). On rappelle également que la manière la plus précise de trouver la résonance d'un filtre passe-bande du second ordre et de chercher quand les signaux en entrée et en sortie sont en phase. Pour cela, on se placera en mode XY à l'oscilloscope, et on fera varier la fréquence du signal en entrée jusqu'à observer une droite à l'écran. Ici se placer à la résonance revient à chercher quand la fonction de transfert en boucle ouverte est réelle, ce qui est une conséquence du critère de Barkhausen.

3. Oscillations faiblement non linéaires

On propose maintenant d'observer les oscillations du système quand il est proche du seuil d'instabilité.

> On pourra prendre une résistance $R_2 \gtrsim R_{2,c}$, retirer le GBF en entrée, et boucler la sortie du filtre sur l'entrée de l'ALI. On peut alors observer à l'oscilloscope les tensions en entrée v_3 et en sortie v_s de l'ALI.

On doit observer l'apparition d'oscillations dont la fréquence est quasiment égale à la fréquence caractéristique $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ du filtre. Elle peut être légèrement inférieure si $R_2 > R_{2,c}$, car plus R_2 augmente, plus l'ALI fonctionne pendant une durée plus longue en régime de saturation (voir également plus loin sur les oscillations de relaxation). Par ailleurs, on notera que la tension en sortie du filtre est davantage harmonique que la tension en entrée (cela peut être quantifié en déterminant dans les deux cas le taux de distorsion γ introduit plus haut), du fait du filtre qui atténue les composantes fréquentielles en dehors de sa bande-passante centrée sur f_0.

4. Portrait de phase

On peut s'intéresser à la façon dont l'amplitude des oscillations croît lorsqu'on boucle le système. Un bon moyen de visualiser le démarrage des oscillations est de tracer le portrait de phase du signal $s_3(t) = s_3(t)$, défini comme étant le plan $(s_3(t), \mathrm{d}s_3(t)/\mathrm{d}t)$.

> On propose de toujours se placer dans le cas où $R_2 \gtrsim R_{2,c}$, et d'enregistrer la croissance de l'amplitude des oscillations à l'aide d'une carte d'acquisition. Cela permettra alors de dériver le signal numériquement, puis d'obtenir le portrait de phase. Si on ne dispose pas d'une carte d'acquisition, on pourra effectuer une dérivation analogique (qui effectue également un lissage du signal), en suivant les instructions de la Réf. [6] (p. 128).
> Pour observer la croissance des oscillations, on court-circuitera l'entrée de l'ALI en la reliant à la masse, puis on retirera ce fil. Par ailleurs, pour l'enregistrement du signal avec une carte d'acquisition, on pourra synchroniser le début de l'acquisition avec le début de la croissance des oscillations, avec un niveau de déclenchement de l'ordre de quelques dizaines de mV. On choisira dans le menu « Déclenchement » de Latis-Pro, la voie EA0, « seuil montant », et un niveau de déclenchement de 20 mV sans pré-déclenchement. On pourra alors lisser le signal avant de le dériver.

On choisira une période d'échantillonnage faible devant la pseudo-période (de l'ordre de $2\pi/\omega_0 \simeq 0{,}6$ ms) afin de bien reconstruire la spirale dans le plan de phase. Une période d'échantillonnage de l'ordre de 30 µs convient alors. Enfin, il faudra prendre une durée totale d'enregistrement grande devant le temps typique de croissance (de l'ordre de $1/\varepsilon$ où le taux de croissance ε est donné par l'Eq. (14)) pour observer le cycle limite. La valeur de ε dépend de la valeur précise de R_2 par rapport à $R_{2,c}$, mais une durée totale d'enregistrement de l'ordre de la seconde convient généralement. On doit observer un tracé dans le plan de phase analogue à une spirale, qui converge vers un cycle limite elliptique. On peut voir que l'ellipse est légèrement aplatie sur les côtés, à cause des non-linéarités.

5. Démarrage des oscillations

On peut être plus quantitatif dans la mesure de la croissance de l'amplitude des oscillations. Pour cela, on propose d'utiliser un détecteur de crête, schématisé Fig. 4. Pour plus de détails sur le détecteur de crête, on renvoie le lecteur à la Réf. [6] (pp. 68–74).

Liste du matériel :

- tout le matériel précédent pour l'étude de l'oscillateur à pont de Wien,
- un amplificateur linéaire intégré,

- une diode,
- un condensateur de capacité $C_c = 1\,\mu\mathrm{F}$,
- une résistance $R_c = 1\,\mathrm{M\Omega}$.

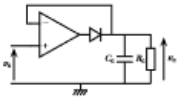


FIGURE 4 – Détecteur de crête à diode sans seuil.

> On propose d'ajouter un détecteur de crête sans seuil (voir Fig. 4) en sortie du filtre avec $C_c = 1\,\mu\mathrm{F}$ et $R_c = 1\,\mathrm{M\Omega}$, d'acquérir avec une carte d'acquisition les signaux $v_s(t)$ et $v_c(t)$, et de les comparer. Pour l'acquisition, on utilisera le même protocole que précédemment pour la mesure du portrait de phase. On pourra alors en déduire le taux de croissance ε des oscillations, puis répéter l'expérience pour différentes résistances $R_2 > R_{2,c}$ pour être plus quantitatif.

Au début de la phase de croissance de l'amplitude des oscillations (avant que les non-linéarités conduisent à une saturation de l'amplitude des oscillations), le signal en sortie du filtre est de la forme

$$s_3(t) = V_0 e^{-\varepsilon t} \cos(\Omega t + \varphi), \tag{16}$$

où V_0 et φ dépendent des conditions initiales, où le taux de croissance ε est donné par l'Eq. (14), et où $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}$. Dans le cas qui nous intéresse expérimentalement ($R = R'$ et $C = C'$), l'expression du taux de croissance se simplifie en

$$\varepsilon = \frac{1}{RC}\left(\frac{R_2}{2R_1} - 1\right). \tag{17}$$

Pour effectuer un traitement quantitatif de l'expérience, on pourra tracer $\ln s_3(t)$ en fonction de t et ajuster la courbe par une droite. On obtiendra alors la valeur du taux de croissance ε à partir de la pente. En répétant l'expérience pour différentes valeurs de $R_2 > R_{2,c} = 2R_1$ et telles que $R_2 < 4R_1$ (afin que le régime transitoire soit une fonction oscillante dont l'amplitude croît exponentiellement), on pourra tracer ε en fonction de R_2 et vérifier l'Eq. (17). Un exemple de réalisation expérimentale avec du matériel d'enseignement est donné Fig. A2.

On revient maintenant sur le fonctionnement du détecteur de crête. Pour cela, commençons par supposer que la diode est bloquée. Dans ce cas, le courant en sortie de l'ALI est nul, et ce dernier se comporte comme un comparateur simple (fonctionnement en saturation). Par ailleurs, comme les courants de polarisation en entrée de l'ALI sont nuls, on en conclut que le condensateur se décharge dans la résistance selon l'équation différentielle

$$R_c C_c \frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}t} + v_c = 0. \tag{18}$$

La tension v_c décroît donc exponentiellement avec un temps caractéristique $R_c C_c$. Par ailleurs, pour que la diode soit effectivement bloquée, il faut que la tension en sortie de l'ALI soit inférieure à v_c, et elle vaut donc $-V_{sat}$. Cela impose donc que $v_c > v_3$.

Supposons maintenant que la diode est passante. Dans ce cas, l'ALI se comporte approximativement comme un suiveur et $v_s = v_c$. Le courant en aval de l'ALI et traversant la diode vaut alors, en utilisant la loi des noeuds,

$$i_d = C_c \frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t} + \frac{v_3}{R_c}. \tag{19}$$

Quand la tension v_3 diminue, le courant traversant la diode peut devenir négatif, et cette dernière devient alors bloquée.

Ainsi, au début de la phase de croissance de l'amplitude des oscillations, la tension en sortie du détecteur de crête va suivre la tension v_3 jusqu'à atteindre son premier maximum local. On observe alors que v_3 diminue tandis que v_c ne suit plus v_3 et se décharge lentement. La tension v_3 suivra de nouveau v_3 dès lors que v_3 aura dépassé v_c. Cela explique pourquoi ce montage permet de suivre l'évolution de l'amplitude des oscillations au cours du temps. Le montage sera d'autant meilleur que le temps de décharge sera grand devant la pseudo-période, soit $R_c C_c \omega_0 \gg 1$. Ici $\omega_0 = 10^4\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, ce qui justifie les valeurs données ci-dessus de R_c et C_c. On terminera par mentionner que l'ALI a deux avantages. D'une part, il permet de n'affranchir

f_c = 1.70±0.01 kHz
R2,c = 2060±20 Ω

Bien retirer la carte d'acquisition ! Son impédance casse tout.

de la tension de seuil de la diode et donc d'exploiter la croissance des oscillations au tout début de l'instabilité (où les non-linéarités peuvent être plus raisonnablement négligées). D'autre part, il permet de ne pas perturber l'oscillateur car le courant en entrée de l'ALI est nul et son impédance d'entrée est très grande devant les impédances intervenant dans l'oscillateur à pont de Wien.

Une méthode complémentaire pour mesurer le taux de croissance s des oscillations consiste à utiliser la méthode de l'incrément logarithmique. La méthode est rappelée dans la Réf. [6] (p. 50) à laquelle on se référera pour plus de détails. Cette méthode a l'avantage d'être plus robuste que l'utilisation d'un détecteur de crête, elle est néanmoins beaucoup plus fastidieuse.

6. Introduction aux oscillateurs à relaxation

On peut maintenant s'intéresser au caractère quasi-sinusoïdal des oscillations.

> On propose pour cela de reprendre le montage de la Fig. 3. À l'aide d'un oscilloscope ou d'une carte d'acquisition, on pourra calculer la transformée de Fourier du signal en entrée de l'ALI. En augmentant R_2, on pourra noter les changements sur l'amplitude et la forme du signal, ainsi que sur son spectre. On pourra également tracer le portrait de phase comme dans le cas précédent en enregistrant le signal avec une carte d'acquisition, puis en le dérivant numériquement.

On pourra noter que l'augmentation du gain de l'amplificateur ne change pas ici l'amplitude des oscillations qui est fixée par la saturation de l'ALI. Cependant on doit noter que le signal est de moins en moins sinusoïdal quand on augmente le gain, et que sa fréquence diminue. Cela s'explique par le fait qu'au cours d'une période du signal, l'ALI passe davantage de temps en régime de saturation. Cela est également visible sur le portrait de phase, où le cycle limite est davantage déformé. On parle alors d'oscillations de relaxation, qui seront étudiées plus en détail dans le TP suivant. Dans le cas de l'oscillateur à pont de Wien, le terme d'« oscillations de relaxation » prend tout son sens si on s'intéresse à la tension en sortie de l'ALI. On doit alors constater que l'ALI oscille entre des phases de saturations positive et négative séparées par de très courtes durées où il fonctionne en régime linéaire. Pour des exemples de réalisation expérimentales, on pourra consulter la Réf. [2] (pp. 245–249).

On lit parfois que les oscillations deviennent de plus en plus anharmoniques car le gain de l'amplificateur augmentant, il existe tout un intervalle de pulsations $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ autour de la pulsation caractéristique du filtre dans lequel le critère de Barkhausen $\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega) = 1$ est vérifié. Cela n'est pas correct, car expérimentalement, on constate que la fréquence fondamentale d'oscillation devient inférieure à $f_0 = \omega_0/(2\pi)$ et que l'amplitude des harmoniques augmente. En réalité, quand le gain de l'amplificateur augmente, le taux de croissance de l'instabilité quand l'ALI fonctionne en régime linéaire augmente, de sorte que la durée du régime linéaire de l'ALI diminue. L'ALI passe alors davantage de temps en régime de saturation. Cela explique alors l'apparition d'harmoniques dans le spectre du signal en aval du filtre.

On retiendra que l'oscillateur à pont de Wien est un mauvais oscillateur quasi-sinusoïdal car le taux de distorsion augmente rapidement quand on s'éloigne du seuil d'instabilité. Pour améliorer le taux de distorsion, on peut avoir recours à un montage utilisant un amplificateur dont le gain diminue quand l'amplitude d'oscillation augmente. C'est le principe du montage à commande automatique de gain. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [8] (pp. 128–130 et pp. 142–147).

L'augmentation rapide du taux de distorsion quand on s'éloigne du seuil d'instabilité vient du fait que le filtre de Wien est un filtre passe-bande peu sélectif (son facteur de qualité vaut 1/3 si $R = R'$ et $C = C'$), de sorte que les harmoniques ne sont pas suffisamment atténuées.

7. Limitation en fréquence de l'oscillateur à pont de Wien (*)

Nous voulons maintenant mettre en évidence un défaut de l'oscillateur à pont de Wien, à savoir la limitation en fréquence, afin de justifier l'utilisation d'autres oscillateurs dans la suite du TP.

Liste du matériel :

- deux résistances $R = R' = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- deux condensateurs de capacité variable,
- un amplificateur linéaire intégré,
- une résistance $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- un rhéostat de résistance variable R_2 P54 . 32,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

> On propose pour cela de reprendre le montage de la Fig. 3, en prenant dorénavant des résistances $R = R' = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et des condensateurs de capacité variable. On pourra alors faire $C = C'$ de 1 µF à 1 nF, et observer à l'oscilloscope le signal en entrée de l'ALI.

On doit alors noter que quand les capacités diminuent (conduisant à une augmentation de la pulsation caractéristique du filtre), les oscillations disparaissent si $R_2 \gtrsim R_{2,c}$, mesurée plus haut. Il faut alors augmenter R_2 pour retrouver des oscillations, qui sont d'amplitude plus faible. Cela est dû au comportement passe-bas de l'ALI. Notons μ le gain statique de l'ALI et ω_{ALI} sa pulsation de coupure. L'équation différentielle qui régit le comportement du montage amplificateur est alors

$$\frac{1}{\omega_{\mathrm{ALI}}}\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}t} + v_{\mathrm{s}} = \mu\left(v_{\mathrm{e}} - \frac{R_1}{R_1 + R_2}v_{\mathrm{s}}\right), \tag{20}$$

conduisant à la fonction de transfert en régime harmonique

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{\mu}{1 + \frac{\mu}{1 + R_2/R_1}}\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\omega_{\mathrm{ALI}}\left(1 + \frac{\mu}{1 + R_2/R_1}\right)}} = \frac{A_0}{1 + \frac{j\omega A_0}{\omega_0}}, \tag{21}$$

avec

$$\begin{cases} A_0 = 1 + \dfrac{R_2}{R_1} \\ \omega_0 = \mu\,\omega_{\mathrm{ALI}} \end{cases}. \tag{22}$$

La condition de Barkhausen $\underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega) = 1$ conduit alors aux deux équations (en isolant les parties réelle et imaginaire)

$$\begin{cases} \omega = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega_0 A_0}{\omega_0 Q}}} \\ A_0 B_0 = 1 + \dfrac{A_0^2\omega_0^2}{\omega_0\left(\omega_0 + \dfrac{\omega_0 A_0}{Q}\right)} \end{cases}. \tag{23}$$

La seconde équation permet de déterminer le gain critique A_0 permettant d'observer des oscillations, tandis que la première équation fixe la pulsation d'oscillation. Pour un ALI, $\mu = 10^5$ et $\omega_{\mathrm{ALI}} = 50\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$, conduisant au produit gain-bande passante $\omega_0 = 5 \times 10^6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. La résolution numérique de ces deux équations montre alors que si ω_0 se rapproche de ω_0, A_0 augmente, conduisant à une diminution de la fréquence d'oscillation. Pour observer cet effet, il faut donc que $\omega_0 = \omega_0$, conduisant à $C \lesssim 1\,\mathrm{nF}$ pour une résistance de $1\,\mathrm{k\Omega}$. Par ailleurs, on peut montrer que le système précédent n'admet plus de solution si $\omega_0 > \omega_0$: le système ne peut donc osciller que si la pulsation propre du pont de Wien est inférieure au produit gain-bande passante de l'ALI.

III. Oscillateur de Colpitts [MPs 8 et 53]

Nous présentons maintenant un deuxième oscillateur qui est très utilisé en pratique pour deux raisons principales : le filtre qui le compose peut posséder un facteur de qualité très important (de l'ordre de 10^4) et la fréquence des oscillations peut être très élevée (ce qui ne peut pas être le cas pour l'oscillateur de Wien, comme vu précédemment). L'oscillateur de Colpitts à quartz est également décrit dans les Réf. [6] (pp. 147–152) et Réf. [2] (pp. 259–262) auxquelles on se référera pour de plus amples détails.

1. Description de l'oscillateur de Colpitts

a. Présentation

L'oscillateur à quartz est un cas particulier de l'oscillateur de Colpitts, présenté Fig. 5. Cet oscillateur peut être décomposé en deux parties :

- un montage amplificateur réalisé avec un circuit à transistor (bipolaire ou à effet de champ, mais ici on prendra un transistor bipolaire),
- un filtre réalisé à l'aide d'une cellule CLC.

L'amplification à l'aide d'un transistor permet d'avoir une bande passante plus large, ce qui permet d'avoir des oscillateurs haute fréquence. Pour le transistor bipolaire qui sera utilisé ci-dessous, la notice indique une fréquence de coupure passe-bas de l'ordre de 250 MHz (de deux ordres de grandeur supérieure à celle de l'amplificateur non inverseur à ALI).

Par ailleurs, on rappelle que la capacité C_0 permet de découpler la résistance d'émetteur, ce qui rend le point de fonctionnement du montage moins sensible aux fluctuations, et permet également d'augmenter le gain en tension. La capacité C_0

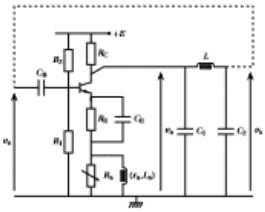


FIGURE 5 – Montage de Colpitts en boucle ouverte (sans le fil en traits pointillés) et oscillateur de Colpitts en boucle fermée (avec le fil en traits pointillés).

est une capacité de couplage permettant de pouvoir superposer des signaux sinusoïdaux au point de polarisation statique non nul du montage amplificateur. En outre, on a ajouté une résistance R_e en parallèle d'une bobine afin de pouvoir plus facilement faire varier le gain (et l'impédance d'entrée) de l'amplificateur de façon contrôlée (contrairement au montage proposé dans la Réf. [6]). En effet, la bobine se comporte comme une résistance r_s en régime statique (pour le point de fonctionnement), mais se comporteraît approximativement comme un interrupteur ouvert à hautes fréquences. Ainsi, la variation de la résistance R_e permettra de contrôler la résistance qui reste non découplée à l'émetteur, mais modifiera peu le point de fonctionnement statique, tant que $R_e \gg r_s$.

Enfin, en ce qui concerne le filtre CLC, on constate, en analysant les comportements asymptotiques basses et hautes fréquences, qu'il s'agit d'un filtre passe-bas du troisième ordre pouvant présenter une résonance.

b. Mise en équation

Nous allons maintenant établir les équations caractéristiques du circuit. Il est ici compliqué de définir les fonctions de transfert (en régime harmonique) $\underline{A}(j\omega)$ et $\underline{B}(j\omega)$ des blocs amplificateur et filtre séparément, notamment car l'impédance de sortie du montage émetteur commun est non nulle (nous la calculerons ci-dessous). Nous allons donc directement nous intéresser à la fonction de transfert en boucle ouverte $\underline{T}(j\omega) = \underline{A}(j\omega)\underline{B}(j\omega)$ du montage Colpitts. Néanmoins, on ne pourra pas appliquer le critère de Barkhausen à partir de la fonction de transfert en boucle ouverte, car le montage amplificateur a une impédance d'entrée non infinie (nous la calculerons également ci-dessous). En d'autres termes, la fonction de transfert du filtre $\underline{B}(j\omega)$ change entre le fonctionnement en boucle ouverte et en boucle fermée (nous la noterons $\underline{B}'(j\omega)$ dans ce dernier cas), et la formule de Black donne ici, pour la fonction de transfert en boucle fermée,

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{A}(j\omega)}{1 + \underline{A}(j\omega)\underline{B}'(j\omega)} \tag{24}$$

Ici, il faut calculer la fonction de transfert en boucle ouverte effective $\underline{T}'(j\omega) = \underline{A}(j\omega)\underline{B}'(j\omega)$ où $\underline{B}'(j\omega)$ est la fonction de transfert du filtre obtenu en plaçant l'impédance d'entrée du montage amplificateur Z_e (qui n'est pas infinie) en parallèle du condensateur de capacité C_2.

Pour cela, on travaille sur le schéma simplifié de la Fig. 6 en régime harmonique, où on a noté Z_s l'impédance de sortie du montage émetteur commun, A_0 le gain à vide, $Z_1 = 1/(j\omega C_1)$, $Z_2 = 1/(j\omega C_2)$ et $Z = j\omega L$. Les amplitudes complexes des tensions sont notées en majuscule. Un premier pont diviseur de tension donne alors (en associant Z_e et Z_2 en parallèle) que

$$\underline{V_2} = \frac{Z_2 \parallel Z_e}{Z + Z_2 \parallel Z_e}\underline{V_1}. \tag{25}$$

Un second pont diviseur de tension donne alors (en associant Z_e et Z_2 en parallèle, puis en associant cette impédance équivalente en série avec Z, puis enfin en associant cette nouvelle impédance équivalente avec Z_1 en parallèle) que

$$\underline{V_1} = \frac{Z_1 \parallel (Z + Z_2 \parallel Z_e)}{Z_s + Z_1 \parallel (Z + Z_2 \parallel Z_e)} A_0\underline{V_e} = \frac{1}{1 + \dfrac{Z_s}{Z_1} + \dfrac{Z_s}{Z + Z_2 \parallel Z_e}} A_0\underline{V_e} = \frac{\dfrac{1}{Z_s}}{\dfrac{1}{Z_1 \parallel Z_e} + \dfrac{1}{Z + Z_2 \parallel Z_e}} A_0\underline{V_e}. \tag{26}$$

On obtient, après calculs,

$$\underline{T'} = \frac{\underline{V_1}}{\underline{V_e}} = \frac{A_0}{Z_s}\frac{(Z_1 \parallel Z_e)(Z_2 \parallel Z_e)}{Z_1 \parallel Z_e + Z + Z_2 \parallel Z_e}. \tag{27}$$

Il reste donc maintenant à déterminer les quantités A_0, Z_e et Z_s, et pour cela, nous allons faire plusieurs hypothèses.

- En premier lieu, on suppose que la résistance d'émetteur R_0 est totalement découplée dans la gamme de fréquences dans laquelle nous allons travailler. Il faudra alors vérifier que $1/(\omega C_E) \ll R_0$, h_{11}/β, où ω désigne la pulsation.
- De plus, nous allons assimiler la capacité C_B à un fil dans la gamme de fréquences de travail, ce qui revient à supposer que la chute de tension qu'elle induit est négligeable devant la chute ohmique provoquée par la résistance h_{11}. Il faudra donc vérifier que $1/(\omega C_B) \ll h_{11}, R_{Th}$.
- Enfin, nous allons supposer que la bobine est choisie de telle sorte qu'elle est assimilable à un interrupteur ouvert dans la gamme de fréquences étudiée (ou encore que son impédance est très grande devant R_e). Il faudra donc vérifier que $\omega L_e \gg R_e$.

On propose donc le modèle équivalent petits signaux du montage émetteur commun présenté Fig. 6, où $R_{Th} = R_1 \parallel R_2$. On pourra consulter à profit le TP5 pour plus de détails.

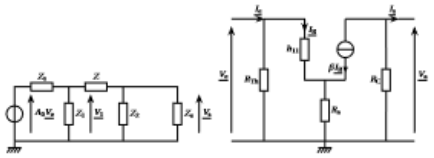


FIGURE 6 – Représentation schématique du circuit de Colpitts en boucle ouverte (à gauche) et modèle petits signaux équivalent du transistor (à droite).

On établit alors que

$$\begin{cases} \underline{I_s} = -\beta\underline{I_B} - \dfrac{\underline{V_s}}{R_C} \\ \underline{V_e} = \left[h_{11} + (\beta+1)R_0\right]\underline{I_B} \\ \underline{I_B} = \dfrac{\underline{V_e}}{R_{Th}} + \underline{I_e} \end{cases}. \tag{28}$$

Par définition, le gain correspond à $A_0 = \underline{V_s}/\underline{V_e}$ quand $\underline{I_e} = 0$. On obtient, en combinant ces différentes équations,

$$A_0 = -\frac{\beta R_C}{h_{11} + (\beta+1)R_0}, \tag{29}$$

où β est le gain du transistor au point de fonctionnement considéré, et h_{11} la pente de la tangente à la caractéristique d'entrée du transistor au point de fonctionnement. On notera que l'expression coïncide avec celle donnée dans la Réf. [6] en substituant R_0 par αR_0, où α est la fraction de résistance d'émetteur qui n'est pas découplée par la capacité C_E.

On peut également établir l'expression de l'impédance d'entrée, en combinant les équations présentées ci-dessus,

$$Z_e = \frac{1}{\dfrac{1}{R_{Th}} + \dfrac{1}{h_{11} + (\beta+1)R_0}} = R_1 \parallel R_2 \parallel \left[h_{11} + (\beta+1)R_0\right]. \tag{30}$$

Là encore, cette expression coïncide avec celle donnée dans la Réf. [6].

Enfin, on a que $\underline{V_s} = -\beta R_C\underline{I_B} - R_C\underline{I_s}$, où $\underline{I_B}$ est déterminée à partir des trois autres équations qui ne dépendent pas de $\underline{I_s}$. Il est donc clair que l'impédance de sortie du montage est simplement $Z_s = R_C$.

c. Critère de Barkhausen

Avec tous ces résultats intermédiaires, on en déduit la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée de l'impédance d'entrée de l'étage amplificateur :

$$\underline{T}^*(j\omega) = \frac{A_0 Z_e}{Z_e + Z_s} \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{Z_e + Z_s}\left[Z_e Z_s (C_1 + C_2) + L\right] - \frac{\omega^2}{Z_e + Z_s} L\left(Z_e C_2 + Z_s C_1\right) - j\omega^3 L C_1 C_2 \frac{Z_e Z_s}{Z_e + Z_s}}. \tag{31}$$

Le critère de Barkhausen $\underline{T}^*(j\omega) = 1$ conduit alors à la pulsation des oscillations au seuil d'instabilité et à une condition sur le gain A_0 et l'impédance d'entrée Z_e du montage amplificateur :

$$\begin{cases} \omega_{0\text{ac}}^2 = \dfrac{C_1 + C_2}{LC_1C_2} + \dfrac{1}{C_1C_2Z_eZ_s} \\ A_0 = 1 + \dfrac{Z_s}{Z_e} - \omega_{0\text{ac}}^2 L\left(C_2 + \dfrac{Z_s}{Z_e}C_1\right) \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} f_{0\text{ac}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{C_1 + C_2}{LC_1C_2} + \dfrac{1}{C_1C_2Z_eZ_s}} \\ |A_0| = \left(C_2 + \dfrac{Z_s}{Z_e}C_1\right)\left(\dfrac{C_1 + C_2}{C_1C_2} + \dfrac{L}{C_1C_2Z_eZ_s}\right) - 1 - \dfrac{Z_s}{Z_e} \end{cases} \tag{32}$$

La seconde équation est une condition implicite sur la résistance R_e car Z_e et A_0 en dépendent tous deux.

2. Étude en boucle ouverte (*)

On propose de commencer par l'étude en boucle ouverte, afin de vérifier le critère de Barkhausen présenté ci-dessus.

Liste du matériel :

- un transistor bipolaire 2N2222,
- une résistance $R_0 = 1\,\text{k}\Omega$,
- une résistance $R_C = 2\,\text{k}\Omega$,
- une résistance $R_1 = 6{,}2\,\text{k}\Omega$,
- une résistance $R_2 = 13{,}9\,\text{k}\Omega$,
- un condensateur de capacité $C_0 = 10\,\text{nF}$,
- un condensateur de capacité $C_E = 1\,\mu\text{F}$,
- une bobine d'inductance $L_m = 0{,}1\,\text{H}$,
- deux condensateurs de capacité $C_1 = C_2 = 1\,\text{nF}$,
- une bobine d'inductance $L = 1\,\text{mH}$,
- deux rhéostats de résistance variable P54.32,
- une source d'alimentation continue P53.20,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

a. Étude de l'étage d'amplification seul

On commence par caractériser l'étage d'amplification, ce qui sera utile pour établir la condition d'oscillation de Barkhausen.

> On propose de commencer par réaliser l'étage d'amplification seul du montage de la Fig. 5. On prendra $R_0 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_C = 2\,\text{k}\Omega$, $R_1 = 6{,}2\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 13{,}9\,\text{k}\Omega$ (par la mise en série de deux résistances de $10\,\text{k}\Omega$ et $3{,}9\,\text{k}\Omega$), $C_0 = 10\,\text{nF}$, $C_E = 1\,\mu\text{F}$, $L_m = 0{,}1\,\text{H}$, $E = 4\,\text{V}$ et pour R_e un rhéostat de résistance variable. On omet pour le moment la cellule CLC, qui sera ajoutée dans l'expérience qui suit (avec $C_1 = C_2 = 1\,\mu\text{F}$ et $L = 1\,\text{mH}$). On pourra alors faire varier R_e dans une gamme entre $100\,\Omega$ et $1{,}5\,\text{k}\Omega$ et mesurer le gain à vide A_0 et l'impédance d'entrée Z_e du montage en fonction de R_e. Pour cela, on sollicitera le montage à l'aide d'un GBF émettant un signal sinusoïdal v_e d'amplitude de l'ordre de 50 mV et de fréquence de l'ordre de 220 kHz. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur au TP5.

On pourra alors vérifier si les Éq. (29) et (30) sont bien vérifiées, et en déduire β et h_{21} pour le point de fonctionnement du transistor. Pour cela, on pourra utiliser le code Python qu'on reproduit et commente ci-dessous :


```python
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Benjamin GUINGLIN
Version du 12/12/2022
"""

#\\\\ Importation des libraires À NE PAS MODIFIER
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.optimize as opt

#\\\\ Définition de fonctions pour effectuer des modélisations affine et non linéaire de données À NE PAS
    MODIFIER
def modele_NL(X,Y,u_X,u_Y,params_test,f,f_deriv):
    """
    Effectue une modélisation non linéaire Y = f(X,params), en tenant compte des incertitudes sur X (u_X)
    et Y (u_Y).
    La fonction utilise la méthode des moindres carrés à partir de paramètres d'essai contenus dans le
    tableau params_test.
    La fonction renvoie un tableau qui contient dans l'ordre :
        - les paramètres optimisés dans l'ordre (params_opt),
        - leurs incertitudes dans l'ordre (u_params_opt),
        - la valeur du chi2 réduit (chi2_opt).
    f_deriv désigne la dérivée de la fonction f pour le calcul des résidus.
    """
    def residu_NL(params,x,y,u_x,u_y):
        return ( y - f(x,params) ) / np.sqrt ( u_y * u_y + ( f_deriv(x,params) * u_x ) ** 2 )

    opt_NL = opt.least_squares(residu_NL,params_test,args=(X,Y,u_X,u_Y))
    params_opt = opt_NL.x
    hessian_NL = np.matmul(opt_NL.jac.transpose(),opt_NL.jac)
    u_params_opt = np.sqrt( 2. / np.abs( np.diagonal(hessian_NL) ) )
    chi2_opt = np.sum( residu_NL(params_opt,X,Y,u_X,u_Y) ** 2 )/( len(X) - 2 )
    return np.hstack(([params_opt,u_params_opt,np.array([chi2_opt])))

def modele_affine(X,Y,u_X,u_Y,a_test,b_test):
    """
    Effectue une modélisation affine Y = a * X + b, en tenant compte des incertitudes sur X (u_X) et Y (
    u_Y).
    La fonction utilise la méthode des moindres carrés à partir de paramètres d'essai a_test et b_test.
    La fonction renvoie un tableau qui contient dans l'ordre :
        - la valeur de a optimisée (a_opt),
        - la valeur de b optimisée (b_opt),
        - l'incertitude sur la valeur de a (u_a_opt),
        - l'incertitude sur la valeur de b (u_b_opt),
        - la valeur du chi2 réduit (chi2_opt).
    """
    def affine(x,a,b):
        return a * x + b

    def residu_affine(p_affine,x,y,u_x,u_y):
        a = p_affine[0]
        b = p_affine[1]
        return ( y - affine(x,a,b) ) / np.sqrt ( u_y * u_y + ( a * u_x ) ** 2 )

    opt_affine = opt.least_squares(residu_affine,np.array([a_test, b_test]),args=(X,Y,u_X,u_Y))
    a_opt = opt_affine.x[0]
    b_opt = opt_affine.x[1]
    hessian_affine = np.matmul(opt_affine.jac.transpose(),opt_affine.jac)
    u_a_opt = np.sqrt( 2. / hessian_affine[0,0])
    u_b_opt = np.sqrt( 2. / hessian_affine[1,1])
    chi2_opt = np.sum( residu_affine(np.array([a_opt,b_opt]),X,Y,u_X,u_Y) ** 2 )/( len(X) - 2 )
    print("Résultats de l'ajustement :")
    print("- pente - {0:.2e} +/- {1:.1e}".format(a_opt,u_a_opt))
    print("- ordonnée à l'origine - {0:.2e} +/- {1:.1e}".format(b_opt,u_b_opt))
    return np.array([a_opt,b_opt,u_a_opt,u_b_opt,chi2_opt])

#\\\\ Paramètres À MODIFIER
filename = 'gain_2e_en_Ra.txt' # nom du fichier avec Ra en ohm, u(Ra) en ohm, A0, u(A0), Ze en ohm, u(Ze)
    en ohm
RC = 1.99e3 # résistance de collecteur (en ohm)
u_RC = 10. # incertitude sur la résistance de collecteur (en ohm)
R1 = 6.232e3 # résistance R1 (en ohm)
u_R1 = 1. # incertitude sur la résistance R1 (en ohm)
R2 = 13.91e3 # résistance R2 (en ohm)
u_R2 = 10. # incertitude sur la résistance R2 (en ohm)
```

```
73 C1 = 1.004e-9 # capacité C1 (en F)
74 u_C1 = 5e-12 # incertitude sur C1 (en F)
75 C2 = 1.004e-9 # capacité C2 (en F)
76 u_C2 = 5e-12 # incertitude sur C2 (en F)
77 L = 1.004e-3 # inductance L (en H)
78 u_L = 5e-6 # incertitude sur L (en H)
79
80 #\\\ Importation des données
81 data = np.genfromtxt(filename)
82 Ka = data[:,0]
83 u_Ka = data[:,1]
84 AD = data[:,2]
85 u_AD = data[:,3]
86 Ze = data[:,4]
87 u_Ze = data[:,5]
88
89 #\\\ Ajustement affine des données du gain
90 inv_AD = 1. / AD
91 u_inv_AD = u_AD / ( AD * AD )
92 param_gain = modele_affine(Ka,inv_AD,u_Ka,u_inv_AD,1.,0.)
93 a_gain = param_gain[0] # extraction de la pente
94 u_a_gain = param_gain[2] # extraction de l'incertitude sur la pente
95 b_gain = param_gain[1] # extraction de l'ordonnée à l'origine
96 u_b_gain = param_gain[3] # extraction de l'incertitude sur l'ordonnée à l'origine
97 chi2_gain = param_gain[4] # extraction du chi2 réduit
98 beta_gain = - 1. / ( a_gain * RC + 1. ) # extraction de beta à partir de la pente
99 u_beta_gain = - beta_gain * beta_gain * u_gain * RC * np.sqrt( ( u_a_gain / a_gain
100 ) ** 2 + ( u_RC / RC ) ** 2 )
101 h11_gain = - b_gain * beta_gain * RC # extraction de h11 à partir de l'ordonnée à l'origine
102 u_h11_gain = h11_gain * np.sqrt( ( u_b_gain / b_gain ) ** 2 + ( u_beta_gain / beta_gain
103 )**2 + ( u_RC / RC ) ** 2 )
104
105 #\\\ Ajustement non linéaire des données de l'impédance d'entrée
106 inv_Ze = 1. / Ze
107 u_inv_Ze = u_Ze / ( Ze * Ze )
108 def inv_Ze_th(ra,param):
109     h11 = param[0]
110     inv_RTh = param[1]
111     hpl = param[2]
112     return inv_RTh + 1. / ( h11 + hpl * ra )
113 def inv_Ze_th_deriv(ra,param):
114     h11 = param[0]
115     inv_RTh = param[1]
116     hpl = param[2]
117     return - hpl / ( h11 + hpl * ra ) ** 2
118 param_Ze = modele_NL(Ka,inv_Ze,u_Ka,u_inv_Ze,
119 np.array([h11_gain,( R1 + R2 ) / ( R1 * R2 ),beta_gain + 1.]),inv_Ze_th,inv_Ze_th_deriv)
120 h11_Ze = param_Ze[0] # valeur optimale de h11
121 RTh_Ze = 1. / param_Ze[1] # valeur optimale de R1 // R2
122 beta_Ze = param_Ze[2] - 1. # valeur optimale de beta
123 u_h11_Ze = param_Ze[3] # incertitude sur h11
124 u_RTh_Ze = param_Ze[4] / param_Ze[1] * RTh_Ze # incertitude sur R1 // R2
125 u_beta_Ze = param_Ze[5] # incertitude sur beta
126 chi2_Ze = param_Ze[6] # chi2 réduit
127
128 #\\\ Affichage des résultats
129 beta = beta_gain / ( u_beta_gain * u_beta_gain ) + beta_Ze / ( u_beta_Ze * u_beta_Ze ) # estimation de
      beta qui minimise l'incertitude à partir des mesures pour le gain et la phase
130 beta /= ( 1. / ( u_beta_gain * u_beta_gain ) + 1. / ( u_beta_Ze * u_beta_Ze ) )
131 u_beta = np.sqrt( 2. / ( 1. / ( u_beta_gain * u_beta_gain ) + 1. / ( u_beta_Ze * u_beta_Ze ) ) )
132 h11 = h11_gain / ( u_h11_gain * u_h11_gain ) + h11_Ze / ( u_h11_Ze * u_h11_Ze ) # estimation de h11 qui
      minimise l'incertitude à partir des mesures pour le gain et la phase
133 h11 /= ( 1. / ( u_h11_gain * u_h11_gain ) + 1. / ( u_h11_Ze * u_h11_Ze ) )
134 u_h11 = np.sqrt( 2. / ( 1. / ( u_h11_gain * u_h11_gain ) + 1. / ( u_h11_Ze * u_h11_Ze ) ) )
135 RTh = R1 * R2 / ( R1 + R2 ) # valeur attendue de R1 // R2
136 u_RTh = RTh * RTh * np.sqrt( ( u_R1 / ( R1 * R1 ) ) ** 2 + ( u_R2 / ( R2 * R2 ) ) ** 2 )
137 print(r"$\beta=[{0:.2e}]$\pm$[{1:.1e}],".format(beta,u_beta))
138 print(r"$h_{11}=[{0:.2e}]$\pm$[{1:.1e}] $\Omega$,".format(h11,u_h11))
139 print(r"$R_3 \parallel R_2=[{0:.2e}]$\pm$[{1:.1e}] $\Omega$,".format(RTh_Ze,u_RTh_Ze))
140 print(r"$\left(R_1 \parallel R_2\right)_{\mathrm{th}}=[{0:.2e}]$\pm$[{1:.1e}] $\Omega$,".format(RTh,
      u_RTh))
141
142 #\\\ Tracé des données
143 plt.figure(1)
144 plt.errorbar(Ka,inv_AD,u_inv_AD,u_Ka,'o')
145 plt.plot(Ka,a_gain * Ka + b_gain,label=r"$\beta=-G[0:.2f]$\pm[{1:.1f}],".format(beta_gain,
      u_beta_gain) + r" $R_{11}=[{0:.2f}]$\pm[{1:.1f}] k$\Omega$, $\chi_2=[{2:.1f}]$".format(h11_gain * 1e
      -3,
```



```
147 u_h11_gain * 1e-3,chi2_gain))
148 plt.xlabel(r"$R_{\mathrm{a}}$ ($\Omega$)")
149 plt.ylabel("$A_D^{-1}$")
150 plt.legend()
151 plt.show()
152
153 plt.figure(2)
154 plt.errorbar(Ka,inv_Ze * 1e3,u_inv_Ze * 1e3,u_Ka,'o')
155 plt.plot(Ka,1e3 * inv_Ze_th(Ka,np.array([h11_Ze,1. / RTh_Ze, beta_Ze + 1.])),
156 label=r"$\beta=[{0:.2f}]$\pm$[{1:.1f}],".format(beta_Ze,u_beta_Ze) + r" $R_{11}=[{0:.2f}]$\pm[{1:.1f}] k$\Omega$,".format(h11_Ze * 1e-3,u_h11_Ze * 1e-3) + r"$\p" + r"$R_3 \parallel R_2=[{0
      :.2f}]$\pm[{1:.1f}] k$\Omega$, $\chi_2=[{2:.2f}]$".format(RTh_Ze * 1e-3,u_RTh_Ze * 1e-3,chi2_Ze))
157 plt.xlabel(r"$R_{\mathrm{a}}$ ($\Omega$)")
158 plt.ylabel(r"$Z_{\mathrm{e}}^{-1}$ (k$\Omega^{-1}$)")
159 plt.legend()
160 plt.show()
161
162 #\\\ Tracé de la courbe pour le critère de Barkhausen
163 ARcrit = ( C2 + RC / Ze + C1 ) * ( ( C1 + C2 ) / ( C1 * C2 ) + L / ( C1 + C2 + Ze + RC )
164 ) - 1. - RC / Ze # estimation de la valeur absolue du gain critique d'oscillation
165 fosc = np.sqrt( ( C1 + C2 ) / ( L * C1 * C2 ) + 1. / ( C1 * C2 * Ze * RC ) ) / ( 2. * np.pi ) # fréquence
      d'oscillation
166 u_ARcrit = 0. # estimation de l'incertitude sur la valeur absolue du gain critique d'oscillation par la mé
      thode de Monte-Carlo
167 u_fosc = 0. # estimation de l'incertitude sur la fréquence d'oscillation par la méthode de Monte-Carlo
168 n_MC = 10000
169 np.random.seed()
170 for i in range(n_MC):
171     C2_MC = C2 * ( 2. * np.random.random_sample() - 1. ) + u_C2
172     C1_MC = C1 * ( 2. * np.random.random_sample() - 1. ) + u_C1
173     L_MC = L * ( 2. * np.random.random_sample() - 1. ) + u_L
174     Ze_MC = Ze * ( 2. * np.random.random_sample(len(Ze)) - 1. ) + u_Ze
175     RC_MC = RC * ( 2. * np.random.random_sample() - 1. ) + u_RC
176     ARcrit_MC = ( C2_MC + RC_MC / Ze_MC + C1_MC ) * ( ( C1_MC + C2_MC ) / ( C1_MC * C2_MC
177     ) + L_MC / ( C1_MC + C2_MC + Ze_MC + RC_MC ) ) - 1. - RC_MC / Ze_MC
178     fosc_MC = np.sqrt( ( C1_MC + C2_MC ) / ( L_MC * C1_MC * C2_MC ) + 1. / (
179     C1_MC * C2_MC * Ze_MC * RC_MC ) ) / ( 2. * np.pi )
180     u_ARcrit += ( ARcrit_MC - ARcrit ) ** 2
181     u_fosc += ( fosc_MC - fosc ) ** 2
182 u_ARcrit /= n_MC
183 u_ARcrit **= 0.5
184 u_fosc /= n_MC
185 u_fosc **= 0.5
186 f, ( ax1, ax2 ) = plt.subplots(1,2,sharex = True)
187 ax1.grid()
188 ax2.grid()
189 ax1.errorbar(Ka,-AD,u_AD,u_Ka,'-o',label = r'$|A_D|$')
190 ax1.errorbar(Ka,ARcrit,u_ARcrit,u_Ka,'-o', label = r'$|A_G|_{\mathrm{c}}$')
191 ax2.errorbar(Ka,fosc / 1e3,u_fosc / 1e3,u_Ka,'-o')
192 ax1.set_xlabel(r"$R_{\mathrm{a}}$ ($\Omega$)")
193 ax2.set_xlabel(r"$R_{\mathrm{a}}$ ($\Omega$)")
194 ax1.set_ylabel(r"$|A_{G}|$")
195 ax2.set_ylabel(r"$f_{\mathrm{osc}}$ (kHz)")
196 ax1.legend()
197 f.show()
```

Les différentes librairies nécessaires sont introduites entre les lignes 8 et 11. Puis sont définies les fonctions nécessaires à réaliser un ajustement linéaire ou non linéaire des données entre les lignes 13 et 63 (se reporter au TP1 si besoin). Le nom du fichier de six colonnes contenant les données (résistance R_a, son incertitude, gain à vide A_0, son incertitude, impédance d'entrée du montage émetteur commun Z_e, son incertitude) ainsi que les valeurs des différents composants et leurs incertitudes sont indiquées entre les lignes 65 et 78. Les données sont ensuite importées entre les lignes 80 et 87. Un ajustement affine de $1/A_D$ en fonction de R_a est réalisé entre les lignes 88 et 102, dont la pente permettra de remonter à β, et l'ordonnée à l'origine à h_{11}. Un ajustement non linéaire de $1/Z_e$ en fonction de R_a permet d'obtenir une seconde estimation de β et h_{11}, et est réalisé entre les lignes 103 et 126. Les deux estimations de β et h_{11} sont ensuite combinées pour obtenir une valeur de ces deux grandeurs qui minimise leur incertitude entre les lignes 128 et 140. Ces valeurs sont affichées avec leur incertitude. La valeur de $R_1 \parallel R_2$ obtenue par l'ajustement non linéaire de $1/Z_e$ est également comparée à la valeur attendue. Enfin, les données expérimentales sont tracées entre les lignes 142 et 162. Un exemple de réalisation expérimentale avec le matériel d'enseignement est donné Fig. A3. On attend $\beta = 15$, et $h_{11} = 1\,\mathrm{k\Omega}$.

On revient maintenant sur le choix des différents composants. En utilisant l'Éq. (32), on s'attend à une fréquence d'oscillation de l'ordre de 230 kHz, et c'est pour cela qu'on travaille autour de cette fréquence. De plus, pour éviter la saturation du

montage émetteur commun, on travaille avec une amplitude suffisamment faible. On peut par ailleurs vérifier que les hypothèses précédentes sont vérifiées. En premier lieu, on a $1/(\omega C_3) = 7 \times 10^{-3}\,\Omega$, qui est bien négligeable devant R_9 et h_{11}/β. De la même manière, on a $1/(\omega C_2) \simeq 0{,}7\,\Omega$, qui est bien négligeable devant R_{10} et h_{11} (tous deux de l'ordre du kΩ). Enfin, on a $\omega L = 1{,}4 \times 10^{3}\,\Omega$, qui restera bien supérieure à R_6, dès lors que cette dernière variera entre 100 Ω et 5 kΩ.

On termine par mentionner que ce montage est analogue à celui de la Réf. [6], dont une version déjà citée existe dans la collection (P 4 2 . 4 7 et P 4 2 . 4 6). Dans ce montage, la résistance d'émetteur est remplacée par un potentiomètre, et la capacité d'émetteur ne court-circuite alors qu'une fraction de la résistance d'émetteur. Néanmoins, cette expérience n'est pas aussi quantitative que celle qui est proposée ici, car il est impossible, avec le boîtier, de mesurer la résistance d'émetteur non découplée, et de faire une étude systématique du gain et de l'impédance d'entrée en fonction de la résistance d'émetteur non découplée.

b. Critère de Barkhausen

On peut mesurer pour différentes valeurs de R_6 la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée $\underline{T}^*(j\omega)$, comme cela a été fait dans l'Exp. II. Ici, on propose une expérience plus rapide, qui consiste à déterminer uniquement le seuil et la fréquence d'oscillation à partir du critère de Barkhausen.

> On peut maintenant brancher le montage émetteur commun à la cellule *CLC* en réalisant le montage de la Fig. 5 sans la rétroaction. On prendra $C_1 = C_2 = 1\,\mu F$ et $L = 1\,mH$. On branchera en parallèle du condensateur de capacité C_3 un rhéostat de résistance variable dont la valeur sera systématiquement prise égale à Z_e.
> Pour une résistance R_6 de quelques centaines de ohms (on pensera à prendre la résistance en parallèle de la capacité C_2 égale à la valeur de Z_e pour la valeur de R_6 correspondante), on cherchera la fréquence d'excitation f_{exc} pour laquelle les tensions v_e en entrée du montage émetteur commun et v_s aux bornes du condensateur de capacité C_2 sont en phase. Pour cela, on sollicitera le circuit avec un GBF émettant un signal sinusoïdal d'amplitude égale à 100 mV. On mesurera alors le gain du système en boucle ouverte.
> On fera alors varier la résistance R_6 (sans oublier de modifier à chaque fois la valeur de la résistance en parallèle du condensateur de capacité C_3) et on reproduira le protocole précédent jusqu'à trouver la valeur de résistance $R_{6,c}$ pour laquelle l'amplitude de v_e est égale à celle de v_s à la fréquence pour laquelle les signaux sont en phase.

On rappelle que pour rechercher quand les signaux v_e et v_s sont en phase, il suffit de se placer en mode XY et de faire varier la fréquence jusqu'à observer une droite dans cette représentation. De plus, on notera que Z_e est très grande devant la résistance interne du GBF (égale à 50 Ω), de sorte qu'on peut raisonnablement négliger cette dernière.

Le fait de brancher une résistance variable en parallèle du condensateur de capacité C_3 permet de charger le filtre sur une impédance équivalente à l'impédance d'entrée du montage émetteur commun, et donc de corriger la fonction de transfert en boucle ouverte (comme cela a déjà été abordé dans le développement théorique ci-dessus). Par ailleurs, la fréquence f_{exc} est telle que les signaux v_e et v_s sont en phase, elle est donc telle que la fonction de transfert $\underline{T}^*(j\omega)$ est réelle positive. Ensuite, il suffit de chercher quand la fonction de transfert est égale à 1, ce qui revient à chercher la valeur de R_6 telle que les signaux sont de même amplitude. On obtient $f_{exc} \simeq 220\,kHz$ et $R_{6,c} \simeq 950\,\Omega$.

On pourra comparer les valeurs de f_{exc} et $R_{6,c}$ aux valeurs prédites par l'Éq. (32). Là encore, cela peut être fait en utilisant le code Python mentionné ci-dessus entre les lignes 164 et 199. L'algorithme trace sur le même graphique les deux membres de la seconde équation du système de droite de l'Éq. (32) dont l'intersection permettra d'en déduire $R_{6,c}$, puis de remonter à la fréquence d'oscillation au seuil d'instabilité à partir de la première équation du système de droite de l'Éq. (32). Les incertitudes sur les quantités prédites par l'Éq. (32) sont obtenues par la méthode de Monte-Carlo en supposant une distribution uniforme pour chaque grandeur mesurée. Les valeurs attendues à partir de l'Éq. (32) sont alors légèrement supérieures aux valeurs mesurées mentionnées ci-dessus, de l'ordre de $[f_{exc}]_{att} \simeq 230\,kHz$ et $[R_{6,c}]_{att} \simeq 1\,k\Omega$.

Pour expliquer ces écarts entre valeurs mesurées et attendues, il faudrait tenir compte de la non-idéalité de la bobine dans la cellule *CLC*, notamment sa résistance interne r et sa capacité parasite C. La première découle de la dissipation par effet Joule dans les bobinages du fil. La seconde provient du fait que la bobine est constituée de différents bobinages soumis à des potentiels électriques différents, de sorte qu'un effet capacitif parasite apparaît (mais qui ne devient pertinent qu'à hautes fréquences). Une modélisation réaliste de la bobine est proposée dans la Réf. [3] (p. 171), et revient à supposer que l'impédance de la bobine Z est donnée par la mise en parallèle de l'association série (L, r) avec la capacité parasite C, soit une impédance Z donnée par la relation $1/Z = j\omega C + 1/(r + j\omega L)$. On peut alors reprendre les calculs (plus lourds) de la fonction de transfert en boucle ouverte avec cette nouvelle impédance, et déterminer le nouveau critère de Barkhausen. La résistance interne permet alors d'expliquer pourquoi la résistance critique est inférieure à celle prédite pour une bobine idéale, car il faut que le gain de l'amplificateur émetteur commun soit plus important pour compenser la dissipation induite par la résistance interne de la bobine. Par contre, la prise en compte de la résistance interne de la bobine conduit à une fréquence d'oscillation supérieure. C'est la prise en compte de la capacité parasite de la bobine qui permet d'expliquer la fréquence d'oscillation plus faible que celle prédite par l'Éq. (32). Expérimentalement, on trouve $r \simeq 5\,\Omega$, tandis qu'on s'attend à $C \simeq 50\,pF$ (voir la Réf. [3]). Cela conduit alors à $[f_{exc}]_{att} \simeq 220\,kHz$ et $[R_{6,c}]_{att} \simeq 950\,\Omega$ en meilleur accord avec les mesures

expérimentales.

On termine par mentionner qu'il faudrait en toute rigueur également tenir compte de l'impédance finie de l'oscilloscope, qui peut perturber le comportement du circuit en boucle ouverte. Ce dernier peut être assimilé à la mise en parallèle d'un condensateur de capacité $C_{osc} \simeq 20\,pF$ et d'une résistance $R_{osc} \simeq 1\,M\Omega$. Cependant, $R_{osc} \gg Z_e$ et $C_{osc} \ll C_3$, et on peut donc négliger le fait que l'oscilloscope a une impédance d'entrée finie.

3. Étude en boucle fermée (*)

On peut maintenant réaliser l'oscillateur et observer les oscillations quasi-sinusoïdales.

> On propose de réaliser entièrement le montage de la Fig. 5. Pour cela, on retirera la résistance en parallèle du condensateur de capacité C_3, ainsi que le GBF en entrée. On reliera ensuite la sortie du filtre *CLC* à l'entrée du montage émetteur commun. On commencera par une résistance R_6 grande, et on la diminuera ensuite. On observera le signal en sortie du filtre à l'oscilloscope.
> On pourra ensuite s'éloigner du seuil d'oscillation pour observer le comportement de l'oscillateur.

On peut alors comparer la valeur de la résistance R_6 à laquelle les oscillations apparaissent avec la valeur $R_{6,c}$ mesurée en boucle ouverte. De la même manière, on pourra comparer la fréquence des oscillations pour $R_6 \lesssim R_{6,c}$ à la fréquence f_{exc} mesurée précédemment. Les mêmes remarques que pour les oscillations quasi-sinusoïdales de l'oscillateur à pont de Wien s'appliquent. Le fait d'avoir chargé le système en boucle ouverte avec une résistance égale à l'impédance d'entrée du montage émetteur commun est primordial, sous peine d'avoir sur-estimé la résistance critique d'oscillation (et donc sous-estimé le gain critique du montage émetteur commun).

Enfin, on doit retrouver que les oscillations deviennent de moins en moins sinusoïdales à mesure qu'on s'éloigne du seuil d'instabilité.

4. Oscillateur à quartz

L'oscillateur à quartz est simplement un oscillateur de Colpitts dans lequel on a remplacé l'inductance L par un cristal de quartz entouré de deux plaques métalliques. Cela permet en pratique de créer un système qui, en boucle ouverte, présente un facteur de qualité beaucoup plus grand que le montage précédent.

Le modèle électrocinétique du quartz est complexe, et une modélisation est proposée dans la Réf. [4], mais dans un certain régime de fréquence, il peut être assimilé à une inductance pure de grande valeur. Le facteur de qualité résultant est alors très important.

Le schéma électrique équivalent du quartz est donné Fig. 7. Dans ce schéma, la capacité C_0 correspond à la capacité du condensateur formé par les deux armatures (le quartz joue ici le rôle de diélectrique) en régime statique qui induit l'accumulation de charges sur les armatures métalliques quand le composant est soumis à une tension constante. Les autres impédances dites « motionnelles » traduisent le couplage électrique-mécanique à l'origine de la piézo-électricité. Il est alors aisé de voir qu'à basses et hautes fréquences, le quartz a un comportement capacitif (son impédance est de partie imaginaire négative). Le calcul complet de son impédance montre qu'il présente en réalité un comportement inductif dans un intervalle de fréquences restreint[4] (son impédance est de partie imaginaire positive dans cet intervalle). Pour plus de détails, on renvoie le lecteur à la Réf. [6] (p. 151), ou bien à la Réf. [2] (pp. 201-202).

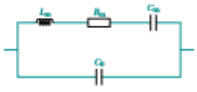


FIGURE 7 – Schéma électrique équivalent du quartz.

Contrairement au cas de la cellule *CLC* où le filtre était un passe-bas, le filtre formé par les deux condensateurs et le quartz est un filtre passe-bande du quatrième ordre, du fait des effets capacitifs du quartz à basses fréquences.

Liste du matériel :

- tout le matériel précédent,

4. Dans le cas où $R_m = 0$, on trouve que le comportement inductif du quartz est obtenu entre les pulsations $1/\sqrt{L_m C_m}$ et $\sqrt{1+C_m/C_0}\,/\sqrt{L_m C_m}$, avec $C_m/C_0 \ll 1$.

- un filtre à quartz de fréquence caractéristique de l'ordre de 2MHz P42.47.

Pour une première approche de l'oscillateur à quartz (ou selon le temps disponible en TP), on peut se contenter d'utiliser le montage émetteur commun du boîtier P42.47. Dans ce cas, on ne peut pas étudier le seuil d'oscillation à partir d'une étude en boucle ouverte de façon quantitative et robuste, car il est impossible de mesurer la résistance d'émetteur non découplée. On se contentera alors de noter la nécessité de dépasser le seuil d'oscillation prédit par le critère de Barkhausen pour observer des oscillations en boucle fermée.

a. Fonctionnement en boucle ouverte (*)

On propose de commencer par l'étude en boucle ouverte, en caractérisant quelques propriétés de la FTBO du système, puis en vérifiant le critère de Barkhausen, selon un protocole analogue à celui présenté précédemment pour le montage Colpitts avec une bobine simple.

> On propose de reprendre le montage Colpitts de la Fig. 5 et de remplacer la cellule CLC par une cellule contenant deux condensateurs et un quartz. Les capacités des condensateurs à utiliser pour créer un oscillateur sont la plupart du temps précisées par le fabricant. Ici le quartz est présent dans le boîtier P42.47.
> On pourra alors réitérer les expériences précédentes si le montage de la Fig. 5 a été réalisé, notamment commencer par relever l'impédance d'entrée Z_e du montage émetteur commun seul pour diverses valeurs de R_b en soumettant l'entrée de l'amplificateur à un signal sinusoïdal de fréquence égale à la fréquence caractéristique du quartz, ici de l'ordre de 2MHz, et d'amplitude de l'ordre de 300mV.
> Cette expérience n'est pas réalisable si on décide d'utiliser le montage amplificateur du boîtier P42.47, car il est impossible de mesurer la résistance d'émetteur non découplée.

b. Critère de Barkhausen

On peut alors vérifier le critère de Barkhausen à partir de l'étude en boucle ouverte, si le montage de la Fig. 5 a été réalisé soi-même.

> On pourra, toujours à partir du circuit électrique de la Fig. 5 en boucle ouverte, et alimenté en entrée par un GBF émettant un signal sinusoïdal d'amplitude de l'ordre de 300mV et de fréquence proche de la fréquence de résonance indiquée par le fabricant du quartz, chercher ensuite la fréquence d'oscillation f_{osc} (correspondant à la fréquence pour laquelle les signaux en entrée du montage émetteur commun et en sortie du filtre sont en phase), et la valeur $R_{b,c}$ de la résistance R_b conduisant à un gain de la fonction de transfert en boucle ouverte corrigée égal à 1. Pour un protocole plus détaillé, on renvoie aux manipulations précédentes. On pensera bien, pour chaque variation de la résistance R_b, à ajuster la valeur de la résistance en parallèle du condensateur de capacité C_2 pour qu'elle soit égale à Z_e mesurée précédemment. Attention, le quartz ayant un fort facteur de qualité, il convient de modifier la fréquence hertz par hertz pour trouver la fréquence d'oscillation.
> Cette expérience est également réalisable si on utilise le montage émetteur commun du boîtier P42.47. Il convient d'alimenter le boîtier avec une tension continue de l'ordre de 4V. Dans ce cas, on fera tourner le potentiomètre, et on ajustera à chaque fois la fréquence du signal délivré par le GBF pour que les signaux en entrée et en sortie soient en phase. On mesurera le gain de la fonction de transfert en boucle ouverte à cette fréquence, et on réitérera la procédure jusqu'à ce que ce gain soit égal à 1.

Attention que la fréquence de résonance du circuit (amplitude maximale de la tension) en boucle ouverte ne coïncide pas avec la fréquence à laquelle les signaux en entrée et en sortie sont en phase (critère de Barkhausen), les deux fréquences diffèrent de quelques hertz. L'oscillateur à pont de Wien pour lequel les deux fréquences coïncident est donc une exception.

On termine par mentionner que les résultats de cette partie peuvent être analysés en adaptant le code Python introduit plus haut pour l'oscillateur Colpitts avec une bobine simple, si le montage de la Fig. 5 a été réalisé soi-même.

c. Fonctionnement en boucle fermée

Une fois l'étude en boucle ouverte faite, on peut étudier le système en boucle fermée pour observer les oscillations.

> On propose maintenant de boucler le circuit en enlevant le GBF et en reliant la sortie du filtre à l'entrée du montage émetteur commun. On pourra partir d'une résistance $R_b \gtrsim R_{b,c}$, puis la diminuer. Comme dans la partie précédente, on pourra comparer la fréquence d'oscillation et la résistance R_b en-deçà de laquelle le système se met à osciller aux valeurs prédites par l'étude en boucle ouverte précédente.
> Si on utilise le montage émetteur commun du boîtier P42.47, alors on pourra juste boucler le système. Il faudra alors diminuer la résistance du potentiomètre par rapport à sa position déterminée en boucle ouverte pour observer les oscillations, du fait de l'impédance d'entrée finie du montage amplificateur.
> Une fois qu'on observe les oscillations, on peut ensuite essayer de regarder le comportement de l'oscillateur lors-

> qu'on continue à augmenter le gain de l'amplificateur (en diminuant R_b, ou en diminuant la résistance d'émetteur non découplée si on utilise le boîtier P42.47). On notera alors comment évolue la forme du signal (et donc son contenu spectral), ainsi que la pulsation d'oscillation.

On doit observer que la fréquence d'oscillation ne varie quasiment pas quand on s'éloigne du seuil d'instabilité, contrairement à l'oscillateur à pont de Wien ou à l'oscillateur Colpitts avec une simple bobine à la place du quartz. Cela vient du fait que la cellule CLC formée avec le quartz présente un énorme facteur de qualité. Cependant on doit observer que le signal se déforme et devient anharmonique quand on s'éloigne du seuil d'instabilité. On pourra par exemple se référer à la Réf. [6] (p. 152) pour une réalisation expérimentale.

Enfin, on mentionne que l'observation du régime transitoire est délicate, il est déconseillé de la réaliser. Les montages précédentes (pont de Wien ou Colpitts avec une bobine simple) sont plus adaptés.

d. Raffinement : utilisation d'une sonde passive à oscilloscope (*)

À hautes fréquences, l'impédance d'entrée de l'oscilloscope n'est pas très élevée, à cause de sa capacité d'entrée (de l'ordre de 10pF). La mesure à l'oscilloscope peut donc parasiter le circuit, en particulier car les capacités C_1 et C_2 sont typiquement du même ordre de grandeur. De plus, la forme des signaux non sinusoïdaux peut être altérée car l'amplitude observée des signaux dépend de la fréquence de ceux-ci.

Pour éviter que l'oscilloscope ne perturbe l'observation des signaux en sortie du filtre de l'oscillateur à quartz, on peut utiliser une sonde de mesure passive, dont on présente le circuit simplifié Fig. 8, adapté de la Réf. [3] (p. 27). Dans ce schéma, C_{sp} désigne la capacité ajustable de la sonde, R_{sp} la résistance de la sonde, C_c la capacité fixe du câble composant la sonde, C_{osc} la capacité d'entrée de l'oscilloscope, et R_{osc} sa résistance d'entrée.

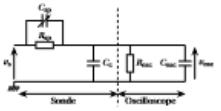


FIGURE 8 – Principe simplifié d'une sonde passive à oscilloscope.

En régime harmonique, et en notant les amplitudes complexes des tensions en majuscules, on a que la tension observée sur l'oscilloscope vaut

$$\underline{V_{osc}} = \frac{R_{osc}}{R_{osc} + R_{sp}\dfrac{1 + j\omega R_{osc}(C_{osc} + C_c)}{1 + j\omega R_{sp}C_{sp}}}\underline{V_e}. \tag{33}$$

Si la condition $R_{sp}C_{sp} = R_{osc}(C_{osc} + C_c)$ est réalisée, alors, on a simplement que

$$\underline{V_{osc}} = \frac{R_{osc}}{R_{osc} + R_{sp}}\underline{V_e}. \tag{34}$$

Dans ce cas particulier, la sonde atténue toutes les tensions sinusoïdales d'un facteur indépendant de leur fréquence, et ne déforme pas les signaux non sinusoïdaux.

Liste du matériel :
- tout le matériel précédent,
- une sonde passive pour oscilloscope P37.3.

> On propose de brancher une sonde passive sur une des voies de l'oscilloscope, puis de connecter son autre extrémité sur le calibrateur (petit ergot sur la face avant de l'oscilloscope). Pour l'oscilloscope DSOX3014T, il s'agit de la sortie `Probe Comp` (à droite de la sortie USB). On observe un signal créneau déformé. Le condensateur variable de la sonde de capacité C_{sp} peut alors être réglé au moyen de la vis jaune située sur la pointe. À l'aide d'un tournevis, on pourra ajuster la capacité de la sonde de façon à obtenir un signal parfaitement créneau.
> La sonde étant maintenant réglée, on peut reprendre les études précédentes sur l'oscillateur à quartz sans craindre que l'oscilloscope n'influe sur les caractéristiques du circuit.

Le calibrateur fournit un signal carré de fréquence de l'ordre de 1kHz et d'amplitude de l'ordre de 1V.

IV. Oscillateur à résistance négative [MPs 8, 9, 35 et 53]

1. Présentation

L'oscillateur à résistance négative peut se comprendre en ayant recours à la notion de filtre et de système bouclé, comme cela a été fait précédemment. Attention que l'analyse est ici plus délicate car le système n'est pas stable, même en boucle ouverte. On peut également le voir de façon plus simple. Un circuit *RLC* est le siège d'oscillations exponentiellement amorties avec un temps caractéristique qui dépend de la résistance R. Pour créer un oscillateur non amorti, il suffit d'ajouter une résistance négative $-R'$ (avec $R' > 0$) qui compense au moins la résistance R. Le système sera alors le siège d'oscillations exponentiellement amplifiées. Avant de considérer l'oscillateur à résistance négative, nous allons créer, à l'aide d'un ALI, un dipôle qui se comporte, dans un certain régime de fonctionnement, comme une résistance négative.

L'expérience que nous proposons est également décrite dans les Réf. [3] (pp. 169-171), Réf. [2] (pp. 253-258) et Réf. [5], qu'on pourra consulter, notamment pour des exemples de réalisation expérimentale.

2. Étude de la résistance négative

Nous commençons par étudier le dipôle qui va jouer le rôle de résistance négative. Pour cela, on s'intéresse au circuit de la Fig. 9. Pour des détails théoriques sur le fonctionnement du circuit, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [2] (pp. 253-255), ou bien à la Réf. [8]. Nous donnons uniquement une représentation schématique de la caractéristique du dipôle Fig. 9.

- Pour des tensions de faible amplitude, *TALI* fonctionne en régime linéaire, et le dipôle entre les points A et B se comporte comme une résistance négative : $v = -R'i$ avec $R' = R_1R_2/R_3$.
- Pour des tensions de plus forte amplitude, *TALI* fonctionne en régime de saturation, et sa caractéristique a pour équation $v = R_1 i + V_{sat}$ (saturation positive) et $v = R_1 i - V_{sat}$ (saturation négative).

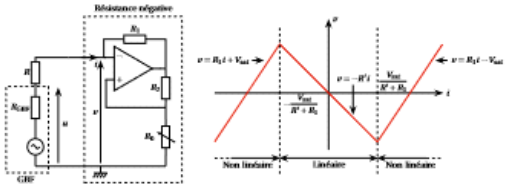


Figure 9 – À gauche, circuit pour le tracé de la caractéristique de la résistance négative. L'abréviation GBF désigne un Générateur Basses Fréquences dont on a noté R_{GBF} la résistance interne. À droite, caractéristique de la résistance négative.

Liste du matériel :

- un amplificateur linéaire intégré,
- deux résistances $R_1 = R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- un rhéostat de résistance variable R_3 P56 . 32,
- un générateur basses fréquences,
- une carte d'acquisition.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 9. On prendra $R_1 = R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $R_3 = 500\,\Omega$. Pour l'excitation, on utilisera une oscillation sinusoïdale de quelques volts, de fréquence de quelques hertz. On fera l'acquisition des tensions u et v avec une carte d'acquisition, afin de remonter à la caractéristique courant-tension, où $i = (u - v)/R$.

On pourra modéliser le régime de fonctionnement linéaire de l'ALI (résistance négative) par une droite, afin d'en déduire R'. On pourra alors comparer à la valeur attendue $R' = R_1R_2/R_3$. Un exemple de réalisation expérimentale avec le matériel de la collection est donné Fig. A4.

La résistance R est placée dans le circuit afin d'obtenir une mesure du courant. Pour sonder une large partie de la caractéristique, on a tout intérêt à prendre $R \lesssim R_1, R_2$. Par ailleurs, l'amplitude de l'excitation doit être suffisante pour voir toute la caractéristique. Enfin, la fréquence du signal sinusoïdal doit être suffisamment faible pour pouvoir s'affranchir du comportement dynamique de l'ALI, mais aussi pour pouvoir reconstruire fidèlement la caractéristique (notamment aux transitions entre fonctionnements linéaire et en saturation de l'ALI).

En outre, la résistance R doit être choisie telle que $R + R_{GBF} > R'$ (avec $R_{GBF} = 50\,\Omega$), afin que le régime de fonctionnement linéaire de l'ALI soit stable. On peut le comprendre en utilisant le modèle à l'ordre 1 de l'ALI déjà évoqué plus haut (voir l'Exp. II),

$$\frac{1}{\omega_{ALI}}\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + v_s = \mu\left(\frac{R_2}{R_2 + R_3}v_+ - v\right), \tag{35}$$

où v_s désigne la tension en sortie de l'ALI, ω_{ALI} la pulsation de coupure de l'ALI et μ son gain statique. Par ailleurs, la loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse de l'ALI conduit à

$$\frac{v_s - v}{R_1} + \frac{e - v}{R + R_{GBF}} = 0 \Longrightarrow v = \frac{(R + R_{GBF})v_s + R_1 e}{R + R_{GBF} + R_1}, \tag{36}$$

avec e la force électromotrice du GBF. On obtient donc finalement

$$\frac{1}{\omega_{ALI}}\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + \left[1 + \mu\left(\frac{R + R_{GBF}}{R + R_{GBF} + R_1} - \frac{R_2}{R_2 + R_3}\right)\right]v_s = -\mu\frac{R_1}{R + R_{GBF} + R_1}e. \tag{37}$$

Ainsi, le fonctionnement en régime linéaire de l'ALI est stable si le terme entre crochets dans l'équation précédente est positif, conduisant à $R + \mathrm{GBF} > R'$ (car $\mu \gg 1$).

Cela peut se comprendre également graphiquement en traçant sur le graphique de la Fig. 9 la caractéristique de l'association en série du GBF et de la résistance R. On constate alors que cette dernière doit être de pente supérieure en valeur absolue à celle de la résistance négative pour que le point de fonctionnement à l'intersection des deux caractéristiques se trouve dans le régime de fonctionnement linéaire de l'ALI. Cela permet également de s'assurer qu'il n'y a qu'un seul point de fonctionnement quelle que soit la valeur de la force électromotrice du GBF, et ainsi éviter les effets d'hystérésis.

3. Oscillateur à résistance négative

Il suffit maintenant d'insérer le dipôle à résistance négative dans un simple circuit *RLC* pour former un oscillateur.

Liste du matériel :

- un amplificateur linéaire intégré,
- deux résistances $R_1 = R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$,
- un rhéostat de résistance variable R_3 P56 . 32,
- un condensateur de capacité $C = 100\,\mathrm{nF}$,
- une bobine P60 . 21,
- un oscilloscope,
- une carte d'acquisition.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 10. On pourra prendre $C = 100\,\mathrm{nF}$, $L = 0{,}2\,\mathrm{H}$, et $R_1 = R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$. En partant d'une faible valeur de résistance $R_3 = 1\,\Omega$, on augmentera R_3, et on observera la tension aux bornes du condensateur par exemple.

On doit observer des oscillations lorsque la résistance négative $-R'$ annule la résistance de la bobine r. En effet, l'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension u aux bornes du condensateur s'écrit simplement

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{r - R'}{L}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u = 0. \tag{38}$$

On notera alors $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ la fréquence des oscillations. On doit obtenir des oscillations quasi-sinusoïdales quand $R' \gtrsim r$, de fréquence $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC}) \simeq 1{,}1\,\mathrm{kHz}$. On pourra vérifier qu'au seuil d'instabilité, on a $R' \gtrsim r$, en ayant au préalable mesuré r au *RLC*-mètre à 1 kHz (proche de la fréquence d'oscillation du système).

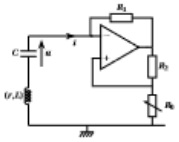


FIGURE 10 – Oscillateur à résistance négative.

La valeur de R' qu'on obtient peut être légèrement surévaluée par rapport à la valeur de r mesurée au *RLC*-mètre, du fait de l'impédance d'entrée finie de l'oscilloscope. Si on modélise l'oscilloscope par une résistance $R_{osc} \simeq 1\,\mathrm{M\Omega}$ en parallèle d'une capacité $C_{osc} = 10\,\mathrm{pF}$, alors on obtient que le système se met à osciller quand

$$R' > r + \frac{L}{R_{osc}(C + C_{osc})}, \tag{39}$$

avec une fréquence caractéristique

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{1 - \frac{L}{R_{osc}^2(C + C_{osc})}}\,\frac{L}{L(C + C_{osc})}. \tag{40}$$

L'écart entre R' et r est alors de l'ordre de 1 Ω à 2 Ω pour les valeurs des composants choisies, donc non négligeable devant r (de l'ordre de 10 Ω). Par contre, la correction sur la fréquence d'oscillation f_0 est trop faible devant f_0 pour être remarquée.

Si on continue d'augmenter R_0, on doit observer que les oscillations deviennent de moins en moins sinusoïdales.

> On pourra ensuite mesurer l'évolution du taux de distorsion τ du signal en fonction de R_0, tracer le portrait de phase, analyser la phase de croissance de l'amplitude des oscillations en mesurant le taux de croissance, etc. Pour plus de détails sur tous ces aspects, on renvoie à l'Disp. II.

On mentionne, par exemple, que le taux de croissance des oscillations pour $R' > r$ est donné par

$$\alpha = \frac{R' - r}{2L}, \tag{41}$$

voir l'Éq. (38).

On termine par mentionner qu'on peut également effectuer un oscillateur à résistance négative avec un circuit *RLC* parallèle (ici les composants sont en série). Il suffit alors de modifier légèrement le montage de la résistance négative en inversant les entrées inverseuse et non inverseuse (cela revient à changer la caractéristique du dipôle dans le domaine de fonctionnement linéaire de l'ALI). Pour plus de détails sur ce point, on renvoie le lecteur à la Réf. [3] (pp. 169-171).

4. Application à la mesure de la résistance d'une bobine à air en fonction de la fréquence (*)

On peut mettre à profit le montage précédent, afin de mesurer la résistance d'une bobine à air en fonction de la fréquence.

Liste du matériel :

- un amplificateur linéaire intégré,
- deux résistances $R_1 = R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$,
- un rhéostat de résistance variable R_0 P54.32,
- un condensateur de capacité variable P58.33,
- une bobine P60.21,
- un oscilloscope.

> On propose de reprendre le circuit de la Fig. 10 et de faire varier la capacité du condensateur entre 100 pF et 100 nF. On pourra alors rechercher, pour chaque valeur de capacité, la valeur de résistance R_0 pour laquelle le système se met à osciller, et donc pour laquelle la résistance négative compense la résistance r de la bobine. On notera alors la fréquence f_0 des oscillations.

La courbe $r(f_0)$ permet alors d'obtenir une mesure de la variation de la résistance de la bobine en fonction de la fréquence. La modélisation de la dépendance en fréquence de la résistance d'une bobine est complexe, et on renvoie le lecteur à la Réf. [6] (pp. 226-243) pour de plus amples détails. Dans l'hypothèse où la bobine peut être assimilée à un solénoïde infini présentant n couches de bobinages, la résistance r vérifie la relation

$$r = r_0\left[1 + \left(\frac{n}{6} - \frac{7}{90}\right)\left(\frac{f_0}{f_c}\right)^2\right] \tag{42}$$

pour

$$f_0 \ll f_c = \frac{1}{\pi\mu_0\sigma e^2} \simeq 7\,\mathrm{MHz}, \tag{43}$$

où σ désigne la conductivité électrique du cuivre, e le diamètre du fil, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$ la perméabilité magnétique du vide, et r_0 la résistance du bobinage en régime de fonctionnement statique. La dernière estimation est faite pour la bobine P60.21. A hautes fréquences $f_0 \gg f_c$, l'effet de peau domine, ce qui conduit à une croissance de r comme $\sqrt{f_0}$.

Pour l'analyse des résultats expérimentaux, on pourra, par exemple, effectuer un ajustement affine de r en fonction de f_0^2 (pour $f_0 \ll f_c$) : $r = a f_0^2 + b$. Un exemple de réalisation expérimentale avec du matériel d'enseignement est visible Fig. A5. Pour la bobine utilisée, on a $a \simeq 10$ et $r_0 \simeq 9\,\Omega$, et on s'attend donc à $b \simeq 9\,\Omega$ et $a \simeq 3 \times 10^{-7}\,\Omega\,\mathrm{Hz}^{-2}$ en accord raisonnable avec l'expérience. Il faut néanmoins se souvenir que l'Éq. (42) découle d'un modèle très simplifié du comportement de la bobine, et on ne s'attend donc pas à un accord parfait entre la pente a mesurée expérimentalement, et celle prédite par l'Éq. (42). Pour une plus large discussion sur les limites du modèle amenant à l'Éq. (42), on renvoie le lecteur à la Réf. [6] (pp. 242-243).

RÉFÉRENCES

[1] A. Arbouet, « Réalisation d'un analyseur de spectre », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 822(1) (2000).

[2] P. Brendlen, G. Buffard, L. Douchet, M. Sauzeta et S. Tinurrant, *Électronique PSI*, Bréal (2005).

[3] R. Duffait et J.-P. Lièvre, *Agrégation de Sciences Physiques - Expériences d'électronique*, Bréal (1999).

[4] A. Frühling, « Auto-entretien des oscillations. Exemple d'application aux quartz piézo-électriques », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 696 (1987).

[5] R. Kervaec, « Résistance négative », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 727(1) (1990).

[6] M. Krob, *Électronique expérimentale*, Ellipses (2002).

[7] S. Le Ballois et P. Codron, *Automatique. Systèmes linéaires et continus*, Dunod (2006).

[8] J.-M. Millet et P. Julliard, « Montage simulant une résistance négative. Applications à l'obtention d'oscillations quasi-sinusoïdales », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 691(1) (1987).

Exemples de résultats expérimentaux

Figure A1 – Diagramme de Nyquist de la FTBO du pont de Wien (gauche) en-deçà du critère d'instabilité de Barkhausen et (droite) au-delà (voir l'Exp. II).

Figure A2 – Mesure du taux de croissance s des oscillations pour l'oscillateur à pont de Wien en fonction de la résistance R_2 contrôlant le gain de l'amplificateur non inverseur (voir l'Exp. II).

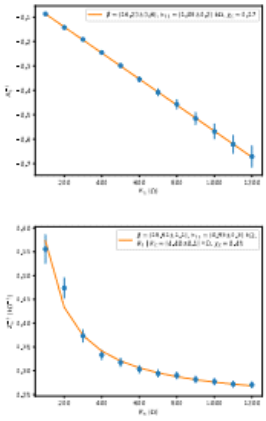


Figure A3 – Évolution du gain à vide A_0 (en haut) et de l'impédance d'entrée Z_e (en bas) de l'étage d'amplification du montage Colpitts (voir l'Exp. III).

Figure A4 – Caractéristique de la résistance négative (voir l'Exp. IV).

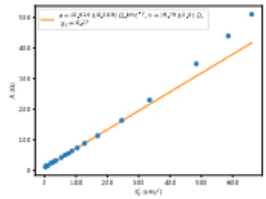


Figure A5 – Mesure de la résistance d'une bobine à air en fonction de la fréquence (voir l'Exp. IV).

Oscillateurs à relaxation et non-linéarité en électronique

Table des expériences

I.	Généralités sur les oscillateurs à relaxation	127
II.	Multivibrateur à intégrateur inverseur et comparateur à hystérésis [MPs 42, 48 et 53]	127
III.	Multivibrateur astable (*) [MPs 48 et 53]	130
IV.	Oscillateur de Van der Pol [MPs 8, 9 et 53]	131
V.	Oscillateur anharmonique double-puits [MPs 8, 9 et 53]	137

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Généralités sur les oscillateurs à relaxation

Les oscillateurs à relaxation sont des oscillateurs auto-entretenus pour lesquels les non-linéarités contribuent à l'amplitude du signal, ainsi qu'à son contenu spectral. Pour plus de détails sur le fonctionnement des oscillateurs, on renvoie le lecteur au TP6.

Les oscillateurs à relaxation sont, de façon générique, des systèmes présentant deux états instables, le système transitant d'un état à l'autre [8].

Nous allons dans la suite principalement nous intéresser à différents exemples d'oscillateurs à relaxation en électronique. Cependant, des oscillateurs à relaxation existent également dans d'autres domaines de la physique, en particulier en mécanique : les expériences du vase de Tantale et du frottement en *stick-slip* d'un patin sont détaillées dans le fascicule de TP Divers.

II. Multivibrateur à intégrateur inverseur et comparateur à hystérésis [MPs 42, 48 et 53]

1. Fonctionnement de l'oscillateur à relaxation

Nous proposons de réaliser un premier oscillateur à relaxation, qui est le multivibrateur à intégrateur inverseur et comparateur à hystérésis (voir Fig. 1). Ce circuit est également décrit dans la Réf. [2] (pp. 187-188), ainsi que dans la Réf. [1] (pp. 313-316) auxquelles on pourra se référer pour plus de détails. Ce circuit fait partie de la famille des montages astables qui délivrent en sortie un signal rectangulaire périodique.

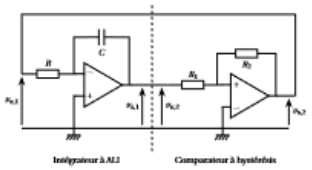


Figure 1 – Oscillateur à relaxation constitué d'un montage intégrateur inverseur à AL1 et d'un comparateur à hystérésis.

Liste du matériel :

- deux amplificateurs linéaires intégrés sur boîtier,
- une résistance $R = 100\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$,
- un condensateur de capacité $C = 10\,\mathrm{nF}$,
- un rhéostat de résistance variable R_1 P54 . 32,
- un oscilloscope.

> On propose de réaliser l'oscillateur à relaxation de la Fig. 1 avec $R = 100\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 10\,\mathrm{nF}$, $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et un rhéostat de résistance variable R_1. On pourra alors observer à l'oscilloscope les tensions $s_{s,1}$ et $s_{s,2}$, et comparer leur période à la valeur donnée par l'Éq. (2). Pour rendre l'expérience plus quantitative, on pourra effectuer l'expérience pour plusieurs valeurs de R_1 de l'ordre du kΩ.
> On pourra également observer le comportement dynamique du système dans l'espace des phases en se plaçant en mode XY.

Les valeurs de R et C sont choisies de telle sorte d'avoir une fréquence de l'ordre du kHz.

On décrit maintenant théoriquement le fonctionnement du circuit. Le comparateur à hystérésis fonctionne en régime de saturation, de sorte que $s_{s,2} = +V_{sat}$ dès lors que le potentiel à l'entrée non inverseuse du second AL1 est positif ($s_{e,2} = +V_{sat}$) ou négatif ($s_{e,2} = -V_{sat}$). La loi des nœuds à l'entrée non inverseuse permet alors d'en déduire que

$$s_{s,2} = \begin{cases} V_{sat} & \text{si} \quad s_{e,2} > -V_0 \\ -V_{sat} & \text{si} \quad s_{e,2} < V_0 \end{cases}, \tag{1}$$

où $V_0 = R_1 V_{sat}/R_2$.

Supposons tout d'abord que $s_{s,2} = +V_{sat}$. Le montage intégrateur va intégrer cette tension au cours du temps, sa tension de sortie $s_{s,1}$ décroît alors linéairement avec une pente $-V_{sat}/(RC)$. Cela s'achève quand $s_{s,1} = s_{e,2}$ devient égale à $-V_0$, car le comparateur à hystérésis bascule alors en saturation négative et alors $s_{s,2} = -V_{sat}$. La tension en sortie de l'intégrateur croît alors linéairement avec une pente $+V_{sat}/(RC)$, jusqu'à atteindre le seuil V_0. Il y a alors à nouveau basculement, et le cycle recommence. Finalement, on en déduit que la tension $s_{s,2}$ sera un signal créneau $\pm V_{sat}$ de période

$$T = 2\frac{2V_0}{V_{sat}/(RC)} = 4\frac{R_1}{R_2}RC, \tag{2}$$

tandis que la tension $s_{s,1}$ sera un signal triangulaire oscillant entre V_0 et $-V_0$, et de même période. Il s'agit bien d'un oscillateur à relaxation.

Pour l'analyse quantitative de l'expérience, on pourra tracer la période T en fonction de R_1 et effectuer une modélisation affine. On doit obtenir une droite de pente $4RC/R_2$ et une ordonnée à l'origine nulle. Un exemple de réalisation expérimentale avec le matériel d'enseignement est donné Fig. A1.

Enfin, on mentionne que le signal $s_{s,2}$ est la dérivée du signal $s_{s,1}$ (du fait du comportement intégrateur du premier AL1). Ainsi, l'observation en mode XY correspond bien à une observation directe du portrait de phase.

2. Oscillateur commandé en tension (OCT)

Il est possible de commander la fréquence de l'oscillateur à relaxation par une tension v_c, en introduisant un multiplieur analogique dans la boucle de rétroaction (voir Fig. 2), comme cela est également proposé dans la Réf. [2] (pp. 192-193).

Liste du matériel :

- deux amplificateurs linéaires intégrés sur boîtier,
- un multiplieur analogique P41 . 15,
- une résistance $R = 100\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$,
- un condensateur de capacité $C = 10\,\mathrm{nF}$,
- deux résistances $R_b = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

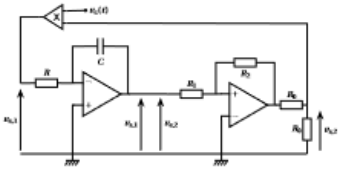


FIGURE 2 – Oscillateur commandé par une tension (OCT).

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 2, avec $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 10\,\mathrm{nF}$, $R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et $R_0 = 1\,\mathrm{k\Omega}$. Pour plusieurs tensions continues v_e inférieures à la tension maximale que peut supporter le multiplieur (ici 10V), on pourra mesurer la fréquence f du signal $v_{s,1}$ (ou $v_{s,2}$).
> On pourra ensuite, à l'aide d'un générateur basses fréquences, émettre un signal sinusoïdal v_e de fréquence de l'ordre de la centaine de hertz, d'amplitude de l'ordre de 2 V avec un offset de 3V (de sorte à garder $v_e > 0$), et observer la tension $v_{s,1}$. Pour faciliter l'affichage à l'oscilloscope, on pourra utiliser le mode `Single`.

Pour éviter de saturer l'entrée de ce multiplieur qui ne peut supporter des tensions supérieures à 10V, on limite la tension de sortie du comparateur avec un pont diviseur de tension. Cela est à comparer avec le montage de la Réf. [2] où des diodes Zener sont utilisées. Le montage est alors plus complexe, notamment du point de vue du point de polarisation des diodes. De plus, là encore, les valeurs des composants ont été choisies pour que la variation de fréquence soit de l'ordre de 1kHz pour une variation de v_e de 1 V.

Dans le cas où la tension v_e est constante, le fonctionnement du circuit est analogue à celui de la Fig. 1, à la différence que la tension à intégrer est maintenant $\pm k v_e V_{sat}$, où k désigne le coefficient du multiplieur ($k = 0{,}1\,\mathrm{V}^{-1}$). Dans ce cas, on en déduit la nouvelle période T ou fréquence f d'oscillations :

$$T = 2\frac{2V_0}{k v_e V_{sat}/(RC)} = 4\frac{R_1}{R_2}\frac{RC}{k v_e} \Longrightarrow f = \frac{k}{4RC}\frac{R_2}{R_1}v_e. \tag{3}$$

Ici, la fréquence f dépend de la tension v_e : on a donc réalisé un oscillateur commandé en tension.

Pour un traitement quantitatif de l'expérience, on pourra tracer la fréquence f d'oscillation en fonction de v_e, et effectuer un ajustement affine. Un exemple de réalisation expérimentale avec du matériel d'enseignement est donné Fig. A1.

Enfin, dans le cas où le signal v_e est un signal périodique, on obtient un signal modulé en fréquence (voir TP8). En effet, supposons que le second ALI passe en saturation positive à l'instant t_0. Dans ce cas, le premier ALI intègre la tension $k v_e(t) V_{sat}$, et on a alors

$$v_{s,1}(t) = V_0 - \frac{k V_{sat}}{RC}\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t'\, v_e(t'). \tag{4}$$

Le second ALI passe alors en saturation négative à l'instant t_1 tel que $v_{s,1}(t_1) = -V_0$, où t_1 est donné par l'équation implicite

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\, v_e(t) = 2\frac{R_1}{R_2}\frac{RC}{k}. \tag{5}$$

Pour $t > t_1$, la tension $v_{s,1}$ vaut alors

$$v_{s,1}(t) = -V_0 + \frac{k V_{sat}}{RC}\int_{t_1}^{t} \mathrm{d}t'\, v_e(t'), \tag{6}$$

et, là encore, le second ALI repasse en saturation positive quand $v_{s,1}(t_2) = V_0$, où t_2 est donné par l'équation implicite

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t\, v_e(t) = 2\frac{R_1}{R_2}\frac{RC}{k}. \tag{7}$$

Autrement dit, la période « instantanée » $T(t_0)$ des signaux $v_{s,1}(t)$ (qui n'est plus un signal triangulaire) et $v_{s,2}(t)$ (qui est toujours un signal créneau) est donnée par l'équation implicite

$$\int_{t_0}^{t_0+T(t_0)} \mathrm{d}t\, v_e(t) = 4\frac{R_1}{R_2}\frac{RC}{k}. \tag{8}$$

III. MULTIVIBRATEUR ASTABLE (*) [MPs 48 ET 53]

Il est possible de condenser le montage précédent en remplaçant l'intégrateur à ALI par un pseudo-intégrateur RC. Comme il n'y a plus d'inversion, il faut remplacer la seconde partie par un comparateur inverseur, on obtient alors un nouveau montage astable, qu'on appelle couramment multivibrateur astable (voir Fig. 3). Pour plus de détails sur ce circuit, on renvoie le lecteur à la Réf. [2] (pp. 189-191) ou encore à la Réf. [1] (pp. 307-311).

Liste du matériel :

- un amplificateur linéaire intégré sur boîtier,
- un rhéostat de résistance variable R `PT6..32`,
- un condensateur de capacité $C = 10\,\mathrm{nF}$,
- deux résistances $R_1 = R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$,
- un oscilloscope.

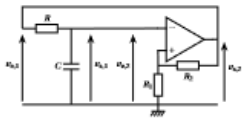


FIGURE 3 – Multivibrateur astable.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 3 avec $R_1 = R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 10\,\mathrm{nF}$ et pour R un rhéostat de résistance variable. On pourra commencer par une valeur de résistance $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$, on observera les tensions $v_{s,1}$ et $v_{s,2}$ à l'oscilloscope, et on mesurera la période des oscillations. Pour rendre l'expérience plus quantitative, on pourra la réitérer pour plusieurs valeurs de la résistance R.
> On pourra également se placer en mode XY pour observer le comportement dynamique du système.

Le principe de fonctionnement est le même que le montage précédent. L'ALI fonctionne en régime de saturation, et on a alors

$$v_{s,2} = \begin{cases} V_{sat} & \text{si} \quad v_{s,2} < V_0 \\ -V_{sat} & \text{si} \quad v_{s,2} > -V_0 \end{cases}, \tag{9}$$

où $V_0 = R_1 V_{sat}/(R_1 + R_2)$. Par ailleurs, en appliquant la loi des noeuds à l'entrée inverseuse de l'ALI, on trouve que

$$RC\frac{\mathrm{d}v_{s,1}}{\mathrm{d}t} + v_{s,1} = v_{s,2}. \tag{10}$$

Supposons pour commencer que l'ALI est en saturation positive. Dans ce cas, on va observer la charge du condensateur et la tension $v_{s,1} = v_{s,2}$ croît exponentiellement jusqu'à atteindre V_0. Alors, l'ALI passe en saturation négative, et la tension aux bornes du condensateur décroît exponentiellement jusqu'à atteindre $-V_0$. L'ALI repasse alors en saturation positive, et tout le processus précédent se répète. Ainsi, la tension $v_{s,2}$ sera un signal créneau de période T entre $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$, tandis que la tension $v_{s,1}$ sera une succession de croissances et décroissances exponentielles entre $+V_0$ et $-V_0$ de même période. La période correspond alors au double du temps que met la tension $v_{s,1}$ à passer de $-V_0$ à V_0, soit

$$T = 2RC\ln\left(\frac{V_{sat} + V_0}{V_{sat} - V_0}\right) = 2RC\ln\left(1 + \frac{2R_1}{R_2}\right). \tag{11}$$

En effet, dans une phase où $v_{s,1}$ croît, par exemple, son expression est la solution de l'Éq. (10), et est donnée par $v_{s,1}(t) = V_{sat} - (V_{sat} + V_0)e^{-t/(RC)}$.

Pour un traitement quantitatif de l'expérience, on pourra tracer la période T en fonction de R et effectuer un ajustement affine. Un exemple de réalisation expérimentale avec le matériel de la collection se trouve Fig. A2.

Enfin, en ce qui concerne le choix des composants, il a été fait de sorte à obtenir une fréquence de l'ordre de 10kHz.

IV. Oscillateur de Van der Pol [MPs 8, 9 et 53]

L'oscillateur de Van der Pol montre qu'il est possible de passer de façon continue d'un oscillateur quasi-sinusoïdal à un oscillateur à relaxation, en modifiant l'un de ses paramètres. C'est ce qui avait déjà été observé dans le TP6 avec l'oscillateur à pont de Wien, par exemple, lorsqu'on s'éloignait du seuil d'instabilité : les non-linéarités de l'ALI amenaient à un enrichissement spectral du signal en sortie du filtre. Ici, les non-linéarités sont mieux contrôlées car on utilise un dipôle dont on peut modifier la réponse non linéaire.

L'oscillateur de Van der Pol est également décrit dans la Réf. [5] (pp. 167-176), à laquelle on pourra se référer pour plus de détails. Il existe dans la collection un oscillateur de Van der Pol entièrement câblé P42.51, mais nous conseillons de le reproduire totalement, afin d'avoir un meilleur contrôle des paramètres du circuit.

1. Étude de l'élément non linéaire

L'élément non linéaire du circuit de Van der Pol est présenté Fig. 4. Il est décrit dans la Réf. [5] (pp. 167-170), ainsi que dans la Réf. [3] (pp. 424-428), auxquelles on pourra se référer pour davantage de détails.

On utilise deux multiplieurs de coefficient k. La tension continue V_0 permet de modifier la relation entrée-sortie de l'élément non linéaire.

Liste du matériel si on décide de réaliser l'élément non linéaire soi-même (recommandé) :

- deux multiplieurs analogiques P41.15,
- deux amplificateurs linéaires intégrés sur boîtier,
- une résistance $R_{1a} = 6{,}2\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_{2a} = 82\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_{3a} = 6{,}2\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_{4a} = 2\,\mathrm{k\Omega}$,
- deux résistances $R_{5a} = R_{6a} = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- une alimentation continue P53.18,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope,
- une carte d'acquisition.

Liste du matériel si on utilise l'élément non linéaire déjà câblé :

- une alimentation continue P53.18,
- le boîtier P42.46,
- le boîtier P42.39,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope,
- une carte d'acquisition.

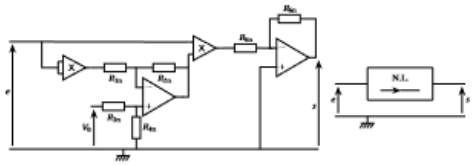


Figure 4 – Élément non linéaire.

En considérant que les multiplieurs sont idéaux, l'expression qui relie la sortie s du montage à son entrée e peut s'écrire sous la forme :

$$s = \left(\frac{R_{6a}}{R_{5a}} \frac{R_{4a}}{R_{4a} + R_{3a}} \frac{R_{1a} + R_{2a}}{R_{1a}} k V_0 \right) e + \left(\frac{k^2 R_{2a} R_{6a}}{R_{1a} R_{5a}} \right) e^3 = \alpha e + \beta e^3, \tag{12}$$

où le signe de α est l'opposé de celui de la tension V_0, tandis que $\beta > 0$. On notera également que la relation entrée-sortie $s(e)$ est cubique, donc non linéaire.

> On propose dans un premier temps de réaliser le circuit électrique de l'élément non linéaire (voir Fig. 4), avec les valeurs suivantes des composants : $R_{1a} = 6{,}2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{2a} = 82\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{3a} = 6{,}2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{4a} = 2\,\mathrm{k\Omega}$ et $R_{5a} = R_{6a} = 1\,\mathrm{k\Omega}$. On pensera à bien régler la tension de décalage de l'ALI amplificateur inverseur. On pourra sinon directement utiliser l'élément non linéaire déjà câblé sur le boîtier P42.46 et à alimenter avec le boîtier P42.39.
> Pour obtenir la relation entrée-sortie $s(e)$, on alimentera alors l'entrée du circuit à l'aide d'un générateur basses fréquences émettant un signal sinusoïdal d'amplitude de l'ordre de 5 V (sans dépasser l'amplitude maximale que peuvent supporter les multiplieurs) et de fréquence de l'ordre de la dizaine de hertz. On fera alors l'acquisition, avec un oscilloscope en mode XY, ou à l'aide d'une carte d'acquisition, des signaux $e(t)$ et $s(t)$. On pourra commencer par une valeur de tension $V_0 = 1\,\mathrm{V}$.
> On pourra enfin reproduire le protocole précédent pour différentes valeurs de tension continue V_0 entre $-2\,\mathrm{V}$ et $2\,\mathrm{V}$, et observer comment la relation entrée-sortie est modifiée.

On notera que le montage de la Fig. 4 est différent de celui proposé dans la Réf. [3], du fait de la présence d'un amplificateur inverseur de gain -1 en aval du second multiplieur. Cela vient du fait que dans la Réf. [3], le second multiplieur est câblé de sorte à ce que son coefficient soit égal à $-k$, ce qui n'est pas le cas dans notre montage ici, d'où la nécessité d'un étage supplémentaire d'amplification et d'inversion. Il existe dans la collection des multiplieurs différentiels AD633 P41.14 aussi, qui permettent de s'affranchir du dernier étage d'inversion.

La fréquence du signal d'entrée doit être choisie suffisamment faible pour s'affranchir du comportement dynamique de l'ALI et des multiplieurs (*slew-rate*, comportement passe-bas, etc.). Par ailleurs, l'amplitude du signal sinusoïdal doit être suffisamment grande pour parcourir une large partie de la relation entrée-sortie $s(e)$, mais inférieure à l'amplitude maximale que peuvent supporter les multiplieurs (10 V ici).

Pour vérifier l'Éq. (12) pour une valeur de V_0 donnée, on pourra tracer s/e en fonction de e^2, et effectuer un ajustement affine. La pente permettra alors de remonter à la valeur de β, et l'ordonnée à l'origine à α. En répétant cette procédure pour différentes valeurs de V_0, on pourra tracer α et β en fonction de V_0, et vérifier leurs expressions. Il faudra, au préalable, mesurer le coefficient k des multiplieurs si on décide de réaliser l'élément non linéaire soi-même. Un exemple de réalisation expérimentale avec le matériel de la collection est donné dans la Réf. [3] (pp. 427-428).

> On fixera ensuite la valeur de la tension V_0 à une valeur de 1 V, et on ne la modifiera plus jusqu'à la fin des manipulations sur le montage de Van der Pol. On pourra alors déterminer précisément α et β donnés par l'Éq. (12) en effectuant l'analyse mentionnée ci-dessus (si cela n'a pas déjà été fait précédemment).

2. Étude de l'oscillateur de Van der Pol

L'oscillateur de Van der Pol étudié est présenté Fig. 5. Il contient notamment l'élément non linéaire étudié précédemment.

Liste du matériel :

- tout le matériel précédent pour la réalisation de l'élément non linéaire,
- trois amplificateurs linéaires intégrés sur boîtier,
- un rhéostat de résistance variable P56.32,
- deux résistances $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_{C1} = 100\,\mathrm{k\Omega}$,
- deux résistances $R_1 = R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$,
- deux condensateurs de capacité $C_1 = C_2 = 100\,\mathrm{nF}$,
- un oscilloscope.

a. Description

Avant de déterminer les équations constitutives du circuit, on peut commencer par analyser qualitativement le comportement du circuit. Les premier et troisième ALIs sont impliqués dans des montages intégrateurs inverseurs, tandis que

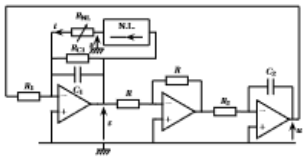


FIGURE 5 — Oscillateur de Van der Pol.

le second ALI appartient à un bloc amplificateur inverseur de gain -1. Le premier bloc est en réalité un montage pseudo-intégrateur, où la résistance R_{C1} permet de contrôler l'amortissement des oscillations. En utilisant les notations de la Fig. 5, on note que $v = \alpha s + \beta s^3 = R_{NL} i$, de sorte que

$$i = \frac{\alpha}{R_{NL}} s + \frac{\beta}{R_{NL}} s^3. \tag{13}$$

Ainsi, la mise en série de l'élément non linéaire et de la résistance R_{NL} s'assimile à une résistance négative dès lors que $\alpha < 0$ ($V_0 > 0$) pour des tensions s proches de 0 (voir également le TP6). Cette résistance négative $-R'$, de valeur absolue $R' = -R_{NL}/\alpha$ (pour $\alpha < 0$ on le rappelle) se trouve en parallèle de la résistance R_{C1} du montage pseudo-intégrateur. Comme les blocs suivants sont un intégrateur inverseur de gain -1 et un montage intégrateur veui, on observera des oscillations spontanées de la tension $s(t)$ (correspondant à l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique), à la condition que $R_{C1} \parallel R' = +\infty$ (de sorte que tout le courant passe dans la branche du condensateur de capacité C_1), soit $\alpha R_{C1} + R_{NL} = 0$. Pour des résistances R_{NL} suffisamment petites, c'est-à-dire $R_{NL} \leq -\alpha R_{C1}$ ($\alpha \geq 0$), le courant passe préférentiellement dans la branche de l'élément non linéaire plutôt que dans celle de la résistance R_{C1}, conduisant à une amplification de l'amplitude des oscillations de la tension $s(t)$.

On propose une étude théorique du circuit. En prenant en compte la caractéristique de l'élément non linéaire, l'équation différentielle régissant le comportement dynamique de cet oscillateur peut s'écrire sous la forme de l'équation de Van der Pol :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \varepsilon\omega_0 \left[\left(\frac{s}{s_0}\right)^2 - 1\right]\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}} \\ \omega_0^2 = -\dfrac{\alpha R_{C1} + R_{NL}}{3\beta R_{C1}} \\ \varepsilon = -\sqrt{\dfrac{R_1 R_2 C_2}{C_1}} \dfrac{\alpha R_{C1} + R_{NL}}{R_{NL} R_{C1}} \end{cases}. \tag{14}$$

Cette équation est proche de celle d'un oscillateur harmonique amorti, mais son comportement va dépendre du signe de l'amortissement (terme en dérivée première dans l'équation différentielle précédente). On peut tout d'abord noter que si $\alpha R_{C1} + R_{NL} > 0$, alors $\omega_0^2 < 0$ et $\varepsilon < 0$. L'équation différentielle précédente décrit alors un oscillateur harmonique amorti dont le terme d'amortissement est non linéaire et toujours positif. L'état de repos du circuit, où toutes les tensions sont nulles, est alors un état d'équilibre stable.

On s'intéresse maintenant au cas plus délicat où $\alpha R_{C1} + R_{NL} < 0$, de sorte que $\omega_0^2 > 0$ et $\varepsilon > 0$, et le terme d'amortissement peut changer de signe en fonction de la valeur de s. On peut alors choisir s_0 réel positif. Qualitativement, on constate que lorsque $s(t) < s_0$, le terme d'amortissement est négatif et on s'attend donc à ce que $s(t)$ croît. À l'inverse, lorsque $s(t) > s_0$, le terme d'amortissement est positif et on s'attend donc à ce que $s(t)$ décroît. Cela suggère l'apparition d'oscillations dans le circuit, d'amplitude de l'ordre de s_0. Pour comprendre le comportement du système plus quantitativement, nous proposons une approche venant de la théorie des systèmes dynamiques [7] (pp. 123-137). On introduit $X = s/s_0$ et $Y = \omega/(\omega_0 R_2 C_2)$. On peut alors montrer que l'Eq. (14) se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = Y \\ \dfrac{dY}{dt} = -\varepsilon\omega_0 (X^2 - 1) Y - \omega_0^2 X \end{cases}. \tag{15}$$

Le point fixe du système est obtenu en cherchant quand les deux dérivées premières s'annulent, conduisant à $(X, Y) = (0, 0)$. Physiquement, cela correspond à l'état de repos du circuit, où toutes les tensions sont nulles. Pour déterminer la stabilité

de ce point fixe, on détermine la jacobienne du système, en linéarisant les équations précédentes autour du point fixe. La jacobienne vaut alors

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \varepsilon\omega_0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

dont la trace vaut $\mathrm{Tr}[J(0, 0)] = \varepsilon\omega_0$ et le déterminant $\det[J(0, 0)] = \omega_0^2$. Le signe de la partie réelle des valeurs propres permet d'en déduire la stabilité du point fixe [1]. En effet, le système est stable si et seulement si les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 (qui sont soient toutes deux réelles, soit complexes conjuguées) sont de partie réelle strictement négative. Étant donné que les valeurs propres sont solutions de l'équation $\lambda^2 - \mathrm{Tr}[J(0, 0)]\lambda + \det[J(0, 0)] = 0$, on en déduit que les deux valeurs propres sont soit réelles de même signe, soit complexes conjuguées car $\det[J(0, 0)] = \lambda_1\lambda_2 > 0$. Par ailleurs, $\mathrm{Tr}[J(0, 0)] = \lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Re}(\lambda_1) + \mathrm{Re}(\lambda_2)$, de sorte que le point fixe est stable si et seulement si $\varepsilon < 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\varepsilon < 0$. Au voisinage de $\varepsilon = 0$, les deux valeurs propres sont complexes conjuguées (car le discriminant de l'équation caractéristique $\Delta = [\mathrm{Tr}[J(0, 0)]]^2 - 4\det[J(0, 0)] < 0$) et se produit donc en $\varepsilon = 0$ une bifurcation de Hopf supercritique[2]. Pour plus de détails sur la notion de bifurcation et de cycle limite, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [7] (pp. 196-205).

Il y a donc plusieurs cas possibles :

- Si $\varepsilon < 0$, le point fixe de l'espace des phases $(s, \omega) = (0, 0)$ est stable et attracteur pour toute condition initiale. Il ne peut pas y avoir d'oscillations spontanées dans le système.
- Si $\varepsilon > 0$, le point fixe n'est plus stable, par contre un cycle limite stable et attracteur dans le plan de phase (s, ω) émerge, conduisant à des oscillations spontanées. La forme de ces oscillations dépend de ε.
  - Pour $\varepsilon \ll 1$, l'importance du terme non linéaire est très faible dans l'Eq. (14) devant les autres termes, et les oscillations seront quasi-sinusoïdales. Le circuit se comporte alors comme un oscillateur quasi-sinusoïdal.
  - Lorsque ε croît, les non-linéarités deviennent de plus en plus importantes. Le circuit se comporte alors comme un oscillateur à relaxation.

b. Oscillations quasi-sinusoïdales

On peut maintenant passer à l'étude expérimentale du circuit.

> On propose de réaliser l'oscillateur de Van der Pol présenté Fig. 5, avec $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_1 = R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $C_1 = C_2 = 100\,\mathrm{nF}$, $R_{C1} = 100\,\mathrm{k\Omega}$, R_{NL} un rhéostat de résistance variable et l'élément non linéaire précédemment utilisé. Là encore, on négligera la tension de décalage des différents amplificateurs linéaires intégrés. Attention si on utilise le boîtier P42.466 pour l'élément non linéaire, l'entrée est à droite et la sortie est à gauche. On pourra alors observer les tensions s et u à l'oscilloscope.
> On pourra ensuite commencer par une valeur élevée $R_{NL} > 40\,\mathrm{k\Omega}$, puis diminuer progressivement cette dernière jusqu'à observer l'apparition d'oscillations spontanées.

On rappelle que pour notre circuit, la condition de démarrage des oscillations ($\varepsilon \geq 0$) est $R_{NL} \leq -\alpha R_{C1}$= 35kΩ pour la valeur de V_0 choisie dans l'étude du paragraphe précédent. La résistance R_{C1} est alors prise assez grande pour que la résistance R_{NL} soit elle-même suffisamment grande devant toutes les résistances parasites dans le circuit qui n'ont pas été prises en compte (notamment les impédances de sortie des ALIs et multiplieurs). Par contre, la résistance R_{C1} doit être suffisamment faible devant la résistance de fuite du condensateur de capacité C_1. De plus, les valeurs de R_1, R_2, C_1 et C_2 sont prises de sorte d'avoir une fréquence d'oscillation de l'ordre du kHz [égale à $\omega_0/(2\pi)$ à la limite du seuil d'instabilité] dans la bande passante des ALIs et des multiplieurs.

Il est également possible de visualiser la trajectoire du système dans l'espace des phases (s, $u \propto \mathrm{d}s/\mathrm{d}t$) en utilisant le mode XY de l'oscilloscope. La convergence vers un cycle limite peut être observée à partir de différentes conditions initiales.

> On propose d'observer la trajectoire du système dans le plan de phase pour différentes valeurs de R_{NL} en utilisant le mode XY de l'oscilloscope. Pour que cette expérience (et les suivantes) soit plus visuelle, on pourra avoir recours au mode Persistence (ou asimilé) de l'oscilloscope (bouton Display, puis sélectionner Persistance: co, et appuyer sur Effacer Persistance pour remettre à zéro).
> On peut également observer la disparition des oscillations dans le plan de phase en choisissant une résistance $R_{NL} \leq -\alpha R_{C1}$, puis en ouvrant la branche du circuit comprenant la résistance R_{NL}.
> On peut aussi observer l'apparition des oscillations dans le plan de phase depuis le point fixe stable en court-circuitant la sortie du premier ALI pour $R_{NL} \leq -\alpha R_{C1}$, puis en retirant ce fil.
> On peut enfin observer l'apparition des oscillations depuis une condition initiale en dehors du cycle limite en court-circuitant l'entrée inverseuse du premier ALI (ce qui conduit à une saturation de l'ALI) toujours pour $R_{NL} \leq -\alpha R_{C1}$, puis en retirant ce fil.

1. On pourra consulter la Réf. [8] (pp. 453-454) pour une présentation concise des différents cas de figure.
2. La bifurcation de Hopf supercritique est définie par la déstabilisation d'un point fixe au profit d'un cycle limite stable dans le plan de phase de « rayon » $\propto \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_c}$ quand un paramètre (ici ε) est augmenté continûment au-delà d'une valeur critique (ici $\varepsilon_c = 0$).

On doit observer un cercle dans le plan de phase pour R_{bg} légèrement inférieure à $-\alpha R_{C1}$, et un point fixe à l'origine sinon. Des exemples de trajectoires dans le plan de phase sont proposées dans la Réf. [5] (pp. 173-174).

On peut enfin étudier l'amplitude des oscillations quasi-sinusoïdales quand on s'éloigne du seuil d'instabilité (par exemple pour vérifier que la croissance de l'amplitude des oscillations est compatible avec l'existence d'une bifurcation de Hopf supercritique).

> On propose de mesurer l'amplitude crête-à-crête s_{cc} de la tension $s(t)$ pour différentes valeurs de R_{bg} entre 20kΩ et la résistance critique pour laquelle les oscillations disparaissent. On notera également l'évolution de la fréquence d'oscillation.

On doit observer que l'amplitude des oscillations augmente quand R_{bg}, tandis que la fréquence d'oscillation diminue (voir également le TP8). On propose de rester avec des résistances R_{bg} pas trop faibles afin d'observer des oscillations qui sont toujours quasi-sinusoïdales (pour les valeurs choisies, $\varepsilon < 0{,}1$). On peut montrer que l'amplitude crête-à-crête est $s_{\text{cc}} = 4s_0$, et est donnée par la relation

$$s_{\text{cc}} = 4\sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}\left(1 - \frac{R_{\text{bg}}}{3\beta R_{C1}}\right)}. \tag{17}$$

On notera en particulier que $s_{\text{cc}} \propto \sqrt{\varepsilon}$ comme attendu pour une bifurcation de Hopf supercritique.

Pour un traitement quantitatif de l'expérience, on pourra tracer s_{cc}^2 en fonction de R_{bg} et effectuer un ajustement affine. On pourra comparer les pente et ordonnée à l'origine aux valeurs attendues par l'Eq. (17) à partir des valeurs de α et β mesurées lors de l'étalonnage de l'élément non linéaire. Un exemple de réalisation avec du matériel de la collection est donné Fig. A3.

On termine par justifier le résultat de l'Eq. (17). Pour cela, il faut procéder à un développement multi-échelles. Pour plus de détails sur ce procédé, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [7] (pp. 215-227). Pour cela, nous allons supposer que $0 < \varepsilon \ll 1$. Dans ce cas, le temps typique de croissance des oscillations est proportionnel à $1/(\varepsilon\omega_0)$ (le taux de croissance est proportionnel à ε), tandis que la période des oscillations est de l'ordre de $1/\omega_0$. Il y a donc une séparation claire entre deux échelles distinctes de temps : l'échelle $t_1 = t$ d'oscillation rapide, et l'échelle $t_2 = T = \varepsilon t$ de croissance lente de l'amplitude (de sorte que $\omega_0 T = O(1)$ est équivalent à $\omega_0 t = O(1/\varepsilon)$). On considère alors $s(t_1, t_2) = s(t, T)$ et le calcul de ses dérivées donne alors, en supposant que les deux variables t et T sont indépendantes,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial s}{\partial t} + \varepsilon\dfrac{\partial s}{\partial T} \\ \dfrac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} + 2\varepsilon\dfrac{\partial^2 s}{\partial t\partial T} + \varepsilon^2\dfrac{\partial^2 s}{\partial T^2} \end{cases}. \tag{18}$$

Enfin, on procède à un développement limité de s en fonction de ε : $s(t, T) = s^{(0)}(t, T) + \varepsilon s^{(1)}(t, T) + O(\varepsilon^2)$. En réinjectant dans l'Eq. (14), et en isolant les termes d'ordre 0 et 1 en ε, on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 s^{(0)}}{\partial t^2} + \omega_0^2 s^{(0)} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 s^{(1)}}{\partial t^2} + \omega_0^2 s^{(1)} = -\omega_0\left[\left(\dfrac{s^{(0)}}{s_0}\right)^2 - 1\right]\dfrac{\partial s^{(0)}}{\partial t} - 2\dfrac{\partial^2 s^{(0)}}{\partial t\partial T} \end{cases}. \tag{19}$$

La résolution de la première équation conduit à $s^{(0)}(t, T) = r(T)\cos\left[\omega_0 t + \phi(T)\right]$, où $r(T)$ et $\phi(T)$ sont des fonctions de la variable lente T. En réinjectant cette expression dans la seconde équation, on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique (de degré de liberté $s^{(1)}$) de pulsation propre ω_0 et forcé aux pulsations ω_0 et $3\omega_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 s^{(1)}}{\partial t^2}(t) + \omega_0^2 s^{(1)}(t) = {} & 2\omega_0 r(T)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}T}(T)\cos\left[\omega_0 t + \phi(T)\right] + \omega_0\left[2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}T}(T) + \omega_0 \frac{r(T)^2}{4s_0^2} - \omega_0 r(T)\right]\sin\left[\omega_0 t + \phi(T)\right] \\ & + \omega_0^2\frac{r(T)^2}{4s_0^2}\sin\left[3\omega_0 t + 3\phi(T)\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Si on veut éviter que l'amplitude de $s^{(1)}$ ne diverge (pour l'auto-cohérence du développement), on doit annuler l'ensemble des termes de pulsation ω_0 dans le second membre, ce qui conduit à

$$\begin{cases} r\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}T} = 0 \\ 2\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}T} + \omega_0\dfrac{r^3}{4s_0^2} - \omega_0 r = 0 \end{cases}. \tag{21}$$

La résolution de la seconde équation est possible, par séparation des variables, et on obtient finalement

$$r(T) = \frac{2s_0}{\sqrt{1 + Ae^{-\omega_0 T}}}, \tag{22}$$

où A est une constante d'intégration qui dépend des conditions initiales (on a supposé que $r(0) > 0$). On note en particulier que $r(T) > 0$ de sorte que $\phi(T) = \phi_0$ est une constante. En particulier, quand $t \gg 1/(\varepsilon\omega_0)$, $r(T)$ converge vers $2s_0$, et on a alors, à temps longs et au premier ordre en ε, $s(t) = 2s_0\cos(\omega_0 t + \phi_0)$. On retrouve alors le résultat de l'Eq. (17), à savoir que $s_{\text{cc}} = 4s_0$.

c. Oscillations de relaxation

En diminuant la valeur de R_{bg}, ε croît, et les oscillations quasi-sinusoïdales tendent progressivement vers des oscillations de relaxation plus riches en harmoniques.

> On propose de réduire progressivement R_{bg}, de 20kΩ jusqu'à quelques centaines de ohms, et d'observer l'évolution de la forme du signal $s(t)$ ainsi que de sa fréquence. On pourra également observer la modification concomitante du portrait de phase en mode XY à l'oscilloscope.

En pratique, il ne faut pas descendre au-delà de 200 Ω, car les oscillations disparaissent, à cause de la saturation du dernier ALI.

On peut montrer que lorsque $\varepsilon \gg 1$, la période des oscillations de relaxation T tend vers

$$T = \frac{(3 - \ln 4)\varepsilon}{\omega_0} = -(3 - \ln 4)R_1 R_2 C_2\left(\frac{\alpha}{R_{\text{bg}}} + \frac{1}{R_{C1}}\right). \tag{23}$$

Pour un traitement quantitatif de l'expérience, on pourra tracer la période T en fonction de $1/R_{\text{bg}}$, et effectuer un ajustement affine, et comparer les valeurs de pente et d'ordonnée à l'origine aux valeurs attendues. Un exemple de réalisation expérimentale avec du matériel d'enseignement est donné Fig. A4.

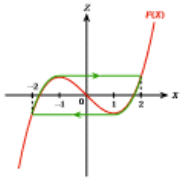


FIGURE 6 – Illustration du cycle limite des oscillations de relaxation de l'oscillateur de Van der Pol dans le plan (X, Z) (pour $\varepsilon \gg 1$). Les portions horizontales du cycle limite (en vert) sont parcourues rapidement (en un temps caractéristique de l'ordre de $1/(\varepsilon\omega_0)$), tandis que les portions qui suivent la courbe $Z = F(X)$ sont parcourues plus lentement (en un temps caractéristique de l'ordre de ε/ω_0).

On termine par justifier le résultat de l'Eq. (23) dans le cas où $\varepsilon \gg 1$. On pourra également se référer à la Réf. [7] (pp. 211-215). Pour cela on réutilise les notations de l'Eq. (15). On introduit également $Z = Y/(\varepsilon\omega_0) + F(X)$, avec $F(X) = X^3/3 - X$. Dans ce cas, le système de l'Eq. (15) se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \varepsilon\omega_0[Z - F(X)] \\ \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\omega_0}{\varepsilon}X \end{cases}. \tag{24}$$

Comme $\varepsilon \gg 1$, cela force à avoir $Z = F(X)$, sinon X varie brusquement jusqu'à ce que cette dernière condition soit vérifiée. Il en résulte alors, que dans le plan (X, Z), le système effectue un cycle dont un schéma est donné Fig. 6. Les paliers horizontaux sont parcourus très rapidement car ils correspondent au cas où la condition $Z = F(X)$ n'est pas vérifiée. On peut alors

approximer la période d'oscillation par le temps passé par le système sur les portions du cycle où $Z = F(X)$. On en déduit alors aisément que la période est donnée par

$$T = 2\int_{F(1)}^{F(3)} \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}Z/\mathrm{d}t} = \frac{2\tau}{\omega_0}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}X}{X}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X}(X), \tag{25}$$

ce qui permet, après calculs, de retrouver l'Éq. (23).

V. Oscillateur anharmonique double-puits [MPs 8, 9 et 53]

1. Description

On peut reprendre le même élément non linéaire que dans l'expérience précédente (voir l'Exp. IV) pour faire un oscillateur anharmonique double-puits représenté Fig. 7. L'expérience qu'on propose ci-dessous est également décrite dans la Réf. [3] (pp. 419-435), à laquelle on se référera pour le protocole expérimental ainsi que pour l'analyse des résultats. On pourra également consulter la Réf. [5] (pp. 176-188) en complément.

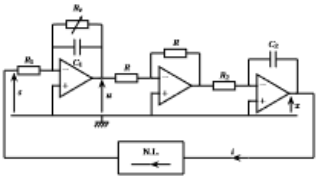


Figure 7 – Oscillateur anharmonique double-puits.

On peut, en tenant compte de la relation entrée-sortie de l'élément non linéaire, établir l'équation différentielle qui régit la dynamique du système :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \delta x + \lambda x^2 = 0, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = \dfrac{1}{R_v C_1} \\ \delta = \dfrac{\alpha}{R_1 R_2 C_1 C_2} \\ \lambda = \dfrac{\beta}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{cases}. \tag{26}$$

On reconnait alors le mouvement amorti d'un point matériel dans un potentiel quartique

$$V(x) = \frac{1}{2}\delta x^2 + \frac{1}{6}\lambda x^3. \tag{27}$$

Ce potentiel présente un unique minimum en $x = 0$ (position d'équilibre stable) si $\delta > 0$ (λ est toujours positif). À l'inverse, il présentera un maximum en $x = 0$ (position d'équilibre instable) et deux minima en $\pm\sqrt{-\delta/\lambda}$ si $\delta < 0$ (d'où le nom « double-puits »).

On propose de nouveau une analyse qualitative de l'oscillateur anharmonique double-puits, comme nous l'avons déjà fait dans le cas de l'oscillateur de Van der Pol. On note que le premier ALI intervient dans un montage pseudo-intégrateur inverseur (montage intégrateur dans la limite $R_v \to +\infty$), le second ALI dans un montage amplificateur inverseur de gain -1, et le troisième ALI dans un montage intégrateur inverseur. L'association en série de l'élément non linéaire et de la résistance R_1 se comporte comme un dipôle de caractéristique

$$i = \frac{\alpha}{R_1}x + \frac{\beta}{R_1}x^2, \tag{28}$$

et a donc une portion de résistance négative dans sa caractéristique dès lors que $\alpha < 0$. On en déduit donc que le système sera instable si $\alpha < 0$.

2. Étude en régime libre

On se référera à la Réf. [3] (pp. 419-435) et à la Réf. [5] (pp. 176-181) pour le protocole expérimental de l'étude du régime libre du circuit, notamment la construction du portrait de phase, ainsi que l'étude de la bifurcation fourche quand α (ou δ) change de signe. On pourra également trouver dans la Réf. [3] des exemples de réalisation expérimentale avec le matériel de la collection.

Liste du matériel :
- tout le matériel nécessaire à la réalisation de l'élément non linéaire,
- deux condensateurs de capacité $C_1 = C_2 = 1\,\mu\mathrm{F}$,
- une résistance $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- deux résistances $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_2 = 10\,\mathrm{k\Omega}$,
- un rhéostat de résistance variable R_v P56.32,
- un oscilloscope.

3. Étude en régime forcé et en régime chaotique (*)

a. Étude du régime forcé à faible amplitude de forçage

L'oscillateur anharmonique double-puits précédent peut être étudié en régime forcé, en ajoutant un GBF dans le circuit entre l'entrée inverseuse du premier ALI et la masse (voir Fig. 8), comme cela est proposé dans la Réf. [5] (pp. 181-188). On parle parfois d'oscillateur de Duffing.

Liste du matériel :
- deux multiplieurs analogiques P41.15,
- une résistance $R_{m1} = 6{,}2\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_{m2} = 82\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_{m3} = 6{,}2\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_{m4} = 10\,\mathrm{k\Omega}$,
- deux résistances $R_{m5} = R_{m6} = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- une alimentation continue P53.18,
- cinq amplificateurs linéaires intégrés sur boîtier,
- deux résistances $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_{C1} = 82\,\mathrm{k\Omega}$,
- deux résistances $R_1 = R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- deux condensateurs de capacité $C_1 = C_2 = 470\,\mathrm{nF}$,
- une résistance $R_v = 100\,\mathrm{k\Omega}$,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

On peut aisément établir l'équation différentielle régissant le comportement dynamique du circuit :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \delta x + \lambda x^2 = -\frac{1}{R_v R_1 C_1 C_2}e, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = \dfrac{1}{R_v C_1} \\ \delta = \dfrac{\alpha}{R_1 R_2 C_1 C_2} \\ \lambda = \dfrac{\beta}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{cases}. \tag{29}$$

On reconnait, comme précédemment, le mouvement amorti d'un point matériel dans un potentiel quartique $V(x)$ (donné par l'Éq. (27)) présentant une position d'équilibre instable en $x = 0$ et deux positions d'équilibre stable en $\pm\sqrt{-\delta/\lambda}$ ($\delta < 0$), et soumis à une force extérieure. Qualitativement, on s'attend donc à deux comportements différents.

- Si l'amplitude de forçage (du signal aux bornes du GBF) est assez faible, la réponse du système reste quasi sinusoïdale à la même fréquence. Comme on le verra plus loin, les oscillations peuvent avoir lieu entre les deux puits[3], ou à l'intérieur d'un seul puits du potentiel $V(x)$.

3. Il est donc incorrect de dire que le système reste fondamentalement confiné dans un seul puits quand il est excité à basse amplitude, comme cela est fait, par exemple, dans la Réf. [9].

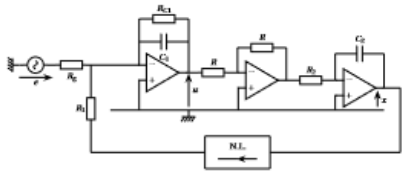


FIGURE 8 – Oscillateur anharmonique double-puits en régime forcé.

► Si l'amplitude de forçage augmente, la réponse du système peut devenir fortement non sinusoïdale, et peut même amener à un comportement chaotique.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 8. On rappelle que l'élément non linéaire est donné par le schéma de la Fig. 4. On prendra cette fois-ci $R_{D1} = R_{D2} = 6{,}2\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{D3} = 82\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{B1} = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{B2} = R_{B3} = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $V_0 = 1{,}5\,\mathrm{V}$, $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_{C1} = 82\,\mathrm{k\Omega}$, $R_1 = R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C_1 = C_2 = 470\,\mathrm{nF}$ et $R_E = 100\,\mathrm{k\Omega}$.
> On pourra alimenter le circuit avec un GBF délivrant un signal sinusoïdal d'amplitude $E = 2\,\mathrm{V}$. On fera varier la fréquence entre 300 Hz et 1 kHz en augmentant la fréquence d'abord, et on pourra alors obtenir la fonction de transfert du circuit en relevant l'amplitude du signal $x(t)$. On pourra procéder de la même manière en diminuant la fréquence.

On mentionne qu'on a changé les valeurs de la résistance R_{B1} et de la tension V_0 dans l'élément non linéaire afin de mieux séparer les deux puits du potentiel quartique, et donc de mieux observer les deux régimes de fonctionnement mentionnés précédemment.

Pour cette amplitude d'excitation suffisamment faible, la réponse du système double-puits est quasiment harmonique. La fonction de transfert présente alors une résonance. Cependant, toute la courbe ne peut pas être obtenue du fait d'un phénomène d'hystérésis. Un exemple de réalisation expérimentale est donné Fig. A5. L'explication du comportement du circuit est détaillée dans la Réf. [5] (pp. 181-184). Nous en proposons une autre, complémentaire, adaptée de la Réf. [4] (pp. 453-462).

Nous allons supposer que $e(t) = E\cos(\omega t)$ avec E suffisamment faible, de sorte qu'on peut négliger les harmoniques devant le fondamental dans l'expression de $x(t)$. On cherche donc $x(t) = c(t) + a(t)\cos(\omega t) + b(t)\sin(\omega t)$, où on supposera que $c(t)$, $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions lentement variables, c'est-à-dire que $da/dt \ll \omega a$, et pareillement pour b et c. En réinjectant dans l'Eq. (29), en utilisant l'approximation précédente, et en identifiant les termes constant et sinusoïdaux, on trouve

$$\begin{cases} \dfrac{d^2c}{dt^2} + r\dfrac{dc}{dt} + c\left\{\delta + \lambda\left[c^2 + \dfrac{3}{2}\left(a^2+b^2\right)\right]\right\} = 0 \\ r\dfrac{da}{dt} + 2\omega\dfrac{db}{dt} + a\left\{\delta - \omega^2 + 3\lambda\left[c^2 + \dfrac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)\right]\right\} + rab = -\Gamma \\ -2\omega\dfrac{da}{dt} + r\dfrac{db}{dt} - rwa + b\left\{\delta - \omega^2 + 3\lambda\left[c^2 + \dfrac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)\right]\right\} = 0 \end{cases}, \tag{30}$$

où on a noté $\Gamma = E/(R_E R_2 C_1 C_2)$. En posant $a = \rho\cos\varphi$ et $b = \rho\sin\varphi$ (avec $\rho^2 = a^2 + b^2$), en cherchant des solutions d'amplitude constante (i.e. $d\rho/dt = 0$ et pareillement pour b et c), on obtient, après avoir mis les deux dernières équations au carré, et les avoir ajoutées,

$$\begin{cases} c\left(c^2 + \dfrac{\delta}{\lambda} + \dfrac{3}{2}\rho^2\right) = 0 \\ \rho^2\left\{r^2\omega^2 + \left[\delta - \omega^2 + 3\lambda\left(c^2 + \dfrac{1}{4}\rho^2\right)\right]^2\right\} = \Gamma^2 \end{cases}. \tag{31}$$

On peut alors distinguer deux familles de solutions

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} c = 0 \\ \rho^2\left[r^2\omega^2 + \left(\delta - \omega^2 + \dfrac{3}{4}\lambda\rho^2\right)^2\right] = \Gamma^2 \end{cases}, \qquad \text{(II)} \quad \begin{cases} c^2 = -\dfrac{\delta}{\lambda} - \dfrac{3}{2}\rho^2 \\ \Gamma^2 = \rho^2\left[r^2\omega^2 + \left(2\delta + \dfrac{15}{4}\lambda\rho^2 + \omega^2\right)^2\right] \end{cases}, \tag{32}$$

où la solution (II) n'existe que si $\rho \leq \sqrt{-2\delta/(3\lambda)}$. Physiquement, la solution (I) correspond à un système délocalisé qui passe d'un puits à l'autre[4], tandis que la solution (II) correspond au cas où le système reste localisé dans un des deux puits ($c^2 = -\delta/\lambda$). La résolution des deux équations du bas pour les systèmes (I) et (II) permet alors d'en déduire $\rho(\omega)$, qui représente l'amplitude du fondamental dans la réponse $x(t)$ du système à l'excitation $e(t)$. Chacune des deux équations à résoudre étant une équation cubique pour $\rho(\omega)$, il peut y avoir entre deux et six solutions à chaque fréquence.

Il reste maintenant à étudier la stabilité de ces différentes solutions en envisageant des petites perturbations autour de ces états stationnaires. Pour les solutions (I), on pose $a = a_0 + \zeta$, $b = b_0 + \eta$, avec $|\zeta|, |\eta|, |c| \ll 1$, et a_0 et b_0 les amplitudes stationnaires. On obtient alors, au premier ordre en les perturbations, en réinjectant dans l'Eq. (30),

$$\begin{cases} \dfrac{d^2c}{dt^2} + r\dfrac{dc}{dt} + c\left\{\delta + \dfrac{3}{2}\lambda\left(a_0^2 + b_0^2\right)\right\} = 0 \\ r\dfrac{d\zeta}{dt} + 2\omega\dfrac{d\eta}{dt} + \zeta\left\{\delta - \omega^2 + \dfrac{9}{4}\lambda a_0^2 + \dfrac{3}{4}\lambda b_0^2\right\} + \eta\left\{rw + \dfrac{3}{2}\lambda a_0 b_0\right\} = 0 \\ -2\omega\dfrac{d\zeta}{dt} + r\dfrac{d\eta}{dt} + \zeta\left\{-rw + \dfrac{3}{2}\lambda a_0 b_0\right\} + \eta\left\{\delta - \omega^2 + \dfrac{3}{4}\lambda a_0^2 + \dfrac{9}{4}\lambda b_0^2\right\} = 0 \end{cases}. \tag{33}$$

La première équation montre alors que cette solution est stable si $\rho > \sqrt{-2\delta/(3\lambda)}$ (il suffit pour cela d'analyser le signe de la partie réelle des racines de l'équation caractéristique). Pour les deux autres équations, on les transforme afin d'exprimer les dérivées premières de ζ et η :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix} = \frac{1}{r^2+4\omega^2}\begin{pmatrix} 2\omega C - rA & 2\omega D - rB \\ -2\omega A - rC & -2\omega B - rD \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\end{pmatrix}, \quad \text{avec} \begin{cases} A = \delta - \omega^2 + \dfrac{9}{4}\lambda a_0^2 + \dfrac{3}{4}\lambda b_0^2 \\ B = rw + \dfrac{3}{2}\lambda a_0 b_0 \\ C = -rw + \dfrac{3}{2}\lambda a_0 b_0 \\ D = \delta - \omega^2 + \dfrac{3}{4}\lambda a_0^2 + \dfrac{9}{4}\lambda b_0^2 \end{cases}. \tag{34}$$

Ainsi, la solution sera stable si les deux valeurs propres de la matrice S ci-dessus sont de partie réelle négative, ce qui impose que sa trace $\mathrm{Tr}(S) \propto [2\omega(C - B) - r(A + D)]$ soit négative et son déterminant $\det(S) \propto (AD - BC)$ positif, ou encore, après calculs,

$$\begin{cases} \delta + \omega^2 + \dfrac{3}{2}\lambda\rho^2 > 0 \\ r^2\omega^2 + \left(\delta - \omega^2 + \dfrac{3}{4}\lambda\rho^2\right)\left(\delta - \omega^2 + \dfrac{9}{4}\lambda\rho^2\right) > 0 \end{cases}. \tag{35}$$

Comme $\delta < 0$, la condition obtenue précédemment à partir de l'équation vérifiée par $c(t)$ est plus contraignante que la première condition de l'équation précédente. Par ailleurs la seconde condition est une inéquation du second degré sur la variable ρ^2, ce qui impose que ρ^2 soit à l'extérieur des deux racines du polynôme (si elles existent). On aboutit alors à[5] :

$$\text{(I) stable} \iff \frac{-2\delta}{3\lambda} < \rho^2 < \frac{4}{9\lambda}\left[2\left(\omega^2 - \delta\right) - \sqrt{\left(\omega^2-\delta\right)^2 - 3r^2\omega^2}\right] \quad \text{ou} \quad \rho^2 > \frac{4}{9\lambda}\left[2\left(\omega^2 - \delta\right) + \sqrt{\left(\omega^2-\delta\right)^2 - 3r^2\omega^2}\right]. \tag{36}$$

On peut procéder pareillement pour les solutions (II), en posant $a = a_0 + \zeta$, $b = b_0 + \eta$ et $c = c_0 + \chi$, avec $|\zeta|, |\eta|, |\chi| \ll 1$, et a_0, b_0 et c_0 les amplitudes stationnaires. En réinjectant dans l'Eq. (30), et en posant $\Omega = d\chi/dt$, on obtient

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\\ \chi\\ \Omega\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3\lambda a_0 c_0 & -3\lambda b_0 c_0 & -2\lambda c_0^2 & -r \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\\ \chi\\ \Omega\end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix}\zeta\\ \eta\\ \chi\\ \Omega\end{pmatrix}, \tag{37}$$

4. On fait remarquer que si représente la valeur moyenne du signal, et que cette première solution avec $c = 0$ n'est pas discutée dans la Réf. [4].
5. On peut montrer que la plus grande racine est toujours supérieure à $-2\delta/(3\lambda)$. De même, pour les valeurs des composants choisies plus haut, on s'attend effectivement à l'existence des deux racines au polynôme.

avec

$$\begin{cases} Q_{11} = \dfrac{r\left(3\delta - \omega^2 + \frac{15}{4}\lambda\rho^2 - \frac{3}{2}\lambda a_0^2\right) + 3\lambda\omega a_0 b_0}{r^2 + 4\omega^2} \\ Q_{12} = \dfrac{\omega\left(-4\delta - 2\omega^2 - r^2 - \frac{15}{2}\lambda\rho^2 + 3\lambda b_0^2\right) - \frac{3}{2}\lambda r a_0 b_0}{r^2 + 4\omega^2} \\ Q_{13} = \dfrac{6\lambda a_0(2\omega b_0 - r a_0)}{r^2 + 4\omega^2} \\ Q_{21} = \dfrac{\omega\left(4\delta + 2\omega^2 + r^2 + \frac{15}{2}\lambda\rho^2 - 3\lambda a_0^2\right) - \frac{3}{2}\lambda r a_0 b_0}{r^2 + 4\omega^2} \\ Q_{22} = \dfrac{r\left(3\delta - \omega^2 + \frac{15}{4}\lambda\rho^2 - \frac{3}{2}\lambda b_0^2\right) - 3\lambda\omega a_0 b_0}{r^2 + 4\omega^2} \\ Q_{23} = \dfrac{6\lambda a_0(-2\omega a_0 - r b_0)}{r^2 + 4\omega^2} \end{cases} \tag{38}$$

Cette fois-ci, les conditions de stabilité ne peuvent plus être déterminées analytiquement. Pour s'assurer de la stabilité des solutions, il suffira de vérifier numériquement la condition suivante :

$$\text{(II) stable} \iff \text{les valeurs propres de } Q \text{ sont de partie réelle strictement négative.} \tag{39}$$

Pour cela, il reste à calculer a_0 et b_0 à partir de ρ dans l'état stationnaire. Pour cela, on rappelle que $a_0 = \rho\cos\varphi$ et $b_0 = \rho\sin\varphi$, où cosφ et sinφ vérifient un système linéaire de deux équations à deux inconnues, qu'on peut résoudre aisément. On peut alors représenter les différentes solutions $\rho(\omega)$, en indiquant leur stabilité, comme cela a *été* fait Fig. 9. On retrouve alors en particulier l'allure donnée dans la Réf. [5] (p. 184) pour la solution (II). On notera cependant que la solution (I) n'est pas discutée dans la Réf. [5], alors qu'elle peut *être* stable à basses fréquences. L'*hystérésis observé expérimentalement* est alors la conséquence de l'existence de plusieurs branches stables séparées par une branche instable, l'existence de plusieurs solutions étant elle-même la conséquence du comportement non linéaire du système. Ces courbes ont *été* obtenues à partir du code Python qu'on reproduit et commente ci-dessous.

```python
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Benjamin GUIHEUZEN
Version du 04/01/2023
"""

#\\\ Importation des librairies À NE PAS MODIFIER
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.axes_grid1.inset_locator import inset_axes

#\\\ Valeurs des composants électriques À MODIFIER
R6n = 1e3 # résistance R6n en ohm
R5n = 1e3 # résistance R5n en ohm
R4n = 1e4 # résistance R4n en ohm
R3n = 6.2e3 # résistance R3n en ohm
R1n = 6.2e3 # résistance R1n en ohm
R2n = R2e3 # résistance R2n en ohm
VD = 1.5 # tension de l'alimentation continue en V
kmult = 0.1 # coefficient du multiplieur en /V
R1 = 1e3 # résistance R1 en ohm
R2 = 1e3 # résistance R1 en ohm
C1 = 0.470e-6 # capacité C1 en F
C2 = 0.470e-6 # capacité C1 en F
RC1 = R2e3 # résistance RC1 en ohm
Rg = 1e5 # résistance Rg en ohm
E = 2 # amplitude du signal délivré par le GBF en V

#\\\ Valeurs des paramètres dans l'équation du double-puits À NE PAS MODIFIER
d = - R6n / R5n * R4n / ( R4n + R3n ) * ( R1n + R2n ) / R1n * kmult * VD / ( R1 * R2 * C1 * C2 ) # delta
l = kmult * kmult * R2n * R4n / ( R1n * R5n ) / ( R1 * R2 * C1 * C2 ) # lambda
g = K / ( Rg * R2 * C1 * C2 ) # Gamma
r = 1. / ( RC1 * C1 ) # r

#\\\ Tableau des fréquences pour le calcul des solutions À MODIFIER
fmin = 0. # fréquence minimale à partir de laquelle calculer les solutions
fmax = 1.4 * np.sqrt( - 2 * d ) / ( 2. * np.pi ) # fréquence maximale pour calculer les solutions
w = np.linspace(2. * np.pi * fmin, 2. * np.pi * fmin, 50001)
```



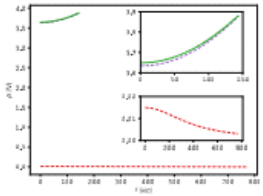
```python
#\\\ Calcul des solutions et de leur stabilité À NE PAS MODIFIER
sol = np.zeros([len(w), 4])
stability = np.zeros([len(w),4]) # -1 si stable, -1 si instable, 0 si pas de solution
for i in range(len(w)):
    tmp = np.roots(np.array([( 15. / 4. * l ) ** 2,
    15. / 2. * l * ( d + d + w[i] * w[i] ),
    ( d + d + w[i] * w[i] ) ** 2 + ( r * w[i] ) ** 2, - g * g])) # recherche des racines pour la solution
    (II)
    tmp = np.real(tmp[np.absolute(np.imag(tmp))<1e-10]) # on ne conserve que les racines réelles
    tmp = tmp[tmp > 0.] # on ne conserve que les racines positives
    tmp = tmp[tmp < - 2. * d / ( 3. * l )] # on ne conserve que les racines inférieures à la valeur
    maximale pour la solution (II)
    tmp = np.sort(tmp) # racines classées par ordre croissant
    for j in range(len(tmp)):
        sol[i,j] = np.sqrt(tmp[j]) # valeur de rho
        Q = np.zeros([4,4]) # matrice Q pour la stabilité de la solution
        b0 = - g * r * w[i] / ( ( d + d + w[i] * w[i] + 15. / 4. * l * tmp[j]
        ) ** 2 + ( r * w[i] ) ** 2 ) # calcul de b0 (amplitude stationnaire)
        a0 = g * ( d + d + w[i] * w[i] + 15. / 4. * l * tmp[j] ) / ( ( d + d +
        w[i] * w[i] + 15. / 4. * l * tmp[j] ) ** 2 + ( r * w[i] ) ** 2 ) # calcul de a0 (amplitude
    stationnaire)
        c0 = np.sqrt( - d / l - 1.5 * tmp[j] ) # calcul de c0 (amplitude stationnaire)
        Q[-3,-1] = - r # calcul des différents éléments de matrice
        Q[-3,-2] = - 2. * l * c0 * c0
        Q[-3,-3] = - 3. * l * b0 * c0
        Q[-3,-4] = - 3. * l * a0 * c0
        Q[-2,-1] = 1.
        Q[-2,-2] = 6. * l * c0 * ( - 2. * w[i] * a0 - r * b0 ) / (
        r * r + 4. * w[i] * w[i] )
        Q[-2,-3] = ( r * ( d + d - w[i] * w[i]+ 15. / 4. * l * tmp[j]
        - 1.5 * l * b0 * b0 ) - 3. * l * w[i] * a0 * b0 ) / (
        r * r + 4. * w[i] * w[i] )
        Q[-2,-4] = ( w[i] * ( 4. * d + 2. * w[i] * w[i] + r * r
        + 7.5 * l * tmp[j] - 3. * l * a0 * a0 ) - 1.5 * r * l * a0 * b0 ) / (
        r * r + 4. * w[i] * w[i] )
        Q[-4,-2] = 6. * l * c0 * ( 2. * w[i] * b0 - r * a0 ) / (
        r * r + 4. * w[i] * w[i] )
        Q[-4,-3] = ( w[i] * ( - 4. * d - 2. * w[i] * w[i] - r * r
        - 7.5 * l * tmp[j] + 3. * l * b0 * b0 ) - 1.5 * r * l * a0 * b0 ) / (
        r * r + 4. * w[i] * w[i] )
        Q[-4,-4] = ( r * ( d + d - w[i] * w[i] + 15. /4. * l * tmp[j]
        - 1.5 * l * a0 * a0 ) + 3. * l * w[i] * a0 * b0 ) / ( r * r +
        4. * w[i] * w[i])
        vpe = np.linalg.eigvals(Q) # diagonalisation et calcul des valeurs propres
        if np.amax(np.real(vpe)) < 0.: # condition de stabilité
            stability[i,j] = 1.
        else:
            stability[i,j] = - 1.
    tmp = np.roots(np.array([( 3. / 4. * l ) ** 2,
    3. / 2. * l * ( d - w[i] * w[i] ),
    ( d - w[i] * w[i] ) ** 2 + ( r * w[i] ) ** 2, - g * g])) # recherche des racines pour la solution (III)
    tmp = np.real(tmp[np.absolute(np.imag(tmp))<1e-10]) # on ne conserve que les racines réelles
    tmp = tmp[tmp > 0.] # on ne conserve que les racines positives
    tmp = np.sort(tmp) # racines classées par ordre croissant
    for j in range(len(tmp)):
        sol[i,j+3] = np.sqrt(tmp[j]) # valeur de rho
        if ( tmp[j] > - 2. * d / ( 3. * l ) and tmp[j] < 4. / ( 9. * l ) * (
        2. * ( - d * w[i] * w[i] ) - np.sqrt( ( - d * w[i] * w[i]
        ) ** 2 - 3. * r * r * w[i] * w[i] ) ) or tmp[j] > 4. / ( 9. * l ) * (
        2. * ( - d * w[i] * w[i] ) + np.sqrt( ( - d * w[i] * w[i]
        ) ** 2 - 3. * r * r * w[i] * w[i] ) ) ): # condition de stabilité
            stability[i,j+3] = 1.
        else:
            stability[i,j+3] = -1.

#\\\ Tracé des solutions À NE PAS MODIFIER
w /= ( 2. * np.pi )
prop_cycle = plt.rcParams["axes.prop_cycle"]
colors = prop_cycle.by_key()["color"]
tmp = colors[2]
colors[2] = colors [5]
colors[5] = tmp
dw = 1.5 * ( w[1] - w[0] )
fig1, ax1 = plt.subplots()
fig2, ax2 = plt.subplots()
axins1 = inset_axes(ax1, width = "100%", height = "100%",
bbox_to_anchor = (.5, .62, .45, .36), bbox_transform=ax1.transAxes)
```

```
101 axins12 = inset_axes(ax1, width = "100%", height = "100%",
102 bbox_to_anchor = (.1, .15, .45, .36), bbox_transform=ax1.transAxes)
103 axins2 = inset_axes(ax2, width = "100%", height = "100%",
104 bbox_to_anchor = (.5, .62, .45, .36), bbox_transform=ax2.transAxes)
105 axins22 = inset_axes(ax2, width = "100%", height = "100%",
106 bbox_to_anchor = (.5, .22, .45, .26), bbox_transform=ax2.transAxes)
107 for j in range(N):
108     X = w[stability[:,j] > 0.99]
109     Y = sol[:,j][stability[:,j] > 0.99]
110     i = 0
111     split = [0]
112     while i < len(X) - 1:
113         i += 1
114         if X[i] - X[i - 1] > dw:
115             split += [i]
116     split += [len(X)]
117     for k in range(len(split)-1):
118         if j < 3:
119             ax1.plot(X[split[k]:split[k+1]] ,Y[split[k]:split[k+1]],
120             linestyle = '-', marker = '', color = colors[j])
121             axins1.plot(X[split[k]:split[k+1]], Y[split[k]:split[k+1]],
122             linestyle = '-', marker = '', color = colors[j])
123             axins12.plot(X[split[k]:split[k+1]], Y[split[k]:split[k+1]],
124             linestyle = '-', marker = '', color = colors[j])
125         else:
126             ax2.plot(X[split[k]:split[k+1]], Y[split[k]:split[k+1]],
127             linestyle = '-', marker = '', color = colors[j])
128             axins2.plot(X[split[k]:split[k+1]], Y[split[k]:split[k+1]],
129             linestyle = '-', marker = '', color = colors[j])
130             axins22.plot(X[split[k]:split[k+1]], Y[split[k]:split[k+1]],
131             linestyle = '-', marker = '', color = colors[j])
132     X = w[stability[:,j] < 0.99]
133     Y = sol[:,j][stability[:,j] < 0.99]
134     i = 0
135     split = [0]
136     while i < len(X) - 1:
137         i += 1
138         if X[i] - X[i - 1] > dw:
139             split += [i]
140     split += [len(X)]
141     for k in range(len(split)-1):
142         if j < 3:
143             ax1.plot(X[split[k]:split[k+1]], Y[split[k]:split[k+1]],
144             linestyle = '--', marker = '', color = colors[j])
145             axins1.plot(X[split[k]:split[k+1]], Y[split[k]:split[k+1]],
146             linestyle = '--', marker = '', color = colors[j])
147             axins12.plot(X[split[k]:split[k+1]], Y[split[k]:split[k+1]],
148             linestyle = '--', marker = '', color = colors[j])
149         else:
150             ax2.plot(X[split[k]:split[k+1]], Y[split[k]:split[k+1]],
151             linestyle = '--', marker = '', color = colors[j])
152             axins2.plot(X[split[k]:split[k+1]], Y[split[k]:split[k+1]],
153             linestyle = '--', marker = '', color = colors[j])
154             axins22.plot(X[split[k]:split[k+1]], Y[split[k]:split[k+1]],
155             linestyle = '--', marker = '', color = colors[j])
156 axins1.set_ylim(0., 1.3)
157 axins22.set_ylim(0.95, 2.35)
158 axins2.set_ylim(3.4, 3.9)
159 axins12.set_ylim(0., 0.02)
160 axins1.set_xlim(450., 600.)
161 axins12.set_xlim(0., 300.)
162 axins2.set_xlim(0., 150.)
163 ax1.set_xlabel(r'$f$ (Hz)')
164 ax2.set_xlabel(r'$f$ (Hz)')
165 ax1.set_ylabel(r'$\chi$ (V)')
166 ax2.set_ylabel(r'$\chi$ (V)')
167 fig1.show()
168 fig2.show()
```

Les différentes librairies sont introduites entre les lignes 8 et 11. Les valeurs des composants intervenant dans le circuit sont à indiquer entre les lignes 13 et 26. Les valeurs des paramètres r, δ, λ et Γ sont ensuite obtenues entre les lignes 28 et 32. Le calcul des solutions pour différentes fréquences et la détermination de leur stabilité sont ensuite réalisés entre les lignes 34 et 99. Enfin, les solutions sont tracées entre les lignes 101 et 180.

En pratique, l'accord entre la courbe expérimentale et les courbes théoriques n'est pas excellent. Cela peut provenir, par exemple, du fait qu'on n'a pas pris en compte les harmoniques dans la réponse du système double-puits.



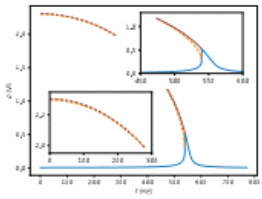


FIGURE 9 – Amplitude du fondamental de la tension $x(t)$ en fonction de la fréquence f pour les valeurs de composants indiquées plus haut. La figure du haut correspond à la solution (I), tandis que la figure du bas correspond à la solution (II). Les branches stables sont représentées en traits pleins, les branches instables en traits pointillés. On attend un effet d'hysnéésis entre 4730Hz et 5401Hz (voir l'insert de droite de la figure du haut).

b. Étude du régime forcé à forte amplitude de forçage

On peut ensuite observer la réponse du signal dans le cas où on augmente l'amplitude du forçage.

> On pourra maintenant augmenter progressivement l'amplitude E du signal délivré par le GBF. On choisira une fréquence de forçage de l'ordre de 5300Hz, correspondant à la fréquence maximale à laquelle des phénomènes d'hysteresis se produisent à basse amplitude de forçage, et on diminuera la valeur de R_p en prenant $R_p = 10k\Omega$, ce qui permet d'augmenter la valeur de Γ. On augmentera progressivement E (10mV par 10mV) et on observera à l'oscilloscope les tensions $x(t)$ et $u(t)$. On pourra également se placer en mode XY pour observer le portrait de phase du système. On pourra aussi calculer le spectre de Fourier du signal $x(t)$.

Tant que $E < 9{,}6V$, on doit observer que le système oscille et reste confiné dans un seul puits du potentiel $V(x)$. La fréquence fondamentale de son mouvement est alors égale à la fréquence d'excitation. En mode XY, cela se traduit par une trajectoire formée à un seul lobe (on rappelle que u est la dérivée de x à un préfacteur près). Pour $9{,}6V < E < 9{,}93V$, on doit observer que le système oscille toujours dans un seul puits, mais son spectre présente une raie sous-harmonique à une fréquence moitié de celle de l'excitateur. En mode XY, cela se traduit par une trajectoire formée à deux lobes. Enfin, pour $E > 9{,}93V$, le forçage permet au système de passer d'un puits de potentiel à l'autre, qui présente alors du chaos déterministe, c'est-à-dire un comportement apériodique à temps long en l'absence de tout bruit, associé à une grande sensibilité

aux conditions initiales. Attention que l'oscillateur semble passer aléatoirement d'un puits à l'autre, mais le comportement du système est ici totalement déterministe. Pour plus de détails sur la notion de chaos déterministe, on renvoie le lecteur à la Réf. [7] (pp. 301–341). Par ailleurs, pour ce système, l'analyse précédente en augmentant progressivement la tension d'excitation a montré que la transition vers le chaos quand l'amplitude de forçage augmentait se faisait par cascade sous-harmonique. Cela est illustré expérimentalement dans la Réf. [5] (pp. 184–188).

On peut comprendre pourquoi le circuit présente un comportement chaotique. Pour cela, on note que le système présente maintenant trois degrés de liberté dont la dynamique est donnée par un système d'équations différentielles non linéaires couplées du premier ordre (ingrédients minimaux pour observer du chaos déterministe), à savoir les tensions x et u, ainsi que le temps. Plus précisément, on a, en supposant que le GBF délivre un signal sinusoïdal d'amplitude E et de pulsation ω, et en notant $X = x$, $Y = u/(R_2C_2)$, $W = t$, et $\Gamma = E/(R_2R_1C_1C_2)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = Y \\ \dfrac{dY}{dt} = -rY - \delta X - \lambda X^3 - \Gamma\cos(\omega W) \\ \dfrac{dW}{dt} = 1 \end{cases} . \tag{40}$$

Ce système d'équations présente un attracteur étrange, à l'origine du comportement chaotique.

On termine par mentionner que l'analyse théorique menée précédemment (et le code Python associé) semble indiquer que le comportement quasi-sinusoïdal est stable à toute amplitude E, alors qu'expérimentalement on observe du chaos à plus grande amplitude. Il y a là encore un écart entre l'analyse théorique menée à partir d'une analyse linéaire de stabilité, et le comportement réel (non linéaire) du système.

Références

[1] P. Brenders, G. Ruffard, L. Douchet, M. Sauzeix et S. Tisserant, *Électronique PSI*, Bréal (2006).

[2] R. Duffait et J.-P. Lièvre, *Agrégation de Sciences Physiques - Expériences d'électronique*, Bréal (1999).

[3] Jolidon, *Physique expérimentale - Optique, magnétisme, électrotechnique, mécanique, thermodynamique et physique non linéaire*, EDP Sciences (2021).

[4] D. Jordan et P. Smith, *Nonlinear ordinary differential equations : an introduction for scientists and engineers*, Oxford University Press (2007).

[5] M. Knoll, *Électronique expérimentale*, Ellipses (2002).

[6] A. Poirault, « Oscillateurs à relaxation à circuit R-C », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 782 (1996).

[7] S. H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*, Perseus Books Publishing (1994).

Exemples de résultats expérimentaux

Figure A1 – Évolution de la période des oscillations du montage astable formé par un intégrateur inverseur à AL1 et un comparateur à hystérésis en fonction de la résistance R_1 intervenant dans le circuit (voir l'Exp. II), puis en fonction de u_e dans le cas de l'oscillateur commandé en tension.

Figure A2 – Évolution de la période des oscillations pour le multivibrateur astable en fonction de la résistance R intervenant dans le circuit (voir l'Exp. III).

Figure A3 – Évolution de l'amplitude des oscillations quasi-sinusoïdales de l'oscillateur de Van der Pol en fonction de la résistance R_{02} intervenant dans le circuit (voir l'Exp. IV).

Figure A4 – Évolution de la période des oscillations de relaxation de l'oscillateur de Van der Pol en fonction de la résistance R_{02} intervenant dans le circuit (voir l'Exp. IV).

Figure A5 – Fonction de transfert du pendule double-puits forcé (voir l'Exp. V).

Télécommunications

Table des expériences

I.	Le câble coaxial comme ligne de transmission [MPs 5, 30, 31 et 42]	147
II.	Introduction à la modulation	151
III.	Modulation d'amplitude [MP 42]	152
IV.	Démodulation d'amplitude [MP 42]	154
V.	Modulation de fréquence [MP 42]	158
VI.	Démodulation de fréquence - Boucle à verrouillage de phase [MP 42]	160
VII.	Modulation / démodulation de signaux numériques (*) [MPs 42 et 45]	166
VIII.	Principe de fonctionnement d'une fibre optique à saut d'indice (*) [MP 31]	169

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

Nous allons voir dans ce TP comment sont transmis la plupart des signaux que nous utilisons au quotidien. L'information que l'on cherche à transmettre est généralement de basse fréquence, entre 20 Hz et 20 kHz pour un signal audio, et entre 0 Hz et 6 MHz pour un signal vidéo. Mais on peut aussi utiliser des plus hautes fréquences, comme pour les signaux numériques dans les fibres optiques. Il existe différents canaux disponibles pour transmettre l'information : les lignes électriques, les guides d'ondes (fibre optique) ou encore le support hertzien (propagation dans l'air). La modulation permet le transport de l'information dans un canal choisi, et surtout elle offre la possibilité de transporter plusieurs signaux dans le même canal (ce qu'on appelle le multiplexage).

I. Le câble coaxial comme ligne de transmission [MPs 5, 30, 31 et 42]

Nous proposons de réaliser les expériences suivantes, également décrites dans la Réf. [2] (pp. 305–308).

1. Modélisation du câble coaxial

Nous allons caractériser une ligne de transmission couramment utilisée en TP : le câble coaxial. Il se compose de deux conducteurs de même axe de révolution, séparés par un isolant interne et un isolant externe. Les pertes par effet Joule y sont moindres que dans un fil de cuivre, du fait d'un volume moins important de conducteur. De plus, il tolère une plus grande gamme de fréquence que ces derniers (effet de peau).

On peut modéliser la propagation d'une onde électromagnétique dans un câble coaxial à l'aide d'une représentation équivalente dite « à constantes réparties » (voir Fig. 1).

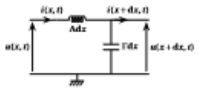


FIGURE 1 – Schéma électrocinétique à constantes réparties (sans pertes) du câble coaxial.

En utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds, on obtient une équation de propagation pour la tension (et pareillement pour le courant) :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Gamma A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1}$$

Dans l'équation précédente, A désigne l'inductance linéique et Γ la capacité linéique. La vitesse de propagation est $c = 1/\sqrt{\Gamma A}$, et la tension vérifie l'équation de D'Alembert (équation d'onde classique). De plus, pour une onde plane progressive

vers les x positifs (resp. négatifs), la tension et le courant sont reliés par l'impédance caractéristique de la ligne $Z = \sqrt{A/\Gamma}$, c'est-à-dire $u = Zi$ (resp. $u = -Zi$). Cette impédance caractéristique est d'origine purement propagative, en particulier elle ne traduit pas une dissipation d'énergie par effet Joule (même si la relation $u = Zi$ est analogue à la caractéristique d'une résistance), aucune source d'amortissement n'ayant été prise en compte dans le modèle précédent (voir également ci-dessous).

On termine par commenter certains aspects du modèle précédent du câble coaxial. En premier lieu, ce modèle ne tient pas compte de la dissipation par effet Joule dans les deux conducteurs (prise en compte en considérant une résistance linéique de câble en série avec la bobine), ni du courant de fuite à travers l'isolant (pris en compte en considérant une conductance en parallèle du condensateur). La prise en compte des écarts à l'idéalité du câble coaxial mentionnés ci-dessus conduit à une équation d'onde plus complexe, appelée « équation des télégraphistes ». Dans ce cas, la propagation est dispersive, et il y a de l'atténuation, de sorte que l'impédance Z est maintenant complexe, et dépend de la fréquence.

De plus, le modèle à constantes réparties ne décrit que la propagation du mode transverse électrique et magnétique (TEM) dans l'isolant qui sépare les deux conducteurs. D'autres modes peuvent exister dans le câble au-delà de certaines fréquences de coupure. En supposant que les conducteurs sont parfaits, qu'ils sont cylindriques de rayons a et b, et que l'isolant est du vide, on trouve que les fréquences de coupure des premiers modes transverse électrique TE et transverse magnétique TM sont

$$f_{c,\mathrm{TE}} = \frac{c}{2(b-a)}, \quad f_{c,\mathrm{TM}} = \frac{c}{a(b+a)}. \tag{2}$$

Pour le câble coaxial utilisé ci-dessous, on a $a = 0{,}45\,\mathrm{mm}$ et $b = 1{,}48\,\mathrm{mm}$, de sorte que $f_{c,\mathrm{TE}} = 97\,\mathrm{GHz}$ et $f_{c,\mathrm{TM}} = 33\,\mathrm{GHz}$ (avec $c = 2 \times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ donnée dans la notice du câble). La dispersion induite par les conditions aux limites ne sera donc pas visible pour les signaux usuellement utilisés en électrocinétique (de fréquence inférieure au MHz), et le modèle à constantes réparties est donc suffisant (si on peut négliger la dispersion induite par le diélectrique présent entre les deux conducteurs, ainsi que le caractère non parfait des conducteurs).

2. Caractérisation du câble coaxial

La mesure de la célérité c et de l'impédance Z du câble permettent de remonter aux grandeurs linéiques A et Γ. Cela vient du fait que les phénomènes de propagation dans le câble coaxial sont décrits par l'équation de D'Alembert, aux limitations mentionnées plus haut près.

Liste du matériel :

- un câble coaxial de longueur $L = 100\,\mathrm{m}$ P58 . 34,
- un rhéostat de résistance variable P56 . 32,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

Pour décrire quantitativement les expériences qui suivent, on utilisera le fait qu'à chaque fois le câble coaxial est branché à un dipôle d'impédance (terminale) Z_t. Dans ce cas, on peut montrer que le coefficient de réflexion en tension vaut

$$r = \frac{Z_t - Z}{Z_t + Z}. \tag{3}$$

En effet, en utilisant la définition de l'impédance, et en obtenant que $u_i(x,t) = Z i_i(x,t)$, $u_r(x,t) = -Z i_r(x,t)$ et $u_t(x,t) = Z_t i_t(x,t)$, où (u_i, i_i) désigne l'onde électrocinétique incidente sur l'impédance terminale, (u_r, i_r) l'onde électrocinétique réfléchie par l'impédance terminale, et (u_t, i_t) l'onde électrocinétique transmise à l'impédance terminale. En combinant ces différentes équations, et en utilisant l'additivité des courants, on aboutit à

$$u_t(L,t) = Z_t[i_i(L,t) + i_r(L,t)] = \frac{Z_t}{Z}[u_i(L,t) - u_r(L,t)]. \tag{4}$$

Par ailleurs, on a également $u_t(L,t) = u_i(L,t) + u_r(L,t)$ par continuité du potentiel électrique, de sorte que

$$Z[u_i(L,t) + u_r(L,t)] = Z_t[u_i(L,t) - u_r(L,t)], \tag{5}$$

ce qui permet d'en déduire l'expression de $r = u_r(L,t)/u_i(L,t)$.

a. Mesure de la vitesse de propagation

> On propose d'alimenter un câble coaxial de grande taille (de l'ordre de 100 m de long) à l'aide d'un générateur basses fréquences. On utilisera ce dernier pour émettre un *pulse* sinusoïdal de fréquence de l'ordre 5 MHz contenant un unique motif (1 cycle), d'amplitude de l'ordre de quelques volts et d'intervalle de temps entre les *pulses* de l'ordre de 1 ms. On observera alors à l'oscilloscope le signal en entrée du câble coaxial, en laissant la sortie du

$\tau \approx 1.034\,\mu s \pm 0.002\,\mu s$

$\rightarrow c = 193.42 \cdot 10^6\,m\cdot s^{-1}$

> câble coaxial libre. On pourra alors en déduire la célérité c de l'onde électrocinétique dans le câble.

On doit observer que le signal en entrée présente un *pulse* (celui envoyé par le GBF), puis ce même *pulse* qui a été réfléchi (ici $Z_t = +\infty$, de sorte que $r = 1$). Le retard τ entre ces deux signaux permet alors d'en déduire la célérité c par la relation $c = 2L/\tau$.

Il existe plusieurs précautions afin de bien réaliser cette expérience. En premier lieu, il faut prendre un câble suffisamment long afin de pouvoir plus facilement mesurer le retard entre les signaux incident et réfléchi. En second lieu, la durée entre deux *pulses* doit être choisie très grande devant le retard τ. Ici $\tau = 1\,\mu s$, de sorte qu'un délai de 1 ms est acceptable. Au contraire, la période de l'onde émise par le GBF doit être inférieure au retard pour éviter que les deux signaux ne se mélangent. Cela justifie le choix d'un *pulse* contenant une seule période d'un signal sinusoïdal de suffisamment haute fréquence.

Ensuite, en ce qui concerne la mesure du retard en elle-même, il faut choisir une différence commune pour les signaux incident et réfléchi. Il peut être judicieux de prendre le premier maximum des deux signaux. En réalité, du fait de la dispersion intrinsèque dans le câble coaxial (due aux non-idéalités mentionnées dans le paragraphe précédent), le *pulse* se déforme au cours de la propagation, et il n'existe pas de choix idéal de référence qui permet de s'affranchir de l'erreur systématique induite par la dispersion sur la mesure de τ.

La notice du câble coaxial indique une célérité de l'ordre de $2 \times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

b. Mesure de l'impédance propagative

> On propose maintenant de placer un rhéostat de résistance variable R en sortie du câble coaxial, et de toujours observer le signal en entrée du câble à l'oscilloscope. On sollicitera le câble avec le même signal incident que précédemment. On pourra commencer par $R = 100\,\Omega$, et on cherchera à annuler autant que possible l'onde réfléchie à l'entrée du câble en réduisant la résistance en sortie. On pourra alors mesurer la valeur de la résistance R dans cette situation, qui correspond à la valeur de Z. Pour être précis dans la mesure de Z, on fera varier R ohm par ohm, et on isolera le rhéostat du circuit afin de mesurer sa résistance R à l'ohmmètre.

Lorsque $R = Z_t = Z$, on trouve que $r = 0$. Toute l'onde électrocinétique est transmise à la résistance, et il n'y a plus d'onde réfléchie qui se propage vers l'entrée du câble.

$\delta c = \frac{\Delta\tau}{\tau} \times c = \frac{0.002 \cdot 10^{-6}}{1.034 \cdot 10^{-6}} \times 193.42 \cdot 10^6 = 0.37$

$\Rightarrow \boxed{c = (193.4 \pm 0.4) \times 10^6\,m\cdot s^{-1}}$

mesure "modélisation"

$\boxed{R = 44.05 \pm 0.01\,\Omega} \pm 2\,\Omega$

câble coaxial libre. On pourra alors en déduire la célérité c de l'onde électrocinétique dans le câble.

On doit observer que le signal en entrée présente un *pulse* (celui envoyé par le GBF), puis ce même pulse qui a été réfléchi (ici $Z_L = +\infty$, de sorte que $r = 1$). Le retard τ entre ces deux signaux permet alors d'en déduire la célérité c par la relation $c = 2L/\tau$.

Il existe plusieurs précautions afin de bien réaliser cette expérience. Du premier lieu, il faut prendre un câble suffisamment long afin de pouvoir plus facilement mesurer le retard entre les signaux incident et réfléchi. Du second lieu, la durée entre deux *pulses* doit être choisie très grande devant le retard τ. Ici $\tau = 1\,\mu s$, de sorte qu'un délai de 1 ms est acceptable. Au contraire, la période de l'onde émise par le GBF doit être inférieure au retard pour éviter que les deux signaux ne se mélangent. Cela justifie le choix d'un *pulse* contenant une seule période d'un signal sinusoïdal de suffisamment haute fréquence.

Ensuite, en ce qui concerne la mesure du retard en elle-même, il faut choisir une référence commune pour les signaux incident et réfléchi. Il peut être judicieux de prendre le premier maximum des deux signaux. En réalité, du fait de la dispersion intervenant dans le câble coaxial (phase aux non-idéalités mentionnées dans le paragraphe précédent), le *pulse* se déforme au cours de la propagation, et il n'existe pas de choix idéal de référence qui permet de s'affranchir de l'erreur systématique induite par la dispersion sur la mesure de τ.

La notice du câble coaxial indique une célérité de l'ordre de $2 \times 10^8\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

b. Mesure de l'impédance propagative

On propose maintenant de placer un rhéostat de résistance variable R en sortie du câble coaxial, et de toujours observer le signal en entrée du câble à l'oscilloscope. On sollicitera le câble avec le même signal incident que précédemment. On pourra commencer par $R = 100\,\Omega$, et on cherchera à annuler autant que possible l'onde réfléchie à l'entrée du câble en réduisant la résistance en sortie. On pourra alors mesurer la valeur de la résistance R dans cette situation, qui correspond à la valeur de Z. Pour être précis dans la mesure de Z, on fera varier R ohm par ohm, et on isolera le rhéostat du circuit afin de mesurer sa résistance R à l'ohmmètre.

Lorsque $R = Z_L = Z$, on trouve que $r = 0$. Toute l'onde électrocinétique est transmise à la résistance, et il n'y a plus d'onde réfléchie qui se propage vers l'entrée du câble.

La notice du câble coaxial indique $Z = 50\,\Omega$. Cela justifie pourquoi les générateurs basses fréquences ont une impédance interne de l'ordre de $50\,\Omega$: dans ce cas, l'onde émise par le GBF n'est pas réfléchie à l'interface GBF-câble et est entièrement transmise dans le circuit (adaptation d'impédance). De la même manière, quand l'onde électrocinétique revient du circuit vers le GBF, celle-ci est entièrement transmise, et il n'y a pas de réflexion parasite vers le circuit.

À partir des valeurs de c et Z obtenues, on peut en déduire les valeurs de A et Γ, qui s'expriment également en fonction des propriétés du câble :

$$\mathrm{A} = \frac{Z}{c} = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right), \quad \Gamma = \frac{1}{Zc} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}. \tag{6}$$

avec $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$ la permittivité du vide, ε_r la permittivité diélectrique relative de l'isolant constituant le câble, et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$ la perméabilité magnétique du vide. On pourra se référer à la Réf. [1] pour l'obtention de ces relations. À partir de c et Z, on en tire que $\mathrm{A} = 2{,}5 \times 10^{-7}\ \mathrm{H\,m^{-1}}$ et $\Gamma = 1{,}0 \times 10^{-10}\ \mathrm{F\,m^{-1}}$. Le calcul à partir des dimensions du câble conduit quant à lui à $\mathrm{A} = 2{,}4 \times 10^{-7}\ \mathrm{H\cdot m^{-1}}$ et $\Gamma = 1{,}1 \times 10^{-10}\ \mathrm{F\cdot m^{-1}}$, où on a estimé $\varepsilon_r = 2{,}25$ à partir de la valeur de c ($\sqrt{\varepsilon_r} = c_0/c$ avec c_0 la célérité de la lumière dans le vide). Les deux estimations sont en accord.

c. Fonction de transfert du câble coaxial

On propose enfin de sonder le comportement fréquentiel du câble coaxial.

On propose de retirer la résistance en sortie du câble coaxial et d'y brancher la voie 2 de l'oscilloscope. On réglera alors l'impédance d'entrée de la voie 2 de l'oscilloscope sur $50\,\Omega$ afin de s'affranchir de réflexions parasites (voir le TP1 d'électronique). On observera également le signal en entrée du câble à la voie 1 de l'oscilloscope (on laissera ici l'impédance d'entrée de la voie 1 de l'oscilloscope à $1\,\mathrm{M\Omega}$). On pourra alors mesurer le diagramme de Bode en gain et en phase du câble coaxial, en le sollicitant avec un signal sinusoïdal d'amplitude de quelque volts délivré par un générateurs basses fréquences, dont on fera varier la fréquence entre quelques hertz et plusieurs mégahertz, et en observant les tensions en entrée et en sortie du câble à l'oscilloscope.

L'impédance d'entrée de la voie 2 de l'oscilloscope est réglée sur $50\,\Omega$, afin de s'affranchir de la réflexion terminale, l'onde électrocinétique étant entièrement transmise à l'oscilloscope. À l'inverse, celle de la voie 1 est gardée à une grande valeur (devant $50\,\Omega$) pour ne pas perturber le circuit en entrée. On peut cependant questionner les valeurs des impédances d'entrée de l'oscilloscope, car les fréquences des signaux employés dans ce montage peuvent atteindre le MHz, ce qui rend non négligeable la capacité d'entrée de l'oscilloscope. Plus précisément, on rappelle que l'impédance d'entrée de l'oscilloscope est équivalente à la mise en parallèle d'une résistance R_{osc} (qui peut valoir $50\,\Omega$ ou $1\,\mathrm{M\Omega}$), et d'un condensateur de capacité $C_{osc} = 14\,\mathrm{pF}$. L'admittance équivalente est alors $1/R_{osc} + j\omega C_{osc}$ à la pulsation ω. Pour $\omega = 10^7\ \mathrm{rad\cdot s^{-1}}$, la contribution capacitive à l'admittance est de l'ordre de $10^{-4}\,\Omega^{-1}$. Elle est donc totalement négligeable lorsque $R_{osc} = 50\,\Omega$, par contre, elle domine largement la contribution résistive lorsque $R_{osc} = 1\,\mathrm{M\Omega}$. Dans ce dernier cas, l'impédance équivalente du condensateur est imaginaire pure et ne vaut plus que $10^6\,\Omega$ en valeur absolue. Elle reste néanmoins très grande devant $50\,\Omega$, l'impédance propagative du câble.

En ce qui concerne la réponse fréquentielle du câble coaxial, qui traduit à la fois la propagation dans le câble et la dissipation dans les conducteurs, on attend un comportement passe-bas de coupure de l'ordre de $10^7\,\mathrm{Hz}$. Ce moyen de transport sera alors efficace pour transporter des signaux contenant des fréquences inférieures au MHz et sur des distances de l'ordre de la centaine de mètres. On peut être plus quantitatif sur le comportement du câble coaxial, et déterminer sa fonction de transfert. Pour plus de détails sur le comportement fréquentiel du câble coaxial, on renvoie le lecteur à la Réf. [1].

On note $u(x,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{U}(x,\omega)e^{j\omega t}\right]$, et la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}(L,\omega)}{\underline{U}(0,\omega)} = e^{-k''(\omega)L}e^{-jk'(\omega)L}, \tag{7}$$

où L désigne la longueur totale du câble, et $\underline{k}(\omega) = k'(\omega) - jk''(\omega)$ est donné par la relation de dispersion traduisant la propagation des ondes planes pseudo-progressives sinusoïdales dans le câble. Il faut maintenant modéliser la propagation dans le câble coaxial afin d'en déduire la relation de dispersion. Il s'agit d'un problème notoirement complexe. Nous allons nous contenter d'une description simplifiée dans les régimes de hautes fréquences et de basses fréquences. On considérera également que l'isolant a un comportement indépendant de la fréquence.

On commence par traiter le régime des hautes fréquences. On va se placer à des fréquences telles que l'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{2/(\mu_0\sigma\omega)}$ est très faible devant l'épaisseur e des conducteurs. Pour le câble coaxial employé dans cette expérience[5], $e = 0{,}18\,\mathrm{mm}$, ce qui implique que $f \gg 10^3\,\mathrm{Hz}$ pour le cuivre de conductivité électrique $\sigma = 6 \times 10^7\ \mathrm{S\cdot m^{-1}}$. À ces fréquences-ci, nous allons modéliser la dissipation dans les conducteurs par une résistance linéique r. On peut l'estimer en considérant que comme $\delta \ll e$, le champ électromagnétique ne pénètre dans les conducteurs de conductivité électrique σ que sur une épaisseur δ, ce qui conduit à

$$r = \frac{1}{2\pi a\delta\sigma} + \frac{1}{2\pi b\delta\sigma} = \frac{1}{2\pi\sigma\delta}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = A\sqrt{\omega}. \tag{8}$$

Pour le câble coaxial considéré dans cette expérience, on a $A = 4{,}7 \times 10^{-6}\,\Omega\,\mathrm{m^{-1}\,rad^{-1/2}\,s^{1/2}}$. On peut alors réaliser un modèle à constantes réparties du câble coaxial en tenant compte de l'inductance linéique A, de la résistance linéique r (en série avec l'inductance), et de la capacité linéique Γ. En régime harmonique à la pulsation ω, et en appliquant les lois des nœuds et des mailles, on aboutit à

$$\frac{d^2\underline{U}}{dx^2}(x,\omega) = -\left[\frac{\omega^2}{c^2} - j\frac{A}{Zc}\omega^{3/2}\right]\underline{U}(x,\omega), \tag{9}$$

où on a utilisé l'expression de Γ et A en fonction de la célérité c des ondes et de l'impédance Z en l'absence de dispersion. Ici, le câble est fermé par une impédance adaptée, de sorte qu'on peut chercher la solution sous la forme d'une onde plane pseudo-progressive $\underline{U}(x,\omega) = \underline{U}_0 e^{j\underline{k}(\omega)x}$, où $\underline{U}_0$ est l'amplitude complexe de l'onde de tension. L'équation précédente admet une solution non nulle à la condition que $\underline{k}(\omega)$ vérifie la relation de dispersion

$$\underline{k}(\omega)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - jA\Gamma\omega^{3/2} \Longrightarrow \begin{cases} k'(\omega) = \dfrac{\omega}{c}\left[1 + \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{1 + \dfrac{A^2c^2}{2^2\omega}} - 1\right)\right]^{1/2} \\ k''(\omega) = \dfrac{\omega}{\sqrt{2}c}\left(\sqrt{1 + \dfrac{A^2c^2}{2^2\omega}} - 1\right)^{1/2} \end{cases}. \tag{10}$$

Dans le régime de hautes fréquences dans lequel on s'est placé (pour des fréquences supérieures à ou de l'ordre de 100 kHz), on a $A^2c^2/(2^2\omega) \lesssim 0{,}066 \ll 1$, et on peut réaliser un développement limité des expressions précédentes, conduisant à

$$k'_{\mathrm{HF}}(\omega) \simeq \frac{\omega}{c}, \quad k''_{\mathrm{HF}}(\omega) \simeq \frac{A\sqrt{\omega}}{2Z}, \tag{11}$$

où nous avons indiqué un indice pour préciser qu'il s'agissait d'une approximation dans le régime de hautes fréquences.

5. En réalité, les deux conducteurs n'ont pas la même épaisseur : le conducteur intérieur a effectivement une épaisseur de 0,18 mm, tandis que l'extérieur a une épaisseur de 0,10 mm.

$$\delta_c = \frac{\delta_*}{e} \times c = \frac{0{,}03 \times 10^{-6}}{1{,}09 \times 10^{-6}} \times 193.4 \cdot 10^{6} = 0.97$$

$$\Rightarrow \boxed{c = (193.4 \pm 0.4) \times 10^{6}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

pseudo "résolution"

$$\boxed{R = 44.05 \pm 0.01\,\Omega} \pm 2\,\Omega$$

On va maintenant aborder le régime de basses fréquences, correspond au cas où l'épaisseur de peau δ est très grande devant l'épaisseur e des conducteurs ($f \ll 10^9$ Hz). Dans ce cas, le champ électrique pénètre dans toute l'épaisseur du conducteur, conduisant à une résistance linéique

$$r = \frac{1}{2\pi\sigma e}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \tag{12}$$

indépendante de la fréquence, et valant approximativement $r \simeq 0{,}04\,\Omega\cdot\mathrm{m}^{-1}$ pour le câble coaxial utilisé (cela est proche avec la valeur $38\,\Omega\cdot\mathrm{km}^{-1}$ reportée dans la notice du câble). Le même raisonnement que précédemment conduit à la relation de dispersion

$$\underline{k}^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} - j\frac{r\omega}{Zc} \Longrightarrow \begin{cases} k'(\omega) = \dfrac{\omega}{c}\left\{1+\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{rc}{2\omega}\right)^2}-1\right]\right\}^{1/2} \\ k''(\omega) = \dfrac{\omega}{\sqrt{2}c}\left[\sqrt{1+\left(\dfrac{rc}{2\omega}\right)^2}-1\right]^{1/2} \end{cases}. \tag{13}$$

On estime alors $rc/(2\pi Z) \simeq 2{,}7\times10^4$ Hz.. On peut distinguer deux cas selon la valeur de fréquence : un régime très hautes fréquences ($f < 2{,}7\times10^4$ Hz), et un régime basses fréquences ($2{,}7\times10^4$ Hz $< f < 1\times10^9$ Hz). Dans le premier cas, on a $rc/(Z\omega) \gg 1$, conduisant à

$$k'_{\mathrm{THF}}(\omega) = \sqrt{\frac{r\omega}{2Zc}}, \quad k''_{\mathrm{THF}}(\omega) = \sqrt{\frac{r\omega}{2Zc}}. \tag{14}$$

À l'inverse, dans le second cas, on trouve

$$k'_{\mathrm{BF}}(\omega) = \frac{\omega}{c}, \quad k''_{\mathrm{BF}}(\omega) = \frac{r}{2Z}. \tag{15}$$

On pourra vérifier que la fréquence pour laquelle les prévisions des régimes hautes fréquences et basses fréquences coïncident correspond à $r^2/(2\pi Z^2) \simeq 1{,}3\times10^9$ Hz, comme attendu.

On retiendra donc que pour $\omega > rc/Z$ (ou encore pour $f > 20$ kHz) :

$$|\underline{H}(j\omega)| = \begin{cases} e^{-rL/(2Z)} & \text{si } \omega < \omega_c \\ e^{-L\sqrt{\omega r/(2Z)}} & \text{sinon} \end{cases}, \quad \arg[\underline{H}(j\omega)] = -\frac{\omega L}{c}, \tag{16}$$

avec $\omega_c = (rL)^2/(2\pi)$ (correspondant à une fréquence critique de l'ordre de 130 kHz).

L'analyse de la courbe de l'argument de la fonction de transfert du câble permettra d'en déduire une seconde estimation de la célérité c des ondes dans le câble coaxial. Pour un traitement quantitatif de l'expérience, on pourra tracer l'argument de la fonction de transfert (correspondant au déphasage entre les deux signaux observés à l'oscilloscope), et effectuer une modélisation affine. La pente permettra alors de remonter à c. L'analyse de la courbe de gain est plus complexe, notamment du fait de l'existence de résonances parasites, dont la plus importante se produit à une fréquence fondamentale de l'ordre de 800 kHz. Ces dernières peuvent s'expliquer par le comportement capacitif de l'oscilloscope. En effet, comme cela a été mentionné plus haut, l'impédance équivalente du condensateur est $\underline{Z}_{\mathrm{osc}} = Z/(1+j\omega ZC_{\mathrm{osc}})$ à la pulsation ω (et en supposant que $R_{\mathrm{osc}} = Z = 50\,\Omega$). Dans ce cas, le coefficient de réflexion en tension vaut

$$r = \frac{\underline{Z}_{\mathrm{osc}} - Z}{\underline{Z}_{\mathrm{osc}} + Z} = -\frac{1}{2}j\omega ZC_{\mathrm{osc}}, \tag{17}$$

car $\omega ZC_{\mathrm{osc}} = 0{,}004 \ll 1$ à une fréquence de 1 MHz. Ainsi, le coefficient de réflexion r est imaginaire pur et très petit devant 1. Au bout d'un aller-retour dans le câble coaxial, le déphasage subi par le signal est $-2k''(\omega)L - \pi/2$, et on observera alors une résonance du signal aux bornes de l'oscilloscope quand le signal incident interfère constructivement avec le signal après un aller-retour dans le câble, soit

$$-2k''(\omega)L - \frac{\pi}{2} = -2(n+1)\pi \Longrightarrow \omega_n = \frac{\pi c}{L}\left(n+\frac{3}{4}\right), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

On prédit alors une première résonance à une fréquence $f_0 = 3c/(8L) = 750$ kHz en accord avec les observations expérimentales. Les résonances suivantes se trouvent à des fréquences $f_1 = 1{,}75$ MHz et $f_2 = 2{,}75$ MHz, et peuvent être observées par des mesures suffisamment résolues.

Un exemple de réalisation expérimentale avec le matériel de la collection est donné Fig. A1.

II. Introduction à la modulation

La modulation consiste à modifier les propriétés (amplitude ou fréquence) d'un signal haute fréquence, appelé porteuse, à l'aide d'un signal informatif basse fréquence qu'on souhaite transmettre.

La modulation s'avère nécessaire pour au moins trois raisons. En premier lieu, et majoritairement, afin de permettre à différents émetteurs de transmettre en même temps[2] des signaux informatifs dont le contenu spectral s'établit dans le même domaine fréquentiel (par exemple entre 20 Hz et 20 kHz si les signaux qu'on souhaite transmettre sont des signaux électromagnétiques obtenus à partir de signaux acoustiques comme différentes émissions radiophoniques). En second lieu, car la taille des antennes serait trop grande. En effet, si on souhaite, par exemple, émettre une onde électromagnétique de fréquence 1 kHz, il faudrait une antenne dont la hauteur est de l'ordre de la longueur d'onde de l'onde électromagnétique associée, soit ici 300 km. En dernier lieu, car quand bien même serait-il possible de construire une antenne de telle taille, cette antenne ne pourrait pas être utilisée pour émettre à une autre fréquence (par exemple dans le domaine spectral entre 20 Hz et 20 kHz).

Les différentes fréquences de porteuses sont réparties entre les différents émetteurs, afin de mettre en place le multiplexage. Pour plus de détails sur ce point, on renvoie le lecteur à la Réf. [8].

Une télécommunication typique comporte donc trois étapes : modulation, transport, et démodulation. Un schéma plus complet est proposé Fig. 2.

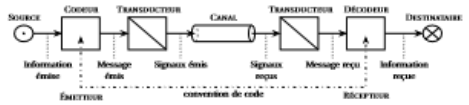


Figure 2 – Schéma d'un système de transmission idéal.

Dans la suite, on s'intéresse à deux dispositifs de modulation : la modulation d'amplitude, pour laquelle le signal informatif modifie l'amplitude de la porteuse, et la modulation de fréquence, pour laquelle le signal informatif modifie la fréquence instantanée de la porteuse.

III. Modulation d'amplitude [MP 42]

1. Principe

On commence par décrire le principe de la modulation d'amplitude. Cela est également fait dans la Réf. [3] (pp. 208-210) ou dans les Réf. [9, 10] auxquelles on pourra se référer.

La porteuse est un signal sinusoïdal $v_p(t) = A_p\cos(2\pi f_p t)$. Le signal informatif est noté $v_i(t)$. Un signal modulé en amplitude est un signal pour lequel l'amplitude de la porteuse varie en fonction de $s_i(t)$. On réalise cela en multipliant les deux signaux pour obtenir le signal modulé $s_m(t) = kA_p v_i(t)\cos(2\pi f_p t)$, avec k une constante en V^{-1}.

Considérons un signal informatif sinusoïdal de fréquence f_i : $v_i(t) = A_i\cos[2\pi f_i t + \phi_i]$. Le signal $s_m(t)$ devient

$$v_m(t) = \frac{kA_pA_i}{2}\left[\cos[2\pi(f_p-f_i)t-\phi_i] + \cos[2\pi(f_p+f_i)t+\phi_i]\right]. \tag{19}$$

Le spectre de $v_m(t)$ présente alors deux pics (dans le régime des fréquences positives) aux fréquences f_p+f_i et f_p-f_i, correspondant à un encombrement spectral $B = 2f_i$.

En pratique, on peut avoir besoin de rajouter une composante continue à $v_i(t)$:

$$v_i(t) = A_i\left[1 + m\cos(2\pi f_i t + \phi_i)\right], \tag{20}$$

où m est appelé le taux de modulation. Dans ce cas

$$v_m(t) = kA_pA_i\left\{\cos[2\pi f_p t] + \frac{m}{2}\cos\left[2\pi(f_p+f_i)t+\phi_i\right] + \frac{m}{2}\cos\left[2\pi(f_p-f_i)t-\phi_i\right]\right\}, \tag{21}$$

et le spectre de $v_m(t)$ présente alors trois pics (dans le domaine des fréquences positives) aux fréquences f_p, f_p+f_i et f_p-f_i. L'encombrement spectral est toujours $B = 2f_i$. L'ajout d'une composante continue permet en réalité de faciliter le processus de démodulation, car on peut alors procéder par détection d'enveloppe (lorsque $m < 1$), et il n'est pas nécessaire de reconstruire la porteuse. Néanmoins, cela réduit le rendement énergétique du transfert d'information, car une fraction de

2. On parle de multiplexage.

l'énergie transportée ne transporte effectivement aucune information (la composante spectrale à la fréquence f_0). On peut alors définir un rendement η par

$$\eta = \frac{|c_{f_0+f}|^2 + |c_{f_0-f}|^2}{|c_{f_0+f}|^2 + |c_{f_0-f}|^2 + |c_{f_0}|^2} = \frac{m^2}{2+m^2}, \tag{22}$$

où on a noté

$$s_{m}(t) = \mathrm{Re}\left\{c_{f_0}e^{i2\pi f_0 t} + c_{f_0+f}e^{i2\pi(f_0+f)t} + c_{f_0-f}e^{i2\pi(f_0-f)t}\right\}. \tag{23}$$

On constate que pour $m = 1$ (cas limite pour la démodulation par détection d'enveloppe), le rendement atteint environ 33 %, ce qui est assez faible.

Pour plus de détails sur les modulations « sans porteuse » (premier cas) et « avec porteuse » (second cas), on renvoie le lecteur à la Réf. [10].

2. Modulation par multiplieur

Pour réaliser une modulation d'amplitude, il suffit donc de faire le produit des deux signaux $s_p(t)$ et $s_1(t)$. Le plus simple est d'utiliser un multiplieur analogique, comme indiqué Fig. 3. L'expérience est également décrite dans la Réf. [3] (pp. 211-212).

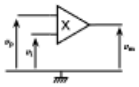


FIGURE 3 – Circuit pour la modulation d'amplitude.

Liste du matériel :

- un multiplieur analogique r41 . 15,
- deux générateurs basses fréquences,
- une carte d'acquisition.

> On propose de réaliser le montage de la fig. 3. Pour la porteuse s_p, on prendra un signal sinusoïdal d'amplitude de l'ordre de 5V et de fréquence de l'ordre de 100kHz. Pour le signal informatif s_1, on pourra prendre un signal sinusoïdal d'amplitude de l'ordre de 2V et de fréquence de l'ordre de 10kHz. On pourra alors faire l'acquisition du signal modulé s_m à l'aide d'une carte d'acquisition et calculer sa transformée de Fourier discrète. On pourra aussi directement observer l'allure du signal.

On vient ici de réaliser une modulation « sans porteuse », car on doit observer que le spectre de s_m ne présente que deux pics aux fréquences 90kHz et 110kHz. Afin de pouvoir séparer les deux pics dans le spectre de Fourier du signal, il faudra choisir une durée totale T d'enregistrement suffisamment grande, de telle sorte que $1/T < f_1$. Le choix $T = 1$ ms convient alors. Par ailleurs, il faudra également choisir un temps d'échantillonnage T_e pour respecter le critère de Shannon, soit ici $1/T_e > 2(f_0 + f_1)$. Le choix $T_e = 1\,\mu$s convient alors. Enfin, on notera qu'on a choisi une fréquence $f_0 = 100$kHz afin de se rapprocher des conditions réelles de modulation, où le signal porteur est de très haute fréquence par rapport au signal informatif.

On doit également observer que l'enveloppe du signal modulant a une fréquence apparente (définie comme l'inverse de la durée entre deux maxima du signal s_m) de 20kHz, soit le double de celle du signal informatif : on parle de surmodulation.

> On propose, ensuite, avec le même montage, de considérer un signal informatif comprenant une composante continue. On commencera alors par prendre pour s_1 un signal sinusoïdal d'amplitude de l'ordre de 2V, de fréquence de l'ordre de 10kHz, et présentant un offset de 3V. On pourra de nouveau faire l'acquisition du signal modulé s_m à l'aide d'une carte d'acquisition et calculer sa transformée de Fourier discrète.
> On pourra ensuite réitérer l'expérience en prenant une tension d'offset de 1V.

Dans le premier cas, on doit observer que l'enveloppe du signal modulant a cette fois-ci une fréquence apparente égale à la fréquence du signal informatif : le signal est démodulable par détection d'enveloppe. La transformée de Fourier de s_m doit maintenant exhiber trois pics aux fréquences 90kHz, 100kHz, et 110kHz, on parle de modulation « avec porteuse ».

Dans le second cas, l'enveloppe du signal modulant n'est plus le signal informatif, mais le spectre de Fourier présente toujours trois composantes fréquentielles.

Nous avons proposé une réalisation de modulation d'amplitude à l'aide d'un multiplieur. La modulation d'amplitude peut également être effectuée en modifiant le point de repos d'un élément non linéaire (par exemple un composant à semi-conducteur). Cependant, le signal obtenu comporte de nombreux harmoniques, et il est nécessaire d'effectuer une opération de filtrage pour ne conserver que les composantes fréquentielles du signal modulant aux fréquences $f_0 + f_1$ et f_0. Un exemple de réalisation expérimentale est proposé dans la Réf. [3] (pp. 212-215). Pour plus de détails sur les différentes méthodes de modulation, on pourra consulter la Réf. [9], ou encore la Réf. [11].

3. Modulation avec un générateur basses fréquences

On notera que certains générateurs basses fréquences ont une fonction qui permet de délivrer directement des signaux modulés.

Liste du matériel :

- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

> On pourra utiliser la fonction de modulation du GBF et observer à l'oscilloscope le signal modulé en amplitude en sortie du GBF. Pour cela, on pourra choisir un signal porteur sinusoïdal de fréquence 100kHz et d'amplitude 5V (bouton `Sine`). Puis on pourra réaliser une modulation en amplitude (bouton `Mod` du GBF Agilent 33220A, choisir `Type: AM`, et `Source: Int`) avec un taux de modulation de l'ordre de 0,5 (`AM Depth` de 50 %), et une fréquence de signal informatif de l'ordre de 10kHz (`AM Freq`). On pourra ensuite faire varier les différents paramètres.

IV. Démodulation d'amplitude [MP 42]

1. Démodulation par détecteur d'enveloppe

La démodulation d'un signal AM est en théorie aisée. Comme cela a été observé expérimentalement précédemment, pour une modulation AM « avec porteuse », et si $m < 1$, alors il suffit de récupérer l'enveloppe du signal modulé pour retrouver le signal informatif. On utilise pour cela les circuits schématisés Fig. 4. La méthode est également décrite dans la Réf. [3] (pp. 215-217), ainsi que dans la Réf. [9], ou encore dans la Réf. [5].

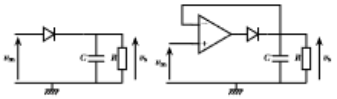


FIGURE 4 – Circuits pour la détection d'enveloppe avec une diode simple (à gauche) et une diode sans seuil (à droite).

Le principe du détecteur d'enveloppe à diode sans seuil est donné dans le TP6 d'électronique. De façon schématique, lorsque la diode est passante, on a $s_s = s_m$, tandis que lorsque la diode est bloquée, s_s décroît exponentiellement sur un temps caractéristique $\tau = RC$. La diode ne bloque dès lors que

$$\tau\frac{ds_m}{dt} + s_m < 0, \tag{24}$$

tandis que la diode redevient passante quand $s_s = s_m$. Le comportement du détecteur d'enveloppe dépend du temps caractéristique $\tau = RC$, et un compromis doit être réalisé.

- D'une part, on ne veut pas que le signal s_s « suive » les oscillations haute fréquence du signal modulé s_m à la fréquence de l'ordre de f_0, ce qui requiert que le signal s_s décroisse suffisamment lentement à l'échelle d'une pseudo-période $1/f_0$, soit $\tau \gg 1/f_0$.

Assez peu de différences entre les différents montages, d'après le prof le montage ALI permet de s'affranchir de l'offset des 0,6V de la diode

► D'autre part, on veut que le signal v_s « suive » les oscillations lentes de l'enveloppe du signal v_{m}, ce qui requiert que $\tau < 1/f_i$. On peut être plus précis sur ce dernier point, et on peut montrer que

$$\tau < \frac{\sqrt{1-m^2}}{m}\,\frac{1}{2\pi f_i}. \tag{25}$$

Pour plus de détails sur ce point, on renvoie le lecteur à la Réf. [7] (pp. 130-131). En effet, on veut que le signal v_s « suive » les oscillations lentes de l'enveloppe du signal v_{m}, ce qui n'est possible que si le signal v_s décroît sur une pseudo-période $1/f_p$ davantage que ne varie le signal d'enveloppe. Nous allons supposer que $f_p \gg \tau$, f_i. Dans ce cas, la condition de blocage de la diode donnée par l'Éq. (24) s'approxime en $\mathrm{d}v_{m}/\mathrm{d}t < 0$, et la diode devient donc bloquante à un instant t_0 correspondant à un multiple entier de la pseudo-période f_p. Dans ce cas, la tension en sortie du détecteur d'enveloppe vaut

$$v_s(t) = v_{m}(t_0)e^{-(t-t_0)/\tau} = \left[1 + m\cos(2\pi f_i t_0 + \phi_i)\right]e^{-(t-t_0)/\tau}. \tag{26}$$

La diode redevient passante à l'instant $t_1 = t_0 + \delta t$ telle que $v_s(t_1) = v_{m}(t_1)$, soit

$$\left[1 + m\cos(2\pi f_i t_0 + \phi_i)\right]e^{-\delta t/\tau} = \left[1 + m\cos(2\pi f_i(t_0 + \delta t) + \phi_i)\right]\cos(2\pi f_p \delta t). \tag{27}$$

Or δt est de l'ordre de $1/f_p$, et un développement limité au premier ordre conduit à

$$1 + \frac{x}{2\pi f_p \tau}\left[\frac{2\pi m f_i \tau \sin(2\pi f_i t_0 + \phi_i)}{1 + m\cos(2\pi f_i t_0 + \phi_i)} - 1\right] = \cos(x), \tag{28}$$

avec $x = 2\pi f_p \delta t$. La solution de cette équation est donc obtenue en cherchant l'intersection de la fonction cosinus avec une droite de pente très inférieure à 1 en valeur absolue. Comme le cosinus est décroissant, et qu'on cherche une solution avec $x > 0$, cela impose que la droite soit également décroissante, ce qui conduit à la condition

$$\frac{2\pi m f_i \tau \sin(2\pi f_i t_0 + \phi_i)}{1 + m\cos(2\pi f_i t_0 + \phi_i)} < 1. \tag{29}$$

Cela devant être vrai pour tout t_0, cela signifie que le maximum de la fonction dans le membre de gauche doit être inférieur à 1. La recherche de ce maximum conduit alors à $\cos(2\pi f_i t_0 + \phi_i) = -m$, soit en réinjectant,

$$\frac{2\pi m f_i \tau}{\sqrt{1-m^2}} < 1, \tag{30}$$

ce qui conduit à l'Éq. (25).

Les conditions précédentes sont d'autant plus faciles à respecter que les fréquences de la porteuse et du signal informatif sont éloignées, ou encore que le taux de modulation est très inférieur à 1.

Liste du matériel :

► un amplificateur linéaire intégré sur boîtier,
► une diode signal 1N4148 P29.2,
► un rhéostat de résistance variable P56.32
► un condensateur de capacité $C = 4{,}7\,\mathrm{nF}$,
► un générateur basses fréquences,
► un oscilloscope.

> On propose de réaliser le détecteur d'enveloppe avec diode sans seuil (montage de droite de la Fig. 4). On prendra un condensateur de capacité $C = 4{,}7\,\mathrm{nF}$, et pour la résistance R un rhéostat de résistance variable. On commencera avec $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$. On alimentera le circuit à l'aide d'un signal modulé (selon une des méthodes décrites précédemment), en gardant un taux de modulation $m < 1$. Par exemple, on pourra prendre un signal porteur de fréquence $f_p = 100\,\mathrm{kHz}$ et d'amplitude 5 V, et un signal informatif sinusoïdal de fréquence $f_i = 5\,\mathrm{kHz}$ et d'amplitude conduisant à un taux de modulation de l'ordre de 0,5. On pourra alors observer les signaux v_{m} et v_s à l'oscilloscope.
> On pourra ensuite faire varier la résistance R et observer la qualité du processus de démodulation.

On doit observer qu'on reconstruit bien le signal informatif (à un bruit haute fréquence près[3]). En effet, les conditions précédentes conduisent à $\tau \gg 1/f_p$, soit $R \gg 2{,}1\,\mathrm{k\Omega}$ et $\tau < \sqrt{1-m^2}/(2\pi m f_i)$, soit $R < 11{,}7\,\mathrm{k\Omega}$. Ces conditions sont donc bien

3. Ce bruit correspond aux oscillations de la porteuse f_p, qu'on pourrait éliminer à l'aide d'un filtre passe-bas en sud du dispositif.

+ travaillé à 20V

respectées pour $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$. On notera qu'on a diminué la fréquence du signal informatif par rapport aux expériences de modulation, afin d'améliorer le processus de démodulation par détection d'enveloppe. Par contre, trop diminuer la résistance R revient à ce que le signal v_s suive les oscillations haute fréquence de la porteuse, tandis que trop augmenter R ne permet plus de reconstruire le signal informatif.

On mentionne qu'on a choisi de réaliser un détecteur de crête sans seuil afin de s'affranchir de la tension de seuil de la diode, qui peut déformer le signal après démodulation, notamment si le signal modulé est de faible amplitude. Par contre, on ne peut pas travailler avec des signaux de trop haute fréquence, du fait du comportement dynamique des diodes qui tend à déformer les signaux. En pratique, on se restreindra à des fréquences inférieures à 200 kHz. Pour plus de détails sur le comportement fréquentiel des diodes, on renvoie le lecteur à la Réf. [6] (pp. 148-150).

2. Démodulation par détection synchrone

Il existe une autre méthode pour démoduler un signal modulé en amplitude : la détection synchrone. Celle-ci est très répandue car ses applications dépassent la démodulation : on l'utilise notamment pour réduire le bruit ou pour acquérir un signal de fréquence connue noyé dans un fort bruit (dans les *lock-in amplifiers*). Nous détaillons le principe de la détection synchrone ci-dessous. La méthode est également décrite dans la Réf. [3] (pp. 217-222), ainsi que dans la Réf. [8], ou encore dans la Réf. [5].

Cette méthode consiste à multiplier le signal modulé par un signal de même fréquence que la porteuse, puis à effectuer un filtrage passe-bas. On peut comprendre simplement ce principe dans le domaine spectral. Le spectre d'un signal modulé en amplitude « sans porteuse » présente deux pics aux fréquences $f_p - f_i$ et $f_p + f_i$. Si l'on multiplie ce signal par un signal sinusoïdal de fréquence f_p, le spectre du signal résultant présente trois pics aux fréquences f_i, $2f_p - f_i$, $2f_p + f_i$. En effectuant par la suite un filtrage passe-bas du signal de fréquence de coupure f_c telle que $f_i \ll f_c \ll 2f_p$, le spectre du signal filtré ne présente qu'un seul pic à la fréquence f_i (on pourra consulter le TP2 d'électronique pour rappel). On a alors reconstruit le signal informatif. On notera qu'il n'y a ici aucune condition sur le taux de modulation. Il est par ailleurs a priori inutile d'avoir une composante continue dans le signal informatif[4].

De façon plus quantitative, on considère le signal modulé

$$v_{m}(t) = A_{m}\left[1 + m\cos(2\pi f_i t + \phi_i)\right]\cos(2\pi f_p t) \tag{31}$$

qu'on multiplie par un signal de même fréquence que la porteuse

$$v_p'(t) = A_p' \cos(2\pi f_p t + \phi_p'). \tag{32}$$

On obtient alors le signal (avec k un coefficient en V^{-1})

$$\begin{aligned} v_s'(t) = \frac{kA_{m}A_p'}{2}\Big\{&\cos(4\pi f_p t + \phi_p') + \cos(\phi_p') + \frac{m}{2}\cos(2\pi(2f_p + f_i)t + \phi_i + \phi_p') + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_i t + \phi_i - \phi_p') \\ &+ \frac{m}{2}\cos(2\pi(2f_p - f_i)t - \phi_i + \phi_p') + \frac{m}{2}\cos(2\pi f_i t + \phi_i + \phi_p')\Big\}. \end{aligned} \tag{33}$$

Le filtrage passe-bas conduit alors au signal

$$\begin{aligned} v_s(t) &= \frac{kA_{m}A_p'}{2}\left[G(0)\cos(\phi_p') + \frac{mG(f_i)}{2}\cos(2\pi f_i t + \phi_i - \phi_p') + \frac{mG(f_i)}{2}\cos(2\pi f_i t + \phi_i + \phi_p')\right] \\ &= \frac{kA_{m}A_p'}{2}\cos(\phi_p')\left[G(0) + mG(f_i)\cos(2\pi f_i t + \phi_i)\right] \end{aligned} \tag{34}$$

où on a noté $G(f)$ le gain en tension de l'étage de filtrage en fonction de la fréquence f (et où on a supposé que le filtre était « idéal », au sens où $G(f) = 0$ pour $f > f_c$). On trouve alors que le signal démodulé est d'amplitude proportionnelle au déphasage entre le signal de porteuse et le signal utilisé pour effectuer la multiplication lors du processus de démodulation : on a donc tout intérêt à avoir $\phi_p' = 0$. Par ailleurs, le signal v_s présente une composante continue, qu'on peut filtrer à posteriori.

En pratique, la démodulation ne fonctionne que si la porteuse et le signal de fréquence f_p utilisé pour la démodulation gardent un déphasage constant[5] au cours du temps[6]. Si ce n'est pas le cas, alors cela conduit à une déformation du signal démodulé au cours du temps, appelée *fading*. Cela nécessite donc d'utiliser le même oscillateur pour la porteuse et la démodulation (ce qui est faisable en TP, mais pas dans la réalité car les émetteur et récepteur ne se trouvent pas au même endroit), ou bien de reconstruire la porteuse à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase (voir plus bas).

Liste du matériel :

4. Cela est en réalité nécessaire en pratique, car pour réaliser la détection synchrone, il convient de reconstruire la porteuse à l'aide d'une boucle à verrouillage de phase (voir plus loin).
5. Un déphasage nul est optimal, comme le montre le résultat de l'Éq. (34).
6. Il s'agit d'un problème analogue à celui de la cohérence temporelle en optique

- un multiplieur analogique P41.15,
- deux résistances $R_s = 2\text{k}\Omega$,
- deux condensateurs de capacité $C_0 = 4{,}7\text{nF}$,
- une bobine d'inductance variable P59.34,
- deux générateurs basses fréquences,
- un oscilloscope.

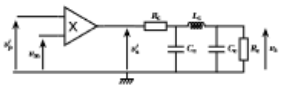


FIGURE 5 – Circuit pour la détection synchrone.

> On propose de réaliser le circuit de la Fig. 5 en utilisant deux générateurs basses fréquences. Avec le premier GBF, on délivrera un signal modulé en amplitude v_m. Par exemple, on pourra prendre une fréquence de porteuse $f_p = 100\text{kHz}$, une fréquence de signal informatif $f_1 = 5\text{kHz}$, et un taux de modulation $m = 0{,}5$. Avec le second GBF, on délivrera un signal sinusoïdal v_p de fréquence 100kHz, et d'amplitude de l'ordre de 5V (attention à ne pas dépasser l'amplitude maximale acceptée par le multiplieur). Pour le filtre passe-bas, on prendra $R_s = 2\text{k}\Omega$, $C_0 = 4{,}7\text{nF}$, et $L_0 = 38\text{mH}$. On observera les différents signaux à l'oscilloscope.
> On pourra ensuite réitérer l'expérience avec un signal informatif triangulaire de même fréquence, ou encore avec un signal sinusoïdal dont le taux de modulation est supérieur à 1.

On commence par détailler le comportement du filtre utilisé dans le montage de la Fig. 5. Les études asymptotiques basses et hautes fréquences nous permettent d'en déduire qu'il s'agit d'un filtre passe-bas du troisième ordre de gain statique 1/2. Pour être plus quantitatif, notamment en ce qui concerne la fréquence de coupure f_c, on peut déterminer la fonction de transfert du filtre. Celle-ci a déjà été obtenue dans le TP6 d'électronique (il s'agit de la cellule *CLC* utilisée pour l'oscillateur Colpitts). On trouve alors (en notant avec une majuscule les amplitudes complexes de signaux réels, et en notant ω la pulsation) :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{V_s}(j\omega)}{\underline{V_e}(j\omega)} = \frac{1}{R_s}\,\frac{(Z_1 \parallel R_e)(Z_2 \parallel R_e)}{Z_1 \parallel R_e + Z_2 \parallel R_e + Z} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1 + j\omega\left(R_sC_0 + \frac{L_0}{2R_e}\right) - \omega^2 L_0C_0 - j\omega^3 \frac{R_eL_0L_sC_0^2}{2}}, \tag{35}$$

où $Z_1 = Z_2 = 1/(j\omega C_m)$ et $Z = j\omega L_s$. Dans le cas où $R_sC_0 = L_s/(2R_e)$ (ce qui est le cas pour les valeurs proposées ci-dessus), on peut montrer que la fréquence de coupure à 20dB vaut $f_c = 1/(2\pi R_sC_0)$. Avec les valeurs de composants proposées ci-dessus, on trouve $f_c = 17\text{kHz}$, ce qui permet de filtrer effectivement les composantes fréquentielles autour de $2f_p$, et de ne garder que le signal informatif. On termine par mentionner qu'on aurait pu utiliser un filtre moins sélectif (comme un filtre passe-bas *RC* du premier ordre), du fait du grand écart entre f_1 et f_p.

Expérimentalement, on doit observer qu'on arrive à reconstruire le signal informatif dans tous les cas de figure, auquel peut s'ajouter un offset de très basse fréquence. Ceci est dû au fait que les deux générateurs ne sont pas parfaitement synchronisés. Il persiste un déphasage entre les deux signaux ϕ_p' qui varie dans le temps (voir le calcul ci-dessus). Pour pallier le problème de *fading*, et pour reconstruire la porteuse, on utilise une boucle à verrouillage de phase, qui est étudiée dans l'Exp. VI (voir plus bas). Un schéma complet du dispositif expérimental de démodulation avec récupération de la porteuse est proposé dans la Réf. [7] (pp. 131-133), ou encore dans la Réf. [4] (pp. 112-114).

En TP, on peut s'affranchir du problème de synchronisation des deux oscillateurs en réalisant soi-même le signal modulé.

> On propose de réaliser le circuit de la Fig. 2 à l'aide de deux générateurs basses fréquences, le premier émettant un signal sinusoïdal de porteuse de fréquence $f_p = 100\text{kHz}$ et d'amplitude 5V, et le second émettant un signal informatif de fréquence $f_1 = 5\text{kHz}$. On pourra alors mettre à la suite le schéma de la Fig. 5 où on multipliera le signal modulé v_m par le signal délivré par le premier GBF délivrant le signal de porteuse.

Il est conseillé de ne pas démonter le circuit de la Fig. 5, car il pourra être utile dans l'Exp. VI, où on illustrera le principe de la récupération de la porteuse à l'aide d'une boucle de verrouillage de phase. Cela permettra d'effectuer la détection synchrone sans utiliser le même GBF pour la modulation et la démodulation, et de s'affranchir du problème de synchronisation.

3. Multiplexage (*)

On peut facilement montrer le multiplexage dans le cas de la modulation d'amplitude.

Liste du matériel :

- un multiplieur analogique P41.15,
- deux résistances $R_s = 2\text{k}\Omega$,
- deux condensateurs de capacité $C_0 = 4{,}7\text{nF}$,
- une bobine d'inductance variable P59.34,
- un amplificateur linéaire intégré sur boîtier,
- trois résistances $R = 10\text{k}\Omega$,
- trois générateurs basses fréquences,
- un oscilloscope.

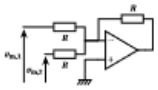


FIGURE 6 – Schéma du montage-sommateur à AL1. Celui-ci est également décrit dans la Réf. [3] (pp. 89-90).

> On propose d'utiliser deux générateurs basses fréquences afin de générer deux signaux modulés $v_{m,1}$ et $v_{m,2}$ par deux porteuses de fréquences différentes $f_{p,1}$ et $f_{p,2}$, et avec deux signaux informatifs différents (par exemple un signal sinusoïdal et un signal triangulaire). On pourra sommer les deux signaux à l'aide d'un montage-sommateur à AL1 avec $R = 10\text{k}\Omega$ (voir Fig. 6), puis brancher la sortie de ce montage au dispositif de démodulation synchrone de la Fig. 5. On pourra alors faire varier la fréquence du signal v_p'.

On pourra alors, en fonction de la fréquence choisie pour le signal v_p', observer l'un ou l'autre des deux signaux informatifs.

V. MODULATION DE FRÉQUENCE [MP 42]

1. Présentation

On propose maintenant de réaliser un second type de modulation, où l'information est cette fois-ci encodée dans la variation de la fréquence instantanée de la porteuse v_p. Le principe de la méthode est également décrit dans la Réf. [3] (pp. 222-225), ainsi que dans la Réf. [10].

Si $v_1(t)$ est le signal informatif, la fréquence instantanée du signal modulé $v_m(t) = A_p\cos(\phi(t))$ est de la forme

$$f_m(t) = f_p + \kappa\, v_1(t), \tag{36}$$

où f_p désigne la fréquence de la porteuse, où κ désigne un coefficient en $\text{Hz}\cdot\text{V}^{-1}$, et où la fréquence instantanée du signal modulé est définie par

$$f_m(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi}{dt}(t). \tag{37}$$

Un signal modulé en fréquence est donc décrit par trois grandeurs différentes : la fréquence centrale f_p, la plage d'excursion en fréquence $f_{max} - f_{min}$, qui dépend de l'amplitude de $v_1(t)$ et du coefficient κ, et la fréquence de balayage en fréquence, qui est la fréquence de $v_1(t)$. Dans le cas d'un signal informatif $v_1(t) = A_1\cos(2\pi f_1 t)$ sinusoïdal d'amplitude A_1 et de fréquence f_1, le signal modulé en fréquence a l'expression suivante :

$$v_m(t) = A_p\cos\left[2\pi\int_0^t dt'\, f_m(t')\right] = A_p\cos\left[2\pi f_p t + \frac{\kappa A_1}{f_1}\sin(2\pi f_1 t)\right] = A_p\cos\left[2\pi f_p t + \beta\sin(2\pi f_1 t)\right], \tag{38}$$

où on a défini l'indice de modulation $\beta = \kappa A_1/f_1$ (à ne pas confondre avec le taux de modulation pour la modulation en amplitude), qui correspond à l'excursion maximale en fréquence, divisée par la fréquence du signal informatif.

Tout comme la modulation en amplitude, on peut décrire la modulation en fréquence dans le domaine spectral. Le calcul du spectre du signal modulé en fréquence est beaucoup plus compleux, et on renvoie le lecteur à la Réf. [7] (pp. 147-148) pour plus de détails. Le calcul permet finalement d'aboutir à[7]

$$\begin{aligned} v_m(t) = A_p \big\{ & J_0(\beta)\cos(2\pi f_p t) + J_1(\beta)\cos[2\pi(f_p + f_i)t] - J_1(\beta)\cos[2\pi(f_p - f_i)t] + J_2(\beta)\cos(2\pi(f_p - 2f_i)t) \\ & + J_2(\beta)\cos(2\pi(f_p + 2f_i)t) + J_3(\beta)\cos(2\pi(f_p + 3f_i)t) - J_3(\beta)\cos(2\pi(f_p - 3f_i)t) + \dots \big\}, \end{aligned} \tag{39}$$

où les J_n correspondent aux fonctions de Bessel de première espèce. On note que le spectre du signal modulé en fréquence présente un nombre infini de pics aux fréquences $f_p \pm n f_i$ pour $n \in \mathbb{N}$, contrairement à la modulation en amplitude. En toute rigueur, l'encombrement spectral d'un signal modulé en fréquence est infini, ce qui exclurait toute possibilité de multiplexage. En réalité, l'amplitude des fonctions de Bessel de première espèce à β fixé décroît quand n augmente, et seuls les premiers pics ont une amplitude significative (par exemple supérieure à 1 % du pic fondamental à la fréquence f_p). Une règle empirique pour définir l'encombrement spectral B d'un signal modulé en fréquence est la règle de Carson, qui définit B comme le domaine spectral dans lequel se trouve 98 % de la puissance totale transportée par le signal $v_m(t)$. Étant donné l'Éq. (38), ainsi que les propriétés des fonctions de Bessel $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta)^2 = 1$ et $J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit que $B = 2(n^* + 1) f_i$ est défini par la relation

$$\sum_{n=n^*}^{+\infty} J_n(\beta)^2 \leq 0{,}01 \iff \sum_{n=-\lfloor B/2f_i \rfloor - 1}^{+\infty} J_n(\beta)^2 \leq 0{,}01. \tag{40}$$

Il n'est pas possible de résoudre cette équation analytiquement, on peut néanmoins le faire numériquement. La solution est représentée Fig. 7, et est en accord avec la relation empirique

$$B \simeq 2(\beta + 1) f_i. \tag{41}$$

On note que $B \simeq 2 f_i$ si $\beta \ll 1$, comme dans le cas de la modulation d'amplitude. Cela s'explique par le fait que dans ce cas, on a :

$$v_m(t) = A_p \left[\cos(2\pi f_p t) - \beta \sin(2\pi f_i t)\sin(2\pi f_p t)\right] \simeq A_p \left\{\cos(2\pi f_p t) + \frac{\beta}{2}\cos\left[2\pi(f_p + f_i)t\right] - \frac{\beta}{2}\cos\left[2\pi(f_p - f_i)t\right]\right\}. \tag{42}$$

Le signal a alors la même expression que celui obtenu par modulation d'amplitude, avec β qui s'identifie au taux de modulation m. À l'inverse, si $\beta \gg 1$, alors $B \simeq 2\beta f_i = 2\pi A_f$. La largeur spectrale est très grande devant f_i et coïncide avec l'excursion en fréquence $2\pi A_f$ induite par le processus de modulation.

2. Réalisation d'un OCT

Outil fondamental pour moduler en fréquence est un oscillateur commandé en tension (OCT ou VCO en anglais), qui est étudié dans le TP6 d'électronique. Cette dernière expérience du TP6 est l'expérience à privilégier dans un montage de physique, car elle est plus quantitative (il y a une relation à vérifier entre l'amplitude du signal informatif et la fréquence du signal modulé), et montre la réalisation pratique d'un OCT. Ici, on utilisera directement les générateurs basses fréquences qui ont la possibilité de délivrer un signal modulé en fréquence à partir d'un signal d'entrée délivré sur l'entrée dédiée.

Liste du matériel :

- deux générateurs basses fréquences,
- un oscilloscope,
- une carte d'acquisition.

> On propose, à l'aide d'un premier générateur basses fréquences, de générer un signal sinusoïdal (la porteuse) de fréquence $f_p = 100$kHz et d'amplitude de l'ordre de 5V. À l'aide d'un second générateur basses fréquences, on délivrera un signal informatif v_i qu'on enverra sur l'entrée `Modulation In` ou équivalente (celle-ci se trouve à l'arrière des GBF de la collection). On réglera ensuite le premier GBF en modulation externe de fréquence (bouton `Mod`, puis `FM` et `Ext`). On réglera ensuite la plage d'excursion en fréquence `Freq Dev` ou équivalente sur la fréquence de la porteuse, à savoir 100kHz. On commencera par considérer des signaux informatifs v_i continus dont l'amplitude est inférieure ou égale à l'amplitude maximale acceptée par le GBF à l'entrée `Modulation In` (c'est 5V pour les GBFs de la collection). On pourra mesurer à chaque fois la fréquence f_m du signal délivré par l'OCT en observant celui-ci à l'oscilloscope, ce qui permettra d'étalonner l'OCT (en déterminant le coefficient κ).

Pour cette première expérience, on pourra tracer f_m en fonction de v_i et effectuer une modélisation affine. On attend une ordonnée à l'origine égale à f_p et une pente κ égale au paramètre `Freq Dev` choisi, divisé par 5V.

7. On notera l'erreur de signe dans l'expression de la Réf. [9]. L'expression donnée dans la Réf. [8] (p. 324) est quant à elle exacte.

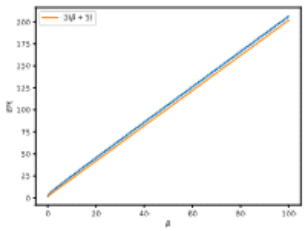


FIGURE 7 – Encombrement spectral B normalisé par la fréquence du signal informatif f_i en fonction de l'indice de modulation β. Cette courbe a été obtenue en résolvant numériquement l'Éq. (40).

> On pourra, dans un second temps, considérer comme signal informatif un signal sinusoïdal d'amplitude égale à l'amplitude maximale acceptée par le GBF à l'entrée `Modulation In`, et de fréquence $f_i = 1$kHz. On pourra alors observer le signal modulé en fréquence délivré par l'OCT à l'oscilloscope. On pourra également déterminer son spectre de Fourier à l'aide de l'oscilloscope ou d'une carte d'acquisition.

On pourra notamment vérifier l'accord du spectre du signal modulé[8] avec l'Éq. (38). On pourra également vérifier la règle de Carson donnée par l'Éq. (41). Pour cette seconde expérience, on choisit l'amplitude du signal informatif égale à la valeur maximale de tension que peut supporter le GBF à l'entrée `Modulation In` afin que la valeur choisie d'excursion en fréquence corresponde effectivement à l'excursion en fréquence du signal modulé. Cela correspond alors à un indice de modulation $\beta = f_p/f_i = 100 \gg 1$.

> On pourra enfin diminuer l'amplitude du signal informatif, toujours pour un signal informatif sinusoïdal de fréquence $f_i = 1$kHz, et observer les modifications du spectre du signal modulé en fréquence.

Diminuer l'amplitude du signal informatif revient à diminuer l'indice de modulation β. En effet, si Δf est l'excursion en fréquence indiquée sur le GBF et A_i l'amplitude du signal informatif, alors l'excursion en fréquence du signal modulé vaut $(A_i/A_{i,\max})\Delta f$, où $A_{i,\max} = 5$V. Cela conduit ici à un indice de modulation $\beta = A_i f_p/(A_{i,\max} f_i)$. On doit alors observer une diminution de l'encombrement spectral du signal, en accord avec l'Éq. (41). Par ailleurs, on doit observer que l'amplitude du pic fondamental à la fréquence f_p dans le spectre du signal modulé disparaît pour une valeur de $\beta \simeq 2{,}4$ (ce qui correspond à $A_i = 0{,}12$V).

La modulation en fréquence est largement répandue pour les signaux hertziens (radio FM évidemment). Comparée à la modulation en amplitude, elle est moins sensible au bruit et à l'atténuation du signal lors de la propagation (car l'information n'est pas encodée dans l'amplitude du signal modulé).

VI. DÉMODULATION DE FRÉQUENCE - BOUCLE À VERROUILLAGE DE PHASE [MP 42]

Liste du matériel :

- un multiplieur analogique P41.15,
- une résistance $R = 10$kΩ,

8. Les valeurs des fonctions de Bessel d'ordre n en β peuvent être obtenues avec la libraire `scipy.special` de Python, via la commande `scipy.special.jv(n,beta)`.

FIGURE 8 – Représentation schématique du principe de fonctionnement d'une boucle à verrouillage de phase.

- un condensateur de capacité $C = 22\,\mathrm{nF}$,
- un amplificateur linéaire intégré sur boîtier,
- deux générateurs basses fréquences,
- un oscilloscope.

1. Présentation

La boucle à verrouillage de phase (*Phase-Locked Loop* ou PLL en anglais) est le système le plus couramment utilisé pour démoduler les signaux modulés en fréquence. Il s'agit d'un système asservi (contre-réactionné) dont le but est de créer un oscillateur commandé en tension qui va osciller à la même fréquence que le signal à démoduler. La tension de commande assumée à l'OCT qui se trouve à l'intérieur de la PLL donnera alors le signal démodulé. On renvoie le lecteur à la Réf. [3] (pp. 233-237) pour une description de la méthode. On pourra également consulter la Réf. [4] (pp. 1-23).

La boucle à verrouillage de phase est un système contre-réactionné qui comporte trois éléments (voir le schéma de la Fig. 8). Elle est alimentée en entrée par un signal $v_e(t) = A_e \cos(\phi_e(t))$, avec A_e l'amplitude du signal, et $\phi_e(t)$ sa phase instantanée. Le signal en sortie de la boucle est $v_s(t) = A_s \cos(\phi_s(t))$, avec les mêmes notations que pour le signal d'entrée. On définit également les fréquences instantanées des deux signaux par

$$f_e(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi_e}{dt}(t), \quad f_s(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi_s}{dt}(t). \tag{43}$$

Le premier élément de la PLL est un comparateur de phase, qui renvoie une tension v_ϕ qui dépend des phases instantanées des signaux d'entrée v_e et de sortie v_s. Dans la réalisation expérimentale proposée dans la suite (voir Fig. 9), il s'agit d'un multiplieur, mais d'autres technologies existent. Pour plus de détails à ce sujet, on renvoie le lecteur à la Réf. [4] (pp. 19-52). Pour la situation expérimentale ci-dessous (celle du multiplieur), la tension v_ϕ s'écrit sous la forme

$$v_\phi(t) = k\, v_e(t)\, v_s(t) = \frac{k A_e A_s}{2}\left[\cos\left[\phi_e(t) + \phi_s(t)\right] + \cos\left[\phi_e(t) - \phi_s(t)\right]\right], \tag{44}$$

avec k le coefficient du multiplieur en V^{-1}.

Si f_e et f_s sont constantes (ou varient sur un temps caractéristique suffisamment grand, voir plus loin), et si la boucle est verrouillée, soit $f_e = f_s$, alors on a :

$$v_e(t) = A_e \cos(2\pi f_e t), \quad v_s(t) = A_s \cos(2\pi f_e t + \phi), \quad v_\phi(t) = \frac{k A_e A_s}{2}\left[\cos(\phi) + \cos(2 f_e t + \phi)\right], \tag{45}$$

avec ϕ le déphasage constant entre v_e et v_s. La tension v_ϕ est alors la somme d'un terme constant (sa valeur moyenne) qui dépend du déphasage entre v_e et v_s, et d'un terme harmonique oscillant au double de la fréquence f_e.

Si f_e et f_s sont toujours constantes (ou varient sur un temps caractéristique suffisamment grand, voir plus loin), mais que la boucle n'est pas verrouillée, alors v_ϕ est la somme d'un terme basse fréquence oscillant à une fréquence $|f_e - f_s|$, et d'un terme haute fréquence oscillant à une fréquence $f_e + f_s$.

Le deuxième étage de la PLL est un filtre passe-bas. Celui-ci, de fréquence de coupure f_F permet de filtrer les termes haute fréquences du signal v_ϕ, à la condition que $f_F \ll f_e + f_s \simeq 2 f_e$. Dans la réalisation expérimentale proposée dans la suite (voir Fig. 9), il s'agit d'un filtre RC du premier ordre, mais d'autres technologies existent. Pour plus de détails à ce sujet, on renvoie le lecteur à la Réf. [4] (pp. 53-56). L'association du comparateur de phase et du filtre passe-bas permet alors de construire un composant électronique qui renvoie un signal v_F qui dépend uniquement du déphasage instantané entre les signaux v_e et v_s. Par ailleurs, dans les explications précédentes, dire que les fréquences instantanées varient sur un temps caractéristique suffisamment grand revient à dire qu'elles varient sur un temps grand devant $1/f_e$.

Enfin, le dernier étage de la PLL est un oscillateur commandé en tension (O.C.T.) de coefficient κ_{PLL} par la tension v_F, délivrant un signal sinusoïdal de fréquence $f_s = f_0 + \kappa_{PLL} v_F$, et qui permet au système de vérifier la condition de verrouillage $f_e = f_s$. Dans la réalisation expérimentale proposée dans la suite (voir Fig. 9), on utilisera l'OCT d'un générateur basses fréquences. Pour des exemples plus réalistes, on renvoie le lecteur à la Réf. [4] (pp. 57-71).

2. Fonctionnement statique de la boucle à verrouillage de phase

Pour comprendre le fonctionnement de la boucle à verrouillage de phase, on commence par étudier le cas statique.

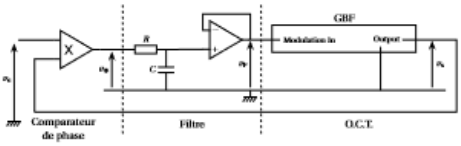


FIGURE 9 – Circuit d'une boucle à verrouillage de phase.

a. Étude de la plage de verrouillage

Pour cela, on propose de réaliser l'expérience suivante, également décrite dans la Réf. [3] (p. 236).

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 9. On pourra prendre une résistance $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et un condensateur de capacité $C = 22\,\mathrm{nF}$. On utilisera un générateur basses fréquences comme OCT, et on reliera la sortie du filtre RC à l'entrée `Modulation In` ou équivalente du GBF (voir l'Exp. V). On réglera le GBF en modulation externe de fréquence, de sorte qu'il délivre un signal v_e d'amplitude de quelques volts (par exemple 4 V), et de fréquence centrale $f_0 = 100\,\mathrm{kHz}$. On réglera l'excursion en fréquence sur 60 kHz. On alimentera alors le circuit à l'aide d'un second GBF émettant un signal sinusoïdal v_s d'amplitude de quelques volts (par exemple 4 V) et de fréquence $f_e = 100\,\mathrm{kHz}$. On pourra alors observer les signaux v_e, v_s et v_F à l'oscilloscope.

Le suiveur permet de réaliser une adaptation d'impédance avec l'entrée `Modulation In` du GBF. Les valeurs de R et de C sont choisies de telle sorte que la fréquence de coupure du filtre soit $f_F = 1/(2\pi RC) \simeq 720\,\mathrm{Hz}$, bien inférieure à $2 f_e$. On prendra garde de régler les amplitudes des signaux v_e et v_s afin de ne pas dépasser les tensions tolérées en entrée du multiplieur et à l'entrée `Modulation In` du GBF.

Si le système n'est pas stable (si les signaux ne sont pas stables à l'oscilloscope), il convient de diminuer le coefficient κ_{PLL} de l'OCT (en diminuant le paramètre `Freq dev` ou équivalent), ou bien l'amplitude du signal délivré par celui-ci. En effet, on peut voir la PLL comme un système à contre-réaction dont les variables dynamiques sont les fréquences instantanées f_e et f_s. Un schéma-bloc de la PLL, auteur de son point de fonctionnement $f_e = f_s = f_0$ est donné dans la Réf. [4] (pp. 77-100). Si le coefficient de l'OCT κ_{PLL} est trop grand, le gain de la PLL en boucle ouverte peut être trop important, ce qui peut mener à une instabilité du système en boucle fermée. Pour des rappels sur la stabilité des systèmes à rétroaction, on renvoie le lecteur au TP6 d'électronique.

Dans ce premier cas où $f_e = f_s$, on doit observer une tension v_F nulle, tandis que les signaux v_e et v_s doivent être identiques et déphasés de $\pi/2$. En effet, dans notre cas, l'oscillateur commandé en tension a déjà été réglé de sorte que sa fréquence à tension d'alimentation nulle coïncide avec la fréquence du signal d'entrée, et la rétroaction ne la modifie donc pas. Cependant même dans ce cas simple, il y a eu une synchronisation. Les phases des deux signaux ne sont à priori pas identiques initialement. La sortie du filtre v_F est alors proportionnelle à $\cos(\phi)$ (avec ϕ le déphasage entre v_e et v_s), et la fréquence de l'OCT est modifiée : v_s se décale alors par rapport à v_e (car sa fréquence instantanée change) jusqu'à ce que $\cos(\phi)$ soit nul. La PLL se verrouille sur cette position. Cela correspond à un déphasage de $\pm\pi/2$ entre v_e et v_s. Pour des raisons de stabilité, c'est la position $+\pi/2$ qui est choisie. En effet, si ϕ est légèrement supérieure à $\pi/2$, son cosinus est négatif et la fréquence instantanée de v_s diminue, ce qui diminue le déphasage entre v_e et v_s, et le système revient bien vers un déphasage constant égal à $\pi/2$.

> On pourra ensuite modifier la fréquence f_e du signal d'entrée v_e, sans modifier la fréquence centrale f_0 de l'OCT de la PLL. On augmentera (ou diminuera) la fréquence f_e, tout en observant les signaux v_e, v_s et v_F à l'oscilloscope. En continuant à faire varier f_e, on pourra en déduire la plage de verrouillage Δf_F de la PLL. On pourra ensuite étudier les dépendances de cette dernière, notamment sa variation avec l'amplitude A_e du signal délivré par l'OCT.

En augmentant faiblement la fréquence f_e, on doit observer que la PLL reste verrouillée ($f_e = f_s$), tandis que la tension v_F est constante et non nulle. Les signaux v_e et v_s sont toujours déphasés, mais d'un déphasage différent de $\pi/2$. Cela n'est possible que si f_e est dans la plage de verrouillage de l'OCT de la PLL. $f_e \in [f_0 - \Delta f_F,\ f_0 + \Delta f_F]$, avec

$$2\Delta f_F = \kappa_{PLL} k A_e A_s. \tag{46}$$

Pour plus de détails sur l'obtention de cette relation, on renvoie le lecteur à la Réf. [1] (p. 234). Cette plage de verrouillage correspond à l'intervalle de fréquences f_e dans lequel la PLL reste verrouillée $f_e = f_0$, si on part de $f_e = f_0$. Aux bords de la plage de verrouillage, les signaux s_0 et s_e sont en phase ou en opposition de phase.

On notera que cette plage de verrouillage augmente quand A_e augmente. Dans une logique de démodulation où la fréquence contient l'information, plus le signal informatif sera de grande amplitude, plus il faudra une grande plage de verrouillage, ce qui amènera, par exemple, à considérer une porteuse de plus grande amplitude A_p. Mais cela peut conduire à une instabilité de la PLL (voir plus haut).

On justifie maintenant l'Éq. (46). On cherche une solution telle que la PLL est verrouillée : $v_p(t) = A_p\cos(2\pi f_p t)$ et $v_e(t) = A_e\cos(2\pi f_e t + \phi)$. Dans ce cas, on obtient

$$v_F = \frac{kA_pA_e}{2}\cos(\phi), \tag{47}$$

en supposant que la composante haute fréquence du signal v_F est totalement filtrée, soit une fréquence d'oscillation de l'OCT

$$f_e = f_0 + \kappa_{\mathrm{PLL}}v_F = f_0 + \frac{\kappa_{\mathrm{PLL}}kA_pA_e}{2}\cos(\phi). \tag{48}$$

Comme $\cos(\phi) \in [-1, 1]$, on retrouve le résultat pour la plage de verrouillage. On notera que cette plage de verrouillage ne dépend que du comparateur de phase et des paramètres de l'OCT.

Pour rendre l'expérience plus quantitative, on pourra tracer Δf_e en fonction de A_e et effectuer une régression affine. On pourra alors vérifier que la pente coïncide avec la valeur attendue $\kappa_{\mathrm{PLL}}kV_0/2$ (le coefficient κ_{PLL} est égal au paramètre `Freq Dev` choisi, divisé par 5V), tandis que l'ordonnée à l'origine est compatible (aux incertitudes près) avec une valeur nulle.

b. Étude de la plage de capture

On définit une seconde plage qui s'appelle la plage de capture et qui correspond à l'intervalle de fréquences pour lequel la boucle se verrouille alors qu'elle n'est pas verrouillée initialement. On peut l'étudier à l'aide de l'expérience suivante, également décrite dans la Réf. [1] (p. 235).

> On propose de modifier la fréquence f_0, par exemple en l'augmentant, jusqu'à sortir de la plage de verrouillage. Une fois que la PLL n'est plus verrouillée, on pourra alors diminuer petit à petit la fréquence f_e jusqu'à observer l'accrochage et le verrouillage de la PLL. On pourra alors en déduire la valeur de la plage de capture Δf_c, et étudier sa dépendance avec l'amplitude A_e de la tension délivrée par l'OCT.

On doit constater un phénomène d'hystérésis, la plage de capture Δf_c étant inférieure à la plage de verrouillage. Il en résulte donc qu'il faut réaliser la manipulation précédente en faisant varier suffisamment lentement la fréquence pour déterminer correctement le seuil d'accrochage ou de décrochage de la PLL.

Dans l'hypothèse où $\Delta f_c \gg f_0$ (la fréquence de coupure du filtre passe-bas), on peut montrer que

$$2\Delta f_c = 2\sqrt{\Delta f_e f_0}. \tag{49}$$

On notera en particulier que la plage de capture dépend des propriétés du filtre passe-bas utilisé, contrairement à la plage de verrouillage. Avant de chercher à justifier cette relation, on peut au moins la comprendre qualitativement. Lorsque la boucle n'est pas verrouillée, et si f_e est une constante, alors la composante basse fréquence de v_F oscille à la fréquence $|f_e - f_0|$. Si $|f_e - f_0| \gtrsim f_0$, alors la tension v_F est filtrée par le filtre passe-bas, de sorte que $v_F \simeq 0$ et $f_e \simeq f_0$. La boucle ne sera donc pas verrouillée, dès lors que $|f_e - f_0| \gtrsim f_0$. Cela justifie pourquoi la plage de capture augmente quand la fréquence de coupure du filtre augmente. Par contre, ce raisonnement laisse penser que la plage de capture ne dépend que de la fréquence de coupure du filtre, avec $\Delta f_c \propto f_0$. Il faut faire un raisonnement plus rigoureux pour obtenir l'Éq. (49), ce qu'on propose ci-dessous.

Nous nous proposons de justifier l'Éq. (49) par un raisonnement simplifié[9]. Le raisonnement est également proposé dans la Réf. [4] (pp. 104-105). Lorsque la boucle n'est pas verrouillée, le signal v_F est de valeur moyenne nulle, d'amplitude faible et oscille à une fréquence $|f_e - f_0|$, tandis que $f_e = f_0$. Dans ce cas, on a $v_p(t) = A_p\cos(2\pi f_p t)$, et $v_e = A_e\cos(2\pi f_0 t + \phi)$. La tension v_F se met alors sous la forme

$$v_F(t) = \frac{kA_pA_e}{2}\left[\underline{H}(f_e - f_0)\cos\left[2\pi(f_e - f_0)t + \phi + \arg\underline{H}(f_e - f_0)\right]\right], \tag{50}$$

en supposant que le terme haute fréquence contribuant à v_F est entièrement filtré par le filtre passe-bas, et en notant $\underline{H}$ la fonction de transfert du filtre passe-bas. Cela conduit alors à une modification de la fréquence f_e instantanée d'oscillation de l'OCT :

$$f_e(t) = f_0 + \Delta f_e\left[\underline{H}(f_e - f_0)\right]\cos\left[2\pi(f_e - f_0)t + \phi + \arg\underline{H}(f_e - f_0)\right], \tag{51}$$

en utilisant l'Éq. (46) qui donne l'expression de la plage de verrouillage. On définit alors la plage de capture comme la fréquence $f_e = f_0 \pm \Delta f_c$ pour laquelle une solution avec $f_e = f_0$ apparaît. Il y aura alors verrouillage de la PLL si

$$\Delta f_c = \Delta f_e\left|\underline{H}(\Delta f_c)\right|. \tag{52}$$

9. En effet, le phénomène de capture est très complexe, car dynamique et non linéaire.

Pour le filtre *RC* réalisé expérimentalement, on a

$$\left|\underline{H}(\Delta f_c)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Delta f_c/f_0)^2}} \simeq \frac{f_0}{\Delta f_c}, \tag{53}$$

dans l'hypothèse où $\Delta f_c \gg f_0$ (ce qu'on justifiera à postériori). On aboutit alors à l'Éq. (49). En outre, la condition $\Delta f_c \gg f_0$ équivaut à $\Delta f_e \gg f_0$, ce qui est la limite dans laquelle on s'est placé pour donner l'Éq. (49).

3. Fonctionnement dynamique de la boucle à verrouillage de phase : application à la démodulation de fréquence

a. Principe de la démodulation

On peut désormais passer au cas dynamique, et montrer le principe de démodulation de fréquence. L'expérience est également décrite dans la Réf. [1] (pp. 236-237).

Liste du matériel :

- tout le matériel précédent pour la réalisation de la boucle à verrouillage de phase,
- un troisième générateur basses fréquences.

> On propose maintenant d'alimenter la boucle à verrouillage de phase avec un signal $v_e = v_m$ modulé en fréquence. Pour cela, on utilisera un deuxième OCT construit à l'aide deux générateurs basses fréquences (comme cela est décrit dans l'Exp. V). Pour le signal informatif, on prendra un signal sinusoïdal de fréquence $f_i = 2001$Hz et d'amplitude V_i. Pour le signal modulé, on choisira une fréquence de porteuse $f_p = 100$kHz et le paramètre `Freq Dev` aussi égal à 100kHz. On commencera par prendre $A_i = 100$mV, et on pourra alors observer le signal en sortie du filtre à l'oscilloscope. On pourra ensuite augmenter A_i ou faire varier f_i.

On doit alors retrouver le signal modulant lorsque $A_i = 100$mV. En effet, en supposant la PLL verrouillée, on a (voir l'Éq. (36))

$$f_e(t) = f_m(t) = f_p + \kappa A_i\cos(2\pi f_i t), \tag{54}$$

et donc la tension en sortie du filtre (et en entrée de l'OCT de la PLL) s'écrit

$$v_F(t) = \frac{f_e(t) - f_0}{\kappa_{\mathrm{PLL}}} = \frac{f_p - f_0}{\kappa_{\mathrm{PLL}}} + \frac{\kappa}{\kappa_{\mathrm{PLL}}}A_i\cos(2\pi f_i t) = \frac{f_p - f_0}{\kappa_{\mathrm{PLL}}} + \frac{\kappa}{\kappa_{\mathrm{PLL}}}v_i(t). \tag{55}$$

On retrouve, à une tension de décalage (*offset*) et un facteur proportionnel près, le signal informatif $v_i(t)$. La tension de décalage peut être annulée en prenant $f_0 = f_p$, c'est-à-dire en supposant que les OCTs qui permettent de générer le signal modulé et qui interviennent dans la PLL sont centrés sur la même fréquence.

Par contre, on doit observer que la démodulation ne fonctionne plus dès lors que A_i augmente trop, car la fréquence du signal modulé f_m sort de la plage de verrouillage. D'après les équations précédentes, rester dans la plage de verrouillage impose que $\kappa A_i \lesssim \Delta f_c$, où κ a été déterminé dans l'Exp. V. Pour les valeurs données ci-dessus, cela se produit quand $A_i \simeq 280$mV. De la même manière, on doit constater qu'il est plus difficile de reconstruire le signal informatif si sa fréquence f_i augmente au-delà de la fréquence de coupure du filtre *RC*. En effet, le raisonnement précédent a montré que v_F oscillait à la fréquence f_i, et ce signal n'est effectivement transmis par le filtre passe-bas que si $f_i \lesssim f_0$. Cette condition est analogue au cas de la démodulation d'amplitude. Si on veut démoduler des signaux de fréquence f_i plus grande, ou des signaux au spectre plus riche qu'une sinusoïde, il conviendra d'augmenter f_0. Il pourra alors être nécessaire d'utiliser un filtre d'ordre supérieur pour construire la PLL, afin d'atténuer la composante haute fréquence du signal en sortie du comparateur de phase.

b. Multiplexage (*)

On peut également montrer facilement le multiplexage dans le cas de la modulation de fréquence. On renvoie à l'expérience de multiplexage dans le cas de la modulation en amplitude pour le protocole. Pour éviter que les signaux informatifs ne se mélangent, il conviendra de choisir les fréquences des deux porteuses de telle sorte que leur écart soit supérieur à la largeur de la plage de verrouillage $2\Delta f_e$.

4. Retour sur la démodulation d'amplitude par détection synchrone et récupération de la porteuse (*)

Comme mentionné plus haut, pour effectuer en pratique une démodulation d'amplitude par détection synchrone, il faut reconstruire la porteuse, afin de s'affranchir du phénomène de *fading*. Pour cela, on peut utiliser une boucle à verrouillage de phase. Il est donc vivement conseillé de d'abord traiter l'Exp. IV, avant de revenir à cet élément de la démodulation d'amplitude.

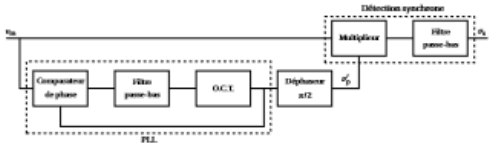


FIGURE 10 – Schéma de la démodulation d'amplitude d'un signal modulé en amplitude v_m avec récupération de la porteuse par une boucle à verrouillage de phase (PLL).

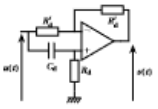


FIGURE 11 – Circuit déphaseur.

Le principe de la méthode est décrit dans la Réf. [7] (pp. 131-133) et dans la Réf. [4] (pp. 112-114). Il est également schématisé Fig. 10, et consiste à utiliser une boucle à verrouillage de phase (PLL) afin d'extraire du signal v_m modulé en amplitude le signal de porteuse. Nous nous restreignons au cas où le signal informatif comportait une composante continue, de sorte qu'il s'agit d'un signal modulé « avec porteuse ». Pour la récupération de la porteuse pour un signal modulé en amplitude « sans porteuse », on renvoie le lecteur à la Réf. [4] (pp. 114-115).

Le signal modulé en amplitude est envoyé en entrée d'une boucle à verrouillage de phase dont la fréquence centrale f_0 de l'OCT coïncide avec la fréquence f_p de la porteuse du signal modulé en amplitude. La PLL va alors « accrocher » sur la fréquence de la porteuse, et le signal délivré par l'OCT est un signal sinusoïdal de fréquence f_p, et déphasé de $\pi/2$ par rapport au signal de porteuse. Il faut donc déphaser le signal délivré par l'OCT de $\pi/2$ à l'aide d'un circuit déphaseur, afin d'obtenir un signal v_p' qui reproduit le signal de porteuse. Ce signal peut ensuite être utilisé pour effectuer la démodulation d'amplitude par détection synchrone (voir le montage de la Fig. 5) en le multipliant au signal modulé v_m puis en filtrant passe-bas le signal résultant. Cela permet alors de reconstruire le signal v_s qui coïncide avec le signal informatif.

Un exemple de circuit déphaseur est présenté Fig. 11. On peut déterminer sa fonction de transfert en régime sinusoïdal forcé $\underline{H_d}(j\omega) = \underline{V}(j\omega)/\underline{U}(j\omega)$, avec $u(t) = \mathrm{Re}\left[\underline{U}(j\omega)e^{j\omega t}\right]$, $v(t) = \mathrm{Re}\left[\underline{V}(j\omega)e^{j\omega t}\right]$, et ω la pulsation des signaux :

$$\underline{H_d}(j\omega) = -\frac{1 - j\omega R_d C_d}{1 + j\omega R_d C_d}, \tag{56}$$

dont le module vaut 1, et l'argument $\arg \underline{H_d}(j\omega) = \pi - 2\arctan(\omega R_d C_d)$. Ce filtre se comporte donc comme un passe-tout déphaseur, de gain unité et induisant un déphasage entre $u(t)$ et $v(t)$ dépendant de la fréquence et égal à $\arg \underline{H_d}(j\omega)$ à la pulsation ω. En particulier, ce déphasage vaut $\pi/2$ à la fréquence caractéristique $f_d = 1/(2\pi R_d C_d)$ du filtre. Il suffit alors de faire coïncider cette fréquence avec la fréquence f_p de la porteuse.

Liste du matériel :

- tout le matériel pour la détection synchrone,
- tout le matériel pour la boucle à verrouillage de phase,
- un amplificateur linéaire intégré sur boîtier,
- un condensateur de capacité $C_d = 1\,\mathrm{nF}$,
- deux résistances $R_d' = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- un rhéostat de résistance variable R_d P56.32,

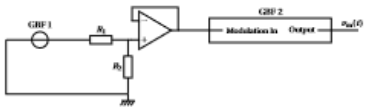


FIGURE 12 – Réalisation d'un modulateur FSK délivrant un signal modulé $v_m(t)$ à l'aide de deux générateurs basses fréquences et d'un pont diviseur de tension. Le premier GBF délivre le signal informatif, tandis que le second joue le rôle d'OCT.

- un générateur basses fréquences.

> On propose de réaliser le circuit électrique résumé Fig. 10, en reprenant la PLL étudiée jusqu'à présent, et où le déphaseur est donné Fig. 11. On prendra $R_d' = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $C_d = 1\,\mathrm{nF}$, et $R_d = 1{,}7\,\mathrm{k\Omega}$. On alimentera le circuit avec un signal v_m modulé en amplitude fourni par un générateur basses fréquences réglé en modulation AM interne. On pourra prendre une fréquence de porteuse $f_p = 100\,\mathrm{kHz}$, un signal informatif sinusoïdal de fréquence $f_1 = 1\,\mathrm{kHz}$, et un taux de modulation $m = 0{,}5$. On pourra observer les signaux v_p', v_m et v_s à l'oscilloscope.

On doit constater que le signal v_p' est un signal sinusoïdal de fréquence f_p, tandis qu'on arrive bien à démoduler, le signal v_s étant sinusoïdal à la fréquence f_1. Les valeurs de R_d et C_d ont été choisies afin de faire coïncider la fréquence du filtre déphaseur f_d avec celle de la porteuse. En réalité, il n'y a pas besoin d'avoir un accord exact entre f_d et f_p. En effet, si ce n'est pas le cas, le déphasage induit par le déphaseur est différent de $\pi/2$, mais permet quand même de réaliser la démodulation. Cependant, l'amplitude du signal démodulé sera plus faible [10], et il pourra être intéressant d'amplifier le signal démodulé en aval du dispositif de démodulation.

VII. Modulation / démodulation de signaux numériques (*) [MPs 42 et 45]

Dans cette section, on aborde la transmission de signaux numériques qui ne peuvent prendre que des valeurs discrètes (pour simplifier 0V ou 5V, correspondant respectivement au 0 logique et au 1 logique).

1. Modulation FSK

Il existe différentes technologies pour encoder l'information, une couramment encouragée étant la modulation FSK (*Frequency Shift Keying*). Cette dernière consiste à effectuer de la modulation de fréquence. Il suffit, pour cela, d'exciter un oscillateur commandé en tension avec le signal numérique informatif $v_1(t)$ qu'on souhaite transmettre. L'OCT délivre alors un signal périodique (par exemple sinusoïdal) de fréquence f_0 si $v_1 = 0\,\mathrm{V}$ (0 logique), et de fréquence f_1 si $v_1(t) = 5\,\mathrm{V}$ (1 logique). Pour illustrer le principe de la modulation FSK, on propose de réaliser l'expérience schématisée Fig. 12, également décrite dans la Réf. [3] (pp. 232-238).

Liste du matériel :

- une résistance $R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}$,
- un rhéostat de résistance variable R_2 P56.32,
- deux générateurs basses fréquences,
- un amplificateur linéaire intégré sur boîtier,
- un oscilloscope.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 12. On réglera le premier GBF pour qu'il émette un signal créneau entre 0V et 5V de fréquence $f_1 = 150\,\mathrm{Hz}$. Ce premier GBF sera relié à l'entrée `Modulation In` du second GBF, qui jouera le rôle d'oscillateur commandé en tension, par un pont diviseur de tension suivi d'un suiveur (pour l'adaptation d'impédance avec l'entrée de modulation externe du second GBF). Pour le pont diviseur de tension, on choisira $R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et R_2 variable de l'ordre de $2{,}2\,\mathrm{k\Omega}$. Pour l'OCT, on choisira une plage d'excursion en fréquence égale à sa fréquence centrale f_0 d'oscillation (fréquence de porteuse), qu'on prendra de l'ordre de $100\,\mathrm{kHz}$, et une amplitude d'oscillation de l'ordre de 4V. On observera alors à l'oscilloscope les signaux délivrés

10. On rappelle que l'amplitude du signal démodulé est proportionnel au cosinus du déphasage entre le signal de porteuse et le signal de même fréquence que la porteuse et utilisé pour la démodulation.

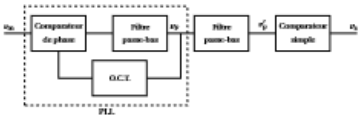


FIGURE 13 – Schéma de principe de la démodulation FSK.

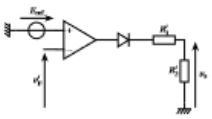


FIGURE 14 – Circuit électrique du circuit comparateur simple.

par les deux générateurs.

Le pont diviseur de tension permet de contrôler la valeur de la fréquence f_1 codant pour le 1 logique. La valeur R_2 a été choisie de sorte que $f_2 = 127\,0\,\mathrm{Hz}$. Ces deux fréquences correspondent aux fréquences utilisées pour la transmission de données numériques dans les lignes téléphoniques, comme indiqué dans la Réf. [4] (p. 122). Le choix de f_1 a été fait de sorte à avoir un débit d'information de 300 bit/s (ou 300 baud pour une communication sur un seul bit), ce qui est une valeur courante.

2. Démodulation FSK

Le principe de la démodulation FSK est présenté dans la Réf. [2] (pp. 238-241), et également schématisé Fig. 13. Il est analogue à la démodulation de fréquence, et utilise donc une boucle à verrouillage de phase (PLL). Il est donc fortement conseillé d'avoir d'abord réalisé l'Exp. VI. Comme pour la démodulation de fréquence, le signal en sortie du filtre passe-bas de fréquence de coupure f_D de la boucle à verrouillage de phase fournit un signal informatif déformé de fréquence f_c. Sur chaque demi-période, ce signal v_D est de valeur moyenne $v_{D,2}$ ou $v_{D,1}$, avec

$$v_{D,2} = \frac{f_D - f_0}{\kappa_{PLL}}, \quad v_{D,1} = \frac{f_1 - f_0}{\kappa_{PLL}}, \tag{57}$$

et f_0 la fréquence centrale d'oscillation de l'OCT de la PLL. Il présente néanmoins des oscillations haute fréquence (de fréquence de l'ordre de $f_0 + f_D$, provenant de la multiplication des signaux au niveau du comparateur de phase de la PLL) sur chaque demi-période (voir un exemple dans la Réf. [3]), et c'est pour cela qu'on ajoute un second filtre passe-bas en aval de fréquence de coupure f'_D. Ce dernier délivre un signal v'_D de fréquence f_c relativement constant sur chaque demi-période. Enfin, un comparateur simple renvoie 0 V ou 5 V selon que le signal est inférieur ou supérieur à une tension de référence prise égale à la valeur moyenne du signal v'_D sur une période $1/f_c$. On comprend ainsi qu'on ne pourrait pas brancher directement le filtre passe-bas de la PLL au comparateur simple, car les oscillations haute fréquence de v_D dont l'amplitude est de l'ordre de $v_{D,2} - v_{D,0}$ conduiraient à des alternances intempestives du comparateur simple.

Le circuit de la PLL est donné Fig. 9, tandis que le second filtre passe-bas sera un filtre $R'C'$, comme celui de la PLL. Enfin, le schéma électrique du comparateur simple à AL1 est donné Fig. 14. La diode et le pont diviseur de tension en aval de l'AL1 permet d'avoir une tension v_s qui ne peut prendre que les valeurs 0 V (0 logique) et 5 V (1 logique).

Liste du matériel :
- tout le matériel de l'expérience précédente sur la modulation FSK,
- un multiplieur analogique P 4.1 . 15,

- une résistance $R = 20\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R' = 20\,\mathrm{k\Omega}$,
- un condensateur de capacité $C = 22\,\mathrm{nF}$,
- un condensateur de capacité $C' = 100\,\mathrm{nF}$,
- deux amplificateurs linéaires intégrés sur boîtier,
- une diode de redressement P 2.9 . 4,
- une résistance $R'_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R'_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- un générateur basses fréquences,
- une source continue de tension.

On propose de réaliser le circuit électrique de la Fig. 13. On l'alimentera avec un signal modulé en fréquence FSK généré à l'aide deux générateurs basses fréquences, comme cela a été expliqué dans le paragraphe précédent (on s'y référera pour les paramètres). Pour la boucle à verrouillage de phase, on prendra $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $C = 22\,\mathrm{nF}$ et un GBF comme oscillateur commandé en tension. Pour ce dernier, on réglera la fréquence centrale f_0 sur la fréquence f_p de la porteuse, et son excursion maximale en fréquence sur 500 Hz. Ensuite, on pourra prendre pour le second filtre passe-bas une résistance $R' = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et un condensateur de capacité $C' = 100\,\mathrm{nF}$. Enfin, pour le comparateur simple, on prendra $R'_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$, $R'_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, et E_{ref} correspondant à la valeur moyenne du signal v'_D qu'on mesurera à l'oscilloscope (typiquement autour de 400 mV). On pourra alors observer les signaux v_D, v_D, v'_D et v_s à l'oscilloscope.

On doit observer que les signaux v_s et v_1 sont similaires, tandis que les signaux v_D et v'_D ont les propriétés mentionnées plus haut. Un exemple de réalisation expérimentale avec du matériel d'enseignement est donné Fig. A2.

Les valeurs de R' et C' sont choisies de sorte à avoir une fréquence de coupure $f'_D = 1/(2\pi R'C')$ de l'ordre de f_c. De la même manière, les valeurs de R et C sont choisies afin que le filtre passe-bas de la PLL ait une fréquence de coupure $f_D = 1/(2\pi RC)$ lui permettant de filtrer partiellement la composante haute fréquence de la tension en sortie du comparateur de phase. Cependant, on ne peut pas trop diminuer f_D sous peine de rendre la PLL (vue comme système contre-réactionné dont les variables dynamiques sont les fréquences, voir l'Exp. VI) peu stable [4]. En effet, diminuer f_D revient à améliorer la rapidité du système au détriment de la stabilité, ce qui est un phénomène général pour les systèmes asservis. Enfin, pour l'OCT de la PLL, on choisit une excursion maximale en fréquence de telle sorte que la fréquence f_1 du signal modulé appartienne à la plage de verrouillage.

3. Modulation et démodulation d'un signal numérique réaliste

On peut ensuite tenter de moduler un signal numérique plus réaliste, correspondant à une succession aléatoire de 0 (correspondant à une tension de 0 V) et de 1 (correspondant à une tension de 5 V), qu'on échantillonnera à la fréquence f_c.

Liste du matériel :
- deux amplificateurs linéaires intégrés sur boîtier,
- un échantillonneur-bloqueur P 4.1 . 13,
- une diode de redressement P 2.9 . 4,
- une résistance $R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$,
- une résistance $R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- deux générateurs basses fréquences,
- tout le matériel précédent pour la démodulation FSK,
- un oscilloscope.

On commencera par générer un signal numérique constitué d'une succession aléatoire de 0 et de 1, qu'on échantillonne à la fréquence $f_c = 150\,\mathrm{Hz}$. Pour cela, on alimentera un deuxième circuit comparateur simple représenté Fig. 14 à l'aide d'un générateur basses fréquences délivrant un signal bruit blanc de largeur spectrale de l'ordre de quelques centaines de hertz et d'amplitude de l'ordre de 10 V. On branchera le GBF sur l'entrée inverseuse de l'AL1, tandis que l'entrée non inverseuse sera reliée à la masse. On prendra $R'_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}$ et $R'_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$.
On alimentera ensuite un échantillonneur-bloqueur avec le signal aux bornes de la résistance R'_2. Cet échantillonneur-bloqueur sera commandé par un second générateur basses fréquences délivrant des impulsions à la fréquence $f_c = 150\,\mathrm{Hz}$.
On pourra alors remplacer le GBF1 dans le circuit de la Fig. 12 par le signal en sortie de l'échantillonneur-bloqueur,

et réaliser la modélisation de ce signal numérique plus réaliste. On pourra par la suite démoduler ce signal avec le circuit de la Fig. 13, et observer les différentes tensions à l'oscilloscope.

On vérifie qu'on réussit là encore à récupérer le signal modulant (à un déphasage près).

VIII. Principe de fonctionnement d'une fibre optique à saut d'indice (*) [MP 31]

Liste du matériel :

- Un laser.
- Une plaque de verre fine.
- Un écran.
- Une plaquette graduée angulairement / un plateau tournant gradué.

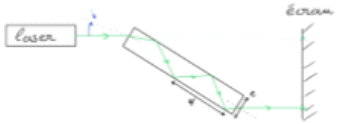


Figure 15 – Schéma du montage expérimental vu de dessus.

Cette expérience introductive permet d'illustrer le principe de la fibre optique et donc de la propagation guidée d'une source lumineuse à des fins de transmission d'informations, tout en réalisant une manipulation quantitative permettant de remonter aux propriétés optiques du verre utilisé.

On commencera par fixer le laser à une potence pour éviter que celui-ci ne bouge et on placera un écran à une distance de quelques dizaines de centimètres, pour éviter les réflexions hasardeuses.
Placer ensuite sur le chemin du laser une plaque de verre fine, suspendue à une pince pour la maintenir verticale. On placera en dessous de celle-ci une plaquette graduée angulairement, afin de repérer l'angle lorsque la plaque de verre va pivoter. Initialement, la plaque est orientée parallèlement à la direction du laser, de telle sorte que le faisceau soit en incidence normale, et on pourra marquer d'un point sur l'écran, la sortie du faisceau laser.
On viendra ensuite graduellement pivoter de quelques degrés la plaque de verre. Du fait de la différence d'indices optiques entre l'air et le verre, on s'attend à avoir une réflexion totale pour toutes les incidences . On observe sur la surface de la plaque de verres différents points lumineux équirépartis, dont la distance et le nombre dépendent de l'angle incidence i. Ils sont la manifestation des points où ont lieu les réflexions totales, dont une partie de la lumière diffuse dans le verre dû à sa faible épaisseur . D'un modèle d'optique géométrique, on peut alors déduire l'angle de réfraction a_r de la lumière lors de son entrée dans la plaque de verre, en fonction de l'épaisseur de la plaque et de la distance entre deux points consécutifs.
Une régression linéaire permet alors de remonter à l'indice optique du verre utilisé et obtenir ainsi une expérience quantitative. On insistera également sur la propriété - essentielle dans ce montage - que la lumière est guidée par la fibre optique. On mettra cela en évidence par le décalage progressif du faisceau laser au sortir de la plaque de verre.

Références

[1] E Bernardot et C. Noûs, « Dispersion dans un câble coaxial », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 1043 (2022).
[2] J.-M. Donnini et L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale. Tome IV : Électricité*, Pierron (1996).
[3] R. Duffait et J.-P. Lièvre, *Agrégation de Sciences Physiques - Expériences d'électronique*, Bréal (1999).
[4] M. Girard, *Boucles à verrouillage de phase*, McGraw-Hill (1991).
[5] R. Le Goff, « Modulation d'amplitude, détection synchrone », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 771 (1995).
[6] E Manneville et J. Esquieu, *Théorie du signal et composants*, Dunod (1993).
[7] E Manneville et J. Esquieu, *Systèmes bouclés linéaires, de communication et de filtrage*, Dunod (1998).

[8] A. Noël, « Quelle fréquence avez-vous dit? Données techniques et numériques sur les radiofréquences », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 771 (1995).
[9] J. Taboureau, « Modulation d'amplitude, démodulation », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 771 (1995).
[10] B. Velay, « Introduction à la modulation », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 771 (1995).
[11] B. Velay, « Simulation d'une modulation d'amplitude avec le logiciel PSPICE », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 771 (1995).

Exemples de résultats expérimentaux

Figure A1 – Fonction de transfert en gain et en phase du câble coaxial en fonction de la fréquence (voir l'Exp. I).

Figure A2 – Signaux u_1, u_2, u_2' et u_3 pour l'expérience de démodulation de signaux numériques FSK, dans le cas d'un signal informatif u_1 créneau entre 0 V et 5 V, et de fréquence $f_1 = 150$ Hz (voir l'Exp. VII).

Électromagnétisme

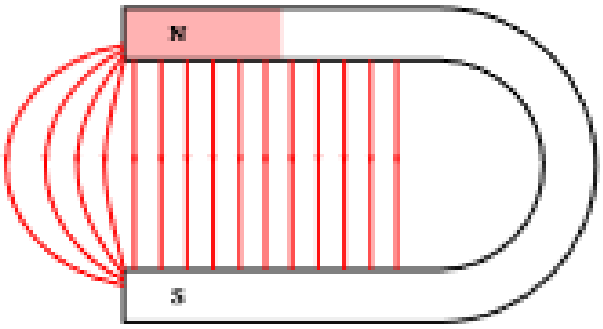
dimanche 17 novembre 2024 20:16

TP_Electro magnetis...

École normale supérieure de Lyon

Préparation à l'agrégation de Physique

Fascicule de TP
Électromagnétisme



École normale supérieure — Lyon 2024-2025
version du 19 août 2024

Préambule

Ce fascicule contient les énoncés des huit séances de travaux pratiques d'électromagnétisme. Il a pour but de vous aider à réaliser des expériences de base, que vous pourrez présenter lors de vos leçons et montages. Chaque TP contient de nombreuses expériences, et il sera difficile de toutes les réaliser au cours d'une seule séance. Les expériences dites de "seconde lecture" ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pourrez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Cependant, ce fascicule n'est pas exhaustif, et il est tout à fait possible (et même conseillé) de développer de nouvelles expériences au cours de l'année. Vous pourrez alors demander aux responsables, encadrants et techniciens des conseils pour concevoir et monter de nouvelles expériences pertinentes.

Une séance de TP se prépare à l'avance. Il faut arriver en séance de TP en sachant quelles expériences vous voulez réaliser, pourquoi vous les faites et avoir compris un minimum la théorie sous-jacente. Le jour de l'oral, les seules ressources auxquelles vous aurez accès de façon certaine sont les ouvrages qui seront envoyés au lycée où se déroulent les épreuves, ainsi que les documents envoyés par les différents centres de préparation à l'agrégation (voir ci-dessous). Il est donc extrêmement important que vous ne vous limitiez pas à la lecture de ce document, mais que vous connaissiez les livres dans lesquels trouver la description de ces expériences et vous portiez un regard critique sur celles-ci. Ce fascicule est une base de travail mais les manipulations que vous allez présenter le jour J doivent être personnelles, absolues et réfléchies.

Ce fascicule est une sélection de manipulations non exhaustive qui peut aussi contenir quelques erreurs ou oublis. Toute suggestion d'ajouts, de corrections, ... est la bienvenue; merci de contacter pour cela le responsable des TP. Les futures promotions d'agrégatifs vous en sauront gré.

Bon travail à tous,

Christophe Winisdoerffer, responsable de la préparation à l'agrégation de Physique

C'est à Charles-Edouard Lecomte, Vincent De Zotti et Valentin Rabau qu'il revient d'avoir commis la version originale de ce fascicule. Qu'ils en soient ici tout particulièrement remerciés. Merci également à tous ceux, étudiants ou encadrants, qui, d'une façon ou d'une autre, ont permis d'apporter des améliorations successives à ce document.

Afin de prendre en compte les modifications des règles du concours apportées par les jurys successifs, une refonte majeure de ce document a depuis été entreprise ; ce travail est encore en cours. À terme, il existera deux versions de ce fascicule de TP : une version "sobre", susceptible d'être acceptée par le jury comme ressource accessible pendant les oraux du concours, et une version enrichie de discussions détaillées, de remarques, d'exemples, ... Ces informations apparaissent en couleur dans le document accessible sur le portail des études, afin d'attirer votre attention sur le fait qu'à terme, vous devez pouvoir vous en passer en ayant acquis la distance nécessaire par rapport aux expériences que vous présentez.
C'est à Benjamin Guisellin que l'on doit l'essentiel du travail effectué jusqu'à présent, et c'est donc à lui que doivent s'adresser les remerciements de tous ceux qui en profiteront!

Mise en garde

Les TP décrits dans ce fascicule ont, comme finalité, de permettre aux étudiants préparant l'agrégation non seulement de développer leurs compétences expérimentales, mais également d'approfondir leur compréhension de la physique. Il s'agit donc d'un objectif de formation beaucoup plus large que ne pourraient l'être des "fiches" adaptées à chaque montage apparaissant au concours. C'est la raison pour laquelle le lecteur est souvent renvoyé vers des références extérieures (pour la description précise d'un protocole, la justification d'une formule, ...), lui permettant ainsi d'élargir sa culture bibliographique, ou que des questions sont posées sans que les réponses ne soient données dans l'énoncé. Il appartient ensuite à chacun d'identifier, pour l'ensemble des expériences proposées, dans quel(s) contexte(s) elles pourraient être exploitées. Évidemment, cela nécessite de la part de chaque étudiant d'être acteur de sa propre formation, en préparant en amont chaque séance de TP qui, encore une fois, ne saurait se limiter à seulement suivre un protocole...

À l'issue de ce travail, les étudiants auront développé, en plus de leurs compétences expérimentales, un point de vue élargi sur différents domaines de physique. Cela devrait leur permettre d'envisager de façon sereine l'épreuve du "Montage" de l'agrégation, en consultant éventuellement des ressources plus spécifiques mises à disposition sur le site du concours. Mais au-delà de cet exercice, c'est l'ensemble de leur culture (théorique et expérimentale) qui profitera du travail accompli, *avant*, *pendant* et *après* chaque séance de TP.

Table des matières

(TP 1) Production et mesure de champs magnétiques
(TP 2) Milieux magnétiques
(TP 3) Conversion électrique
(TP 4) Moteurs et génératrices
(TP 5) Capteurs et mesures physiques
(TP 6) Hyperfréquences
(TP 7) Matériaux
(TP 8) Haut-parleurs

Production et mesure de champs magnétiques

Table des expériences

I.	Champ magnétique créé par un aimant permanent	3
II.	Champ magnétique créé par une bobine	3
III.	Champ magnétique créé par un électroaimant	5
IV.	Mesure de champs magnétiques	6
V.	Mesure du champ magnétique terrestre (*)	11

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Champ magnétique créé par un aimant permanent

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (chap. Ferromagnétisme) pour une présentation générale.
Les matériaux ferromagnétiques durs ont la capacité de conserver un champ magnétique rémanent B_r en l'absence d'excitation magnétique extérieure. Ils sont utilisés pour produire des aimants permanents. Les aimants permanents ont de nombreuses applications : disque dur, haut-parleur, moteur... Le champ magnétique produit par un aimant peut être intense, mais il est difficile de le faire varier. On préfèrera dans ce cas le générer avec une bobine.

1. Visualisation des lignes de champ

Liste du matériel :

- les aimants permanents P63,
- la plaquette P63.5,
- un teslamètre P64.34.

> Observer la direction des lignes de champs produites par des aimants permanents de différentes géométries (aimant en fer droit, aimant en fer en U et aimant en néodyme par exemple) en les posant sur une plaquette composée de petites boussoles (il est possible de projeter cette expérience en posant la plaquette sur un rétroprojecteur).
> Mesurer l'ordre de grandeur du champ magnétique rémanent B_r de chaque aimant avec un teslamètre.

Comme le champ est vectoriel, la mesure doit être réalisée en plaçant l'extrémité de la sonde perpendiculairement au champ $\vec{B}$. On obtient typiquement des champs de 10 à 100 mT pour ces aimants.

II. Champ magnétique créé par une bobine

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1] (chap. Magnétostatique) et Réf. [2] (pp. 89-90) pour une présentation générale.

Liste du matériel :

- les bobines de Helmholtz P64.18,
- un générateur de courant continu P53.13,

► un teslamètre P64 . 34.

Pour le dispositif des bobines de Helmholtz P64 . 18, chaque bobine est constituée de $N = 95$ spires et a un rayon égal à $R = 6{,}5$ cm.

1. Bobine plate

D'après la loi de Biot et Savart, une bobine plate constituée de N spires de rayon R et parcourue par un courant I produit sur son axe x un champ magnétique :

$$B(x) = \frac{\mu_0 N I}{2R}\left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2}. \tag{1}$$

> Relier l'une des deux bobines de Helmholtz à un générateur de courant continu, et éloigner l'autre bobine pour le moment. Alimenter le circuit avec une intensité $I = 5$ A. L'intensité est mesurée à l'aide d'un ampèremètre en série ; on prendra soin de ne pas dépasser $I = 7$ A, et de s'assurer qu'elle ne varie pas au cours de l'expérience. Mesurer le champ magnétique en différentes positions x sur l'axe de la bobine. Le teslamètre P64 . 35 permet de fixer la sonde sur l'axe du dispositif. Régler la mesure sur B_x, calibre sur 20 mT, et réaliser la mise à zéro loin de la bobine. Ajuster les données selon un modèle :
>
> $$B(x) = a \times \left(1 + (x - b)^2 / R^2\right)^{-3/2}. \tag{2}$$

Le paramètre b permet de prendre en compte un éventuel décalage de l'origine. Avec $N = 95$ et $R = 6{,}5$ cm, on peut remonter à la valeur $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m.

La modélisation est en bon accord avec les valeurs expérimentales car la bobine est plate, ce ne serait pas le cas pour un solénoïde étendu. Le champ produit est maximal au centre de la bobine, mais il décroît rapidement en s'éloignant. Pour obtenir un champ quasi-constant, il faut alimenter les deux bobines.

2. Bobines de Helmholtz

Le dispositif des bobines de Helmholtz est constitué de deux bobines identiques de même rayon R, de même axe, distantes de R et parcourues par la même intensité I de manière à obtenir les deux champs magnétiques dans le même sens. Le champ résultant entre les deux bobines est alors quasi-constant et vaut :

$$B(|x| \leq R) \approx \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_0 N I}{R}. \tag{3}$$

> Espacer les deux bobines de Helmholtz d'une distance $d = R = 6{,}5$ cm, puis les alimenter toutes les deux en série avec le générateur, de manière à obtenir les deux champs magnétiques dans le même sens (alimenter les bobines l'une après l'autre pour vérifier).
> Pour un courant $I = 5$ A, mesurer le champ B en différentes positions x. Constater qu'il est à peu près constant entre les deux bobines, puis le comparer à sa valeur théorique.

Le dispositif des bobines de Helmholtz permet de produire un champ quasi-constant (dans une certaine région de l'espace), mais il peut également permettre d'obtenir un gradient de champ constant dans la configuration dite « anti-Helmholtz ».

3. Bobines en configuration anti-Helmholtz

En inversant le sens du courant pour l'une des bobines de Helmholtz, on obtient des bobines en configuration « anti-Helmholtz ». Le champ résultant entre les deux bobines est alors à gradient constant et vaut :

$$B(|x| \leq R) \approx \frac{48}{25\sqrt{5}} \frac{\mu_0 N I}{R^2} x. \tag{4}$$

> Inverser les branchements de l'une des bobines de Helmholtz pour passer en configuration anti-Helmholtz. Pour un courant $I = 5$ A, mesurer le champ $B(x)$ pour différentes positions x. Constater qu'il évolue linéairement entre les deux bobines, puis comparer le gradient à sa valeur théorique.

Le champ magnétique produit par une bobine est facilement contrôlable, mais son amplitude est faible (environ 0,1 T au maximum). Pour obtenir des champs intenses et contrôlés, nous allons coupler les champs produits par des bobines aux propriétés des matériaux ferromagnétiques : c'est le principe de l'électroaimant.

III. Champ magnétique créé par un électroaimant

Nous renvoyons le lecteur à la BOL [1] (chap. Électroaimant) pour une présentation générale.
Les électroaimants permettent de produire des champs magnétiques très intenses, pouvant atteindre plusieurs dizaines de teslas. Ils sont utilisés dans beaucoup d'applications : moteur, relais électromécanique, RMN, sustentation magnétique...

Liste du matériel :

- **l'électroaimant P66.30,**
- **les pièces plates cylindriques (dans la boîte P66.10),**
- **un teslamètre P64.34,**
- **l'alimentation P53.8 (courant max. : ~ 2 A) ou l'alimentation P53.13 (courant maximal plus élevé, à brancher en série avec un rhéostat de $\leq 50\,\Omega$).**

⚠ L'électroaimant P66.30 est ancien et mal isolé, il faut éviter de le toucher lorsqu'il est alimenté !
⚠ Attention, ne jamais éteindre brutalement le générateur de l'électroaimant : l'inductance des bobines étant importante, une variation brutale d'intensité provoque une surtension qui risque de l'endommager. Il faut réduire progressivement l'intensité jusqu'à zéro avant de l'arrêter.

1. Principe

Le principe d'un électroaimant est illustré en figure 1. Il est constitué d'un circuit magnétique de longueur L, ouvert au niveau d'un entefer d'épaisseur e, et enlacé par une ou plusieurs bobines comprenant au total N spires alimentées par un courant I.

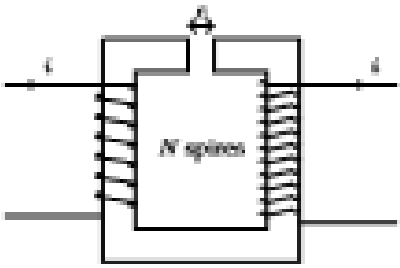


Figure 1 – Principe d'un électroaimant.

Le circuit, composé d'un matériau ferromagnétique (fer doux le plus souvent), permet d'obtenir un champ magnétique intense et de le canaliser le long du circuit. Le fer doux présente l'avantage d'avoir une hystérésis[1] magnétique faible, et il peut être feuilleté (assemblage de fines plaques les unes sur les autres) pour réduire l'apparition de courant de Foucault lorsqu'il est alimenté en courant alternatif.
En faisant l'approximation que le champ magnétique B est constant et continu dans le fer et l'entefer, on a :

$$B = \mu_0 \mu_r H_{fer} = \mu_0 H_{entefer} \tag{5}$$

1. On dit bien sûr et non sur hystérésis.

En appliquant le théorème d'Ampère le long d'une ligne de champ, on obtient alors $B_{fer}L + B_{entrefer}e = NI$, et on en déduit :

$$B = \frac{\mu_0 N I}{e + L_f/\mu_r}. \tag{6}$$

La perméabilité relative μ_r du fer doux est généralement très grande (de 10^3 à 10^4). On peut alors considérer que $e \gg L_f/\mu_r$ pour un entrefer d'épaisseur supérieure à quelques millimètres, d'où un champ magnétique :

$$B \simeq \frac{\mu_0 N I}{e}. \tag{7}$$

Sur la plupart des électroaimants, il est possible de changer la forme des pièces de l'entrefer. On préfèrera utiliser des pièces plates (cylindriques) pour obtenir un champ uniforme sur toute la surface, et des pièces tronconiques (troncs de cônes) pour obtenir un champ plus intense mais non uniforme.

2. Caractéristique $B = f(e)$

> Viser les pièces plates cylindriques de chaque côté de l'entrefer de l'électroaimant. Comme l'épaisseur de l'entrefer e est difficile à mesurer directement, il est plus simple de mesurer la distance e' entre les carcasses des deux bobines, puis de soustraire la largeur e_0 des pièces plates. Rapprocher les deux bobines jusqu'à ce que les pièces plates soient en contact, puis mesurer au pied à coulisse la largeur e_0 entre les carcasses. Écarter ensuite l'entrefer de quelques centimètres.
> Régler le zéro du teslamètre `F64.34` loin de l'électroaimant avant de commencer les mesures : appuyer sur MENU, sélectionner `Utilities` avec le bouton NEXT, puis `Null`, et appuyer sur RESET. Placer l'extrémité de la sonde dans l'entrefer perpendiculairement au champ. Alimenter les deux bobines de l'électroaimant avec une intensité $I \simeq 3$ A, mesurée à l'aide d'un ampèremètre placé dans le circuit. Mesurer le champ B pour différentes largeurs de l'entrefer e comprises entre 2 et 7 cm. Il est conseillé de toujours moyenner deux mesures au teslamètre : celle donnée avec la sonde dans un sens, et celle donnée après l'avoir retournée de 180°. Cela permet de compenser les problèmes d'alignement des soudures de la sonde (nous reviendrons sur ce point à la fin de ce TP). Tracer B en fonction de $1/e$ et constater la linéarité. On peut tenter de remonter au nombre de spires N de l'électroaimant par régression linéaire (1300 spires environ, nous n'avons pas accès à sa valeur constructeur).

Remarque : pour des petites valeurs de e, l'approximation $e \gg L_f/\mu_r$ n'est plus valable, le champ tend alors vers une constante et s'éloigne de la linéarité en fonction de $1/e$. Nous ne pouvons pas observer cet effet à cause de la taille de la sonde.

3. Caractéristique $B = f(I)$

Comme tout matériau ferromagnétique, le circuit de l'électroaimant est soumis à une hystérésis. Celle-ci est faible car il est en fer doux, mais elle reste visible. Pour éviter cet effet et rester sur la même branche du cycle d'hystérésis, nous allons tracer la caractéristique $B = f(I)$ de l'électroaimant avec des intensités toujours croissantes.

> Fixer la largeur de l'entrefer à $e = 2$ cm. Pour des intensités I croissantes allant de 1 à 8 A, mesurer le champ B (en moyennant les mesures réalisées dans les deux sens avec la sonde). Attention à ne pas réduire l'intensité durant toute la série de mesure, pour rester sur la même branche du cycle d'hystérésis. Tracer la courbe $B = f(I)$. Observer la linéarité aux faibles intensités, puis le début de la saturation du matériau ferromagnétique (au-delà de 5 A environ). Modéliser la courbe $B = f(I)$ par un polynôme d'ordre 3 (au plus) et noter ses coefficients, ils nous serviront d'étalonnage de l'électroaimant pour la suite de ce TP.

IV. Mesure de champs magnétiques

Parmi les différents dispositifs de mesure de champ magnétique, la sonde à effet Hall est le plus utilisé aujourd'hui. Le teslamètre commercial utilisé précédemment en est un exemple, et nous allons étudier son fonctionnement. Dans une seconde partie, nous étudierons le principe du fluxmètre, qui réalise une mesure intégrée et s'avère utile pour mesurer par exemple le champ magnétique à l'intérieur d'un matériau.

1. La sonde à effet Hall

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1] (chap. Champ magnétique et chap. Conduction) et Réf. [3] (chap. Semi-conducteur) pour une présentation générale.

a. Principe

Tension de Hall Considérons une plaque constituée d'un matériau métallique ou semi-conducteur, de dimensions $\{l_x, l_y, l_z\}$, parcourue par un courant i dans la direction $\vec{e}_x$, comme représenté sur la figure 2.

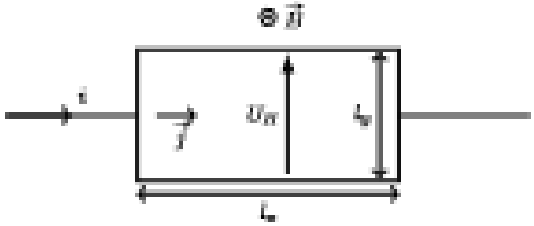


Figure 2 – Principe de l'effet Hall.

Lorsque la plaque est soumise à un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$, les porteurs de charges (électrons et/ou trous) de charge q qui se déplace à la vitesse $\vec{v} = v\vec{e}_x$ subissent une force de Lorentz $\vec{F}_L = q\vec{v} \wedge \vec{B} = -qvB\vec{e}_y$. Ils s'accumulent alors sur une face de normale $\vec{e}_y$ et engendrent un champ électrique $\vec{E}_H = E_H\vec{e}_y$, dit champ de Hall. Notons n la densité de porteurs de charge, la densité de courant s'exprime :

$$\vec{j} = nq\vec{v} = \frac{i}{l_y l_z}\vec{e}_x, \tag{8}$$

d'où :

$$\vec{F}_L = -\frac{iB}{nl_y l_z}\vec{e}_y. \tag{9}$$

En régime permanent, la force exercée par le champ électrique sur les porteurs compense la force de Lorentz, soit $q\vec{E}_H + \vec{F}_L = \vec{0}$. On déduit l'expression du champ de Hall :

$$E_H = \frac{iB}{nql_y l_z}. \tag{10}$$

La différence de potentiel entre les deux faces dans la direction y est appelée tension de Hall, elle s'exprime :

$$U_H = \int_0^{l_y} E_H\,\mathrm{d}y = \frac{iB}{nql_z} = R_H\frac{iB}{l_z}, \tag{11}$$

avec $R_H = \frac{1}{nq}$ la constante de Hall. En connaissant les propriétés géométriques et électroniques de la plaque, on peut donc remonter au champ magnétique B à partir de la mesure de la tension de Hall U_H. C'est le principe de la sonde à effet Hall.

Intérêt des semi-conducteurs La tension de Hall est inversement proportionnelle à la densité de porteurs de charge du matériau. Dans le cas d'un métal, cette densité est importante, de l'ordre de 10^{29} m^{-3}, ce qui rend la mesure de la tension de Hall difficile. C'est pour cette raison que la plupart des sondes à effet Hall sont constituées de matériaux semi-conducteurs, pour lesquels la densité de porteurs de charge est de l'ordre de 10^{21} m^{-3}. La tension de Hall est alors plus facile à mesurer.

Défaut d'alignement des soudures Lorsque l'on mesure un champ au teslamètre, si l'on mesure la tension de Hall entre deux pointes (deux soudures) qui ne sont pas parfaitement alignées selon l'axe y, on obtient une tension $U = U_H + U_{dim}$ qui contient un terme résistif supplémentaire U_{dim}. Pour s'affranchir de U_{dim}, on tourne la sonde de 180°, ce qui inverse le sens du champ B et donc la tension U_H. La mesure entre les deux pointes donne alors $U = -U_H + U_{dim}$. En moyennant les deux mesures (en valeur absolue), on retrouve U_H.

b. Sonde à effet Hall en germanium

Nous allons mesurer la tension de Hall aux bornes d'une plaquette en germanium dopé P.

Liste du matériel :

- **le module P64.36,**
- **la plaquette en germanium P64.30,**
- **le générateur P64.37,**
- **un voltmètre Fluke 187 P69.25,**
- **l'électroaimant P66.30.**

⚠ Attention, la soudure reliant la plaque de germanium au circuit est fragile, il faut donc manipuler la plaquette avec précaution et éviter de lui faire subir des chocs.

> Insérer la plaquette dans le module, et alimenter les bornes à l'arrière du module sous 12 V exclusivement avec le générateur. Si la diode correspondante au chauffage est allumée, il faut l'éteindre en appuyant sur le bouton à l'arrière du module. L'intensité i dans le circuit est contrôlable à l'aide de la molette `Ip`, sa valeur s'affiche sur le module. On passe de l'affichage de l'intensité à celui de la température à l'aide du bouton `Display`. Régler l'intensité sur $i \approx 50$ mA à l'aide de la molette. Mesurer la tension de Hall U_H avec un voltmètre. Elle doit être nulle lorsque le champ est nul, si ce n'est pas le cas on peut utiliser la molette U_H `Comp` pour régler le zéro. Insérer la plaquette entre les pièces plates de l'entrefer de l'électroaimant, on conserve une épaisseur de l'entrefer $e = 2$ cm. Il faut utiliser des câbles coudés pour mesurer la tension U_H si on ne veut pas être gêné par les bobines.
> Pour des intensités I croissantes dans l'électroaimant allant de 1 à 8 A, mesurer la tension U_H. On compense les problèmes d'alignements des soudures en retournant la sonde pour chaque intensité et en réalisant la moyenne des deux mesures comme précédemment.
> Tracer U_H en fonction de I, puis en fonction de B à l'aide des coefficients de la modélisation de la courbe d'étalonnage de l'électroaimant. On obtient une droite. En déduire la constante de Hall R_H du germanium (sachant que $L_z = 1$ mm), puis sa densité de porteurs de charge n_{Ge} (de l'ordre de 7.10^{20} m^{-3} à température ambiante).

On peut également remonter à la mobilité μ des porteurs de charge à partir de la résistivité ρ de la plaque par la relation :

$$\mu = \frac{1}{\rho n q}. \tag{12}$$

Les électrons sont les porteurs de charge majoritaires du germanium dopé, ils ont une mobilité tabulée $\mu \approx 0{,}38$ m^{2}V^{-1}s^{-1}.

> Retirer la plaque de germanium de l'électroaimant, puis mesurer sa résistance R_{Ge} à l'ohmmètre (entre la borne jaune et la borne blanche U_H du module). Sachant que $L_x = 10$ mm, $L_y = 20$ mm et $L_z = 1$ mm, en déduire sa résistivité $\rho = R_{Ge}\frac{L_y L_z}{L_x}$ (de l'ordre de 3.10^{-2} Ω.m). Remonter ensuite à la mobilité μ des porteurs de charge.

c. Évolution avec la température (en seconde lecture)

Il est possible d'étudier l'évolution de la densité de porteurs de charge d'un semi-conducteur avec la température. En effet, à basse température le germanium à un comportement extrinsèque, sa densité de porteurs de charge est constante. À l'inverse, à haute température le germanium à un comportement intrinsèque, sa densité de porteurs de charge évolue alors telle que :

$$n_{Ge} \propto T^{3/2} e^{-\varepsilon_g/2kT} \propto e^{-\varepsilon_g/2kT}, \tag{13}$$

avec ε_g l'énergie de gap du germanium.

> Comme pour l'expérience précédente, placer la plaquette en germanium dans l'entrefer de l'électroaimant, et régler l'intensité dans le circuit sur $i \approx 50$ mA. Fixer également l'intensité dans l'électroaimant ($I = 5$ A par exemple) pour fixer le champ magnétique B. La température T de la plaque de germanium est mesurée grâce à une thermistance Pt 100 intégrée dans le boîtier. Allumer le

chauffage de la plaque à l'aide du bouton situé sur la face arrière du module (la diode s'allume). Au cours du chauffage, mesurer la tension de Hall U_H pour plusieurs températures T (appuyer sur le bouton `Display` pour l'afficher), tout en veillant à ne pas dépasser 150 °C environ. Remonter ensuite à la densité de porteurs de charge n_{Ge} comme précédemment, puis tracer la n_{Ge} en fonction de $1/T$. On retrouve les deux évolutions attendues : n_{Ge} est constant à basse température ($1/T$ grand) et évolue exponentiellement à haute température ($1/T$ petit). Réaliser une régression linéaire sur la partie décroissante de la courbe, le coefficient directeur étant $-\epsilon_g/2k_B$, en déduire l'énergie de gap du germanium (on s'attend à $\epsilon_g \approx 0{,}67$ eV).

d. Sonde à effet Hall en métal (en seconde lecture)

Il est également possible d'observer l'effet Hall dans les métaux, bien que les tensions de Hall soient beaucoup plus faibles que dans le cas des semi-conducteurs. Nous allons utiliser la plaquette en cuivre `P64.32`, mais on pourrait faire de même avec la plaquette en zinc `P64.33`.

Liste du matériel :

- **la plaquette en cuivre `P64.32`,**
- **la plaquette en zinc `P64.33`,**
- **le générateur `P53.10` (capable de délivrer des intensités importantes),**
- **le voltmètre de précision Fluke 8846 `P69.35`,**
- **l'électroaimant `P66.30`.**

Alimenter la sonde en cuivre (ou en zinc) par un générateur permettant de délivrer des intensités importantes. On reliera le générateur aux bornes qui se trouvent aux extrémités droite et gauche de la plaquette avec des câbles non sécurisés. On mesure la tension de Hall entre la borne en haut à gauche et celle en bas à gauche. Cette tension étant très faible (de l'ordre du μV), il faut utiliser un voltmètre de précision (par ex. le Fluke 8846 `P69.35`, la mesure étant effectuée entre ses fiches HI et LO de gauche (bouton $\boxed{\text{DCV}}$, calibre sur 100 mV). Placer la plaque de cuivre entre les pièces plates de l'entrefer de l'électroaimant, on conserve une épaisseur de l'entrefer $e = 2$ cm. Délivrer une intensité $i = 15$ A dans la plaquette de cuivre. L'intensité maximale supportée par la plaquette est de 20 A, mais même sous 15 A les fils chauffent assez vite, il faut donc éviter de laisser la plaquette sous tension trop longtemps. Pour des intensités I croissantes dans l'électroaimant allant de 1 à 8 A, mesurer la tension U_H avec le voltmètre. Pour compenser les problèmes d'alignements des soudures, retourner la sonde à chaque changement d'intensité et réaliser la moyenne des deux mesures comme précédemment. Éteindre l'alimentation de la plaquette à la fin de la série de mesure. Tracer U_H en fonction de I, puis en fonction de B à l'aide des coefficients de la modélisation de la courbe d'étalonnage de l'électroaimant. En déduire la constante de Hall R_H du cuivre (sachant que $L_z = 18$ μm), et la comparer à la valeur tabulée $R_H \approx 7{,}3.10^{-11}$ m^3/C.

2. Le fluxmètre

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1] (chap. Fluxmètre) et Réf. [2] (pp. 85-87) pour une présentation générale.

a. Principe

Un fluxmètre est sensible aux variations de flux magnétique $\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$ à travers sa surface. Il est constitué d'une bobine plate de N spires de section S. Lorsque le fluxmètre passe d'une région où le champ magnétique est nul à une région où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ (normal à $\vec{dS}$), il subit une variation de flux :

$$\Delta\Phi = BNS. \tag{14}$$

Or d'après la loi de Faraday, cette variation génère une force électromotrice :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}. \tag{15}$$

En intégrant cette tension aux bornes de la bobine sur un temps τ, on remonte au champ :

$$B = \frac{\Delta\Phi}{NS} = -\frac{1}{NS}\int_0^\tau e\,\mathrm{d}t. \tag{16}$$

Plusieurs moyens sont possibles pour intégrer cette tension :

- mécaniquement : en utilisant un fluxmètre à aiguille, qui est un galvanomètre sans couple de rappel (nous ne l'étudierons pas),
- électroniquement : à l'aide d'un montage intégrateur,
- numériquement : en intégrant le signal sur un ordinateur ou un oscilloscope.

b. Intégration électronique

Liste du matériel :

- le boîtier intégrateur P42.45,
- le boîtier d'alimentation P42.39,
- la bobine plate P50.8,
- l'électroaimant P66.30.

La bobine plate P50.8 possède 400 spires, et une section $S = 0{,}001\ \mathrm{m}^2$, soit $NS = 0{,}4\ \mathrm{m}^2$.
En reliant la tension e aux bornes du fluxmètre à un montage intégrateur RC à AO, on mesure une tension U en sortie de l'intégrateur :

$$U = -\frac{1}{RC}\int_0^\tau e\,\mathrm{d}t = \frac{BNS}{RC}$$

.

Expérimentalement, la dérive de cette tension en sortie de l'intégrateur peut rendre la mesure délicate. Celle-ci provient de l'intégration de la tension d'offset et du courant de dépolarisation de l'AO. Pour la réduire, on utilisera le boîtier intégrateur P42.45, plutôt que de réaliser le circuit soi-même. On veillera également à décharger le condensateur avant chaque mesure en appuyant sur le bouton RAZ du boîtier.

> Relier les bornes d'une bobine plate à l'entrée DC d'un boîtier intégrateur alimenté et réglé sur OFF avec $R_{\mathrm{int}} = 100\ \mathrm{k\Omega}$, mesurer la tension en sortie U avec un voltmètre.
> On conserve une largeur de l'entrefer $e = 2$ cm entre les pièces plates de l'électroaimant. Pour des intensités I croissantes dans l'électroaimant allant de 1 A à 8 A : éloigner la bobine de l'électroaimant, appuyer brièvement sur le bouton RAZ du boîtier pour décharger le condensateur, puis amener la bobine dans l'entrefer et mesurer la tension U.
> Déduire le champ B à partir de U, puis tracer la caractéristique $B(I)$ de l'électroaimant. On retrouve la courbe d'étalonnage réalisée précédemment au teslamètre.

Contrairement au teslamètre qui réalise une mesure locale du champ B, le fluxmètre réalise une mesure de flux, c'est-à-dire une mesure intégrée du champ. Pour remonter au champ, nous faisons l'hypothèse que celui-ci est uniforme à travers la surface de la bobine. Cette approximation est raisonnable ici car nous utilisons des pièces plates dans l'entrefer, mais ce ne serait pas le cas avec des pièces tronconiques ou en utilisant une bobine de diamètre important.

c. Intégration numérique (en seconde lecture)

Il est possible d'intégrer numériquement la tension aux bornes de la bobine à l'aide de Latis-Pro.

> Relier les bornes de la bobine plate à une carte d'acquisition. Recommencer l'expérience précédente mais cette fois en effectuant l'acquisition de la tension e sous Latis-Pro. Pour chaque mesure, lui soustraire sa valeur moyenne, puis l'intégrer pour remonter à $\int_0^\tau e\,\mathrm{d}t$. Retrouver la caractéristique $B(I)$ de l'électroaimant.

V. MESURE DU CHAMP MAGNÉTIQUE TERRESTRE (*)

On propose de mesurer le champ magnétique terrestre à l'aide d'une boussole et de bobines de Helmholtz de deux façons différentes. Ces expériences sont inspirées de la Réf. [1] (chap. Boussole).

Liste du matériel :

- les bobines de Helmholtz P83.10 ou P64.10,
- une alimentation stabilisée P53.24,
- un multimètre,
- un teslamètre P64.34,
- la cuvette avec rapporteur P63.20,
- une boussole simple P63,

1. Calibration du champ magnétique uniforme

Les deux expériences nécessitent de créer un champ magnétique constant et connu. On propose d'utiliser les bobines de Helmholtz dans ce but.

L'idéal serait de se mettre en configuration de Helmholtz, c'est-à-dire avec un espacement entre les bobines égal à leur rayon. Cependant, ce n'est pas forcément facile à réaliser avec le matériel à disposition. Il faut également avoir la place de glisser la boussole entre les deux. Il est possible de prendre en compte cette réalisation imparfait de la configuration d'Helmholtz en exploitant l'expression du champ magnétique créé par une bobine plate sur son axe.

> Alimenter les bobines (dans le même sens) par un même courant I mesuré au multimètre. Le champ magnétique créé au centre du dispositif est relevé à l'aide d'un teslamètre (dont on aura réglé au préalable le 0) pour différentes valeurs de courant I. Effectuer un ajustement linéaire pour obtenir la droite de calibration $B = f(I)$.

La calibration doit correspondre à la gamme de champ magnétique que l'on désire étudier, à savoir le champ magnétique terrestre. Inutile de dépasser donc les $\approx 5.10^{-4}$ T. Comme expliqué précédemment, le défaut d'alignement des soudures est corrigé en retournant la sonde et en moyennant les mesures. Remarque : le champ magnétique n'est pas vraiment uniforme si les bobines sont distantes de plus que leur rayon. On peut quantifier cette non-uniformité du champ en associant l'incertitude sur B aux variations spatiales du champ entre les bobines sur le volume qui est "occupé" par l'aiguille de la boussole. Pour une distance donnée ($d = 10$cm par exemple), on peut calculer numériquement la valeur du champ à proximité du centre du dispositif.

2. Boussole des tangentes

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (p.73) pour la discussion théorique.

> Placer la boussole munie d'un rapporteur au centre des bobines de Helmholtz non-alimentées, et orienter l'axe des bobines orthogonalement à la direction repérée par la boussole (qui doit correspondre à la direction du Nord magnétique si l'on a pris soin, comme il se doit, de s'éloigner de toute source de champ magnétique parasite).
> Repérer l'angle de rotation pour différentes valeurs de l'intensité circulant à travers les bobines.

En notant B_H le champ magnétique terrestre (plus précisément sa composante horizontale à l'endroit où est effectuée l'expérience) et B_0 le champ créé par les bobines (auquel on accède à l'aide de la calibration effectuée précédemment), on peut montrer que l'angle α dont tourne l'aiguille de la boussole est donné par la relation suivante :

$$\tan \alpha = \frac{B_0}{B_H}. \tag{17}$$

L'ajustement linéaire $\tan(\alpha) = f(B_0)$ permet ainsi d'accéder à une estimation de $1/B_H$. Une valeur tabulée du champ magnétique dans la direction Nord à Lyon est donnée ici [2], avec une valeur de 22µT (et 21µT à Saint Maur des Fossés).

2. http://wdc.kugi.kyoto-u.ac.jp/igrf/point/index.html

3. Mesures dynamiques

On peut montrer qu'une boussole oscille autour de la direction du champ magnétique local avec une période T égale, dans la limite des oscillations de faible amplitude et faiblement amorties, égale à :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{MB}}, \tag{18}$$

où J est le moment d'inertie (par rapport à l'axe de rotation), M le moment magnétique, et B le champ magnétique (plus précisément la composante orthogonale à l'axe de rotation). Les valeurs de J et M ne sont pas aisément accessibles, mais leur connaissance n'est pas nécessaire si l'on peut ajouter au champ magnétique terrestre un champ magnétique connu (tel que celui créé par les bobines de Helmholtz).

> Placer une boussole (présentant le moins de friction possible au niveau de son axe de rotation) au centre du dispositif, l'axe des bobines étant désormais aligné avec le champ magnétique terrestre. Avec (un sens de) l'alimentation convenablement choisie, le champ total correspond à la somme des 2 contributions (terrestre et des bobines), soit : $B = B_0 + B_H$. Mesurer la fréquence $f = T^{-1}$ des petites oscillations pour différentes valeurs de I (et donc de B_0 à l'aide de la relation de calibration).

L'ajustement linéaire de la forme $f^2 = a(B_0 + B_H)$ permet alors d'accéder à la valeur de B_H.

Références

[1] J.-M. Dumini et L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale, Tome IV : Électricité et applications*, Pierron (2004).

[2] R. Duffait, *Expériences de physique - CAPES de sciences physiques*, Bréal (2011).

[3] D. Aubert et L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale, Tome III : Électronique*, Pierron (2004).

Exemples de résultats expérimentaux

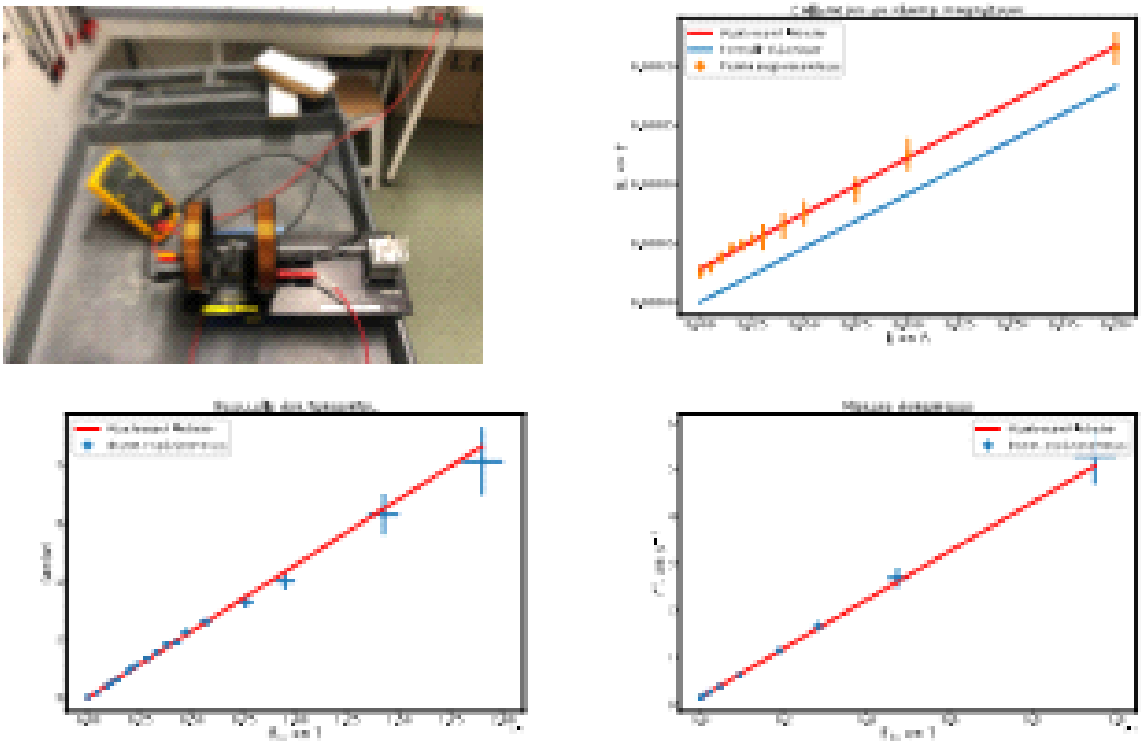


Figure A1 – Exemple de mesure du champ magnétique terrestre (voir l'Exp. 2), dispositif, calibration de la relation $B = f(I)$ dans une configuration "quasi-Helmholtz" [la pente mesurée est cohérente avec la valeur théorique calculée au centre du dispositif, et l'offset est négligé par la suite], ajustement linéaire tan $\alpha = f(B_0)$ [qui permet d'accéder ici à $B_H = 22\mu T$], et ajustement linéaire $f^2 = \alpha(B_0 + B_H)$ [qui permet d'accéder ici à $B_H = 25 \pm 3\mu T$. © *N. Barros*

Milieux magnétiques

Table des expériences

I.	Rappels sur les milieux magnétiques	14
II.	Étude de milieux magnétiques linéaires : diamagnétisme et paramagnétisme	15
III.	Étude d'un milieu magnétique non-linéaire : ferromagnétisme	21

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Rappels sur les milieux magnétiques

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [3] (pp. : 48-54), [1] (chaps. Diamagnétisme, Paramagnétisme et Ferromagnétisme) et [4] (pp. : 146-152) pour une présentation générale.

1. Champ magnétique dans la matière

Un matériau est dit magnétique s'il acquiert une aimantation $\vec{M}$ lorsqu'il est soumis à une excitation magnétique extérieure $\vec{H}$. Le champ magnétique total dans le matériau s'exprime alors :

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_r\mu_0\vec{H} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M},$$

avec μ la perméabilité magnétique absolue et μ_r la perméabilité magnétique relative du matériau.

On rappelle que l'aimantation est également définie comme la densité volumique de moment magnétique $\vec{m}$ dans le matériau :

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}.$$

2. Milieux magnétiques linéaires

Un milieu magnétique est linéaire si le champ $\vec{B}$ est relié à l'excitation magnétique $\vec{H}$ par une relation linéaire. On peut alors exprimer μ_r, qui est indépendante de $\vec{H}$, telle que :

$$\mu_r = 1 + \chi_m,$$

avec χ_m la susceptibilité magnétique du milieu, pour aboutir à la relation :

$$\vec{M} = \chi_m\vec{H}.$$

Par la suite, nous étudierons deux types de milieux linéaires :

- les milieux diamagnétiques : ils sont caractérisés par une aimantation très faible qui s'oppose à l'excitation extérieure :

  $$\chi_m < 0 \quad \text{avec} \quad |\chi_m| \approx 10^{-5}.$$

  Cette propriété est due à l'interaction entre électrons, elle est présente dans tous les matériaux.

- les milieux paramagnétiques : ils sont caractérisés par une aimantation faible de même sens que l'excitation extérieure :

  $$\chi_m > 0 \quad \text{avec} \quad |\chi_m| \approx 10^{-3}.$$

  Cette propriété a pour origine le couplage entre l'excitation magnétique et les moments magnétiques atomiques. Elle n'est présente que pour certains matériaux, et masque alors le diamagnétisme.

3. Milieux magnétiques non-linéaires

Un milieu magnétique est non-linéaire si le champ $\vec{B}$ n'est pas relié à l'excitation magnétique $\vec{H}$ par une relation linéaire.

Dans le cas du ferromagnétisme, μ_r varie typiquement de 10^2 à 10^5. Elle est fonction de $\vec{H}$, mais également de l'état magnétique antérieur du matériau. Les matériaux ferromagnétiques ont la capacité de conserver une aimantation même en l'absence d'excitation magnétique extérieure.

Au niveau microscopique, un matériau ferromagnétique est constitué d'un ensemble de domaines, appelés domaines de Weiss, où les spins des atomes s'alignent par couplage. Ils sont séparés entre eux par les parois de Bloch. Lorsque le matériau est désaimanté, les domaines sont distribués aléatoirement et l'aimantation globale est nulle. Sous l'action d'un champ, les moments magnétique des atomes s'alignent et confèrent une aimantation globale au matériau. Celle-ci croît avec l'intensité du champ, jusqu'à atteindre un maximum : l'aimantation à saturation $\vec{M}_s$. Si l'on supprime le champ excitateur, elle diminue mais il persiste une aimantation rémanente $\vec{M}_r$ dans le matériau. Pour l'annuler, il faut appliquer une excitation extérieure $-\vec{H}_c$ qui s'oppose à l'aimantation, appelée champ coercitif.

Pour plus de détail sur le ferromagnétisme, et en particulier sur la description du cycle d'hystérésis, nous vous conseillons la lecture de [3] (pp. : 57-63) et [4] (pp. :172-192).

Enfin, il existe également d'autres formes de magnétismes non-linéaires, citons par exemple :

- L'antiferromagnétisme, où l'interaction entre deux atomes voisins tend à opposer leurs moments magnétiques, l'aimantation globale est nulle.
- Le ferrimagnétisme, où l'interaction entre deux atomes voisins tend à opposer leurs moments magnétiques (comme l'antiferromagnétisme) mais avec des amplitudes différentes. Il en résulte une aimantation globale non-nulle. Contrairement aux matériaux ferromagnétiques, les ferrites (matériaux ferrimagnétiques) sont des isolants électriques.

II. Étude de milieux magnétiques linéaires : diamagnétisme et paramagnétisme

1. Mises en évidence qualitatives

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1] (chap. : Diamagnétisme et chap. : Paramagnétisme) pour une présentation générale.

On peut montrer qu'un matériau diamagnétique ou paramagnétique placé dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit une force volumique :

$$\vec{f} = \frac{\chi_m}{2\mu_0}\vec{\nabla}B^2.$$

Pour un matériau paramagnétique ($\chi_m > 0$), la force est dirigée suivant le gradient du champ. À l'inverse, pour un matériau diamagnétique ($\chi_m < 0$), la force est dirigée dans le sens opposé au gradient.

Pour générer un gradient de champ magnétique, nous allons utiliser les pièces tronconiques de l'entrefer d'un électroaimant. L'électroaimant génère un champ magnétique non-uniforme dans l'entrefer, dont le gradient (radial) est dirigé vers son centre. L'aluminium est un matériau paramagnétique, il subit une force dans le sens du gradient, qui tend à ramener ses extrémités sur l'axe de l'entrefer. Le bismuth est un matériau diamagnétique, il subit une force de sens opposé au gradient, qui tend à placer ses extrémités perpendiculairement à l'axe de l'entrefer.

Liste du matériel :

- **le barreau d'aluminium P63.3,**
- **le barreau de bismuth P63.3,**
- **un générateur de tension continue P53.13,**
- **l'électroaimant P66.29.**

⚠ Ne jamais éteindre brutalement le générateur de l'électroaimant : l'inductance des bobines étant importante, une variation brutale d'intensité provoque une surtension qui risque de l'endommager. Il faut réduire progressivement l'intensité jusqu'à zéro avant de l'arrêter.

> Viser les pièces tronconiques de chaque côté de l'entrefer de l'électroaimant, espacées d'environ 1 cm dans l'entrefer. Alimenter l'électroaimant avec le générateur de tension continue et mesurer l'intensité I à l'aide d'un ampèremètre (attention à ne pas dépasser 6 A).
> Pour une intensité nulle, suspendre le barreau d'aluminium (matériau paramagnétique) dans l'entrefer. Le barreau s'oriente dans une direction quelconque à l'équilibre. Puis alimenter l'électroaimant sous son intensité maximale $I = 6$ A, le barreau tend à s'orienter suivant l'axe de l'entrefer.
> Recommencer la même expérience avec le barreau de bismuth (matériau diamagnétique). Lorsque l'on alimente l'électroaimant avec $I = 6$ A, le barreau tend à s'orienter perpendiculairement à l'axe de l'entrefer (l'effet reste cependant très léger).

2. Ascension paramagnétique de $FeCl_3$

Nous renvoyons le lecteur aux RSL [1] (chap. : Paramagnétisme), [2] (p.310) et [4] (p.134) pour une présentation du phénomène.

Liste du matériel :

- **le dispositif en U P63,**
- **la solution de $FeCl_3$ à 41% en masse P75,**
- **un teslamètre P64.34,**
- **une alimentation continue P53.13,**
- **l'électroaimant P66.29.**

La masse volumique d'une solution de $FeCl_3$ à 41% en masse à 20 °C est approximativement égale à $\rho_{sol} \approx 1{,}41.10^3$ kg/m^3.

Nous allons mesurer la susceptibilité d'une solution de chlorure ferrique $FeCl_3$ grâce à son équilibre hydrostatique en présence d'un champ magnétique. Auparavant, il est nécessaire de tracer la courbe d'étalonnage $B(I)$ de l'électroaimant avec des pièces tronconiques (le protocole est identique à celui du TP « Production et mesure de champs magnétiques ».

> Espacer d'environ 1 cm les pièces tronconiques de l'électroaimant. On mesure le champ magnétique avec le teslamètre : régler son zéro loin de l'électroaimant (appuyer sur MENU, sélectionner Utilities avec le bouton NEXT, puis Null, et appuyer sur RESET), puis placer son extrémité au centre de l'entrefer perpendiculairement au champ. Alimenter l'électroaimant avec l'alimentation continue et mesurer l'intensité I à l'aide d'un ampèremètre.
> Pour différents courants I croissants allant de 1 à 6 A, mesurer le champ magnétique B au centre de l'entrefer (moyenner les deux mesures réalisées en retournant la sonde pour compenser le défaut d'alignement des soudures). Tracer la courbe d'étalonnage $B(I)$, la modéliser par un polynôme d'ordre 3 et noter ses coefficients.

La solution de $FeCl_3$ paramagnétique est placée dans un tube en U, on note ρ_{sol} sa masse volumique. L'une des branches est placée dans l'entrefer de l'électroaimant, on note S_1 sa section et z_1 la position de son ménisque (ascendant), comme indiqué sur la figure 1. L'autre branche est située en dehors de l'électroaimant, on note S_2 sa section et z_2 la position de son ménisque (descendant).

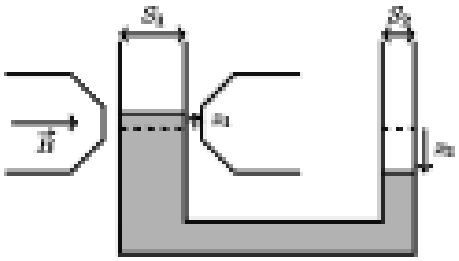


FIGURE 1 – Mesure de la susceptibilité paramagnétique d'une solution de $FeCl_3$.

En l'absence de champ, le liquide est au même niveau dans les deux branches ($z_1 = z_2 = 0$). En présence d'un champ, la force magnétique fait monter le ménisque z_1. L'équilibre hydrostatique s'écrit :

$$\rho_{sol}\vec{g} - \vec{\nabla}P + \frac{\chi_{sol}}{2\mu_0}\vec{\nabla}B^2 = \vec{0},$$

soit :

$$\vec{\nabla}\left(-\rho_{sol}gz - P + \frac{\chi_{sol}}{2\mu_0}B^2\right) = \vec{0}.$$

En intégrant l'équation entre les 2 surfaces libres à la pression atmosphérique, on obtient :

$$-\rho_{sol}gz_1 + \frac{\chi_{sol}}{2\mu_0}B^2 = \rho_{sol}gz_2.$$

Or par conservation du volume, on a $z_1S_1 = z_2S_2$, et on obtient finalement :

$$z_2 = \frac{\chi_{sol}}{2\mu_0\rho_{sol}g\left(1+\frac{S_2}{S_1}\right)}B^2.$$

REMARQUE : l'expression donnée dans [1], [2] et [4] ne prend pas en compte le facteur géométrique S_2/S_1.

> On utilise le dispositif en U constitué de deux pipettes graduées reliées entre elles par un tuyau flexible. Commencer par le rincer à l'eau pour réduire les problèmes dus à l'hystérésis de mouillage.
> Remplir environ au tiers le tube de la solution de $FeCl_3$ à 41% en masse ($\rho_{sol} \approx 1{,}41.10^3$ kg/m^3). Placer la grosse branche dans l'électroaimant, de manière à avoir le ménisque z_1 au centre de l'entrefer. Projeter l'image du ménisque z_2 sur un écran, en utilisant une lampe et une lentille, afin de faciliter la lecture de son niveau.
> Pour différentes intensités I croissantes allant de 0 à 6 A, repérer la position z_2' du ménisque sur l'écran (avec du papier millimétré par exemple).
> Calculer le grandissement du dispositif de projection $\gamma = z_2'/z_2$, on pourra par exemple mesurer le rapport de l'image de la section du tube sur sa section réelle. En déduire la position réelle $z_2 = z_2'/\gamma$ du liquide, et la tracer en fonction de I, puis en fonction de B^2 à l'aide des coefficients de la modélisation $B(I)$.
> Remonter à la susceptibilité de la solution χ_{sol} par régression linéaire. On pourra estimer le rapport S_2/S_1 en mesurant à la règle l'écart δz_2 entre deux graduations correspondant à 1 mL sur chacune des deux branches du tube (on a alors $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\delta z_1}{\delta z_2}$).

La loi d'additivité des moments magnétiques dans la solution s'écrit :

$$\vec{m}_{sol} = \vec{m}_{FeCl_3} + \vec{m}_{eau},$$

$$V_{sol}\vec{M}_{sol} = V_{FeCl_3}\vec{M}_{FeCl_3} + V_{eau}\vec{M}_{eau},$$

$$V_{sol}\chi_{sol}\vec{H} = V_{FeCl_3}\chi_{FeCl_3}\vec{H} + V_{eau}\chi_{eau}\vec{H},$$

$$\frac{m_{sol}}{\rho_{sol}}\chi_{sol} = \frac{m_{FeCl_3}}{\rho_{FeCl_3}}\chi_{FeCl_3} + \frac{m_{eau}}{\rho_{eau}}\chi_{eau},$$

avec m les masses et ρ les masses volumiques. En supposant que l'influence du diamagnétisme de l'eau est négligeable devant le paramagnétisme de $FeCl_3$ (on le vérifiera a posteriori), on obtient :

$$\chi_{FeCl_3} \approx \chi_{sol}\frac{m_{sol}\rho_{FeCl_3}}{m_{FeCl_3}\rho_{sol}} = \chi_{sol}\frac{\rho_{FeCl_3}}{\rho_{sol}t_m},$$

avec $t_m = 0{,}41$ le titre massique de la solution de $FeCl_3$ et $\rho_{FeCl_3} \approx 2{,}8.10^3$ kg/m^3.

> Calculer la susceptibilité de $FeCl_3$ χ_{FeCl_3} à partir de χ_{sol}, et la comparer à sa valeur tabulée $\chi_{FeCl_3} \approx 3{,}3.10^{-3}$ (dans le système international d'unité MKSA).

On peut alors vérifier que la contribution de la susceptibilité de l'eau ($\chi_{eau} \approx -9.10^{-6}$) est bien négligeable devant celle de $FeCl_3$.

Il faut être conscient que l'incertitude sur cette mesure est relativement importante. Il y a plusieurs raisons à cela : le champ magnétique n'est pas uniforme avec les pièces tronconiques (mais elles sont nécessaires pour obtenir un champ élevé), nous négligeons les effets capillaires dans le tube de petite section, et enfin il apparaît une hystérésis de mouillage lors de la montée du ménisque. On pourrait compenser ce dernier en utilisant des intensités croissantes puis décroissantes, mais il faut alors aussi prendre en compte l'hystérésis magnétique de l'électroaimant.

L'exploitation des mesures peut être effectuée sous python à l'aide du script suivant :

```python
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

"""
Traitement des données (telles qu'elles apparaissent dans le script) correspondant à l'expérience
    médiocre où évidemment
l'aspect paramagnétique d'une solution de FeCl_3 lorsqu'elle est placée dans l'entrefer d'un électro
    -aimant.

Dépendances:

Usage: python python_Ascension_FeCl3_lyon.py

Auteurs: T. Faure (02/01/2023)
         C. Winisdoerffer (08/03/2023)
"""

# Importation des librairies
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.optimize as scopt

# Définition des fonctions
def plot_data(ax,x,y,xerr,yerr,labelx,labely):
    """ Tracé script qui représente des données avec leurs barres d'erreur.
    Arguments: l'objet axis de matplotlib.pyplot et les données avec leurs labels.
    Exploite des effets de bord, qui devrait être à proscrire... """
    ax.errorbar(x,y,xerr=xerr,yerr=yerr,fmt='.')
    ax.set_xlabel(labelx,fontsize=20)
    ax.set_ylabel(labely,fontsize=20)
    ax.tick_params(axis='both', which='both', labelsize=16, width=2)
    return

def plot_fit_affine(ax,X,a_opt,b_opt):
    """ Trace le fit affine à l'aide des paramètres retrouvés par celui-ci.
    Exploite des effets de bord, qui devrait être à proscrire... """
    Y_fit = a_opt*X +b_opt
    ax.plot(X,Y_fit,color='r')
    return

def modele_affine(X,Y,u_X,u_Y,a_test,b_test):
    """ Effectue une modélisation affine Y = a * X + b, en tenant compte des incertitudes sur X (u_X)
      et Y (u_Y).
    La fonction utilise la méthode des moindres carrés à partir de paramètres d'essai a_test et
     b_test.
    La fonction renvoie un tableau qui contient dans l'ordre :
        - La valeur de a optimisée (a_opt),
        - La valeur de b optimisée (b_opt),
        - l'incertitude sur la valeur de a (u_a_opt),
        - l'incertitude sur la valeur de b (u_b_opt),
        - la valeur du chi2 réduit (chi2_opt). """

    def affine(x,a,b):
        """ Modélisation affine """
        return a*x+b
    def residu_affine(p_affine,x,y,u_x,u_y):
        """ Résidus """
```

```
        a = p.affine[0]
        b = p.affine[1]
        return  (y-affine(x,a,b)) / np.sqrt(u_y**2+(a*u_x)**2)
    # Optimisation
    opt_affine = scopt.least_squares(residu_affine,np.array([a_test,b_test]),args=(X,Y,u_X,u_Y))
    a_opt = opt_affine.x[0]
    b_opt = opt_affine.x[1]
    hessian_affine = np.matmul(opt_affine.jac.transpose(),opt_affine.jac)
    u_a_opt = np.sqrt(2./hessian_affine[0,0])
    u_b_opt = np.sqrt(2./hessian_affine[1,1])
    chi2_opt = np.sum(residu_affine(np.array([a_opt,b_opt]),X,Y,u_X,u_Y)**2)/(np.size(X)-2)
    print("résultats de l'ajustement :")
    print("* pente = {0:.2e} +/- {1:.1e}".format(a_opt,u_a_opt))
    print("* ordonnée à l'origine = {0:.2e} +/- {1:.1e}".format(b_opt,u_b_opt))
    print("* chi2 réduit = {0:.2f}".format(chi2_opt))
    return np.array([a_opt,b_opt,u_a_opt,u_b_opt,chi2_opt])

# Programme principal
if __name__ == "__main__":
    # Etalonnage de la relation B=f(I) de l'electro-aimant
    # Courants et incertitudes [A]
    I   = np.array([0.58,1.01,1.53,1.97,2.58,3.01,3.53,4.03,4.48,5.06,5.53,6.03])
    u_I = 0.02 * np.ones_like(I)  # 0.02 A
    #u_I /= 2.*np.sqrt(3.)
    # Champ B et incertitudes [mT]
    B   = np.array([51,158,233,319,375,449,525,593,676,763,810,870])
    u_B = 2. * np.ones_like(B)     # 2 mT
    #u_B /= 2.*np.sqrt(3.)

    # Mesures du deplacement vertical du montage en fonction du courant alimentant l'electro-aimant
    # Courants et incertitudes [A]
    I_asc   = np.array([1.5, 2.42, 3.58 , 4.2, 5.16, 6.18])
    u_I_asc = 0.02 * np.ones_like(I_asc)   # 0.02 A
    #u_I_asc /= 2.*np.sqrt(3.)
    # Deplacements et incertitudes (sur l'image projetee) [cm]
    x_asc = np.array([0, 0.4, 1.0 , 1.4, 2.2, 3.2])
    u_x   = 0.1 * np.ones_like(x_asc)  # 1 mm
    #u_x   /= 2.*np.sqrt(6.)
    # Grandissement associé à la projection à l'aide d'une lentille
    gamma = 38/6.34
    # Conversion image --> objet + conversion cm --> m
    x_asc /= gamma * 100
    u_x   /= gamma * 100

    #-----------------------------------------------------------------------------
    # L'utilisateur ne devrait pas à avoir à modifier les lignes suivantes
    #-----------------------------------------------------------------------------

    # Regression linéaire pour obtenir B=f(I)
    optim = modele_affine(I,B,u_I,u_B,0,0)
    # Exploitation de la regression pour obtenir les valeurs de B explorée dans l'ascension
    B_asc   = optim[0]*I_asc+optim[1]
    u_B_asc = 2. * np.ones_like(B_asc)   # 2 mT, sans raffinement
    # Conversion mT --> T
    B_asc   /= 1000
    u_B_asc /= 1000
    # Regression linéaire pour obtenir x=f(B^2)
    optim_asc = modele_affine(B_asc**2,x_asc,u_B_asc,u_x,0,0)

    # Plot de B=f(I)
    fig,ax = plt.subplots(figsize=(9, 6))
    plot_data(ax,I,B,u_I,u_B,'Courant [A]', 'Champ magnétique B [mT]')
    plot_fit_affine(ax,I,optim[0],optim[1])
    plt.title("B = ({0:.2e} +/- {2:.1e}) I + ({1:.2e} +/- {3:.1e}),\n chi_2 réduit = {4:.2f}".format
      (*optim),fontsize=16)
    plt.grid(which="both")
    if True:
        plt.savefig('etalonnage.png')
    plt.show()
```

```
# Plot du x-C(B^2)
fig_asc,ax_asc = plt.subplots(figsize=(9, 6))
plot_data(ax_asc,B_asc**2,x_asc,x_B_asc,x_x, r'Carré du champ magnétique B^2 [T^2]','Hauteur du ménisque [m]')
plot_fit_affine(ax_asc,B_asc**2,optim_asc[0],optim_asc[1])
plt.title("x = ({0:.2e} +/- {2:.1e}) B^2 + ({1:.2e} +/- {3:.1e}),\n chi_2 réduit = {4:.2f}".
    format(*optim_asc),fontsize=20)
plt.grid(which="both")
if True:
    plt.savefig('ascension_poC13.png')
plt.show()
```

3. Paramagnétisme de l'oxygène (en seconde lecture)

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (chap. Paramagnétisme) pour une présentation générale.

Liste du matériel :

- **azote liquide (demander aux techniciens si besoin),**
- **l'électroaimant P66.29.**

Cette expérience permet de comparer le diamagnétisme du diazote N_2 au paramagnétisme du dioxygène O_2. Vous avez normalement accès à de l'azote liquide en salle de TP (demander aux techniciens si besoin). Vous ne disposez pas d'oxygène liquide, mais il est possible d'en produire à partir de l'azote liquide.

> Placer un tube à essai vide dans un réservoir d'azote liquide. Après plusieurs minutes, de l'oxygène liquide se condense dans le tube.

En effet, la température de vaporisation du diazote ($T_{v,N_2} = -196°C$) étant inférieure à celle du dioxygène ($T_{v,O_2} = -183°C$), on peut obtenir de l'oxygène liquide par condensation de l'air ambiant.

> Rapprocher les pièces tronconiques de l'électroaimant pour obtenir un entrefer large de quelques millimètres seulement. On peut projeter l'image de l'entrefer sur un écran à l'aide d'une lampe et d'une lentille pour mieux le visualiser.
> Alimenter l'électroaimant sous son intensité maximale $I = 6$ A, puis verser de l'azote liquide au centre de l'entrefer (attention aux projections !). L'azote s'écoule à travers l'entrefer.

REMARQUE : l'azote et l'oxygène liquide sont des isolants électriques, il n'y a donc aucun danger d'un point de vue électrique à réaliser ces expériences.

> Recommencer la même expérience avec l'oxygène liquide contenu dans le tube à essai (refroidir préalablement l'entrefer avec de l'azote liquide pour éviter que l'oxygène ne s'évapore trop rapidement). Avant de s'écouler, l'oxygène reste en lévitation plusieurs secondes dans l'entrefer.

Le résultat est semblable aux barreaux de bismuth et d'aluminium placés dans l'entrefer. Le diazote est diamagnétique (comme le bismuth), il s'exerce alors une force qui tend à l'éloigner du centre de l'entrefer. Le dioxygène est paramagnétique (comme l'aluminium), la force permet de le maintenir sur l'axe de l'entrefer, il lévite alors quelques secondes.

4. Lévitation diamagnétique (en seconde lecture)

Liste du matériel :

- **le dispositif Dialev P63.19.**

Le graphite est un matériau diamagnétique, il subit donc une force volumique qui tend à l'éloigner des champs magnétiques intenses (comme le diazote). En déposant une fine plaque de graphite sur un aimant puissant, cette force peut être suffisante pour compenser le poids de la plaque, elle se met alors à léviter.

Attention à ne pas confondre cette force de répulsion diamagnétique avec l'effet Meissner, qui est le phénomène de lévitation d'un matériau supraconducteur. Les mécanismes qui rentrent en jeu sont différents.

⚠ L'aimant en néodyme est puissant. Éloigner tous les objets en fer à proximité avant d'ouvrir le dispositif. Attention également à la plaque de graphite qui est très fragile. Il s'agit d'un article de fin de série qui n'est plus disponible et ne peut plus être commandé.

> Retirer la petite languette aimantée du dispositif DIALEV (Diamagnetic Levitation Device), puis déposer la petite plaque carré de graphite sur l'assemblage d'aimants. Observer qu'elle lévite au-dessus.

La lévitation est maintenue au centre car l'assemblage d'aimant est disposé de telle sorte qu'un minimum local de potentiel apparaisse au centre.

III. Étude d'un milieu magnétique non-linéaire : ferromagnétisme

1. Caractérisation d'un matériau ferromagnétique

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1] (chap. Ferromagnétisme) et Réf. [3] (pp. : 47-66) pour une présentation générale.

a. Dispositif expérimental

Liste du matériel :

- un GBF,
- un amplificateur de puissance HSA 4005 P47.6 ou 4011 P47.5,
- un rhéostat P61.3,
- le boitier intégrateur RC P42.45,
- le boitier d'alimentation P42.39,
- le tore de ferrite P66.4/4.

Un matériau ferromagnétique est caractérisé par sa perméabilité magnétique μ_r et donc par sa courbe $B(H)$. Nous allons la tracer à partir du montage présenté en figure 2.

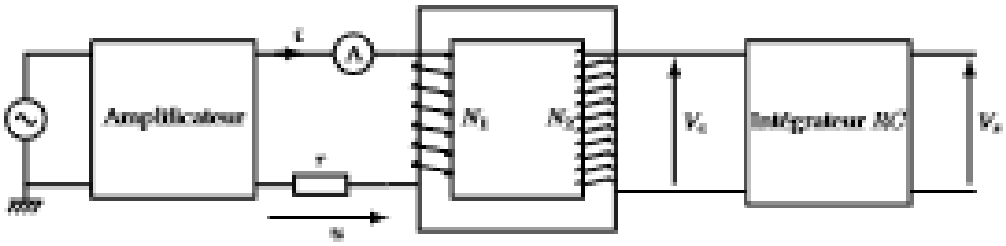


FIGURE 2 – Montage permettant de tracer la caractéristique d'un tore ferromagnétique.

Ce montage permet l'étude du matériau ferromagnétique constituant le tore, qui joue ici le rôle d'un transformateur. Le primaire est alimenté par un GBF, suivi d'un amplificateur de puissance nécessaire pour atteindre des intensités suffisantes permettant d'observer le cycle d'hystérésis du matériau. Il comporte également un rhéostat de résistance $r = 33\,\Omega$. Le secondaire est constitué d'un intégrateur RC et de son alimentation.

À partir de la tension u aux bornes du rhéostat, on peut remonter à H par le théorème d'Ampère :

$$H = \frac{N_1 i}{l} = \frac{N_1}{rl} u,$$

avec l la longueur du tore et N_1 le nombre de spires au primaire.
La tension V_s au secondaire est reliée au flux magnétique Φ par la loi de Faraday :

$$V_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -N_2 S \frac{dB}{dt},$$

avec S la section du tore et N_2 le nombre de spires au secondaire.
On relie ensuite le champ magnétique B à la tension V_s en sortie de l'intégrateur :

$$V_s = -\frac{1}{RC}\int_0^t V_s\,dt = \frac{N_2 S}{RC} B + \text{cste}.$$

Pour remonter à B, il est nécessaire d'annuler cette constante qui provient de la dérive de l'intégrateur. La mise à zéro est effectuée en déchargeant le condensateur, grâce à une résistance placée en parallèle. En pratique, il suffit d'appuyer brièvement sur le bouton RAZ du boîtier P42 . 45 pour le décharger avant chaque expérience. Au final, ce montage nous permet de remonter à l'évolution du champ B dans le tore en fonction de l'excitation H, par la mesure des tensions u et V_s.

b. Tracé du cycle d'hystérésis d'une ferrite

Nous allons tracer l'allure du cycle d'hystérésis $B(H)$, représenté en figure 3, en affichant les tensions u et V_s sur un oscilloscope en mode XY.

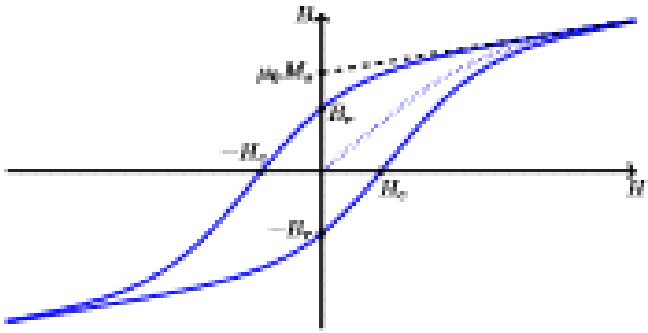


Figure 3 – Cycle d'hystérésis d'un matériau ferromagnétique.

Réaliser le montage de la figure 3 en utilisant le tore de ferrite P66 . 4/4 (tore à base carrée de coté $a = 12$ mm et de diamètre $d = 32$ mm, soit $S = a^2$ et $l = \pi d$, avec $N_1 = 100$ et $N_2 = 500$) et les éléments décrits précédemment. Utiliser l'entrée DC de l'intégrateur et régler sa résistance interne sur $R = 10$ kΩ. Régler l'amplificateur sur un gain de 10, avec une impédance d'entrée $Z_{in} = 600\,\Omega$, et le rhéostat sur $r \approx 33\,\Omega$.
Afficher u sur la voie 1 d'un oscilloscope et V_s sur la voie 2. Alimenter le circuit avec une tension sinusoïdale à 1 Hz en augmentant progressivement la tension de 0 à 500 mV.Passer en mode XY pour observer l'allure du cycle d'hystérésis $B(H)$ représenté en figure 3. On pourra utiliser le mode Persistance de l'oscilloscope.
Augmenter la tension du GBF jusqu'à 2 V pour observer la saturation du matériau. Mesurer les tensions correspondantes au champ rémanent B_r et à l'excitation coercitive H_c du matériau à partir du cycle, en déduire B_r et H_c, on rappelle les facteurs de conversion :

$$H = u\frac{N_1}{r\pi d} \quad \text{et} \quad B = V_s\frac{RC}{N_2 a^2}$$

Pour le tore de ferrite P66 . 4/4, nous obtenons : $B_r \approx 0{,}15$ T et $H_c \approx 80$ A/m.

Le cycle nous permet également d'estimer les pertes volumiques P_v dues à l'hystérésis du matériau. Elles correspondent à l'aire balayée au cours d'un cycle :

$$P_v = \int_{cycle} H\,dB$$

Acquérir les tensions u et V_s au cours d'un cycle sur Latis-Pro. Le cycle doit être centré autour de 0, pour cela décharger le condensateur avant la mesure et/ou retirer à V_s sa moyenne avec la `Feuille de Calcul`.
Convertir les tensions à l'aide de la `Feuille de Calcul` pour remonter à B et H. Latis-Pro n'ayant pas de fonction prédéfinie permettant de calculer une aire, nous allons utiliser Regressi. Exporter B et H dans un fichier au format txt (Menu `Fichier/Exportation`), puis ouvrir le fichier sous

> Regressi. Dans l'onglet `Expression`, calculer les pertes avec la formule : $P =$ aire (B,H).

Nous obtenons des pertes volumiques par cycle $P_v \approx 50$ J/m^3. On peut retrouver rapidement l'ordre de grandeur de ce résultat en assimilant le cycle d'hystérésis à un rectangle de largeur $2H_c$ et de hauteur $2B_r$. Son aire est alors $P_v \approx 4B_rH_c$.

c. Désaimantation et première aimantation

Pour désaimanter un matériau magnétique, il faut lui faire parcourir des cycles d'hystérésis en réduisant progressivement l'amplitude du champ jusqu'à l'annuler. Une fois le matériau désaimanté, il est possible de tracer sa courbe de première aimantation.

> Tracer le cycle d'hystérésis de la ferrite sur l'oscilloscope, puis réduire progressivement l'amplitude de la tension du GBF jusqu'à l'annuler. Le cycle converge vers le centre et le matériau se désaimante. Si l'annulation est trop rapide, il persistera une aimantation rémanente.
> Une fois le matériau désaimanté, il est possible de tracer sa courbe de première aimantation. Activer le mode Persistance de l'oscilloscope, et régler le GBF en mode tension continue. Partir d'une tension nulle, et l'augmenter progressivement jusqu'à la saturation (vers 2 V). On trace ainsi la courbe de première aimantation du matériau, représentée en pointillés sur la figure 3.

d. Comparaison de différents matériaux magnétiques

Liste du matériel :

- **le tore de fer doux `PGE.4/3`**

Le tore de fer doux `PGE.4/3` est un tore à base carrée de côté $a = 12$ mm et de diamètre $d = 52$ mm, avec $N_1 = 100$ et $N_2 = 500$.

Habituellement, les matériaux ferromagnétiques sont classés en deux catégories :

- Les ferromagnétiques durs ($H_c > 10^4$ A/m et $B_r > 1$ T) : ils présentent un cycle large, ils sont difficiles à aimanter mais conserve une aimantation importante. On les utilise pour fabriquer des aimants permanents.
- Les ferromagnétiques doux ($H_c < 400$ A/m et $B_r > 1$ T) : ils présentent un cycle étroit, ils sont plus faciles à aimanter et les pertes par hystérésis sont plus faibles. On les utilise dans les applications en électrotechnique (transformateur, électroaimant...).

La ferrite étudiée précédemment est un matériau ferrimagnétique ($H_c \approx 10$ A/m et $B_r < 1$ T). Elle est isolante et donc moins sensible aux pertes par courants de Foucault, mais en contrepartie son aimantation de saturation est plus faible que celle des ferromagnétiques.

Nous allons tracer le cycle d'hystérésis d'un fer doux.

> Recommencer les expériences précédentes en remplaçant le tore de ferrite par le tore de fer doux. Régler la résistance interne de l'intégrateur sur $R = 100$ kΩ pour éviter la saturation de sa sortie (qui apparaît vers 6 V). Tracer son cycle d'hystérésis sur l'oscilloscope pour différentes fréquences (100 mHz, 1 Hz et 10 Hz par exemple) avec une tension de 2 V. Observer que le cycle se réduit lorsque la fréquence augmente.

Contrairement à la ferrite, le fer est conducteur et donc traversé par des courants de Foucault. Ils empêchent le champ d'excitation de pénétrer dans le matériau, et rendent sa saturation plus difficile. L'effet augmente avec la fréquence ($P_v \propto f^2$).

> Régler la fréquence sur 100 mHz pour ne pas être affecté par les courants de Foucault. Augmenter la tension jusqu'à observer le début de la saturation du matériau (vers 4 V), tout en veillant à ne pas dépasser l'intensité maximale dans le rhéostat ni à saturer l'intégrateur ou l'oscilloscope !
> Le cycle est plus large et plus ovale que celui de la ferrite. Mesurer le champ rémanent B_r et l'excitation coercitive H_c du fer doux (attention la valeur de la résistance R de l'intégrateur a été

> modifiée).

Nous obtenons pour le fer doux : $B_r \approx 1$ T et $H_c \approx 200$ A/m.

Autres matériaux magnétiques (en seconde lecture)

Liste du matériel :

- le tore de ferrite P66.4/1
- le tore de ferrite P66.4/5
- le tore d'acier dur P66.4/2

> Tracer les cycles d'hystérésis des autres tores de ferrite, puis comparer leurs valeurs de B_r et H_c.
> On peut également observer le cycle d'hystérésis d'un tore d'acier dur.

Il n'est pas possible de saturer le tore P66.4/2 et donc de remonter à B_r et H_c. En effet, la saturation magnétique d'un tore d'acier dur demande une puissance importante, qu'il n'est pas possible d'atteindre avec ce montage sans dépasser l'intensité maximale des différents composants du circuit. La mesure de B_r et H_c des matériaux durs est difficile à réaliser.

2. Interprétation microscopique : domaines de Weiss

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1] (chap. : Ferromagnétisme), [3] (p.63) et [4] (pp. : 176-181) pour une présentation générale.

Liste du matériel :

- le microscope polarisant P16.29
- une lame de grenat ferrimagnétique P66.8
- un aimant permanent en fer ou en néodyme P63
- bobine de 5000 spires P60.22
- un noyau de fer doux P60.29
- un GBF
- un amplificateur de puissance P47.6 ou P47.5
- un ampèremètre

Pour la lame de grenat, utiliser de préférence l'échantillon n°1 derrière lequel est dessiné un sourire.

a. Observation des domaines

Il est possible d'observer les domaines de Weiss d'un matériau ferromagnétique grâce à un microscope polarisant. Si on éclaire une lame mince avec une lumière blanche polarisée, l'interaction entre le champ magnétique rémanent et la lumière produit une rotation de la polarisation par effet Faraday. En plaçant un analyseur croisé derrière l'échantillon, on voit alors apparaître un contraste entre les domaines dont l'aimantation est de sens opposé.

Nous allons utiliser le microscope polarisant P16.29, qui est constitué de 3 polariseurs : le premier se trouve au-dessus du miroir sous la platine, le second s'actionne en translatant la lame en métal au-dessus de l'objectif (nous ne l'utiliserons pas), et le troisième est intégré dans l'oculaire. Pour retirer le second polariseur, il faut tirer la lame en métal du côté où est inscrit LYON de l'étiquette jaune.

> Viser l'oculaire ×6 sur le microscope polarisant. Éclairer le miroir avec une source lumineuse (lampe quartz-iode et filtre anticalorique par exemple). Croiser le premier polariseur (au-dessus du miroir) pour atteindre l'extinction (le second polariseur étant intégré dans l'oculaire).
> Placer une lame de grenat ferrimagnétique sur la platine. Réaliser la mise au point en déplaçant l'objectif pour observer les domaines de Weiss.

L'image obtenue ressemble à un enchevêtrement de serpentins clairs et sombres. Les zones claires correspondent à des domaines de Weiss avec un moment magnétique dans un sens, et les zones sombres à des domaines avec un moment de sens opposé. Si le matériau est désaimanté, il y a autant de moments dans un sens que dans l'autre (donc autant de zones claires que de zones sombres).

b. Modification des domaines et déplacement des parois

En aimantant progressivement le matériau à l'aide d'une excitation magnétique, les moments tendent à s'aligner suivant une direction privilégiée. Le phénomène se manifeste principalement à l'interface entre les domaines. Les parois de Bloch se déplacent, et l'une des teintes (claire ou sombre) prédomine devant l'autre. Ce déplacement est réversible pour les excitations faibles, mais devient irréversible lorsque l'on s'approche de la saturation.

Dans un premier temps, le phénomène peut être observé simplement en rapprochant un aimant permanent.

> Approcher progressivement un aimant permanent (en fer ou en néodyme) de la lame de grenat, et observer le déplacement des parois. Éloigner l'aimant pour voir la réversibilité.
> Lorsque l'on approche l'aimant très près, le matériau atteint sa saturation qui correspond à la disparition de l'une des teintes. Le phénomène devient irréversible : les parois de Bloch ne se reforment pas aux mêmes endroits si on éloigne à nouveau l'aimant.

On peut ensuite rendre cette expérience plus dynamique et mieux contrôlée en utilisant une bobine pour générer le champ magnétique.

> Utiliser une bobine, à l'intérieur de laquelle on place un noyau de fer doux pour amplifier le champ. La bobine doit être placée au plus proche du microscope, de manière à avoir le noyau de fer à seulement quelques centimètres de l'échantillon. Alimenter la bobine par un GBF, en passant par un amplificateur de puissance réglé sur un gain de 10, afin de lui fournir une puissance suffisante pour générer le champ. Ajouter un ampèremètre en série avec la bobine pour contrôler l'intensité, elle ne doit pas dépasser 0,6 A, ce qui correspond à une tension d'environ 6 V_{pp} délivrée par le GBF.
> Observer le déplacement réversible des parois en délivrant une tension sinusoïdale basse fréquence (0,1 Hz par exemple) et de faible amplitude. Augmenter progressivement l'amplitude pour retrouver l'irréversibilité du phénomène.

c. Tracé du cycle d'hystérésis (en seconde lecture)

Liste du matériel :

- le microscope polarisant P16.29
- une lame de grenat ferrimagnétique P66.8
- bobine de 5000 spires P60.22
- un noyau de fer doux P60.29
- un GBF
- un amplificateur de puissance P47.6 ou P47.5
- un ampèremètre
- une caméra IDS P32.17
- un objectif macro P32.16

Il est possible de retrouver le cycle d'hystérésis du matériau grâce à une analyse quantitative de l'effet Faraday. L'intensité lumineuse moyenne de l'image observée est liée à la proportion de domaines de Weiss dont le moment est dans un sens (zones claires par exemple) par rapport à l'autre (zones sombres). On peut alors remonter à une grandeur proportionnelle à l'aimantation moyenne dans le matériau.
L'observation des domaines est cette fois réalisée à l'aide d'une caméra, afin de traiter numériquement les images.

> Reprendre l'expérience précédente, et retirer l'oculaire du microscope. Comme il n'y a plus l'analyseur intégré dans l'oculaire, il faut en rajouter un : soit en activant le second polariseur du microscope (tirer la lame en métal du côté ESI de l'étiquette jaune), soit en plaçant un polariseur directement devant la caméra. Croiser ensuite le premier polariseur (au-dessus du miroir) pour retrouver l'extinction.
> Placer une caméra IDS sur laquelle est fixée un objectif macro en sortie du microscope. Relier la caméra à un ordinateur par un câble USB, et utiliser le logiciel Uvye Cockpit pour l'observation. Réaliser la mise au point en déplaçant l'objectif du microscope afin d'obtenir l'image des domaines

de Weiss sur l'écran.

REMARQUE : L'obtention d'une image nette des domaines de Weiss avec la caméra est assez long et difficile.

Exciter l'échantillon à l'aide d'une tension sinusoïdale de quelques hertz, et acquérir une vidéo du déplacement des parois à l'aide de la caméra.
Enregistrer la vidéo, puis réaliser un traitement des images sous Image] pour remonter à l'intensité moyenne de chaque image. Soustraire l'intensité correspondant à une excitation nulle (moyenne de l'intensité de toutes les images au cours d'un cycle) pour remonter à une grandeur proportionnelle à l'aimantation dans le matériau. Tracer cette grandeur en fonction du temps, puis en fonction du champ sinusoïdal excitateur (on repère les maxima et minima du champ à partir des maxima et minima de l'intensité lumineuse). On obtient une courbe similaire au cycle d'hystérésis du matériau.

Références

[1] J.-M. Dunnini et L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale, Tome IV : Électricité et applications*, Pierron (2004).

[2] C. Garing, *Magnétisme : statique, induction et milieux*, Ellipses (1995).

[3] P. Brendon, *Électrotechnique et conversion de puissance PSI*, Les nouveaux précis Bréal (2005).

[4] M. Bertin, J.-P. Faroux et J. Renault, *Électromagnétisme 4*, Dunod (1984).

Exemples de résultats expérimentaux

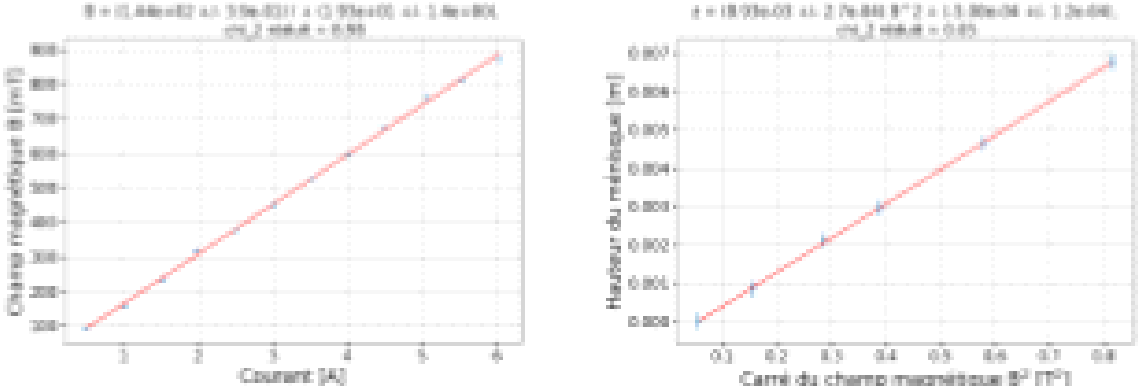


Figure A1 – Ascension paramagnétique de $PrCl_3$ (voir l'Exp. 2) : étalonnage de l'électro-aimant et mesures. © Y. Fauve

Conversion électrique

Table des expériences

I.	Transformateur	28
II.	Redressement et lissage	35
III.	Hacheur (en seconde lecture)	39

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pourrez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Transformateur

1. Intérêt du transformateur

Nous renvoyons le lecteur à la RéE [1] (p.8) pour une présentation générale.

Pour être transportée sur de longues distances des lieux de production aux lieux de consommation, l'électricité doit être sous haute tension. Pour le comprendre, on considère le schéma simplifié de distribution de la figure 1.

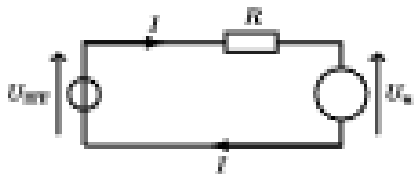


Figure 1 – Schéma simplifié de distribution électrique.

La puissance produite est $\mathcal{P}_p = U_{HT} I$. La puissance dissipée dans les câbles est $\mathcal{P}_d = RI^2$ donc $\mathcal{P}_d = R\frac{\mathcal{P}_p^2}{U_{HT}^2}$ ainsi :

$$\frac{\mathcal{P}_d}{\mathcal{P}_p} = R\frac{\mathcal{P}_p}{U_{HT}^2}$$

Pour une puissance produite $\mathcal{P}_p$ fixée, il faut que U_{HT} soit aussi grand que possible pour minimiser les pertes par effet Joule dans les câbles de transport d'électricité.

Ordres de grandeur Pour un diamètre de câble en cuivre de 5 cm, d'une longueur de 50 km et une puissance donnée de 1 GW (une grande ville) :

- pour $U = 400$ kV (haute tension) : $\frac{\mathcal{P}_d}{\mathcal{P}_p} = 0{,}2$ %;
- pour $U = 63$ kV (moyenne tension) : $\frac{\mathcal{P}_d}{\mathcal{P}_p} = 8$ %;

Remarque : en pratique, l'électricité est transportée sous forme triphasée pour réduire les pertes Joule d'un facteur 3.

Pour élever les niveaux des tensions en sortie des centrales, puis l'abaisser pour la distribuer aux utilisateurs, on utilise un transformateur : il permet de changer la valeur efficace de la tension sinusoïdale appliquée à son entrée sans en changer la fréquence, tout en conservant la puissance électrique.

2. Étude d'un transformateur modèle

a. Constitution

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [2] (p.8) et Réf. [4] (p.114) pour une présentation générale.

On étudiera dans toute la suite un transformateur monophasé. Il est constitué d'un matériau ferromagnétique sur lequel sont bobinés deux enroulements électriques indépendants. Le rôle du circuit magnétique est d'assurer une canalisation optimale des lignes de champ magnétique afin d'obtenir un couplage maximal entre les deux enroulements.

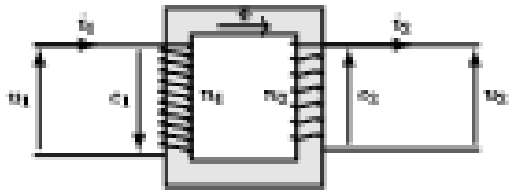


Figure 2 – Schéma simplifié du transformateur monophasé de tension.

L'enroulement qui est relié à la source d'alimentation est appelé enroulement primaire, les grandeurs associées seront indiquées par le chiffre 1. L'autre enroulement, relié à la charge, est appelé enroulement secondaire, les grandeurs associées seront indiquées par le chiffre 2. Lorsque la tension au secondaire est plus élevée qu'au primaire, on parle d'élévateur de tension (à la sortie d'une centrale par exemple). Dans le cas contraire, on parle d'abaisseur de tension (transformateur de quartier par exemple). Il existe aussi des transformateurs où la tension est identique au primaire et au secondaire : un tel transformateur est appelé transformateur d'isolement et permet d'isoler la masse de la terre : on évite ainsi des électrocutions en milieu humide (salle de bain par exemple).

Liste du matériel :

- la bobine à 500 spires P60 . 20,
- la bobine à 250 spires P60 . 19,
- les éléments feuilletés P 60 . 30 et P60 . 16.

> Pour constituer un transformateur, prendre deux bobines dont le nombre de spires est connu et les insérer dans un circuit magnétique fermé comme représenté sur la figure 2.

b. Modèle du transformateur parfait

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [2] (p.12), Réf. [4] (p.114) et Réf. [3] (p.1263) pour une présentation générale.

On utilisera la convention récepteur pour le primaire (u_1, i_1) et la convention générateur pour le secondaire (u_2, i_2). Les forces électromotrices d'induction e_1 et e_2 sont définies dans le sens des courants respectifs.

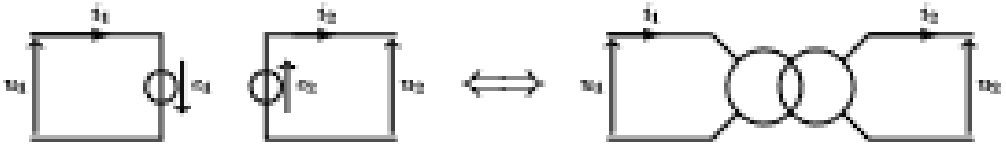


Figure 3 – Schématisation du transformateur parfait.

Dans un transformateur parfait, on suppose que :

- le circuit magnétique est linéaire, homogène et isotrope, et la perméabilité relative du matériau μ_r est infinie ;

- il n'existe aucune ligne de champ magnétique en dehors du circuit magnétique, donc aucune perte de flux ;
- la résistance des enroulements est nulle.

On note Φ le flux du champ magnétique, n_1 et n_2 le nombre de spires respectivement au primaire et au secondaire. La loi de Faraday donne :

$$e_1 = -n_1\frac{d\Phi}{dt} \qquad \text{et} \qquad e_2 = n_2\frac{d\Phi}{dt}$$

Or $u_1 = -e_1$ et $u_2 = e_2$ donc :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{n_2}{n_1} = m$$

Où on a défini le rapport de transformation $m = n_2/n_1$. Le théorème d'Ampère appliqué sur une ligne de champ au sein du matériau ferromagnétique s'écrit :

$$n_1 i_1 - n_2 i_2 = \int \vec{H}.\vec{dl}$$

Donc, comme $H = 0$ (car $\mu_r \to +\infty$) :

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{m}$$

La puissance reçue par le transformateur au primaire est $u_1 i_1$ et celle délivrée au secondaire est $u_2 i_2$. Or :

$$u_2 i_2 = m u_1 (1/m) i_1 = u_1 i_1$$

La puissance est intégralement transmise.

c. Étude à vide et en court-circuit, rapport de transformation

Nous renvoyons le lecteur à la BGL [4] (p.118) pour une présentation générale.

Liste du matériel :

- **l'alternostat P57.6,**
- **le boîtier d'alimentation avec prise et cordons de sécurité P57.14.**

On utilisera tout au long du TP un alternostat qui permet de délivrer des tensions entre 0 et 240 V à 50 Hz, associées à des courants importants.

⚠ Les alternostats utilisés créent de fortes surintensités au démarrage pouvant faire disjoncter l'alimentation de la salle de TP. Veillez à respecter le protocole ci-dessous à chaque démarrage !

> Avant d'allumer l'alternostat, tourner la molette sur 5%, ne rien brancher à ses bornes puis le mettre en route. Mettre la molette au minimum et réaliser ensuite le câblage électrique à l'aide d'un boîtier équipé de prise et de cordons de sécurité. On peut maintenant utiliser l'alternostat.

⚠ Inversement, lorsque l'on souhaite par exemple débrancher l'alimentation du transformateur, il faut absolument redescendre au préalable la molette à 0% avant d'intervenir sur le circuit alimenté par l'alternostat : les tensions sont importantes et la limite en courant est élevée !

On effectue un premier test du transformateur à vide : il n'y a que le voltmètre branché au secondaire.

> Câbler le circuit 6 de gauche. On utilisera le transformateur constitué précédemment. Pour différentes tensions au primaire (que l'on fait varier grâce à la molette de l'alternostat), mesurer la tension au secondaire (utiliser des voltmètres `Tronic 1081` en mode alternatif). Tracer u_2 en fonction de u_1 et comparez la pente de la droite à $m = n_2/n_1$.

On effectue un second test du transformateur, en court-circuit cette fois : le transformateur débite directement sur l'ampèremètre au secondaire.

Câbler le circuit 4 de droite. Pour différentes tensions au primaire, mesurer les intensités au primaire et au secondaire (utiliser des ampèremètres en mode alternatif). Attention à ne pas dépasser l'intensité maximale supportée par les bobines. Tracer i_2 en fonction de i_1 et comparez la pente de la droite à $1/m = n_2/n_1$.

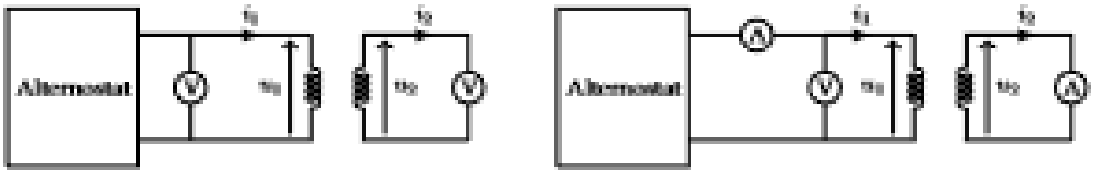


Figure 4 – Étude du transformateur à vide (à gauche) et en court-circuit (à droite).

3. Étude détaillée du transformateur et bilan énergétique

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [7] (pp.66-81) et Réf. [4] (pp.115-120) pour une présentation générale.

a. Limites du modèle du transformateur parfait

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [3] (p.1266) et Réf. [6] (p.151) pour une présentation générale.

Nous avons fait plusieurs hypothèses pour définir le modèle du transformateur parfait, qui ne sont pas toujours vérifiées lors de l'utilisation pratique d'un transformateur.

1. Pour un milieu magnétique de perméabilité μ_r, le théorème d'Ampère s'écrit :

$$n_1 i_1 - n_2 i_2 = \oint \vec{H}.\vec{dl} = l\frac{\Phi}{\mu_0\mu_r S} = \mathscr{R}\Phi$$

   On a noté l la longueur du circuit magnétique, S sa section et Φ le flux au sein du circuit magnétique. Cette relation définit la reluctance $\mathscr{R}$ du circuit magnétique, c'est-à-dire sa capacité à s'opposer à sa pénétration par un champ magnétique.

   Si on impose u_1, le flux Φ se trouve imposé et on peut écrire :

$$i_1 = m i_2 + i_{L_1}$$

   ce qui peut s'interpréter comme une loi des nœuds où un dipôle est traversé par l'intensité i_L. Ce dipôle est une pure inductance de valeur $L = n_1^2/\mathscr{R}$. Le courant i_L est appelé courant magnétisant.

2. On nomme pertes fer et on note $\mathscr{P}_F$ les pertes d'énergie sous forme de chaleur dans le matériau ferromagnétique à cause des phénomènes d'hystérésis et des courants de Foucault : ces pertes ne sont pas négligeables. On peut représenter ces pertes par une résistance équivalente R_F telle que $\mathscr{P}_F = e_1^2/R_F$.

3. Le couplage entre le primaire et le secondaire n'est pas parfait : une partie du flux qui traverse le primaire ne traverse pas le secondaire et inversement : ces fuites sont prises en compte par l'ajout de deux inductances L_1 et L_2 sur le schéma 5. Ces inductances ne correspondent pas aux inductances des bobines et ne peuvent être mesurées directement.

4. Les résistances des enroulements ne sont pas négligeables : on prend en compte les résistances des enroulements primaire et secondaire R_1 et R_2 : ces résistances peuvent être mesurées à l'ohmmètre. Les pertes dues à la présence de ces résistances sont nommées pertes cuivre.

Le schéma équivalent du transformateur réel est ainsi présenté en figure 5.
On notera dans la suite $Z_1 = R_1 + jL_1\omega$, $Z_2 = R_2 + jL_2\omega$ et $Z_F = \frac{R_F}{1+jR_F/(L_F\omega)}$.

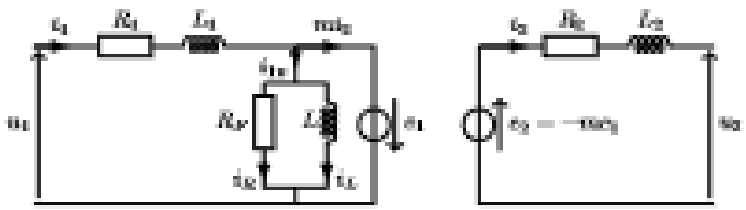


FIGURE 5 – Modélisation linéaire du transformateur réel.

b. Retour sur la mesure du rapport de transformation

Étude à vide On place au secondaire un voltmètre de grande impédance, on a alors $i_2 = 0$. Ainsi, $u_2 = e_2$ et la loi des noeuds donne $i_1 = i_{1e}$. Un pont diviseur de tension donne :

$$u_2 = m\frac{Z_F}{Z_F + Z_1}u_1$$

L'étude à vide qui précède donne donc $\left|m\frac{Z_F}{Z_F+Z_1}\right|$ et non m : le rapport de transformation est légèrement sous-estimé.

Étude en court-circuit On place un ampèremètre au secondaire de très faible impédance. On peut alors supposer que $u_2 = 0$ [1]. La loi des noeuds donne :

$$mi_2 + i_{1e} = i_1$$

Or $i_{1e} = \frac{m i_2 Z_2}{Z_F}$ et $e_2 = Z_2 i_2$ donc :

$$m\left(1 + \frac{Z_2}{m^2 Z_F}\right) i_2 = i_1$$

L'étude en court-circuit qui précède donne donc $m\left|1 + \frac{Z_2}{m^2 Z_F}\right|$ et non m : le rapport de transformation est légèrement surestimé.

c. Méthodes des pertes séparées

L'étude à vide du transformateur permet de déterminer les pertes fer dues aux courants de Foucault dans le matériau ferromagnétique qui dépendent de la tension au primaire U_1. L'étude en court-circuit du transformateur permet de déterminer les pertes cuivre dues à l'effet Joule dans les bobinages qui dépendent de l'intensité au primaire I_1. Ces déterminations sont appelées méthodes des pertes séparées : dans l'essai à vide, les courants sont faibles et les pertes cuivres sont négligeables, dans l'essai en charge, la tension est faible est les pertes fer sont négligeables [2]. On peut montrer que le rendement du transformateur est maximum si $\mathcal{P}_F = \mathcal{P}_{Cu}$.

d. Étude à vide et pertes fer

Liste du matériel :

- **le transformateur d'étude P66.18,**
- **un wattmètre P50.17.**

On calcule l'importance des pertes fer en réalisant une étude à vide détaillée du transformateur. En toute rigueur, la puissance dissipée par ces pertes fer est $\mathcal{P}_F = e_1 i_{1e}$. Par ailleurs, on place au secondaire un voltmètre de grande impédance, donc $i_2 = 0$. Ainsi, $u_2 = e_2$ et la loi des noeuds donne $i_1 = i_{1e}$. Par ailleurs, i_{1e} est assez faible, donc $u_1 \approx e_1$. Ainsi, on pourra supposer que $\mathcal{P}_F = u_1 i_{1e}$. Le schéma équivalent du transformateur est alors exposé figure 6 à gauche.

1. On peut utiliser $u_2 = Z_A i_2$ (Z_A désignant l'impédance de l'ampèremètre), sans changer le principe du calcul.
2. Attention, ça n'est pas tout à fait le cas si on étudie un transformateur "fait maison" où les pertes fer sont assez importantes.

Pour mesurer la puissance électrique consommée par un dipôle, on utilisera un wattmètre qui fournit la puissance moyenne $\mathcal{P}$. C'est indispensable de disposer de cet appareil si tension et intensité sont déphasées. Pour plus d'informations sur le fonctionnement et l'utilisation de cet appareil, on pourra consulter la Réf. [4] (p.108).

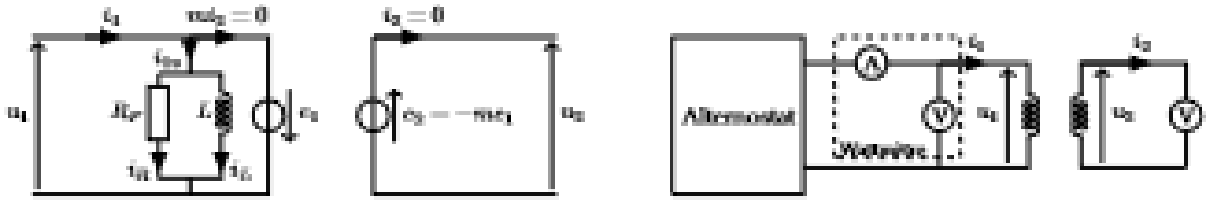


FIGURE 6 – Approximation du transformateur lors de l'étude à vide (à gauche) et circuit pour l'étude à vide (à droite).

> Câbler le montage présenté en figure 6 à droite en prenant garde au branchement du wattmètre. On utilisera le transformateur d'étude PGE_18. Relever avec le wattmètre U_1, I_1, $\mathcal{P}_1$ pour différentes tensions d'entrée U_1 entre 0 et 220 V.

D'une part :

$$\mathcal{P}_1 = \frac{1}{2}\Re(u_1 i_1^*) = \Re\left(\frac{1}{Z_F}\right) U_1^2 = \frac{1}{R_F} U_1^2$$

D'autre part :

$$I_1 = \left|\frac{1}{Z_F}\right| U_1 = \sqrt{\frac{1}{R_F^2} + \frac{1}{L^2\omega^2}}\, U_1$$

> Représenter $\mathcal{P}_1$ en fonction de U_1^2 puis I_1 en fonction de U_1. Réaliser un ajustement linéaire dans les deux cas, en déduire R_F puis $L\omega$.

e. Étude en court-circuit et pertes cuivre

Lorsque le courant d'utilisation i_1 devient élevé par rapport au courant à vide i_{10}, on peut négliger ce dernier. Dans ce cas, on utilise le modèle simplifié dit de Kapp, représenté en figure 7. En exprimant en notation complexe $u_1 = (R_1 + jL_{1\omega})m i_2 - e_1$ et $u_2 = -m e_1 - (R_2 + jL_{2\omega})i_2$, on obtient :

$$u_2 = e_2 - Z_s i_2$$

Le modèle du transformateur devient un générateur de Thévenin, de force électromotrice $e_2 = m e_1$, d'impédance interne $Z_s = R_s + jL_{s\omega}$, où $R_S = R_2 + m^2 R_1$ et $L_S = L_2 + m^2 L_1$.

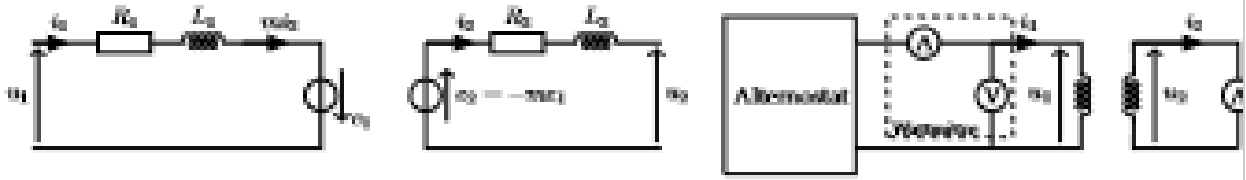


FIGURE 7 – Approximation du transformateur en court-circuit (modèle de Kapp, à gauche) et circuit pour l'étude en court-circuit (à droite).

Pour évaluer les pertes cuivre, on se place en court-circuit soit $u_2 = 0$. Dans ce cas, les courants i_1 et i_2 sont importants, on utilise le modèle de Kapp. En court-circuit, $e_2 = Z_2 i_2$ donc :

$$u_1 = Z_1 i_1 - e_1 = Z_1 i_1 + \frac{e_2}{m} = Z_1 i_1 + \frac{Z_2 i_2}{m} = Z_1 i_1 + \frac{Z_2 i_1}{m} = \left(Z_1 + \frac{Z_2}{m^2}\right) i_1$$

> Câbler le montage présenté en figure 7 à droite en prenant garde au branchement du wattmètre. Relever U_1, I_1, P_1 pour différents courants d'entrée I_1 entre 0 et 2 A.

D'une part :

$$P_1 = \frac{1}{2}\Re[u_1 i_1^*] = \Re\left(Z_1 - \frac{Z_2}{m^2}\right) I_1^2 = \left(R_1 + \frac{R_2}{m^2}\right) I_1^2$$

D'autre part :

$$U_1 = |Z_1|\, I_1 = \sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2}{m^2}\right)^2 + \omega^2\left(L_1 + \frac{L_2}{m^2}\right)^2}\, I_1$$

> Représenter P_1 en fonction de I_1^2 puis U_1 en fonction de I_1. En déduire $L_1 + \frac{L_2}{m^2}$ et $R_1 + \frac{R_2}{m^2}$. Mesurer directement à l'ohmmètre les résistances du primaire et du secondaire R_1 et R_2 et comparer Z_1 à Z_p, vérifier que $Z_1 \ll Z_p$.

f. Étude en charge et rendement

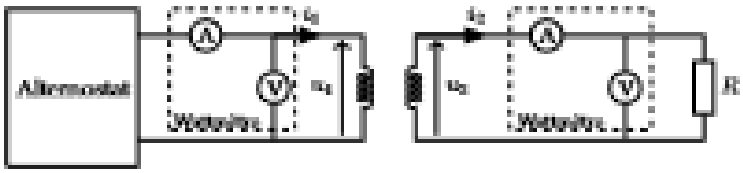


FIGURE 8 – Étude du transformateur en charge.

Liste du matériel :

- **un rhéostat de puissance** P61.9

> Câbler le montage présenté en figure 8. Pour la résistance de charge R, on utilisera un rhéostat de puissance de 100 Ω et on prendra garde à ne pas dépasser la limite en courant indiquée. On pourra commencer avec $R \approx 20\ \Omega$. Pour différentes tensions d'entrée, relever U_1, I_1, P_1, U_2, I_2, P_2. Représenter U_2 en fonction de U_1, I_2 en fonction de I_1 et P_2 en fonction de P_1 pour obtenir le rapport des tensions, le rapport des courants et le rendement. Répéter l'opération pour quelques valeurs de résistances de charge différentes entre 5 Ω et 50 Ω et tracer le rapport des tensions, le rapport des courants et le rendement en fonction de la résistance de charge pour trouver les valeurs nominales de fonctionnement.

Les pertes fer sont égales à $P_F = e_1^2/R_F \simeq U_1^2/R_F$ et les pertes cuivres à $P_{Cu} = (R_1 + m^2 R_2) I_1^2$.

> En fonction des mesures de U_1 et de I_2, évaluer l'importance des pertes fer et cuivre et vérifier que l'on retrouve bien $P_1 = P_2 + P_F + P_{Cu}$.

On voit que les lois des tensions et des courants apparaissent comme deux lois limites qui ne sont pas simultanément vérifiées : la loi des courants est d'autant mieux vérifiée que le courant est élevé (que la résistance de charge est faible) et que le courant à vide est donc faible devant le courant "utile". La loi des tensions est d'autant mieux vérifiée que le courant est faible (que la résistance de charge est élevée) et que l'on peut négliger l'impédance Z_S devant l'impédance de charge R.

Pour un bon transformateur, dans les conditions nominales d'utilisation, ces deux lois sont relativement bien vérifiées (le rendement est alors proche de 1).

4. Autres applications

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [4] (pp.122-124) pour une présentation générale.

a. Pince ampèremétrique

Liste du matériel :

- **la pince ampèremétrique P50.16**

Une pince ampèremétrique est un appareil de mesure qui permet de mesurer le courant dans un circuit sans avoir à ouvrir le circuit. La pince se comporte comme un transformateur de courant dont le primaire est le fil où l'on veut mesurer le courant et le secondaire une bobine enroulée sur un circuit magnétique torique entourant le fil. Ce montage est très élévateur en tension et le secondaire est par conséquent placé en court-circuit sur un ampèremètre, très souvent intégré dans l'appareil.

> Avec une pince ampèremétrique, mesurer le courant circulant dans un des fils alimentant l'alternostat. Pour cela, il faut que le fil passe entre les mâchoires de la pince.

b. Chauffage par induction (en seconde lecture)

Liste du matériel :

- **la goulotte P64.1.**

Pour montrer le principe, on peut construire un transformateur très élévateur de courant avec 1000 spires au primaire et une seule au secondaire. Le courant très élevé circulant dans la spire en forme de goulotte peut provoquer la fusion de l'étain placé dedans.
⚠ Ce transformateur est très abaisseur de tension donc le risque d'électrisation en touchant la spire est inexistant. En revanche, le risque de brûlure est grand !

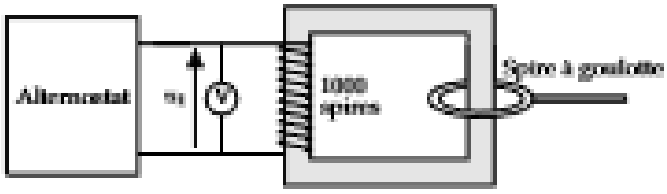


Figure 9 – Chauffage par induction.

Il est possible d'observer la fusion d'un fil d'étain dans la goulotte P64.1 (attention, celle-ci est percée à un endroit !). Ce principe est très utilisé, en particulier pour la soudure à l'arc et dans la métallurgie pour les fours à arc.

II. Redressement et lissage

1. Intérêt

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [6] (p.278) et Réf. [7] (p.386) pour une présentation générale.

Le but du redressement et du lissage est d'obtenir une tension continue à partir d'une tension alternative sinusoïdale généralement fournie par le réseau de distribution. Ce problème a de nombreuses applications puisque quasiment tous les composants électroniques sont alimentés par des tensions continues. Il est également fréquemment utilisé en électronique de puissance, entre deux réseaux électriques différents (à l'entrée du tunnel sous la Manche par exemple) ou pour l'utilisation de machines à courant continu (locomotives, machines-outil, etc.).

On distingue généralement deux phases dans ce processus :

- Le redressement qui fournit à partir de la tension alternative une tension de signe constant, généralement égale à la valeur absolue de la tension alternative. Le redressement est basé sur les propriétés dissymétriques de certains composants comme les diodes ou les thyristors.
- Le lissage qui fournit une tension continue à partir de la tension redressée.

2. Redressement monoalternance

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [7] (p.387) et Réf. [4] (p.132) pour une présentation générale.

Considérons le montage présenté en figure 10, avec $e(t) = E\cos(\omega t)$. La loi des mailles s'écrit $u_D = e - Ri$. On distingue deux possibilités :

- Si la diode est bloquée, alors $i = 0$ et $u_D \leq 0$. La loi des mailles donne donc $u_D = e$ et la loi d'Ohm $u_R = 0$. Cela est valable tant que $u_D \leq 0$ donc la diode est bloquée si $e \leq 0$.
- À l'inverse, si la diode est passante, $i \geq 0$ et $u_D = 0$. La loi des mailles donne $u_R = Ri = e$. Par ailleurs, $i \geq 0$ donc $e \geq 0$.

La figure 10, à droite, représente l'évolution de u_R et de e au cours du temps.

Remarque : si la tension d'alimentation est trop faible, la tension de seuil n'est plus forcément négligeable. La diode est passante si $e > u_s$ et bloquée si $e \leq u_s$. Quand elle est passante, $u_D = u_s$ donc $u_R = e - u_s$.

Liste du matériel :

- une diode 1N4007 P29.4,
- un rhéostat P61.1,
- l'alternostat P57.6

> Câbler le montage présenté en figure 10, en utilisant une diode 1N4007, un rhéostat de 1000 Ω et un alternostat. Alimenter avec une tension inférieure à 20 V et observer les tensions e et u_R à l'oscilloscope. Constater l'effet du seuil lorsque la tension d'alimentation est faible : la tension u_R est inférieure à la tension d'alimentation e.

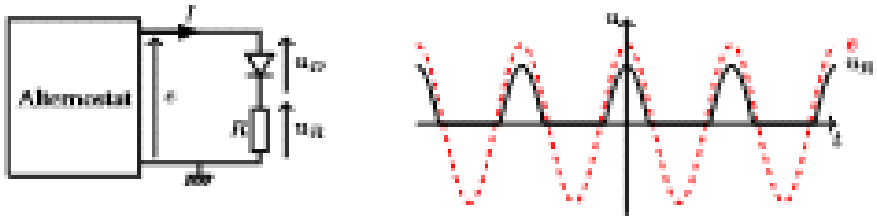


FIGURE 10 – Redressement monoalternance.

3. Redressement double alternance

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [7] (p.389), Réf. [4] (p.133), Réf. [5] (p.292) et Réf. [6] (p.275) pour une présentation générale.

On considère le montage de la figure 11, nommé pont de Graetz. Il comporte quatre diodes identiques permettant de réaliser un redressement double alternance.

Principe du pont de Graetz Traitons d'abord le cas $e > 0$. Comme le circuit n'est composé que de diodes (supposées idéales) et de résistances $I > 0$. Les intensités traversant les diodes sont positives ou nulles. i_{D1} est donc positive strictement : D_1 est passante et $u_{D1} = 0$. Par ailleurs $u_{D1} - u_{D2} = e > 0$ donc $u_{D2} \leq 0$: D_2 est bloquée. Puis $i_{D3} = I > 0$ donc D_3 est passante. Enfin $u_{D4} < 0$ donc D_4 est bloquée. On procède de même lorsque $e < 0$. Les circuits équivalents et le comportement des diodes en fonction du signe de e sont présentés en figure 12.

Le courant circulant dans R a toujours le même sens. Comme $u_R = Ri$, la tension aux bornes de R est de signe constant et égale à la valeur absolue de $e(t)$. Si on prend en compte le seuil des diodes, les deux diodes passantes retranchent chacune u_s à la tension aux bornes de la charge, celle-ci vaut alors $|e| - 2u_s$ où u_s désigne la tension de seuil des diodes.

Liste du matériel :

- 4 diodes 1N4007 P29.4,

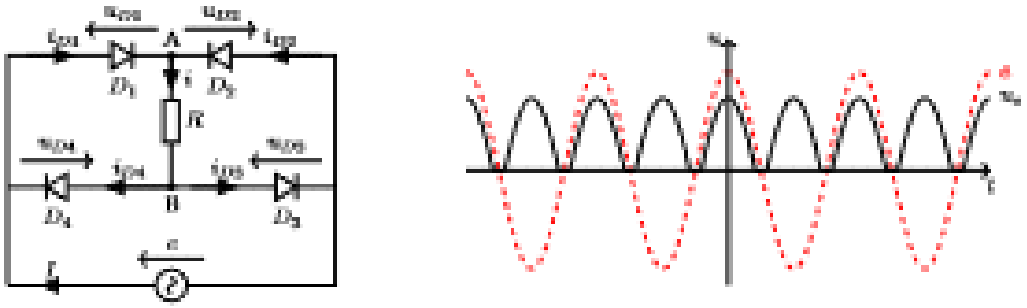


Figure 11 – Redressement par pont de Graetz.

Alimentation e	Diodes				Sortie u_R
	D_1	D_2	D_3	D_4	
$e > 0$	Passante	Bloquée	Passante	Bloquée	$e > 0$
$e < 0$	Bloquée	Passante	Bloquée	Passante	$-e > 0$

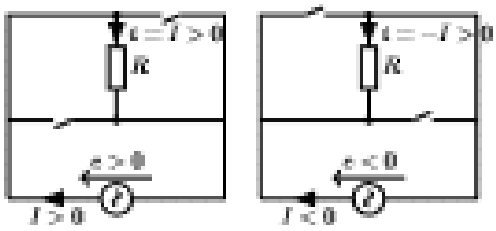


Figure 12 – Redressement par pont de Graetz : analyse du circuit.

- un rhéostat P 61 . 1,
- deux sondes différentielles P 37 . 12,
- un multimètre,
- un oscilloscope,
- l'alternostat P 57 . 6.

> Prendre 4 diodes 1N4007 et les tester au multimètre (multimètre en mode diode-mètre, on obtient 0,6 V dans un sens et overload dans l'autre). Câbler le montage présenté en figure 11, l'alimenter par l'alternostat (attention au démarrage !). On choisira comme charge R un rhéostat de 1000 Ω pour commencer. Observer à l'aide des sondes différentielles (sinon on court-circuite l'alternostat !) les tensions e et u_R à l'oscilloscope. Constater l'effet du seuil lorsque la tension d'alimentation est faible.

Remarque : pour mettre en évidence le fonctionnement du pont de Graetz, il est possible de l'alimenter par un signal très basse fréquence délivré par un GBF (10 V, 0,5 Hz) et de remplacer les diodes par des LED. On pourra par exemple câbler le montage 4 de la Réf. [6], p.275.

4. Lissage

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [7] (p.389), Réf. [4] (p.133), Réf. [5] (p.292) et Réf. [6] (p.275) pour une présentation générale.

Nous avons obtenu un signal de moyenne strictement positif. L'objectif est maintenant d'obtenir une tension continue, il faut donc supprimer l'ondulation des signaux redressés. Une possibilité est d'ajouter un condensateur en sortie du redresseur, comme sur la figure 13.
On peut distinguer quatre phases :

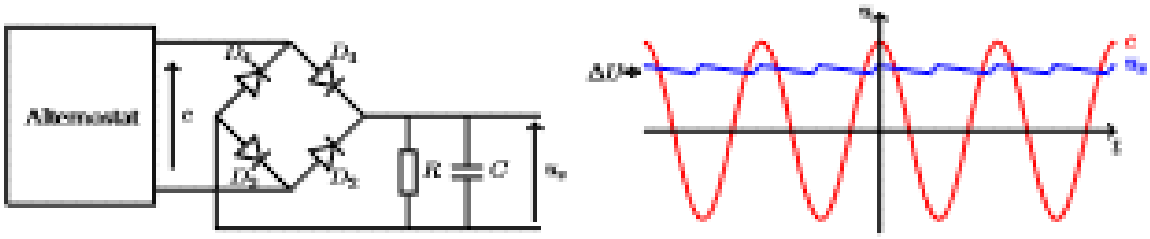


FIGURE 13 – Redressement par pont de Graetz et lissage par cellule RC.

- Dans un premier temps, D_1 et D_3 sont passantes, D_2 et D_4 sont bloquées, la tension u_s suit l'évolution de e.
- La tension e décroît rapidement et le condensateur, freinant l'évolution de u_s, l'empêche de suivre la décroissance de e. La diode D_1 se bloque elle aussi et le circuit RC se retrouve isolé : la décroissance de la tension u_s est due à la décharge du condensateur C dans la résistance R.
- Au moment où $e < -u$ avec $-e > 0$, D_2 et D_4 deviennent passantes, D_1 et D_3 bloquées, u suit l'évolution de $-e$.
- Lorsque e croît rapidement, le condensateur empêche de nouveau les variations brutales de tension.

Si le produit RC est très grand, la décroissance de u est négligeable et la tension de sortie est continue et égale à l'amplitude de la tension sinusoïdale E.

Liste du matériel :

- une boîte de condensateurs P51.21
- un rhéostat P61.1,
- deux sondes différentielles P37.12,
- un oscilloscope,
- un wattmètre,
- l'alternostat P57.6.

> Câbler le montage présenté en figure 13 à gauche, l'alimenter par l'alternostat (attention au démarrage !). On choisira comme charge R un rhéostat de 1000 Ω et une boîte de condensateurs (avec 30 μF par exemple). ATTENTION au sens de branchement des capacités chimiques, commencer avec une faible tension ! Observer à l'aide de sondes différentielles les tensions e et u_s à l'oscilloscope. Mesurer avec un voltmètre True RMS en mode alternatif l'ondulation en sortie ΔU pour différentes résistances R mesurées à l'ohmmètre (sortir le rhéostat du circuit) et tracer $\Delta U/E$ en fonction de $1/R$.

L'ondulation, dans la limite où RC n'est pas trop grand, est :

$$\Delta U = \frac{\pi E}{RC\omega}$$

> Mesurer au wattmètre la puissance en entrée et en sortie en fonction de la résistance de charge R. En déduire le rendement de la conversion.

Évolutions possibles (en seconde lecture) On a obtenu jusqu'à maintenant une tension continue avec une ondulation réduite. Cependant, la tension peut varier si l'amplitude de la tension sinusoïdale varie, et le taux d'ondulation peut varier si la charge varie. On peut réaliser des montages pour stabiliser la tension continue, on pourra par exemple consulter la Réf. [5] (p.286).

5. Lissage par une bobine (en seconde lecture)

Il est possible de diminuer l'ondulation du courant débité par un montage redresseur en plaçant une bobine de lissage en série avec la charge. On peut par exemple alimenter un moteur à courant continu directement en sortie du pont de Graetz.

Liste du matériel :

- **le moteur à courant continu P0 . 5,**
- **le petit moteur P95 . 16.**

> Alimenter un moteur à courant continu directement en sortie du pont de Graetz. **Avec le petit moteur P95 . 16 ne pas dépasser 10 V.** Contrôler le courant entrant dans le moteur de façon à éviter qu'il dépasse le courant maximal admissible.

La rotation est régulière car la fréquence du secteur est élevée.

III. Hacheur (en seconde lecture)

1. Intérêt et principe

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [8] (pp.531-546) pour une présentation générale.

Le but d'un montage à hacheur est de réaliser un transfert de puissance d'une source électrique délivrant une grandeur continue vers une charge devant être alimentée par une grandeur également continue mais de valeur plus basse. Cela ne peut pas être fait à l'aide de transformateurs électriques car ceux-ci reposent sur l'induction et nécessitent donc des tensions variables dans le temps.

Supposons que nous disposions d'une batterie délivrant la tension $E = 12$ V et que l'on souhaite alimenter une ampoule de résistance R_a admettant une tension maximale de $U = 3$ V. Nous devons abaisser la tension continue. Une façon simple de procéder consiste à réaliser un pont diviseur de tension en plaçant un rhéostat de résistance R en série dans le montage. La tension aux bornes de l'ampoule sera :

$$U = \frac{R_a}{R_a + R} E$$

On peut ajuster R de telle façon à obtenir la valeur de U désirée. Le rendement η d'un tel dispositif est le rapport de la puissance fournie à l'ampoule $\mathcal{P}_a$ et la puissance délivrée par la source $\mathcal{P}_s$:

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_a}{\mathcal{P}_s} = \frac{UI}{EI} = \frac{U}{E}$$

On obtient un rendement très médiocre, environ 25 % dans l'exemple ci-dessus. La puissance restante est dissipée par effet Joule.

On préfère alors remplacer le rhéostat par un interrupteur dont la fermeture et l'ouverture sont commandées électroniquement. En général, l'interrupteur commandé sera alimenté périodiquement : il sera fermé pendant une durée αT et ouvert pendant $(1-\alpha)T$. Grâce à l'interrupteur commandé, la résistance est parcourue par du courant durant seulement une fraction α du temps. α est nommé rapport cyclique et détermine la puissance moyenne délivrée à la charge. La figure 14 présente le montage et l'évolution de la tension aux bornes de la charge. Le rendement théorique de ce dispositif est de 1.

Les variations brutales d'intensité et de tension peuvent être gênantes et on doit dans ce cas recourir à un lissage de la tension.

- On peut réaliser un lissage par condensateur, comme présenté sur la figure 15 à gauche. Lorsque l'interrupteur est ouvert, le condensateur se charge avec une durée typique $1/rC$. Lorsque l'interrupteur est fermé, le condensateur se décharge avec un temps typique $\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{R}\right)$. Après sa mise en route, le hacheur atteint rapidement un fonctionnement appelé régime commuté où la tension oscille entre deux valeurs U_{max} (atteint au moment de l'ouverture de l'interrupteur) et U_{min} (atteint au moment de la fermeture de l'interrupteur) qui dépendent de r, R, C, α et T.
- On peut réaliser un lissage par bobine, comme présenté sur la figure 15 à droite. Lorsque l'interrupteur est fermé, la diode de roue libre est bloquée car $E > 0$ et le circuit RL est simplement alimenté par une tension constante. Lorsque l'interrupteur est ouvert, le circuit RL est isolé et l'intensité décroît exponentiellement sur un temps typique R/L. La tension aux bornes de la charge est également composée d'arches d'exponentielles.

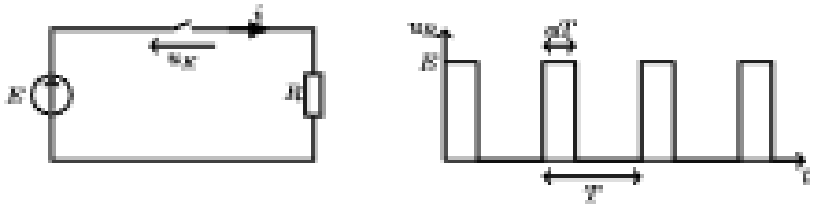


FIGURE 14 – Montage à interrupteur commandé. La période de commutation de l'interrupteur est T, le rapport cyclique est α.

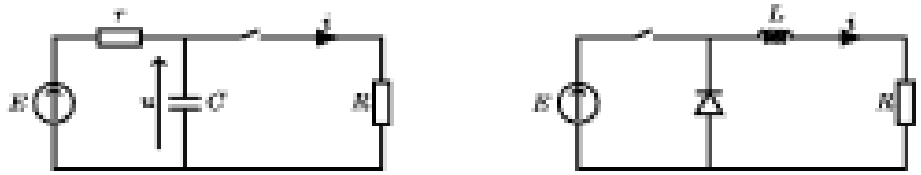


FIGURE 15 – À gauche, condensateur de lissage. À droite, bobine de lissage et diode de roue libre.

2. Étude expérimentale

Nous renvoyons le lecteur à la BÉL [9] (chap. Hacheurs) pour une présentation générale.

L'interrupteur commandé que l'on utilisera est un transistor MOSFET utilisé en régime de commutation. On le commande par un CBF délivrant un signal créneau de rapport cyclique α variable.

On va réaliser un lissage par une bobine d'inductance L et de résistance interne r. Si on approxime les arches d'exponentielles par des segments de droite, on peut montrer que la tension moyenne aux bornes de la résistance R est :

$$\langle U \rangle = \frac{U_{max} + U_{min}}{2} = \frac{R}{r+R}\left[\alpha(E+u_s) - u_s\right] \simeq \frac{R}{r+R}\alpha E \text{ si } u_s \ll E$$

Et que l'ondulation est :

$$\Delta U = \frac{U_{max} - U_{min}}{2} = \frac{R}{r+R}\frac{\alpha(1-\alpha)}{2fr}(E+u_s) \simeq \frac{R}{r+R}\frac{(1-\alpha)}{2fr}\langle U \rangle \text{ si } u_s \ll E$$

u_s désigne la tension de seuil de la diode de roue libre, f la fréquence de commutation et $\tau = L/R$ le temps typique de décroissance.

Liste du matériel :

- **l'alimentation de puissance P53.2,**
- **une diode 1N4007 P29.4,**
- **un transistor BUK455 P42.56,**
- **une bobine de 11 mH P60.20,**
- **un rhéostat de 10 Ω P61.4.**

> Câbler le circuit présenté en figure 16. On utilisera un transistor BUK455, une diode 1N4007, une alimentation de puissance délivrant une tension de 10 V environ, et, pour le dipôle RL, une bobine de $\simeq 11\,mH$ et un rhéostat de 10 Ω environ. Le CBF délivre un signal créneau 0-10V de rapport cyclique (`Duty cycle`) variable et de fréquence f voisine de 1 kHz. Observer à l'oscilloscope le signal aux bornes de R : constater l'évolution de la moyenne et de l'ondulation du signal en fonction du rapport cyclique α et de la fréquence f (autour de 1 kHz).

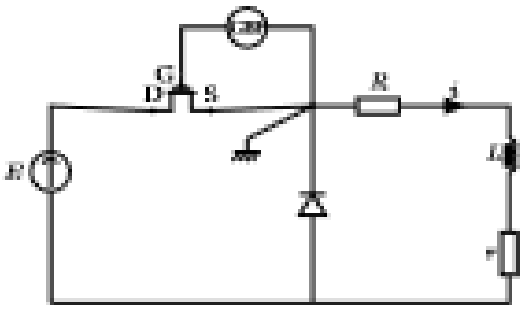


Figure 16 – Étude expérimentale d'un hacheur avec lissage par bobine.

> Mesurer la tension moyenne aux bornes de la charge (multimètre en continu) et vérifier qu'elle est suit une évolution affine par rapport au rapport cyclique α. Mesurer le taux d'ondulation du signal (multimètre True RMS) et vérifier sa dépendance en $1/f$. Mesurer la puissance dissipée dans la charge au wattmètre et celle délivrée par la source. Évaluer le rendement du dispositif.

On peut alimenter directement un moteur à courant continu que l'on peut modéliser comme un dipôle RL. Le rapport cyclique contrôle ainsi la vitesse du moteur à courant continu.

Liste du matériel :

- **le moteur P95.16**

> Remplacer le dipôle RL par un moteur et observer que la vitesse de rotation évolue en fonction du rapport cyclique de la tension de commande.

Remarque : un autre composant couramment utilisé en électronique de puissance est le thyristor, qui peut être utilisé en interrupteur commandé. Son fonctionnement et son intérêt sont décrits dans la Réf. [5] (p.290). On peut par exemple utiliser des thyristors pour réaliser des redressements commandés, on pourra consulter la Réf. [5] (pp.306-307). **Les dispositifs P29.14 et P29.27 pourront vous être utiles.**

Références

[1] : J.-M. Brébec et. al., *H-prépa Électronique II PSI*, Hachette (1997).

[2] : P. Brenders, *Électrotechnique et conversion de puissance PSI*, Les nouveaux précis Bréal (2005).

[3] : A. Denis, *Le transformateur*, BUP 709 p.1265 et suivantes (1988).

[4] : R. Duffait, *Expériences de physique – CAPES de sciences physiques*, Bréal (2011).

[5] : R. Duffait et J.-P. Lièvre, *Expériences d'électronique à l'agrégation de sciences physiques*, Bréal (2010).

[6] : R. Mérat et al., *Génie électrotechnique*, Nathan (1997).

[7] : J. Pérez et.al., *Physique MPSI-PCSI-PTSI – Cap prépa*, Pearson (2009).

[8] : V. Renvoizé et.al., *Physique PSI-PSI* – *Cap prépa*, Pearson (2010).

[9] J.-M. Dumini et L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale, Tome IV : Électricité et applications*, Pierron (2004).

Moteurs et génératrices

Table des expériences

I.	Principe de la conversion de puissance électromécanique : les rails de Laplace	42
II.	La machine à courant continu (MCC)	43
III.	Asservissement en position d'un moteur à courant continu	49
IV.	Les machines à courant alternatif (*)	53
V.	Un exemple de moteur thermique : le moteur de Stirling	57

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Principe de la conversion de puissance électromécanique : les rails de Laplace

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [3] (chap. Laplace), Réf. [1] (pp.58-67), et Réf. [2] (pp.122-126) pour une présentation générale.

La conversion de puissance électromécanique est basée sur les principes de l'induction. Une expérience simple permettant de l'illustrer est le dispositif des rails de Laplace.

Liste du matériel :

- le dispositif des rails de Laplace P65.5,
- un microampèremètre Fluke 187 P69.25,
- un aimant en U P63,
- une tige métallique P65, → prendre tige en cuivre !
- un générateur de tension continue P53.2.

1. En fonctionnement générateur

Le schéma des rails de Laplace en fonctionnement générateur est présenté à gauche sur la figure 1.

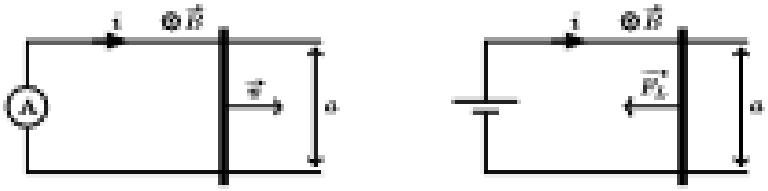


Figure 1 – Expérience des rails de Laplace en fonctionnement générateur (à gauche) et en fonctionnement moteur (à droite).

Le circuit est constitué de deux rails conducteurs parallèles séparés d'une distance a, reliés à une extrémité par un ampèremètre et à l'autre par une tige mobile. Il est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{z}_u$.

En déplaçant la tige vers la droite à une vitesse $\vec{v} = v\vec{x}_u$ constante, on induit une force électromotrice aux bornes de la tige due à la variation du flux magnétique Φ :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -vaB$$

D'où une intensité dans le circuit :

$$i = \frac{vaB}{R}$$

où R est la résistance du circuit.

À l'inverse, en déplaçant la tige vers la gauche ($\vec{v} = -v\vec{e}_x$), l'intensité dans le circuit devient négative.

> Relier les rails de Laplace à un microampèremètre Fluke 187. Placer un aimant en U entre les rails, de façon à créer un champ magnétique vertical ascendant, comme représenté sur le schéma 1. En général, le champ est dirigé de la branche rouge de l'aimant (le Nord) vers sa branche blanche (le Sud). Déposer une tige métallique dans l'entrefer de l'aimant pour relier les deux rails.
> Déplacer la tige rapidement le long des rails vers la droite, en appuyant légèrement pour maintenir le contact électrique. Observer l'apparition d'une intensité positive assez faible (de l'ordre du μA). On peut aussi observer l'apparition de la force électromotrice en mesurant la tension entre les deux rails.
> Déplacer la tige dans l'autre sens, l'intensité devient négative.

2. En fonctionnement moteur

On peut illustrer la réversibilité de la conversion électromécanique en utilisant les rails de Laplace en fonctionnement moteur. Pour cela, il suffit de relier les deux rails à un générateur, comme représenté sur la figure 1 (à droite). L'intensité i qui parcourt le circuit engendre une force de Laplace sur la tige :

$$\vec{F}_L = \int_{tige} i\vec{dl} \wedge \vec{B} = -iaB\vec{e}_x$$

> Remplacer le multimètre par un générateur de tension continue. Appliquer une tension de quelques volts au circuit (régler la limitation en courant au maximum), et observer le déplacement de la tige. Si elle ne bouge pas, on pourra humidifier légèrement les rails avec de l'eau pour faciliter le contact électrique avec la tige (penser à éteindre le générateur avant !).

Enfin, on peut noter que la conversion électromécanique a un rendement théorique de 100% en fonctionnement moteur et générateur, contrairement aux moteurs thermiques qui sont limités par le rendement de Carnot.

II. La machine à courant continu (MCC)

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [3] (chap. Moteurs à courant continu), et Réf. [1] (pp.75-97) et Réf. [2] (pp.127-139) pour une présentation générale.

1. Principe de fonctionnement

Nous commençons par quelques rappels sur le principe de la machine à courant continu, mais pour plus de détails nous vous conseillons la lecture des références citées.

a. Description de la machine à courant continu

La machine à courant continu est schématisée en figure 2.
Elle est principalement composée de 2 parties :

- Un stator (partie fixe) qui joue le rôle d'inducteur. Il produit un champ magnétique radial $\vec{B}$ de norme constante qui va permettre la conversion de puissance. Le champ est généralement créé à partir d'électroaimants parcourus par un courant d'excitation I_e, mais on peut également utiliser des aimants permanents pour certains petits moteurs.
- Un rotor (partie mobile) qui joue le rôle d'induit. Le circuit est composé d'un ensemble de lames conductrices parallèles qui baignent dans le champ magnétique du stator.

La MCC est réversible, elle peut fonctionner aussi bien en génératrice qu'en moteur :

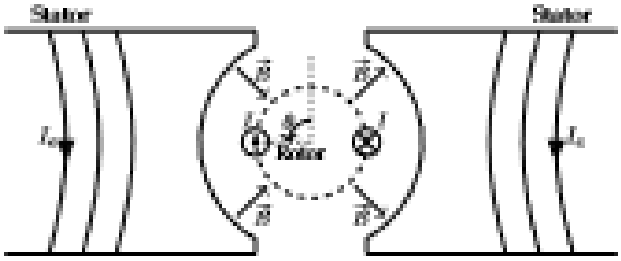


FIGURE 2 – Schéma de principe d'une machine à courant continu.

- En fonctionnement moteur, le rotor est alimenté par une tension continue U. L'intensité I qui le parcourt va donner naissance à des forces de Laplace à cause du champ magnétique du stator. Il en résulte un couple moteur $\vec{C}$ qui entraine le rotor en rotation.
- En fonctionnement générateur, le rotor est entraîné à une vitesse angulaire ω dans le champ magnétique du stator. Il est alors le siège d'une force électromotrice E, c'est un générateur de tension.

b. *Nécessité du collecteur*

Considérons un moteur dont l'inducteur est composé de 2 pôles magnétiques et avec un induit composé d'une seule spire repérée par son angle θ, comme représenté sur la figure 2. Le champ magnétique radial B_r au niveau de la spire est fonction de θ. Il s'inverse au passage de la ligne neutre en $\theta = 0°$ et $\theta = 180°$.

En fonctionnement générateur, la force électromotrice induite dans la spire E_{spire} est proportionnelle à B_r. Elle s'inverse alors également en $\theta = 0°$ et $\theta = 180°$, comme présenté en figure 3.

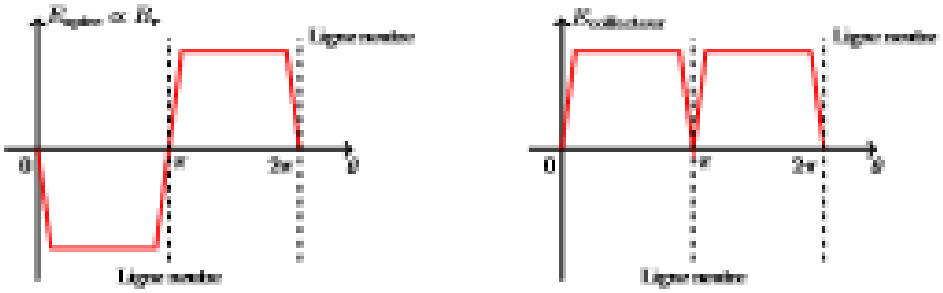


FIGURE 3 – Évolution de la force électromotrice induite dans la spire E_{spire} (à gauche) et de la tension en sortie du collecteur $E_{collecteur}$ (à droite) en fonction de l'angle θ.

Pour obtenir une tension continue, il faut ajouter un redresseur mécanique, appelée collecteur, constitué de bagues sur lesquels frottent des balais et représenté en figure 4. Ainsi, à chaque fois que la spire franchit la ligne neutre, le contact entre les balais et les bagues s'inverse, ce qui génère en sortie une tension $E_{collecteur}$ quasi-constante.

De même, en fonctionnement moteur, les forces de Laplace qui s'exercent sur la spire changent de sens en $\theta = 0°$ et $\theta = 180°$ si l'intensité I qui la traverse est constante. Le collecteur permet alors d'inverser le sens du courant d'alimentation à chaque passage de la ligne neutre, de façon à obtenir en sortie un couple moyen non-nul.

Nous allons illustrer l'intérêt du collecteur en fonctionnement générateur avec le dispositif P95 . 7. L'inducteur est constitué d'un circuit magnétique et d'une bobine, que l'on alimente par les deux bornes du boîtier bleu. L'induit est un ensemble de spires, baignant dans le champ magnétique généré par l'inducteur, on peut le mettre en rotation à l'aide de la manivelle. On mesure la tension générée à l'aide de deux balais, que l'on peut mettre en contact avec différentes parties de l'axe en rotation. On distingue trois petits cylindres dorés sur cet axe :

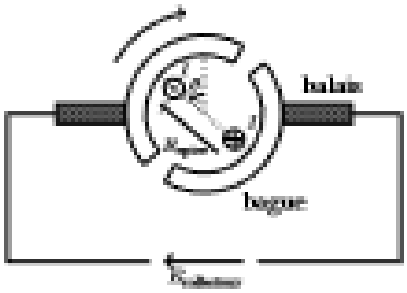


FIGURE 4 – Principe du collecteur.

- le premier (le plus proche de la manivelle) est relié à la première borne de l'induit,
- le second est relié à la seconde borne de l'induit,
- le troisième (le plus éloigné de la manivelle) est relié pour moitié à la première borne de l'induit et pour moitié à la seconde, il joue le rôle du collecteur.

Liste du matériel :

- **le dispositif P95.7,**
- **une alimentation continue P53.2,**
- **un oscilloscope.**

> Alimenter le boîtier bleu du dispositif P95.7 sous une tension continue de 1 V à l'aide d'une alimentation continue pour générer le champ magnétique. Relier les deux bornes des balais à un oscilloscope en mode DÉTLLL

Le couple mécanique à exercer est alors la somme du couple électromoteur et du couple résistif :

$$C = C_{EM} + C_r = k\Phi_g I_g + C_r$$

À retenir Les grandeurs électriques et mécaniques de l'induit sont liées en régime stationnaire par les systèmes d'équations :

$$\textbf{Moteur} \begin{cases} U_m = k\Phi_m\omega + r_m I_m \\ C = k\Phi_m I_m - C_r \end{cases} \qquad \textbf{Génératrice} \begin{cases} U_g = k\Phi_g\omega - r_g I_g \\ C = k\Phi_g I_g + C_r \end{cases}$$

2. Étude du moteur à courant continu

a. Description du banc

Liste du matériel :

- le banc moteur-génératrice à courant continu P0 . 5,
- deux alimentations Langlois P0 . 44,
- un ampèremètre,
- un voltmètre,
- un rhéostat P61 . 4,
- un rhéostat P61 . 9,

Nous allons utiliser le banc moteur-génératrice à courant continu disponible dans la collection. Il est constitué d'une partie moteur (à gauche) et d'une partie génératrice (à droite), dont les inducteurs et induits peuvent être alimentés indépendamment. Le couple exercé sur le rotor est mesuré par un couplemètre (boîtier bleu). La mesure de la vitesse est réalisée par une génératrice tachymétrique à l'extrémité droite du banc, on relie ses bornes à l'entrée du boîtier blanc pour lire la fréquence de rotation. Il est aussi possible d'utiliser directement les sorties analogiques des capteurs, mais cela nécessite un étalonnage préalable.

Il existe plusieurs méthodes pour alimenter l'inducteur et l'induit d'un moteur à courant continu : excitation séparée (chacun est alimenté indépendamment), excitation parallèle (ils sont alimentés en parallèle) ou excitation série (ils sont alimentés en série). Durant tout ce TP, nous nous placerons dans le cas d'une excitation séparée.

b. Étude électrique à vide

Dans un premier temps, nous allons réaliser une étude à vide du moteur, c'est-à-dire en laissant le rotor tourner librement sans le freiner avec la génératrice.

> Commencer par alimenter l'inducteur du moteur sous sa tension nominale $U_e = 110$ V, c'est-à-dire celle où son rendement est maximum. On utilisera une alimentation Langlois réglée en DC avec le disjoncteur relevé, et on intercalera préalablement un ampèremètre en série et un voltmètre en parallèle pour mesurer I_e et U_e.
> Alimenter l'induit avec une autre alimentation Langlois et insérer un rhéostat de 10 Ω en série dans le circuit. On mesure la tension U_m aux bornes de l'induit avec un voltmètre et l'intensité I_m avec un ampèremètre.
> Pour démarrer le moteur, augmenter progressivement la tension U_m. Une fois qu'il tourne, réduire la résistance du rhéostat, puis court-circuiter ses bornes avec un fil pour fournir toute la puissance au moteur.

⚠ Deux mises en garde sont à respecter lors de l'utilisation d'une MCC :

- Il faut utiliser un rhéostat en série avec l'induit lors du démarrage du moteur pour éviter une surintensité. En effet, comme $\omega = 0$ au démarrage, la tension fournit au circuit est $U_m = r_m I_m$, d'où une intensité I_m qui peut être importante car r_m n'est que de quelques ohms. Une fois en marche ($\omega \neq 0$), l'intensité diminue, on court-circuite alors le rhéostat pour augmenter le rendement du moteur.
- Pour arrêter la MCC, il faut toujours couper dans un premier temps la tension de l'induit U_m, puis dans un second temps celle de l'inducteur U_e. Si on annule U_e en gardant U_m constante, $\omega \to \infty$ et le moteur risque de s'emballer.

> Pour plusieurs tensions U_m inférieures à 110 V, mesurer l'intensité I_m dans l'induit et la fréquence de rotation f avec la génératrice tachymétrique (on remonte à la vitesse angulaire ω en multipliant par 2π).
> Tracer U_m en fonction de ω, puis réaliser la régression linéaire $U_m = k\Phi_m\omega + r_m I_m$ pour remonter aux valeurs de $k\Phi_m$ (environ 0,55 Vs/rad) et de r_m (quelques ohms).

Le flux magnétique Φ_m est principalement fonction de l'intensité dans l'inducteur I_e, et donc de la tension U_e. Cette dépendance correspond au cycle d'hystérésis du matériau magnétique de la machine, comme tout électroaimant.

> Pour différentes tensions U_e dans l'inducteur, recommencer les mesures précédentes de I_m et ω en faisant varier U_m et remonter par régression à $k\Phi_m$ dans chaque cas. Pensez à repasser par une tension U_e plus faible entre chaque série de mesure (sans l'annuler!) pour parcourir le cycle d'hystérésis du matériau dans le même sens (U_e croissant par exemple).
> Tracer l'évolution de $k\Phi_m$ en fonction de U_e pour retrouver l'allure de la courbe d'aimantation du matériau magnétique.

Le flux magnétique Φ_m dépend aussi légèrement de l'intensité dans l'induit I_m, c'est le phénomène de réaction magnétique de l'induit (RMI). L'intensité dans l'induit produit un champ magnétique opposé qui réduit le flux magnétique de l'inducteur. Dans certaines machines, cet effet est compensé par l'ajout d'une bobine auxiliaire en série avec l'induit.

c. Étude mécanique en charge

Pour appliquer un couple au rotor, nous utilisons la génératrice du banc. Celle-ci n'est qu'un outil pour l'étude du moteur en charge qui nous intéresse ici, nous l'étudierons en détail dans la partie suivante.

> Alimenter l'inducteur de la génératrice en parallèle de l'inducteur du moteur sous sa tension nominale $U_e = 110$ V. Alimenter l'induit du moteur avec une tension constante ($U_m = 60$ V par exemple) en utilisant un rhéostat pour le démarrage que l'on court-circuite ensuite comme précédemment. Brancher un rhéostat de 100 Ω en série avec un ampèremètre sur l'induit de la génératrice, la MCC ralentit.

La résistance R du rhéostat permet à une intensité I_g de circuler dans l'induit de la génératrice. Lorsque R diminue, I_g augmente, ce qui freine le rotor par induction. Il faut alors fournir plus de puissance au moteur pour maintenir la tension U_m constante.

> Réduire la résistance R du rhéostat, et constater qu'il faut fournir plus de puissance avec l'alimentation du moteur pour retrouver $U_m = 60$ V (vérifier que l'intensité I_g ne dépasse pas celle autorisée dans le rhéostat ou l'induit). Pour différentes valeurs de R, ajuster la puissance fournie avec l'alimentation du moteur pour retrouver $U_m = 60$ V, puis mesurer le couple C, la vitesse angulaire ω et les intensités I_m et I_e.
> Tracer l'évolution de C en fonction de I_m, et réaliser la régression linéaire $C = k\Phi_m I_m - C_f$ pour retrouver $k\Phi_m$ (identique au précédent) et obtenir C_f (de l'ordre de 0,1 N.m).

Cette étude en charge a été réalisée en maintenant la tension de l'induit U_m constante. Mais il est aussi possible de réaliser une étude à vitesse de rotation ω constante ou à couple C constante, en ajustant la tension U_m de l'induit à chaque changement de résistance R.

d. Rendement du moteur

Les mesures réalisées dans la partie précédente (étude en charge à U_m constant) nous permettent également de remonter au rendement η_m du moteur, défini comme le rapport de la puissance mécanique utile P_u sur la puissance électrique fournie P_{tot} :

$$\eta_m = \frac{P_u}{P_{tot}} = \frac{C\omega}{U_m I_m + U_e I_e}$$

> Tracer l'évolution du rendement η_m en fonction de la puissance utile P_u. On obtient une courbe en cloche, dont le maximum (autour de 30%) correspond au fonctionnement nominal du moteur pour une tension $U_m = 60$ V.
> En déduire le couple nominal C_n, la vitesse angulaire nominale ω_n et l'intensité nominale dans l'induit $I_{m,n}$.

Il est possible d'évaluer différentes pertes du moteur en fonctionnement nominal : les pertes cuivre (effet Joule) dans l'induit $P_{Cu,induit} = r_m I_{m,n}^2$, les pertes cuivre dans l'inducteur $P_{Cu,inducteur} = r_e I_e^2$, et les pertes par frottement mécanique $P_{frottements} = C_r \omega_n$.
Le reste des pertes est d'origine magnétique (hystérésis magnétique, courants de Foucault, perte de flux).

3. Étude de la génératrice à courant continu

a. Étude électrique à vide

Dans cette partie, le moteur du banc n'est utilisé que comme un moyen d'entraîner le rotor de la génératrice.

> Alimenter les inducteurs du moteur et de la génératrice en parallèle sous la tension nominale $U_e = 110$ V, et mesurer l'intensité I_e dans l'inducteur de la génératrice. Démarrer le moteur en alimentant son induit et en utilisant un rhéostat de démarrage, que l'on court-circuite par la suite.
> Laisser l'induit de la génératrice à vide (sans résistance) et mesurer sa tension U_g.
> Pour différentes tensions U_m dans l'induit du moteur (inférieures à 110 V), et donc différentes vitesses angulaires ω, mesurer la tension à l'induit de la génératrice U_g.
> Comme $I_g = 0$ lors d'une étude à vide, tracer U_g en fonction de ω et remonter à $k\Phi_g$ par régression linéaire (on trouve environ 0,60 V.s/rad).

b. Étude électrique et mécanique en charge

L'étude en charge proposée ici est à vitesse de rotation ω constante, contrairement à celle du moteur qui était à tension constante. On pourrait faire de façon analogue une étude avec le couple C constant.

> Brancher un rhéostat de 100 Ω sur l'induit de la génératrice, et mesurer la tension U_g à ses bornes et l'intensité I_g dans ce circuit.
> Pour plusieurs valeurs de résistance R, ajuster la tension injectée dans l'induit du moteur de façon à retrouver une fréquence de rotation $f = 10$ Hz (en vérifiant que I_g ne devienne pas trop importante), puis mesurer le couple C, la tension U_g et les intensités I_g et I_e.
> Tracer l'évolution de U_g en fonction de ω, et réaliser la régression linéaire $U_g = k\Phi_g\omega - r_g I_g$ pour retrouver $k\Phi_g$ (identique au précédent) et obtenir r_g (quelques ohms).
> Tracer l'évolution du couple C en fonction de I_g, et réaliser la régression linéaire $C = k\Phi_g I_g + C_r$ pour retrouver $k\Phi_g$ et obtenir C_r (de l'ordre de 0,1 N.m).

c. Rendement de la génératrice

Par opposition au moteur, le rendement η_g de la génératrice est défini comme le rapport de la puissance électrique utile P_u sur la puissance totale fournie P_{tot} :

$$\eta_g = \frac{P_u}{P_{tot}} = \frac{U_g I_g}{C\omega + U_e I_e}$$

> Tracer l'évolution du rendement η_g en fonction de la puissance utile P_u. On obtient une courbe en cloche, dont le maximum correspond au fonctionnement nominal de la génératrice pour $f = 10$ Hz.
> En déduire le couple nominal C_n, la tension nominale dans l'induit $U_{g,n}$ et l'intensité nominale dans l'induit $I_{g,n}$.

L'évaluation des pertes est identique à celle du moteur.

La MCC présente plusieurs avantages : elle est facilement réversible (moteur-génératrice), la vitesse de rotation est contrôlée par la tension de l'induit, et elle s'adapte à différentes charges. Mais la fragilité des balais du collecteur nécessite un entretien régulier.

Elles ont été largement utilisées par le passé, en particulier pour la propulsion des locomotives électriques (premiers TGV, métro lyonnais...). On les retrouve aujourd'hui plutôt dans des applications à faible puissance (ventilateur, photocopieuse, essuie-glace...) avec des stators composés d'aimants permanents. Les moteurs à fortes puissances sont maintenant constitués de machines à courant alternatif.

III. Asservissement en position d'un moteur à courant continu

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [7] (p.328) pour une présentation de la présentation expérimentale et Réf. [2] pour la discussion théorique.

Les plaquettes « asservissement en position » utilisées dans ce TP sont celles du placard P95 . 16. Avant de commencer, nous vous conseillons de lire (rapidement) le chapitre XIII.2 de la Réf. [7]. La présente fiche n'en est qu'une incomplète reprise. Il y a également une notice pour la plaquette qui fournit le schéma de branchement. Elle se trouve dans la salle des notices, dans le coin « ENS Lyon ».

1. Généralités théoriques

Une bonne présentation des systèmes bouclés est proposée dans [2]. Pour de plus amples généralités sur les systèmes asservis, vous pouvez survoler (au choix) les chapitres 4, 5 et 6 de [Granjon] ou les chapitres 1, 4 et 5 de [Manneville]. Enfin, il est intéressant de faire le lien avec le TP sur les oscillateurs quasi-sinusoïdaux, où les systèmes linéaires bouclés sont utilisés en régime instable. Dans ce TP, on étudiera au contraire une rétroaction stabilisante.

2. Prise en main

Cette partie décrit succinctement le moteur ainsi que le montage électronique.

Liste du matériel :

- le moteur P95 . 16,
- un amplificateur de puissance P47 . 6 ou P47 . 5,
- une alimentation +15/-15 V Jeulin P54 . 13,
- un GBF.

Test du moteur Un GBF a une puissance suffisante pour faire tourner le moteur. On peut donc l'utiliser pour vérifier que le moteur fonctionne correctement.

> Brancher directement le GBF à l'entrée u_m du moteur comme sur la figure 5 (ne rien mettre sur les entrées +15 V/-15 V et u_{mes} pour l'instant), et envoyer 1 V continu. Le moteur se met à tourner. Augmenter la tension : le moteur tourne plus vite. Changer le signe de la tension : le moteur tourne dans l'autre sens.

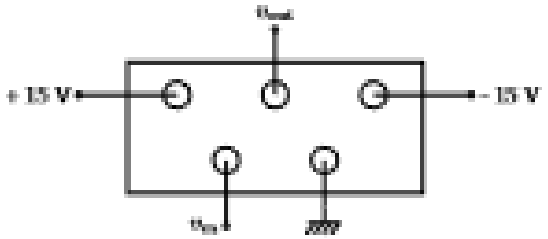


Figure 5 – Branchement du moteur.

La caractéristique d'une machine à courant continu est $e = R\dot{\theta} + k\Omega$ avec e la tension qu'on lui applique, Ω sa vitesse de rotation, R sa résistance interne et i l'intensité qui le traverse. À une tension constante correspond donc une vitesse de rotation constante, comme ce qui est observé.

Circuit électrique C'est celui présenté dans [6] p.333. On le reproduit en figure 6. Le dernier AO, ainsi que tout ce qui l'entoure (y compris les deux résistances de 10 kΩ) est remplacé par un amplificateur de puissance HSA 4005 ou HSA 4011. La sortie de l'AO 2 est alors directement branchée sur l'entrée « Input A » de l'amplificateur. Notons que le circuit présenté dans la RH. [6] utilise deux montages inverseurs (AO2 et aussi AO3 d'amplification −1). Un circuit équivalent mais avec deux montages non-inverseurs est proposé dans [2] p.196, on peut l'utiliser aussi.

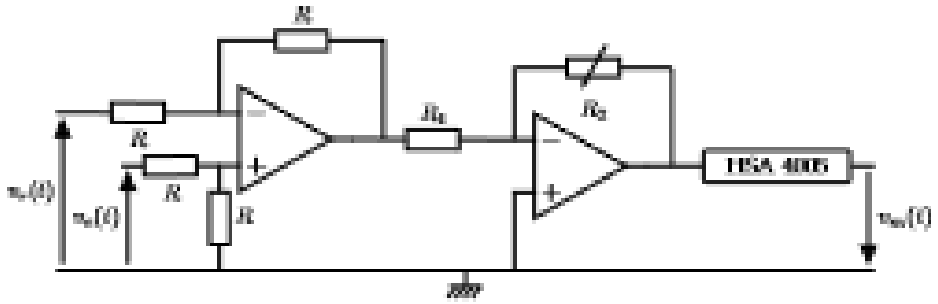


Figure 6 – Schéma électrique pour l'asservissement.

> Réaliser le montage figure 6, identique à celui de la RH. [6] en remplaçant le dernier AO par un amplificateur de puissance HSA. Sélectionner « Input A », régler le gain sur x10 (c'est le minimum), Z_{in} sur 600 Ω et BIAS sur OFF. Prendre $R = 100$ kΩ, $R_1 = 10$ kΩ, et utiliser une boîte à décade pour $R_2 = 1$kΩ.

Le premier AO est le cœur d'un montage soustracteur. Par deux théorèmes de Millman, on obtient en effet :

$$v_s = v_e - v_r$$

La deuxième partie est un amplificateur inverseur, de facteur $-R_2/R_1$. L'amplificateur de puissance doit aussi inverser le signal. En pratique, on branche simplement sa sortie à l'envers sur le moteur pour avoir un gain total $10\ R_2/R_1$.

Notons que l'amplificateur de puissance est effectivement utile ici car contrairement à un GBF, les AO ne peuvent pas fournir une puissance suffisante pour alimenter le moteur. Une fois le circuit électrique correctement câblé, on le branche sur le moteur (figure 5).

> Brancher v_m sur le moteur. Pour cela, relier la sortie Output de l'amplificateur à la masse du moteur, et la masse de l'amplificateur sur l'entrée v_m du moteur (figure 6) afin d'avoir un gain de -10 pour l'amplificateur. Mettre v_r à la masse pour l'instant, et appliquer avec un GBF une tension 1 V continue sur v_e. Le moteur doit tourner.

Chaîne de retour On boucle maintenant le circuit par la chaîne de retour. Le signal de sortie du moteur provient d'un capteur potentiométrique. La tension qu'il délivre est proportionnelle à la position (angulaire) θ de la vis. On a bien sûr $\Omega = d\theta/dt$ avec Ω la vitesse angulaire du moteur, qu'on commande par notre tension d'entrée. La chaîne de retour comprend donc implicitement un intégrateur, ce qu'on schématise sur la figure 7.

> Avec une alimentation +15/-15 V Jeulin, alimenter le potentiomètre en +15/-15 V. Attention, la masse de l'alimentation doit être reliée à celles des AO, mais pas à celle du boîtier du moteur (pour éviter un court-circuit). Par pont diviseur de tension, on a alors v_{mes} compris entre +5/-5 V (à cause des deux résistances de part et d'autre du potentiomètre). Relier v_r et v_{mes}. Mettre en entrée une tension continue 1 V. Observer que la position de la vis est maintenant asservie (elle ne tourne plus).

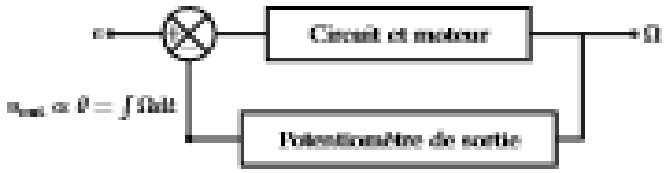


FIGURE 7 – Schéma succinct de l'asservissement en position.

> Appliquer un signal créneau de fréquence 0,5 Hz pour voir la vis passer d'une position à une autre.

Description du système bouclé Pour résumer, la tension d'entrée u_e se voit soustraire $u_s = u_{out}$, qui est proportionnelle à la position de la vis. La tension en sortie du soustracteur $u_e - u_s$ commande ensuite la vitesse de rotation du moteur. On comprend donc que pour la position pour laquelle le potentiomètre renvoie $u_s = u_e$, on commandera une vitesse nulle pour le moteur : si la vis est sur cette position, elle y reste. Si maintenant on s'en écarte d'un angle négatif, alors u_s diminue et on se retrouve avec $u_s < u_e$. Par conséquent on commande en sortie de soustracteur une vitesse positive, qui ramène la vis vers sa position d'équilibre. On peut faire le même raisonnement pour un angle positif, et on se rend compte qu'on est bien en train d'asservir en position la machine à courant continu.

On peut dès lors observer que, sur une tension continue, le moteur répond plus ou moins fortement à un écart à la consigne. La « résistance » qu'oppose la vis lorsqu'on appuie dessus avec notre doigt change quand R_3 varie. On reviendra plus en détail sur l'influence de R_3 sur l'asservissement.

3. Étude de l'asservissement

Le but de cette partie est de tracer la fonction de transfert du système bouclé.

Réponse statique On commence par mesurer l'angle de la vis en fonction de la tension en entrée. Attention, pour une trop grande tension d'entrée (en valeur absolue) la chaîne de retour ne joue plus son rôle. Le potentiomètre est en effet « à course infinie », c'est-à-dire qu'on peut le tourner indéfiniment contrairement aux potentiomètres habituels. La plage de tension étant restreinte à +5/-5 V, il sautera à -5 V une fois arrivé à +5 V et renverra donc une tension qui ne correspond plus à la véritable position angulaire de la vis. Si cela arrive, la vis se met à tourner indéfiniment.

> Balayer toutes les tensions pour lesquelles la sortie est bien asservie. Tracer l'angle θ en fonction de la tension d'entrée u_e. On obtient une droite.

Ces mesures sont surtout utiles pour connaître la plage sur laquelle on peut faire varier u_e sans rencontrer de problème avec le potentiomètre en sortie. La pente de la droite ne nous intéresse pas ici.

Fonction de transfert On peut obtenir la fonction de transfert par la méthode de la réponse indicielle. Le système est un passe-bas du deuxième ordre (cf [6] pour la mise en équation (XIII-15)). La fonction de transfert présentera donc un pic si le facteur de qualité est suffisamment grand.

> Appliquer un échelon de tension en u_e (en pratique, créneau de fréquence 0,2 Hz par exemple), et faire l'acquisition avec Latis-Pro de la réponse u_s. Utiliser $u_e = 1$ V et $R_3 = 1$ kΩ. Prendre peu de points car on va dériver (environ 2000). Lisser, dériver, prendre la transformée de Fourier (le module), et la tracer en log/log. Vérifier qu'on obtient bien l'allure d'un passe-bas, mais qui ne présente pas de pic.

Changer R_3 permet de passer d'un régime apériodique à un régime pseudo-périodique, ce qui se traduit en fréquentiel par l'apparition d'un pic avant la coupure.

> Prendre maintenant $R_2 = 5$ kΩ et observer l'apparition d'un régime pseudo-périodique dans la réponse à un échelon de tension (ou créneau basse fréquence). Lisser la courbe, la dériver, prendre la transformée de Fourier, et la tracer en log/log. Observer cette fois l'apparition d'un pic.

Le module de la fonction de transfert s'exprime :

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2m\omega_0\omega)^2}}$$

Pour déterminer l'amortissement m, on peut ajuster la courbe expérimental (en lin/lin) par la formule avec ω_0 et m en paramètres d'ajustement. Mais on peut aussi remarquer que, lorsque $m^2 < 1/2$, $|H|$ possède un maximum

$$|H|_{max} = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

soit

$$m^2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 1/|H|^2_{max}}}{2}$$

> Mesurer $|H_{max}|$ pour différents R_2, dans le régime pseudo-périodique, et en déduire m^2. Tracer m^2 en fonction de $1/R_2$.

On obtient une droite, ce qui correspond bien à ce qui est attendu ([6] formule (XIII-12) et (XIII-17), le facteur d'amplification A_v du livre est pour nous $10\ R_2/R_1$). Ici, le coefficient directeur de la droite ne nous intéresse pas : il dépend en partie des grandeurs mécaniques du moteur, que nous n'avons pas mesurées[1].
On veut ensuite vérifier la loi du dépassement en fonction de l'amortissement [6] (XIII-27)[2]. Le dépassement est donné par

$$D = \frac{u_{max} - u_\infty}{u_\infty}$$

avec u_{max} la tension maximale mesurée lors des oscillations et u_∞ la tension de consigne.

> Tracer par exemple $\ln(D)$ en fonction de $m\pi/\sqrt{1-m^2}$ qui devrait donner une droite de pente -1. Notons qu'on ne s'attend pas à un résultat fabuleux, déjà parce qu'on trace une évolution logarithmique sur moins d'une décade (on relève typiquement des valeurs de dépassement dans un seul ordre de grandeur), et parce que l'abscisse est alambiquée : une petite erreur sur m peut conduire à une grosse erreur sur $m\pi/\sqrt{1-m^2}$, ce qu'on vérifie par propagation des incertitudes.

Ainsi, plus R_2 augmente, plus l'amortissement est faible donc le dépassement grand, comme on peut le remarquer dans le domaine temporel. Ce dépassement peut être problématique dans certains contextes (usinage...). Afin d'améliorer notre asservissement, on a donc a priori tout intérêt à diminuer R_2.

4. Performance des asservissements

En réalité, le choix de R_2 est plus subtil. Il y a un compromis à faire entre différentes caractéristiques de l'asservissement, comme par exemple entre la précision et le temps de réponse.

Précision (statique) La précision d'un système asservi caractérise la fidélité avec laquelle il peut répondre à la consigne. Sur l'asservissement en position du moteur, il n'y a pas d'erreur intrinsèque en raison de la présence d'un intégrateur dans le modèle (caché dans le potentiomètre de la chaîne de retour). Le système est donc précis.

> À faible R_2 (prendre 100 Ω par exemple), déplacer la vis avec le doigt. La vis ne revient pas à la position de la consigne.

1. Des protocoles de mesure pour ces grandeurs sont proposés dans [6]
2. En montage, assurez vous de savoir démontrer toutes les formules que vous utilisez. Ici, le calcul de (XIII-27) est long mais direct.

Attention, ici, ce sont les frottements solides qui empêchent la vis de revenir. Le gain est trop petit, donc la réponse face à l'erreur à la consigne trop faible devant les frottements pour la mettre en mouvement. Notons que les frottements solides ne sont pas pris en compte dans le modèle linéaire, cette absence de précision n'est donc pas en contradiction avec la présence de l'intégrateur.
À nouveau, on constate qu'augmenter R_2 permet de résoudre ce problème.

Temps de réponse Il y a plusieurs façons de définir un temps de réponse pour l'asservissement. On peut prendre le temps de réponse t_r à 5% au bout duquel la valeur est comprise entre 95% et 105% de la valeur de consigne. On peut aussi regarder le temps de montée t_m : c'est le temps nécessaire au système pour passer de 10% à 90% de la valeur de consigne. Un bon asservissement devrait a priori avoir des temps de réponse courts.

> Toujours sur une réponse à un échelon, constater en changeant R_2 que le temps de montée t_m diminue lorsque R_2 diminue. Vous pouvez si vous le souhaitez vérifier la loi approchée (XIII-29) proposée dans [6], mais il faut reconnaître qu'elle n'est pas très explicite. Vous pouvez préférer la loi simplifiée $t_r = 3/\omega_{n,0}$ (elle aussi proposée dans [6]).

Cette fois il faut augmenter R_2 pour améliorer la rapidité de l'asservissement. Il y a donc un compromis à faire entre précision/dépassement et temps de réponse.

Notes sur la stabilité On évoque souvent le compromis « précision-stabilité » pour les systèmes asservis. Il se trouve en effet qu'un trop grand gain déstabilise le système linéaire qu'on étudie, dans le sens où il peut apparaître des oscillations spontanées au sein de celui-ci (se référer au TP sur les oscillateurs quasi-sinusoïdaux). Mais attention ! Ici, on peut observer que le système se met en rotation (et n'est donc plus asservi) à grand gain mais c'est à cause d'un mauvais signal de retour envoyé par le capteur potentiométrique : voir le paragraphe « Réponse statique ». Cela n'a donc rien à voir l'instabilité linéaire du TP sur les oscillateurs. Le problème du potentiomètre fait que celle-ci n'est pas observable sur notre expérience.

5. Correction des asservissements (en seconde lecture)

Des généralités sur la correction des asservissements sont présentées dans [Crampon] ou dans [Manneville]. On peut se contenter d'en illustrer le principe avec un type de correcteur dits à avance de phase. Le paragraphe 2.7 chapitre XIII de [6] est très clair sur la théorie et sur l'expérience.

> Ajouter les condensateurs en parallèle des résistances sur l'amplificateur non-inverseur. Observer le changement dans la réponse à un échelon de tension (voir [6] (pp.339-341)).

IV. Les machines à courant alternatif (*)

Il n'y a plus, depuis quelques années, de montages pour lesquels la présentation de ce type de machines était incontournable. De fait, ce type de matériel n'est plus envoyé aux oraux, par aucun des centres (mais le pourrait si vous en faites la demande). En outre, les salles d'examen du lycée Marcellin Berthelot ne disposent pas du réseau électrique triphasé nécessaire pour faire fonctionner ces machines, et il est nécessaire d'utiliser un montage ad-hoc pour générer une telle tension à partir du secteur (monophasé) disponible. Dans le contexte de l'agrégation, ce paragraphe doit donc être considéré essentiellement comme une ouverture à des dispositifs de conversion électro-mécaniques différents de la MCC.

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [3] (chap. Moteurs à courant alternatif), Réf. [1] (pp.101-121) et Réf. [2] (pp.177-193).

Les machines à courant alternatif, synchrones et asynchrones, fonctionnent grâce à des champs magnétiques tournants.

1. Production d'un champ tournant

Un champ tournant est un champ magnétique de norme constante qui tourne à vitesse angulaire ω constante.

Au niveau industriel, la plupart des champs tournants sont produits par des courants triphasés. Pour rappel, un système de tension triphasé est constitué de trois tensions sinusoïdales, de même amplitude et de même fréquence, déphasées deux à deux de 120°. Les tensions simples V_k correspondent à la différence de potentiel

entre une phase et le neutre (noeud central). Les tensions composées $U_{ij} = V_i - V_j$ correspondent à la différence de potentiel entre deux phases. Le réseau EDF est à la fréquence de 50 Hz, et l'amplitude des tensions vaut $V_i = 230$ V et $U_{ij} = 400$ V.

Un champ magnétique tournant peut être produit simplement à partir de trois bobines dont les axes sont décalés de 120°. Chaque bobine est alimentée par une tension simple V_i (montage en étoile) ou par une tension composée U_{ij} (montage en triangle). Le courant étant déphasé de 120° dans chaque circuit, il en résulte un champ magnétique tournant au centre :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = B_0 \left[\cos(\omega t)\, \vec{e}_x + \sin(\omega t)\, \vec{e}_y\right]$$

Vous n'aurez pas accès au réseau électrique triphasé pour les ceaux de l'agrégation. Cependant, il possible de générer des tensions triphasées à l'aide d'un onduleur triphasé, alimenté sur le secteur électrique monophasé.

Liste du matériel :

- 3 bobines de 1000 spires P60.21,
- le rhéostat triple P62.2,
- l'onduleur triphasé P0.14,
- un câble secteur P57.20,
- le support P65.14,
- une boussole P63.8,
- 3 noyaux ferromagnétiques P60.16,
- un ampèremètre,
- un stroboscope P3.5.

> Réaliser le montage en triangle de la figure 8. Chacune des trois branches est constituée d'une bobine de 1000 spires en série avec un tiers du rhéostat triple $3\times330\ \Omega$. Alimenter l'entrée de l'onduleur triphasé sur le réseau électrique avec un câble secteur, sans l'allumer pour le moment. Relier chacune de ses sorties (U, V et W) à une extrémité du montage en triangle, et ajouter un ampèremètre dans l'une des branches pour contrôler l'intensité.
> Placer les trois bobines autour d'un support au centre duquel on positionne une aiguille de boussole. Insérer un noyau ferromagnétique dans chaque bobine pour amplifier le champ magnétique.

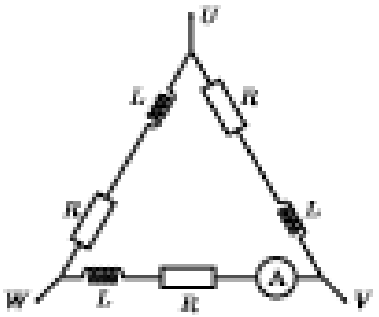


Figure 8 – Montage en triangle pour produire un champ tournant à l'aide d'un réseau triphasé.

> Allumer l'onduleur et régler sa fréquence sur 5 Hz à l'aide des boutons ▲ et ▼. On règle l'amplitude à l'aide de la molette « vitesse ». Réduire progressivement la résistance du rhéostat triple pour augmenter le champ magnétique, tout en vérifiant que l'intensité dans le circuit ne dépasse pas 1 A. Mettre l'aiguille en mouvement en lui donner une petite impulsion avec le doigt. Une fois lancée, elle continue à tourner en indiquant la direction du champ magnétique.

Nous reviendrons sur la nécessité de lancer l'aiguille dans la partie suivante.

Le sens de rotation du champ magnétique (horaire ou antihoraire) dépend de l'alimentation des bobines et de l'enroulement des spires.

> Inverser les branchements de l'une des bobines, et observer que le sens de rotation de l'aiguille s'est inversé.

2. Principe du moteur synchrone

La machine synchrone est composée de deux parties :

- un stator qui est constitué de bobinages,
- un rotor qui possède un moment magnétique $\vec{M}$ permanent (aimant permanent) ou induit par une source externe.

Comme la MCC, elle est réversible et peut fonctionner en moteur ou en génératrice.

Dans le cas du moteur synchrone, le stator produit un champ magnétique $\vec{B}$ tournant à la vitesse angulaire ω. Il s'exerce alors sur le rotor un couple électromécanique :

$$\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{B} = MB \sin[(\Omega - \omega)t + \alpha] \, \vec{z},$$

avec Ω la vitesse angulaire du rotor et α un angle constant.

La conversion de puissance est réalisée lorsque la valeur moyenne du couple $\langle C \rangle$ est non-nul, c'est-à-dire lorsque $\Omega = \omega$. Le rotor tourne alors à la même vitesse que le champ, on parle de synchronisme.

Contrairement au moteur à courant continu, le moteur synchrone nécessite d'être lancé au démarrage. En effet, lorsque le rotor est immobile ($\Omega = 0$), le couple moyen $\langle C \rangle$ est nul. Un dispositif auxiliaire est nécessaire pour le mettre en rotation à la vitesse de synchronisme.

En régime permanent, le couple s'équilibre avec le couple résistif C_r tel que :

$$\langle C \rangle = C_r = MB \sin \alpha$$

L'angle α correspond donc à l'angle d'équilibre entre $\vec{M}$ et $\vec{B}$. On remarque que si le couple résistif est trop important, soit $C_r > MB$, le régime permanent ne peut pas être atteint.

La rotation d'une aiguille dans un champ tournant illustre le principe d'un moteur synchrone : les bobines alimentées en triphasé forment le stator, et l'aiguille qui possède un moment magnétique joue le rôle du rotor. Le moteur nécessite d'être démarré par un dispositif extérieur (impulsion donnée avec le doigt), puis tourne à la même vitesse angulaire que le champ.

> Recommencer l'expérience précédente, puis mesurer la fréquence de rotation de l'aiguille à l'aide d'un stroboscope. On retrouve la fréquence du champ tournant ω, et donc celle en sortie de l'onduleur (5 Hz environ).

Le moteur synchrone présente l'avantage de maintenir une vitesse de rotation précise, constante et indépendante de la charge (tant qu'il n'y a pas de décrochage), mais il nécessite un dispositif auxiliaire pour le démarrage. Les machines synchrones sont aujourd'hui principalement utilisées en génératrice (centrale hydroélectrique, dynamo de vélo...), on ne les utilise en moteur que pour des applications nécessitant une vitesse contrôlée précisément (voiture électrique, commande de disque dur...).

3. Principe du moteur asynchrone (en seconde lecture)

La machine asynchrone est composée de deux parties :

- un stator qui est constitué de bobinages,
- un rotor qui est constitué d'un bobinage fermé sur lui-même, il ne possède pas de moment magnétique $\vec{M}$ permanent et n'est pas relié à une source externe.

La machine asynchrone est également réversible.

Dans le cas du moteur asynchrone, le stator produit un champ magnétique $\vec{B}$ tournant à la vitesse angulaire ω. La variation du flux magnétique à travers le rotor induit une force électromotrice, d'où il résulte une intensité

I. En modélisant le rotor par une bobine de N spires de surface orientée $\vec{S}$, d'inductance L et de résistance R, celui-ci possède un moment magnétique :

$$\vec{M} = NI\vec{S}$$

Il s'exerce sur le rotor un couple électromécanique moyen :

$$\left\langle \vec{C} \right\rangle = \left\langle \vec{M} \wedge \vec{B} \right\rangle = \frac{N^2 I^2 S^2 R(\omega - \Omega)}{2\left(R^2 + L^2(\omega - \Omega)^2\right)}\vec{z},$$

avec Ω la vitesse de rotation du rotor.

Le couple est moteur lorsque $\Omega < \omega$, puis s'annule pour $\Omega = \omega$. En régime permanent, on montre que le couple s'équilibre avec le couple résistif $\langle C \rangle = C_r$ pour une vitesse Ω légèrement inférieure à ω (contrairement au moteur synchrone où $\Omega = \omega$).

On remarque que le couple est positif lorsque le rotor est immobile ($\Omega = 0$). Il n'est donc pas nécessaire de lancer le moteur asynchrone pour le démarrer (contrairement au moteur synchrone).

On peut illustrer le principe du moteur asynchrone avec un rotor à « cage d'écureuil » (circuit fermé constitué d'un ensemble de tiges parallèles en forme de cylindre) placé dans un champ tournant.

⚠ Contrairement à l'aiguille de boussole, la cage d'écureuil demande une forte puissance pour tourner. Pour l'atteindre, il est nécessaire de dépasser l'intensité maximale indiquée sur les bobines. L'expérience doit donc être réalisée rapidement (quelques dizaines de secondes au maximum) pour éviter de surchauffer les bobines.

Liste du matériel :

- **la cage d'écureuil** `P65.12`,
- **3 noyaux ferromagnétiques** `P60.16`,
- **les bloqueurs** `P60.14`.

> Reprendre l'expérience précédente en remplaçant le support à aiguille par la cage d'écureuil. Retirer le rhéostat de chaque branche du triangle afin atteindre une intensité suffisante pour faire tourner la cage. Retirer également l'ampèremètre du montage car l'intensité dans chaque branche va dépasser 10 A ! Fixer les noyaux ferromagnétiques à l'aide de bloqueurs pour éviter qu'ils soient projetés durant l'expérience.
> Une fois votre câblage vérifié, allumer l'onduleur (quelques dizaines de secondes seulement) pour faire tourner la cage d'écureuil.

Le moteur asynchrone est le moteur le plus utilisé aujourd'hui en électronique de puissance (TGV, machine industrielle...). Il n'a pas besoin d'être lancé pour démarrer, et s'adapte facilement à une variation de sa charge. En revanche, la vitesse de rotation est moins bien contrôlée. Le fonctionnement en génératrice est récent, il est employé pour certaines applications où la vitesse évolue fortement, comme des éoliennes par exemple, et il nécessite une électronique de puissance complexe.

4. Étude d'un moteur asynchrone (en seconde lecture)

Liste du matériel :

- **le banc CC/asynchrone** `P0.22`,
- **le rhéostat de démarrage** `P0.27`,

L'étude détaillée d'un moteur asynchrone peut être réalisée sur le banc CC/asynchrone disponible dans la collection de façon analogue à celle du moteur à courant continu.

Le banc est constitué de deux parties :

- un moteur asynchrone (à droite), que l'on alimente en triphasé (montage en triangle) à la fréquence ω, on utilise un rhéostat spécifique pour le démarrage,
- une génératrice à courant continu (à gauche), dont l'inducteur est alimenté par une tension continue, où il est possible de relier une charge sur son induit.

La mesure du couple C et de la vitesse de rotation Ω pour différentes charges sur la génératrice, permet de tracer la caractéristique $C(\Omega)$ du moteur, et de remonter à son rendement.

L'étude de la génératrice à courant continu (caractéristique à vide, en charge, rendement) est également réalisable sur ce banc.

V. Un exemple de moteur thermique : le moteur de Stirling

Liste du matériel :

- **le moteur Stirling P103 . 49,**
- **une balance de précision,**
- **un briquet ou des allumettes,**
- **une résistance à décade P56 . 14,**
- **deux multimètres.**

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [4] (pp.663-687) et Réf. [5] (pp.182-183), ainsi qu'à la notice du moteur de Stirling de la collection pour une présentation générale.

1. Description du moteur de Stirling

Un moteur thermique produit de l'énergie mécanique à partir d'une différence de température entre deux sources. Le moteur de Stirling réalise cette conversion en parcourant le cycle de Stirling, composé de deux isothermes et de deux isochores.

Nous allons étudier le moteur de Stirling disponible dans la collection. Il est constitué d'un volume d'air isolé V qui se déplace par l'intermédiaire de deux pistons (l'un vertical et l'autre horizontal) reliés par un système de bielle-vilebrequin au disque en rotation. Un petit brûleur à éthanol, placé sous l'extrémité droite du moteur, permet de maintenir une différence de température avec la partie gauche à température ambiante. Le piston vertical (en bas) est de même diamètre que le tube en verre, son déplacement réduit le volume accessible par l'air lorsqu'il descend, et augmente le volume lorsqu'il monte. Le piston horizontal a un diamètre inférieur à celui du tube, il permet de faire circuler l'air entre la partie chaude (à droite) et la partie froide (à gauche).

Le cycle théorique du moteur est représenté en figure 9, il est constitué de quatre phases :

1. détente isotherme : le piston horizontal est immobile à gauche, ce qui maintient l'air à droite à la température chaude $T = T_2$, et le piston vertical monte (V augmente de V_1 à V_2),
2. refroidissement isochore : le piston horizontal se déplace vers la droite, et chasse l'air vers la gauche qui se refroidit (T passe de T_2 à T_1), le piston vertical est immobile ($V = V_2$),
3. compression isotherme : le piston horizontal est immobile à droite ($T = T_1$), et le piston vertical descend (V passe de V_2 à V_1),
4. chauffage isochore : le piston horizontal se déplace vers la gauche (T passe de T_1 à T_2), et le piston vertical est immobile ($V = V_1$).

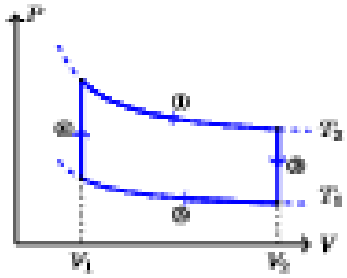


Figure 9 – Cycle théorique du moteur de Stirling.

Le dispositif est équipé d'un boîtier d'interface permettant de remonter à la pression P et au volume V du gaz au cours du temps. La pression est mesurée de façon relative grâce à une jauge de contrainte, l'interface renvoie une tension U_P. Le volume est déduit de la position du piston vertical et des dimensions géométriques du moteur (V est compris entre 32 cm^3 et 44 cm^3), l'interface renvoie une tension U_V. On remonte à P et V avec les formules indiquées dans l'une des notices (U_P et U_V sont exprimées en volts) :

$$\begin{cases} P = P_0 + \dfrac{U_P}{20.10^{-3}} & \text{en Pa} \\ V = 32 + \dfrac{44-32}{4{,}096}\, U_V & \text{en cm}^3 \end{cases}$$

Les aspects "interfaçage" réalisés à l'aide d'un microcontrôleur Arduino sont discutés en détail dans le fascicule de TP "Électronique", et le lecteur est invité à s'y référer. L'acquisition des données, présentée ci-après sous Latis-Pro, peut également être effectuée directement sous python à travers le port série. Le post-traitement est alors direct. Les scripts correspondants sont également détaillés dans le fascicule "Électronique".

Le disque en rotation peut être relié à une petite génératrice à l'avant du dispositif en installant une courroie. La puissance fournie par le moteur est alors convertie pour allumer une petite ampoule (si elle est branchée) ou être transférée à une charge. Un compteur mécanique peut également être installé sur le disque en rotation, mais la mesure étant de très mauvaise qualité, nous ne l'utiliserons pas dans ce TP.

2. Étude à vide

> Retirer la courroie qui relie le disque du moteur à sa génératrice si elle est installée. Relier le boîtier d'interface au moteur avec le cordon de liaison, puis alimenter le boîtier avec le cordon secteur, la diode clignote. Relier les tensions U_P et U_V à une carte d'acquisition.
> Remplir le brûleur d'éthanol, puis attendre quelques instants que le liquide monte dans la mèche par capillarité. Allumer la mèche avec un briquet ou une allumette. Placer le brûleur sous l'extrémité droite du moteur pour former la source chaude.
> Après quelques minutes de chauffage, tourner le disque de façon à placer le piston vertical dans sa position basse. Appuyer sur le bouton rouge pour initialiser le boîtier d'interface, la diode s'arrête de clignoter.

⚠ À partir de cet instant, ne toucher plus au disque à part pour lancer le moteur. Si vous faites tourner le disque dans le sens inverse de celui indiqué par la flèche, il faudra recommencer l'initialisation en débranchant l'alimentation du boîtier.

> Lancer le moteur dans le sens indiqué par la flèche avec un mouvement rapide de la main sur le disque. Si la source est assez chaude et le lancement assez rapide, le moteur démarre. Si ce n'est pas le cas, laisser chauffer plus longtemps puis recommencer l'initialisation en débranchant l'alimentation du boîtier.
> Acquérir les tensions U_P et U_V sur quelques cycles sous Latis-Pro (ou python, *cf* remarque préc.). Utiliser la `Feuille de Calcul` pour remonter à P et V avec les formules précédentes. Mesurer la période des cycles T_{cycle} (de l'ordre de 0,1 s), puis tracer le diagramme (P,V) du moteur.
> Une fois les mesures effectuées, éteindre le brûleur et arrêter le moteur.

Le diagramme (P,V) réel du moteur est assez éloigné du cycle de Stirling théorique. On peut remonter au travail W fourni par le moteur au cours d'un cycle en mesurant l'aire balayée par son diagramme (P,V).

> Latis-Pro n'ayant pas de fonction permettant de calculer une aire, il faut exporter au préalable les données sous Régressi... ou python! Exporter les données de P et V dans un fichier au format txt (Menu `Fichier/Exportation`). Ouvrir le fichier sous Régressi. Dans l'onglet `Expression`, calculer le travail avec la formule : $W = \text{aire}(P,V)$.
> En déduire la puissance du moteur à vide $P_{vide} = W/T_{cycle}$ (de l'ordre de 1 W).

Après quelques dizaines de minutes de fonctionnement, il est normal que le moteur ralentisse puis s'arrête. Cela est dû à la diffusion progressive de la chaleur depuis la source chaude jusqu'à la source froide. Lorsque la différence de température devient trop faible, le moteur s'arrête, et il faut alors attendre qu'il refroidisse pour le relancer. On peut placer un petit bécher contenant de la glace sur la partie gauche du moteur pour le refroidir plus vite.

3. Rendement du moteur (en seconde lecture)

Le rendement η du moteur est défini comme le rapport de sa puissance en sortie P_{vide} sur la puissance fournie par la combustion de l'éthanol P_c. Nous pouvons l'estimer en ordre de grandeur. On rappelle que la combustion d'une masse m d'éthanol durant un temps τ fournit une puissance :

$$P_c = \frac{m\,\Delta_c H_{\text{eth}}}{\tau}$$

avec $\Delta_c H_{\text{eth}} \approx 29{,}8\,\text{kJ/g}$ l'enthalpie massique de combustion de l'éthanol.

> Lorsque le brûleur est froid, le remplir d'éthanol, puis mesurer sa masse avec une balance de précision. Allumer le brûleur pendant un temps τ de quelques minutes, puis le peser à nouveau.
> La différence de masse m permet de remonter à la puissance P_c fournie par la combustion (de l'ordre de 100 W), on estime alors le rendement du moteur $\eta = P_{\text{vide}}/P_c$.

Le rendement théorique maximal d'un moteur de Stirling est donné par le rendement de Carnot :

$$\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

avec T_f et T_c les températures des sources froide et chaude. La température d'une flamme d'éthanol étant de l'ordre de 1000°C, et en considérant que la source froide est à température ambiante, on obtient un rendement de Carnot η_C proche de 1.

Le rendement obtenu en pratique est bien inférieur car la majorité de l'énergie fournie par la combustion est dissipée dans le milieu ambiant, la source chaude n'est pas non plus à la température de la flamme. Ce moteur n'a pas pour but d'avoir un bon rendement, c'est un moteur pédagogique.

4. Étude en charge

On réalise une étude en charge en reliant le moteur à la génératrice.

> Relier le disque du moteur à la génératrice avec la courroie en caoutchouc. Placer l'interrupteur sur la position générateur, et dévisser la petite ampoule. Allumer le brûleur, faire chauffer le moteur plusieurs minutes, puis le lancer.
> Lorsque le moteur tourne, brancher sur la sortie `Output` de la génératrice une résistance à décade (initialement réglée sur 1 kΩ) en série avec un ampèremètre. Pour différentes résistances R, mesurer l'intensité I tout en veillant à ne pas dépasser pas 80 mA, et mesurer ω en reliant la tension correspondante à P ou V à un multimètre en mode fréquencemètre.
> Représenter la puissance utile $P_u = RI^2$ fournie par le moteur en fonction de la charge R ou de la vitesse ω. On obtient une courbe en cloche, dont le maximum correspond au fonctionnement nominal du moteur.

Au niveau industriel, le moteur de Stirling est utilisé dans de nombreux systèmes : satellite, groupe électrogène... Il présente l'avantage d'être relativement silencieux et non-polluant car le gaz évolue en système fermé (contrairement au moteur Diesel). En revanche, du fait de la grande inertie thermique des éléments, il résiste mal aux changements de couple et n'est donc pas adapté à la conception de véhicules.

Références

[1] : J.-M. Brébec et al., *H-prépa Électronique II PSI*, Hachette (1997).

[2] : P. Brendel, *Électrotechnique et conversion de puissance PSI*, Les nouveaux précis Bréal (2005).

[3] : J.-M. Donnini et L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale, Tome IV : Électricité et applications*, Pierron (2004).

[4] : A. Caillate, *Défense et illustration du moteur Stirling*, BUP 864 p.663 et suivantes (2004).

[5] : J.-F. Pérez et A.M. Romulus, *Thermodynamique*, Dunod, (2001).

[6] : R. Duffait et J.-P. Lièvre, *Expériences d'électronique à l'agrégation de sciences physiques*, Bréal (2010).

Capteurs et mesures physiques

Table des expériences

I.	Principes fondamentaux	61
II.	Exemples de capteurs de déplacement	64
III.	Accéléromètre	68
IV.	Capteurs de force	70
V.	Loi de Gladstone (*)	72
VI.	Autres capteurs	74

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pourrez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP*), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Principes fondamentaux

Liste du matériel :

- la plaquette "Asservissement d'un moteur en position" P95.16,
- une alimentation +15/-15 V Jeulin P54.12,
- un multimètre multimètre.

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1] (pp.1-98 et p.327), Réf. [4], Réf. [5] et Réf. [1] pour une présentation générale.

Cette partie vise à introduire les notions et termes nécessaires à l'étude spécifique des capteurs. Certaines de ces caractéristiques seront illustrées sur l'exemple d'un capteur potentiométrique d'angle. On utilisera pour ces manipulations la plaquette "Asservissement d'un moteur en position" disponible dans la collection sur laquelle nous n'étudierons que le capteur potentiométrique.

1. Mesure et capteurs

L'expérimentation repose sur la mesure de grandeurs physiques, c'est-à-dire l'opération consistant à donner une valeur numérique à cette grandeur, dans le but d'établir ou de vérifier quantitativement les lois physiques. La grandeur faisant l'objet de la mesure est désignée comme le mesurande.

Pour réaliser un traitement électronique du signal, il est nécessaire de produire à partir du mesurande une grandeur électrique le représentant le plus fidèlement possible. Le capteur est le dispositif qui permet d'obtenir cette représentation : il traduit la valeur m du mesurande en une grandeur électrique $s(m)$. s est nommée réponse du capteur, m est la grandeur d'entrée. La forme $s(m)$ résulte des principes physiques qui régissent le fonctionnement du capteur.

Le principe du potentiomètre résistif est assez simple : il est constitué d'une résistance fixe sur laquelle peut se déplacer un curseur. Ce dernier est solidaire mécaniquement de la pièce dont on veut traduire le déplacement. La valeur de la résistance R entre le curseur et une des extrémités fixes est fonction de la position du curseur, donc de la pièce dont on veut traduire électriquement la position. On distingue plusieurs types de potentiomètres : linéaires, circulaires, hélicoïdaux, etc. (voir [1] (p.329)).

Le capteur que nous considérons traduit ici une position angulaire (le mesurande) en une valeur de résistance.

> Mesurer la valeur de la résistance du potentiomètre du dispositif de la collection (entre les bornes verte et jaune) à l'ohmmètre. Vérifier qualitativement que la résistance dépend de la position angulaire de la tige sur le cadran.

2. Capteurs actifs et capteurs passifs

Un capteur actif extrait une petite partie de l'énergie propre au mesurande (énergie thermique, mécanique, de rayonnement) et la convertit en une grandeur électrique. Les thermocouples (voir TP de thermodynamique), les capteurs piézoélectriques (qui seront étudiés dans la suite de ce TP) et certains capteurs optiques (photopile, voir TP d'optique) en sont des exemples.

Un capteur passif est un capteur dont l'impédance dépend de la valeur du mesurande. La variation d'impédance peut être due à l'action du mesurande sur ses propriétés géométriques, ou sur les caractéristiques électriques des matériaux. On pourra citer comme exemple de capteurs passifs :

- les photodiodes et photorésistances (voir TP Optique)
- les sondes à résistance de platine, les thermistances (voir TP Thermodynamique)

Nous étudierons dans la suite de ce TP les jauges de contrainte, les accéléromètres et quelques exemples de capteurs capacitifs et inductifs.

Dans le cas du potentiomètre angulaire, à chaque position de l'élément mobile correspond une valeur de résistance, et la mesure de celle-ci permet de connaître la position angulaire de l'aiguille : le potentiomètre angulaire est un capteur passif où le mesurande agit sur la résistance par le biais des propriétés géométriques du capteur.

3. Conditionnement

La plupart des dispositifs ne sont aptes qu'à traiter des signaux sous forme de tension électrique. Pour mesurer l'impédance d'un capteur passif et ses variations, on utilise un conditionneur afin de la convertir en une tension dont l'amplitude ou la fréquence sont déterminées par la sortie du capteur. Les types de conditionneur les plus fréquemment utilisés sont :

- le montage potentiométrique : le capteur est associé à une source et à une autre impédance (qui n'est pas forcément du même type) en série. La valeur de l'impédance du capteur s'obtient par un pont diviseur ;
- le pont d'impédance dont l'équilibre permet la détermination de l'impédance du capteur (ou dont le déséquilibre quantifie les variations de l'impédance de ce dernier) ;
- le circuit oscillant dont la fréquence est fixée par l'impédance du capteur.

Certains capteurs sont dits intégrés : le capteur proprement dit (actif ou passif) est intégré avec l'électronique associée sur un substrat de silicium. Ceci permet d'une part la miniaturisation et d'autre part la fabrication en grande série, avec une meilleure fiabilité, à coût réduit.

Dans le cas du potentiomètre angulaire, nous utiliserons un montage potentiométrique pour la mesure d'angle : le potentiomètre résistif est associé à une source de courant continu.

> Alimenter les deux extrémités du potentiomètre (bornes +15 V/−15 V) avec une alimentation +15/−15 V Jeulin, et mesurer la valeur de la tension (entre les bornes verte et jaune) au multimètre. Vérifier qualitativement que celle-ci dépend de la position angulaire de la tige.

4. Étalonnage

L'étalonnage d'un capteur est l'ensemble des opérations qui permettent d'expliciter numériquement la relation entre les valeurs du mesurande et celles à la sortie du capteur, compte tenu de tous les paramètres additionnels susceptibles de modifier la réponse du capteur. Ces paramètres peuvent être :

- liés au mesurande : sens de variation du mesurande (effet d'hystérésis), vitesse de variation du mesurande (temps de réponse) ;
- liés à des grandeurs physiques indépendantes du mesurande : température, humidité, etc.

Lorsque le capteur n'est pas soumis à des grandeurs d'influence. On réalise un étalonnage simple. La valeur du mesurande peut alors être déterminée :

- par la comparaison avec un étalon (longueurs ou masses étalons, températures de changement d'état) dont la valeur est connue, idéalement avec une grande précision. On parle dans ce cas d'étalonnage absolu.
- par la mesure à l'aide d'un capteur déjà étalonné. On parle dans ce cas d'étalonnage par comparaison.

On peut également évaluer la réponse du capteur aux grandeurs d'influence, on réalise pour cela plusieurs étalonnages simples en faisant varier les grandeurs d'influence. On parle dans ce cas d'étalonnage multiple.

On étalonne le capteur potentiométrique à l'aide d'un rapporteur qui nous fournira la référence : c'est un étalonnage absolu. La température (possible grandeur d'influence) sera supposée maintenue constante.

> Pour différentes valeurs d'angle de la tige sur le cadran, mesurer la valeur de la tension aux bornes du potentiomètre. Faire des mesures assez rapprochées autour de 0° et 360°, et tous les 20° ailleurs.

Remarque : on pourrait grandement réduire l'incertitude de la mesure sur l'angle par un meilleur pointage sur le rapporteur.

Sensibilité Pour des raisons de facilité d'exploitation, on s'efforce de réaliser le capteur de sortie afin qu'il existe une relation linéaire entre les variations Δs de la grandeur de sortie et les variations Δm du mesurande :

$$\Delta s = S\Delta m$$

S est nommée sensibilité du capteur. Si on évalue la sensibilité de l'ensemble capteur-conditionneur, la tension de sortie peut dépendre de la tension d'entrée.

> Déduire de la courbe d'étalonnage précédente la sensibilité de l'ensemble potentiomètre-conditionneur : c'est le coefficient directeur de la droite d'étalonnage.

Limites d'utilisation d'un capteur On distingue plusieurs limites d'utilisation d'un capteur :

- le domaine nominal d'emploi : ses limites sont les valeurs extrêmes que peuvent atteindre le mesurande sans modification du fonctionnement, ni des caractéristiques du capteur ;
- le domaine de non-détérioration : dans ce domaine, les caractéristiques métrologiques du capteur peuvent être modifiées, mais le capteur retrouve ses caractéristiques initiales une fois revenu dans le domaine nominal d'utilisation ;
- le domaine de non-destruction : le capteur peut encore être utilisé, mais ses caractéristiques sont modifiées de façon irréversible. Une réutilisation nécessite alors un nouvel étalonnage.

5. Rapidité et temps de réponse

La rapidité d'un capteur caractérise sa capacité à suivre les variations du mesurande au cours du temps. Pour la définir quantitativement, on utilise le plus souvent le temps de réponse.

Pour avoir un bon contact entre le curseur et la résistance, et ainsi une valeur représentative de la position angulaire, le constructeur fixe une limite à la vitesse de déplacement du curseur, de l'ordre du m/s. Cela correspond à une vitesse de rotation élevée, que nous ne pouvons pas atteindre ici.

6. Erreurs de mesure

Les erreurs de mesure peuvent avoir plusieurs origines :

- une erreur sur la valeur d'une grandeur de référence (erreur sur la longueur ou la masse d'un étalon, mélange eau-glace impur pour une mesure de température de changement d'état par exemple) ;
- une erreur sur l'étalonnage, devenu invalide à la suite du vieillissement du capteur par exemple ;
- une erreur de rapidité (variation trop rapide du mesurande) ;
- une erreur de discrétion du capteur (sonde thermométrique de trop grande capacité calorifique, masse du capteur non négligeable modifiant les oscillations d'une poutre) ;
- un écart à la linéarité du conditionnement (pont de Wheatstone par exemple, voir plus loin) ;

- un effet d'hystérésis : la valeur lue dépend du sens de parcours;
- le bruit de fond, des inductions parasites, la fluctuation des tensions d'alimentation;
- la variation de grandeurs d'influence (température, hygrométrie).

Pour réduire ces erreurs, il faut s'assurer de protéger la chaîne de mesures des différents parasites (température stabilisée, régulation des tensions d'alimentation, blindage, filtrage des parasites) et d'utiliser des modes opératoires permettant une meilleure mesure : méthodes différentielles (voir partie 1), détection synchrone, etc.

Un capteur est dit fidèle si les erreurs accidentelles sont faibles : les résultats des mesures sont groupés autour de leur valeur moyenne. Un capteur est dit juste si les erreurs systématiques sont réduites : la valeur moyenne des mesures est proche de la valeur vraie. Un capteur est dit précis s'il est à la fois fidèle et juste.

On définit enfin la finesse : c'est la qualité d'un capteur de ne pas modifier la valeur du mesurande par sa présence. On verra notamment l'importance de cette notion lors du TP sur la thermométrie.

7. Applications possibles

On peut illustrer des applications du capteur potentiométrique sur :

- l'asservissement du moteur en position (voir TP n°7 d'électronique);
- l'étude du pendule grand angle (voir TP n°1 Divers) : la mesure de l'angle est réalisée au moyen d'un potentiomètre;
- l'étude des pendules couplés (voir TP n°2 Divers) : la mesure des angles est aussi réalisée au moyen de potentiomètres;
- l'étalonnage d'un capteur tachymétrique.

II. Exemples de capteurs de déplacement

1. Capteurs capacitifs

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1] (p.365) et Réf. [3] (chap. Condensateurs) pour une présentation générale.

a. Étude d'un condensateur modèle

Liste du matériel :

- le condensateur d'Aepinus P68.12,
- un RLC-mètre Voltcraft LCR4080 P69.23,
- les plaques de verre P68,
- du ruban adhésif,

Un condensateur est un ensemble de conducteurs (les armatures) séparés par un isolant diélectrique, permettant d'accumuler des charges électriques sur ceux-ci si une différence de potentiel leur est imposée. La façon la plus simple d'en construire un est donc de placer deux plaques métalliques en regard. Dans ce cas, la capacité de ce système est :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e}$$

où S désigne la surface des plaques métalliques, e l'écartement entre elles, et ε_r la permittivité diélectrique relative du matériau. Cette formule est valable à condition de négliger les effets de bords, c'est-à-dire si $S \gg e^2$.

> Utiliser le condensateur d'Aepinus. Pour minimiser les capacités parasites, éloigner les fils le plus possible du condensateur, et les fixer avec du ruban adhésif au plan de travail. Mesurer à l'aide d'un RLC-mètre, réglé en capacimètre à 1 kHz, la capacité du condensateur d'Aepinus pour différentes valeurs d'écartement e mesurées au pied à coulisse. Tracer C en fonction de $1/e$.

Les fils induisent des capacités parasites, les attacher permet d'assurer que leur valeur est constante : c'est l'ordonnée à l'origine de la courbe. On attend une pente de valeur $\varepsilon_0 \varepsilon_r S$, avec $S = \pi D^2/4$. Mesurer D et en déduire la permittivité relative de l'air (on attend $\varepsilon_r = 1,00$).

Dépendance de la capacité avec le milieu diélectrique

> Insérer (et serrer) une plaque de verre entre les armatures et mesurer la nouvelle valeur de capacité. Superposer plusieurs plaques de verre pour faire varier l'épaisseur et recommencer la mesure. Mesurer l'épaisseur des plaques de verre au pied à coulisse. De la même manière que précédemment, tracer C en fonction de $1/e$ et en déduire la permittivité diélectrique relative du verre (à 1 kHz).

b. Application à un détecteur de niveau d'eau

Liste du matériel :

- l'éprouvette P68.14/2,
- un RLC-mètre Voltcraft LCR4080 P69.33,
- une LED P29.25.

Le but de cette manipulation est d'étudier un capteur capacitif modèle. On fabrique un condensateur en posant deux feuilles d'aluminium de part et d'autre d'une éprouvette. En remplissant l'éprouvette avec de l'eau, le circuit électrique est modifié, comme indiqué en figure 1.

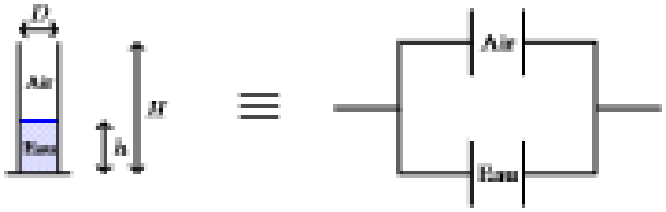


Figure 1 – Principe du capteur de niveau d'eau et de son équivalent électrique.

La capacité totale du système est donc :

$$C = C_{air} + C_{eau} \propto \varepsilon_{r,eau} h + \varepsilon_{r,air}(H - h)$$

Le capteur que nous avons ici traduit donc la hauteur d'eau (mesurande) en une valeur de capacité. C'est donc un capteur passif.

⚠ Manipuler l'éprouvette avec précaution pour éviter de déchirer le papier aluminium collé sur sa surface.

> Mesurer la capacité de l'éprouvette vide, puis de l'éprouvette pleine, au RLC-mètre.

Étudions maintenant une façon de réaliser le conditionnement de ce capteur. Pour obtenir une tension traduisant la valeur de la capacité, on peut utiliser un circuit qui délivrera une tension continue proportionnelle à la capacité. On peut également constituer un multivibrateur astable (voir TP électronique) dont la fréquence sera proportionnelle à la capacité, ou réaliser un pont d'impédances. Plusieurs exemples de conditionnement des capteurs capacitifs sont exposés dans la Réf. [1] (p.365). Nous proposons le conditionnement présenté en figure 2.

On a :

$$u_1 = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} u_0 = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} u_0$$

Si $RC\omega \ll 1$, alors $u_1 = jRC\omega u_0$. Ensuite, on place un suiveur, et un détecteur de crête (diode suivi d'une filtre RC parallèle) permet d'obtenir l'amplitude de la tension alternative. Le signal continu est donc proportionnel à la capacité d'entrée, donc à la hauteur d'eau.

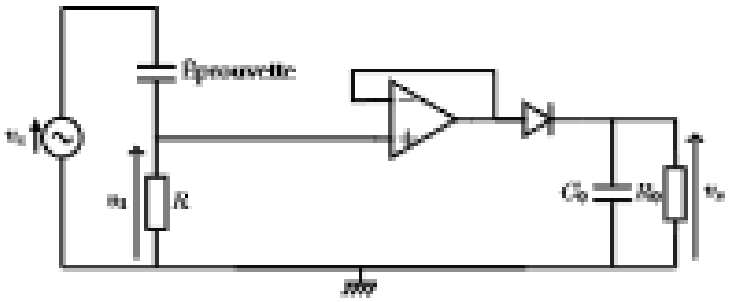


Figure 2 – Conditionnement du capteur de niveau d'eau.

Choix des composants

- Pour les valeurs de R et de ω, un compromis est à trouver : il faut avoir $RC\omega \ll 1$ pour assurer la linéarité du conditionnement, mais $RC\omega$ doit être suffisant pour obtenir un signal d'amplitude significatif. On choisira $R = 200$ kΩ et $f = 1$ kHz.
- Le produit R_0C_0 doit être choisi grand devant la période du signal. Par contre, ce temps conditionne également le temps de réponse de l'ensemble de la chaîne. On prendra $R_0 = 100$ kΩ et $C_0 = 1$ µF.

> Câbler le circuit présenté en figure 2. Choisir une tension sinusoïdale d'amplitude $V_{pp} = 20$ V et de fréquence 1 kHz, et comme valeurs de composants celles présentées ci-dessus. Pour différentes hauteurs d'eau h dans l'éprouvette, mesurer la tension u_s en sortie au multimètre. Vérifier la linéarité du capteur et calculer sa sensibilité.

Attention : les problèmes les plus fréquents sont des faux contacts entre les fils de connexion et le papier aluminium.

On réalise ici un étalonnage absolu, en se basant sur un étalon de longueur défini (les graduations de l'éprouvette ici). Il est difficile d'évaluer la rapidité du capteur, qui dépend plus des caractéristiques du conditionnement que du capteur lui-même.

Pour illustrer une application de ce capteur, on peut ajouter en sortie un comparateur, suivi d'une LED TLP29..25 (voir figure 3). Si la tension en sortie de l'AO est $+V_{sat}$ (i.e. $u_s < u_{seuil}$), elle s'allume, si c'est $-V_{sat}$ (i.e. $u_s > u_{seuil}$), elle s'éteint. On détecte donc avec ce voyant lumineux le passage d'un seuil. On pourrait assez simplement imaginer déclencher la mise en route ou l'arrêt d'une pompe avec ce type de système et un interrupteur commandé.

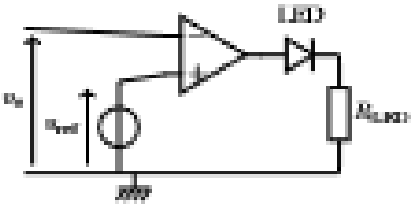


Figure 3 – Détection du dépassement du niveau d'eau.

> Câbler le circuit présenté figure 3 à la suite du conditionneur. On pourra choisir $u_{seuil} = 3$ V et $R_{LED} = 1$ kΩ. Vérifier son bon fonctionnement : la LED s'éteint lorsque le niveau d'eau dépasse la moitié (environ).

2. Étude d'un capteur inductif

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (p.340) pour une présentation générale.

Liste du matériel :

- **le dispositif P96 . 65,**
- **la platine de translation P96 . 68,**
- **une plaquette d'expérimentation optique P5 . 0**

Nous avons à disposition dans la collection un capteur de position inductif à courants de Foucault. L'élément essentiel de ce capteur est une bobine parcourue par un courant de haute fréquence. Cette bobine crée dans son environnement un champ magnétique variable : un objet conducteur placé dans cette zone est donc le siège de courants de Foucault. On peut comprendre le fonctionnement de ce type de capteur en modélisant la cible par un circuit (R, L) couplé par induction mutuelle à la bobine du capteur. L'inductance est modifiée et on mesure cette impédance. L'étude de ce problème est réalisée dans la Réf. [1] (p.389) [1].

La cible utilisée doit être un bon conducteur, ici nous utiliserons de l'aluminium. L'objet doit être suffisamment épais pour que l'on puisse négliger l'épaisseur de peau. Pour l'aluminium, l'épaisseur doit être supérieure à 300 μm environ.

Le capteur vu dans son ensemble est un capteur actif : une tension représentative de l'écart au capteur est délivrée. Pour le capteur dont nous disposons, la plage nominale d'emploi est une distance entre 0 et 2 mm. Le conditionnement n'est pas indiqué par le constructeur. Selon [1], il s'agit d'un pont constitué d'une inductance de référence et de l'inductance variable.

Le protocole que nous proposons permet d'étalonner le capteur, de définir ainsi son domaine de linéarité et la sensibilité correspondante. Pour mesurer précisément la distance séparant le capteur de la cible, on utilise une platine de translation Thorlabs dotée d'une vis micrométrique. **Cette platine ainsi que les différents éléments nécessaires à l'expérience sont regroupés dans une boîte P96 . 68. Pour éviter des petits déplacements pouvant modifier de façon importante les mesures, tous les éléments seront vissés : vous pouvez demander un set de clé Allen aux techniciens.**

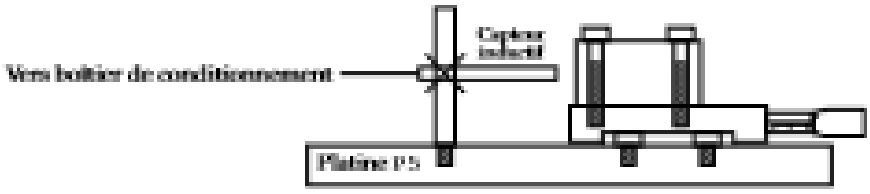


Figure 4 – Schéma de l'étalonnage du capteur inductif.

> Réaliser le dispositif schématisé en figure 4. Visser la platine de translation sur une plaquette d'expérimentation optique à l'aide de deux petites vis. Visser le cube en aluminium (deux grandes vis) sur la platine de translation. Visser ensuite une tige sur la plaquette, et y fixer le capteur inductif à l'aide d'une noix. Il faut s'assurer que le capteur inductif est perpendiculaire au cube. Vérifier enfin que tous les éléments sont bien forts. Pour différentes distances mesurées avec la vis micrométrique, mesurer la tension en sortie du boîtier. Faire des mesures entre 0 et 2 mm en aller-retour (on vérifie ainsi que le dispositif n'a pas bougé). Déterminer le domaine de linéarité du capteur et en déduire sa sensibilité. **On attend environ 3 V/mm.**

Beaucoup de capteurs inductifs sont basés sur la traduction électrique du déplacement d'un des éléments d'un circuit magnétique. Le déplacement va induire une modification du flux dans un enroulement. Le déplacement peut être mis en évidence par la modification du coefficient d'induction d'une bobine. Le principe est celui de l'électroaimant à entrefer variable étudié dans le TP sur la production de champs magnétiques. Il existe d'autres capteurs inductifs du même type comme les bobines à noyau plongeur, où un noyau magnétique est enfoncé d'une longueur variable dans un bobinage, le coefficient d'autoinduction dépend de l'enfoncement du noyau. On trouvera plusieurs exemples de réalisations dans la Réf. [1] (p.345).

1. L'étude était également l'objet de l'épreuve du concours Centrale-Supélec PSI 2007, dont on peut trouver l'énoncé et le corrigé sur internet.

III. Accéléromètre

1. Principes généraux et prise en main

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1] (p.517), Réf. [9] (p.3) et Réf. [8] pour une présentation générale.

Liste du matériel :

- **l'accéléromètre P96.67,**
- **rapporteur et fil à plomb P96.19,**
- **du ruban adhésif,**
- **un petit écran d'optique.**

Un accéléromètre est un dispositif permettant la mesure d'une accélération. Cependant, peu d'accéléromètres sont basés sur une mesure directe de l'accélération[2] : la plupart utilisent la mesure d'une force (accéléromètre piézoélectrique[3]), ou de la déformation d'un corps d'épreuve. C'est le cas pour l'accéléromètre que l'on va étudier ici.

L'accéléromètre étudié est un module accéléromètre MEMS (MicroElectroMechanical System) ADXL330. C'est un accéléromètre à peigne capacitifs 3-axes : on peut réaliser simultanément la mesure de l'accélération dans les trois directions de l'espace. C'est un capteur intégré : le capteur ainsi que l'électronique associée sont réalisés sur une tranche de silicium.

Le principe de cet accéléromètre est bien expliqué dans la Réf. [9] : le déplacement de microstructures, consécutif à l'accélération, est mesuré via un capteur capacitif. Le conditionnement de ce capteur est intégré dans un circuit miniaturisé.

> Alimenter l'accéléromètre avec une tension continue de 5V. Contrôler la tension aux bornes de X, Y puis Z par rapport à la masse lorsque l'on déplace l'accéléromètre brutalement.

Attention : la tension de sortie est proportionnelle à la tension d'alimentation. Lors de vos mesures futures, pensez à maintenir cette tension constante et à la contrôler régulièrement au multimètre.

> Pour obtenir la direction de mesure, on utilise l'accélération de la pesanteur. Mesurer la tension entre Z et la masse. Si on retourne l'accéléromètre, la tension passe de 1 à 1,6 V environ alors qu'elle change peu suivant X et Y. On peut procéder de même pour trouver les deux autres axes.

Z est l'axe perpendiculaire à l'accéléromètre, X est dans le sens de la longueur et Y dans le sens de la largeur.

2. Étalonnage statique relatif

Nous proposons ici un premier étalonnage assez simple de l'accéléromètre, basé sur la connaissance de l'accélération de la pesanteur $g = 9.81\ m.s^{-1}$, qui va nous permettre de vérifier la linéarité du capteur. Le principe de l'accéléromètre fait qu'il peut être étalonné en statique.

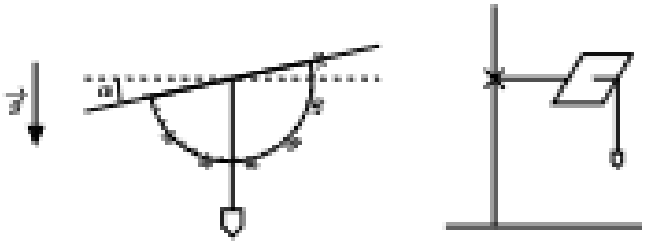


Figure 5 – Vue de face (à gauche) et de côté (à droite) de l'expérience d'étalonnage statique de l'accéléromètre.

2. On peut citer le gravimètre absolu balistique, qui joue sur la mesure de la position d'une masse en chute libre sous vide, qui est utilisé en géophysique. Il faut cependant garder à l'esprit que la plupart des gravimètres utilisés pour le génie civil, la prospection pétrolière, etc. sont des gravimètres relatifs, moins encombrants et moins chers bien que moins précis.

3. On en trouve dans la collection au P96.61.

> À l'aide d'un statif et de noix, placer un petit écran d'optique horizontalement (voir figure 5). Y scotcher un rapporteur et un fil à plomb de telle façon à ce que le fil indique l'angle d'inclinaison de l'écran. Contrôler la valeur d'angle indiquée si l'écran est horizontal ou vertical.
> Scotcher l'accéléromètre à plat sur l'écran. Pour différentes valeurs d'angle α (de 10° en 10°), mesurer la tension u_{acc} selon l'axe Z au multimètre. Faire la moyenne des angles opposés. Retrouver l'incertitude sur la tension dans la notice du multimètre et évaluer l'incertitude sur la mesure de l'angle.
> Représenter u_{acc} en fonction de l'accélération $a = g\cos\alpha$: la pente est la sensibilité du capteur.

Pour une tension d'alimentation de 5 V, on attend une sensibilité de l'ordre 0.036 V/(m.s^{-2}).

Remarque : on peut profiter de ce protocole pour étalonner en même temps la composante X de l'accéléromètre.

3. Étalonnage dynamique et bande passante (en seconde lecture)

Liste du matériel :

- le pot vibrant P99.13,
- la plaque d'aluminium P96.85,
- deux voltmètres,
- un GBF,
- un oscilloscope,
- du ruban adhésif.

Le but de l'étalonnage proposé est de réaliser un étalonnage absolu et d'obtenir la bande passante de l'accéléromètre en utilisant un pot vibrant. Le pot vibrant est un filtre passe-bande avec une réponse en accélération constante entre quelques dizaines et quelques centaines de Hz.

Étalonnage dynamique On propose un second étalonnage de l'accéléromètre. On utilise le capteur inductif étudié et étalonné dans la partie 2 pour obtenir l'amplitude de vibration du pot vibrant : on fixera sur le pot une plaque en aluminium (il est important que le métal soit le même que celui utilisé pour l'étalonnage si on veut par la suite obtenir un étalonnage absolu de l'accéléromètre).

> Visser la plaque d'aluminium sur le pot vibrant. On pourra utiliser des adaptateurs (demander aux techniciens) si le pas de vis n'est pas adapté. Scotcher l'accéléromètre sur la plaque.
> Commander le vibreur par un GBF (tension sinusoïdale d'amplitude 2 V et de fréquence $f = 20$ Hz pour commencer). Mettre en route l'amplificateur : tourner la molette de façon à le mettre sous tension, redescendre au gain le plus bas, et appuyer sur `Boost`. Choisir un gain entre 1 et 2.
> Approcher le capteur inductif de la plaque. Observer les signaux en sortie de l'accéléromètre et du capteur inductif et vérifier qu'ils sont bien sinusoïdaux.
> Mesurer au multimètre en mode AC la tension aux bornes du capteur inductif u_{bobi} et de l'accéléromètre u_{acc} pour différentes tensions de commande entre 100 mV et 2 V.

On déduit l'amplitude des oscillations de la tension aux bornes du capteur inductif $\Delta x = \Delta u_{bobi}/k$, $k = 3.10^{-3}$ V/m désignant le coefficient d'étalonnage du capteur inductif. L'accélération mesurée est donc $a_m = 4\pi^2 f^2 \Delta u_{bobi}/k$. Tracer u_{acc} en fonction de a_m.

Bande passante On utilise le même protocole pour déterminer la bande passante de l'accéléromètre : on trace le diagramme de Bode du capteur. On utilise le capteur inductif pour s'affranchir de la bande passante du pot vibrant.

> Mesurer au multimètre en mode AC la tension aux bornes du capteur inductif u_{bobi} et de l'accéléromètre u_{acc} pour différentes fréquences entre 20 Hz et 250 Hz (tension de commande de 2 V). Faire plus de points à basse fréquence.

Tracer u_{acc}/u_m où $a_m = 4\pi^2 f^2 u_{bobi}/k$ en fonction de la fréquence. Ajuster le gain par un passe-bas d'ordre 1 : on attend un comportement passe-bas avec une fréquence de coupure autour de 50 Hz.

Méthode optique On peut également mesurer l'amplitude de vibration par un dispositif optique, présenté en figure 6. En scotchant un miroir sur l'accéléromètre et en envoyant un faisceau laser en incidence oblique, l'amplitude du déplacement (vertical) l_f de spot laser est le double de l'amplitude de vibration d. On peut y accéder de façon plus précise avec le dispositif Caliens.

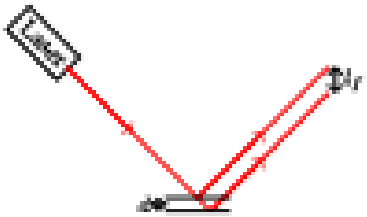


Figure 6 – Méthode optique de mesure de l'amplitude d'accélération.

4. Application : détermination du module d'Young d'une poutre

Liste du matériel :

- **la poutre en laiton** `r78.17`,
- **des serre-joints**

On utilise l'accéléromètre pour mesurer le module d'Young d'une poutre encastrée. La poutre doit être assez rigide pour éviter que la présence de l'accéléromètre n'influe trop sur sa fréquence propre de vibration. On attend, pour le mode fondamental :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}\frac{1.875^2}{L^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Ea^2b}{12\rho ab}}\frac{1.875^2}{L^2}$$

a désigne l'épaisseur, b la largeur et L la longueur. Donc :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Ea^2}{12\rho}}\frac{1.875^2}{L^2}$$

> Scotcher l'accéléromètre au bout d'une poutre de laiton (large d'environ 1 centimètre, épaisse de 2 mm). Encastrer la poutre entre la table et des plaques de bois solidement maintenues à l'aide de serre-joints. Coller l'accéléromètre proche du point d'ancrage pour éviter qu'il n'influe trop sur la fréquence de vibration. Pour différentes longueurs, mesurer la fréquence de vibration. Tracer f en fonction de L^2 et en déduire E.

On attend environ $E \approx 30$ GPa. On peut comparer à la valeur obtenue en mesurant la déflexion (statique) de la lame pour différentes masses fixées à son extrémité.

Remarque : on peut également utiliser un aimant fixé à la barre et une bobine placée à proximité pour mesurer la fréquence à partir de la tension aux bornes de la bobine.

IV. Capteurs de force

1. Jauge de contrainte

a. Présentation

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1] (p.410), Réf. [6] et Réf. [7] (p.121) pour une présentation générale.

Une jauge d'extensométrie, appelée usuellement jauge de contrainte, est constituée d'un conducteur électrique fixé sur un support appelé corps d'épreuve, dont la forme est représentée en figure 7. Au repos, la

longueur entre A et B vaut l_0 et la résistance R_0. Comme la jauge est collée sur le substrat, elle subit la même déformation. La longueur entre A et B, ainsi que l'épaisseur s'en trouve alors modifiée. La mesure de la résistance permet alors de quantifier la déformation du corps d'épreuve. Le calcul est réalisé dans la Réf. [7] (p.121). Des détails sur la fabrication et le fonctionnement des jauges de contrainte peuvent également être consultés dans la Réf. [1] (p.411).

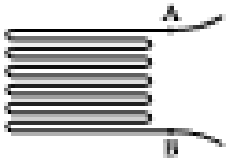


Figure 7 – Schéma de principe d'une jauge de contrainte.

Conditionnement de la jauge La mesure des variations de la résistance de la jauge de contrainte est usuellement réalisée par un pont de Wheatstone. À noter qu'un montage potentiométrique est également utilisable bien que moins précis.

Limitations possibles

- Les effets thermiques agissent théoriquement de la même façon sur les quatres branches du pont de résistances, mais peuvent devenir indésirables si on veut atteindre une certaine précision : des circuits de compensation existent et sont exposés dans la Réf. [6] (p.15).
- La limitation en fréquence de ce type de capteur ne dépend en général que de l'inertie du corps d'épreuve, ou du conditionnement de la jauge.

b. Étude de la jauge de contrainte

Le lecteur est invité à consulter avec profit la notice de la jauge.

Liste du matériel :

- le boîtier "jauge de contrainte" et la lame de scie correspondante P70 . 3,
- les masselottes P98,
- une balance de précision,
- un multimètre.

Montage proposé Le corps d'épreuve sur lequel sont fixées les jauges est une lame de scie, dont on caractérise la flexion. Les jauges d'extensométrie sont en constantan (alliage de cuivre à 55 % et de nickel à 45 %) et leur résistance nominale est de 350 Ω environ. Elles ont l'avantage de présenter une très bonne linéarité entre leur déformation et la variation de résistance.

Les deux jauges sont collées près de l'encastrement, l'une au-dessus de la lame (déformation de traction) et l'autre en-dessous (compression). Les résistances varient donc en sens opposé. Le premier étage du conditionnement est un pont de résistance, schématisé en figure 8, à droite. Le montage est étudié dans la Réf. [1] (p.430).

À l'équilibre, $v_s = 0$. Cela correspond à $R_1 R_3 = R_2 R_4$. Pour des variations faibles autour de l'équilibre, on a :

$$v_s = \frac{V_e}{4}\left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4}\right)$$

Si R_2 et R_3 sont maintenues constantes, et que $\frac{\Delta R_1}{R_1} = -\frac{\Delta R_4}{R_4}$, alors :

$$v_s = \frac{V_e}{2}\frac{\Delta R_4}{R_4}$$

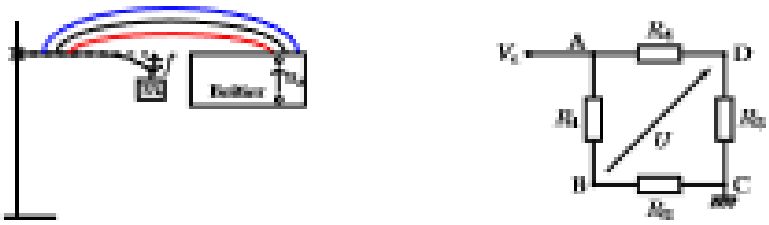


FIGURE 8 – À gauche, schéma de l'expérience d'étalonnage de la jauge de contrainte. À droite, montage en pont de Wheatstone : R_2 et R_3 sont deux résistances, R_1 et R_4 les deux jauges de contrainte.

Le second étage est un amplificateur différentiel, car la tension u_s résultant de la déformation est faible (de l'ordre du mV) et le dernier étage est un filtre passe-bas de l'ordre du Hz de façon à éliminer les parasites (surtout à 50 Hz).

Attention : le dispositif est fragile donc il faut le manipuler avec précaution. S'assurer également que le boîtier et la lame de scie sont bien appariés (voir numéros sur le côté). On préfèrera la lame de scie n°1, plus pratique à étalonner.

> Constituer le montage d'étalonnage schématisé en figure 8 à gauche. Relier les bornes derrière le boîtier aux jauges d'extensométrie en respectant bien les couleurs (rouge, bleu et noir). Bien régler l'horizontalité de la lame et alimenter le boîtier.
> Étalonner la jauge de contrainte en accrochant à l'extrémité de la lame des masses entre 0 et 150 g (environ tous les 10 g), en mesurant la tension continue u_s en sortie du filtre passe-bas au multimètre.
> À l'aide d'une feuille de papier millimétré collée sur un écran d'optique, relever également la valeur de la déflexion de la lame de scie f (voir figure 8 à gauche).
> Peser les masses à l'aide d'une balance de précision.
> Tracer u_s en fonction de m. Constater la linéarité jusqu'à 120 g environ et en déduire la sensibilité correspondante. Tracer ensuite la tension de sortie en fonction de la déflexion.

On attend :

$$u_s = \frac{3a}{4} G V_e \frac{lh}{L^3} f$$

Les différentes valeurs sont indiquées dans la notice du dispositif. Parmi les jauges présentes dans la collection, on a par exemple, pour la jauge n°1 : $k = 2,135$ désigne le facteur de jauge, $G = 437$ désigne le gain de l'amplificateur différentiel, $l = 12,3 \pm 0,2$ mm, $a = 0,62 \pm 0,01$ mm, et $L = 145,2 \pm 0,2$ sont les paramètres géométriques de la lame de scie. V_e est la tension d'alimentation du pont, égale à 5 V (et non mesurable ici).
Remarque : le temps de réponse est ici dû au filtre passe-bas en sortie de l'amplificateur opérationnel.

c. Réalisation du pont de Wheatstone (en seconde lecture)

Liste du matériel :

- une batterie P54 . 21,
- deux boîtes de résistances à décades,
- un millivoltmètre Fluke 187/287.

Le boîtier de la collection réalisant le conditionnement de la jauge d'extensométrie comporte un filtre passe-bas qui permet de filtrer le bruit important à 50 Hz lié à son alimentation par le secteur. Il est donc adapté pour une exploitation du dispositif dans des régimes "statiques", mais ne permet pas d'étudier par exemple les modes de vibration de la lame sur laquelle sont collées les jauges.
Le but de cette expérience est de câbler soi-même le conditionnement de la jauge, et d'alimenter le circuit par des batteries pour lesquelles le bruit "à 50 Hz" est inexistant.

Attention : les batteries peuvent délivrer de forts courants (de l'ordre de la dizaine d'ampères, mais sans danger pour l'utilisateur car la tension est faible) et ne possèdent aucune protection contre les court-circuits.

Bien vérifier le câblage et ne les connecter au circuit qu'en dernier. Vous pouvez tester le montage avec une alimentation continue usuelle pour commencer (à masse flottante).

> Réaliser le pont de Wheatstone présenté en figure 9 à gauche. On choisira pour R_2 et R_3 deux boîtes à décades. Les fixer autour de 345 Ω. Alimenter le pont et mesurer la tension u_s au millivoltmètre. En l'absence de déflection de la lame, régler les boîtes à décades de façon à annuler la tension u_s. Ajouter en sortie du pont U un amplificateur inverseur (figure 9 à droite). On choisira $R = 10$ kΩ et $R' = 1$ MΩ. On peut régler légèrement l'offset de façon à annuler la tension de sortie en l'absence de masse.

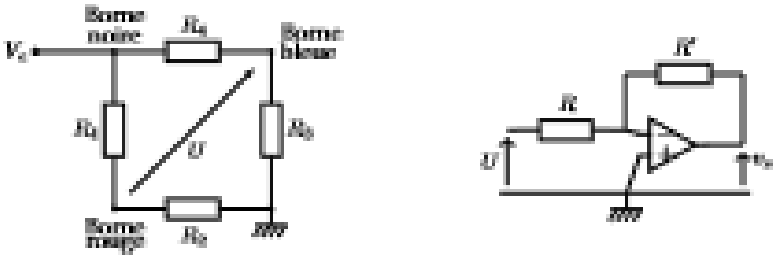


FIGURE 9 – À gauche, câblage du pont de Wheatstone. À droite, amplificateur inverseur (vous pouvez aussi câbler un non-inverseur).

Il est maintenant possible de faire la même étude : étalonnage, linéarité et sensibilité, facteur de jauge. Lorsque le pont est alimenté par la batterie, le bruit à haute fréquence est considérablement diminué (en particulier à 50 Hz) et il n'est plus nécessaire d'ajouter un filtre passe-bas pour éliminer les parasites. On peut alors étudier les oscillations de la poutre encastrée dont les spécifications (grandeurs géométriques, module de Young) sont données dans la notice.

Le temps de réponse du système n'est plus dû au conditionnement, mais à l'inertie mécanique des différents éléments. Il est difficile ici de le déterminer.

2. Capteur piézoélectrique (en seconde lecture)

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [2] (p.101) et Réf. [1] (p.462) pour une présentation générale.

Liste du matériel :

- **le capteur piézoélectrique P95 . 50.**

Un capteur piézoélectrique est disponible dans la collection. Un tel capteur met en jeu l'effet piézoélectrique direct, c'est-à-dire l'apparition d'une différence de potentiel aux bornes de certains cristaux anisotropes si ceux-ci sont soumis à une contrainte. Ce capteur est donc un capteur actif : aucune source extérieure d'énergie n'est nécessaire pour que la tension soit délivrée.

Si on branche directement le capteur sur une carte d'acquisition, on observe une décroissance exponentielle de la tension aux bornes du cristal piézoélectrique après excitation. Ce phénomène est dû à la décharge du condensateur que constitue le cristal piézoélectrique dans la résistance d'entrée de la carte d'acquisition. Pour étudier ce capteur, il faut donc utiliser un dispositif ayant une très grande impédance d'entrée. On pourra se reporter au montage présenté dans la Réf. [2] (p.101).

V. Loi de Gladstone (*)

La loi de Gladstone est une loi physique empirique reliant l'indice d'un gaz à sa masse volumique par la relation :

$$n - 1 = k\rho. \tag{1}$$

C'est une loi qui apparaît très naturellement à partir de la relation de Clausius-Mossotti. Une variation de masse volumique, associée à une variation de pression (ou éventuellement à une variation de température,

situation qui ne sera pas considérée dans cette expérience) se traduit par une variation d'indice optique. Dans le cadre de l'air, modélisé par un gaz parfait, on peut donc écrire (la transformation étant à nouveau supposé isotherme, l'air de la pièce jouant le rôle de thermostat) que :

$$\Delta n = \frac{kM_g}{RT}\Delta P, \tag{2}$$

où $M_g = 28.965$ g/mol, $R = 8.314$ J/K/mol et $T = 290$ K au moment de l'expérience. L'objectif de cette mesure est de remonter à la valeur de k, donc la valeur expérimentale attendue à $T = 273$ K est :

$$k^{\text{attendu}} = 0.226\ \text{cm}^3/\text{g}. \tag{3}$$

Afin de mesurer cette valeur de k, nous proposons de réaliser un montage interférométrique utilisant un Michelson en configuration lame d'air pour lequel on se place près du contact optique. On insère ensuite la cuve en verre reliée à une pompe dans un des bras de l'interféromètre, ce qui conduit à l'apparition de quelques anneaux sur l'écran. On recommande une vingtaine pour pouvoir faire des mesures de pression en compression et en dilatation, on veillera donc à utiliser une pompe réversible.

Il convient ensuite en comprimant ou dilatant le gaz au sein de la cuve en verre, de compter le nombre d'anneaux défilant au centre de la figure d'interférences et de relever la pression correspondante toutes les n occurrences (avec n laissé à votre appréciation). À l'aide de la cuve, on peut atteindre des surpressions et des soupressions de l'ordre de 100 kPa et même au-delà, ce qui permet d'obtenir un nombre significatif de points de mesures.

VI. Autres capteurs

Nous n'avons abordé que certains capteurs, mais il en existe d'autres dans la collection.

- Il existe un capteur de force dont le domaine d'emploi est entre 0 et 10 N : on obtient une tension proportionnelle à la force exercée. Il est disponible dans la collection au P97 . 25. Les spécifications de ce capteur peuvent être consultées dans la notice.
- On peut utiliser une petite machine à courant continu pour réaliser des mesures tachymétriques. On peut par exemple étalonner celle qui est utilisée dans le banc MCC P0 . 5. On peut utiliser un potentiomètre ou un dispositif de hacheur optique pour réaliser son étalonnage. De nombreux détails peuvent être consultés dans la Réf. [1] (p.462).
- Il existe un capteur de position magnétostrictif au P96 . 31.
- Une sonde à effet Hall peut être utilisée pour évaluer la proximité d'un aimant.
- Dans le TP de mécanique des fluides, nous étudierons deux types d'anémomètres : le tube de Pitot et l'anémomètre à fil chaud.

Références

[1] : G. Asch et al. *Les capteurs en instrumentation industrielle*, Dunod (2010)

[2] : R. Duffait et J.-P. Lièvre, *Expériences d'électronique à l'agrégation de sciences physiques*, Ellipses (2010)

[3] : J.-M. Donnini et L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale, Tome IV : Électricité et applications*, Pierron (2004)

[4] : Y. Parmentier et P. Kratz, *Capteurs : définition, principe de détection*, Techniques de l'ingénieur n°R400

[5] : Y. Parmentier et P. Kratz, *Capteurs : principes de constitution*, Techniques de l'ingénieur n°R401

[6] : J.-L. Le Goïr et J. Averil, *Capteurs à jauges extensométriques*, Techniques de l'ingénieur n°R1860

[7] : D. Dartus et D. Bellet, *Élasticité linéaire*, Cépadues (1998)

[8] : S. Durand, *Mesures d'accélération*, Techniques de l'ingénieur n°R1812

[9] : B. Vellay, *Modélisation d'un accéléromètre MEMS*, BUP 920 p.3 et suivantes (2010)

[10] : P. Lelièvre, *Mesures tachymétriques*, Techniques de l'ingénieur n°R1809

Hyperfréquences

Table des expériences

I.	Présentation du banc hyperfréquence	76
II.	Expériences avec le banc hyperfréquence	78
III.	Loi de Malus dans le domaine hyperfréquence avec un ensemble émetteur-récepteur	80

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros du montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

Introduction

Ce TP a vocation à présenter le banc hyperfréquence. La première partie constitue une description concise des différents éléments qui le composent et présente les instruments et méthodes de mesure associés. La deuxième partie détaille les protocoles des principales expériences pouvant être réalisées avec le banc.

Liste du matériel :

- le banc hyperfréquence P89.24,
- l'alimentation de l'oscillateur Gunn CEMA P89.22,
- le détecteur centimétrique « 3cm » P90.15.

Ondes électromagnétiques dans un guide

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [1] (exercice 3.5) et Réf. [2] (chap. 8.1 et 8.2) pour une présentation générale.

Les ondes hyperfréquences (appelées aussi micro-ondes) sont des ondes électromagnétiques dont la fréquence est comprise entre 300 MHz et 300 GHz, ce qui correspond à une longueur d'onde dans le vide entre 1 m et 1 mm. Ce sont des fréquences situées entre les ondes radios et l'infrarouge. Les hyperfréquences sont utilisées par exemple pour les communications avec les satellites, pour les réseaux de téléphones portables et dans les micro-ondes également.

Une onde électromagnétique se propageant dans un guide d'onde est confinée transversalement. La relation de dispersion s'écrit alors

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

où ω est la pulsation, $k = 2\pi/\lambda$ est le vecteur d'onde, a et b ($a > b$) sont les dimensions transverses du guide et n et m caractérisent un mode. La pulsation de coupure du mode (n, m) est ainsi

$$\omega_{nm}^2 = \left(\frac{n\pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi c}{b}\right)^2$$

En pratique, pour le banc P89.24 on a $a \simeq 2{,}3$ cm et $b \simeq 1$ cm donc les fréquences de coupure sont

$$f_{10} = 6{,}5\ \text{GHz}, \qquad f_{01} = 15{,}0\ \text{GHz}, \qquad f_{11} = 16{,}4\ \text{GHz}, \qquad f_{20} = 13{,}0\ \text{GHz}, \ldots$$

Par conséquent, aux fréquences de travail, entre 8,5 GHz et 9,5 GHz, seul le mode $n = 1$, $m = 0$ peut se propager. On étudie donc uniquement le mode TE_{10} : le guide est monomode et le phénomène de dispersion inter-modale ne peut pas être illustré ici. Il y a par contre de la dispersion intra-modale puisque la vitesse de phase ω/k dépend de k.

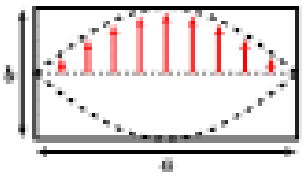


FIGURE 1 – Coupe transverse du champ électrique dans le mode TE_{10}, à un instant où son amplitude est maximale.

I. Présentation du banc hyperfréquence

Le banc disponible dans la collection est un banc hyperfréquence Oritel HDH 8100 pour lequel nous invitons le lecteur à consulter la notice.

Le banc P89.24 sera amené démonté aux oraux de l'agrégation. Il est donc nécessaire de se familiariser avec son montage. En pratique, seuls quelques blocs sont utiles.

1. Montage du banc hyperfréquence

Plusieurs groupes d'éléments composent le banc hyperfréquence :

- la source de champ électromagnétique : la diode Gunn et l'isolateur ;
- la ligne de propagation et les instruments de mesure : principalement l'atténuateur, le fréquencomètre [1] et la ligne de mesure ;
- la terminaison du banc, c'est-à-dire les charges.

D'autres éléments sont disponibles mais ne seront pas utilisés dans ce TP.

> Les différents éléments s'accollent facilement grâce aux fixations rapides. Construire le banc comme présenté en figure 2, avec les supports Oritel SUP 100. Les éléments sont dans l'ordre : diode Gunn Oritel OSC 100, isolateur Oritel ISO 100, atténuateur Oritel ATM 100, fréquencomètre Oritel OND 100, ligne de mesure Oritel LAP 100, et pour charge une pièce de métal Oritel CC 100 Short, qui assure une réflexion quasi-totale et ainsi un bon confinement longitudinal. Pour fixer la charge, il faut utiliser un adaptateur pour passer du système de fixation rapide à un système vis/écrou.

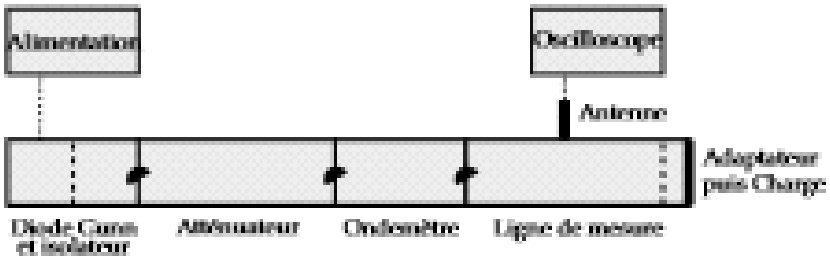


FIGURE 2 – Schéma pour le montage du banc hyperfréquence, vue de côté.

La source de l'onde à proprement parler est la diode Gunn. Elle dispose d'une alimentation spécifique. La liaison entre les deux se fait par un câble coaxial. Le seul rôle de l'isolateur est de protéger la diode des ondes en retour : il est indispensable de le placer juste après la diode.

1. parfois appelé ondemètre

> Brancher la diode Gunn à son alimentation, sortie « Osc. Gunn Output ». Appliquer 10 V.

Remarque : en réalité, l'appellation « diode » Gunn est malheureuse puisqu'il ne s'agit pas d'une jonction de semiconducteurs P et N, ce n'est donc pas une diode. On pourra consulter la notice des émetteurs/récepteurs Nova WHC910 PB9.25 pour plus de détails, ou aussi la Réf. [3] pour la description de l'effet Gunn (à « diode gunn »).

La ligne de mesure est un bout de guide fendu en son milieu (le mode TE_{10} y a son maximum). Une antenne peut alors y être placée. Le champ électrique étant homogène dans la direction verticale, sa position a peu d'importance : la placer en butée convient.

> Brancher un câble coaxial entre l'antenne de la ligne de mesure et l'oscilloscope, puis observer le signal en mode Défilement (qui a la forme d'un signal continu). A cause du confinement longitudinal par la charge terminale, on doit observer une onde stationnaire, donc une alternance de ventres et de noeuds lorsqu'on déplace l'antenne le long de l'axe du banc.

Le fréquencemètre est une cavité cylindrique de taille réglable par la vis micrométrique associée. Lorsque la résonance de la cavité (dépendant de sa taille) correspond à la fréquence de l'onde, seule une partie de l'onde est transmise au reste du guide, en particulier à la ligne de mesure. On y détecte donc une baisse du signal. La courbe d'étalonnage permet alors de remonter à la fréquence de l'onde connaissant la profondeur de la cavité.

2. Réglage et mesure de la fréquence

Nous renvoyons le lecteur aux courbes d'étalonnage de l'oscillateur Gunn et du fréquencemètre présentes dans les notices correspondantes.

Le réglage de la fréquence se fait au moyen de la vis micrométrique de l'oscillateur Gunn. La courbe imprimée sur le banc est indicative mais ne constitue pas une mesure. La mesure de la fréquence se fait à l'aide du fréquencemètre. En pratique, on place l'antenne de la ligne de mesure sur un ventre de l'onde hyperfréquence afin d'avoir un maximum de signal. On tourne ensuite la vis micrométrique du fréquencemètre jusqu'à observer une diminution du signal sur ce ventre. Le fréquencemètre est alors accordé avec l'onde : il suffit de lire la vis micrométrique et de convertir la valeur lue en GHz grâce à la courbe d'étalonnage du fréquencemètre.

> Régler l'oscillateur Gunn sur 9 GHz à l'aide de la vis micrométrique. Vérifier à l'aide du fréquencemètre que c'est effectivement la fréquence de l'onde en suivant le protocole ci-dessous. Les courbes d'étalonnage de l'oscillateur Gunn et du fréquencemètre sont disponibles en format A4 avec la notice du banc. Il est préférable de s'y référer plutôt que d'utiliser les petites figures sur le banc. Une fois la mesure faite, penser à désaccorder l'ondemètre en tournant la vis micrométrique d'un ou deux tours.

3. Mesure de la longueur d'onde

La longueur d'onde se mesure grâce à la ligne de mesure. La pièce de métal en bout de guide confine l'onde dans la longueur, donnant naissance à une onde stationnaire. On peut alors obtenir la longueur d'onde à partir de la distance entre deux noeuds (ou ventres) consécutifs.

> Sur la ligne de mesure, repérer deux noeuds (ou deux ventres) successifs. La distance entre les deux correspond à la moitié de la longueur d'onde. On attend une longueur d'onde autour de 5 cm. Comparer cette longueur d'onde à celle prédite par la relation de dispersion :
>
> $$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

REMARQUE : Pour améliorer la précision de la mesure, on peut chercher à voir trois ou quatre noeuds consécutifs. En pratique cependant, la ligne de mesure est petite et l'onde n'est pas vraiment sinusoïdale, ce qui rend l'observation de plusieurs noeuds difficile.

4. Mesure de l'amplitude du champ

Nous renvoyons le lecteur aux courbes d'étalonnage de l' atténuateur dans la notice correspondante.

L'amplitude du champ ne s'obtient pas facilement car on ne connaît pas la réponse de l'antenne en fonction du champ. On se contentera (et c'est suffisant dans toute la suite du TP) de mesurer un rapport d'amplitude, c'est-à-dire l'amplitude d'un champ par rapport à une amplitude quelconque choisie arbitrairement comme référence. Pour cela, il faut utiliser un autre élément du banc : l'atténuateur. Celui-ci dispose d'une vis micrométrique et d'une courbe d'étalonnage.

> Sur la ligne de mesure, placer l'antenne sur un noeud. Régler la vis micrométrique de l'atténuateur sur une valeur d'atténuation faible, par exemple 3,5 mm. On note cette valeur A_1. Elle vaut 0,5 dB d'après la courbe d'étalonnage. Noter la valeur de la tension de l'antenne lue sur l'oscilloscope, cela constitue la tension de référence. Déplacer alors l'antenne, par exemple sur un ventre. Tourner la vis micrométrique de l'atténuateur jusqu'à obtenir à l'oscilloscope la même tension que la tension de référence. Relever la nouvelle indication de l'atténuateur et en déduire l'atténuation en décibels A_2.

Le champ au ventre est alors $10^{(A_2-A_1)/20}$ fois le champ au noeud, par définition d'une atténuation en décibels.

II. Expériences avec le banc hyperfréquences

Les manipulations précédentes ont permis de se familiariser avec le guide d'onde. On propose dans cette deuxième partie plusieurs expériences. On commence par la vérification de la relation de dispersion, qui permet de remonter à la célérité c des ondes électromagnétiques dans l'air. La mesure du taux d'onde stationnaire est utilisée ensuite pour déterminer les coefficients de réflexion des charges terminales. La vérification de la loi de Malus est aussi importante.

1. Vérification de la relation de dispersion

La relation de dispersion pour le seul mode excité TE_{10} est

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2$$

> Pour différentes fréquences entre 8,5 GHz et 9,5 GHz, relever la fréquence f au fréquencemètre et la longueur d'onde λ avec la ligne de mesure. Tracer ensuite f^2 en fonction de $1/\lambda^2$. On doit obtenir une droite de pente c^2 et d'ordonnée à l'origine $c^2/(4a^2)$. Mesurer au pied à coulisse la dimension du guide a pour valider les paramètres d'ajustement.

2. Mesure du taux d'onde stationnaire

Le taux d'onde stationnaire (TOS, ou rapport d'onde stationnaire ROS) quantifie la "stationnarité" d'une onde en caractérisant l'impédance terminale du guide (voir la notice du banc hyperfréquence). Il se définit par

$$\text{TOS} = \frac{E_{\text{max}}}{E_{\text{min}}}$$

où E_{max} est l'amplitude à un ventre et E_{min} celle à un noeud. Il est donc supérieur ou égal à 1. Pour une onde stationnaire « parfaite », avec des noeuds d'amplitude nulle, le TOS est infini. Pour une onde parfaitement progressive, pour laquelle il n'y a ni ventre ni noeud, le TOS vaut 1. Évidemment cela est fixé par l'impédance terminale, plus particulièrement par son coefficient de réflexion en amplitude r. On a la relation suivante (démontrée dans la notice du banc hyperfréquence) :

$$\text{TOS} = \frac{1+|r|}{1-|r|}$$

On propose d'étudier trois impédances : l'extrémité libre, le cornet, et la pièce plate de métal. Qualitativement, on s'attend à avoir un TOS élevé pour la pièce de métal, un TOS intermédiaire pour l'extrémité libre, et un TOS proche de 1 pour le cornet, qui réalise par sa forme la meilleure adaptation d'impédance entre le guide et le milieu extérieur.

> À fréquence fixée (9 GHz), placer au bout du guide l'une des trois impédances (attention au sens du cornet). Régler préalablement l'atténuateur sur 3,5 mm par exemple, cela correspond à une atténuation A_1. Placer l'antenne de la ligne de mesure sur un noeud et mesurer la tension. Se placer ensuite sur un ventre, et tourner la vis micrométrique de l'atténuateur jusqu'à obtenir à nouveau la tension précédente. Noter cette nouvelle atténuation A_2.

Le TOS est alors

$$\mathrm{TOS} = \frac{E_{max}}{E_{min}} = 10^{(A_2 - A_1)/20}$$

Et la norme du coefficient de réflexion est

$$|r| = \frac{\mathrm{TOS} - 1}{\mathrm{TOS} + 1}$$

> Comparer les TOS des trois impédances suivantes : extrémité libre, cornet et pièce de métal, et vérifier que leurs comparaisons suit bien le bon sens :
>
> $$\mathrm{TOS(métal)} > \mathrm{TOS(libre)} > \mathrm{TOS(cornet)}$$

On attend environ TOS(métal)≈ 12, TOS(libre) ≈ 3 et TOS(cornet) ≈ 1,5.

3. Diagramme de rayonnement

On cherche à illustrer de manière générale l'effet du déconfinement de l'onde à la sortie d'un guide. Un diagramme de rayonnement permet de quantifier sa directivité. On compare ici le cornet et l'extrémité libre.

> Ne rien mettre au bout du guide. Placer le détecteur d'ondes centimétriques à environ 25 cm de la sortie du guide comme indiqué en figure 3. Mesurer avec un voltmètre le signal du détecteur dans l'axe. En veillant à bien conserver toujours la même distance entre le détecteur et la sortie, mesurer la tension pour différents angles α. Placer ensuite le cornet au bout du guide et faire les mêmes mesures.

On vérifie ici quantitativement que le cornet fournit une onde plus directive que lorsqu'il n'y a rien en sortie. Cela est dû au fait que le cornet assure une bonne adaptation d'impédance entre le guide et le laboratoire.

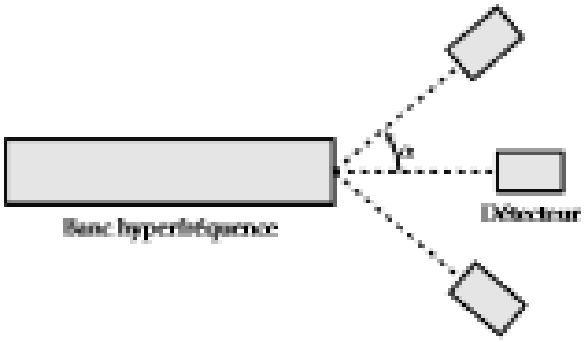


Figure 3 – Configuration du détecteur pour la mesure du diagramme de rayonnement, vue de haut.

4. Loi de Malus avec le banc hyperfréquence (en seconde lecture)

Les ondes hyperfréquences étant des ondes électromagnétiques, elles vérifient la loi de Malus. Il peut donc être intéressant de vérifier cette loi avec le banc hyperfréquence. Le seul mode qui peut se propager dans le banc est TE_{10}, le champ électrique est donc vertical : il n'y a pas besoin de polariseur. De même, le détecteur centimétrique a une antenne et possède donc une direction privilégiée : il joue le rôle d'analyseur.

Utiliser un cornet au bout du guide pour maximiser le signal sur le récepteur, placé à environ 25 cm de la sortie du guide. Le détecteur doit pouvoir tourner autour de l'axe du banc hyperfréquence. On le fixe pour cela sur une potence avec une pince quatre doigts et une noix. Prendre un rapporteur papier troué en son centre, le placer autour de la pince et le fixer (par exemple avec du scotch) à la potence pour qu'il ne tourne pas lorsqu'on tourne la pince. Prendre un petit fil de cuivre, l'enrouler puis le fixer (par exemple avec du scotch) autour de la tige pour pointer sur le rapporteur. Mesurer tous les 15° (en positif et en négatif) la projection du champ sur l'antenne du détecteur : pour cela, prendre une tension de référence aux bornes du détecteur puis utiliser l'atténuateur pour se ramener à cette tension à chaque angle. L'atténuation donne le champ par rapport à un champ de référence qu'il n'est pas nécessaire de connaître. Repérer les champs minimum et maximum, vérifier qu'ils sont obtenus pour des directions orthogonales. Prendre la position du minimum comme zéro pour les angles. Tracer ensuite la grandeur habituelle pour la vérification de la loi de Malus :

$$\frac{S(\theta)-S(90°)}{S(0°)-S(90°)} = f(\cos^2(\theta)) \quad \text{avec} \quad S = \frac{E^2(\theta)+E^2(-\theta)}{2}$$

où $E^2 = 10^{(A_S-A_0)/10}$ est le carré de la projection du champ sur la direction de l'antenne du détecteur. On doit obtenir une droite de pente 1.

Remarque : si la réponse du détecteur était quadratique, on pourrait prendre la tension V aux bornes du détecteur et utiliser

$$S = \frac{V(\theta)+V(-\theta)}{2}$$

Puisqu'on ne connaît pas cette réponse, il faut utiliser l'atténuateur pour s'en affranchir.

5. Cavité Fabry-Pérot dans le domaine hyperfréquence (en seconde lecture)

Liste du matériel :

- le banc motorisé P89.16,
- deux plaques de plexiglas P88,

Cette expérience consiste à réaliser un interféromètre de Fabry-Pérot dans le domaine hyperfréquence. L'idée est de mettre en regard deux plaques de plexiglas parallèles, et d'envoyer une onde hyperfréquence sur ce dispositif. L'une des plaques est alors mise en mouvement par le banc motorisé tandis que l'autre reste fixe. En sortie de l'interféromètre, un détecteur enregistre sur Latis-Pro le signal. On obtient une alternance de maxima et de minima (la finesse est très mauvaise). La distance entre deux maxima permet de remonter à la longueur d'onde puis à la célérité de la lumière dans le vide grâce à la fréquence de l'onde.

Fixer un cornet au bout du banc hyperfréquence. Mesurer préalablement la fréquence de l'onde à l'aide du fréquencemètre. En sortie du banc, placer une plaque le plus orthogonalement possible à l'axe du banc (à une dizaine de centimètres de la sortie), par exemple en utilisant une potence, des pinces et des noix. Fixer ensuite une deuxième plaque sur le banc motorisé (la placer pour cela sur un bras du dispositif de la collection), le plus parallèlement possible à la première plaque. Placer le détecteur d'ondes centimétriques après la fin de course du banc moteur, le connecter à Latis Pro. Démarrer le banc moteur dans le bon sens puis démarrer une acquisition. La distance entre deux maxima (obtenue par conversion avec la vitesse du banc motorisé, notée dessus) est $\lambda/2$. Ici on peut raisonnablement mesurer la distance entre 4 ou 5 maxima pour améliorer la précision de la mesure.

Connaissant λ, et puisque l'onde se propage dans l'air avec la relation de dispersion $\lambda = c/f$, on peut remonter à c et comparer à la célérité de la lumière dans le vide.

III. Loi de Malus dans le domaine hyperfréquence avec un ensemble émetteur-récepteur

Liste du matériel :

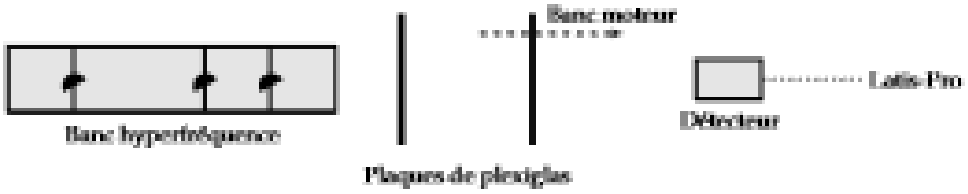


Figure 4 – Schéma pour la cavité Fabry-Pérot, vue de côté.

- l'ensemble émetteur/récepteur Nova Physics P89.25,
- un voltmètre Fluke 187.

On peut plus facilement montrer que la loi de Malus est vérifiée dans le domaine hyperfréquence en utilisant l'ensemble émetteur/récepteur Nova Physics WHC910 présent dans la collection, et dont on consultera à profit la notice.

> Monter l'émetteur et le récepteur sur des pieds d'optiques. Les mettre à la même hauteur. Brancher avec un câble coaxial l'émetteur au boîtier Nova. Brancher le câble du récepteur sur la prise jack du boîtier. Ensuite, brancher un voltmètre Fluke 187 sur la sortie « Visualisation du signal reçu ». Pousser l'interrupteur « Créneau/Continu » vers le bas. Enfin, brancher le boîtier au secteur. L'émetteur et le récepteur étant à 0°, toucher le potentiomètre de gain pour améliorer le signal reçu, sans saturer la sortie. Balayer ensuite les angles θ du récepteur pour trouver le minimum de signal, côté positif et négatif. L'angle moitié entre ces deux minima donne le zéro des angles. Relever alors la tension $V(\theta)$ tous les 15°, en positif et en négatif. Tracer ensuite la grandeur habituelle pour la vérification de la loi de Malus :
>
> $$\frac{S(\theta)-S(90°)}{S(0°)-S(90°)} = f(\cos^2(\theta)) \quad \text{avec} \quad S = \frac{V(\theta)+V(-\theta)}{2}$$
>
> où V est la tension aux bornes du détecteur. Ce dernier est en effet quadratique en champ d'après la notice des émetteurs/récepteurs Nova WHC910 P89.25. On doit obtenir une droite de pente 1.

Le fait de soustraire $S(90°)$ permet de s'affranchir du bruit ambiant. Le fait d'utiliser $V(\theta)+V(-\theta)$ repousse à l'ordre 2 l'erreur due au mauvais repérage du zéro des angles. Enfin, la normalisation par $S(0°)-S(90°)$ fait disparaître les constantes de conversion des instruments, ce qui permet d'obtenir une pente 1.

Le lien avec la loi de Malus n'est pas immédiat ici puisqu'il n'y a pas de couple polariseur/analyseur. Le polariseur est en fait inutile puisque l'onde en sortie de l'émetteur est déjà polarisée rectilignement. Quant à l'analyseur, on pourrait laisser le détecteur fixe et placer devant lui une grille métallique P90.20 avec un pas de l'ordre du centimètre (ou P89.25), que l'on ferait tourner autour de l'axe joignant le récepteur et l'émetteur. En pratique le résultat est meilleur en bouchant le détecteur directement, qui joue alors lui-même le rôle d'analyseur.

Références

[1] : C. Garing, *Ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux conducteurs*, Ellipses (1998).

[2] : R. Taillet, *Optique physique*, De Boeck (2006).

[3] : R. Taillet, L. Villain et P. Febvre, *Dictionnaire de physique*, De Boeck (2013).

Matériaux

Table des expériences

I.	Conduction thermique dans les métaux	82
II.	Propriétés électriques	84
III.	Diffraction d'électrons par le graphite	90

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pourrez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Conduction thermique dans les métaux

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (p.384) pour une présentation générale.

Liste du matériel :

- la barre en cuivre P0.73,
- un amplificateur de puissance Kepco P53.9,
- un GBF,
- un ampèremètre,
- un oscilloscope,
- la barre en cuivre non-calorifugée P0.2 si l'on souhaite plonger une extrémité dans un bain thermostaté.

1. Présentation

La diffusion thermique est le transfert de chaleur des parties chaudes vers les parties froides d'un matériau, sans transport de matière. Dans les métaux, cette conduction est assurée par les électrons de la bande de conduction et par les phonons et est limitée par les interactions électrons-phonons. Une des caractéristiques des métaux est de posséder une conductivité thermique élevée. On note μ la masse volumique du métal, c sa capacité thermique massique et λ sa conductivité thermique. Dans une barre où les parois latérales ne permettent pas de transfert thermique, l'équation de la chaleur régissant l'évolution de la température $T(x,t)$ est :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

avec le coefficient de diffusion thermique $\kappa = \frac{\lambda}{\mu c}$.

a. Dispositif expérimental

On peut imposer la température aux modules d'entrée et de sortie en plaçant un récipient de grande conductivité thermique, maintenu à température constante (un mélange eau-glace agité par exemple). On peut également imposer le flux thermique au moyen d'une résistance chauffante ou d'un module Peltier.

Le dispositif disponible dans la collection, schématisé en figure 1, est une barre de cuivre de longueur $L = 25$ cm. Six capteurs espacés de $\ell = 5$ cm sont placés le long de la barre. Les deux capteurs aux extrémités sont en contact avec les modules d'entrée et de sortie. Le forçage thermique est imposé à un côté par un module Peltier. Ce module, par effet thermo-électrique, impose un flux de chaleur qui peut être positif ou négatif selon le signe du courant. Les capteurs de température sont des capteurs LM35DZ, fonctionnant à partir d'un transistor et ayant une réponse linéaire en température. Ils ont un facteur de conversion de 10,0 mV/K et une précision de 0,5 °C (voir notice).

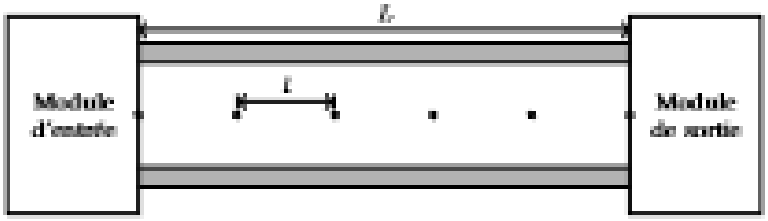


FIGURE 1 – Schéma du dispositif permettant l'étude de la conduction thermique dans une barre métallique.

2. Régime sinusoïdal forcé

L'étude d'une barre métallique en régime sinusoïdal forcé permanent permet la mesure de la conductivité thermique. Dans le dispositif expérimental que nous avons à disposition, on impose un flux thermique à la pulsation ω : $\Phi(t) = \Phi_0 \sin(\omega t)$.

Si l'on résout l'équation de la chaleur dans le cas d'une barre semi-infinie avec un flux imposé en $x = 0$, la température est une onde exponentiellement amortie de la forme :

$$T(x,t) = T_0 + \Delta T \exp\left(-\frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)$$

où $\delta = \sqrt{2\alpha/\omega}$.

On néglige ici la présence d'une condition aux limites en $x = L$. Pour que cette hypothèse soit valide, il faut que l'onde thermique n'atteigne pas l'extrémité de la barre, c'est-à-dire que la longueur de pénétration doit être petite devant la longueur de la barre. On souhaite tout de même utiliser tous les capteurs, on fera le compromis $5\delta \approx L$.

> Mettre en place le dispositif : brancher les six capteurs sur une carte d'acquisition SYSAM, alimenter les ventilateurs (12 V continu) et les capteurs (15 V continu). Le potentiel de référence pour les signaux issus des capteurs est la masse de l'alimentation de ceux-ci.

Attention : bien alimenter les ventilateurs avant toute manipulation, pour ne pas griller le module Peltier!

> Alimenter le module Peltier par un amplificateur de puissance Kepco réglé en source de courant, et piloté par un GBF. Régler le GBF sur $V_{pp} = 8$ V, sans offset, à une fréquence de 10 mHz. Vérifier à l'aide d'un ampèremètre que le courant délivré ne dépasse jamais 4 A sur une période. Compte-tenu de la période $T \simeq 100$ s du GBF à comparer à la durée sur laquelle un multimètre intègre le signal pour estimer une valeur moyenne (de l'ordre de la seconde), un tel multimètre réglé en mode continu (DC) donne la valeur du courant "instantané" traversant le circuit. La démarche est explicitée sur la fiche imprimée sur le capot de l'amplificateur.
> Suivre en temps réel l'évolution de la température sur le dernier capteur à l'oscilloscope. Attendre que le signal se stabilise (environ 30 minutes). Faire l'acquisition des signaux des différents capteurs sur Latis-Pro pendant quelques périodes (typiquement 20 minutes).

On peut ajuster la tension aux bornes du capteur n°i par :

$$U_i(t) = A_{i0} + A_{i1} \cos(\omega t + \phi_{i1})$$

avec trois paramètres libres A_{i0}, A_{i1} et ϕ_{i1}. Cet ajustement n'est pas optimal car une fraction de la puissance est dissipée par effet Joule dans le module Peltier. De ce fait, le flux imposé est somme d'une fonction en I et d'une fonction en I^2 (oscillant à 2ω). On peut donc ajuster les courbes expérimentales par :

$$U_i(t) = A_{i0} + A_{i1} \cos(\omega t + \phi_{i1}) + A_{i2} \cos(2\omega t + \phi_{i2})$$

> Réaliser l'ajustement du signal de chacun des capteurs par la fonction précédente sur Latis-Pro (Modèle Utilisateur). Tracer ensuite $\ln(A_{i1})$ et Φ_{i1} en fonction de la position du capteur $z_i = i\ell$: on obtient deux fonctions affines de pente $-1/\delta$. En déduire le coefficient de diffusion $\kappa = \delta^2\pi f$. Comparer le résultat obtenu à la valeur tabulée pour le cuivre $\kappa = 1,14 \times 10^{-4}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$.

Vous pouvez si vous avez le temps réaliser deux mesures à des fréquences différentes (5 mHz et 20 mHz par exemple) pour tracer $\pi\delta^2$ en fonction de $1/f$. Il faut environ 30 minutes après chaque changement de fréquence pour atteindre de nouveau un état stationnaire (puis 30 minutes d'acquisition).

3. Régime transitoire (en seconde lecture)

Cette expérience est plus délicate que l'étude du régime sinusoïdal forcé. Expérimentalement, le régime transitoire est long (environ 1h30) et il faut attendre le retour à l'équilibre thermique en cas d'échec (1h). On pourra lire un protocole dans la Réf. [1] (pp.391-396).

4. Comparaison avec d'autres métaux

Nous renvoyons le lecteur à la notice du conductiscope à cristaux liquides Jeulin pour une discussion générale.

Liste du matériel :

- **la barre en aluminium P0 . 74,**
- **la barre en laiton P0 . 75,**
- **le conductiscope à cristaux liquides P102 . 28.**

On peut mettre en place le même protocole que précédemment pour l'étude du régime sinusoïdal forcé en considérant une barre en aluminium ou en laiton (alliage de cuivre et de zinc).

On peut également utiliser un conductiscope à cristaux liquides pour rapidement mettre en évidence les différences de coefficient de diffusion thermique. Grâce à la structure microscopique des cristaux liquides, ceux-ci sont biréfringents. Placés entre un polariseur et un analyseur, on observe une teinte. La couleur observée dépend de la phase dans laquelle se trouve le cristal liquide et donc de la température. Ainsi, on observe la propagation d'un front de température le long des tiges métalliques.

> Tremper l'extrémité du conductiscope dans l'eau bouillante. Chronométrer le temps τ pour que le milieu du conductiscope passe au vert (par exemple) pour chacun des métaux.

Sachant que le coefficient de diffusion est $D \propto \frac{1}{\tau}$, on peut en déduire l'ordre de grandeur du rapport des coefficients de diffusion thermique. On attend par exemple $D_{Al}/D_{Cu} \approx 1,5$.

II. Propriétés électriques

1. Conduction électrique dans un métal et dépendance en température

a. Présentation

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (p.398) pour une présentation générale.

Les métaux sont de bons conducteurs électriques grâce aux propriétés de leur bande de conduction. L'expérience proposée vise à quantifier la dépendance en température de la conductivité électrique du cuivre, à l'aide d'une bobine de fil de cuivre. Cette expérience peut évidemment être réalisée avec tout type de métal, à condition d'avoir le dispositif expérimental adapté.

Un fil de section S, de longueur L et de résistivité ρ se comporte comme un conducteur ohmique de résistance

$$R = \rho\frac{L}{S} = \frac{L}{\sigma S}$$

où σ désigne la conductivité électrique du métal. Dans la gamme de température ambiante, la résistivité d'un métal est une fonction affine de la température :

$$\rho(\Theta) = \alpha\Theta + \rho_0$$

α et ρ_0 sont deux paramètres dépendant du métal et Θ désigne la température en °C [1].

b. Mesures 4 fils

La résistance d'un fil de cuivre, même long, est assez faible. Pour mesurer de telles résistances, généralement inférieures à 1 Ω, un montage particulier est nécessaire.

Pour mesurer une résistance, il faut imposer une tension u aux bornes de celle-ci, puis mesurer le courant i qui la traverse. C'est le principe des ohmmètres commerciaux : la loi d'Ohm donne alors $R = u/i$. La mesure de faibles résistances suit le même principe. Toutefois, un ohmmètre classique mesure la résistance entre ses deux bornes : cela signifie que toute la résistance du circuit est mesurée, fils et soudures incluses, que l'on note r sur la figure 2. Dans la majorité des cas, ces résistances sont négligeables devant les résistances des composants étudiées. En revanche, quand il s'agit de mesurer une faible résistance, il est nécessaire de s'affranchir des résistances parasites qui peuvent fausser la mesure.

Pour cela, nous utilisons un montage dit à quatre fils, schématisé en figure 2 à droite. La mesure indépendante de u et de i par l'utilisation de quatre fils permet de mesurer la résistance aux bornes de R en s'affranchissant d'éventuelles résistances parasites présentes dans le montage. En effet, le générateur impose un courant i à travers la résistance. Ce courant n'est pas perturbé par le voltmètre car celui-ci à une résistance très grande devant la résistance à mesurer. Celui-ci donne la tension aux bornes de R et le rapport u/i donne donc la valeur de la résistance recherchée.

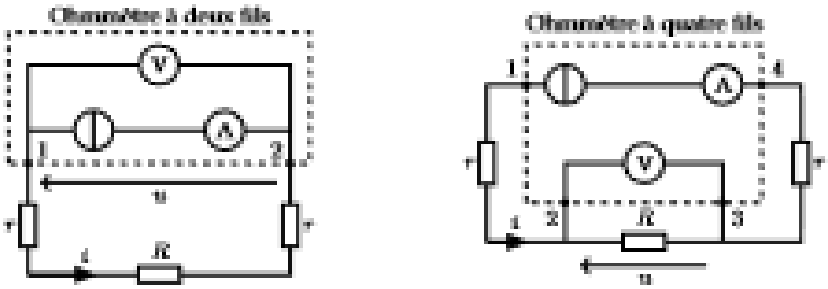


Figure 2 – À gauche, principe d'un ohmmètre à deux fils : le rapport u/i correspond à la résistance $R + 2r$. À droite, principe d'un ohmmètre à quatre fils : le rapport u/i correspond à la résistance R seule.

c. Protocole expérimental

Liste du matériel :

- la bobine de fil de cuivre P56.27,
- une bouilloire P101.28,
- un bécher,
- un agitateur magnétique P101.31,
- un thermocouple P102.16,
- un thermomètre numérique P102.27,
- un multimètre quatre fils de précision P69.35.

La bobine de fil de cuivre présente dans la collection a une longueur $L = 1700 \pm 5$ cm et un diamètre $d = 0,80 \pm 0,01$ mm.

Le fil est enroulé, on parlera donc de bobine de fil. Pour faire varier la température du cuivre, on immerge la bobine de fil de cuivre dans l'eau. Comme la mesure de R est réalisée en courant continu, il n'y a pas d'effets inductifs.

1. On aurait pu prendre la température en K, cela change simplement la valeur de ρ_0. On exprime la température en °C pour comparer les mesures aux valeurs tabulées présentées dans la Réf. [1].

> Chauffer de l'eau avec une bouilloire et verser l'eau chaude dans un bécher, placé sur un agitateur magnétique. Immerger la bobine jusqu'aux jonctions électriques (qui doivent rester sèches). Mesurer la température avec un thermocouple associé à un thermomètre numérique (attention à la polarité). Pour plusieurs températures, pendant que l'eau refroidit, mesurer la résistance R de la bobine de cuivre. Vous pourrez utiliser un multimètre quatre fils de précision (les deux fils correspondant à l'une des extrémités sur LOW et les deux autres sur HIGH). La présence d'un champ magnétique tournant perturbe la mesure de la résistance R, il faut donc penser à l'éteindre lors des mesures, tout en assurant l'homogénéité de la température de l'eau dans le bécher au cours du protocole.

On attend des valeurs de résistance autour de 0,5 Ω. En déduire la résistivité $\rho = RS/L$. Tracer ρ en fonction de Θ et ajuster par une droite affine $\rho(\Theta) = \alpha\Theta + \rho_0$ (avec Θ en °C). Vous pouvez comparer les valeurs de α et ρ_0 avec les valeurs tabulées $\alpha = 6.76 \times 10^{-11}$ Ω.m.K^{-1} et $\rho_0 = 1.543 \times 10^{-8}$ Ω.m.

d. Loi de Wiedemann-Franz

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [5] (p.147) pour la présentation de cette loi.

À partir de la mesure de la conductivité thermique du cuivre réalisée au début de ce TP et de celle de la conductivité thermique, il est possible expérimentalement de mettre en évidence la loi de Wiedemann-Franz qui stipule que la quantité $\lambda\rho/T$, où λ désigne la conductivité thermique, est indépendante du métal considéré et est égale à une constante nommée nombre de Lorenz et notée $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}^{theo} = \frac{\pi^2}{3}\left(\frac{k_B}{e}\right)^2 \approx 2,44 \times 10^{-8}\ \mathrm{W.\Omega.K^{-2}}$$

k_B désignant la constante de Boltzmann et e la charge de l'électron. Cette loi traduit le fait que dans un métal, les phénomènes de conduction électrique et de conduction thermique sont principalement dus au gaz électronique. Vous pouvez vérifier expérimentalement cette loi grâce au calcul de λ issu de la mesure expérimentale de κ faite au début de ce TP.

En réalité, on ne retrouve pas exactement la valeur théorique issue du modèle de Sommerfeld (électrons libres) : la valeur tabulée pour le cuivre est $\mathcal{L}^{tab} = 2,1 \times 10^{-8}$ W.Ω.K^{-2}.

2. Résistance d'un semi-conducteur intrinsèque

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [2] (chap. : Semi-conducteur) et Réf. [5] (p.190) pour une présentation générale.

Liste du matériel :

- une thermistance CTN,
- le bloc de cuivre équipé de résistances chauffantes P102.5,
- un thermocouple P102.16,
- un thermomètre numérique P102.27,
- un multimètre Fluke 187 P69.25,
- une alimentation continue P53.20.

Un semi-conducteur est dit intrinsèque s'il est à l'état pur, non dopé. Dans ce cas, un électron de la bande de conduction est un trou dans la bande de valence. Le nombre d'électrons n et le nombre de trous p vaut, à l'équilibre statistique :

$$n = p \propto T^{3/2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_g}{k_B T}\right)$$

ε_g désigne l'énergie de gap, k_B la constante de Boltzmann et T la température en K. La résistance est directement liée à cette concentration et vaut :

$$R(T) = R_0 \exp\left[\frac{\varepsilon_g}{2k_B}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$

R_0 désigne une résistance caractéristique : c'est la résistance du semi-conducteur à T_0. Pour vérifier cette loi, on va chauffer une thermistance CTN (coefficient de température négatif) et obtenir l'évolution de la résistance en fonction de la température. On utilise un bloc de cuivre chauffé par une résistance chauffante, comme représenté en figure 3. Au sein du bloc de cuivre est encastré un thermocouple et la thermistance CTN.

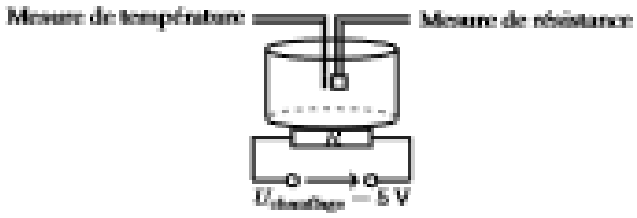


Figure 3 – Schéma de l'expérience de mesure de la résistance d'une thermistance CTN.

> Incorporer une thermistance CTN et un thermocouple dans un bloc de cuivre équipé de résistance chauffante. Brancher le thermocouple sur un thermomètre numérique (attention à la polarité). À température ambiante, mesurer la résistance de la CTN au multimètre et la température au thermocouple.
> Alimenter la résistance chauffante en 5 V continu. Le bloc chauffe : relever régulièrement la température T et la résistance R.

Tracer R en fonction de la température T puis ln R en fonction de $1/T$. On attend dans ce cas une évolution affine, avec une pente égale à $\varepsilon_g/(2k_B)$. On attend une valeur $\varepsilon_g \approx 0,28$ eV.

3. Étude de la chute d'un aimant dans un tube conducteur

Liste du matériel :

- le tube de cuivre P65.16,
- le tube d'aluminium P65.16,
- le tube de cuivre rainuré P65.16,
- deux bobines de fluxmètre P50.8,
- des aimants Néodyme P63,
- un pied à coulisse P96.13,
- le capteur magnétostrictif linéaire P96.31.

a. Présentation

Nous renvoyons le lecteur aux Réf. [3] (p.163) et Réf. [4] (p.487) pour une présentation générale.

Le but de cette partie est d'étudier le phénomène d'induction électromagnétique et de comparer la conductivité électrique de l'aluminium à celle du cuivre.

L'expérience montre que le temps de chute d'un petit aimant est beaucoup plus important dans un tube conducteur que dans un tube non conducteur (PVC par exemple) de même géométrie. En effet, lors de sa chute, le flux du champ magnétique à travers une section du tube varie, ce qui induit une force électromotrice d'induction. Les courants ainsi générés dans le tube conducteur créent un champ magnétique qui agit sur l'aimant. D'après la loi de Lenz, ces courant vont s'opposer à la cause qui leur a donné naissance, c'est-à-dire le mouvement de l'aimant : la chute de l'aimant est freinée.

Lorsque l'aimant est assimilé à un moment magnétique ponctuel, on peut montrer que la force subie par ce dernier est proportionnelle à la vitesse (force de type frottement fluide), et que la vitesse limite v_l est :

$$v_l = \frac{1024\pi\alpha g}{15\mu_0^2\sigma A d^3}\left[\frac{1}{R_{int}^4} - \frac{1}{R_{ext}^4}\right]^{-1} \approx \frac{1024\pi\alpha g a^4}{45\mu_0^2\sigma e A d^3}$$

Cette vitesse est atteinte au bout d'un temps typique $\tau = v_l/g$.

- R_{int} désigne le rayon intérieur du tube, R_{ext} son rayon extérieur ;
- $a = (R_{int} + R_{ext})/2$ désigne le rayon moyen du tube, $e = R_{ext} - R_{int}$ son épaisseur ;

- m désigne la masse de l'aimant, M son moment magnétique ;
- g désigne l'accélération de la pesanteur ;
- μ_0 désigne la perméabilité magnétique du vide ;
- σ désigne la conductivité du métal.

La vitesse limite est voisine de 10 cm/s : la valeur de τ est donc de 0,01 s, durée pendant laquelle l'aimant parcourt environ 1 mm.

b. Première manipulation : comparaison des conductivités du cuivre et de l'aluminium

De nombreux paramètres interviennent dans cette formule : en particulier il n'est pas facile de déterminer le moment magnétique M de l'aimant (voir plus loin). Pour s'en affranchir, on va effectuer une mesure relative en comparant la vitesse atteinte dans le cas du tube de cuivre, et dans le cas du tube d'aluminium.

Pour mesurer la vitesse de l'aimant, on utilise deux bobines reliées à un oscilloscope. Le passage de l'aimant dans la bobine s'accompagne d'un double pic de tension à ses bornes (voir figure 4, à droite). La tension s'annule lorsque l'aimant passe au centre de la bobine. Vu l'impédance de l'oscilloscope, on peut considérer qu'aucun courant ne circule dans la bobine et que celle-ci ne freine donc pas l'aimant.

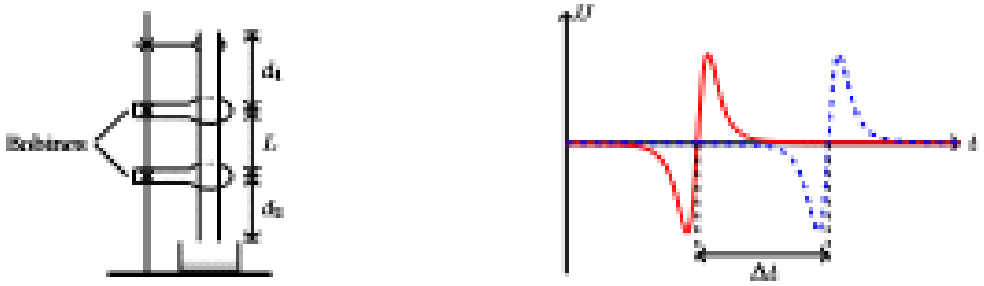


Figure 4 – À gauche, schéma de l'expérience. À droite, allure des signaux aux bornes des bobines de détection.

> Constituer le montage schématisé en figure 4, à gauche. On commencera avec le tube de cuivre de plus gros (diamètre extérieur 16 mm).
>
> - Avec une pince, suspendre par le haut le tube de cuivre (l'aimant est assez puissant pour être attiré par la pince).
> - Placer deux bobines de fluxmètre autour du tube. Les distances d_1 et d_2 sur la figure 4 doivent être suffisantes pour que les effets de bords ne se fassent pas sentir (on prendre typiquement $d_1 = d_2 \approx 15$ cm. Mesurer la distance entre les deux bobines.
> - Contrôler la verticalité du tube avec un niveau.
> - Placer un récipient avec de la mousse en bas du tube pour récupérer l'aimant : ceux-ci sont fragiles.
>
> Brancher les deux bobines sur l'oscilloscope et observer en mode Défilement le signal. Faire chuter un petit aimant Néodyme (diamètre 1 cm, hauteur 5 mm) : mesurer la durée entre les annulations des deux signaux (voir figure 4 à droite). En déduire la vitesse de chute. Répéter la mesure quelques fois pour évaluer la dispersion.

On observe que la trajectoire dans le tube est hélicoïdale et irrégulière.

> Répéter la mesure pour deux petits aimants en Néodyme collés : répéter les mesures et comparer dans les deux cas la reproductibilité des mesures.

Avec deux aimants, la trajectoire est plus linéaire. Cependant, on s'éloigne un peu plus du modèle de l'aimant ponctuel utilisé dans la Réf. [3].

> Répéter l'opération avec le tube d'aluminium.

On attend :

$$\frac{v_{Cu}}{v_{Al}} = \frac{\sigma_{Al} e_{Al} R_{Cu}^4}{\sigma_{Cu} e_{Cu} R_{Al}^4}$$

Donc :

$$\frac{\sigma_{Al}}{\sigma_{Cu}} = \frac{v_{Cu} e_{Cu} R_{Al}^4}{v_{Al} e_{Al} R_{Cu}^4}$$

Le fait d'utiliser un aimant non ponctuel induit un préfacteur géométrique. Celui-ci varie peu entre le tube de cuivre et le tube d'aluminium car ils sont presque de même taille.

> Mesurer R_{moy} et e pour les deux tubes au pied à coulisse.

Évaluer les incertitudes sur v, e, et a : comparer à la valeur attendue : $\sigma_{Al}/\sigma_{Cu} = 0,632$.

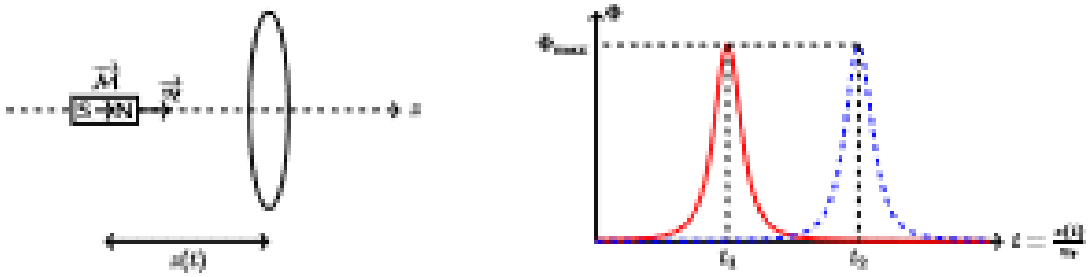
On peut qualitativement montrer deux effets :

- Si le tube est ninuré (coupé dans le sens de la longueur), les courants de Foucault circulent moins facilement est la chute est plus rapide ;
- Si on trempe le tube dans l'azote liquide, la conductivité augmente et dans ce cas, la chute de l'aimant est très ralentie (prendre le tube avec des gants de protection !).

c. Analyse plus détaillée (en seconde lecture)

Flux magnétique à travers la bobine de détection : estimation du moment magnétique de l'aimant La tension aux bornes de la bobine est égale à l'opposée de la force électromotrice induite en convention récepteur. Le flux du champ magnétique créé par l'aimant au travers de la bobine de détection peut se calculer par intégration numérique. Avant de procéder à cette intégration, il faut enlever la composante continue du signal.

> Utiliser le tube de cuivre de plus petit diamètre (diamètre extérieur 12 mm) compatible avec la taille de l'aimant utilisé. L'aimant est alors mieux guidé et son moment magnétique reste vertical. Acquérir le signal aux bornes des bobines sur Latis-Pro (on pourra choisir une période d'échantillonage de 1 ms), et faire tomber l'aimant. Enlever la composante continue (01=EA1-Moy(EA1) avec la feuille de calcul), puis intégrer (Phi1=Intcg(01)). Réaliser éventuellement un lissage avant intégration (01L=Lissage(01;20)). Repérer la position t_0 et l'amplitude Φ_{max} au maximum de Φ.



FIGURES 5 – À gauche, aimant traversant une spire. À droite, flux du champ magnétique dans la spire.

Le flux dans le tube est nul lorsque l'aimant est loin de la bobine que ce soit avant ou après le passage. Le flux est maximal lorsque l'aimant se trouve au centre de la bobine. Le flux de l'aimant dans la bobine de rayon R est (attention : la formule du flux donnée dans la Réf. [4] (p.492-493) est fausse, il faut considérer la formule donnée dans la Réf. [3] (p.143).) :

$$\Phi_{bobine} = \frac{\mu_0 N M R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\Phi_{max}}{\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{3/2}},$$

où N désigne le nombre de spires de la bobine de détection, R le rayon de la bobine (pour les fluxmètres r 50 . 8, la surface totale est de 4000 cm^2, avec $N = 400$ donc la surface d'une spire est de 10 cm^2 soit $R = 1,78$ cm, et z désigne la position de l'aimant sur l'axe de la bobine. Pour la première bobine, $z = v_l(t - t_1)$, où v_l est la vitesse limite de chute et t_1 le moment où l'aimant passe au centre de la bobine.

> Mesurer la distance L entre les deux bobines, et déterminer à partir de la position des deux maximas de flux la vitesse limite de chute de l'aimant $v_l = L/(t_2 - t_1)$. Définir ainsi $z(t)$ dans la feuille de calcul et comparer le flux calculé numériquement Φ_{exp} à la formule théorique Φ_{theor}.
> En déduire enfin le moment magnétique de l'aimant :
>
> $$\mathcal{M} = \frac{2\Phi_{max} R}{\mu_0 N}$$
>
> On attend une valeur voisine de 0,76 A.m^2.

Afin de pouvoir comparer la vitesse limite mesurée à la valeur théorique, il ne reste plus qu'à déterminer la masse de l'aimant et mesurer les rayons intérieur et extérieur des différents tubes mis en course.

> Peser l'aimant. Son champ influe la valeur affichée, il faut le placer loin du plateau. Utiliser un support assez haut (ne pas oublier de tarer la balance).

On peut maintenant comparer la valeur de vitesse obtenue à la valeur attendue (on connaît désormais m, $\mathcal{M}$, R_{int} et R_{ext}).

> Connaissant désormais m et $\mathcal{M}$, mesurer, pour différents tubes de cuivre (il y en a 3) la vitesse limite de chute avec le protocole utilisé à la partie b, ainsi que leur rayon extérieur et leur épaisseur. Comparer à la valeur attendue.

$$v_l = \frac{1024 m g}{B_M \mu_0^2 \sigma \mathcal{M}^2} \left[\frac{1}{R_{int}^2} - \frac{1}{R_{ext}^2} \right]$$

L'écart au modèle est en dehors des barres d'erreurs. Celui-ci est dû au rayon de l'aimant, loin d'être négligeable devant le diamètre du tube. On peut obtenir numériquement le champ créé par l'aimant pour corriger la formule, cela est proposé avec de bons résultats dans *A quantitative magnetic braking experiment*, C.S. McLatchy et.al. *Am. J. Phys*, Vol.61, No.12 (1993).

Autre manipulation possible Il est possible de mesurer la vitesse limite de chute de l'aimant avec un capteur magnétostrictif linéaire. On peut constater alors que la vitesse de chute de l'aimant est constante. Cependant, le signal est assez sensible à la position transversale de l'aimant et l'expérience marche mal pour les tubes larges.

III. Diffraction d'électrons par le graphite

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [5] (p.27) pour une présentation générale.

Le but de cette expérience est d'estimer les paramètres de maille des couches de graphène qui composent le graphite, par diffraction d'électrons sur poudre (méthode de Debye-Sherrer). Il serait possible d'observer la diffraction avec des ondes électromagnétiques, mais cela requiert des rayons X durs qui sont ionisants et très dangereux pour l'être humain. Le dispositif que nous avons à disposition ne présente pas cet inconvénient et permet une observation aisée du phénomène. Ceci est possible grâce à la nature ondulatoire des électrons, dont la longueur d'onde associée est la longueur d'onde de De Broglie $\lambda = h/p$, où h désigne la constante de Planck et p l'impulsion des électrons.

Le dispositif étudié, schématisé en figure 6, présente une anode et une cathode entre lesquelles les électrons produits par un filament chauffant sont accélérés, ce qui permet d'avoir un faisceau quasi-monocinétique et donc quasi-monochromatique. Si on note E_c l'énergie cinétique des électrons, U la tension accélératrice, e la charge et m la masse de l'électron, on a :

$$E_c = eU = \frac{p^2}{2m}$$

Ainsi, la longueur d'onde des électrons correspondante est :

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Pour $U = 1$ kV, on a $\lambda = 39$ pm, ce qui est bien inférieur à la distance interatomique.

Le faisceau électronique est ensuite focalisé à l'aide d'une électrode spécifique, puis envoyé sur une poudre de graphite. Celle-ci diffracte la lumière dans des directions bien précises par rapport au faisceau incident, données par la loi de Bragg :

$$\lambda = 2d \sin \theta$$

d désigne la distance entre deux plans réticulaires, et θ l'angle de déviation par rapport au faisceau incident. L'objet diffractant étant une poudre, on observe une figure de diffraction composée d'anneaux. En faisant l'approximation des petits angles, le diamètre D des cercles est donné par la relation :

$$\lambda = d\frac{D}{2L}$$

D'où :

$$\frac{1}{D} = d\frac{\sqrt{2mc}}{2\lambda L}\sqrt{U}$$

Expérimentalement, on mesure donc le diamètre des cercles de diffraction pour différentes tensions accélératrices U.

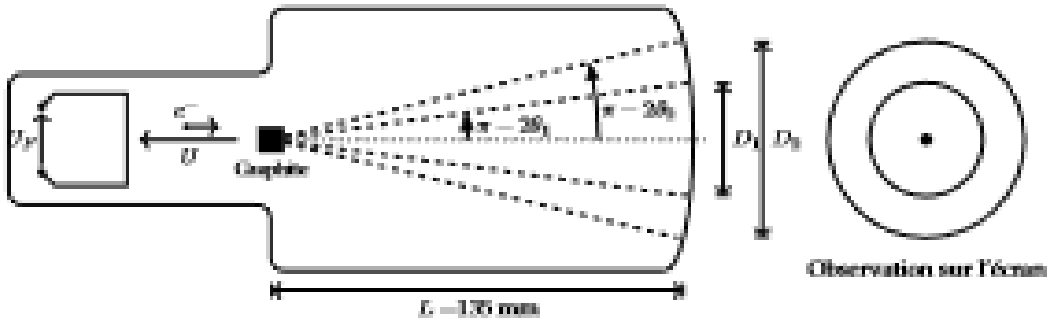


Figure 6 – Schéma du tube pour la diffraction électronique par la poudre de graphite.

⚠ Le tube d'électrons est très fragile et coûte cher : manipulez-le avec précaution, évitez tout choc et n'allumez l'alimentation qu'après vérification des branchements !

On pourra réaliser l'expérience dans la salle d'optique pour mieux voir la figure de diffraction à faible tension.

Liste du matériel :

- **le tube de diffraction P93.6,**
- **le support P93.1,**
- **l'alimentation P43.10,**
- **un aimant en U P63,**
- **une grille P127.2.**

> Tenir le tube de diffraction de la collection à l'horizontale et le tourner de façon à ce que les deux broches les plus éloignées du culot soient orientées vers le bas. Introduire doucement le tube jusqu'en butée dans son support.
> Brancher les sorties P1 et P2 à l'arrière du support pour tube sur les sorties 6.3V/2A à l'arrière de l'alimentation haute-tension dédiée. Raccorder les sorties C et X au pôle négatif de la sortie haute tension, puis la sortie A au pôle positif, et relier le pôle positif à la terre. Vérifier le bon branchement sur la notice avant de mettre en marche l'alimentation !

> Allumer l'alimentation et observer la direction du faisceau. Vérifier en approchant un aimant en U que le faisceau est dévié : il s'agit bien de particules chargées.
> Appliquer une tension $U \leq 5$ kV et observer la figure de diffraction. L'écran est bombé car l'ampoule est sous vide, ce qui rend la mesure délicate. Pour mesurer le diamètre D des cercles, on utilise alors une grille comme étalon de longueur. Pour différentes tensions U prendre en photo la figure de diffraction et la grille plaquée (doucement) sur le tube de verre. Sur Image J, relever le diamètre des deux cercles (on prendra pour étalon le pas de la grille, de 1 mm a priori). La tension est mesurée sur l'affichage de l'alimentation, les multimètres que nous avons ne supportant pas de tension supérieure à 1 kV.

Tracer $1/D$ en fonction de $\frac{\sqrt{2mU}}{hL}$, avec :

- $m = 9,11 \times 10^{-31}$ kg désigne la masse de l'électron ;
- $e = 1,60 \times 10^{-19}$ C désigne la charge élémentaire ;
- $h = 6,63 \times 10^{-34}$ J.s désigne la constante de Planck ;
- $L = 135$ mm désigne la longueur du tube.

On attend une pente égale à d. On observe deux anneaux qui correspondent aux deux premières familles de plans réticulaires du graphène dont les valeurs tabulées sont $d_1 = 213$ pm et $d_2 = 123$ pm (on a géométriquement un rapport $\sqrt{3}$ entre les deux), représentés en figure 7. Les autres familles de plans réticulaires donnent des anneaux trop petits et qui sont confondus avec la tâche centrale (la distance interréticulaire entre deux plans de graphène est de 671 pm).

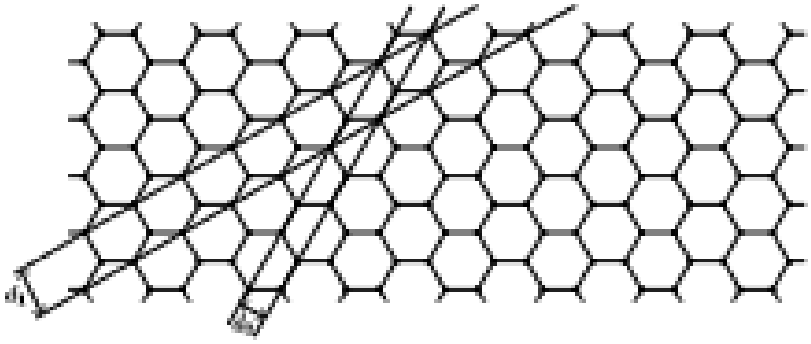


Figure 7 – Plans réticulaires sur le graphite.

Références

[1] : M. Fruchart, P. Lidon, F. Thibierge, M. Champion, A. Le Diffon, *Physique expérimentale : optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, De Boeck (2016).

[2] : D. Aubert, *Dictionnaire de physique expérimentale, Tome III : L'électronique*, Pierron (2004).

[3] : C. Garing, *Magnétisme : statique, induction et milieux*, Ellipses (1995).

[4] : A. Delber, L. Markiewicz, O. Kempf et F. Paviet, *Phénomène d'induction associé au mouvement d'un aimant dans un tube de cuivre*, BUP 822 p.487 et suivantes (2000).

[5] : C. Kittel, *Physique de l'état solide*, Dunod (2007).

Haut-parleurs

Table des expériences

I.	Mesure de l'impédance électrique d'un haut-parleur	93
II.	Mesure de l'indicatrice de rayonnement d'un haut-parleur	95
III.	Mesure du rendement de haut-parleur	96

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pourrez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros du montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Mesure de l'impédance électrique d'un haut-parleur

On propose de réaliser le montage [1] de la Fig. 1 à partir des composants suivants :

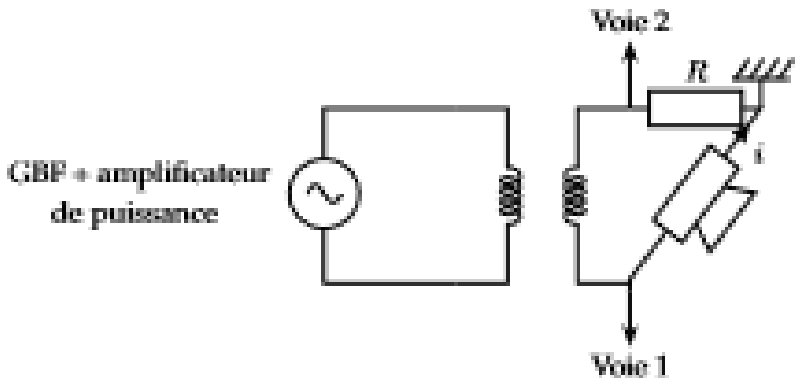


Figure 1 – Circuit électrique pour la mesure de l'impédance électrique du haut-parleur.

Liste du matériel :

- un générateur basses fréquences,
- un amplificateur de puissance[1] P47.2,
- un transformateur d'isolement P66.32,
- une sonde différentielle P37.12,
- un haut-parleur P74.11, ou P74.24, ou bien P74.34 [NB : préférer un HP sans caisse de résonance, pour éviter (peut-être?) la discussion sur le "second pic" de résonance lorsque l'on ajoute des masselotes sur l'équipage mobile]
- une résistance variable (on évitera de prendre un rhéostat dont la résistance varie fortement avec la fréquence),
- un oscilloscope.

1. Le haut-parleur est un transducteur électromécanique, il est donc préférable, et plus logique, de travailler en électronique de puissance. Cependant, pour ce qui est de la mesure de son impédance (pour laquelle il n'y a pas besoin de puissance), on peut s'en passer, ce qui ne sera pas le cas pour obtenir des résultats quantitatifs corrects dans les expériences suivantes.

Le transformateur d'isolement permet d'éviter le court-circuit de masse si le générateur n'est pas à masse flottante. Il peut être remplacer par l'utilisation d'une sonde différentielle, auquel cas on prendra soin de pas oublier les facteurs 1/10 ou 1/100 introduits dans les mesures...
Grâce à la voie 1 de l'oscilloscope, on visualise la tension aux bornes du haut-parleur, tandis que la voie 2 donne une image du courant traversant le haut-parleur. En mesurant les amplitudes U_{HP} et U_R des tensions aux deux voies de l'oscilloscope et leur déphasage φ, on peut remonter à l'impédance électrique du haut-parleur :

$$\underline{Z}(j\omega) = -R\frac{U_{HP}}{U_R}e^{j\varphi}, \tag{1}$$

où le signe $-$ vient du fait que la tension à la voie 2 de l'oscilloscope est l'opposée de la tension aux bornes de la résistance en convention récepteur. Pour avoir une bonne résolution à la fois sur le courant et la tension, on prendra la résistance R de l'ordre de l'impédance d'entrée du haut-parleur (de quelques ohms). Il faudra prendre garde à ne pas dépasser le courant admissible par la résistance et la puissance nominale du haut-parleur.

En faisant varier la fréquence, on peut tracer l'impédance électrique en fonction de la pulsation ω, dont le comportement à basses fréquences est bien modélisé par la relation [2] :

$$\underline{Z}(j\omega) = r + \frac{(Bl)^2/\eta}{1 + j\frac{\sqrt{km}}{\eta}\left(\frac{\omega}{\omega_{res}} - \frac{\omega_{res}}{\omega}\right)}, \tag{2}$$

en négligeant les effets inductifs dans le bobinage du haut-parleur. Dans cette expression, r désigne la résistance des bobinages dans le haut-parleur, B le champ magnétique créé par l'aimant, l la longueur du bobinage, η un coefficient de frottement permettant de tenir compte des pertes d'énergie de la membrane en mouvement du fait des frottements et du rayonnement acoustique, et $\omega_{res} = \sqrt{k/m}$ une pulsation de résonance, avec m la masse de l'équipage mobile et k la constante de raideur associée à la force élastique exercée par le cône et le spider sur la membrane mobile.

Il est alors commode de représenter séparément les parties réelle et imaginaire de l'impédance complexe du haut-parleur :

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(\underline{Z}\right)(j\omega) = r + \dfrac{(Bl)^2/\eta}{1 + \frac{km}{\eta^2}\left(\frac{\omega}{\omega_{res}} - \frac{\omega_{res}}{\omega}\right)^2}, \\ \mathrm{Im}\left(\underline{Z}\right)(j\omega) = \dfrac{(Bl)^2/\eta}{1 + \frac{km}{\eta^2}\left(\frac{\omega}{\omega_{res}} - \frac{\omega_{res}}{\omega}\right)^2}\dfrac{\sqrt{km}}{\eta}\left(\frac{\omega_{res}}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_{res}}\right). \end{cases} \tag{3}$$

Un ajustement non linéaire des données à basses fréquences, ou l'utilisation de quelques points bien choisis (par exemple, résonance et bande passante à 3 dB), permettent de remonter à certains paramètres du modèle, notamment r, $(Bl)^2/\eta$, $\sqrt{km}/\eta$ et $\sqrt{k/m}$. De façon plus physique, on peut également remonter aux différents composants électriques dans la modélisation électrique équivalente du haut-parleur [2]. Par ailleurs, en refaisant l'expérience en posant une masse marquée de l'ordre de 100 g sur la membrane du haut-parleur, et en mesurant la nouvelle pulsation de résonance, on peut remonter à k et m séparément, puis enfin à η et au produit Bl. Enfin, on peut accéder aux caractéristiques exclusivement électriques du haut-parleur en immobilisant totalement la membrane (ce qui revient à supprimer le couplage électro-mécanique).

L'utilisation d'un analyseur de spectre (tel que les instruments PO.17 ou PO.18) permet de visualiser et analyser très rapidement le signal, mais est à proscrire dans le cadre de l'agrégation, car le jury n'apprécie pas qu'un candidat utilise ce type de matériel que le prix, prohibitif, rend inaccessible pour un établissement de l'enseignement secondaire.

Une autre représentation usuelle des propriétés du haut-parleur est le cercle de Kennelly dans le diagramme de Nyquist qui représente la partie réelle de $\underline{Z}$ en fonction de sa partie imaginaire :

$$\left[\mathrm{Re}(\underline{Z}) - r - \frac{(Bl)^2}{2\eta}\right]^2 + [\mathrm{Im}(\underline{Z})]^2 = \left[\frac{(Bl)^2}{2\eta}\right]^2. \tag{4}$$

Là encore, une modélisation non linéaire ou quelques points bien choisis permettent de remonter à certains paramètres du modèle à basses fréquences.

Enfin, on peut mentionner que les parties réelle et imaginaire croissent à hautes fréquences, contrairement à ce que prédit le modèle précédent (la partie réelle de $\underline{Z}$ tend vers r, sa partie imaginaire vers 0). Il est souvent avancé le fait qu'il faut tenir de l'auto-induction du bobinage dans le haut-parleur à hautes fréquences, mais cela n'explique que la croissance de la partie imaginaire de $\underline{Z}$. Pour la partie réelle, il faut d'une part tenir compte de l'effet de peau, qui induit une croissance de la résistance des bobinages comme $\sqrt{\omega}$ schématiquement à hautes fréquences [3]. De plus, il faut tenir compte de l'effet de proximité, du fait de la présence de conducteurs proches parcourus par des courants contra-propagyant. Cet effet modifie la répartition des courants dans le bobinage du haut-parleur à suffisamment hautes fréquences, en les concentrant à proximité immédiate de la surface des deux conducteurs proches[2] [4]. Cet effet participe donc également à la croissance de la résistance électrique des bobinages à hautes fréquences[3]. Cet effet de proximité peut également être la cause d'effets capacitifs qui contribuent à la variation de la partie imaginaire de $\underline{Z}$ à hautes fréquences.

II. Mesure de l'indicatrice de rayonnement d'un haut-parleur

On propose de réaliser le montage de la Fig. 2, adapté des Réf. [1, 5], à partir des composants suivants :

Figure 2 – Schéma de l'expérience pour la mesure de l'indicatrice de rayonnement du haut-parleur.

Liste du matériel :

- un générateur basses fréquences,
- un amplificateur de puissance P47.2,
- un haut-parleur P74.11, ou P74.24, ou bien P74.34,
- un plateau tournant P96.7,
- un microphone cravate[4],
- un support boy,
- un filtre et amplificateur spécifique P41.6 alimenté par un second générateur basses fréquences.

On fait tourner le haut-parleur sur le plateau (qu'on pourra fixer avec de la pâte adhésive pour éviter qu'il ne bouge sur le plateau pendant la rotation) d'un angle θ, et pour chaque valeur d'angle, on mesure la valeur efficace de la tension aux bornes du microphone situé à une distance d du haut-parleur, après amplification éventuelle. Le carré de la valeur efficace de la tension aux bornes du microphone est alors proportionnelle à l'énergie rayonnée par le haut-parleur.

Afin de pouvoir assimiler les fronts d'onde de l'onde émise par le haut-parleur à des plans sur la membrane du microphone, il faut considérer d très grande devant la taille typique du microphone (de quelques centimètres) : d de l'ordre du m convient alors. Par contre, on notera qu'il est très difficile de se placer dans la zone de rayonnement $d \gg \lambda$ dans le domaine audible des ondes acoustiques, car la longueur d'onde est de l'ordre de la dizaine de centimètres. Il faudrait alors placer le microphone à plusieurs mètres, et le signal aux bornes du microphone est alors difficilement exploitable, au-delà des problèmes d'encombrement. Pour $d = 1$ m et des

2. L'effet de proximité est, pour cette raison, parfois confondu avec l'effet de peau, mais le premier nécessite la présence de deux conducteurs, contrairement au second.

3. On rappelle que la résistance d'un bobinage s'écrit $r = \rho \ell / s$, avec ρ la résistivité du matériau qui constitue le bobinage, ℓ la longueur du bobinage et s sa section.

4. Si la salle est suffisamment silencieuse, on peut également utiliser un sonomètre P56.48.

fréquences de l'ordre du kHz, l'expérience est faite entre les zones de champ proche et de rayonnement, alors que les indicatrices de rayonnement sont habituellement tracées dans la zone de rayonnement.

Cette expérience permet de montrer l'influence de la fréquence sur la directivité d'un haut-parleur. À suffisamment basses fréquences, celui-ci émet un rayonnement isotrope, qui devient davantage directionnel vers l'avant à hautes fréquences [2]. À basses fréquences f, la longueur d'onde $\lambda = c/f$ (avec c la célérité des ondes acoustiques dans l'air) est grande devant la dimension a de la membrane du haut-parleur, et ce dernier s'assimile alors à une source ponctuelle dont le rayonnement est effectivement omnidirectionnel. Plus précisément, dans la zone de rayonnement, la pression rayonnée par le haut-parleur peut s'approximer à celle d'un piston encastré, soit [6] :

$$p(\theta) \propto \frac{\mathcal{J}_1(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}, \tag{5}$$

avec $k = 2\pi/\lambda = 2\pi f/c$. On prédit alors des lobes secondaires au-delà des zéros de la fonction de Bessel d'ordre 1, qui sont donnés dans la réf. [7], à suffisamment hautes fréquences (dès lors que ka est supérieur à l'abscisse du premier zéro non nul de $\mathcal{J}_1$). En pratique, la position angulaire des lobes secondaires a un accord plutôt modeste avec la relation précédente. Cela peut s'expliquer par le fait que l'expérience n'est pas faite strictement dans la zone de rayonnement, et par ailleurs, la membrane du haut-parleur n'est pas un simple piston encastré.

Enfin, on fera attention à placer le haut-parleur loin de toute surface qui pourrait réfléchir les ondes acoustiques vers le microphone et perturber la mesure de l'indicatrice de rayonnement.

III. Mesure du rendement de haut-parleur

Liste du matériel :

- **le sonomètre PSL 48**

On peut également mesurer le rendement du haut-parleur en tant que transducteur électromécanique. Pour cela, on utilise le circuit électrique de la Fig. 1 et on place en aval du haut-parleur à une distance d un sonomètre qui mesure le logarithme de l'intensité acoustique en décibels [5], de façon similaire au microphone de la Fig. 2. Pour mesurer la puissance fournie au haut-parleur, on n'utilise pas un wattmètre car les puissances en jeu sont au maximum de 1 W, sous peine d'une audition douloureuse. On mesure donc les amplitudes U_R et U_{HP} des tensions aux bornes de la résistance et du haut-parleur, ainsi que leur déphasage φ, et on en déduit la puissance électrique fournie par la relation

$$P_e = -\frac{U_R U_{HP}}{R}\cos\varphi. \tag{6}$$

Il est a priori possible de faire la mesure du rendement pour différentes fréquences [1], mais cela donne des mesures bruitées. Par ailleurs, cela pose également le problème de la dépendance spatiale de la puissance surfacique (indicatrice de rayonnement mesurée précédemment). Il est alors plus commode de faire la mesure à une seule fréquence f. Il faut alors choisir celle-ci telle que la distance d de l'ordre du mètre entre le haut-parleur et le sonomètre vérifie $d \gg \lambda = c/f$ afin de se trouver dans la zone de rayonnement où la puissance surfacique rayonnée varie simplement comme $1/d^2$. De plus, il faut choisir f de telle sorte que $\lambda = c/f \gg a$, afin de pouvoir assimiler le haut-parleur à une source ponctuelle émettant un rayonnement isotrope. Dans ce cas, la puissance acoustique s'écrit $P_a = 4\pi d^2 I_{ref} \times 10^{L/10}$, où L désigne la valeur lue sur le sonomètre en décibels, et $I_{ref} = 1 \times 10^{-12}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$. Cela permet finalement de définir le rendement par la relation $r = P_a/P_e$. Si la puissance nominale du haut-parleur est indiquée dans la notice, on essaiera de s'y placer en limitant l'inconfort auditif.

Références

[1] B. Jancker et A. Faulus, *Mesures de caractéristiques d'un haut-parleur*, Bull. Un. Phys. 777, vol. 89 (1995).

[2] J.-M. Dumini et L. Quaranta, *Modélisation électrique et acoustique du haut-parleur : impédance électrique et bande passante acoustique*, Bull. Un. Phys. 777, vol. 89 (1995).

[3] M. Krob, *Électronique expérimentale*, Ellipses (2002).

5. Le dB acoustique est défini par rapport à une puissance surfacique de $1 \times 10^{-12}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}}$.

[4] Y. Mulet Marquis et C. Mulet Marquis, *Résolution des équations de Maxwell par simulation SPICE*, Bull. Un. Phys. 946, vol. 106 (2012).

[5] C. Mulet Marquis, *L'acoustique par l'expérimentation*, Ellipses (2017).

[6] J. Jouhanneau, *Notions élémentaires d'acoustique - Électroacoustique*, Tec & Doc (1999).

[7] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens et J. V. Sanders, *Fundamentals of Acoustics*, Wiley (2000).

[8] R. Pueo, M. Roma, J. Escolano and J. J. Lopez, *A Pedagogical Software for the Analysis of Loudspeaker Systems*, IEEE Transactions on Education, 52, 236-247 (2009).

[9] R. Small, *Direct Radiator Loudspeaker System Analysis*, J. Audio Eng. Soc., 20, 383-395 (1972).

[10] N. Thiele, *Loudspeakers in Vented Boxes : Part 1-2*, J. Audio Eng. Soc., 19, 181-204, (1971).

Exemples de résultats expérimentaux

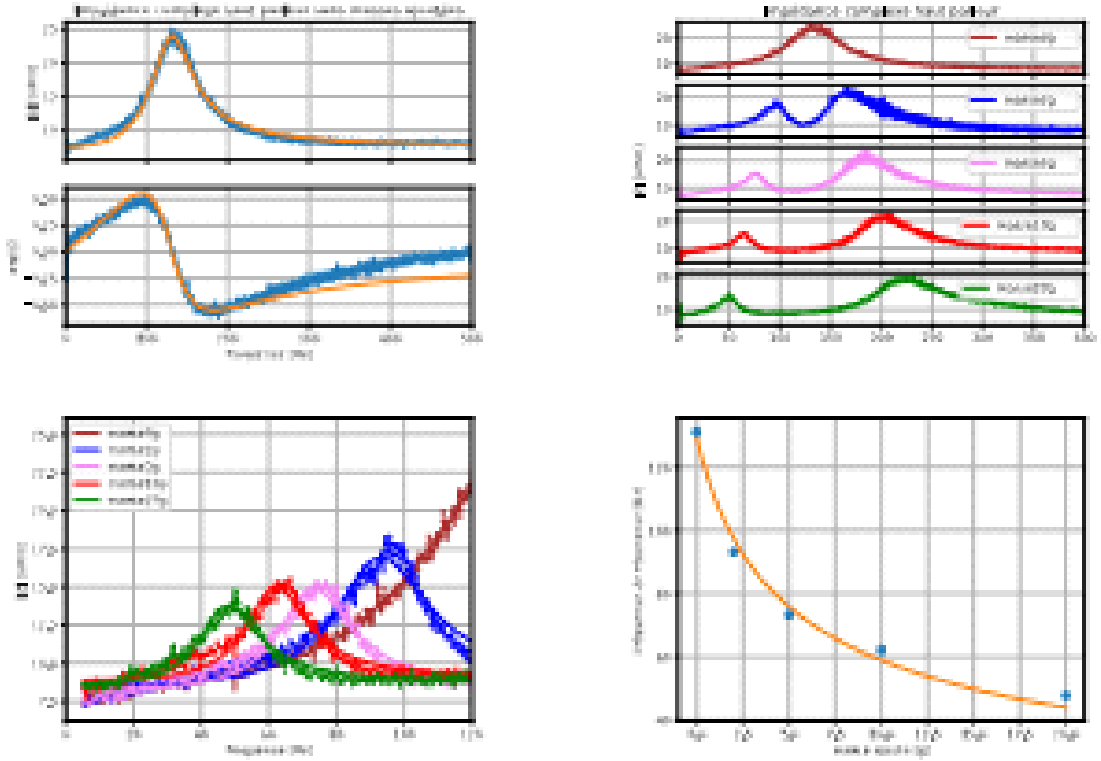


Figure A1 – Exemple de mesure de l'impédance électromotionnelle et des caractéristiques du HP P74.34 (voir l'Exp. I). La résistance R vaut 26 Ω, le GBF délivre 1 V en mode sweep de 4s entre 1 et 500 Hz; les tensions sont mesurées à l'aide d'une sonde différentielle P37.13, sans transformateur, et acquises sous Latis Pro. L'exploitation est effectuée ensuite sous Python. En haut à gauche : comportement fréquentiel de l'impédance électromotionnelle, qui met en évidence l'impédance nominale d'environ 8 Ω et une résonance typiquement autour de 100 Hz. L'ajustement par l'équation 2 permet d'extraire les valeurs des quatre paramètres : $r = 7.51 \pm 0.02$ Ω, $a = 16.6 \pm 0.06$ Ω, $b = 2.64 \pm 0.02$ et $\omega_{res} = 131.0 \pm 0.1$ Hz. En haut à droite : comportement fréquentiel du module de l'impédance électromotionnelle pour différentes masses posées sur la membrane. En bas à gauche : ajustement à l'aide de l'équation 2 du pic de résonance modifié par la présence de différentes masses. En bas à droite : ajustement du déplacement de la fréquence de résonance par la loi $\omega_{res} = \sqrt{k/m_{tot}}$, qui permet d'estimer $m_0 = 2.6 \pm 0.4$ g, $k = 44 \pm 4$ kg/s², et finalement $\eta = 0.13 \pm 0.09$ kg/s et $Bl = 1.5 \pm 0.4$ T.m [Rq. : préférer un ajustement de $1/\omega_{res}^2$ en fonction de m_{tot}.] © F. Vialla / M. Roselli

Remarque concernant la Fig. A1 : en l'état, il me semble difficile de présenter une figure similaire à celle en haut à droite sans être capable d'apporter une explication convenable concernant la présence et l'évolution du "second pic de résonance". Il s'agit probablement d'un effet dû au caisson sur lequel est fixé le HP. La modélisation proposée dans la Réf. [7] est alors trop simpliste. On pourra par exemple consulter les Réf. [8] [9] [10] pour se convaincre que l'effet de l'environnement est loin d'être négligeable (que ce soit parce que le HP est fixé sur une enceinte close ou une enceinte à évent (bass-reflex), ou parce que l'indicatrice de rayonnement est contrainte par des considérations géométriques), mais qu'il est possible d'en donner des modélisations électromotionnelles (avec des paramètres à ajuster...). La dépendance vis-à-vis de la fréquence de l'impédance correspondante n'est alors plus donnée par l'expression 2. Il est également intéressant de comparer les résultats ci-dessus à ceux présentés dans la notice du HP Monacor SP-45/8 : une fréquence de résonance à 120 Hz, une

impédance nominale à 8 Ω (*cf* plot de la notice), un "Kraftfaktor" $Bl = 3.4$ Tm, ... pour le HP "nu". Conclusion : il me semble critique, si l'on veut exploiter la Réf. [2], de réaliser l'expérience dans les conditions où cette modélisation est valable, sans quoi attendez vous à ce que le jury vous pose des questions "désagréables" ... © C. Winisdorffer

Divers

dimanche 17 novembre 2024 20:16

TP_Divers

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

PRÉPARATION À L'AGRÉGATION DE PHYSIQUE

Fascicule de TP

Divers

École normale supérieure — Lyon 2024-2025
version du 19 août 2024

Préambule

Ce fascicule contient les énoncés des huit séances de travaux pratiques de mécanique, de mécanique des fluides et de thermodynamique. Il a pour but de vous aider à réaliser des expériences de base, que vous pourrez présenter lors de vos leçons et montages. Chaque TP contient de nombreuses expériences, et il sera difficile de toutes les réaliser au cours d'une seule séance. Les expériences dites de « seconde lecture » ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Cependant, ce fascicule n'est pas exhaustif, et il est tout à fait possible (et même conseillé) de développer de nouvelles expériences au cours de l'année. Vous pouvez alors demander aux responsables, encadrants et techniciens des conseils pour concevoir et monter de nouvelles expériences pertinentes.

Une séance de TP se prépare à l'avance. Il faut arriver en séance de TP en sachant quelles expériences vous voulez réaliser, pourquoi vous les faites et avoir compris un minimum la théorie sous-jacente. Le jour de l'oral, les seules ressources auxquelles vous aurez accès de façon certaine sont les ouvrages qui seront envoyés au lycée où se déroulent les épreuves, ainsi que les documents envoyés par les différents centres de préparation à l'agrégation (voir ci-dessous). Il est donc extrêmement important que vous ne vous limitiez pas à la lecture de ce document, mais que vous connaissiez les livres dans lesquels trouver la description de ces expériences et vous portiez un regard critique sur celles-ci. Ce fascicule est une base de travail mais les manipulations que vous allez présenter le jour J doivent être personnelles, abouties et réfléchies.

Ce fascicule est une sélection de manipulations non exhaustive qui peut aussi contenir quelques erreurs ou oublis. Toute suggestion d'ajouts, de corrections, etc., est la bienvenue ; merci de contacter pour cela le responsable des TP. Les futures promotions d'agrégatifs vous en sauront gré.

Bon travail à tous,

Christophe Winisdoerffer, responsable de la préparation à l'agrégation de Physique

C'est à Charles-Edouard Leconte, Vincent De Zotti et Valentin Raban qu'il revient d'avoir connu la version originale de ce fascicule. Qu'ils en soient ici tout particulièrement remerciés. Merci également à tous ceux, étudiants ou encadrants, qui, d'une façon ou d'une autre, ont permis d'apporter des améliorations successives à ce document.

Afin de prendre en compte les modifications des règles du concours apportées par les jurys successifs, une refonte majeure de ce document a depuis été entreprise ; ce travail est encore en cours. À terme, il existera deux versions de ce fascicule de TP : une version « sobre », susceptible d'être acceptée par le jury comme ressource accessible pendant les oraux du concours, et une version enrichie de discussions détaillées, de remarques, d'exemples, etc. Ces informations apparaîtront en couleur dans le document accessible sur le portail des études, afin d'attirer votre attention sur le fait qu'à terme, vous devez pouvoir vous en passer en ayant acquis la distance nécessaire par rapport aux expériences que vous présentez.
C'est à **Benjamin Guiselin** que l'on doit l'essentiel du travail effectué jusqu'à présent, et c'est donc à lui que doivent s'adresser les remerciements de tous ceux qui en profiteront!

Mise en garde

Les TP décrits dans ce fascicule ont, comme finalité, de permettre aux étudiants préparant l'agrégation non seulement de développer leurs compétences expérimentales, mais également d'approfondir leur compréhension de la physique. Il s'agit donc d'un objectif de formation beaucoup plus large que ne pourraient l'être des "fiches" adaptées à chaque montage apparaissant au concours. C'est la raison pour laquelle le lecteur est souvent renvoyé vers des références extérieures (pour la description précise d'un protocole, la justification d'une formule, ...), lui permettant ainsi d'élargir sa culture bibliographique; ou que des questions sont posées sans que les réponses ne soient données dans l'énoncé. Il appartient ensuite à chacun d'identifier, pour l'ensemble des expériences proposées, dans quel(s) contexte(s) elles pourraient être exploitées. Évidemment, cela nécessite de la part de chaque étudiant d'être acteur de sa propre formation, en préparant en amont chaque séance de TP qui, encore une fois, ne saurait se limiter à seulement suivre un protocole...

À l'issue de ce travail, les étudiants auront développé, en plus de leurs compétences expérimentales, un point de vue élargi sur différents domaines de physique. Cela devrait leur permettre d'envisager de façon sereine l'épreuve du "Montage" de l'agrégation, en consultant éventuellement des ressources plus spécifiques mises à disposition sur le site du concours. Mais au-delà de cet exercice, c'est l'ensemble de leur culture (théorique et expérimentale) qui profitera du travail accompli, ***avant, pendant et après*** chaque séance de TP.

Table des matières

(TP 1) Mécanique
(TP 2) Oscillateurs et ondes mécaniques
(TP 3) Mécanique des fluides
(TP 4) Acoustique
(TP 5) Phénomènes de surface et capillarité
(TP 6) Mesures de températures
(TP 7) Thermodynamique des transitions de phase
(TP 8) Échanges thermiques

Mécanique

Table des expériences

I.	Dynamique de la chute libre [MPs 1, 5 et 6]	3
II.	Étude du rebond d'une balle sur un substrat solide (*) [MP 1]	5
III.	Mouvement rectiligne uniforme de mobiles autoporteurs sur coussin d'air [MP 1]	6
IV.	Mouvement à force centrale de mobiles autoporteurs sur coussin d'air [MP 1]	6
V.	Chocs entre mobiles autoporteurs sur coussin d'air [MP 1]	10
VI.	Pendule pesant dans la limite des petits angles [MPs 1 et 2]	14
VII.	Pendule pesant non linéaire [MPs 1, 2, 7 et 9]	15
VIII.	Pendule double-puits mécanique (*) [MPs 1, 2, 8 et 9]	16
IX.	Gyroscope libre et déséquilibré [MPs 1 et 2]	16
X.	Centrifugeuse [MPs 3 et 6]	16

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Dynamique de la chute libre [MPs 1, 5 et 6]

Nous proposons de réaliser l'expérience suivante, schématisée Fig. 1, également décrite dans la Réf. [3] (p. 241) et dans la Réf. [7] (pp. 68-70).

Liste du matériel :
- le dispositif de chute libre P78.4,
- deux détecteurs optiques de passage P96.27,
- un fil à plomb P96.19,
- un chronocompteur P96.26,
- un récipient avec mousse,
- une bille magnétique,
- une balance P97.21,
- une alimentation continue P53.20.

1. Équation horaire

Nous proposons ici d'étudier le mouvement de chute libre d'une bille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En notant v_0 la vitesse de la bille à l'instant $t = 0$, supposée verticale et dirigée vers le bas, et g l'accélération de la pesanteur, son altitude en fonction du temps $z(t)$ mesurée par rapport à un axe vertical ascendant d'origine centré sur la position initiale de la bille s'écrit :

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0 t. \tag{1}$$

On propose d'utiliser un dispositif spécifique, schématisé Fig. 1. Il est composé d'une règle verticale sur laquelle il est possible de fixer des détecteurs optiques de passage. Un électroaimant placé au-dessus permet de maintenir la bille en hauteur. Si on ne dispose pas d'un tel dispositif, on peut le concevoir soi-même à l'aide de deux fourches optiques. On placera ensuite deux capteurs sur la règle, le premier à environ 5cm de l'électroaimant, et le second à une distance quelconque. On réglera la verticalité de la règle à l'aide d'un fil à plomb. On alimentera l'électroaimant avec une alimentation continue, et on placera un récipient avec de la mousse sous les capteurs pour récupérer la bille.
On branchera ensuite les deux capteurs au chronomètre. Le signal du premier capteur doit déclencher le départ de la mesure, tandis que le second doit arrêter la mesure. Le chronocompteur doit donc être réglé de telle sorte de fonctionner en ouverture. On alimentera enfin les capteurs.

> On pourra alors éteindre l'alimentation : la bille tombe. On notera le temps de chute t_c correspondant, et on pourra reproduire l'expérience pour différentes distances h entre les deux capteurs.

Dans notre cas, les détecteurs optiques sont constitués d'une diode laser IR et d'un phototransistor. Lorsque le faisceau émis par la diode laser est coupé par un objet opaque, le phototransistor est dans l'état bloqué. Un circuit de conditionnement en aval renvoie alors une tension en sortie du capteur égale à 5V. Elle est de 0V sinon. Pour plus de détails, on renvoie à la notice `P96.27`. En outre, l'électroaimant doit être alimenté avec un courant d'intensité 1 A.

Pour les capteurs et le chronocompteur, ce dernier doit être réglé en mode «chronomètre». Le départ et l'arrêt doivent être en mode «Ouverture», et les fils jaunes et noirs des capteurs (respectivement `Signal` et `Masse`) doivent être reliés aux entrées jaunes et noirs du chronocompteur. Enfin, les capteurs doivent être alimentés, en branchant les fils rouges (`Alimentation`) des capteurs aux bornes rouges du chronocompteur.

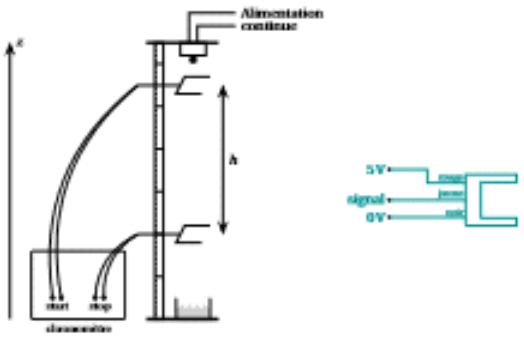


FIGURE 1 – Schéma du dispositif expérimental pour l'étude de la chute libre. À droite, branchement des fourches optiques Jeulin `P96.27`.

On pourra alors tracer h en fonction de t_c, et remonter à l'intensité de pesanteur. On pourra effectuer un ajustement par une fonction $h = at_c^2 + bt_c$ (ou mieux $h/t_c = at_c + b$), avec a et b deux paramètres ajustables (voir TP1 d'électronique). On a alors $g = 2a$. Un exemple de mesure est donné Fig. A1.

Pour cette expérience, les incertitudes devront être traitées avec soin. Pour la mesure du temps de chute, on pourra tenir compte de l'incertitude-type donnée par le constructeur du chronocompteur, mais on pourra également effectuer un traitement statistique en mesurant t_c plusieurs fois pour une même valeur de h.

2. Étude énergétique

On propose maintenant d'effectuer un bilan énergétique lors de la chute libre de la bille.

> On pourra peser la masse m de la bille avec une balance. À partir des mesures précédentes de la hauteur $h = z(t_c)$ en fonction du temps, on peut en déduire la vitesse en calculant les différences finies. On peut alors déterminer l'énergie cinétique de la bille, ainsi que son énergie potentielle, puis son énergie mécanique. On pourra alors observer l'évolution de ces trois grandeurs avec le temps.

Dans notre cas, les énergies cinétique et potentielle ont les expressions suivantes :

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \quad E_p = -mgz(t), \quad E_m = E_c + E_p. \tag{2}$$

L'évolution de la bille est conservative, et son énergie mécanique est conservée. Sous Python [1], la dérivée de h peut s'obtenir facilement à partir de la commande `numpy.diff`, sauf pour la dernière valeur de temps pour laquelle on ne pourra pas mesurer la vitesse.

1. Si l'utilisateur de ce document utilise (encore) Régressi, la dérivée de h en fonction du temps peut s'obtenir par la commande `v = diff(h, t)`.

La mesure de la masse n'est pas cruciale car elle intervient de la même façon pour E_c et E_p. Un exemple de mesure des différentes énergies est donné Fig. A1.

On termine par mentionner qu'il est possible d'étudier le mouvement de chute libre autrement.

- D'une part, par l'étude de la chute d'une règle transparente présentant des traits opaques équidistants qui tombe devant une fourche optique (avec un dispositif analogue). Cela permet d'obtenir la courbe $z(t)$ en une seule acquisition, moyennant un traitement un peu plus compleux. Mais la trajectoire de la règle est un peu capricieuse. On pourra lire la Réf. [3] (pp. 242-244) pour de plus amples détails.
- D'autre part, par l'étude d'une vidéo de chute libre (avec une trajectoire rectiligne ou parabolique) et pointage de la position sur Cinerix ou Latis-Pro. On pourra lire la Réf. [3] (pp. 245-248).

II. Étude du rebond d'une balle sur un substrat solide (*) [MP 1]

On propose de réaliser l'expérience schématisée Fig. 2. Pour plus de détails sur les aspects théoriques, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (pp. 29-30).

Lorsque qu'une balle rebondit sur le sol, elle perd une partie de son énergie cinétique. L'origine de cette perte d'énergie est multiple : déformation plastique, viscoélasticité, élévation de température locale, etc., et dépend de nombreux facteurs : matière, forme de la balle, type de sol, vitesse d'impact. En première approximation, on peut supposer que l'énergie perdue ne dépend pas de la vitesse. Ainsi, si la vitesse avant l'impact a une norme égale à v_0, la vitesse après l'impact sera de norme ev_0. Le coefficient e est nommé coefficient de restitution, il est adimensionné et varie entre 0 et 1. Plus il est proche de 1, plus le choc est élastique, c'est-à-dire sans perte d'énergie.

Juste après le $i^{\text{ème}}$ impact, la vitesse aura pour norme v_0e^i. Le temps de vol après le $i^{\text{ème}}$ choc est alors (chute libre en négligeant les frottements de l'air)

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i = \frac{2v_i}{g} = \frac{2v_0}{g}e^i. \tag{3}$$

Liste du matériel :

- une balle de ping-pong `P106.44`,
- un système de noix, pinces et potence,
- un microphone `P74.37` (à demander aux techniciens),
- un adaptateur pour microphone `P74.38`,
- une planche en bois,
- une carte d'acquisition.

> On propose de réaliser l'expérience de la Fig. 2. On placera un microphone sur le sol, et on le branchera à un oscilloscope en mode `Single` ou à une la carte d'acquisition (avec le plus petit calibre, car la tension aux bornes du microphone sera faible). On lâchera ensuite une balle (par exemple de ping-pong) d'environ 1 mètre de haut sur un support en prenant garde à ne pas lui donner de mouvement de rotation. On n'oubliera pas d'allumer le microphone!
>
> On repèrera ensuite les instants t_i des différents pics du signal enregistré (son émis quand la balle percute le support), ce qui permettra de remonter à l'écart $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ entre deux chocs consécutifs.
>
> On pourra répéter l'expérience pour différentes balles ou différents supports (par exemple une table ou une planche de bois).

Figure 2 – Expérience de rebond d'une balle sur un substrat solide.

Pour un support et une balle donnés, il faudra tracer la droite $\ln \Delta t_i$ en fonction de i dont la pente $\ln e$ permettra de remonter au coefficient de restitution. Un exemple de réalisation expérimentale est donné Fig. A2.

III. Mouvement rectiligne uniforme de mobiles autoporteurs sur coussin d'air [MP 1]

1. Description

Les mobiles autoporteurs sont constitués de petites pompes à air qui leur permettent de se maintenir en sustentation pneumatique au-dessus d'une table. Le frottement des mobiles est alors fortement réduit, ce qui permet de les considérer comme des systèmes pseudo-isolés. Pour plus de détails sur le fonctionnement des mobiles auto-porteurs, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [6].

Le générateur d'impulsions sous les mobiles peut produire des étincelles à intervalle régulier, ce qui marque la feuille de papier placée sur la table, et permet de suivre la trajectoire des mobiles au cours du temps. L'étincelle ne se produit que si les deux mobiles se trouvent sur la table, car il faut fermer le circuit électrique.

L'alimentation des mobiles est assurée par des câbles, il faut essayer de ne pas trop les emmêler au cours des expériences, sinon ils risquent de dévier les mobiles de leurs trajectoires.

Liste du matériel :

- une table pour mobile autoporteurs sur coussin d'air `P01.11`,
- un niveau à bulle `P96.12`,
- deux mobiles autoporteurs et leurs accessoires `P01.5`,
- un générateur d'impulsions `P01.6`,
- une feuille de papier A2.

Cette expérience, ainsi que les deux autres qui suivent sont des exemples d'expériences réalisables à l'aide de mobiles autoporteurs sur coussin d'air. Pour d'autres exemples de manipulation, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [3] (pp. 233-238).

2. Étude du mouvement rectiligne uniforme

On commence par l'étude d'un mouvement simple de translation rectiligne uniforme.

> On commencera par vérifier l'horizontalité de la table à l'aide d'un niveau à bulle. On pourra ajuster la hauteur des pieds si besoin. On placera ensuite une feuille de papier A2 neuve sur la table, et on déposera les mobiles par-dessus. On reliera alors les mobiles au générateur d'impulsions à l'aide des câbles adaptés.
> Une fois ces réglages réalisés, on pourra allumer la pompe de l'un des mobiles, puis le lancer dans un mouvement rectiligne (le second mobile doit également être sur la table). On fera attention à ne pas lui communiquer un mouvement de rotation. On enregistrera le mouvement du mobile en faisant débiter au générateur d'impulsions un signal de période suffisamment faible (de l'ordre de 50ms).
> **Il faudra faire attention à ne jamais toucher ni la table ni les mobiles pendant l'enregistrement (le générateur fournit alors des impulsions haute tension !).**

Pour le générateur d'impulsions de la collection, il faut maintenir appuyé le bouton `commande impulsions` au cours du déplacement pour marquer le verso de la feuille. La période des impulsions devra être choisie suffisamment faible par rapport au temps que met le mobile pour parcourir toute la feuille, mais grande devant le temps typique pour parcourir une distance qui est de l'ordre de quelques fois la taille du marquage effectué sur la feuille. Une période de 40ms convient alors. Enfin, on réglera l'intensité de marquage sur TF.

On pourra alors observer que le mouvement du mobile est bien rectiligne uniforme. On pourra par exemple mesurer à la règle la distance entre les marques au début et à la fin du mouvement pour vérifier que la vitesse est bien constante au cours du mouvement. Pour un traitement plus quantitatif de cette expérience, on renvoie au traitement de l'expérience suivante, qui est similaire.

L'analyse directe des points de la trajectoire peut permettre de se rendre compte de quelques défauts du montage. D'une part, si les points se rapprochent le long de la trajectoire, cela peut signifier que les frottements ne sont pas négligeables au cours de l'expérience. À l'inverse, si les points s'éloignent le long de la trajectoire, alors cela peut indiquer un défaut d'horizontalité de la table à coussin d'air.

IV. Mouvement à force centrale de mobiles autoporteurs sur coussin d'air [MP 1]

Nous proposons de réaliser l'expérience suivante, également décrite dans la Réf. [7] (pp. 161-162).

Liste du matériel :

- une table pour mobile autoporteurs sur coussin d'air `P01.11`,

- un niveau à bulle P96.12,
- deux mobiles autoporteurs et leurs accessoires P81.5,
- un générateur d'impulsions P81.6,
- une feuille de papier A2,
- un appareil photographique P15.39 (à demander aux techniciens),
- une masse marquée,
- une balance P97.21.

1. Loi des aires

> Si cela n'a pas déjà été fait, on commencera par régler l'horizontalité de la table à coussin d'air (voir l'expérience précédente).
> On propose ensuite de relier les axes centraux des deux mobiles par un ressort à spires non jointives (celui présent dans la mallette P81.5 par exemple) ou un fil. Pour cela, on pourra faire passer les câbles d'alimentations des mobiles dans les extrémités du ressort. On placera l'un des mobiles au centre de la table, sans activer sa pompe. On peut également déposer une masse lourde dessus pour éviter qu'il ne bouge dans la suite de l'expérience. On activera alors la pompe du second mobile, on lui communiquera un mouvement de translation autour du premier mobile, et on enregistrera la position du second mobile. Il faudra également éviter que le ressort se torde au cours de l'expérience, il doit rester rectiligne.
> Une fois ceci fait, il faut extraire les données de la position du mobile en fonction du temps. Pour cela, on tracera sur la feuille un repère orthonormé dont les axes sont de longueur connue, afin de faire la calibration, et dont les axes sont parallèles aux bords de la feuille, et on fixera au scotch la feuille sur une surface plane (table ou mur). On en prendra ensuite une photographie (on cherchera à aligner les bords de la feuille avec les bords de l'image), qu'on transférera sur un ordinateur à l'aide d'une carte SD ou d'un câble USB. Cela permettra de récupérer la position du mobile à l'aide d'un logiciel de traitement d'images.

On rappelle que pour effectuer l'enregistrement, il faut maintenir le bouton `commande impulsions` enfoncé pour marquer la trajectoire. Comme dans l'expérience précédente, il faut choisir la période des impulsions haute fréquence suffisamment petite devant le temps nécessaire pour que le mobile effectue une période complète du mouvement, ici une période de 40 ms convient encore. On réglera toujours l'intensité de marquage sur T2.

Pour estimer les défauts de parallaxe lors de la prise de la photographie (conduisant à des erreurs sur la mesure de la position du mobile), on pourra tracer différents repères à différents endroits de la feuille. Cela permettra également d'en déduire une incertitude sur la mesure de la position du mobile au cours de l'expérience.

Le mobile autoporteur effectue ici un mouvement à force centrale. Il en résulte que son moment cinétique est conservé au cours du mouvement, et donc que sa vitesse aréolaire est constante. Autrement dit, l'aire balayée par son vecteur position (dont l'origine est prise à la position du mobile fixe) croît linéairement avec le temps. C'est ce dernier point qu'on se propose de vérifier, en effectuant le traitement des données proposé ci-dessous.

> Pour l'analyse des résultats, on propose d'utiliser le logiciel de traitement d'images ImageJ, et d'effectuer les manipulations suivantes pour extraire automatiquement les positions des différents points de la trajectoire.
> 1. On calibre l'image avec les axes gradués tracés : `Analyze > Set Scale`.
> 2. On transforme l'image en une image noir et blanc codée sur 8 bits : `Image > Type > 8-bit`.
> 3. On mesure la position du mobile fixe, puis on coupe l'image de telle sorte à ne garder que les positions du second mobile.
> 4. On ajuste le seuil de l'image pour détecter les positions successives : `Image > Adjust > Threshold`.
> 5. On mesure la position des marques laissées sur la feuille qui correspondent aux positions successives du mobile : `Analyze > Analyze Particles`. On pourra cocher « center of mass » et « ellipse axes » (pour l'estimation des incertitudes).
> 6. On enregistre les positions dans un fichier .txt qu'on pourra ensuite traiter, par exemple avec Python.

Il est plus simple de montrer que l'aire balayée croît approximativement linéairement avec le temps, plutôt que de montrer que la vitesse aréolaire est quasiment constante au cours du temps. Par ailleurs, la modélisation affine de l'aire balayée en fonction du temps permet, par la mesure de la pente, d'obtenir la vitesse aréolaire (la constante des aires C est le double de la vitesse aréolaire), puis de remonter au moment cinétique selon la verticale, qui vaut $L = mC$, où m est la masse du mobile (qu'on pourra mesurer avec une balance).

Afin de traiter les données, on propose d'utiliser le code Python `loi_aires.py` à l'aide du logiciel Spyder, qu'on reproduit et commente ci-dessous :

```python
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
'''
Benjamin GRIMALDI
Version du 12/10/2022
'''

#\\\\ Importation des libraries À NE PAS MODIFIER
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.optimize as opt
import scipy.integrate as integrate

#\\\\ Définition de fonctions pour effectuer une modélisations affine À NE PAS MODIFIER
def modele_affine(X,Y,u_X,u_Y,a_test,b_test):
    '''
    Effectue une modélisation affine Y = a * X + b, en tenant compte des incertitudes sur X (u_X) et Y (
    u_Y).
    La fonction utilise la méthode des moindres carrés à partir de paramètres d'essai a_test et b_test.
    La fonction renvoie un tableau qui contient dans l'ordre :
        - la valeur de a optimisée (a_opt),
        - la valeur de b optimisée (b_opt),
        - l'incertitude sur la valeur de a (u_a_opt),
        - l'incertitude sur la valeur de b (u_b_opt),
        - la valeur du chi2 réduit (chi2_opt).
    '''
    def affine(x,a,b):
        return a * x + b

    def residu_affine(p_affine,x,y,u_x,u_y):
        a = p_affine[0]
        b = p_affine[1]
        return ( y - affine(x,a,b) ) / np.sqrt( u_y + u_y + ( a + u_x ) ** 2 )

    opt_affine = opt.least_squares(residu_affine,np.array([a_test, b_test]),args=(X,Y,u_X,u_Y))
    a_opt = opt_affine.x[0]
    b_opt = opt_affine.x[1]
    hessian_affine = np.matmul(opt_affine.jac.transpose(),opt_affine.jac)
    u_a_opt = np.sqrt( 2. / hessian_affine[0,0])
    u_b_opt = np.sqrt( 2. / hessian_affine[1,1])
    chi2_opt = np.sum( residu_affine(np.array([a_opt,b_opt]),X,Y,u_X,u_Y) ** 2 )/( len(X) - 2 )
    print("Résultats de l'ajustement :")
    print("- pente = {0:.2e} +/- {1:.1e}".format(a_opt,u_a_opt))
    print("- ordonnée à l'origine = {0:.2e} +/- {1:.1e}".format(b_opt,u_b_opt))
    return np.array([a_opt,b_opt,u_a_opt,u_b_opt,chi2_opt])

#\\\\ Parametres à MODIFIER
filename = 'data_vrai.txt' # nom du fichier avec x, y en m
x_c = 0.107 # abscisse du mobile fixe en m
y_c = 0.237 # ordonnée du mobile fixe en m
T = 0.06 # période des impulsions en s
u_x = 5./3550. # incertitude sur x en m
u_y = 5./3550. # incertitude sur y en m

#\\\\ Importation des données
data = np.genfromtxt(filename)
x = data[:,0]
y = data[:,1]
x -= x_c
y -= y_c
r2 = x * x + y * y # carré de la distance au centre
theta = np.arctan2(y, x) # angle que fait le vecteur position par rapport à l'axe des abscisses

#\\\\ Calcul de l'incertitude sur l'aire
t = np.arange(0, len(x)) * T # tableau des temps
u_t = np.zeros(len(t)) # incertitude sur le temps
A = 0.5 * integrate.cumtrapz(r2, theta) # aire balayée au cours du temps
u_A = np.zeros(len(A)) # incertitude sur l'aire qu'on va calculer par méthode de Monte Carlo (nous hypothè
    se uniforme)
n_MC = 10000
i = 0
np.random.seed()
while i < n_MC:
    x_MC = np.copy(x) + ( 2. * np.random.random_sample(len(x)) - 1. ) * u_x
    y_MC = np.copy(y) + ( 2. * np.random.random_sample(len(y)) - 1. ) * u_y
    r2_MC = x_MC * x_MC + y_MC * y_MC
    theta_MC = np.arctan2(y_MC, x_MC)
```

```
76      u_A += ( 0.5 * integrate.cumtrapz(r2_MC, theta_MC) - A ) ** 2
77      i += 1
78  u_A /= n_MC
79  u_A **= .5
80
81  #\\\\ Effectuer une modélisation de l'aire en fonction du temps\
82  param_affine = modele_affine(t[1:],A,u_t[1:],u_A,1.,0.)
83  a_affine = param_affine[0] # extraction de la pente (vitesse aérolaire)
84  u_a_affine = param_affine[2] # extraction de l'incertitude sur la pente (vitesse aérolaire)
85  b_affine = param_affine[1] # extraction de l'ordonnée à l'origine
86  u_b_affine = param_affine[3] # extraction de l'incertitude sur l'ordonnée à l'origine
87  chi2_affine = param_affine[4] # extraction du chi2 réduit
88  C = 2 * a_affine # constante des aires
89  u_C = 2 * u_a_affine
90
91  #\\\\ Tracé des données
92  plt.figure()
93  plt.errorbar(t[1:],A,u_A,u_t[1:],'o')
94  plt.plot(t,a_affine * t + b_affine,label=r'$C=({0:.2f}\pm{1:.2f})\ m^2/s,\ \chi_2=({2:.2f})'.format(C,
        u_C, chi2_affine))
95  plt.xlabel(r'$t$ (s)')
96  plt.ylabel(r'$A$ (m2)')
97  plt.legend()
98  plt.show()
99
100 #\\\\ Calcul et tracé des différentes énergies
101 k = 8. # raideur du ressort en N/m À MODIFIER
102 l0 = 0.074 # longueur à vide du ressort en m À MODIFIER
103 m = 0.5 # masse du mobile en kg À MODIFIER
104 v = np.sqrt(v2)
105 ep = np.diff(v)
106 Ec = 0.5 * m * ( cp + cp + C * C / r2[:-1] )
107 Ep = 0.5 * k * ( r[:-1] - l0 ) ** 2
108 plt.figure()
109 plt.plot(t[:-1],Ec,'o',label=r'$E_\mathrm{c}$')
110 plt.plot(t[:-1],Ep,'o',label=r'$E_\mathrm{p}$')
111 plt.plot(t[:-1],Ec+Ep,'o',label=r'$E_\mathrm{m}$')
112 plt.xlabel(r'$t$ (s)')
113 plt.ylabel(r'$E$ (J)')
114 plt.legend()
115 plt.show()
```

Ce code utilise le module de modélisation affine déjà introduit dans le TP1 d'électronique (lignes 14 à 44) après avoir introduit les librairies utiles. Les données sont introduites des lignes 46 à 52. Les incertitudes sont données sous la forme d'une unique valeur, mais peuvent être données sous forme de tableau si « ellipse zaxe » a été sélectionné sur Image1 lors de l'analyse de la trajectoire, et si l'erreur sur les positions dû à un défaut de parallaxe est négligeable devant la taille des marques. Le calcul de r^2 et θ en coordonnées polaires centrées sur le mobile flux (l'angle θ étant mesuré par rapport à l'axe x tracé sur la feuille) est fait, puis l'aire balayée par le vecteur position en fonction du temps est déterminée entre les lignes 54 et 65. Attention que le tableau des aires contient un élément de moins que les tableaux des coordonnées du mobile (correspondant au premier point d'aire nulle). Le calcul de l'incertitude sur l'aire par méthode de Monte Carlo est fait entre les lignes 67 et 87. La modélisation affine de l'aire balayée en fonction du temps est effectuée entre les lignes 83 et 87. Enfin, les données ainsi que la modélisation affine correspondante sont tracées entre les lignes 99 et 106.

Un exemple de données qu'il est possible d'obtenir avec le matériel de la collection est disponible Fig. A3.

2. Étude énergétique (*)

Dans le cas où les deux mobiles sont attachés par un ressort à spires non jointives, l'énergie mécanique est conservée au cours du mouvement, et s'exprime sous la forme

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2}k(r - \ell_0)^2,$$

avec k la constante de raideur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide.

> On propose de mesurer les caractéristiques du ressort, raideur k et longueur à vide ℓ_0. La seconde se mesure simplement à la règle, tandis que la première peut s'obtenir en faisant pendre une masse marquée de masse connue. On peut alors utiliser le code Python mentionné ci-dessus pour tracer les différentes énergies.

Le calcul des énergies, ainsi que leur tracé, sont effectués entre les lignes 108 et 123 du code Python précédent.

V. Chocs entre mobiles autoporteurs sur coussin d'air [MP 1]

1. Choc élastique

On propose d'étudier le choc entre deux mobiles autoporteurs sur table à coussin d'air.

Liste du matériel :

- une table pour mobile autoporteurs sur coussin d'air `P81.11`,
- un niveau à bulle `P96.12`,
- deux mobiles autoporteurs et leurs accessoires `P81.5`,
- un générateur d'impulsions `P81.6`,
- une feuille de papier A2,
- un appareil photographique `P15.39` (à demander aux techniciens),
- une balance `P97.21`.

> Si cela n'a pas déjà été fait, on commencera par régler l'horizontalité de la table à coussin d'air (voir l'Exp. III).
> On propose ensuite de lester l'un des deux mobiles avec une bague `P81.5/1-B` afin de travailler avec deux mobiles de masses différentes. On fixera ensuite une bague à ressort `P81.5/1-D` sur chacun des mobiles, afin que le choc puisse être considéré comme élastique. Avant l'expérience, on mesurera les masses m_1 et m_2 des deux mobiles, munis de leurs bagues, à l'aide d'une balance. On pourra ensuite allumer les deux pompes et lancer les mobiles latéralement l'un sur l'autre de sorte que leur collision se produise approximativement au milieu de la table. On enregistrera leur mouvement avant, pendant, et après le choc, avec une période des impulsions haute tension de l'ordre de 50 ms.
> Une fois ceci fait, il faut extraire les données de la position des mobiles en fonction du temps. Pour cela, on tracera sur la feuille deux repères orthonormés (un de chaque côté de la feuille pour la trajectoire de chaque mobile), dont les axes sont de longueur connue, afin de faire la calibration, et dont les axes sont parallèles aux bords de la feuille. On fixera ensuite avec du scotch la feuille sur une surface plane (table ou mur). On en prendra alors une photographie (on cherchera à aligner les bords de la feuille avec les bords de l'image), qu'on transférera sur un ordinateur à l'aide d'une carte SD ou d'un câble USB. Cela permettra de récupérer la position des mobiles à l'aide d'un logiciel de traitement d'images.
> Pour l'analyse des résultats, on propose d'utiliser le logiciel de traitement d'images [image], et d'effectuer des manipulations analogues à celles de l'expérience précédente (qu'on rappelle ci-dessous) afin d'extraire les trajectoires des deux mobiles.
>
> 1. On calibre l'image avec les axes gradués tracés : `Analyze > Set Scale`.
> 2. On transforme l'image en une image noir et blanc codée sur 8 bits : `Image > Type > 8-bit`.
> 3. On coupe l'image de telle sorte à ne garder que les positions du premier mobile.
> 4. On ajuste le seuil de l'image pour détecter les positions successives : `Image > Adjust > Threshold`.
> 5. On mesure la position des marques laissées sur la feuille qui correspondent aux positions successives du mobile : `Analyze > Analyze Particles`. On pourra cocher « center of mass » et « ellipse axes » (pour l'estimation des incertitudes).
> 6. On enregistre les positions dans un fichier .txt qu'on pourra ensuite traiter, par exemple avec Python.
> 7. On réitère toutes les étapes précédentes pour le second mobile.
>
> On peut alors calculer simplement, par exemple à l'aide de Python (voir le code ci-joint), les vecteurs vitesse $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ des deux mobiles au cours du temps, et s'intéresser à la variation de quantité de mouvement au cours du choc.

On rappelle que la mesure des trajectoires se fait en maintenant le bouton `commande impulsions` appuyé.

L'analyse directe des points de la trajectoire peut permettre de se rendre compte de quelques défauts du montage. D'une part, si les points se rapprochent le long de la trajectoire, cela peut signifier que les frottements ne sont pas négligeables au cours de l'expérience. À l'inverse, si les points s'éloignent le long de la trajectoire, alors cela peut indiquer un défaut d'horizontalité de la table à coussin d'air.

Pour effectuer l'analyse des trajectoires, on propose d'utiliser le code Python `choc_mobiles.py` à l'aide du logiciel Spydet, qu'on reproduit et commente ci-dessous :

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Benjamin GUILLON
```

```python
Version du 12/10/2022
"""

#\\\ Importation des bibliothèques À NE PAS MODIFIER
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.optimize as opt
from copy import deepcopy

#\\\ Définition de fonctions pour effectuer une modélisations affine À NE PAS MODIFIER
def modele_affine(X,Y,u_X,u_Y,a_test,b_test):
    """
    Effectue une modélisation affine Y = a * X + b, en tenant compte des incertitudes sur X (u_X) et Y (
    u_Y).
    La fonction utilise la méthode des moindres carrés à partir de paramètres d'essai a_test et b_test.
    La fonction renvoie un tableau qui contient dans l'ordre :
        - la valeur de a optimisée (a_opt),
        - la valeur de b optimisée (b_opt),
        - l'incertitude sur la valeur de a (u_a_opt),
        - l'incertitude sur la valeur de b (u_b_opt),
        - la valeur du chi2 réduit (chi2_opt).
    """
    def affine(x,a,b):
        return a * x + b

    def residu_affine(p_affine,x,y,u_x,u_y):
        a = p_affine[0]
        b = p_affine[1]
        return ( y - affine(x,a,b) ) / np.sqrt( u_y * u_y + ( a * u_x ) ** 2 )

    opt_affine = opt.least_squares(residu_affine,np.array([a_test, b_test]),args=(X,Y,u_X,u_Y))
    a_opt = opt_affine.x[0]
    b_opt = opt_affine.x[1]
    hessian_affine = np.matmul(opt_affine.jac.transpose(),opt_affine.jac)
    u_a_opt = np.sqrt( 2. / hessian_affine[0,0])
    u_b_opt = np.sqrt( 2. / hessian_affine[1,1])
    chi2_opt = np.sum( residu_affine(np.array([a_opt,b_opt]),X,Y,u_X,u_Y) ** 2 )/( len(X) - 2 )
    print("Résultats de l'ajustement :")
    print("- pente = {0:.2e} +/- {1:.1e}".format(a_opt,u_a_opt))
    print("- ordonnée à l'origine = {0:.2e} +/- {1:.1e}".format(b_opt,u_b_opt))
    return np.array([a_opt,b_opt,u_a_opt,u_b_opt,chi2_opt])

def distance(A,B):
    return np.sqrt((A[0]-B[0])**2 +(A[1]-B[1])**2)

def plus_proche_voisin(A,X,Y):
    B = []
    if A == [X[0],Y[0]]:
        B = [X[1],Y[1]]
    else :
        B = [X[0],Y[0]]
    for i in range(len(X)):
        if distance(A,[X[i],Y[i]])<distance(A,B) and distance(A,[X[i],Y[i]])>0:
                B = [X[i],Y[i]]

    return B


#\\\ Paramètres À MODIFIER
filename1 = 'mobile_1.txt' # nom du fichier avec x, y en m (mobile 1)
filename2 = 'mobile_2.txt' # nom du fichier avec x, y en m (mobile 2)
T = 0.04 # période des impulsions en s
u_x = 0.001 # incertitude sur x en m
u_y = 0.001 # incertitude sur y en m
m1 = 0.9808 # masse du mobile 1 en kg
m2 = 0.624 # masse du mobile 2 en kg

#\\\ Importation des données
data1 = np.genfromtxt(filename1)
data2 = np.genfromtxt(filename2)
x1 = (0.01+data1[:,1]).tolist()
y1 = (-0.01+data1[:,2]).tolist()
x2 = (0.01+data2[:,1]).tolist()
y2 = (-0.01+data2[:,2]).tolist()
#t = np.arange(0, len(x)) * T # tableau des temps


## Pointage des positions initiales des mobiles
```

```
x01 = x1[-1]
y01 = y1[-1]
x02 = x2[27]
y02 = y2[27]

x1_sort= [x01]
y1_sort = [y01]
x2_sort= [x02]
y2_sort = [y02]

x1.remove(x01)
y1.remove(y01)
x2.remove(x02)
y2.remove(y02)

for i in range(len(x1)):
    a1 = plus_proche_voisin([x1_sort[-1],y1_sort[-1]],x1,y1)[0]
    b1 = plus_proche_voisin([x1_sort[-1],y1_sort[-1]],x1,y1)[1]
    x1_sort.append(a1)
    x1.remove(a1)
    y1_sort.append(b1)
    y1.remove(b1)


    a2 = plus_proche_voisin([x2_sort[-1],y2_sort[-1]],x2,y2)[0]
    b2 = plus_proche_voisin([x2_sort[-1],y2_sort[-1]],x2,y2)[1]
    x2_sort.append(a2)
    x2.remove(a2)
    y2_sort.append(b2)
    y2.remove(b2)


# %% Pour corriger manuellement une erreur de plus proche voisin si l'angle de rebond est trop aigu
y2bis = deepcopy(y2_sort)
x2bis = deepcopy(x2_sort)
aa = y2_sort[20]
y2_sort.remove(aa)
y2_sort.insert(22,aa)
bb = x2_sort[20]
x2_sort.remove(bb)
x2_sort.insert(22,bb)

# %% Calcul des vitesses
vx1 = np.diff(x1_sort) / T
vx2 = np.diff(x2_sort) / T
vy1 = np.diff(y1_sort) / T
vy2 = np.diff(y2_sort) / T
t = [i*T for i in range(len(vx1))]

u_vx1 = np.sqrt(2*u_x**2)/T
u_vy1 = np.sqrt(2*u_y**2)/T

u_vx2 = np.sqrt(2*u_x**2)/T
u_vy2 = np.sqrt(2*u_y**2)/T

#\%\% Tracé des données
plt.figure()
plt.errorbar(x1_sort,y1_sort,[u_x for i in range(len(x1_sort))],[u_x for i in range(len(x1_sort))],capsize
    =0.5, elinewidth=2)
#plt.plot(x1_sort,y1_sort)
plt.errorbar(x2_sort,y2_sort,[u_x for i in range(len(x1_sort))],[u_x for i in range(len(x1_sort))],capsize
    =0.5, elinewidth=2)
#plt.plot(x2_sort,y2_sort)

plt.xlabel(r'$x$ (m)')
plt.ylabel(r'$y$ (m)')
plt.legend()
plt.show()


#%%



plt.figure()
plt.errorbar(t,vx1,u_vx1,capsize=0.5, elinewidth=2)
```

```
158
159 plt.errorbar(t,vy1,u_vy1,capsize=0.5, elinewidth=2)
160 plt.xlabel(r'Dx0 (m)')
161 plt.ylabel(r'Dy0 (m)')
162 plt.legend()
163 plt.show()
164
165
166
167
168 # %% Energies en fonction du temps
169
170 Ec1 = 0.5*m1*(vx1**2+vy1**2)
171 Ec2 = 0.5*m2*(vx2**2+vy2**2)
172
173 u_Ec1 = m1 * np.sqrt(u_vx1**2 * vx1**2 + u_vy1**2 * vy1**2)
174 u_Ec2 = m2 * np.sqrt(u_vx2**2 * vx2**2 + u_vy2**2 * vy2**2)
175
176 plt.figure()
177
178 plt.errorbar(t,Ec1,u_Ec1)
179 plt.errorbar(t,Ec2,u_Ec2)
180 plt.xlabel(r'Dt0 (s)')
181 plt.ylabel(r'DE0 (J)')
182 plt.legend()
183 plt.show()
184
185 # %% Centre d'inertie
186
187 x_i = ( m1*np.array(x1_sort) + m2*np.array(x2_sort) ) /(m1+m2)
188 y_i = ( m1*np.array(y1_sort) + m2*np.array(y2_sort) ) /(m1+m2)
189
190 u_xi = 1/(m1 +m2) *np.sqrt(m1**2 * u_x**2 + m2**2 * u_x**2)
191 u_yi = 1/(m1 +m2) *np.sqrt(m1**2 * u_y**2 + m2**2 * u_y**2)
192
193 plt.figure()
194 plt.errorbar(x_i,y_i,u_yi,u_xi)
195 plt.plot(x_i,y_i)
196 plt.xlabel(r'Dx0 (m)')
197 plt.ylabel(r'Dy0 (m)')
198 plt.legend()
199 plt.show()
```

Ce code utilise le module de modélisation affine déjà introduit dans le TP1 d'électronique (lignes 13 à 43) après avoir introduit les librairies utiles. Les données sont introduites des lignes 45 à 52, et mises en forme des lignes 54 à 64. Les incertitudes sont données sous la forme d'une unique valeur, mais peuvent être données sous forme de tableau si « ellipse aura » a été sélectionné sur ImageJ lors de l'analyse de la trajectoire (et si les erreurs sur la mesure de la position dû à un défaut de pastillage sont négligeables devant la taille des marques laissées sur la feuille). Le calcul des vitesses des mobiles avant et après le choc se fait entre les lignes 67 et 92 par un ajustement affine des portions de trajectoire. Le calcul de l'impulsion du centre de masse des deux mobiles se fait entre les lignes 94 et 106. Enfin, les trajectoires des deux mobiles, et du centre de masse, sont tracées entre les lignes 108 et 116.

Un exemple de données qu'il est possible d'obtenir avec le matériel de la collection est disponible Fig. A4.

La quantité de mouvement du système constitué des deux mobiles est conservée au cours du temps (car il peut être considéré comme un système pseudo-isolé sur la durée de l'expérience). Son centre d'inertie G a alors un mouvement rectiligne uniforme, il est défini tel que pour tout point O :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}, \tag{4}$$

où M_1 et M_2 désignent les deux mobiles. Par ailleurs, en considérant que la collision est parfaitement élastique, l'énergie totale du système est conservée. Elle est la somme des énergies cinétiques respectives des mobiles et de l'énergie potentielle élastique emmagasinée dans les ressorts des bagues (au moment de la collision, une partie de l'énergie cinétique est transitoirement convertie sous forme d'énergie potentielle).

> On pourra alors utiliser le code Python ci-dessus afin de montrer l'évolution au cours du temps des énergies cinétiques des deux mobiles, et de l'énergie totale du système (en dehors de la phase de choc).

Le calcul des énergies et leur tracé se fait entre les lignes 118 et 132 du code Python présenté ci-dessus.

En pratique, le choc n'étant pas parfaitement élastique, une partie de l'énergie totale du système est dissipée au cours de celui-ci.

2. Choc inélastique (*)

Il est possible de réaliser la même expérience que précédemment en changeant les bagues avec ressort autour des mobiles par des bagues adhésives. Les mobiles restant liés après le choc, ce dernier ne peut pas être considéré comme élastique. Lors de ce mouvement, la quantité de mouvement totale est toujours conservée, mais plus l'énergie cinétique des deux mobiles.

VI. Pendule pesant dans la limite des petits angles [MPs 1 et 2]

On propose de réaliser l'expérience suivante, schématisée Fig. 3.

Liste du matériel :

- un pendule pesant P79.14,
- une alimentation pour le capteur potentiométrique P42.39,
- une masselotte P79.14,
- un oscilloscope ou une carte d'acquisition.

> On propose d'utiliser un pendule pesant dont l'angle peut être mesuré grâce à un capteur potentiométrique linéaire. Un potentiomètre suivi d'un circuit conditionneur composé d'un circuit soustracteur à AL1, d'un filtre passe-bas et d'un amplificateur à AL1 permet de renvoyer une tension proportionnelle à l'angle que fait le pendule par rapport à la verticale. Il convient d'alimenter le capteur à l'aide d'un boîtier d'alimentation P42.39. On propose d'accrocher une masse sur la tige du pendule. On pourra prendre, par exemple, la masselotte P79.14 de masse $m = 149g$. Pour différentes distances L par rapport à l'axe de rotation, on propose de lancer le pendule avec une amplitude faible (15° maximum) pour rester dans l'approximation des petits angles, puis de mesurer la période T_0 des oscillations avec un oscilloscope en mode Défilement ou une carte d'acquisition. Cela permettra par exemple de remonter au moment d'inertie J_0 de la tige.

Dans le cas des petits mouvements, on a juste besoin de s'assurer que le capteur est linéaire, c'est-à-dire que la tension en sortie varie de façon affine avec l'angle que fait le pendule avec la verticale, mais il n'y a aucun besoin de le calibrer. La vérification de la linéarité sera faite dans l'expérience suivante.

On considère un pendule équilibré constitué d'une tige métallique de moment d'inertie J_0 fixé en son centre à un axe de rotation. On fixe une masselotte de masse M à une distance L de l'axe de rotation, et on note θ l'angle du pendule avec la verticale, comme représenté sur la Fig. 3.

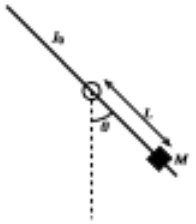


Figure 3 – Schéma d'un pendule pesant.

Le théorème du moment cinétique appliqué au point d'attache du pendule (constitué de la tige et de la masse) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen s'écrit :

$$[J_0 + ML^2]\ddot{\theta} + MgL\sin\theta = 0,$$

soit

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{J_0 + ML^2}}. \tag{5}$$

avec ω_0 la pulsation propre.

L'énergie mécanique du pendule se conserve au cours du temps, et se met sous la forme :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\left(J_0 + ML^2\right)\dot{\theta}^2 + MgL(1-\cos\theta), \tag{6}$$

à une constante additive près.

Pour des petits angles, l'Éq. (5) se linéarise sous la forme

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0. \tag{7}$$

On obtient alors une période indépendante de l'amplitude des oscillations (c'est l'isochronisme des petites oscillations) :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + ML^2}{MgL}}. \tag{8}$$

En pratique, l'amplitude des oscillations du pendule diminue au cours du mouvement, du fait des frottements de l'air, et des frottements solides au niveau du point d'accroche du pendule.

Pour remonter à J_0, on pourra effectuer une modélisation affine de $MgLT_0^2$ en fonction de L^2 (voir TP1 d'électronique), puis remonter à J_0 via l'ordonnée à l'origine. On doit obtenir $J_0 = 2{,}8 \times 10^{-3}$ kg·m², en accord avec la valeur indiquée dans la notice. Un exemple de réalisation expérimentale est donné Fig. A5.

VII. Pendule pesant non linéaire [MPs 1, 2, 7 et 9]

Pour cette expérience, nous renvoyons à la Réf. [4] (pp. 478-486) qui détaille le protocole, ainsi que la théorie associée. Nous tenons à faire remarquer au lecteur que les notations de cet élément bibliographique diffèrent de celles introduites ci-dessus : m est la masse totale du pendule, J est le moment d'inertie total du pendule, et ℓ représente la distance du barycentre des masses à l'axe de rotation.

Liste du matériel :

- un pendule pesant `P79.14`,
- une alimentation pour le capteur potentiométrique `P42.39`,
- une masselotte `P79.14`,
- un multimètre,
- une carte d'acquisition.

La Réf. [4] propose une méthode automatique de mesure de la période pour la vérification de la formule de Borda, décrivant la perte d'isochronisme des oscillations au-delà de l'approximation des petits angles (pour des amplitudes θ_m du mouvement angulaire du pendule inférieures à 60°) :

$$T \simeq T_0\left(1 + \frac{1}{16}\theta_m^2 + \frac{11}{3072}\theta_m^4\right). \tag{9}$$

Cette méthode est décrite dans la Réf. [2] et repose sur l'utilisation du logiciel Synchronie. Nous proposons ci-dessous l'implémentation de la même méthode, mais sous Latis-Pro. Pour cela, il faut aller dans la `Feuille de Calcul` et effectuer les commandes suivantes :

1. effectuer la conversion de tension vers angle à partir d'un étalonnage préalable : `theta = a + b * EA0;`
2. lisser la courbe et la centrer autour de zéro : `theta1 = Lissage(theta) - Moy(theta);`
3. détecter l'enveloppe des amplitudes d'oscillations, c'est-à-dire les maxima locaux supérieurs à 0,1 rad par exemple : `Env = CreteMaxi(theta1;0.1);`
4. repérer les temps de passage par zéro : `Tpas = Seuil(theta1,0;1);`
5. créer un vecteur rampe pour dériver les variables : `n = Rampe(1;10000;10000);`
6. calculer la période entre deux passages par zéro en dérivant (différence entre deux valeurs consécutives) : `Tper = Deriv(Tpas;n).`

La quantité `Tper` représente alors la période des oscillation, et `Env` l'amplitude correspondantes. On pourra effectuer une modélisation de la forme `Tor=T0*(1 + a*Env^2 + b*Env^4)` en faisant glisser la fonction tracée. Il faut parfois aider la modélisation à converger en donnant des valeurs pour les coefficients proches de ceux attendus.

En plus de l'analyse proposée dans la Réf. [4], nous proposons une étude énergétique de ce système.

> On propose de calculer l'énergie cinétique E_c, l'énergie potentielle E_p et l'énergie mécanique E_m du pendule (voir l'Exp. VI) en utilisant de nouveau la `Feuille de Calcul`, puis de les représenter en fonction du temps.

La décroissance exponentielle des oscillations est caractéristique des frottements fluides, qui sont donc le principal phénomène dissipatif que subit le pendule. Une réalisation expérimentale avec le matériel d'enseignement est visible Fig. A6.

Enfin, on mentionne que pour le portrait de phase, il est plus aisé de ne le représenter que sur quelques périodes d'oscillation mais à différents instants de l'expérience pour bien observer son évolution.

VIII. Pendule double-puits mécanique (*) [MPs 1, 2, 8 et 9]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [4] (pp. 487-489) pour la description de l'expérience.

IX. Gyroscope libre et déséquilibré [MPs 1 et 2]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [5] (pp. 289 à 320), ou bien à la Réf. [7] (pp. 178-186) pour la description de la théorie du gyroscope, et de manipulations possibles.

Liste du matériel :

- un gyroscope « à la Cardan » `P80.11`,
- une masselotte,
- une balance `P97.21`,
- un chronomètre `P96.56` (pour la détermination des moments d'inertie),
- un tachymètre `P96.2`,
- un laser `P5.13`,
- une diode à effet latéral `P18.1`,
- un oscilloscope.

Pour vérifier que le gyroscope est bien équilibré, on pourra effectuer l'expérience suivante.

> On propose de lancer le gyroscope équilibré, puis de changer la direction et l'orientation du support du gyroscope en déplaçant l'ensemble. Son moment cinétique doit rester constant et garder une direction fixe bien visible.

Pour la mesure des moments d'inertie, ceux-ci sont donnés dans la Réf. [5] pour le gyroscope de la collection : on attend $C = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ et $A = 3{,}7 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

Pour une première approche simple du gyroscope, on pourra observer la précession d'une toupie (`P80.18` est pratique) lorsque celle-ci est inclinée par rapport à la verticale.

X. Centrifugeuse [MPs 3 et 6]

Nous proposons ici de vérifier l'expression de la force centrifuge en mesurer l'élongation d'un ressort attaché à une douille qui coulisse le long d'une tige, en fonction de la vitesse angulaire de rotation de la tige.

1. Mesures préliminaires

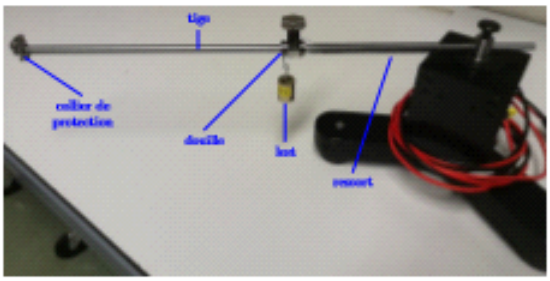
Avant toute expérience il serait préférable de mesurer la raideur du ressort et la masse totale de la douille coulissante avec ses accessoires.

Pour mesurer la raideur du ressort, on peut suspendre le ressort verticalement et lui attacher des masselottes de masse m connue tout en mesurant la longueur x du ressort. La régression affine

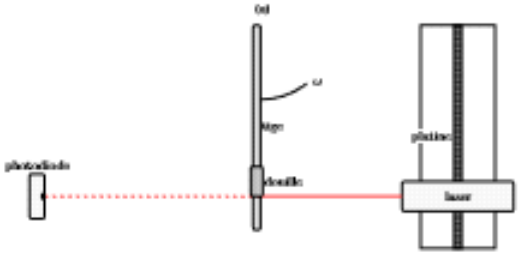
$$mg = k(x - x_0) \tag{10}$$

donne la raideur k grâce à la pente et la longueur à vide x_0 grâce à l'ordonnée à l'origine. Le ressort fourni avec le matériel est de raideur $k = (10{,}9 \pm 0{,}2)\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$.

La masse de la douille non lestée et de ses accessoires, c'est-à-dire de l'ensemble (douille + collier de serrage + joints + crochet) est $m_0 = (28{,}66 \pm 0{,}02)\,\mathrm{g}$. Pour l'expérience, on pourra lester la douille avec une masselotte d'environ 50 g. On notera m la masse de l'ensemble.



(a)



(b)

FIGURE 4 – (a) Dispositif tournant : le long d'une tige mise en rotation par un moteur coulisse une masse reliée à un ressort fixé au centre de rotation (ici la vis de fixation de la tige sur l'axe tournant du moteur). La masse comprend une douille à roulements à billes, un joint servant à fixer une extrémité du ressort, et un collier de serrage muni d'un crochet pour lester la douille. Une bague de serrage est ajoutée à l'extrémité de la tige pour des raisons de sécurité. (b) Un laser fixé à une platine de translation graduée permet de repérer la position de la masse coulissante et de mesurer la période de rotation.

2. Matériel de base

L'expérience se compose d'une tige rotative animée par un moteur, d'une douille coulissante et de ses accessoires, d'un ressort fixée à un joint de la douille à l'une de ses extrémités, l'autre extrémité étant fixée à la vis de serrage du moteur, enfin d'une alimentation continue pour le moteur (comme l'alimentation P53.2).

La tension imposée par l'alimentation permet de mettre le moteur en route et contrôle la vitesse angulaire de rotation de la tige, notée ω. Lorsque la vitesse de rotation augmente, la douille s'éloigne du centre de rotation et s'équilibre à une distance ℓ du centre de rotation, telle que les forces de rappel du ressort $F_r = k(\ell - \ell_0)$ et centrifuge $F_c = m\omega^2\ell$ se compensent, soit lorsque

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{k}{m}\frac{\ell_0}{\ell}. \tag{11}$$

La régression affine de ω^2 en fonction de $1/\ell$ donne une pente de valeur $-\ell_0 k/m$ et une ordonnée à l'origine k/m.

3. Réalisation de l'expérience

a. Méthodes de mesure

Mesurer la vitesse angulaire de rotation de la tige et surtout l'élongation du ressort pose problème puisque l'ensemble est en mouvement. Une possibilité est de filmer la trajectoire de la douille puis de déterminer la période de rotation T à partir de la périodicité du film, et de traiter un des clichés sur ImageJ pour mesurer l'abscisse ℓ de la douille le long de la tige. Cette méthode a l'inconvénient d'être chronophage.

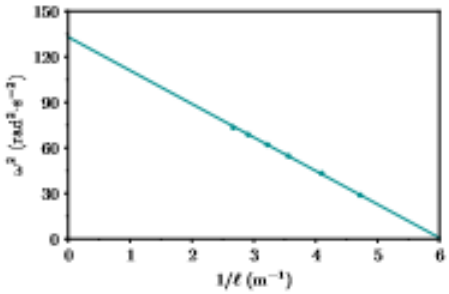


FIGURE 5 – Les points expérimentaux vérifient la loi affine $\omega^2 = b - a/\ell$ avec $b = (1{,}33 \pm 0{,}02) \times 10^2\,\mathrm{rad}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$ et $a = (2{,}21 \pm 0{,}03) \times 10^1\,\mathrm{rad}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{m}$.

Un méthode alternative consiste à envoyer un faisceau laser sur le bord du collier de serrage (ou de tout autre accessoire lié rigidement à la douille) pour repérer sa position et la période de rotation. Le faisceau laser est fixé à hauteur du collier de serrage sur une platine de translation, elle-même visée sur un breadboard qui assure l'immobilité de la platine. Lorsque la tige est en rotation, il suffit de translater le laser avec la platine de sorte à ce que le faisceau intercepte périodiquement le bord du collier de serrage. On lit ensuite la position de la douille (à une constante additive près) sur les graduations de la platine. À noter que ce qu'il faut repérer, en toute rigueur, est la position du centre de masse de l'ensemble constitué de la douille et de ses accessoires.

Cette méthode sert aussi à mesurer la période de rotation. Une fois le faisceau laser réglé pour frapper le bord du collier, placer une photodiode derrière le faisceau, et relier la sortie analogique de la photodiode à un oscilloscope. Le faisceau laser est partiellement occulté pendant un court instant une fois par période, ce qui permet de mesurer la période T sur le signal à l'oscilloscope, puis d'en déduire la vitesse angulaire $\omega = 2\pi/T$.

4. Conseils pratiques et résultats

- Pour minimiser les frottements solides au maximum, il est conseillé de lubrifier la tige avec un dégraissant en spray (de type WD40).
- Des frottements solides seront toujours présents. Afin d'obtenir les meilleures mesures possibles, il préférable de varier la pulsation dans un seul sens (soit croissante, soit décroissante, cela évite les effets d'hystérésis) et de ne pas prendre de points pour les très faibles pulsations.
- L'emploi d'un laser nécessite certaines précautions : toujours placer un écran derrière pour arrêter le faisceau au-delà de la paillasse, ne pas porter de montre ou tout objet réfléchissant, etc.

Les résultats de mesure sont présentés sur la Fig. 5. L'ordonnée à l'origine attendue est

$$\frac{k}{m} = 1{,}29 \times 10^2\,\mathrm{rad}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}, \tag{12}$$

en accord avec la valeur mesurée. La pente a donne accès à la distance du centre de la douille au centre de rotation au repos,

$$\ell_0 = \frac{am}{k} = 160\,\mathrm{mm}, \tag{13}$$

que l'on peut relier à la longueur à vide du ressort x_0 en estimant la position du centre de la masse coulissante par rapport à son point de fixation au ressort.

RÉFÉRENCES

[1] R. Andreotti, Y. Forterre et O. Pouliquen, *Les milieux granulaires : entre fluide et solide*, EDP Sciences (2011).

[2] R.Duffait, « Étude expérimentale des oscillateurs mécaniques », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 86/(1) (2004).

[3] R. Duffait, *Expériences de Physique - CAPES de sciences physiques*, Bréal (2008).

[4] M. Fruchart, P. Lidon, E. Thibierge, M. Champion et A. Le Diffon, *Physique expérimentale. Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, De Boeck Supérieur (2016).

[5] Jolidon, *Physique expérimentale - Optique, magnétisme, électrotechnique, mécanique, thermodynamique et physique non linéaire*, EDP Sciences (2021).

[6] L. Petit, « *Sustentation d'un mobile autoporteur sur une table à coussin d'air ou heureusement que l'air est visqueux* », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 685 (1986).

[7] L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale. Tome I : la mécanique*, Pierron (2002).

Exemples de résultats expérimentaux

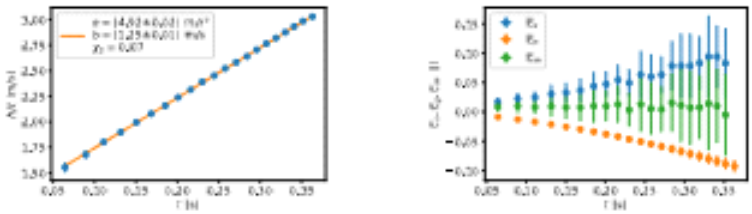


Figure A1 – Exemple de mesure de la hauteur h de chute en fonction du temps t_c de chute. On a également représenté à droite l'évolution des différentes énergies cinétique E_c, potentielle E_p et mécanique E_m en fonction du temps (voir l'Exp. I). © *R. Braun / J. Delacour*

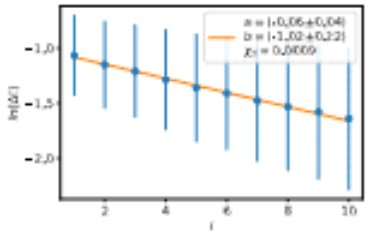


Figure A2 – Exemple de mesure du coefficient de restitution d'une balle de ping-pong sur une paillasse (voir l'Exp. II). © *R. Braun / J. Delacour*

Figure A3 – Exemple de mesure de la loi des aires dans le cas d'un mouvement à force centrale d'un mobile autoporteur sur table à coussin d'air (voir l'Exp. IV).

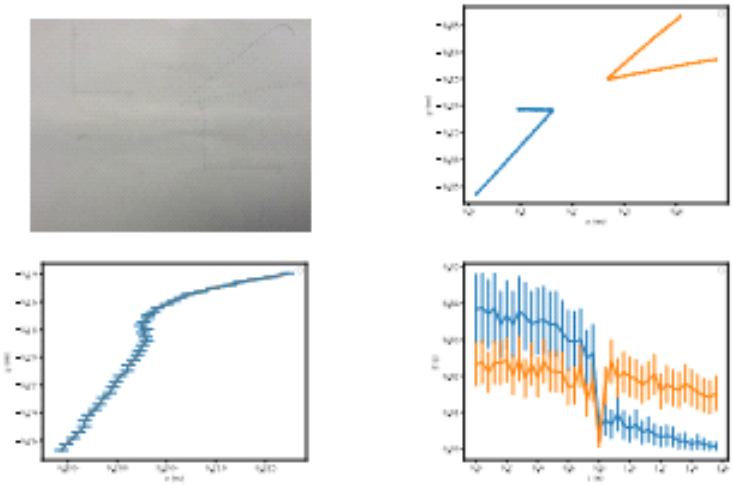


FIGURE A4 – Exemple d'expérience de choc élastique entre deux mobiles autoporteurs sur table à coussin d'air (voir l'Exp. V) : enregistrement, trajectoires des mobiles, trajectoire du centre d'inertie de l'ensemble, énergies. © *J. Delescut / R. Bouan*

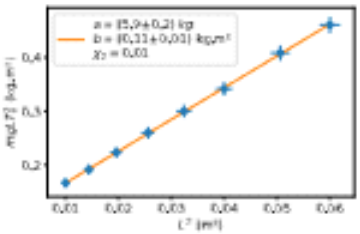


FIGURE A5 – Exemple d'expérience de mesure de la période du pendule pesant pour différentes distances L d'une masselotte au point d'attache dans l'approximation des petits angles (voir l'Exp. VI). À gauche : ajustement affine de $MgLT_0^2$ en fonction de L^2, qui permet de remonter à la valeur de $J_0 = b/4\pi^2 = (2.8 \pm 0.2) \times 10^{-3}$ kg.m². © *R. Bouan*

FIGURE A6 – Exemple d'expérience de mesure des énergies cinétique, potentielle et mécanique du pendule pesant au-delà de l'approximation des petits angles (voir l'Exp. VII).

Oscillateurs et ondes mécaniques

Table des expériences

I.	Pendules pesants couplés par un fil de torsion [MPs 2, 55 et 56]	22
II.	Système de masses couplées [MPs 54, 55 et 56]	25
III.	Couplage d'oscillateurs en électronique [MPs 50, 51, 54, 55 et 56]	28
IV.	Corde de Melde [MPs 30, 54, 55 et 56]	34
V.	Vibration en flexion d'une lame de scie (*) [MPs 35 et 55]	36
VI.	Synchronisation de métronomes (*)	36

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pourvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

Au cours de ce TP, nous allons étudier différents oscillateurs mécaniques couplés. Nous verrons qu'un couplage linéaire modifie les modes propres de vibrations d'un système, à travers l'augmentation du nombre de ses degrés de liberté. Puis nous nous intéresserons à un exemple de couplage non-linéaire d'oscillateurs.

Rappelons qu'une étude d'oscillateurs couplés en électronique est proposée dans le TP 7 du fascicule d'électronique. Les équations régissant ces systèmes étant identiques, il est possible de réaliser des analogies entre ces domaines.

Attention également à ne pas confondre la résonance d'un système avec l'étude de ses modes propres. La résonance correspond à un transfert maximal d'énergie entre un excitateur extérieur et le système. Tandis que l'étude des modes propres consiste uniquement à chercher des solutions stationnaires harmoniques à un système d'équations, sans apport d'énergie extérieur.

I. Pendules pesants couplés par un fil de torsion [MPs 2, 55 et 56]

1. Équations du mouvement

Nous proposons de réaliser l'expérience suivante, schématisée Fig. 1. Elle consiste en l'étude de deux pendules pesants couplés par un fil de torsion. La réalisation expérimentale de ce dispositif est décrite dans la Réf. [3]. La mise en équation de ce problème est proposée [1] dans la Réf. [1] (p. 34).

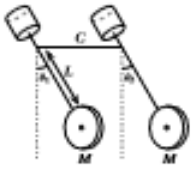


Figure 1 – Pendules pesants couplés par un fil de torsion.

Nous supposons que les deux pendules sont parfaitement identiques. On note J_0 leur moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation et C la raideur du fil de torsion. Sur chacun des pendules, il est accroché une masse M à une distance L de l'axe de rotation. On note θ_1 et θ_2 les angles respectifs des tiges avec la verticale.

Le théorème du moment cinétique appliqué à chacun des pendules dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, et par rapport à l'axe du fil de torsion, donne pour ce système :

$$\begin{cases} (J_0 + ML^2)\ddot{\theta}_1 + MgL\sin\theta_1 = C(\theta_2 - \theta_1) \\ (J_0 + ML^2)\ddot{\theta}_2 + MgL\sin\theta_2 = C(\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (1)$$

1. Attention, dans cette référence bibliographique, le moment d'inertie J_0 du pendule n'est pas pris en compte, et il y a une racine carrée en trop dans les expressions des pulsations des modes symétrique et antisymétrique.

Dans l'approximation des petits angles, on aboutit au système d'équations couplées :

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = \dfrac{C}{J_0+ML^2}(\theta_2-\theta_1) \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_0^2\theta_2 = \dfrac{C}{J_0+ML^2}(\theta_1-\theta_2) \end{cases}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{J_0+ML^2}}, \tag{2}$$

avec ω_0 la pulsation propre de chacun des pendules.

En cherchant des solutions harmoniques à ce système, on aboutit à deux solutions :

- un mode symétrique de pulsation $\omega_s = \omega_0 = \sqrt{\dfrac{MgL}{J_0+ML^2}}$,
- un mode antisymétrique de pulsation $\omega_{as} = \sqrt{\omega_0^2 + \dfrac{2C}{J_0+ML^2}} = \sqrt{\dfrac{MgL+2C}{J_0+ML^2}}$.

En effet, on cherche une solution de la forme

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\theta_1^{(0)}\\ \theta_2^{(0)}\end{pmatrix} e^{i\omega t}, \tag{3}$$

et en réinjectant, on obtient le système

$$\begin{cases} \left(-\omega^2+\omega_0^2+\dfrac{C}{J_0+ML^2}\right)\theta_1^{(0)} - \dfrac{C}{J_0+ML^2}\theta_2^{(0)} = 0 \\ -\dfrac{C}{J_0+ML^2}\theta_1^{(0)} + \left(-\omega^2+\omega_0^2+\dfrac{C}{J_0+ML^2}\right)\theta_2^{(0)} = 0 \end{cases}. \tag{4}$$

Ce système admet une solution non trivialement nulle $\theta_1^{(0)} = \theta_2^{(0)} = 0$ à la condition que le déterminant du système s'annule, soit

$$\left(-\omega^2+\omega_0^2+\frac{C}{J_0+ML^2}\right)^2 = \left(\frac{C}{J_0+ML^2}\right)^2 \Longrightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + \frac{C}{J_0+ML^2} \pm \frac{C}{J_0+ML^2}, \tag{5}$$

ce qui coïncide avec les deux pulsations indiquées ci-dessus (car $\omega > 0$). Dans le cas où $\omega = \omega_s = \omega_0$, le système se met sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{C}{J_0+ML^2}\theta_1^{(0)} - \dfrac{C}{J_0+ML^2}\theta_2^{(0)} = 0 \\ -\dfrac{C}{J_0+ML^2}\theta_1^{(0)} + \dfrac{C}{J_0+ML^2}\theta_2^{(0)} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \theta_1^{(0)} = \theta_2^{(0)}, \tag{6}$$

ce qui correspond bien au mode symétrique. Dans le second cas $\omega = \omega_{as}$, le système se met sous la forme

$$\begin{cases} -\dfrac{C}{J_0+ML^2}\theta_1^{(0)} - \dfrac{C}{J_0+ML^2}\theta_2^{(0)} = 0 \\ -\dfrac{C}{J_0+ML^2}\theta_1^{(0)} - \dfrac{C}{J_0+ML^2}\theta_2^{(0)} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \theta_1^{(0)} = -\theta_2^{(0)}, \tag{7}$$

ce qui correspond bien au mode antisymétrique. De façon générique, on obtient que le mode symétrique est de pulsation inférieure à celle du mode antisymétrique. Par ailleurs, le système présente deux degrés de liberté, et donc deux pulsations propres. Cela est un théorème général : un oscillateur à N degrés de liberté présentera N pulsations propres. Cela sera également illustré dans l'expérience suivante (pour $N = 4$).

Liste du matériel :

- le dispositif des deux pendules couplés par fil de torsion P79.21,
- un boîtier d'alimentation pour le capteur potentiométrique P42.39,
- un mètre ruban,
- une balance,
- un multimètre,
- un oscilloscope,
- une carte d'acquisition.

2. Expériences préparatoires

Avant de commencer l'étude des pendules, il est nécessaire de les équilibrer.

> On propose d'équilibrer séparément les deux pendules. Pour cela, on dévissera les deux mandrins qui serrent le fil de torsion pour découpler les deux pendules. On retirera également les barreaux et les masses fixés sur les pendules, à l'exception de la masselotte visée en haut de chaque tige. On ajustera alors la position des masselottes pour que chaque pendule soit dans une position d'équilibre à chaque angle.

En pratique, il est cependant difficile d'obtenir un équilibrage parfait.

Pour le dispositif sur lequel nous travaillons, l'angle de chaque pendule est mesuré à l'aide d'un capteur (boîtier blanc) potentiométrique, dont la sortie renvoie une tension proportionnelle à l'angle que fait le pendule avec la verticale. La sortie du potentiomètre est envoyé dans un circuit conditionneur comportant un montage soustracteur amplificateur par rapport à une résistance de référence (qui peut être modifiée par un second potentiomètre), et un filtre passe-bas. Il convient donc d'alimenter le capteur à l'aide d'un boîtier Γ 42 . 39.

> Si cela est possible, on propose de réaliser le zéro des capteurs angulaires, pour que la position verticale des tiges corresponde à des tensions nulles en sortie du capteur, que l'on mesurera à l'aide d'un multimètre. Si le capteur présente un gain variable, on prendra le gain au maximum pour chaque pendule pour augmenter la sensibilité de la mesure.
> Une fois le zéro des capteurs faits, on pourra les étalonner en mesurant pour chaque capteur la tension U_i pour différents angles θ_i. Cet étalonnage n'est pas fondamental si on ne cherche qu'à mesurer la pulsation des oscillations, et si le capteur est linéaire. Par contre, pour une étude énergétique, la calibration est nécessaire.

Dans notre cas, les capteurs sont linéaires, et on peut effectuer une régression affine de U_i en fonction de θ_i pour remonter au coefficient entre ces deux paramètres.

3. Études des oscillateurs en l'absence de couplage

L'étude des oscillations libres des pendules va nous permettre de déterminer le moment d'inertie J_0 de la tige. Il est préférable d'effectuer la mesure pour chacun des deux pendules. La dispersion sur la valeur de J_0 entre les deux pendules pourra alors être considérée comme une source d'incertitude sur la mesure de J_0.

> On propose d'accrocher un barreau avec une masselotte (500g par exemple) sur la tige d'un pendule, on appelle L la distance à l'axe de rotation (on la mesurera à l'aide d'un mètre-ruban) et M la masse du système (barreau + masselotte) (on la mesurera à l'aide d'une balance). On pourra alors lancer le pendule avec une amplitude faible (15° maximum) pour rester dans l'approximation des petits angles, puis mesurer la pulsation ω_0 à l'aide d'un oscilloscope, ce qui permettra de remonter à J_0. On pourra effectuer plusieurs mesures pour différentes valeurs de L pour rendre la mesure de J_0 plus robuste.

On pourra tracer MgL/ω_0^2 en fonction de L^2, et en déduire l'ordonnée à l'origine J_0 par régression affine (voir TP1 d'électronique). On doit obtenir $J_0 \simeq 0{,}069\,\mathrm{kg\cdot m^2}$.

4. Étude d'un oscillateur en présence de couplage

On peut ensuite mesurer la raideur du fil de torsion C en couplant les pendules et en maintenant la position d'un des pendules fixe.

> On propose de resserrer les mandrins qui serrent le fil de torsion à l'aide de la clé en maintenant les angles des pendules à $\theta_1 = \theta_2 = 0$. On peut alors maintenir bloquée la tige du second pendule sur $\theta_2 = 0$ pendant toute l'expérience, à l'aide de la pièce adaptée. On laissera la masselotte, ainsi que le barreau, sur la tige du pendule 1. Pour une ou plusieurs valeurs de distance L, on pourra ensuite lancer le premier pendule avec une amplitude faible puis mesurer la pulsation ω_C des oscillations.

Dans ce cas, l'équation qui régit l'oscillation du premier pendule prédit une pulsation propre

$$\omega_C = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{C}{J_0 + ML^2}} = \sqrt{\frac{MgL + C}{J_0 + ML^2}} \tag{8}$$

On pourra tracer $(J_0 + ML^2)\omega_C^2$ en fonction de L, et en déduire l'ordonnée à l'origine C par régression affine. On doit obtenir $C \simeq 0{,}34\,\mathrm{N\cdot m}$.

5. Étude des pendules couplés

Maintenant que le système a été étalonné, on peut étudier le couplage entre les deux pendules.

On propose d'accrocher sur chacun des deux pendules une même masse M à une même distance L de l'axe de rotation. On pourra alors donner un angle faible à l'une des tiges et maintenir l'autre à la verticale, puis lâcher les deux pendules pour les laisser évoluer librement. On pourra acquérir le signal aux bornes du capteur à l'aide d'une carte d'acquisition, puis effectuer la transformée de Fourier du signal pour en déduire les pulsations ω_s et ω_{as}. On pourra effectuer l'expérience pour différentes valeurs de L.

De façon générique, le mouvement se décompose sur les modes symétrique et antisymétrique, ce qui se traduit par un phénomène de battements. C'est donc pour cela qu'on lance le système avec une condition initiale qui ne coïncide pas avec l'un des deux modes, sous peine de n'exciter que ce mode.

La période d'échantillonnage doit être suffisamment faible devant la période d'oscillation dans le mode antisymétrique. Par ailleurs, la durée totale d'acquisition doit être suffisamment grande pour résoudre les deux modes. Ici, l'ordre de grandeur de la différence de fréquences entre les modes symétrique et antisymétrique est de l'ordre de 0,1 Hz, ce qui impose de faire une expérience de l'ordre de la minute pour bien résoudre les deux pics. Pour une expérience trop longue, on observe un élargissement du spectre dû à l'amortissement et aux non-linéarités (qui se couplent à l'amortissement fluide), ce qui peut induire une incertitude sur la mesure des pulsations propres. Il y a donc un compromis à faire.

Pour traiter l'expérience, on pourra tracer $1/(\omega_{as}^2 - \omega_s^2)$ en fonction de L^2 pour obtenir une droite de coefficient directeur $M/(2C)$ et d'ordonnée à l'origine $J_0/(2C)$. On pourra alors retrouver les valeurs de C et de J_0 par régression affine (voir TP1 d'électronique), et les comparer aux mesures précédentes. Un exemple de spectre obtenu expérimentalement, ainsi que l'évolution des différentes pulsations en fonction de L sont représentés Fig. A1.

On peut ensuite illustrer le rôle de la condition initiale dans la sélection des modes. En particulier, on peut exciter séparément chacun des deux modes. Cela vient du fait que, pour un couplage linéaire, il n'y a pas d'échange d'énergie entre les différents modes.

On pourra donner un même angle initial aux deux pendules, puis les lâcher pour qu'ils évoluent à partir de cette condition initiale. On pourra recommencer en leur donnant des angles opposés à l'instant initial. Dans les deux cas, on pourra calculer la transformée de Fourier du signal en sortie du capteur, et les comparer entre-elles et à celles de l'expérience précédente.

Dans le premier cas, on doit observer que seul le mode symétrique de pulsation ω_s est excité. Dans le second cas, on doit observer que seul le mode antisymétrique de pulsation ω_{as} est excité. Un exemple de spectres obtenus dans les deux situations est donné Fig. A2.

6. Étude énergétique (*)

L'énergie totale du système est la somme des énergies mécaniques de chaque pendule et de l'énergie de couplage, $E_{tot} = E_1 + E_2 + E_C$, avec :

$$\begin{cases} E_1 &= \frac{1}{2}(J_0 + ML^2)\dot{\theta}_1^{\,2} + MgL(1 - \cos\theta_1) \\ E_2 &= \frac{1}{2}(J_0 + ML^2)\dot{\theta}_2^{\,2} + MgL(1 - \cos\theta_2)\,. \\ E_C &= \frac{1}{2}C(\theta_1 - \theta_2)^2 \end{cases} \tag{9}$$

On pourra lancer les deux pendules à partir d'une condition initiale quelconque et réaliser une acquisition des deux signaux avec la carte d'acquisition. On pourra alors obtenir les valeurs d'angles à partir des valeurs de tensions grâce à la calibration faite précédemment. On pourra alors en déduire les énergies E_1, E_2, E_C et E_{tot} à l'aide d'une `Feuille de Calcul`. On pourra également lisser les courbes si besoin. Enfin, on pourra tracer les courbes et analyser les échanges d'énergie au cours d'une pseudo-période d'oscillation, ainsi que l'évolution de l'énergie totale au cours du temps.

L'amortissement peut être décrit par une exponentielle décroissante, les pendules sont donc principalement soumis à des frottements fluides, avec un facteur de qualité de l'ordre de 5.

II. Système de masses couplées [MPs 54, 55 et 56]

Nous proposons de réaliser décrite dans la Réf. [4] (pp. 490-502) (à laquelle nous renvoyons pour le protocole expérimental et la théorie associée), ainsi que dans la Réf. [2]. Un schéma de l'expérience est donné Fig. 2.

Liste du matériel :

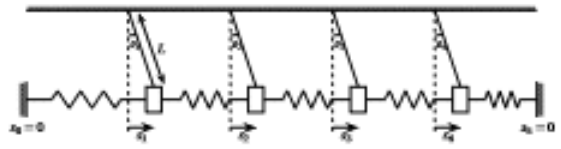


Figure 2 – Système de quatre masses couplées.

- le dispositif de quatre masses couplées par des ressorts `P79.22/1`,
- le dispositif VidéoCom `P17.14`,
- la caméra du dispositif VidéoCom `P17.14/2`,
- un trépied `P32.11` (demander une platine aux techniciens si besoin).

1. Étude des oscillations libres

Nous utilisons le même dispositif de détection des mobiles que dans la Réf. [4]. Le dispositif de détection est constitué de LEDs qui émettent des flashs lumineux à intervalles réguliers, et d'une barrette CCD qui détecte la position des masses grâce à des bandes réfléchissantes. Les LEDs doivent être alimentées en branchant le petit câble de la caméra sur le port LED sur le coté de celle-ci (les LEDs s'allument). La caméra devra être alimentée à l'aide de son adaptateur 12V et reliée à l'ordinateur par le câble USB.

Avant de faire l'expérience, il est recommandé d'effectuer des mesures préliminaires des masses M des mobiles, des constantes de raideur k des ressorts et des longueurs L des fils. Pour la mesure de la constante de raideur des ressorts, on pourra suspendre des masselottes et mesurer l'allongement relatif.

Expérimentalement, on s'attend à $M = 323$g, $k = 115$ N·m^{-1}, et $L = 33$cm.

Pour le traitement des données, nous utilisons le logiciel adapté au dispositif de détection, à savoir VidéoCom Mouvements.

Dans le menu `Réglage` et l'onglet `Généralités`, on indiquera le raccordement choisi (USB) dans `Raccord Série`, puis dans l'onglet `Spécifications` on sélectionnera la période d'échantillonnage Δt. On la prendra la plus basse possible pour pouvoir mesurer la plus grande gamme de fréquences.
On pourra ensuite ajuster la position de la caméra (éloignement, hauteur, orientation) pour détecter les quatre

- Bien éloigner la VideoCam pour bien voir les 4 masses
- Pour l'excitation, prendre pot vibrant p99,42/3
- Ampli 47,7/1
- GBF
- Fixer une tige au bout du pot, relier une masse et la tige via un ressort assez souple pour pas forcer la masse
- Mesurer les fréquences des modes propres en envoyant un bruit blanc (bandwidth autour de 20Hz, autour de 3V d'amplitude) mesurer longtemps pour avoir une bonne résolution fréquentiel
- Exciter les modes à basse amplitude (résonance !) avec les fréquences mesurées, et c'est beau !

- Si bruit blanc marche pas, faire un sweep assez lent BF autour des résonances, 1V mid range de l'ampli, bien faire gaffe au temps de réponse de la caméra

ments.

> Dans le menu `Réglage` et l'onglet `Généralités`, on indiquera le raccordement choisi (USB) dans `Raccord Série`, puis dans l'onglet `Spécifications` on sélectionnera la période d'échantillonnage Δt. On la prendra la plus basse possible pour pouvoir mesurer la plus grande gamme de fréquences.
> On pourra ensuite ajuster la position de la caméra (éloignement, hauteur, orientation) pour détecter les quatre masses, qui doivent apparaître à l'écran. On pourra également jouer sur le zoom et le diaphragme de la caméra, et placer un tissu noir derrière le système pour faciliter la détection.
> On pourra alors mettre les masses en mouvement à partir d'une condition initiale quelconque, par exemple en déplaçant l'une des masses par rapport à sa position d'équilibre. Cela permettra de réaliser un enregistrement avec VidéoCom pendant environ une minute en cliquant sur l'icône `Lancer/arrêter la mesure`. On pourra alors calculer le spectre des signaux obtenus (représentant la position de chacun des mobiles) : avec un clic droit, on sélectionnera `Calcul FFT`, puis on surlignera l'enregistrement d'une masse.

Le temps d'acquisition sur lequel est réalisé la FFT doit être judicieusement choisi pour bien mesurer les fréquences propres du système. Il faut trouver un compromis entre un temps suffisamment long pour obtenir une bonne résolution fréquentielle, mais suffisamment faible pour éviter un élargissement des pics. Cet élargissement a deux origines. D'une part l'amortissement linéaire du mouvement des pendules conduit à un élargissement des pics, dont la largeur est inversement proportionnelle au facteur de qualité. D'autre part les non-linéarités conduisent à une dépendance des pulsations propres du système avec l'amplitude du mouvement : couplées à l'amortissement du mouvement, cela induit un élargissement supplémentaire des pics.

Pour une condition initiale quelconque, on retrouve une superposition des quatre modes propres du système. Les trois premiers modes sont habituellement assez faciles à détecter, contrairement au quatrième dont l'amplitude est assez faible. On peut aussi donner plus d'amplitude à un mode propre particulier en utilisant une condition initiale proche de son vecteur propre (voir l'Éq. (13) pour leur expression).

2. Évolution avec le nombre de masses

En réduisant le nombre de masses constituant le système, on modifie les modes propres. Cela fait écho à ce qui a été dit précédemment, et notamment au fait qu'un oscillateur à N degrés de liberté aura N modes propres de vibration.

> On propose de faire varier le nombre de masses en fixant la position d'une masse à l'extrémité du système en la maintenant à l'aide d'un statif et d'une pince. On pourra alors enregistrer les oscillations libres des masses restantes pour une condition initiale quelconque, puis tracer la FFT des courbes et mesurer les trois pulsations propres du système.
> On pourra ensuite fixer la seconde masse, et recommencer l'expérience pour remonter aux deux pulsations propres du système constitué des deux masses mobiles restantes.
> On pourra enfin fixer la troisième masse, et recommencer l'expérience pour remonter à la pulsation propre d'un système à une seule masse.
> On pourra alors vérifier la loi générale qui donne les pulsations propres d'un système de N pendules (voir l'Éq. (10)).

On peut montrer que pour un système à N masses, les pulsations propres ω_p pour $p = 1, \ldots, N$ sont données par la relation

$$\omega_p^2 = \Omega_0^2 + 4\Omega_1^2 \sin^2\left[\frac{p\pi}{2(N+1)}\right], \tag{10}$$

avec $\Omega_0^2 = g/L$ et $\Omega_1^2 = k/M$. En effet, on utilise les équations données dans la Réf. [4] pour un système de N masses reliées par des ressorts [2] :

$$\ddot{s}_i = \Omega_0^2(s_{i+1} - 2s_i + s_{i-1}) - \Omega_0^2 s_i, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{11}$$

Avec $s_0 = s_{N+1} = 0$, le système se met sous forme matricielle :

$$\ddot{S} = (-\Omega_0^2 \mathbb{1} + \Omega_1^2 U)S, \quad S = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

On va alors rechercher des modes propres qui vérifient les conditions aux limites, soit

$$S^{(p)} = \bar{s}^{(p)} e^{i\omega t} \begin{pmatrix} \sin\left[\frac{p\pi}{N+1}\right] \\ \vdots \\ \sin\left[\frac{ip\pi}{N+1}\right] \\ \vdots \\ \sin\left[\frac{Np\pi}{N+1}\right] \end{pmatrix}, \quad p = 1, \ldots, N. \tag{13}$$

En réinjectant, on obtient (en supposant $\bar{s}^{(p)} \neq 0$)

$$-\omega^2 \sin\left[\frac{ip\pi}{N+1}\right] = \Omega_1^2 \left\{\sin\left[\frac{(i+1)p\pi}{N+1}\right] + \sin\left[\frac{(i-1)p\pi}{N+1}\right] - 2\sin\left[\frac{ip\pi}{N+1}\right]\right\} - \Omega_0^2 \sin\left[\frac{ip\pi}{N+1}\right], \tag{14}$$

soit

$$-\omega^2 = -\Omega_0^2 - 2\Omega_1^2\left[1 - \cos\left[\frac{p\pi}{N+1}\right]\right] \Longrightarrow \omega^2 = \omega_p^2 = \Omega_0^2 + 4\Omega_1^2 \sin^2\left[\frac{p\pi}{2(N+1)}\right]. \tag{15}$$

Pour vérifier expérimentalement l'Éq. (10), on pourra superposer sur une même courbe toutes les mesures de ω_p^2 en fonction de $\sin^2[p(\pi/2)/(N+1)]$ avec N le nombre de masses du système correspondant et p le numéro du mode propre. On pourra alors réaliser une régression affine pour remonter à Ω_0 et Ω_1, puis les comparer à leurs valeurs théoriques.

3. Étude des oscillations forcées

Nous voulons maintenant observer la résonance du système en excitant indépendamment chacun de ses modes propres par un apport continu d'énergie. En effet, la résonance du système correspond à un transfert d'énergie maximal entre le résonateur et l'excitateur. Si on ajoute un terme de forçage dans l'Éq. (11) de même pulsation qu'une des pulsations propres, la résolution des équations conduit à un terme divergent (c'est comme si on excitait un oscillateur harmonique non amorti à sa fréquence propre).

Liste du matériel :

- le dispositif de quatre masses couplées par des ressorts P79 , 22./1.

2. On notera l'erreur de signe dans la Réf. [4].

- le dispositif VidéoCom P17.14,
- la caméra du dispositif VidéoCom P17.14/2,
- un trépied P32.11 (demander une platine aux techniciens si besoin),
- la petite tige trouée à son extrémité P79.22/1,
- un vibreur P99.13,
- un support élévateur P25.0,
- un amplificateur de puissance P47.7,
- un générateur basses fréquences.

> Si le dispositif le permet, on propose d'exciter un des pendules situés aux extrémités du dispositif à l'aide d'un vibreur qu'on reliera à la masse à l'aide d'une tige. Pour cela, on inclinera le vibreur horizontalement et on le placera sur un support élévateur à la même hauteur que les pendules. On alimentera ensuite le vibreur avec la sortie d'un amplificateur de puissance commandé en entrée par un générateur basses fréquences qui fournit une tension sinusoïdale de quelques hertz et de 1 V. On réglera l'amplificateur sur un gain de 3 environ, puis on appuiera sur le bouton Reset pour générer la tension en sortie (la diode s'éteint). Attention, l'amplitude du vibreur ne doit pas être trop importante pour ne pas endommager le matériel! Si le vibreur produit des à-coups violents, il faut réduire le gain de l'amplificateur!
> Une fois ce dispositif mis en place, on pourra faire varier la fréquence du signal de commande du générateur basses fréquences, et observer l'amplitude des mouvements des pendules, ainsi que la direction du mouvement de chaque pendule.

On doit observer la résonance du système quand la fréquence d'excitation coïncide avec l'une des fréquences propres, et alors les pendules se déplacent selon le mode propre correspondant (voir la Réf. [4]).

III. Couplage d'oscillateurs en électronique [MPs 50, 51, 54, 55 et 56]

Nous proposons de réaliser les expériences suivantes, également décrites dans la Réf. [7] (pp. 106-112). On y illustre le couplage linéaire de deux oscillateurs *RLC*.

1. Couplage capacitif

On commence par étudier le couplage capacitif de deux circuits *RLC*. Ce couplage est intéressant car on contrôle facilement son intensité : il suffit d'utiliser un condensateur de capacité variable pour en changer la valeur.

Liste du matériel :
- deux bobines d'inductance $L = 10\,\mathrm{mH}$ P60.20,
- un condensateur de capacité $C_1 = 10\,\mathrm{nF}$,
- un condensateur de capacité variable C_2 P58.17,
- deux résistances $R_1 = R_2 = 50\,\Omega$,
- un condensateur de capacité variable C' P58.17,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope,
- une carte d'acquisition.

a. Accordage des deux résonateurs

Il convient de commencer par construire les deux circuits *RLC*, avant de les coupler ensuite.

> On propose de commencer par construire deux circuits *RLC* série. Le premier sera composé d'une bobine d'inductance $L_1 = 10\,\mathrm{mH}$, d'un condensateur de capacité $C_1 = 10\,\mathrm{nF}$, et d'une résistance $R_1 = 50\,\Omega$. Le second sera constitué d'une bobine d'inductance $L_2 = 10\,\mathrm{mH}$, d'un condensateur de capacité C_2 variable, et d'une résistance $R_2 = 50\,\Omega$. On pourra faire les deux circuits sur deux plaquettes différentes pour clarifier le montage.

Les valeurs des composants $L_{1,2}$ et $C_{1,2}$ sont choisies de telle sorte d'obtenir des fréquences $f_0 = 1/(2\pi\sqrt{L_{1,2}C_{1,2}})$ caractéristiques de l'ordre de 10 kHz. En outre, la résistance est mise dans le circuit afin de pouvoir observer la résonance en intensité des circuits *RLC*, qui se produit exactement à f_0. On rappelle que dans un circuit *RLC*, les tensions aux bornes des condensateur et bobine ne présentent pas de résonance (au sens d'un transfert de puissance maximal entre l'excitateur et le résonateur). Au mieux, si le facteur de qualité est suffisamment élevé, on aura un maximum d'amplitude pour une fréquence

différente de f_0, mais il ne s'agit pas d'une résonance. En effet, pour l'exemple de la tension aux bornes du condensateur, on a que la puissance instantanée reçue est

$$\mathcal{P} = Cu\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right). \tag{16}$$

La puissance est ainsi une dérivée exacte, et par conséquent sa valeur moyenne sur une période est nulle : il n'y a donc en moyenne aucun transfert d'énergie entre le générateur et le condensateur (ou la bobine) !

On souhaite maintenant accorder ces deux circuits. Il s'agit de repérer la fréquence de résonance d'un circuit et d'ajuster la capacité du deuxième afin d'obtenir sa résonance à la même fréquence.

> On propose d'appliquer au circuit 1 une tension sinusoïdale d'amplitude de l'ordre du volt et de fréquence de l'ordre de 10kHz avec un GBF (voir Fig. 3). On pourra alors observer à l'oscilloscope la tension e aux bornes du GBF et la tension s aux bornes de la résistance s. On fera alors varier la fréquence de telle sorte à observer la résonance, et on relèvera la fréquence correspondante. Pour cela, on se placera en mode XY, et on cherchera quand on observe une droite, signe que les signaux en entrée et en sortie sont en phase.

En effet, pour un filtre passe-bande RLC (correspondant à l'étude de la résonance en intensité), la phase de la fonction de transfert est nulle à la résonance.

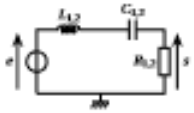


FIGURE 3 – Circuit pour l'étude de la résonance des deux circuits RLC.

On va maintenant accorder le deuxième circuit.

> On propose maintenant d'alimenter le second circuit RLC avec le même GBF sans changer la fréquence. On fera alors varier la capacité C_2 jusqu'à observer la résonance (et donc une droite en mode XY).

À la fin de ces manipulations, les deux oscillateurs sont accordés, et on a alors $L_1C_1 = L_2C_2$.

b. Excitation asymétrique des deux oscillateurs

On propose de coupler les deux oscillateurs à l'aide d'un condensateur de capacité variable Γ. L'objectif est d'étudier comment les pulsations de résonance des deux oscillateurs couplés sont modifiées par la présence du couplage, comme cela a déjà été abordé dans l'Exp. I pour les modes propres d'un système mécanique composite. Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'Exp. IV, pour les systèmes décrits par un système d'équations différentielles sans dissipation, et auquel on ajoute un terme de forçage dans le second membre, les pulsations de résonance coïncident avec celles des modes propres.

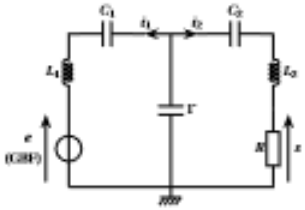


FIGURE 4 – Circuit pour l'excitation asymétrique du système couplé.

> On propose de réaliser le circuit de la Fig. 4 afin de déterminer la fonction de transfert des deux oscillateurs couplés par la méthode de la réponse indicielle. On pourra commencer par une valeur de capacité $\Gamma = 10\mathrm{nF}$. On pourra alors solliciter le circuit avec un signal créneau basse fréquence de l'ordre de la dizaine de hertz et d'amplitude de l'ordre de quelques volts. On fera alors l'acquisition de la tension s avec une carte d'acquisition

> (10 000 points pendant 20 ms). On pourra synchroniser le déclenchement de l'acquisition avec un front montant du signal aux bornes du GBF. Une fois l'acquisition réalisée, on pourra alors lisser le signal, le dériver et calculer son spectre de Fourier.
> On pourra enfin reproduire l'expérience pour différentes valeurs de Γ entre 5 mF et 50 mF pour étudier comment évolue la fonction de transfert en fonction de l'amplitude du couplage entre les deux circuits.
> On pourra également analyser la réponse directement dans le régime temporel.

La résistance R_1 a été remplacée par l'impédance interne du GBF qui a la même valeur.

On doit observer que la fonction de transfert des deux oscillateurs couplés présente deux maxima, correspondant aux deux pulsations de résonance du système couplé. De façon équivalente, on doit observer des battements dans le régime temporel.

Pour décrire quantitativement l'expérience, on établit que les équations différentielles donnant l'évolution des courants i_1 et i_2 dans chacun des circuits sont

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 i_1}{dt^2} + \omega_0^2 R_1 C_1 \dfrac{di_1}{dt} + \omega_0^2\left(1+\dfrac{C_1}{\Gamma}\right) i_1 + \omega_0^2 \dfrac{C_2}{\Gamma} i_2 = -\omega_0^2 C_1 \dfrac{de_g}{dt} \\ \dfrac{d^2 i_2}{dt^2} + \omega_0^2 R_2 C_2 \dfrac{di_2}{dt} + \omega_0^2\left(1+\dfrac{C_2}{\Gamma}\right) i_2 + \omega_0^2 \dfrac{C_2}{\Gamma} i_1 = 0 \end{cases}, \tag{17}$$

où e_g désigne la force électromotrice délivrée par le GBF ($e_g = e - R_1 i_1$), et où $\omega_0 = 1/\sqrt{L_1 C_1} = 1/\sqrt{L_2 C_2}$ (les circuits ayant été au préalable accordés). Les équations différentielles sont alors couplées via la capacité Γ. On parle ici de couplage capacitif ou élastique, car le terme de couplage fait intervenir les dérivées d'ordre 0 des degrés de liberté.

En termes d'ordres de grandeur, on a que $R_1 C_1 \omega_0 = R_2 C_2 \omega_0 = 5 \times 10^{-2}$. Pour $\omega = \omega_0$, on peut négliger l'influence des résistances dans le calcul de la fonction de transfert, et on aboutit à

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S}(j\omega)}{\underline{E_g}(j\omega)} = \frac{j\omega \dfrac{R_1 C_1 C_2}{\Gamma}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\left(1+\dfrac{C_1+C_2}{\Gamma}-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}, \tag{18}$$

où $\underline{H}(j\omega)$ désigne la fonction de transfert, $\underline{S}(j\omega)$ la transformée de Fourier de la tension $s(t)$, et $\underline{E_g}(j\omega)$ celle de la tension $e_g(t)$.

On prédit donc deux résonances aux pulsations

$$\omega_{ps} = \omega_0, \quad \omega_a = \omega_0\sqrt{1+\frac{C_1+C_2}{\Gamma}} = \omega_0\sqrt{1+2K}. \tag{19}$$

On définit le coefficient adimensionné du couplage par $K = (C_1+C_2)/(2\Gamma)$. Il peut varier entre 0 et $+\infty$: nous verrons que ce n'est pas le cas pour le couplage par inductance mutuelle.

Il convient de faire plusieurs remarques concernant ce développement.

- En premier lieu, le calcul précédent prédit une divergence de la tension aux bornes de la résistance R_2 à la résonance, ce qui ne se produit pas en pratique du fait de la prise en compte de la dissipation par effet Joule.
- Les pulsations sont appelées ω_s et ω_{as} car elles correspondent aux pulsations propres des modes symétrique (i_1 et i_2 en phase) et antisymétrique (i_1 et i_2 en opposition de phase) respectivement (pour l'orientation de i_1 et i_2 choisie Fig. 4).
- Le couplage conduit génériquement à une levée de dégénérescence des pulsations propres (et de résonance).
- Les approximations faites ne sont en toute rigueur correctes que si $\omega \approx \omega_0$, ce qui impose que le coefficient de couplage vérifie $K \ll 1$.
- Si on fait le calcul complet en tenant compte des résistances R_1 et R_2, on trouve que les pulsations de résonance sont décalées par rapport aux expressions données par l'Éq. (19), et se rapprochent l'une de l'autre. L'accord avec ces dernières sera alors d'autant meilleur que le facteur de qualité des oscillateurs est grand.

On peut maintenant revenir sur le choix des paramètres d'acquisition. On a choisi le temps d'échantillonnage de telle sorte que la fréquence d'échantillonnage soit suffisamment grande devant la plus grande fréquence de résonance. Quant à la durée totale T d'enregistrement (correspondant à une demi-période du signal créneau), elle doit être suffisamment grande pour que la résolution fréquentielle lors du calcul du spectre permette de séparer les deux pics de résonance (cela dépend de l'écart entre les deux fréquences de résonance, mais aussi de la largeur de chaque pic de résonance qui est reliée au facteur de qualité). On constate que cette condition est d'autant plus difficile à vérifier que le couplage diminue (que Γ augmente). Cela peut être vu comme un « critère de Rayleigh », exactement comme en diffraction.

Pour un traitement quantitatif de l'expérience, on pourra tracer ω_s^2 et ω_{as}^2 en fonction de $1/\Gamma$ et effectuer des régressions affines. On doit obtenir deux droites de pente $1/L_1 + 1/L_2$ et de pente nulle respectivement. Un exemple de réalisation expérimentale avec le matériel d'enseignement est présenté Fig. 11.

c. Observation du mode symétrique

On peut changer l'excitation de telle sorte de ne plus observer qu'une seule résonance, correspondant à l'excitation du mode symétrique de pulsation ω_s.

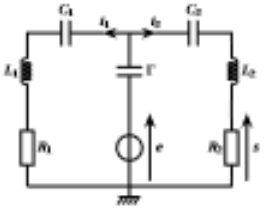


FIGURE 5 – Circuit pour l'excitation symétrique du système couplé.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 5, en commençant avec $\Gamma = 400\,\mathrm{nF}$, puis en diminuant Γ. Comme précédemment, on pourra appliquer une tension créneau et mesurer la tension aux bornes de l'une des deux résistances. On pourra là encore remonter par réponse indicielle au module de la fonction de transfert.

On ne doit plus observer qu'un seul maximum, dont la fréquence dépend de la valeur du couplage $1/\Gamma$, et coïncide avec celle du mode symétrique donnée par l'Éq. (19).

> On pourra ensuite observer à l'oscilloscope les tensions aux bornes des deux résistances lorsqu'on émet avec le GBF un signal sinusoïdal de fréquence proche de la fréquence de résonance.

On doit alors observer qu'elles sont en phase (pour l'orientation des courants choisie Fig. 5), c'est pourquoi on parle de mode symétrique.

Pour comprendre les résultats obtenus expérimentalement, on peut établir de nouveau les équations caractéristiques du circuit, qui sont

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 i_1}{dt^2} + \omega_0^2(R_1 + R_{GBF})C_1\dfrac{di_1}{dt} + \omega_0^2 R_{GBF}C_1\dfrac{di_2}{dt} + \omega_0^2\left(1+\dfrac{C_1}{\Gamma}\right)i_1 + \omega_0^2\dfrac{C_1}{\Gamma}i_2 = \omega_0^2 C_1\dfrac{de_0}{dt} \\ \dfrac{d^2 i_2}{dt^2} + \omega_0^2(R_2 + R_{GBF})C_2\dfrac{di_2}{dt} + \omega_0^2 R_{GBF}C_2\dfrac{di_1}{dt} + \omega_0^2\left(1+\dfrac{C_2}{\Gamma}\right)i_2 + \omega_0^2\dfrac{C_2}{\Gamma}i_2 = \omega_0^2 C_2\dfrac{de_0}{dt} \end{cases}, \tag{20}$$

où R_{GBF} désigne la résistance interne du GBF et e_0 sa force électromotrice. Après passage dans le domaine de Fourier, on peut obtenir la fonction de transfert, qui se simplifie dans l'hypothèse où $R_1 = R_2 = R_{GBF} = R$ et $C_1 = C_2 = C$ (ce qui est le cas expérimentalement) :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + \dfrac{2C}{\Gamma} - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2} + 3j\omega RC}, \tag{21}$$

et le système présente une unique pulsation de résonance, égale à ω_s.

2. Couplage inductif par inductance mutuelle

Nous proposons maintenant d'étudier le couplage inductif entre deux circuits RLC. Ce couplage a l'avantage d'effectuer une levée de dégénérescence des pulsations de résonance différente du couplage capacitif. Par contre, il a l'inconvénient de ne pas permettre de contrôler aussi facilement que précédemment l'intensité du couplage, puisque l'inductance mutuelle M n'est pas facilement mesurable.

Liste du matériel :

- deux rhéostats de résistance $R_1 \simeq R_2 \simeq 33\,\Omega$ P61.3,
- deux bobines du dispositif de Helmholtz P64.18,
- un condensateur de capacité $C_1 \simeq 10\,\mathrm{nF}$,
- un condensateur de capacité variable C_2 P58.17,

- un amplificateur de puissance HSA 4005 P 4 7 . 6 ou 4011 P 4 7 . 5,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope,
- une carte d'acquisition.

Ces expériences sont a priori plus difficiles que celle du couplage capacitif, car le couplage par induction mutuelle est toujours assez faible et par conséquent le signal à l'induit (dans le second circuit) est facilement bruité. Pour avoir un couplage raisonnable, il faut une intensité importante dans le circuit inducteur (premier circuit) pour que le flux magnétique d'induction mutuelle dans l'induit soit conséquent. C'est pourquoi on utilise un amplificateur de puissance et des rhéostats de faible résistance (33Ω) à l'inducteur et à l'induit, comme sur la Fig. 7. Pour maximiser le flux, on présente les bobines face à face. On peut les mettre sur un banc optique pour pouvoir les écarter l'une de l'autre sans changer leur alignement, et pour pouvoir mesurer facilement la distance entre les deux. On peut aussi utiliser le dispositif des bobines de Helmholtz P 6 4 . 1 8. L'avantage de ces dernières est qu'elles sont fines : il est donc plus aisé de définir la distance d entre-elles.

> On propose de commencer par mesurer l'inductance des deux bobines plates au RLC-mètre. On pourra ensuite réaliser le circuit inducteur 1 avec un rhéostat d'environ 10Ω pouvant accepter plusieurs ampères, un condensateur de capacité $C_0 = 10\,\mathrm{nF}$ et une des bobines d'inductance de l'ordre de quelques mH. Pour le circuit induit 2, on pourra prendre un second rhéostat de 10Ω pouvant accepter plusieurs ampères, un condensateur de capacité variable et la deuxième bobine (de même inductance que la première, et qui doit avoir son axe confondu avec celle de la première bobine).

a. Accordage des circuits

On commence par accorder les deux circuits.

> On éloigne les deux bobines d'une vingtaine de centimètres pour découpler les deux circuits. On réglera alors la capacité du condensateur du circuit induit pour accorder les deux circuits RLC selon la même méthode que pour le couplage capacitif (voir Fig. 3). Il n'y a pas besoin de l'amplificateur de puissance pour l'instant.

Avec les valeurs données, la fréquence de résonance est autour de 40kHz.

b. Étalonnage du coefficient d'inductance mutuelle en fonction de la distance

Le coefficient d'inductance mutuelle M est mal connu, et pour cela, il faut effectuer un étalonnage préalable en fonction de la distance d entre les deux bobines. On rappelle qu'il est défini par la relation

$$s = M\frac{di_1}{dt} \tag{22}$$

selon les notations de la Fig. 6.

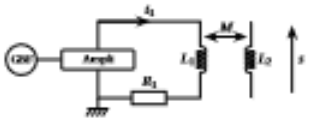


FIGURE 6 – Circuit pour l'étalonnage de M. Le signal émis par un GBF est amplifié à l'aide d'un amplificateur de puissance.

> On propose de réaliser le circuit de la Fig. 6. On rapprochera les deux bobines à quelques centimètres. On utilisera un amplificateur de puissance pour être moins sensible au bruit avec gain x10 (c'est le minimum). Celui-ci sera piloté par un GBF émettant un signal sinusoïdal d'amplitude d'1 V et de fréquence égale à la fréquence de résonance des deux circuits en l'absence de couplage. Le courant peut devenir important et les rhéostats présentent un courant maximal supportable (ici 3A) : on doit donc le surveiller.
> On pourra alors relever la valeur efficace du courant i_1 dans le circuit inducteur à l'aide d'un ampèremètre en mode AC, et la tension aux bornes de la bobine à l'induit s également en mode AC. On pourra alors en déduire M à partir de l'Eq. (22). On reproduira alors le protocole précédent pour différentes distances d entre les deux bobines, et tracer la courbe d'étalonnage.

En régime harmonique, on a simplement $M = s_{eff}/(\omega i_{1,eff})$, qui s'exprime en façon des valeurs efficaces de la tension s et du courant i_1 lues aux multimètres. On attend typiquement $M = 100\mu H$.

On choisit de travailler à une fréquence de l'ordre de 40kHz, car il s'agit de la fréquence de résonance des deux résonateurs en l'absence de couplage, et donc on sera amené à travailler autour de cette fréquence par la suite.

Enfin, en ce qui concerne la modélisation de la courbe d'étalonnage, un ajustement de la forme $M \propto 1/d^3$ fonctionne raisonnablement, mais c'est une loi phénoménologique. En effet, le calcul est impossible à mener puisque pour déterminer le flux, il faut connaître le champ magnétique partout dans l'espace et pas seulement sur l'axe. Un exemple de réalisation expérimentale est donné Fig. 19.

c. Fréquences de résonance

On peut maintenant étudier la résonance des deux circuits RLC couplés.

> Comme pour le couplage capacitif, on excite de manière asymétrique le système couplé selon le montage de la Fig. 7. Pour différentes distances d entre les bobines, on pourra faire l'acquisition de la tension aux bornes de la résistance de l'induit à l'aide d'une carte d'acquisition, et obtenir la fonction de transfert par la méthode de la réponse indicielle.

On doit alors observer que les résonances sont d'autant plus séparées que le couplage est fort, donc que les bobines sont rapprochées.

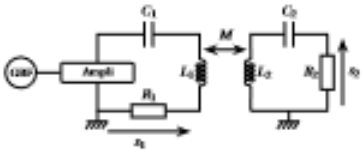


FIGURE 7 – Circuit pour l'excitation asymétrique des deux circuits couplés. Le signal aux bornes du GBF est amplifié au moyen d'un amplificateur de puissance.

Pour effectuer un traitement quantitatif de cette expérience, il faut décrire la dynamique des deux circuits couplés. Pour une approche théorique différente de celle que nous donnons ci-dessous, on renvoie le lecteur à la BSI. [9]. On établit les équations différentielles régissant l'évolution des courants i_1 et i_2 :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 i_1}{dt^2} + \dfrac{M}{L_1}\dfrac{d^2 i_2}{dt^2} + \dfrac{R_1}{L_1}\dfrac{di_1}{dt} + \dfrac{i_1}{L_1 C_1} = \dfrac{1}{L_1}\dfrac{de_0}{dt} \\ \dfrac{d^2 i_2}{dt^2} + \dfrac{M}{L_2}\dfrac{d^2 i_1}{dt^2} + \dfrac{R_2}{L_2}\dfrac{di_2}{dt} + \dfrac{i_2}{L_2 C_2} = 0 \end{cases}, \tag{23}$$

où e_0 le force électromotrice délivrée par l'amplificateur de puissance (sa résistance de sortie est négligeable devant les résistances présentes dans le circuit primaire). Les équations différentielles sont alors couplées via l'inductance mutuelle M. On parle ici de couplage inductif ou inertiel, car le terme de couplage fait intervenir les dérivées d'ordre 2 des degrés de liberté.

Le calcul de la fonction de transfert donne alors (avec toutes les amplitudes complexes des signaux temporels indiqués en majuscules)

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{S_2}(j\omega)}{\underline{S_0}(j\omega)} = -\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\,\frac{j\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\dfrac{K}{\sqrt{Q_1 Q_2}}}{\left[1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}(1-K)\right]\left[1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}(1+K)\right]-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2 Q_1 Q_2}+j\dfrac{\omega}{\omega_0}\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\left(\dfrac{1}{Q_1}+\dfrac{1}{Q_2}\right)}, \tag{24}$$

où $K = M/\sqrt{L_1 L_2}$ désigne le coefficient de couplage, $\omega_0^2 = 1/(L_1 C_1) = 1/(L_2 C_2)$, et où Q_1 et Q_2 désignent les facteurs de qualité des deux résonateurs, à savoir $Q_{1,2} = \sqrt{L_{1,2}/C_{1,2}}/R_{1,2}$. En termes d'ordre de grandeur, on a $Q_1 = Q_2 \approx 30$, et $K \approx 0,1$, et on peut donc négliger le terme en $1/(Q_1 Q_2)$ devant les autres termes au dénominateur de la fonction de transfert précédente. La

fonction de transfert peut être simplifiée en

$$\underline{H}(j\omega) = -\sqrt{\frac{R_2}{R_1}}\frac{j\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{K}{\sqrt{Q_1Q_2}}}{\left[1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}(1-K)\right]\left[1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}(1+K)\right]+j\frac{\omega}{\omega_0}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\left(\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_2}\right)}. \tag{25}$$

La recherche des extrema du module de la fonction de transfert conduit alors à l'équation

$$\left[1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}(1-K)\right]\left[1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}(1+K)\right]\left[3-2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-\frac{\omega^4}{\omega_0^4}(1-K^2)\right]+2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)\left(\frac{1}{Q_1}+\frac{1}{Q_2}\right)^2=0. \tag{26}$$

En regardant toujours les ordres de grandeur, on peut négliger le dernier terme, qui fait intervenir le carré des facteurs de qualité (comme cela a été fait plus haut). Les solutions approchées de cette équation sont alors les deux pulsations de résonance

$$\omega_\pm = \frac{\omega_0}{\sqrt{1\pm K}}, \tag{27}$$

qui sont séparées par la pulsation où se trouve le minimum de la fonction de la transfert

$$\omega_{min} = \omega_0\sqrt{\frac{\sqrt{4-3K^2}-1}{1-K^2}}. \tag{28}$$

Pour l'analyse quantitative des résultats, on pourra avantageusement tracer $1/\omega_\pm^2$ en fonction de M (pour les mêmes distances d pour lesquelles M aura été mesurée), qui doivent donner deux droites de pente $\pm\sqrt{L_1L_2}$ et d'ordonnée à l'origine $1/\omega_0^2=\sqrt{L_1L_2C_1C_2}$. Un exemple de réalisation expérimentale avec le matériel de la collection est donné Fig. 77.

Enfin, rappelons que $M<\sqrt{L_1L_2}$, de sorte que le coefficient de couplage K est toujours plus petit que 1 : le couplage est toujours faible et les résonances peu séparées.

IV. Corde de Melde [MPs 30, 54, 55 et 56]

1. Description du dispositif

Nous souhaitons réaliser l'expérience de Melde, schématisée Fig. 8, et également décrite dans la Réf. [7] (pp. 258-262). Elle est principalement utilisée pour étudier des ondes stationnaires. Elle peut aussi être assimilée à une infinité d'oscillateurs couplés.

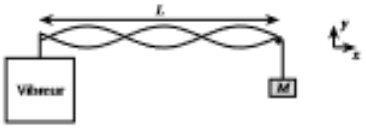


Figure 8 – Expérience de Melde.

Une extrémité de la corde est attachée à un vibreur, et l'autre est reliée à une masselotte par l'intermédiaire d'une poulie. La masselotte M impose une tension $T=Mg$ dans la corde. Le rôle / choix de cette masselotte est discuté ci-dessous. On note L la longueur et μ la masse linéique de la corde. En considérant des déformations faibles, et en négligeant l'influence de la pesanteur, on peut montrer que le déplacement vertical $y(x,t)$ de la corde obéit à une équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0, \tag{29}$$

avec $c=\sqrt{T/\mu}$ la célérité des ondes transverses. Pour de plus amples détails, nous renvoyons à la Réf. [1] (pp. 38-41). Il y a un certain nombre d'hypothèses dont il faut se souvenir pour arriver à cette modélisation :

- on suppose que la corde effectue des petits mouvements verticaux et on néglige les mouvements horizontaux, ce qui revient à dire que la corde est inextensible;
- on néglige l'élasticité de la corde, sa raideur est donc infinie et transmet l'intégralité de la tension;
- on suppose que la masse M est tellement grande qu'on peut négliger son accélération;
- on néglige l'influence de la pesanteur;

- on néglige toutes les sources d'amortissement (fluide, rayonnement acoustique, frottements solides au niveau des poulies, etc.).

On considère les conditions aux limites suivantes :

- en $x = 0$, le vibreur impose un déplacement $y(0, t) = a\cos(\omega t)$,
- en $x = L$, la corde repose sur la poulie d'où $y(L, t) = 0$.

En cherchant une solution sous la forme d'une onde stationnaire, on aboutit à une solution de la forme :

$$y(x, t) = a\frac{\sin[(L-x)\omega/c]}{\sin(L\omega/c)}\cos(\omega t), \tag{30}$$

et la corde entre en résonance lorsque l'amplitude diverge, c'est-à-dire pour des pulsations

$$\omega_n = n\frac{\pi c}{L}, \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{31}$$

Pour plus de détails sur ces éléments, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (pp. 48-49). On notera que ces pulsations de résonance coïncident avec les pulsations propres de la corde en régime libre quand elle est clampée en $x = 0$, *i.e.*, $y(0, t) = 0$.

En pratique, l'amplitude ne peut pas diverger à cause de l'élasticité de la corde et de la dissipation, qui n'ont pas été prises en compte dans ce modèle. Néanmoins, lorsque le système est excité à l'une de ses pulsations de résonance, l'amplitude du vibreur devient négligeable devant celle des ondes. On peut alors assimiler l'extrémité en $x = 0$ à un noeud de vibration, et n correspond au nombre de ventres sur la corde (le nombre de noeuds est alors égal à $n + 1$).

2. Mesure de la célérité des ondes

Liste du matériel :

- le dispositif de la corde de Melde constitué d'un vibreur, d'une cordelette et d'une poulie P92.12,
- un mètre ruban,
- une balance de précision P97.16,
- une masse $M = 100$g
- un amplificateur de puissance P47.7,
- un stroboscope P3.3,
- un fréquencemètre P69.5,
- un générateur basses fréquences.

Avant de commencer l'expérience, il faut mesurer la masse linéique de la corde utilisée.

> On propose de mesurer la longueur de la corde utilisée à l'aide d'un mètre-ruban, ainsi que sa masse à l'aide d'une balance de précision. On pourra alors en déduire sa masse linéique μ. On attend une valeur de l'ordre de $1\,\mathrm{g\,m^{-1}}$.

Il faut également considérer la manière dont on va réaliser expérimentalement l'application d'une force (idéalement constante) à l'extrémité de la corde située sous la poulie. Le dispositif suggéré consiste à attacher une masse M ; il faut alors discuter l'effet de l'accélération de cette masse, dû au mouvement de la corde, et la comparer à celle de la pesanteur. Un calcul immédiat de la variation de la longueur de la corde correspondant à une perturbation sinusoïdale d'amplitude (infinitésimale) a donne (à un facteur numérique ≈ 1 à discuter en fonction du nombre d'arches présentes...) $\Delta L \sim (a^2\omega^2/g) \times (\mu L/M)$. La discussion porte donc sur le rapport :

$$\frac{|\Delta T|}{T} \sim \frac{a^2\omega^4}{g^2}\frac{\mu L}{M}. \tag{32}$$

Une application numérique pour $a = 1$ cm, $\mu L = 2$ g, $L = 1$ m et $M = 100$ g montre que $|\Delta T|/T \ll 1$ si $\omega \ll 84$ rad/s, soit $f \ll 13$ Hz, à comparer à la fréquence du fondamental $f_0 = 11$ Hz. La condition est à peine satisfaite, et ce même pour le fondamental. Évidemment, on pourrait imaginer accrocher non pas une masse de $M = 100$ g mais plutôt quelque chose comme 2-5 kg, mais cela détériorerait à plus ou moins courte échéance le pot vibrant.

Un autre dispositif envisageable pour appliquer à la corde une tension (quasi-)constante consiste à fixer à l'extrémité libre un ressort. En notant $T = K(\ell - \ell_{\mathrm{eq.}})$ la force exercée par ce ressort, on a $\Delta L \sim a^2\omega^2 \times (\mu L/T)$, et la discussion porte désormais sur le rapport :

$$\frac{|\Delta T|}{T} \sim K\frac{a^2\omega^2\mu L}{T^2}. \tag{33}$$

Une application numérique pour $a = 1$ cm, $\mu L = 2$ g, $T = 1$ N (qui correspond au poids d'une masse de 100 g) et $K = 1$ N/cm (et donc un allongement du ressort égal à 1 cm) montre que $|\Delta T|/T \ll 1$ si $\omega \ll 223$ rad/s, soit $f \ll 35$ Hz, plus satisfaisante. À tension T fixée, la condition est d'autant plus facile à satisfaire que K est faible, *i.e.* que le ressort est "mou". C'est donc ce dispositif qui sera adopté par la suite. On peut accéder à la tension appliquée à la corde (le poids de la masselotte sur le schéma précédent) à l'aide d'un dynamomètre, en prenant évidemment soin de ne pas modifier l'allongement du ressort.

On peut maintenant réaliser l'expérience de Melde présentée Fig. 8.

On propose de relier une extrémité de la corde à un vibreur, en réalisant un nœud autour d'une vis (diamètre M4) fixée sur le vibreur. Le nœud doit être effectué au ras du noyau du pot vibrant (et non pas à l'extrémité de la vis). On reliera l'autre extrémité de la corde à un ressort de faible raideur et de grande longueur, que l'on suspendra avec une poulie placée à une distance $L \approx 1$ m du vibreur. La seconde extrémité du ressort est fixée "à la paillasse" par n'importe quel dispositif approprié (lest, système de pince-noix, ...). On alimentera alors le vibreur avec la sortie d'un amplificateur de puissance, commandé en entrée par un générateur basses fréquences qui fournit une tension sinusoïdale basse fréquence d'amplitude de l'ordre du volt. On réglera l'amplificateur sur un gain de 3 environ, puis on appuiera sur le bouton `Reset` pour générer la tension en sortie (la diode s'éteint). Attention, l'amplitude du vibreur ne doit pas être trop importante pour ne pas l'endommager ! Si le vibreur produit des à-coups violents, il faut réduire le gain de l'amplificateur!
Une fois ce dispositif mis en place, on peut augmenter progressivement la fréquence du générateur basses fréquences pour obtenir les premières pulsations de résonances ω_n de la corde. Pour vérifier que les fréquences de résonance correspondent bien à la fréquence imposée par le GBF, on pourra utiliser un stroboscope relié à un fréquencemètre. On réglera alors la fréquence des flashs sur celle des ondes.

On a tout intérêt à prendre une valeur plutôt grande de L pour pouvoir observer le plus de résonances possibles.

On utilise un stroboscope car la fréquence de vibration de la corde peut être différente de la fréquence imposée par le GBF en fonction de la position du vibreur. Pour plus de détails sur ce point, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [7].

À partir de la mesure de ω_n (au stroboscope et fréquencemètre) et de n (à partir du décompte du nombre de ventres), on peut effectuer une régression affine (se reporter au TP1 d'électronique) et remonter à la célérité des ondes acoustiques dans la corde. On peut alors comparer à la valeur attendue $c = \sqrt{Mg/\mu}$. Un exemple de réalisation expérimentale est montré Fig. A3.

En considérant que la corde de Melde est un milieu continu, on obtient un système avec une infinité de degrés de liberté, et donc une infinité de modes propres et de pulsations de résonance.

V. Vibration en flexion d'une lame de scie (*) [MPs 35 et 55]

Nous renvoyons à la Réf. [5] (pp. 271-288) pour la description de l'expérience, ainsi que de la théorie associée.

VI. Synchronisation de métronomes (*)

Il s'agit d'un exemple de couplage non linéaire entre oscillateurs. Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [8] pour une description théorique du problème, ainsi qu'une réalisation expérimentale. Nous reproduisons cependant le protocole ci-dessous (la Réf. [8] étant en anglais).

Liste du matériel :

- deux métronomes `P71.36`,
- une petite planche de bois `P25.1`,
- deux canettes vides `P71.39`.

Figure 9 – Synchronisation de deux métronomes.

Nous proposons de réaliser l'expérience schématisée Fig. 9. Pour cela, on prendra deux métronomes qu'on réglera sur une même fréquence élevée (de l'ordre de 200 battements par minute). On tournera les remontoirs du bas dans le sens des aiguilles d'une montre au maximum pour recharger les mécanismes. On placera ensuite une petite planche de bois sur deux cylindres (par exemple des boîtes de conserve) vides, puis on déposera les métronomes sur la planche, comme indiqué Fig. 9.
On lancera alors les deux métronomes avec une même amplitude mais déphasés l'un par rapport à l'autre. On peut alors observer l'évolution du déphasage entre les deux métronomes, ainsi que le mouvement du support.

On doit observer que les deux métronomes se synchronisent (on l'entend). Lorsque les phases sont synchronisées, la plaque oscille avec une grande amplitude et à la même fréquence que les métronomes. On observe parfois une synchronisation en opposition de phases des métronomes pendant quelques secondes, mais cet équilibre est assez instable.

On utilise une haute fréquence des métronomes, afin d'être moins sensible à une différence de fréquences éventuelle entre-eux, et donc pour observer plus facilement le phénomène de synchronisation.

Du point de vue théorique, on peut décrire l'évolution de ce système de façon simplifiée en assimilant les métronomes à des oscillateurs de Van der Pol (de degrés de liberté les angles θ_1 et θ_2 que font les pendules avec la verticale) dont les équations d'évolution font intervenir un terme de couplage non linéaire en $\dot{\theta}_1$ et $\dot{\theta}_2$ (voir la Réf. [6]). On montre alors par une analyse de stabilité que lorsque les deux métronomes oscillent en phase, ou en opposition de phase suivant les conditions expérimentales, cela correspond à un état stable du système.

La synchronisation en phase est possible grâce au couplage non linéaire complexe entre les métronomes. Une non-linéarité importante peut également faire apparaître une synchronisation en fréquence et en amplitude pour des métronomes différents, mais cela est plus difficile à observer (d'autant plus que la différence de fréquences des deux métronomes est initialement élevée).

Références

[1] J.-M. Brébec, J.-N. Bréflaut, P. Denève, T. Desmarais, A. Favier, M. Ménétrier, B. Noël, C. Omini, *H Prépa Ondes PC-PC* PSI-PSI**, Hachette Supérieur (1997).

[2] R.Duffait, « Étude expérimentale des oscillateurs mécaniques », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 86(1) (2004).

[3] A. Fouillé, « Appareil polyvalent pour l'étude des systèmes pendulaires », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 449 (1968).

[4] M. Fourhart, P. Lidon, E. Thibierge, M. Champion et A. Le Dillon, *Physique expérimentale. Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, De Boeck Supérieur (2016).

[5] Jolidon, *Physique expérimentale - Optique, magnétisme, électrotechnique, mécanique, thermodynamique et physique non linéaire*, EDP Sciences (2021).

[6] J. Pantaleone, « Synchronization of metronomes », *American Journal of Physics* 70(10) (2002).

[7] L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale. Tome I : la mécanique*, Pierron (2002).

EXEMPLES DE RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

FIGURE A1 – Exemple de spectre obtenu lors des oscillations de deux pendules par fil de torsion. L'évolution des deux pulsations propres en fonction de la longueur L est également représentée (voir l'Exp. I).

FIGURE A2 – Exemple de spectres obtenus lors des oscillations de deux pendules par fil de torsion lorsque la condition initiale correspond au mode symétrique (gauche) ou antisymétrique (droite) (voir l'Exp. I).

FIGURE A3 – Exemple de mesure des pulsations de résonance de la corde de Melde (voir l'Exp. IV).

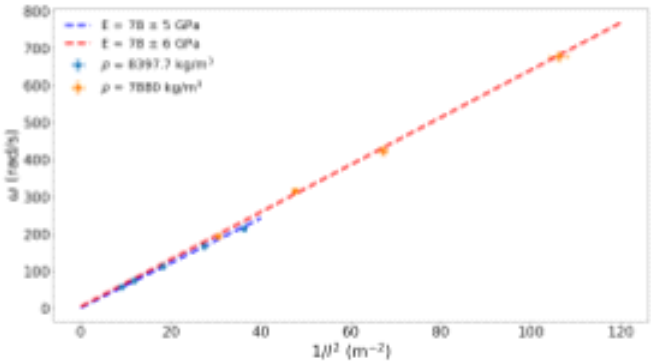


FIGURE A4 – Vibration d'une lame de métal, mesurée à l'aide d'un micro. J'ai réalisé l'expérience pour deux lames de dimension légèrement différentes et masses volumiques différentes. Je n'ai malheureusement pas les valeurs tabulées pour le module d'Young, mais l'ordre de grandeur semble correct. [script TP_agreg_lame_de_scie.py] © F. Pagaud

```
#
# TP_agreg_lame_de_scie.py
#
# Auteur: F. Pagaud (30/11/2022)
#
# Commentaires CM: si vous voulez que ce script parte aux oraux, il faudra le mettre en forme... : dire
#                  ce qu'il fait, comment il est utilisé, ..., bref, mettre des docstrings et des
#                  commentaires et lui donner un nom conforme aux attentes du jury, python_Blaise_Lyon.py
#
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib
import scipy.optimize as spo
matplotlib.rc('xtick', labelsize=24)
matplotlib.rc('ytick', labelsize=24)
matplotlib.rcParams.update({'font.size': 22})

## Fonction de fit

def fct(x,p):
    a,b = p
```

```
    return a*x+b

def Dx_f(x,p):
    a,b = p
    return a

def residual(p,y,x):
    return (y-fct(x,p))/np.sqrt(dy**2 + dfx_f(x,p)*dx)**2)

p0 = np.array([0,0])


##############################
## Lame de scie vibrante ##
##############################

e = 1.95e-3    #epaisseur de la poutre
delta_e = 0.05e-3   #erreur
e2 = 2e-3   #deuxieme poutre
delta_e2 = 0.05e-3   #erreur
C0 = 3.516  #premier mode propre


# Mesure de la résonance
#Protocole : Mesure a l'oscillo de la frequence propre en fonction de L, mesuree au reglet

#Barre en laiton (?),
rho = 8397.7
L = np.array([33.1, 29, 23.4, 19.1, 16.6])*1e-2
dx = 1e-3*np.ones(len(L))/Lx*3
f = np.array([8.98, 11.7, 17.9, 26.5, 36.1])*2*np.pi
dy = np.array([0.1, 0.2, 0.2, 1, 1])*2*np.pi

result = spo.leastsq(residual, p0, args=(f,1/Lx*2), full_output = True)
fit = result[0]
pcov = result[1]
upopt = np.sqrt(np.abs(np.diagonal(pcov)))
chi2r_1 = np.sum(np.square(residual(fit,f, 1/Lx*2)))/(L.size-fit.size)

E = (fit[0]*2*np.sqrt(3)/(C0*e))**2*rho
delta_E = E*np.sqrt((2*upopt[0]/fit[0])**2 + (2*delta_e/e)**2)
tat = e*E = {} $\pm$ {} GPa ".format(round(E/1e9), round(delta_E/1e9))
data_tat = e*2*rho$ = {} kg/m$^3$".format(rho)


#Barre en cuivre (?)
rho2 = 7800
L2 = np.array([12.2, 9.7, 14.5, 18.1])*1e-2
dx = 1e-3*np.ones(len(L2))
f2 = np.array([67.5, 100, 50.3, 30.8])*2*np.pi
dy = np.array([2, 2, 1, 1])*2*np.pi

result2 = spo.leastsq(residual, p0, args=(f2,1/L2**2), full_output = True)
fit2 = result2[0]
pcov2 = result2[1]
upopt2 = np.sqrt(np.abs(np.diagonal(pcov2)))
chi2r_2 = np.sum(np.square(residual(fit2,f2, 1/L2**2)))/(L2.size-fit2.size)

E2 = (fit2[0]*2*np.sqrt(3)/(C0*e2))**2*rho2
delta_E2 = E2*np.sqrt((2*upopt2[0]/fit2[0])**2 + (2*delta_e2/e2)**2)
tat2 = e*E = {} $\pm$ {} GPa ".format(round(E2/1e9), round(delta_E2/1e9))
data_tat2 = e*E\rho$ = {} kg/m$^3$".format(rho2)



#Figure
plt.figure()
plt.plot([0,40], fit[0]*np.array([0,40])+fit[1], '--b', lw = 4, label = tat)
plt.errorbar(1/Lx*2 , f, delta_f, 2*delta_L/Lx*3, 'o', capsize = 6, lw = 2, label = data_tat, markersize =
    10)
plt.plot([0,120], fit2[0]*np.array([0,120])+fit2[1], '--r', lw = 4, label = tat2)
plt.errorbar(1/L2**2 , f2, delta_f2, 2*delta_L2/L2**3, 'o', capsize = 6, lw = 2, label = data_tat2,
    markersize = 10)
plt.xlabel(r"$1/L^2$ (m$^{-2}$)", fontsize = 20)
plt.ylabel(r"$\omega$ (rad/s)", fontsize = 20)
plt.legend()
plt.show()
```

Mécanique des fluides

Table des expériences

I.	Expérience de Stokes [MPs 11 et 12]	40
II.	Viscosimètre à bille [MPs 1, 7, 11, 12 et 19]	40
III.	Écoulement de Poiseuille [MPs 11, 12 et 19]	41
IV.	Vidange d'un réservoir [MP 12]	42
V.	Écoulement en soufflerie [MPs 5 et 12]	43
VI.	Mesure d'un coefficient de traînée [MPs 7 et 12]	43
VII.	Pertes de charge dans une conduite et effet Venturi (*) [MPs 11 et 12]	44
VIII.	Effet Coandă (*) [MP 12]	44
IX.	Suspension d'un objet (*)	44
X.	Vase de Tantale (*)	44
XI.	Manomètre à liquide	45
XII.	Turbulence:	46
XIII.	Mouvement brownien [MPs 00 et 03]	47

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pourrez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Expérience de Stokes [MPs 11 et 12]

La description de l'expérience, ainsi que les élément théoriques associés peuvent être trouvés dans la Réf. [1] (pp. 411-412).

Liste du matériel :

- un dispositif de Couette P106.17,
- une seringue P104.29,
- du glycérol coloré P75.

Cette expérience permet d'illustrer un écoulement laminaire stationnaire. On notera que dans cette géométrie cylindrique, il n'y a pas besoin que le nombre de Reynold soit très petit devant 1 pour que l'écoulement vérifie l'équation de Stokes

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta\Delta\vec{v}. \tag{1}$$

En effet, en dehors d'un instabilité vers un régime turbulent à très grand nombre de Reynolds (de l'ordre de 10^2-10^3), il existe une solution à l'équation de Navier-Stokes stationnaire de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e}_\theta$ en coordonnées cylindriques (respectant les propriétés de symétrie du dispositif), pour laquelle le terme convectif $\left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}\right)\vec{v}$ s'annule exactement. La condition la plus restrictive est donc la condition d'instationnarité. Pour plus de détails sur les propriétés de l'écoulement, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [3] (pp. 175-179).

Cette discussion sur le nombre de Reynolds se confirme si on essaie d'estimer le nombre de Reynolds dans cette situation. La viscosité cinématique du glycérol est de l'ordre de $\nu = 10^{-3}\,\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$, et la taille caractéristique du dispositif est $L = 5\,\text{cm}$. Enfin, la vitesse angulaire de rotation est de l'ordre d'un tour toutes les dix secondes, soit une vitesse angulaire $\Omega \simeq 0{,}6\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Cela conduit alors à un nombre de Reynolds $\text{Re} = L^2\Omega/\nu = 1$, qui n'est pas très petit devant 1.

II. Viscosimètre à bille [MPs 1, 7, 11, 12 et 19]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (pp. 432-440) pour une description de l'expérience et des éléments théoriques associés.

Liste du matériel :

- une éprouvette contenant du Rotitherm M220 P105.44/2,
- des billes d'acier P106.37,
- un Palmer P96.14,
- un chronomètre P96.56.

Le matériel utilisé est le même que celui de la Réf. [1] à laquelle on pourra se référer pour des mesures de référence.

On mesurera le temps le plus long possible pour minimiser les incertitudes : on observera donc la chute la plus grande possible (de l'ordre de plusieurs dizaines de centimètres). Il faut cependant faire attention à arrêter la mesure avant que la bille ne descende trop dans l'éprouvette, sous peine d'induire une recirculation du fluide du fait du fond de l'éprouvette. Par contre, la durée du régime transitoire n'est pas très limitante car à la première graduation de l'éprouvette, la bille a déjà atteint son régime permanent (on peut calculer que la distance typique parcourue avant l'établissement du régime transitoire est de l'ordre de 0,1 mm).

On fera l'expérience plusieurs fois pour chaque diamètre de bille, ce qui permettra d'effectuer un traitement statistique pour l'incertitude sur le temps de chute.

Enfin, en ce qui concerne l'ajustement de la vitesse V de chute en régime permanent en fonction du rayon r de la bille, on conseille d'effectuer un ajustement affine $V/r^2 = ar + b$ ou $V = ar^2 + b$, plutôt que l'ajustement non linéaire proposé dans la Réf. [1].

Cette expérience permet de valider le modèle de force de Stokes, ce qui justifie à posteriori la description de l'écoulement du fluide dans la colonne comme un écoulement laminaire à bas nombre de Reynolds (qu'il conviendra d'estimer dans la présente situation). Contrairement à l'expérience précédente, le terme convectif est non nul, et l'expression de la force de Stokes est bien une approximation dans la limite de bas nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = UL/\nu$, qu'on estime ici avec $L = 5 \times 10^{-4}$ m (rayon de la bille), $U = 10^{-2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ (vitesse de chute de la bille) et $\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$ (viscosité cinématique du Rotitherm M220), soit $\mathrm{Re} \simeq 5 \times 10^{-3} \ll 1$. Cette expérience permet également d'illustrer le rôle des frottements fluides sur le mouvement d'un solide. Cette expérience permet enfin de mettre en évidence un transfert de quantité de mouvement de la bille au fluide par diffusion (viscosité).

III. Écoulement de Poiseuille [MPs 11, 12 et 19]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (pp. 441-453) pour la description complète de l'expérience, ainsi que des éléments théoriques associés.

Liste du matériel :

- un vase de Mariotte P105.37,
- un capillaire en verre P105.37,
- des supports élévateurs P25.0,
- un cristallisoir,
- une balance de précision P97.21 ou P97.23,
- un niveau à bulle P96.58,
- un chronomètre P96.56,
- une allumette.

On rappelle qu'un vase de Mariotte est un récipient fermé à l'intérieur duquel est inséré un tube en contact avec l'air libre. Par continuité de la pression, le bas du tube reste à la pression atmosphérique P_{atm}. Le gradient de pression résultant dans le fluide impose une pression au niveau du trou de vidange en bas du vase : $P = P_{\mathrm{atm}} + \rho g h_{\mathrm{min}}$, où h_{min} désigne la hauteur entre le bas du tube et le fond du vase. Au cours de la vidange, le niveau de l'eau dans le vase descend, mais la pression au niveau du trou de vidange reste la même tant que le bas du tube reste immergé, c'est l'intérêt du vase de Mariotte. De plus, il est assez simple de modifier la pression au niveau du trou car il suffit de monter ou de descendre le tube vertical. Pour plus de détails sur le vase de Mariotte, nous renvoyons à la Réf. [1] (pp. 429-430).

Pour la réalisation de l'expérience, on déposera sur l'extrémité du tube (vers la balance) un peu de suie à l'aide d'une allumette afin de la rendre hydrophobe, et d'éviter un « effet thifère » (ou plus rigoureusement de modifier l'équilibre des pressions en sortie du tube du fait des effets capillaires). De plus, il est plus simple de mesurer la hauteur h de la tige dépassant du bouchon, plutôt que de mesurer h_{min}. Cela conduira alors uniquement à une ordonnée à l'origine non nulle quand

on tracera le débit volumique en fonction de h. Pour la mesure du débit, si on utilise la balance Kern P97.21, on peut réaliser un suivi de la masse d'eau écoulée au cours du temps avec le logiciel Kern.

Pour l'ajustement du débit volumique $Q_V = \Delta m/(\rho_{eau}\Delta t)$ en fonction de h (avec Δm la masse d'eau qui s'est écoulée, ρ_{eau} la masse volumique de l'eau et Δt la durée d'écoulement), on recommande de réaliser un ajustement affine de la forme $Q_V = ah + b$ au lieu de l'ajustement proposé dans la Réf. [1]. En effet, l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés est optimale quand la fonction à optimiser dépend linéairement des paramètres libres [4].

On conseille dans un premier temps de vérifier la relation de Hagen-Poiseuille. L'étude du rôle de la longueur d'établissement sur le régime de Poiseuille proposée dans la Réf. [1] pourra être réalisée en seconde lecture. On termine par mentionner que cette expérience permet également de mettre en évidence un transfert de quantité de mouvement par diffusion (viscosité) au sein du fluide.

IV. Vidange d'un réservoir [MP 12]

On s'intéresse ici à une réalisation d'un écoulement parfait, c'est-à-dire pour lequel les effets dus à la viscosité sont négligeables devant les effets inertiels. Il faut bien faire la différence entre un écoulement parfait (dont la définition a été rappelée ci-dessus) et un fluide parfait pour lequel la viscosité est rigoureusement nulle (cas des superfluides).

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (pp. 422-431) pour la description de l'expérience et des éléments théoriques associés. On mentionne que la relation donnant la vitesse de l'écoulement en sortie du vase dans la Réf. [1] est erronée, et a l'expression suivante :

$$v_B = \sqrt{\frac{2gh}{1-(sr/S)^2}}, \tag{2}$$

où les notations sont celles de la Réf. [1].

Liste du matériel :

- un vase de Mariotte P105.37,
- un tube en verre très court (de quelques centimètres),
- un cristallisoir,
- une balance de précision P97.23,
- un chronomètre P96.56,
- un pied à coulisse P96.41.

L'expérience est semblable à celle de l'écoulement de Poiseuille précédemment étudiée, mais avec une conduite très courte. Le profil de vitesse parabolique n'a alors pas le temps de se développer, ce qui permet de considérer l'écoulement parfait.

Comme dans l'expérience précédente, il est plus simple de mesurer la hauteur du tube qui dépasse du vase de Mariotte, plutôt que de mesurer la hauteur d'eau directement, comme cela est fait dans la Réf. [1]. Par ailleurs, on mesurera pour différentes hauteurs le temps nécessaire pour qu'une masse donnée de fluide se soit écoulée, de l'ordre de 200g par exemple.

Pour l'analyse des données expérimentales, on propose de réaliser un ajustement affine directement de Q_V^2 en fonction de la hauteur de la tige en dehors du vase de Mariotte, où $Q_V = \Delta m/(\rho_{eau}\Delta t)$ désigne le débit volumique, avec Δm la masse d'eau qui s'est écoulée, ρ_{eau} la masse volumique de l'eau et Δt la durée d'écoulement. On pourra alors remonter à g à partir de la pente. Pour cela, il faudra mesurer précisément le rayon r du tube au pied à coulisse.

L'ajustement affine permet de valider l'hypothèse d'écoulement parfait. Cependant, la valeur de g obtenue est souvent assez différente de la valeur attendue. La différence peut s'expliquer par l'incurvation des lignes de courant à l'entrée du tube de vidange qui provoque des zones de recirculation. Le champ de vitesse n'est alors plus homogène dans le tube. Il est possible de prendre en compte cet effet en modifiant la loi de Torricelli à l'aide d'un coefficient de débit (voir la Réf. [1] pour plus de détails). De plus, comme pour l'expérience précédente, l'ordonnée à l'origine correspond principalement à la différence entre la hauteur de la tige en dehors du vase et la hauteur entre le bas de la tige et le fond du vase, mais elle prend également en compte les effets de tension de surface au bout du tube immergé dans le vase de Mariotte.

On termine par mentionner que l'établissement de la loi de Torricelli repose sur le théorème de Bernoulli (voir l'expérience suivante), qui n'est correct qu'à haut nombre de Reynolds, qu'il faut donc estimer dans la situation présente. Ici, la distance caractéristique est $r = 1$ cm, la vitesse caractéristique $U = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, et la viscosité cinématique de l'eau $\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$, menant à $Re = rU/\nu = 10^4 \gg 1$.

V. ÉCOULEMENT EN SOUFFLERIE [MPs 5 ET 12]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (pp. 454-460) pour la réalisation de l'expérience et les éléments théoriques associés. Cette expérience repose sur l'utilisation d'une soufflerie présentant une sonde Pitot, et d'un anémomètre à fil chaud pour la mesure de la vitesse. Cette expérience permet de mettre en évidence le principe de la sonde Pitot, dont l'objectif est de faire une mesure de vitesse à partir d'une mesure de pression. Elle permet également d'illustrer un écoulement laminaire à haut nombre de Reynolds dans l'air, nombre de Reynolds qu'il faudra estimer dans la situation présente. Ici, on prend une distance caractéristique $L = 1\,\mathrm{cm}$ (correspondant au pas de la grille en amont de la soufflerie), une vitesse caractéristique $U \simeq 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, et une viscosité cinématique de l'air $\nu \simeq 10^{-5}\,\mathrm{m^2\cdot s^{-1}}$, ce qui conduit à $\mathrm{Re} = UL/\nu \simeq 10^2 \gg 1$.

Liste du matériel :

- une soufflerie P0.20,
- un anémomètre à fil chaud P96.46.

Pour la soufflerie de la collection, le tube Pitot est relié à un manomètre à dénivellation de liquide (gradué en millimètres d'eau), de sorte que la différence de pression ΔP mesurée entre un point d'arrêt du fluide (à l'avant du tube où la vitesse est nulle) et un point où la vitesse est égale à celle de l'écoulement (sur les parois latérales du tube) vaut $\Delta P = \rho_{\mathrm{eau}} g \Delta z$, avec Δz la dénivellation du liquide.

On pourra en particulier vérifier le théorème de Bernoulli.

> Pour cela, on retirera les objets présents dans la soufflerie et on placera une grille à l'entrée. On insérera l'extrémité de la tige de l'anémomètre à fil chaud au centre de l'écoulement à travers le cylindre en plastique. Il faut orienter le fil de manière à maximiser la circulation de l'air autour du lui.
> On pourra alors allumer la soufflerie en tournant la molette blanche. Pour différentes vitesses d'écoulement mesurées à l'aide de l'anémomètre, on pourra mesurer la différence de pression à partir de la hauteur de la colonne de liquide dans le manomètre.

La grille sert à instaurer un écoulement laminaire dans la soufflerie, en empêchant la formation de tourbillons.

VI. MESURE D'UN COEFFICIENT DE TRAINÉE [MPs 7 ET 12]

Il s'agit du pendant de l'expérience du viscosimètre à bille, mais ici dans le cas d'écoulements à grands nombres de Reynolds. Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (pp. 454-462) pour la description de l'expérience et des éléments théoriques associés.

Liste du matériel :

- une soufflerie P0.20,
- un anémomètre à fil chaud P96.46.

La soufflerie de la collection est équipée d'une part d'un dispositif permettant de mesurer la vitesse (moyenne) de l'écoulement au niveau de la veine d'essai, et d'autre part d'un capteur de force permettant d'accéder à la contrainte exercée sur le support sur lequel est fixé l'obstacle placé dans l'écoulement, et donc à la mesure de la force de traînée. La vitesse de l'écoulement est estimée à l'aide d'un tube de Pitot (logé dans la veine) relié à un manomètre. Ce dernier peut être soit un manomètre à tube incliné, soit un manomètre électronique, soit le boîtier "capteur différentiel de pression". Une calibration préalable effectuée à l'aide d'un anémomètre à fil chaud donne la vitesse en fonction de la différence de pression (exprimée en mmCE, correspondant à la hauteur manométrique) sous la forme :

$$V_{[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]} = 3.9\sqrt{1 + T_{[°\mathrm{C}]}/273}\sqrt{h_{[\mathrm{mmCE}]}}. \tag{3}$$

l'électronique du boîtier effectuant directement la conversion. Concernant le capteur de force, il s'agit de deux jauges d'extensométrie collées de part et d'autre de la lame de scie sur laquelle est fixé l'obstacle, et exploitées à l'aide d'un pont de Wheatstone. Un étalonnage effectué au préalable (cf. notice P0.20) donne la force de traînée en fonction de la tension dans les 2 branches du pont sous la forme :

$$F_{[\mathrm{mN}]} = 160 \pm 8U_{[\mathrm{mV}]}. \tag{4}$$

> On propose de réaliser l'expérience de la Réf. [1] dans le cas d'un objet simple, qu'on placera dans la soufflerie, perpendiculairement à l'écoulement. On pourra prendre le disque de rayon 11,25 mm, et on vissera sa tige sur la réglette noire à travers le trou sur le haut de la soufflerie. On replacera ensuite la grille à l'entrée de la soufflerie. Attention, le dispositif de mesure de la force de traînée est fragile! En particulier, lorsque l'on place ou retire un

> obstacle dans la veine, la vis permettant de bloquer la tige sur laquelle est fixée un obstacle doit *être à peine serrée*, sous peine de vriller la lame de scie et de fausser l'étalonnage!. Si la vis est bloquée, ne pas forcer sans avoir, au préalable, immobilisé la lame. Faire alors le zéro du capteur de force (ce qui correspond à équilibrer le pont de Wheatstone) dans le cas où la soufflerie est à l'arrêt. La procédure est indiquée sur le boîtier. Elle permet de s'affranchir des effets d'hystérésis de la lame de scie sur laquelle sont fixées les jauges d'extensométrie, des considérations de contraintes statiques, ainsi que de la dérive de l'électronique, et doit donc être effectuée notamment à chaque changement d'obstacle dans la veine. En ce qui concerne la mesure de la vitesse, vérifier, en fonction du matériel utilisé, que le manomètre à liquide est bien horizontal et que le ménisque du liquide coloré indique une pression différentielle nulle (si nécessaire, compléter le niveau à l'aide du liquide spécifique), ou que le boîtier électronique indique $V = 0$ (si nécessaire, ajuster la position du potentiomètre présent sur le boîtier).
> Pour différentes vitesses d'écoulement, on mesurera maintenant la force de traînée, ce qui permettra de remonter au coefficient de traînée C_x.

Il est envisageable de vérifier, dans la veine vide, l'étalonnage de la mesure de la vitesse d'écoulement à l'aide d'un anémomètre à fil chaud. Attention, ce dispositif est *très fragile* et cher, il convient donc de le manipuler avec la plus grande précaution (et notamment de protéger le fil avec la bague coulissante de protection dès que la sonde n'est pas exploitée pour effectuer une mesure). En revanche, utiliser cet anémomètre en présence d'un obstacle n'est pas une "bonne idée" : non seulement les risques de manipulation de la sonde sont plus élevés, mais il est également difficile de la placer convenablement par rapport à l'objet, car elle ne doit être ni trop proche (pour ne pas perturber l'écoulement), ni trop loin (pour mesurer la vitesse au niveau de l'objet...).

Il est possible de mesurer de façon analogue les coefficients de traînée C_x de différents objets, plus ou moins profilés. Cette étude est réalisée dans la Réf. [1] (pp. 463-465).

VII. Pertes de charge dans une conduite et effet Venturi (*) [MPs 11 et 12]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (pp. 413-417) pour la description de l'expérience et des éléments théoriques associés.

Liste du matériel :

- un ensemble de tubes piézométriques `P106.27` ou `P106.28`.

VIII. Effet Coandă (*) [MP 12]

Il s'agit d'une expérience qualitative permettant d'illustrer la force de portance s'exerçant sur un objet convexe dans un écoulement laminaire à haut nombre de Reynolds. Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (pp. 417-419) pour la description de l'expérience et des éléments théoriques associés.

Liste du matériel :

- une balle de ping-pong `P106.21`.

IX. Suspension d'un objet (*)

Il s'agit d'une expérience qualitative illustrant de nouveau les actions s'exerçant sur un objet dans un fluide en écoulement à haut nombre de Reynolds. Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1] (pp. 419-420) pour la description de l'expérience.

Liste du matériel :

- une balle de ping-pong `P106.21`,
- un sèche-cheveux `P101.10`.

X. Vase de Tantale (*)

Le vase de Tantale est un exemple d'oscillateur à relaxation hydraulique. Le dispositif est schématisé Fig. 1. Pour plus de détails sur les oscillateurs à relaxation, on renvoie le lecteur au TP7 d'électronique. On propose ici une expérience qualitative, mais on peut la rendre plus quantitative avec le matériel adéquat. On renvoie alors le lecteur à la Réf. [2].

Liste du matériel :

- le vase de Tantale `P105.5`.

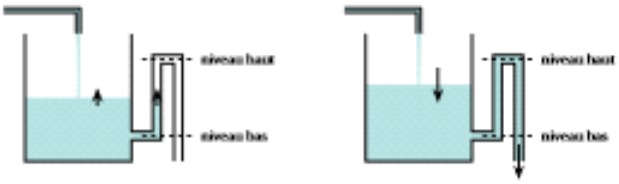


FIGURE 1 – Vase de Tantale : phase de remplissage (à gauche) puis de vidange (à droite).

> On propose de placer un vase de Tantale sous un filet d'eau continu pour observer l'alternance des phases de remplissage et de vidange du vase.

Un robinet alimente en continu le vase de Tantale. Durant la phase de remplissage, il se remplit jusqu'à ce que le niveau d'eau atteigne le haut du tuyau. Le siphon s'amorce alors et vide le vase plus rapidement qu'il ne se remplit (il faut pour cela que le débit soit suffisamment faible). La vidange s'arrête lorsque le niveau d'eau atteint le bas du tuyau (correspondant à la position de l'orifice de sortie). Le vase se remplit alors à nouveau, et le cycle recommence.

XI. MANOMÈTRE À LIQUIDE [1]

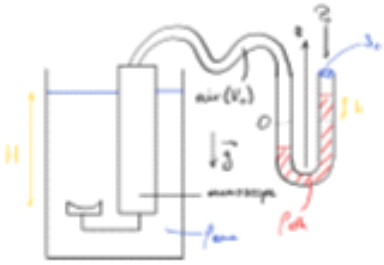


FIGURE 2 – Schéma du montage expérimental du manomètre à liquide. Les grandeurs utiles y sont figurées et mentionnées ci-après.

Liste du matériel :

- **Manomètre Jeulin.**
- **Cuve en verre cylindrique de large rayon.**
- **Support de fixation.**
- **Une règle (que l'on peut scotcher sur le cylindre).**

Le manomètre à liquide Jeulin dont le montage est représenté Figure 2 est un dispositif expérimental permettant de de mesurer une variation de pression par rapport à la pression atmosphérique. Une sonde pourvue d'une membrane se déforme sous l'effet de la pression et entraîne la compression d'un gaz qui met en mouvement le fluide au sein du tube en U. L'élévation correspondante satisfaisant l'équilibre hydrostatique permet de déterminer la pression au niveau de la membrane plongée dans le fluide selon la relation linéaire suivante (au voisinage des faibles variations) :

$$\Delta P = \rho_{\text{eau}} g H = \rho_{\text{eau}} g \left(1 + \frac{k V_0}{P_0} + \frac{k S}{2 \rho_{\text{eau}} g} \right) \times h, \tag{S}$$

où ρ représente la masse volumique des fluides mis en jeu, k est un coefficient de proportionnalité dans la loi de Laplace tenant compte de la courbure de la membrane, S est la section du tube en U, V_0, P_0 sont le volume initial et la pression initiale de l'air dans le tuyau, g l'intensité du champ de pesanteur, H la profondeur de la membrane plongée dans la cuve et h l'élévation du fluide dans le tube en U par rapport à sa référence.

1. 40 L. Peres, 2023

On s'assure tout d'abord que le niveau du fluide dans le tube en U est au niveau zéro lorsque la membrane est hors de l'eau ie. soumise à la pression atmosphérique. On utilise de l'éthanol, que l'on peut colorer pour une meilleure lisibilité, afin d'augmenter la sensibilité du capteur car $\rho_{eth} < \rho_{eau}$, ce qui entraîne une plus grande variation de h pour une même différence de pression.
On vient ensuite plonger par palier le manomètre dans la cuve en verre, en prenant soin de reporter à chaque fois la hauteur à laquelle celui-ci est plongé (prendre garde à la parallaxe), ainsi que l'élévation de l'éthanol dans le tube en U.
Enfin, une régression linéaire permet de mettre en évidence la validité de la relation XI établie ci-dessus.

XII. Turbulence[2]

Nous renvoyons le lecteur à la BdE [5] pour une introduction des éléments théoriques concernant la turbulence et des considérations expérimentales mises en oeuvre ici.

Liste du matériel :

- une soufflerie P0.20,
- un tube de Pitot équipé P0.030 ou un tube de Pitot et son manomètre à tube incliné,
- un anémomètre à fil chaud et son boîtier d'alimentation P96.46,
- des supports de fixation.

⚠ La notice de l'anémomètre de la collection n'est pas correcte.

L'objectif de cette expérience est d'étudier certaines propriétés statistiques d'un écoulement turbulent, et plus précisément le spectre de puissance des fluctuations de vitesse. Un anémomètre à fil chaud placé dans l'écoulement permet d'accéder à une composante du champ de vitesse en évaluant les pertes thermiques au niveau du fil dues à l'écoulement. Celui de la collection, mis en oeuvre dans cette expérience, est un anémomètre à température constante (Constant Temperature Anemometer), pour lequel une boucle de rétroaction assure un asservissement en température (par opposition à d'autres anémomètres, par exemple à courant constant [Constant Current Anemometer] ou à tension constante [Constant Voltage Anemometer]). La détermination des transferts thermiques autour d'un cylindre par une convection forcée est un joli exercice que le lecteur est invité à considérer. Sous certaines hypothèses, on peut alors montrer que l'asservissement en température du fil chaud induit une modification quadratique de l'intensité qui le traverse, et donc une modification quadratique de la tension à ses bornes : c'est la loi de King pour un CTA :

$$E_s = \sqrt{a + b\sqrt{U}}, \tag{6}$$

où E_s est la tension aux bornes du fil, et U la vitesse d'advection du fluide. Le suivi de l'évolution temporelle de cette tension $E_s(t)$ permet donc de déterminer le champ de vitesse $U(t)$ (plus précisément de la composante orthogonale au fil dans la direction du flot à grande échelle). En séparant $U(t)$ sous la forme d'un écoulement moyen $\overline{U}$ et d'une fluctuation $u(t)$, les techniques standard de traitement du signal permettent d'exprimer la densité spectrale de puissance à l'aide de la transformée de Fourier $\hat{u}(f)$:

$$\Gamma_u(f) = \frac{|\hat{u}(f)|^2}{\Delta T}, \tag{7}$$

où ΔT désigne la durée totale d'échantillonnage. Sous l'hypothèse d'une turbulence gelée (hyp. de Taylor), qui suppose que sur des intervalles de temps suffisamment courts, la structure turbulente du flot est essentiellement advectée avec la vitesse moyenne $\overline{U}$, on peut faire le lien entre fréquence temporelle et fréquence spatiale :

$$k = \frac{2\pi}{\overline{U}} f. \tag{8}$$

L'énergie cinétique turbulente massique s'obtient par intégration :

$$\overline{u^2(t)} = \int_0^{+\infty} \Gamma_u(f)\mathrm{d}f = 2\int_0^{+\infty} E(k)\mathrm{d}k, \quad \text{soit : } E(k) = \frac{\overline{U}}{4\pi}\Gamma_u(f = \overline{U}k/2\pi). \tag{9}$$

La théorie de la "cascade turbulente", introduite par Richardson en 1922, puis développée par Kolmogorov[3] dans 4 articles en 1941, établit que, sous certaines hypothèses (isotropie, flot incompressible), le spectre de puissance dans le domaine inertiel prend la forme universelle suivante :

$$E(k) \propto k^{-5/3} \quad \text{pour } k \in [k_{min}; k_{max}]. \tag{10}$$

Cette expression rend compte du caractère auto-similaire de la cascade turbulente entre l'échelle d'injection, celle des "tourbillons les plus grands" (correspondant au plus petit nombre d'onde k_{min}), et l'échelle de dissipation, celle où s'effectue la dissipation des tourbillons sous l'effet de la viscosité (associée au plus grand nombre d'onde k_{max}). C'est cette loi que l'on souhaite illustrer expérimentalement.

2. O.B. Wouillot, 2024.
3. C'est le système Kolmogorov que celui du "théorème KAM" en mécanique hamiltonienne ou du test de Kolmogorov-Smirnov en statistique.

⚠ L'anémomètre à fil chaud est très fragile et coûte cher (4600 euros en 2009)... Prenez-en donc soin, en particulier repositionnez le cache protecteur sur la sonde dès que vous ne faites plus de mesures (et évidemment, ne touchez pas le fil avec vos doigts...)

La première partie du protocole consiste à étalonner le fil chaud par la loi de King : pour différentes vitesses de la soufflerie, mesurer à l'aide du tube de Pitot relié au manomètre à tube incliné la pression dynamique δP et faire l'acquisition de la valeur moyenne de la tension $\overline{U_s}$ relevée aux bornes de la sonde. L'application du théorème de Bernoulli permet d'estimer la vitesse moyenne du flot $\overline{U} = \sqrt{2\delta P/\rho}$, et l'ajustement $\overline{U_s} = f(\sqrt{\overline{U}})$ permet d'accéder aux coefficients a et b de la loi de King.

Dans la seconde partie du protocole, le signal $U_s(t)$ est échantillonné sur ~ 2 min, et enregistré sous Latis-Pro. Le post-traitement de ces données à l'aide du script python_SpectrePuissance_Turbulence.py permet de calculer la densité spectrale de puissance $B(k)$ du signal et de comparer ainsi les résultats expérimentaux et théoriques.

XIII. Mouvement brownien [MPs 00 et 00]

P Pajuello

Références

[1] M. Fourcart, P. Lidon, E. Thibierge, M. Champion et A. Le Diffon, *Physique expérimentale. Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, De Boeck Supérieur (2016).

[2] D. Gauthier, « Exemples d'oscillations de relaxation », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 812 (1999).

[3] É. Guyon, J.-P. Hulin, L. Petit, *Hydrodynamique Physique*, EDP Sciences (2012).

[4] Jolidon, *Physique expérimentale - Optique, magnétisme, électrotechnique, mécanique, thermodynamique et physique non linéaire*, EDP Sciences (2021).

[5] C. Bailly et G. Comte-Bellot, *Turbulence*, CNRS éditions (2003).

EXEMPLES DE RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

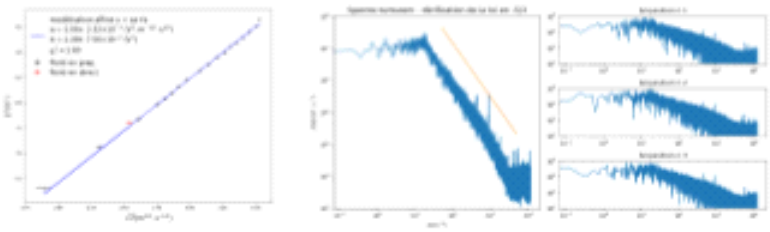


FIGURE A1 – Exemple de résultats obtenus pour l'étude d'un écoulement turbulent (voir l'Exp. XIII) : à gauche l'ajustement correspondant à la loi de King, à droite le spectre de puissance et sa comparaison au spectre K41. © *B. Vouillot / M. Sieron / H. Ferrer*

Acoustique

Table des expériences

I.	Propagation libre du son dans l'air [MPs 5, 14 et 30]	47
II.	Télémétrie acoustique [MPs 4 et 14]	47
III.	Propagation libre du son dans l'eau [MPs 5, 13, 14 et 30]	48
IV.	Propagation libre du son dans le Dural [MPs 5, 14 et 30]	48
V.	Effet acousto-optique	50
VI.	Trombone de König [MP 14]	53
VII.	Trous d'Young acoustiques (*) [MP 14]	54
VIII.	Battements acoustiques de deux diapasons [MP 14]	56
IX.	Effet Doppler par détection synchrone [MPs 5, 14 et 52]	57
X.	Résonateur de Helmholtz (*) [MPs 14, 30 et 54]	57
XI.	Adaptation d'impédance avec un diapason	59
XII.	Impédance acoustique d'un transducteur [MPs 14 et 40]	59
XIII.	Taux d'onde stationnaire et adaptation d'impédance terminale (*) [MP 14]	60

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Propagation libre du son dans l'air [MPs 5, 14 et 30]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [6] (pp. 515-520) qui présente le dispositif expérimental, ainsi que tous les éléments théoriques nécessaires, afin de mesurer la vitesse de propagation du son dans l'air.

Liste du matériel :

- un émetteur et un récepteur ultrasonores P73.21,
- un générateur basses fréquences,
- un réglet P96.74,
- un oscilloscope.

Pour que le générateur basses fréquences émette des salves sinusoïdales, on utilisera le bouton Burst, le délai séparant deux impulsions étant alors réglé par le paramètre *Burst Period*.

On manipule ici des ondes ultrasonores afin de ne pas être pollué par le bruit ambiant. Cela n'est pas toujours réalisable en pratique (surtout quand on veut transmettre un son), d'où l'intérêt d'utiliser des méthodes de modulation.

II. Télémétrie acoustique [MPs 4 et 14]

On renvoie le lecteur à la Réf. [6] (pp. 520-521) pour la description de l'expérience et des aspects théoriques associés. Cette expérience permet de réaliser une mesure de distance à l'aide d'un émetteur et d'un récepteur à ultrasons.

Liste du matériel :

- un émetteur et un récepteur ultrasonores P73.21,
- un générateur basses fréquences,
- une plaque en aluminium P60.10,
- un oscilloscope.

Sur GBF 33500B, attention la fonction trig se met en manuel, et il faut la mettre en automatique (internal) pour utiliser la fonction burst (burst period)

Pour la mesure, ou bien prendre le début des impulsions (mais peut être délicat à évaluer) ou conseil du prof prendre le milieu du pulse emis, et le max du pulse reçu mais pas ouf non plus à cause de la réponse de l'appareil.

On prendra garde à prendre un objet dont la taille caractéristique est bien supérieure à la longueur d'onde du signal acoustique (de l'ordre de $\lambda \approx 0{,}5$mm) pour réaliser la réflexion, afin, notamment, de s'affranchir de la diffraction des ondes acoustiques (qui peut modifier la distribution spatiale de l'onde acoustique réfléchie).

III. Propagation libre du son dans l'eau [MPs 5, 13, 14 et 30]

On propose de réaliser une expérience analogue à l'Exp. I, mais en plongeant les émetteur et récepteur à ultrasons dans une cuve remplie d'eau. On s'attend à une valeur $c_{eau} \approx 1{,}48 \times 10^3$ m s^{-1} à 20 °C.

Liste du matériel

- un émetteur et un récepteur ultrasonores adaptés à l'acoustique aquatique P73.21,
- un générateur basses fréquences,
- un réglet P96.74,
- une cuve en plastique remplie d'eau,
- un oscilloscope.

On prendra garde à bien immerger les transducteurs, en respectant les niveaux d'eau marqués sur les dispositifs.

Pour effectuer cette expérience, on peut également utiliser le dispositif P0.28 (voir l'expérience suivante sur la mesure de la vitesse du son dans le Dural).

IV. Propagation libre du son dans le Dural [MPs 5, 14 et 30]

Nous proposons de réaliser l'expérience suivante, schématisée Fig. 1. L'expérience est ici présentée dans le cas du Dural, mais peut être généralisée.

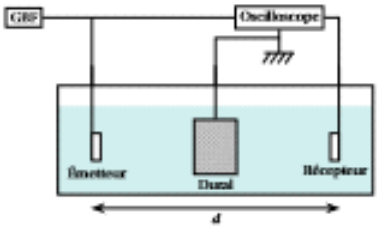


Figure 1 – Dispositif permettant d'étudier la propagation des ondes dans le Dural.

Liste du matériel :

- le dispositif P0.28,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

Nous proposons de réaliser le dispositif de la Fig. 1. Il est constitué d'une cuve remplie d'eau dans laquelle se trouvent deux transducteurs ultrasonores et un bloc parallélépipédique de Dural. Il s'avère que les émetteurs ultrasonores émettent et reçoivent sur chaque face avant et arrière. Il est possible, pour une meilleure mesure, de fixer de la mousse sur les faces qui ne se font pas face pour éviter les réflexions parasites.
On alimentera alors un des transducteurs avec des salves de signaux sinusoïdaux produites par un générateur basse fréquence, en choisissant la fréquence des salves sinusoïdales de sorte à se placer à la résonance du transducteur. Pour les transducteurs du dispositif, cette fréquence se trouve autour de 420kHz. Par ailleurs, la tension devra être d'amplitude de l'ordre de 10V pour que le signal soit exploitable. On choisira aussi le temps entre deux salves grand devant le temps de parcours de l'onde entre les deux transducteurs. Ici, on peut se contenter d'une période de 10ms car le temps de parcours de l'onde est de l'ordre de $d/c_{eau} \approx 0{,}5$ms. On pourra alors observer le signal émis et le signal reçu par l'autre transducteur avec un oscilloscope. On pourra jouer avec l'alignement des

transducteurs pour maximiser le signal reçu.

Il se peut que le signal reçu soit bruité à cause de la propagation d'ondes électromagnétiques entre les transducteurs dans l'eau. Pour les atténuer, il faut relier l'eau à la masse de l'oscilloscope (comme l'indique la Fig. 1) à l'aide de pinces crocodiles qu'on placera sur la tige qui porte le bloc de Dural et sur la petite lamelle métallique sur la face avant de l'oscilloscope.

Dans un solide isotrope, il existe deux types d'ondes acoustiques qui peuvent se propager :

- les ondes de compression (ou ondes P) : elles sont longitudinales et se propagent à la vitesse

$$c_P = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \tag{1}$$

avec E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson et ρ la masse volumique du matériau;

- les ondes de cisaillement (ou ondes S) : elles sont transverses et ne peuvent donc pas se propager dans les fluides, leur célérité dans les solides est

$$c_S = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} < c_P. \tag{2}$$

Pour plus de détails sur ces aspects théoriques, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [12] (pp. 209-211).

On propose dans un premier temps d'envoyer une onde sous incidence normale dans le bloc de Dural placé dans la direction de sa longueur (soit $D = 8{,}5\,\mathrm{cm}$), de manière à n'exciter que le mode de compression, comme représenté Fig. 2 à gauche. On orientera ses surfaces perpendiculairement à l'onde acoustique pour obtenir une incidence normale. On pourra alors mesurer le temps de vol t_P de l'onde, à partir du premier pic reçu par le récepteur, ce qui permettra d'en déduire la vitesse $c_{P,\mathrm{Dural}}$. Pour obtenir une mesure plus robuste de cette célérité, on pourra faire varier la distance d entre les émetteur et récepteur à ultrasons.

Le temps de vol t_P de l'onde entre les deux transducteurs est la somme du temps de vol à travers l'épaisseur D de Dural, et du temps de vol pour parcourir la distance $d - D$ d'eau, soit

$$t_P = \frac{D}{c_{P,\mathrm{Dural}}} + \frac{d-D}{c_{\mathrm{eau}}}. \tag{3}$$

On peut alors remonter à la vitesse des ondes P dans le Dural par la relation

$$c_{P,\mathrm{Dural}} = \frac{D}{t_P - \frac{d-D}{c_{\mathrm{eau}}}}. \tag{4}$$

Pour obtenir cette célérité, il faut connaître la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans l'eau. Cela est l'objet de l'expérience précédente, à laquelle on se référera. Le Dural est utilisé dans l'industrie sous le nom usuel *Aluminum alloy 2014*. À partir des valeurs tabulées de ses propriétés mécaniques [14] ($E_{\mathrm{Dural}} \simeq 72\,\mathrm{GPa}$, $\nu_{\mathrm{Dural}} \simeq 0{,}33$ et $\rho_{\mathrm{Dural}} \simeq 3{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$), on attend $c_{P,\mathrm{Dural}} \simeq 6{,}0 \times 10^3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Dans l'expérience, on a placé le bloc de Dural dans le sens de sa longueur pour maximiser la distance D parcourue par l'onde sonore dans le Dural. Cela permet alors d'être plus résolu sur la mesure de la célérité $c_{P,\mathrm{Dural}}$. Pour rendre l'expérience plus quantitative, on peut faire varier la distance d entre les transducteurs. Dans ce cas, on pourra effectuer la régression affine t_P en fonction de d, ce qui permettra de remonter directement aux deux célérités $c_{P,\mathrm{Dural}}$ et c_{eau} à partir de l'ordonnée à l'origine et de la pente respectivement.

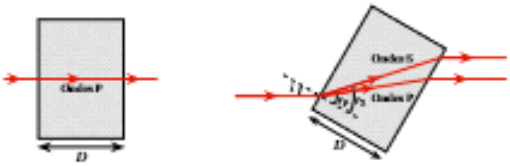


FIGURE 2 – Propagation des ondes acoustiques dans le Dural : sous incidence normale à gauche, pour une incidence i quelconque à droite.

Lorsque l'angle d'incidence i est quelconque, une onde de cisaillement se propage dans le solide en plus de l'onde de compression, comme cela est représenté Fig. 2 à droite. L'onde de cisaillement produit à son tour une seconde onde de compression dans le fluide après avoir traversé le solide, que l'on peut détecter avec le transducteur.

> On propose maintenant d'incliner le bloc de Dural avec un angle d'incidence faible i de l'ordre de quelques degrés) et d'observer l'apparition d'une seconde salve au niveau du récepteur, correspondant à la propagation de l'onde de cisaillement. On pourra alors de nouveau mesurer le temps de vol δ_S de l'onde (potentiellement pour plusieurs valeurs de d), et en déduire la vitesse $c_{S,\,\mathrm{Dural}}$.

Les angles de réfraction r_P et r_S sont donnés par la loi de Snell-Descartes, où les inverses des vitesses de propagation jouent ici le rôle d'indices optiques :

$$\frac{\sin i}{c_{\mathrm{eau}}} = \frac{\sin r_P}{c_{P,\,\mathrm{Dural}}} = \frac{\sin r_S}{c_{S,\,\mathrm{Dural}}}. \tag{5}$$

Pour plus de détails sur ce point, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [8] (p. 135).

Pour simplifier l'analyse, nous allons nous limiter à un angle d'incidence i très faible, afin de considérer que la distance parcourue par l'onde dans le bloc est toujours égale à D. Le temps de vol δ_S de l'onde de cisaillement s'exprime alors de la même façon que celui de l'onde de compression :

$$\delta_S = \frac{D}{c_{S,\,\mathrm{Dural}}} + \frac{d-D}{c_{\mathrm{eau}}}, \tag{6}$$

d'où la vitesse des ondes S dans le Dural :

$$c_{S,\,\mathrm{Dural}} = \frac{D}{\delta_S - \dfrac{d-D}{c_{\mathrm{eau}}}}. \tag{7}$$

Avec les propriétés mécaniques du Dural données ci-dessus, on attend $c_{S,\,\mathrm{Dural}} \simeq 3{,}0 \times 10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Un exemple des oscillogrammes obtenus dans le cas des ondes P et des ondes S est donné Fig. A1.

V. Effet acousto-optique

Il s'agit de mettre en évidence l'influence, sur la propagation d'un faisceau lumineux, d'une modulation spatiale de l'indice optique d'un milieu transparent (ici de l'eau) induite par une onde acoustique ultrasonore stationnaire. Cette expérience permet, en particulier, une mesure d'une longueur d'onde acoustique et, par suite, d'accéder à la célérité du son dans le milieu considéré (dans la mesure où la fréquence excitatrice est, par ailleurs, connue).

L'onde acoustique, de fréquence $F = 800$ kHz (selon le constructeur), est produite par un émetteur piézo-électrique de forte puissance (4 W·cm^{-2}, pour une surface utile de 4 cm^2, selon le constructeur). L'eau est contenue dans une cuve en verre sensiblement cubique, d'une dizaine de centimètres de côté. La source lumineuse utilisée est un laser. La figure (3) représente les divers éléments formant l'émetteur et indique leur référence. La figure (4) représente la cuve, l'émetteur piézo-électrique

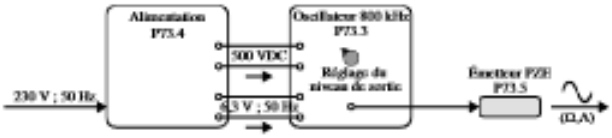


Figure 3 – Dispositif d'alimentation de l'émetteur piézo-électrique (PZE).

et la source laser. Agencer le montage de ce dernier de sorte que son altitude puisse être réglée aisément (dispositif de réglage non représenté). ⚠ Compte tenu de la force puissance de l'émetteur, on évitera de le faire fonctionner hors de l'eau. Par ailleurs, on fixera son niveau d'excitation au minimum hors de la durée des expériences.

⚠ S'assurer que personne ne risque d'être atteint par le faisceau laser. Éteindre systématiquement cette source lumineuse lorsque l'expérience n'est pas sous une surveillance attentive.

Nous nous plaçons dans le cadre de l'optique géométrique. En vertu du principe de Fermat, la modulation spatiale de l'indice optique fait apparaître une alternance, selon la direction verticale, de zones de convergence et de zones de divergence des rayons lumineux émergents de la cuve. Cet effet se manifeste par une modulation verticale de l'intensité lumineuse dont la périodicité est directement liée à celle de la modulation de l'indice, et donc à la longueur d'onde acoustique Λ.

Un motif de modulation de l'indice a l'effet d'une lentille, à la différence près qu'ici la variation de chemin optique est induite par une variation d'indice et non d'épaisseur. C'est ce qu'illustre la figure (5).

1. Estimation de quelques ordres de grandeur

1. Pré-estimer la valeur de la longueur d'onde acoustique Λ.

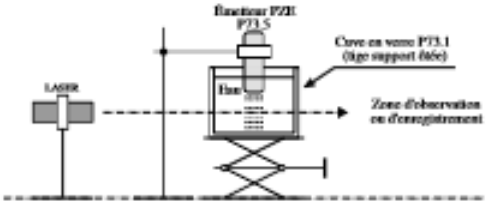


FIGURE 4 – Disposition générale de la cuve, de l'émetteur piézo-électrique et de la source laser (sans son éventuel environnement optique).

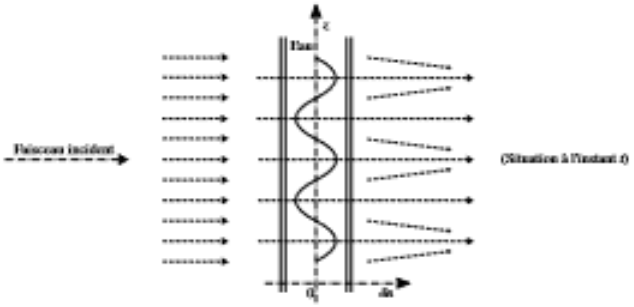


FIGURE 5 – Illustration de l'effet de lentille dû à la modulation spatiale $\delta n(z,t) = n(z,t) - n_0$ de l'indice optique de l'eau, à un instant t.

2. Estimer l'ordre de grandeur de la surpression acoustique maximale δP_{max}, en supposant que l'onde est propagative. S'agit-il d'une surestimation ou d'une sous-estimation, par rapport au cas d'une onde stationnaire?
3. Estimer l'ordre de grandeur de l'amplitude maximale δn_{max} correspondante de la variation de l'indice optique de l'eau. On considérera qu'une variation de pression[1] de 10^5 Pa de l'eau induit une variation de son indice optique de 3×10^{-5}.

2. Expérimentation

a. Expériences préliminaires

1. Aspect qualitatif : Mise en évidence de l'effet de l'onde stationnaire sur le faisceau laser. Ce dernier ne doit ici comporter ni épurateur, ni élargisseur de faisceau.
   Placer un écran dans la zone d'observation définie sur la figure (4), à une cinquantaine de centimètres de distance de la cuve. Éclairer la cuve avec la source laser (placée assez près de la cuve afin que le faisceau reste fin). Comparer les aspects de la tache lumineuse apparaissant sur l'écran, avec et sans émission du transducteur électro-acoustique. On analysera et interprétera l'influence de la distance séparant la surface émettrice du transducteur du fond de la cuve sur la tache, ainsi que celle de l'altitude du faisceau laser dans la cuve.
2. Mesurer la fréquence du signal électrique commandant le transducteur piézo-électrique. La différence de potentiel de commande étant élevée, on adjoindra une sonde 1/10 à l'oscilloscope de mesure. Si ce n'est pas suffisant, on interposera entre la sortie de l'oscillateur et la sonde (ou directement l'oscilloscope) un pont diviseur de tension à haute impédance.

1. Pour une variation de la température de l'eau de 1 K, son indice varie de $4,5 \times 10^{-4}$.

b. Ombroscopie

On utilise la source laser et l'on place, à sa sortie, une lentille convergente (L) de courte distance focale (par exemple, $f' = 5$ cm) afin d'obtenir un faisceau divergent. On place ce système optique à une distance de la cuve telle que le faisceau l'irradie sur une surface d'au moins un centimètre de diamètre (c'est-à-dire plusieurs λ). On dispose enfin un écran dans le domaine d'observation. Plus il sera éloigné de la cuve, plus le pas du motif observé sera important (par simple effet homothétique dû à la divergence du faisceau laser). La figure (6) représente ce montage optique.

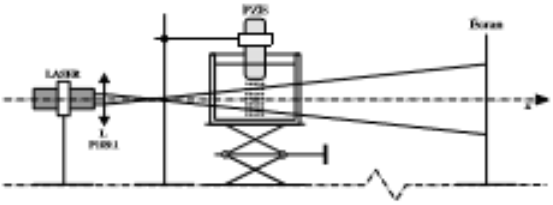


FIGURE 6 – Montage optique permettant une mesure de la longueur d'onde acoustique par ombroscopie.

1. Interpréter la figure observée sur l'écran. Préciser quelle est elle la part de l'influence de la modulation temporelle. *Avoir à l'esprit que la modulation spatiale de l'indice est, parallèlement, modulée temporellement, les lieux d'indice maximum s'échangeant avec ceux d'indice minimum, toutes les demi-périodes.*
2. Indiquer pourquoi l'espacement des traits lumineux *observés* sur l'écran est en relation directe avec $\lambda/2$ et non λ.
3. Déterminer, par cette méthode, la longueur d'onde acoustique λ.

c. Image, par une lentille, des plans de modulation de l'intensité lumineuse

Nous observons la modulation verticale de l'intensité lumineuse causée par l'onde sationnaire d'une manière différente de celle adoptée en ombroscopie. Nous formons sur l'écran, à l'aide d'une lentille (par exemple, Achromatique P111A/5, $f' = 20$ cm), l'image d'un plan de modulation de l'intensité lumineuse. Le montage optique correspondant est représenté sur la figure (7). Sur cette figure, le plan objet a été choisi au centre de la cuve, il n'agira d'en choisir d'autres en déplaçant la lentille et/ou l'écran.

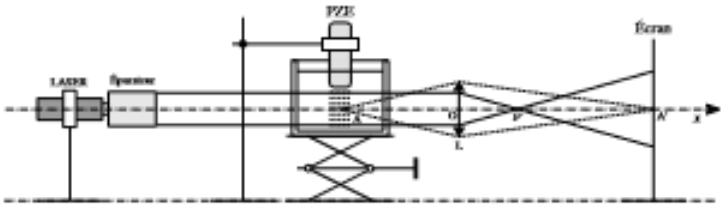


FIGURE 7 – Montage optique permettant d'observer l'image d'un plan de modulation de l'intensité lumineuse (ici le plan objet a été choisi au centre de de la cuve).

1. Réaliser le montage présenté sur la figure (7). Vérifier qu'il n'apparaît, sur l'écran, une modulation de l'intensité lumineuse que si le plan objet est suffisamment à droite de la cuve (ou suffisamment à gauche, d'ailleurs). Dans ce cas, vérifier que cette modulation reste nette sur l'écran pour tout un continuum de sa position.
   Afin d'obtenir une modulation bien contrastée, penser à ajuster régulièrement la distance entre la surface émettrice du transducteur piézo-électrique et le fond de la cuve.
2. Vérifier que si l'on réduit le niveau d'excitation de l'émetteur piézo-électrique, les plans objets limites s'éloignent de la cuve.
3. Interpréter ces résultats.
4. L'estimation faite en réponse à la question (3) est-elle confirmée par ces résultats?

5. Déterminer, par cette méthode, la longueur d'onde acoustique λ.
Bien que ce ne soit pas indispensable ici (sauf si l'on utilise un détecteur susceptible d'être saturé), on peut éliminer le fond lumineux moyen en plaçant un "point" au foyer image de la lentille, ou amener verticalement le fil d'une lame de rasoir au niveau de ce foyer. Il faut alors disposer d'un support finement réglable, selon deux directions.
6. La modulation spatiale périodique de indice optique de l'eau constitue un réseau de phase (par ailleurs modulé temporellement). Indiquer pourquoi, en pratique, il est guère envisageable de pouvoir visualiser la transformée de FOURIER de ce réseau dans le plan focal image de la lentille.

VI. TROMBONE DE KÖNIG [MP 14]

On propose de réaliser l'expérience dite du « trombone de König », dont un schéma est proposé Fig. 8. L'expérience est également détaillée dans la Réf. [b] (p. 287). Cette expérience permet de mettre en évidence les propriétés ondulatoires du son, notamment le phénomène d'interférences (voir également les Exp. VII et VIII).

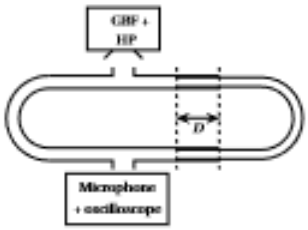


FIGURE 8 – Schéma de l'expérience du trombone de König. On a utilisé les abréviations suivantes : GBF pour Générateur Basses Fréquences et HP pour Haut-Parleur.

Liste du matériel :
- un trombone de König P72.2,
- deux cornets P71.21,
- un microphone cravate P74.37 (à demander aux techniciens),
- un adaptateur pour microphone P74.38,
- un haut-parleur P74.29,
- un générateur basses fréquences,
- un mètre ruban,
- un oscilloscope.

> On propose de réaliser l'expérience de la Fig. 8. Pour cela, on prendra un trombone de König et on fixera à ses extrémités deux cornets. On placera ensuite un haut-parleur alimenté par un générateur basses fréquences devant l'un des cornets du trombone. On placera un microphone devant l'autre cornet, qu'on reliera à un oscilloscope. On pourra alors émettre un son de fréquence fixe avec le haut-parleur ($f = 1$ kHz par exemple). On déplacera alors la coulisse du trombone et on relèvera les positions D_n correspondant aux n maxima (ou minima) successifs du signal aux bornes du microphone. On pourra utiliser le mode haute résolution de l'oscilloscope.

Dans cette expérience, une partie de l'onde parcourt la branche gauche du trombone de longueur fixe. L'autre partie de l'onde parcourt la branche droite du trombone qui est mobile. En déplaçant la coulisse d'une distance D, on faire varier la longueur de la branche droite de $2D$. Au niveau de la sortie, les deux ondes se rejoignent et interfèrent. Entre deux maxima ou deux minima successifs d'amplitude, la différence de chemin acoustique a varié d'une longueur d'onde λ, soit $\lambda = 2D$. On peut alors remonter à la longueur d'onde et *in fine* à la vitesse du son dans l'air, connaissant la fréquence, grâce à la relation $\lambda = c_{air}/f$. Pour cela, on réalisera la régression affine de D_n en fonction de n pour remonter au coefficient directeur $\lambda/2$. Un exemple de réalisation expérimentale est donné Fig. A2.

On place deux cornets sur les embouchures du trombone de König afin de réaliser une adaptation d'impédance et de maximiser l'amplitude sonore transmise dans le tube et vers le microphone.

Le choix de la fréquence est dicté par la taille typique du trombone. En effet pour observer plusieurs interférences constructives ou destructives, il faut que la demi longueur-d'onde soit bien inférieure à la distance totale que peut parcourir la coulisse (de l'ordre de plusieurs dizaines de centimètres). Une fréquence de l'ordre de 1 kHz convient donc parfaitement (correspondant à une demi longueur d'onde $\lambda/2 = 17$ cm).

Par ailleurs, le trombone étant un système fermé, il peut également développer des ondes stationnaires et un phénomène de résonance à l'intérieur de celui-ci, mais cela n'empêche pas l'observation des interférences (voir l'Exp. XIII). Éventuellement, on peut tirer profit de ces phénomènes afin d'optimiser le « contraste » des interférences sonores.

VII. Trous d'Young acoustiques (*) [MP 14]

On peut réaliser un dispositif analogue à celui des trous d'Young en optique à l'aide d'ondes acoustiques. On propose donc le montage suivant, adapté de la Réf. [1], et illustré Fig. 9.

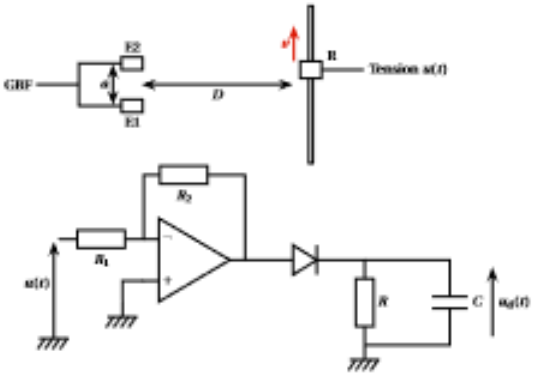


Figure 9 – En haut, illustration du dispositif expérimental pour l'expérience des trous d'Young acoustiques. En bas, circuit électrique pour l'exploitation de la tension aux bornes du récepteur. Nous avons utilisé les abréviations suivantes : GBF pour Générateur Basses Fréquences, R pour Récepteur, et E1 et E2 pour les deux Émetteurs.

Liste du matériel :

- deux émetteurs ultrasonores adaptés pour une émission dans l'air P73.21,
- un récepteur ultrasonore adapté à une réception dans l'air P73.23,
- un banc motorisé P73.23,
- une source continue de tension P54.12,
- une cale en bois P25.1,
- un chronomètre P96.98,
- deux chronocapteurs à fourche P96.27,
- un chronocompteur P96.26,
- un amplificateur linéaire intégré en boîtier P41.4,
- des résistances $R_1 = 1\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 100\,\mathrm{k\Omega}$, $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$,
- un condensateur de capacité $C = 100\,\mathrm{nF}$,
- une diode de redressement 1N4007 P29.4,
- un réglet P96.74,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope ou une carte d'acquisition.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 9. Pour cela, on alimentera deux émetteurs à ultrasons séparés d'une distance a (de l'ordre de 10 cm pour commencer) avec le même générateur basses fréquences à leur fréquence de résonance et une amplitude de l'ordre de la dizaine de volts. On placera ensuite un récepteur sur un banc motorisé à une distance $D = 40$ cm. On essaiera au maximum de réaliser un alignement vertical entre les émetteurs et le récepteur. On pourra alors observer à l'oscilloscope en mode « Défilement » le signal aux bornes du récepteur quand on le déplace à la main le long du banc.

On doit constater que l'amplitude du signal $u(t)$ aux bornes du récepteur est modulé quand il se déplace le long du banc : on met donc en évidence le phénomène d'interférences acoustiques. On peut alors obtenir une première estimation de l'interfrange i, correspondant à la distance entre deux positions du récepteur pour lesquelles l'amplitude du signal à ses bornes est maximale (ou minimale).

En premier lieu, on alimente les deux émetteurs avec le même générateur basses fréquences afin d'obtenir deux sources cohérentes. C'est un problème analogue à celui de la cohérence des sources en optique. Il s'agit aussi de la même problématique rencontrée dans la démodulation d'un signal modulé en amplitude par détection synchrone : l'utilisation d'un oscillateur différent à la même fréquence conduit au phénomène de *fading* du fait du déphasage aléatoire entre les deux générateurs [9].

La distance D est bien supérieure à la longueur d'onde $\lambda = c/f = 8{,}5$ mm (c'est un intérêt d'utiliser des signaux ultrasonores), à la distance a entre les deux émetteurs (variable dans l'expérience mais de l'ordre de 10 cm) et à la dimension caractéristique $b = 2$ cm d'un émetteur. Cela permet donc d'assimiler les ondes émises par les deux émetteurs à des ondes planes, et d'utiliser l'expression approchée de la différence de marche acoustique $\delta = a.x/D$ (avec x le déplacement du récepteur le long du banc). Cela permet également d'avoir un interfrange $i = \lambda D/a$ (voir également l'Éq. (9)) supérieur à la taille caractéristique du récepteur (de l'ordre de 1 cm), ce qui est nécessaire car le récepteur moyenne le signal acoustique reçu sur toute sa membrane.

En pratique, on ne peut pas prendre D trop grand car les émetteurs n'ont pas un rayonnement isotrope, et la largeur de la zone d'interférences se réduit quand on s'éloigne des émetteurs [1]. Par ailleurs, l'interfrange augmente quand D augmente, et pour être mesurable, il faut que i reste inférieur à la longueur totale du banc motorisé.

> Pour une expérience plus quantitative, on propose de réaliser le dispositif électrique également représenté Fig. 9. En premier lieu, on prépare à l'aide d'un amplificateur linéaire intégré et de deux résistances un amplificateur inverseur (voir la Réf. [4], p. 88) de la tension aux bornes du récepteur (de l'ordre de quelques dizaines de millivolts) pour réaliser une bonne détection d'enveloppe par la suite et obtenir un signal exploitable (de l'ordre du volt). On pourra prendre $R_1 = 1$ kΩ et $R_2 = 100$ kΩ. En second lieu, on réalise un détecteur d'enveloppe, dont le principe est donné dans la Réf. [4] (pp. 215-217). On pourra prendre $R = 10$ kΩ et $C = 100$ nF.
> On pourra alors alimenter le banc motorisé à l'aide d'une source continue de tension afin de mettre le récepteur en mouvement de translation à vitesse constante de l'ordre de quelques centimètres par seconde. On pourra alors mesurer sa vitesse à l'aide d'un chronomètre en mesurant la distance parcourue par le récepteur et le temps de parcours. Pour une mesure plus robuste on pourra à la place utiliser un système de deux fourches optiques reliées à un chronocompteur, en séparant les deux fourches d'une distance de l'ordre de 20 cm. On placera les fourches de telle sorte que la petite languette de la partie mobile du banc passe dans les fourches au cours du déplacement. Le branchement de ces fourches est détaillé dans le TP1 Divers, dans l'expérience sur la chute d'une bille.
> On observera alors le signal en sortie du détecteur d'enveloppe à l'oscilloscope. Sa période permettra de remonter à l'interfrange i. On pourra alors faire l'expérience pour plusieurs espacements a entre les deux émetteurs, afin de vérifier l'Éq. (9). On fera attention que les fils qui relient le récepteur au circuit de détection d'enveloppe ne doivent pas être tendus, sous peine de ralentir le récepteur.

Le choix des composants, notamment des valeurs de R et de C, est fait de telle sorte que la constante de temps RC soit très grande devant la période des ondes ultrasonores $T = 1/f$ (de l'ordre de 25 µs) mais très petite devant la période temporelle du signal correspondant aux franges d'interférences $T_i = i/v$, avec v la vitesse de déplacement du récepteur (de l'ordre de quelques centimètres par seconde) et i l'interfrange. Ici $T_i \simeq 1$ s, tandis que $RC \simeq 1$ ms.

La mesure de la vitesse souffre d'une grosse incertitude si on la mesure directement au chronomètre, qui peut être estimée en mesurant plusieurs fois le temps de parcours du récepteur, puis en effectuant un traitement statistique. Par souci d'efficacité, il est recommandé de ne pas changer la tension d'alimentation du banc motorisé au cours de l'expérience : on peut alors se contenter de faire la mesure de la vitesse uniquement au début.

Le détecteur d'enveloppe est nécessaire, et on ne peut pas brancher directement le récepteur à une carte d'acquisition, car il est impossible de choisir un temps d'échantillonnage suffisamment petit pour observer les oscillations de la tension à la fréquence $f = 40$ kHz ($T_e \leq 1/(2f) = 12{,}5$ µs) tout en faisant une acquisition suffisamment longue (plus longue que quelques

fois la période $T_i \simeq 1\,\mathrm{s}$).

Pour deux émetteurs identiques, et en négligeant la variation de l'amplitude des ondes émises avec la distance, la tension aux bornes du récepteur a l'expression suivante:

$$u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi a t}{i} + \varphi_0\right) \cos(2\pi f t + \varphi_0). \tag{8}$$

En sortie du détecteur d'enveloppe, on récupère le facteur modulant $u_M(t)$, dont la période permet de remonter à l'interfrange i. En reproduisant l'expérience pour différents espacements a entre les deux sources, on peut vérifier la relation

$$i = \frac{\lambda D}{a}. \tag{9}$$

Si on veut accéder à l'intensité acoustique, il suffit de mettre au carré le signal aux bornes du détecteur d'enveloppe.

En pratique, le signal aux bornes du détecteur n'est pas sinusoïdal de période T_i pour deux raisons. En premier lieu, le détecteur d'enveloppe induit une déformation du signal aux faibles amplitudes du fait de la tension de seuil de la diode. Cela est détaillé dans la Réf. [4] (p. 217). En second lieu, les interférences ont lieu dans la figure de diffraction d'un émetteur unique, qui correspond à une tâche d'Airy de taille caractéristique $1{,}22\lambda D/b \simeq 40\,\mathrm{cm}$, comparable à la taille totale du banc. Les valeurs des maxima de la tension correspondant aux interférences constructives fluctuent donc, mais ici on ne mesure que leurs positions qui permettent de remonter à l'interfrange. Pour des rappels sur les observations expérimentales des phénomènes d'interférence et de diffraction, on renvoie le lecteur aux ouvrages d'optique, par exemple la Réf. [3].

Pour un traitement rigoureux de cette expérience, on repérera pour chaque acquisition (correspondant à un espacement a donné entre les deux émetteurs), les instants t_n de tous les maxima d'amplitude et on tracera t_n en fonction de n, qui suit une loi affine dont la pente permet de remonter à v/i. Connaissant la vitesse v, on en déduit l'interfrange i pour une valeur de a. Après plusieurs acquisitions, on peut alors tracer i en fonction de $1/a$, qui suit une loi linéaire de pente λD. En mesurant D avec une règle, on remonte à λ, puis à la célérité des ondes acoustiques c_{ac} dans l'air par la relation $\lambda = c_{\mathrm{ac}}/f$.

Un exemple de réalisation expérimentale avec le matériel d'enseignement peut être trouvé Fig. A3.

VIII. Battements acoustiques de deux diapasons [MP 14]

On propose de réaliser l'expérience suivante, adaptée de la Réf. [5] (pp. 252-253). Cette expérience permet, là encore, d'illustrer le principe d'interférences à deux ondes en acoustique.

Liste du matériel :

- deux diapasons P71.6 émettant une note à la fréquence de 440 Hz,
- des surcharges (masselottes) P71.27,
- un microphone cravate P74.39 (à demander aux techniciens),
- un adaptateur pour microphone P74.38,
- un marteau P71.33,
- un oscilloscope.

> On propose de prendre deux diapasons émettant une note de même fréquence (par exemple un la), et de les placer de sorte que leurs caisses soient en regard et proches. On pourra ensuite fixer sur l'une des branches d'un des diapasons une surcharge, ce qui a pour effet de diminuer légèrement la fréquence de la note émise par le diapason. (*i.e.* son est d'autant plus grave que la masselotte est proche de l'extrémité supérieure de la branche.) On excitera alors les deux diapasons (en tapant dessus avec un marteau) et on visualisera à l'oscilloscope la tension aux bornes d'un microphone placé entre les deux caisses.

On doit alors observer un phénomène de battements acoustiques, avec une tension dont la forme approchée est

$$u(t) = U_0 \cos\left[\pi(f_1 + f_2)t + \phi\right] \cos\left[\pi(f_2 - f_1)t + \phi\right], \tag{10}$$

où f_1 et f_2 désignent les fréquences fondamentales des ondes sonores émises par les deux diapasons. En effet, on suppose que les deux diapasons émettent des surpressions acoustiques au niveau du microphone $p_1(t) = P_1 \cos(2\pi f_1 t)$ et $p_2(t) = P_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi)$. Alors, la tension aux bornes du microphone, qui est proportionnelle à la surpression acoustique, est de la forme

$$\begin{aligned} u(t) &= U_1 \cos(2\pi f_1 t) + U_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi), \\ &= (U_1 + U_2) \cos\left[\pi(f_1 + f_2)t + \varphi/2\right] \cos\left[\pi(f_2 - f_1)t + \varphi/2\right]. \\ &\quad + (U_1 - U_2) \sin\left[\pi(f_1 + f_2)t + \varphi/2\right] \sin\left[\pi(f_2 - f_1)t + \varphi/2\right] \end{aligned} \tag{11}$$

On retrouve alors l'Éq. (10) dans l'hypothèse où l'amplitude sonore reçue sur la membrane du microphone par chacun des diapasons est identique ($U_1 = U_2$). Cela est une hypothèse raisonnable si le microphone est placé à équidistance des deux diapasons, et pour un faible décalage en fréquence (de sorte que la moins bonne adaptation d'impédance ne soit pas significative). Dans tout les cas, le spectre de $u(t)$ doit exhiber deux pics, à $(f_1 + f_2)/2$ et $|f_1 - f_2|/2$.

Ces battements sont la conséquence des interférences entre les ondes émises par chaque diapason. On peut remonter au décalage en fréquence $|f_2 - f_1|$ à partir de la période des battements. Le phénomène de battement est une caractéristique ondulatoire du son, et qu'on retrouve dans différents domaines de la physique dès lors que deux émetteurs d'ondes ne sont pas synchrones.

On peut comprendre qualitativement pourquoi le son émis par le diapason avec surcharge est plus grave, en notant simplement qu'on a augmenté son inertie, de sorte qu'il vibrera moins vite (fréquence plus faible variant comme l'inverse de la racine carrée de sa masse totale).

IX. Effet Doppler par détection synchrone [MPs 5, 14 et 52]

On renvoie le lecteur à la Réf. [6] (pp. 539-545) pour une description détaillée de l'expérience et des aspects théoriques associés. Le principe de la détection synchrone est également détaillé dans le TP2 du fascicule d'électronique. Cette expérience permet d'une part de mettre en évidence l'effet Doppler, qui est une caractéristique ondulatoire du son. D'autre part, elle met en place une méthode de mesure de vitesse par mesure de fréquence.

Liste du matériel :

- le dispositif Jeulin P73.23,
- le boîtier « Doppler par ultrasons » P73.23,
- des émetteur et récepteur ultrasonores P73.23,
- un chronomètre P96.98,
- deux chronocapteurs à fourche P96.27,
- un chronocompteur P96.26,
- un multiplieur P41.15,
- un filtre passe-bas d'ordre 4 P41.21,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

Pour la réalisation de l'expérience, on alimentera le moteur du banc à l'aide du boîtier « Doppler par ultrasons ». Comme dans les expériences précédentes, on cherchera la fréquence de résonance des transducteurs (autour de 40kHz) pour s'y placer.

Pour la mesure de la vitesse du banc, on pourra procéder à l'aide d'un chronomètre, ou bien à l'aide de deux fourches optiques et d'un chronocompteur (plus robuste). On renvoie à l'Exp. VII pour la description de la méthode. On pourra mesurer le décalage fréquentiel δf dû à l'effet Doppler pour plusieurs vitesses de translation de l'émetteur, puis réaliser une régression affine et remonter à la vitesse du son dans l'air c_{air} à l'aide du coefficient directeur. Si l'objectif est de mesurer la vitesse de translation, on peut à l'inverse faire varier la fréquence f d'émission (dans une faible gamme) et tracer le décalage fréquentiel en fonction de f.

On propose ici d'utiliser un filtre passe-bas d'ordre 4 de Butterworth. Il présente l'avantage d'être fortement sélectif et donc d'obtenir une détection synchrone de bonne qualité, mais un simple filtre passe-bas RC est suffisant pour la mesure de δf.

X. Résonateur de Helmholtz (*) [MPs 14, 30 et 54]

On propose de réaliser l'expérience du résonateur de Helmholtz, décrite dans la Réf. [2]. Un résonateur de Helmholtz est une cavité résonante, généralement sphérique, de grand volume V munie d'une embouchure de section s, de diamètre d et de longueur ℓ. Une modélisation simple montre que la pulsation de résonance de ce système est donnée par

$$\omega_0 = c_{air}\sqrt{\frac{s}{V\ell}} \tag{12}$$

avec c_{air} la vitesse du son dans l'air.

Liste du matériel :

- un résonateur de Helmholtz P72.6,
- un microphone cravate P74.39 (à demander aux techniciens),
- un adaptateur pour microphone cravate P74.38,
- un haut-parleur P74.29,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope.

> On propose de placer un microphone à l'intérieur d'un résonateur de Helmholtz, et d'observer le signal à ses bornes à l'oscilloscope. On placera ensuite un haut-parleur, alimenté par un générateur basses fréquences, devant l'embouchure du résonateur. On pourra alors faire varier la fréquence du signal aux bornes du GBF jusqu'à observer la résonance du résonateur de Helmholtz à l'oscilloscope. On pourra alors comparer la valeur de la pulsation de résonance à la valeur donnée par l'Éq. (12), en mesurant les paramètres géométriques du résonateur.

L'Éq. (12) s'obtient aisément en remarquant que dans l'approximation acoustique[2] l'air dans l'embouchure se comporte comme un oscillateur harmonique de masse $m = \rho_{\text{air}} sl$, avec ρ_{air} la masse volumique de l'air. Pour déterminer la raideur, on suppose que le gaz dans le volume du résonateur effectue une transformation isentropique autour d'un état de repos pour lequel sa pression est P_0 (pression atmosphérique) et son volume $V_0 = V$ (quand l'air dans l'embouchure est au repos). En introduisant la compressibilité isentropique $\chi_S = -(1/V)\partial V/\partial P|_S$, on en déduit que la surpression $\Delta P = P - P_0$ dans le volume du résonateur vaut

$$\Delta P = -\frac{s\Delta x}{V\chi_S}, \tag{13}$$

où Δx désigne le déplacement de la colonne d'air dans l'embouchure. On obtient donc que la force s'exerçant sur l'air dans l'embouchure est analogue à une force de rappel élastique, de raideur $k = s^2/(V\chi_S)$. On en déduit alors que la pulsation de résonance de ce système vaut

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{s}{Vl\chi_S\rho_{\text{air}}}}, \tag{14}$$

ce qui redonne bien l'Éq. (12) en utilisant le fait que dans cette approximation, $c_{\text{air}} = 1/\sqrt{\rho_{\text{air}}\chi_S}$. Nous renvoyons à la Réf. [7] (pp. 120-121) pour plus de détails sur l'obtention de cette relation.

En pratique, l'Éq. (12) suppose que seul l'air dans l'embouchure vibre. Cependant, du fait du rayonnement acoustique, l'air dans le résonateur vibre également, ce qui conduit à introduire une longueur effective l_{eff} de l'embouchure, plus grande que l. Dans la limite de grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire $d/\lambda \ll 1$, et au premier ordre en d/λ, on peut montrer que

$$l_{\text{eff}} = l + \frac{8d}{3\pi}. \tag{15}$$

En effet, le problème à considérer ici est un tuyau branché en $x = l$ à une impédance acoustique[3], qui est celle d'une ouverture circulaire. Dans l'hypothèse de grande longueur d'onde, le calcul de cette impédance conduit à

$$\underline{Z_V} = \rho_{\text{air}} c_{\text{air}} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{kd}{2}\right)^2 + j\frac{8}{3\pi}\left(\frac{kd}{2}\right)\right] \simeq \frac{4jkdZ_{\text{ca}}}{3\pi}, \tag{16}$$

où k désigne le vecteur d'onde et $Z_{\text{ca}} = \rho_{\text{air}} c_{\text{air}} = \sqrt{\rho_{\text{air}}/\chi_S}$ l'impédance propagative des ondes acoustiques dans l'air. Pour plus de détails, on se référera à la Réf. [10] (pp. 185-186). Pour une présentation des impédances acoustiques, on pourra se référer à la Réf. [7] (pp. 97-101).

À la sortie de l'embouchure, l'onde de vitesse incidente est réfléchie vers l'embouchure au niveau de l'ouverture circulaire, et son coefficient de réflexion s'écrit

$$r = \frac{\underline{v_r}}{\underline{v_i}} = \frac{\underline{Z_{\text{ca}}} - \underline{Z_V}}{\underline{Z_{\text{ca}}} + \underline{Z_V}} \simeq 1 - \frac{8jkd}{3\pi}. \tag{17}$$

Cela implique donc que l'onde de vitesse réfléchie est déphasée par rapport à l'onde incidente de $8kd/(3\pi)$ (dans l'hypothèse $kd \ll 1$). La même réflexion se produit quand l'onde revient vers l'entrée de l'embouchure. Ainsi, au bout d'un aller-retour, le déphasage complet acquis par l'onde de vitesse vaut, en tenant compte de la propagation sur un aller-retour, et des déphasages induits par les deux réflexions,

$$2\left(kl + \frac{8kd}{3\pi}\right) = 2kl_{\text{eff}}, \tag{18}$$

et cette quantité doit être un multiple entier de 2π pour observer une résonance. Cela justifie pourquoi on peut considérer que l'embouchure se comporte comme un tuyau de taille effective l_{eff} pour l'étude de sa résonance. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [10] (pp. 284-288).

2. Les hypothèses de l'approximation acoustique sont rappelées dans la Réf. [8] (pp. 515-518).
3. On rappelle que l'impédance acoustique correspond à la surpression acoustique divisée par la vitesse de l'écoulement dans le cas d'une onde plane progressive se propageant dans le milieu.

XI. Adaptation d'impédance avec un diapason

On propose, pour illustrer le phénomène d'adaptation d'impédance, plusieurs expériences qualitatives détaillées ci-dessous, et adaptées de la Réf. [5] (pp. 292-293).

Liste du matériel :

- un diapason P71.6 émettant un la à une fréquence de 440Hz,
- un diapason P71.3 émettant une note à une fréquence de 288Hz,
- un marteau P71.33,
- une ou plusieurs surcharges (masselottes) P71.27.

> On propose de réaliser les différentes manipulations suivantes.
> 1. Retirer le diapason de sa caisse, le tenir à la main, et le faire vibrer.
> 2. Mettre le diapason sur sa caisse et le faire vibrer.
> 3. Mettre le diapason sur la caisse d'un autre diapason (émettant à une fréquence fondamentale différente) et le faire vibrer.
> 4. Surcharger le diapason en attachant une masse à l'une de ses branches en le remettant sur sa caisse initiale et le faire vibrer.

On fait alors les observations suivantes :

1. Dans le premier cas, le son émis est très faible mais dure longtemps.
2. Dans le second cas, le son émis est plus intense, mais s'atténue rapidement. Cela est une conséquence de la conservation de l'énergie.
3. Dans le troisième cas, le son émis est audible, mais la transmission est moins bonne. Cela est dû au fait que la caisse de résonance n'a pas la bonne longueur.
4. Dans le dernier cas, les observations sont similaires à celles de la situation précédente.

La caisse d'un diapason permet de réaliser une adaptation d'impédance. C'est une cavité résonante, de longueur proche de $\lambda/4$ pour la fréquence du diapason (avec λ la longueur d'onde reliée à la fréquence f par la relation $\lambda = c/f$), ce qui permet le développement d'une onde stationnaire correspondant à son premier mode propre. En effet, la cavité est assimilable à un tuyau fermé à l'une de ses extrémités où se trouve un ventre de surpression (nœud de vitesse) et ouvert à l'autre l'extrémité où se trouve un nœud de surpression (ventre de vitesse). Elle maximise donc la transmission de l'énergie de vibration du diapason vers le milieu extérieur [7].

En particulier, on insiste sur le fait qu'il n'y a pas d'amplification par la caisse de résonance, qui est simplement un oscillateur passif excité à une fréquence de résonance. Autrement dit, la caisse de résonance se comporte comme un guide d'ondes pour l'onde acoustique émise par le diapason, dont il canalise l'énergie acoustique.

En pratique, la taille de la cavité résonante est inférieure à $\lambda/4$, et le nœud de surpression se trouve légèrement à l'extérieur de la caisse.

XII. Impédance acoustique d'un transducteur [MPs 14 et 40]

On propose de réaliser l'expérience suivante afin d'illustrer le phénomène d'adaptation d'impédance à l'aide de deux transducteurs acoustiques. L'impédance de ces derniers est généralement proche de l'impédance du milieu dans lequel il génère et reçoit des ondes, afin de maximiser la transmission de l'énergie.

Liste du matériel :

- un couple émetteur et récepteur à ultrasons P73.21 adapté à l'acoustique aquatique,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope,
- une cuve en plastique,
- de l'eau.

FIGURE 10 – Expérience pour la mesure du taux d'onde stationnaire et l'adaptation d'impédance en sortie d'un tuyau sonore. On a utilisé les abréviations suivantes : GBF pour Générateur Basses Fréquences et HP pour Haut-Parleur.

> On propose de placer un émetteur et un récepteur ultrasonores adaptés à l'émission-réception dans l'eau l'un en face de l'autre dans une petite cuve initialement vide à une distance d'une vingtaine de centimètres. On alimentera l'émetteur à l'aide d'un générateur basses fréquences avec une amplitude de l'ordre de la dizaine de volts et une fréquence égale à la fréquence de résonance des transducteurs, et on observera le signal aux bornes du récepteur à l'oscilloscope. On remplira ensuite d'eau le fond de la cuve de manière à immerger les transducteurs étanches. On observera alors de nouveau le signal reçu par le récepteur.

Dans le premier cas, on doit observer que l'amplitude de la tension aux bornes du récepteur est quasiment nulle. Dans le second cas, elle est beaucoup plus grande.

Pour comprendre cette expérience, il faut raisonner en termes d'impédance acoustique. On rappelle (voir également l'Exp. X) que l'impédance acoustique Z est le rapport entre l'amplitude de la surpression acoustique et celle de la vitesse des particules de fluide, et vaut $Z = \rho c$ pour un milieu homogène, avec ρ la masse volumique et c la célérité des ondes sonores dans le milieu. Pour une présentation des impédances acoustiques, on pourra se référer à la Réf. [7] (pp. 97-101). En supposant que les émetteur et récepteur sont adaptés pour un fonctionnement dans l'eau (leur impédance acoustique est alors égale à celle de l'eau), la surpression dans le milieu de propagation a pour amplitude

$$p_{\mathrm{m}} = \frac{2Z_{\mathrm{air}}}{Z_{\mathrm{air}} + Z_{\mathrm{eau}}} p_{\mathrm{i}}, \tag{19}$$

avec p_{i} l'amplitude de la surpression émise, tandis que l'amplitude de la surpression reçue par le récepteur vaut

$$p_{\mathrm{r}} = \frac{2Z_{\mathrm{eau}}}{Z_{\mathrm{air}} + Z_{\mathrm{eau}}} p_{\mathrm{m}} = \frac{4Z_{\mathrm{eau}} Z_{\mathrm{air}}}{(Z_{\mathrm{air}} + Z_{\mathrm{eau}})^2} p_{\mathrm{i}}, \tag{20}$$

soit un coefficient de transmission global pour de la propagation dans l'air égal à

$$t_{\mathrm{air}} = \frac{p_{\mathrm{r}}}{p_{\mathrm{i}}} = \frac{4Z_{\mathrm{eau}} Z_{\mathrm{air}}}{(Z_{\mathrm{air}} + Z_{\mathrm{eau}})^2} = 1 \times 10^{-4}, \tag{21}$$

en utilisant les valeurs numériques données dans la Réf. [7] (pp. 101). Pour de la propagation dans l'eau maintenant, le même raisonnement conduit à

$$t_{\mathrm{eau}} = \frac{p_{\mathrm{r}}}{p_{\mathrm{i}}} = \frac{4Z_{\mathrm{eau}}^2}{(Z_{\mathrm{eau}} + Z_{\mathrm{eau}})^2} = 1. \tag{22}$$

Si on raisonne d'un point de vue énergétique, alors on trouve que le coefficient de transmission en énergie est

$$T = \frac{p_{\mathrm{r}} v_{\mathrm{r}}}{p_{\mathrm{i}} v_{\mathrm{i}}} = t^2, \tag{23}$$

où v_{i} et v_{r} désignent les amplitudes des ondes de vitesse, tandis que le produit pv correspond à la puissance acoustique. Dans le cas d'une propagation dans l'eau, toute l'énergie est donc transmise de l'émetteur au récepteur. À l'inverse, dans le cas d'une propagation dans l'eau, la quasi totalité de l'énergie est réfléchie et renvoyée vers l'émetteur sans se propager dans l'air.

XIII. TAUX D'ONDE STATIONNAIRE ET ADAPTATION D'IMPÉDANCE TERMINALE (*) [MP 14]

On propose de réaliser l'expérience suivante, brièvement mentionnée dans la Réf. [13] (pp. 404-406), et schématisée Fig. 10.

Liste du matériel :

- un haut-parleur P74.60,
- un tube cylindrique en plexiglas P72.48,
- un comet P71.21,
- un microphone cravate P74.37 (à demander aux techniciens),

- un adaptateur pour microphone-cosate P74 . 38,
- un générateur basses fréquences,
- un oscilloscope,
- des potences, noix et pinces.

> On propose d'alimenter un haut-parleur avec un générateur basses fréquences émettant un signal sinusoïdal de fréquence $f = 1\,\mathrm{kHz}$. On placera alors en sortie du haut-parleur un tube creux en plastique qui joue le rôle de guide d'ondes (analogue au tube de Kundt, voir TP6). On placera alors de l'autre côté du tube un microphone qu'on fera translater dans le tube et on mesurera la tension aux bornes de celui-ci à l'aide d'un oscilloscope.

Dans le tube en plexiglas s'établit une onde stationnaire. Ainsi, en chaque point, la tension aux bornes du microphone est sinusoïdale de fréquence f et d'amplitude crête-à-crête U qui varie spatialement. On peut alors remonter au taux d'onde stationnaire

$$\mathrm{TOS} = \frac{U_{\max}}{U_{\min}}, \tag{24}$$

où $U_{\max}$ et $U_{\min}$ représentent les amplitudes de la tension aux ventres et nœuds de surpression respectivement. Finalement, on peut remonter au coefficient de réflexion à l'interface entre le guide et l'air par la relation

$$r = \frac{\mathrm{TOS} - 1}{\mathrm{TOS} + 1}. \tag{25}$$

> On pourra réitérer l'expérience en plaçant un cornet à l'extrémité du tube, et observer l'adaptation d'impédance en présence du cornet.

On doit observer que r diminue dans ce second cas.

Le tube en plexiglas joue le rôle de tuyau acoustique fermé par deux impédances, qui tiennent compte du rayonnement acoustique aux extrémités du tube (voir également l'Exp. X) et des conditions aux limites. En négligeant le premier élément, on s'attend à ce que l'extrémité du côté du haut-parleur soit fermée (nœud de vitesse), correspondant à une impédance à priori infinie, tandis que l'autre extrémité soit ouverte si le microphone est suffisamment petit par rapport au diamètre du tube (nœud de surpression), correspondant à une impédance à priori nulle.

Le choix de la fréquence f n'est pas le fruit du hasard. Il faut prendre f suffisamment faible pour éviter d'exciter les modes d'ordre supérieur du guide d'ondes. En effet, la dispersion intermode d'un tuyau sonore de diamètre d est caractérisée par les relations de dispersion

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\mu_{mn}^2}{\pi^2 d^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_{mn}^2} \tag{26}$$

des modes (m, n), où μ_{mn} désigne la position du n-ième extremum de la fonction de Bessel d'ordre m, $\lambda = c/f$ la longueur d'onde dans l'air illimité, $\lambda_g = 2\pi/k_g$ la longueur d'onde dans le tuyau (avec k_g le vecteur d'onde associé à la propagation dans le guide), et $\lambda_{mn} = \pi d/\mu_{mn}$ la longueur d'onde maximale pour que le mode (m, n) puisse se propager dans le guide. Pour de plus amples détails sur la théorie des guides d'onde cylindriques en acoustique, on pourra se référer à la Réf. [10] (p. 249).

Le mode fondamental $(0, 1)$ a la même relation de dispersion qu'en l'absence des conditions aux limites ($\mu_{01} = 0$), tandis que le premier mode excité est le mode $(1, 1)$, pour lequel $\mu_{11} = 1{,}84$ [11]. Cela correspond alors à une fréquence de coupure $f_{11} = c/\lambda_{11} = \mu_{11} c/(\pi d) = 12\,\mathrm{kHz}$ pour $d = 1{,}8\,\mathrm{cm}$.

Idéalement, on souhaiterait que le microphone soit d'extension spatiale nulle, ou tout du moins très inférieure au diamètre du tube afin qu'il ne perturbe pas la structure de l'onde stationnaire dans le tube. Cependant, il est difficile de trouver un tube suffisamment gros et sur lequel on peut venir fixer un cornet à l'extrémité.

Sans cornet, on trouve $\mathrm{TOS} \approx 10$, correspondant à $r \approx 0{,}82$, tandis que la présence du cornet conduit à $\mathrm{TOS} \approx 7{,}5$ et $r \approx 0{,}76$. Le cornet a donc bien permis de réaliser une adaptation d'impédance en diminuant l'onde réfléchie dans le tube. Cela se détecte à l'oreille où on constate qu'on entend mieux le son émis par le haut-parleur en présence du cornet à la sortie du guide. Pour comprendre les variations du TOS, on peut étudier des cas limites. Si le TOS est égal à 1, alors la surpression est sinusoïdale et d'amplitude constante dans le tube, il n'y a donc pas d'onde stationnaire qui s'établit dans le tube et donc pas de réflexion terminale, conduisant à $r = 0$, en accord avec l'Eq. (25). Par contre, si $\mathrm{TOS} = +\infty$, alors $U_{\min} = 0$ et il s'est donc établi une onde stationnaire, avec interférences totalement destructives aux nœuds de surpression, et donc une réflexion totale avec $r = 1$, là encore en accord avec l'Eq. (25).

RÉFÉRENCES

[1] A. Ballory, A. Dreiber et O. Kempf, « Interférences ultrasonores : apports d'une acquisition informatisée », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 818 (1999).

[2] F. Bernardot, J. Bruneaux et J. Matricon, « Un archétype d'oscillateur : le résonateur acoustique de Helmholtz », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 845 (2002).

[3] R. Duffait, *Agrégation de Sciences Physiques - Expériences d'optique*, Bréal (1997).

[4] R. Duffait et J.-P. Lièvre, *Agrégation de Sciences Physiques - Expériences d'électronique*, Bréal (1999).

[5] R. Duffait, *Expériences de Physique - CAPES de sciences physiques*, Bréal (2008).

[6] M. Fourhart, P. Lidon, E. Thibierge, M. Champion et A. Le Diffon, *Physique expérimentale. Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, De Boeck Supérieur (2016).

[7] C. Garing, *Ondes Mécaniques et Diffusion*, Ellipses (1998).

[8] L. Landau et E. Lifchitz, *Théorie de l'élasticité*, Éditions Mir (1990).

[9] R. Le Goff, « Modulation d'amplitude, détection synchrone », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 771 (1995).

[10] L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens et J. V. Sanders, *Fundamentals of Acoustics*, Wiley (2000).

[11] R. Moreau, « Propagation guidée des ondes acoustiques dans l'air », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 742 (1992).

[12] P. Oswald, *Rhéophysique. Ou comment coule la matière*, Belin (2021).

[13] L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale. Tome I : la mécanique*, Pierron (2002).

[14] https://www.makeitfrom.com/material-properties/2014-AlCu4SiMg-3.1255-A92014-Aluminum (consulté le 19 octobre 2022).

Exemples de résultats expérimentaux

Figure A1 – Exemple de signal aux bornes d'un récepteur ultrasonore après propagation du son dans l'eau et dans le Dural. À gauche pour une incidence normale sur le Dural, à droite pour une incidence faible de quelques degrés (voir l'Exp. IV).

Figure A2 – Exemple d'expérience du trombone de König. On a représenté les positions de la coulisse correspondant aux interférences constructives en fonction de l'ordre d'interférence (voir l'Exp. VI).

Figure A3 – Exemple d'expérience des trous d'Young en acoustique. À gauche, représentation du signal obtenu par détection d'enveloppe aux bornes du récepteur. Sa période permet de remonter à l'interfrange, qu'on représente à droite en fonction de la distance entre les deux émetteurs (voir l'Exp. VII).

Phénomènes de surface et capillarité

Table des expériences

I.	Contact entre deux solides [MPs 7 et 58]	64
II.	Mouvement de stick-slip (*) [MPs 7, 8 et 9]	67
III.	Force capillaire	69
IV.	Loi de Laplace et mûrissement d'Ostwald	70
V.	Goutte posée (*) [MP 10]	71
VI.	Goutte pendante [MPs 10 et 47]	72
VII.	Loi de Jurin [MP 10]	75
VIII.	Balance d'arrachement [MPs 10 et 58]	79
IX.	Concentration micellaire critique (*) [MPs 10 et 58]	80
X.	Loi de Tate (*) [MP 10]	81
XI.	Ondes capillaires à la surface d'un liquide [MPs 10, 13, 30 et 31]	82
XII.	Instabilité de Rayleigh-Plateau (*) [MPs 8, 10, 12, 13 et 47]	82

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve-orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Contact entre deux solides [MPs 7 et 58]

1. Rappels théoriques

Nous allons mettre en évidence expérimentalement quelques aspects des lois d'Amontons-Coulomb. Celles-ci sont détaillées dans la Bél. (1) (pp. 20-21) à laquelle on pourra se référer pour de plus amples détails. Ici, on en rappelle les aspects principaux dans le cas d'un patin glissant sur un substrat solide.

- Partant du repos, il faut exercer une force tangentielle $\left\|\vec{T}\right\|$ supérieure ou égale à $\mu_s \left\|\vec{N}\right\|$ pour mettre en mouvement le patin. $\left\|\vec{N}\right\|$ est la norme de la force de réaction normale à la surface de contact, μ_s est appelé coefficient de frottement statique et dépend de la nature des deux surfaces en contact. Tant que le patin est immobile, la réaction tangentielle est à priori indéterminée (et dépend de l'histoire du système).
- Une fois le patin en mouvement, la norme de la force de frottement $\left\|\vec{T}\right\|$ est égale à $\mu_d \left\|\vec{N}\right\|$, où μ_d désigne le coefficient de frottement dynamique. La force de frottement est alors de même direction que la vitesse de glissement, et de sens opposé.

μ_d et μ_s ont des valeurs comprises typiquement entre 0,1 et 1 et $\mu_d \lesssim \mu_s$.

2. Mesure du coefficient de frottement statique

Nous proposons une expérience afin de mesurer le coefficient de frottement statique d'un patin sur une surface en bois recouverte d'une feuille de papier.

Liste du matériel :

- le dispositif P82.14 constitué d'un actionneur et d'un capteur de force conditionné,
- le bloc P82.10/3,
- une cale en bois P25.1,
- une feuille de papier,
- une balance P97.21,
- des masses marquées P98.10,
- un module Hamag P28.1,

► un oscilloscope.

> Nous proposons de réaliser le montage de la Fig. 1. Celui-ci utilise un actionneur permettant de tirer sur un ressort à vitesse constante. Cette actionneur sera relié ensuite à un capteur de force conditionné renvoyant une tension qui varie avec la force exercée par l'actionneur. Le capteur de force est fragile, il faut donc manipuler le dispositif avec précaution! Si la relation tension-force du capteur n'est pas connue, il convient de l'étalonner. Dans notre cas, le capteur est linéaire et sa loi de comportement est $F = kU + F_0$, où les constantes k et F_0 sont indiquées dans la notice du dispositif `P82.14`. En particulier, on a $k \simeq -3{,}04\,\mathrm{N\cdot V^{-1}}$.
> On pourra alors attacher l'actionneur à un ressort (dans le sachet du bloc `P82.10/3`), lui-même attaché à un mobile `P82.10/3` (recouvert d'adhésif noir et d'une bande réfléchissante) que l'on fera glisser sur une feuille de papier scotchée à une cale en bois pour assurer une meilleure homogénéité de la surface.
> On alimentera alors l'actionneur avec une source de tension continue (pour l'instant avec une tension de l'ordre du volt), et on observera à l'oscilloscope en mode « Défilement » la tension aux bornes du capteur. À partir de l'enregistrement, on pourra en déduire la force nécessaire pour mettre en mouvement le patin, ce qui permettra de remonter au coefficient de frottement statique. Pour rendre l'expérience robuste, on pourra effectuer l'expérience plusieurs fois en chargeant le patin avec différentes masses marquées (typiquement entre 0g et 200g).

L'actionneur est un moteur à courant continu relié à une tige qui permet de convertir le mouvement du rotation uniforme du moteur en un mouvement de translation uniforme. Le capteur de force est un capteur Tesnsell à jauges de contrainte pour la mesure de force en traction ou en compression. Lors de la traction ou de la compression, les jauges se déforment, et leur résistance électrique varie. À l'aide d'un pont de Wheatstone, on peut convertir cette variation de résistance en une tension, qui donne une image de la force.

Il ne faut pas déposer sur le patin une masse trop importante sous peine de dépasser la force que peut mesurer le capteur de force, ici de l'ordre de 10 N. Cela correspond à une masse totale inférieure à 1 kg en ordre de grandeur.

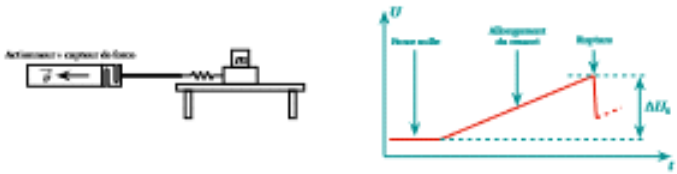


FIGURE 1 – Schéma de l'expérience de mesure du coefficient de frottement statique. À droite, évolution schématique de la tension au cours de l'expérience proposée.

On s'attend à ce que la force mesurée par le capteur augmente linéairement du fait de l'allongement du ressort, jusqu'à diminuer brutalement quand la force exercée par le ressort compense la réaction tangentielle du support et que le patin se mette en mouvement. La différence de tension ΔU_s entre le moment où le ressort est au repos et le moment où le patin se met en mouvement permet de remonter au coefficient de frottement statique connaissant la relation tension-force et la masse du patin. Dans le cas d'un capteur de force linéaire de gain k, on a simplement

$$F_s = k\Delta U_s = \mu_s(m + m_p)g, \tag{1}$$

où g désigne l'intensité de la pesanteur, m_p la masse du patin non lesté (qu'il faudra mesurer à l'aide d'une balance), et m la masse supplémentaire éventuelle posée sur le patin. On pourra alors tracer ΔU_s en fonction de m et faire un ajustement affine, dont la pente permettra de remonter à μ_s. Un exemple de réalisation expérimentale est donné Fig. A1.

Les incertitudes devront être traitées avec soin. Notamment, il convient de répéter la même expérience plusieurs fois pour une même valeur de masse m, car le résultat de la mesure peut fluctuer. On pourra alors effectuer un traitement statistique des incertitudes.

3. Mesure du coefficient de frottement dynamique

Nous proposons maintenant une expérience afin de mesurer le coefficient de frottement dynamique d'un patin sur une surface en bois recouverte d'une feuille de papier.

Liste du matériel :

- le dispositif P82.14 constitué d'un actionneur et d'un capteur de force conditionné,
- le bloc P82.10/3,
- une cale en bois P25.1,
- une feuille de papier,
- une balance P97.21,
- des masses marquées P98.10,
- un module Hameg P28.1,
- un oscilloscope.

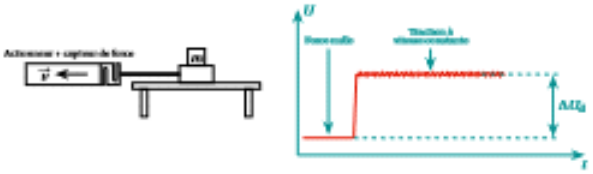


FIGURE 2 – Schéma de l'expérience de mesure du coefficient de frottement dynamique. À droite, allure de la tension en sortie du capteur de force au cours de temps pendant l'expérience.

> On propose maintenant de réaliser l'expérience schématisée Fig. 2, en utilisant le même dispositif que pour l'expérience précédente. Pour cela, on reliera cette fois-ci le patin directement à l'actionneur. On alimentera ce dernier avec une alimentation continue de 4V environ, ce qui permettra de déplacer le patin à vitesse constante. On pourra là encore observer à l'oscilloscope en mode « Défilement » l'évolution de la tension aux bornes du capteur de force, ce qui permettra de remonter au coefficient de frottement dynamique. Pour rendre l'expérience plus robuste, on pourra là encore répéter l'expérience en lestant au préalable le patin avec une ou plusieurs masses marquées de masse m connue.

On s'attend dans ce cas à ce que la tension aux bornes du capteur de force soit constante quand le patin est en mouvement. Si on note ΔU_d la variation de tension aux bornes du capteur entre les situations où l'actionneur est à l'arrêt et où le patin est en mouvement, et en supposant toujours que le capteur de force est linéaire de gain k, on a cette fois-ci :

$$F_d = k\Delta U_d = \mu_d(m + m_p)g, \tag{2}$$

avec les mêmes notations que dans l'expérience précédente.

Un exemple de réalisation expérimentale est donné Fig. A1. La courbe ΔU_d en fonction de m a été tracée, et son ajustement affine a permis de remonter au coefficient dynamique par la mesure de la pente. Là encore, un traitement statistique des incertitudes s'impose.

4. Cône de frottement (*)

FIGURE 3 – On augmente l'angle d'inclinaison α jusqu'au glissement du patin.

On propose l'expérience suivante, schématisée Fig. 3 qui permet de mettre en évidence la notion de cône de frottements, c'est-à-dire le fait que $\mu_s > \mu_d$.

Liste du matériel :

- le bloc P82.10/3,
- une feuille de papier,
- une planche en bois P25.1,
- un rapporteur.

> On propose de poser un patin sur une planche en bois inclinable, sur laquelle on aura scotché une feuille de papier. On pourra alors incliner la planche jusqu'à observer le glissement du mobile, et on notera l'angle α_s correspondant. On peut alors vérifier que si on diminue un peu l'angle, le mobile continue de glisser. Il faut alors diminuer suffisamment l'angle pour observer l'arrêt du patin.

Dans le premier cas, le glissement se produit quand la projection du poids parallèlement au support compense la force de réaction du support tangentielle maximale en l'absence de glissement, soit

$$mg\sin\alpha_s = \mu_s mg\cos\alpha_s \Longrightarrow \tan\alpha_s = \mu_s, \tag{3}$$

où $mg\cos\alpha_s$ désigne la norme de la réaction normale. Le patin s'arrête quand sa vitesse s'annule. Attention que l'angle α auquel le patin s'arrête est inférieur à $\alpha_d = \arctan\mu_d$ car pour cette valeur d'angle, la composante tangentielle de la réaction normale est compensée par la projection du poids le long du support, mais la vitesse du patin ne s'annule pas. Il faut que le patin décélère suffisamment, ce qui requiert un angle d'arrêt $\alpha < \alpha_d$.

On peut se contenter d'une estimation du coefficient de frottement statique dans cette expérience. On peut également rendre l'expérience plus quantitative en reproduisant plusieurs fois l'expérience, et en effectuant un traitement statistique des incertitudes.

5. Influence de la surface de contact (*)

On termine par illustrer le fait que la force de contact est indépendante de la surface, mais ne dépend que des matériaux qui sont en contact.

FIGURE 4 – La force nécessaire pour faire glisser les masses est identique dans les deux situations. Elle est indépendante de la surface de contact.

> On pourra par exemple réaliser l'expérience schématisée Fig. 4. Cette mise en évidence est plus délicate car il faut s'assurer que les coefficients de frottement des différents blocs sont les mêmes.

II. MOUVEMENT DE STICK-SLIP (*) [MPs 7, 8 ET 9]

Nous proposons d'étudier le mouvement de *stick-slip*, ou *collé-glissé*, qui est un type d'oscillations de relaxation que l'on rencontre dans différents domaines : crissement d'une craie, frottement d'un archet sur un violon, etc. On considère un bloc solide posé sur un substrat que l'on tire avec un ressort de raideur k à la vitesse constante v. Tant que la force exercée par le ressort n'excède pas $\mu_s mg$, le bloc reste immobile. Une fois que l'allongement du ressort est suffisant, le bloc est entraîné par le ressort et peut alors glisser. Il finit par s'arrêter au premier instant où sa vitesse s'annule. En particulier, on notera que ces oscillations apparaissent uniquement si on tient compte du fait que $\mu_s > \mu_d$.

Liste du matériel :

- le dispositif P82.14,
- le bloc P82.10/3,
- une cale en bois P25.1,
- une feuille de papier,
- un module Hameg P28.1,
- le dispositif VidéoCom P17.14/2,
- des masses marquées P98.10,
- des noix, pinces et potences,
- un oscilloscope.

> On propose de réaliser l'expérience schématisée Fig. 5. Pour cela, on utilisera l'actionneur et le capteur de force déjà présentés dans les expériences précédentes. On alimentera ensuite l'actionneur. Pour le matériel de la collection, on commencera par alimenter l'actionneur sous une tension de l'ordre de 4V.
> On prendra une cale en bois sur laquelle on aura scotché une feuille de papier. On reliera le mobile à l'actionneur à

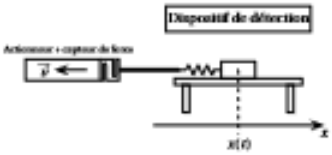


FIGURE 5 – Schéma de l'expérience de stick-slip.

> l'aide d'un ressort, après avoir mesuré les propriétés de ce dernier, sa constante de raideur k et sa longueur à vide ℓ_0. Pour cela, on pourra prendre différentes masses marquées m connues (jusqu'à 100 g environ) qu'on pendra à l'extrémité du ressort, et mesurer l'allongement.

On pourra alors tracer mg en fonction de l'allongement et effectuer une régression affine, dont la pente permettra de remonter à la constante de raideur du ressort, et l'ordonnée à l'origine d'en déduire la longueur à vide.

On peut ensuite procéder à une analyse du mouvement.

> On met en fonctionnement l'actionneur. Pour étudier la cinématique du mouvement du pendule, on peut observer le signal au capteur de force, qui permet de connaître la force exercée par le ressort. Néanmoins, le signal obtenu peut être bruité. On suggère donc d'utiliser un dispositif de détection du mobile, par exemple le dispositif VidéoCom (voir le TP2 pour plus de détails, ou bien la Réf. [5]).
> Il faudra visser une tige filetée au dispositif VidéoCom. On suspendra le dispositif de détection au-dessus du bloc de bois (environ 30 cm au-dessus), et on l'alimentera en branchant le petit câble de la caméra sur le port LED sur le coté de celle-ci (les LED s'allument).

Pour le traitement des données, nous utilisons le logiciel adapté au dispositif de détection, à savoir VidéoCom Mouvements.

> Dans l'outil `Réglages`, on choisira une période d'acquisition suffisamment basse pour résoudre les différentes phases du mouvement (en l'occurrence ici, on prendra la plus petite période d'acquisition possible de 0,25 ms). Dans `Généralités`, on choisira `Raccord Série` → USB. La détection du mobile est parfois un peu capricieuse. S'il n'est pas détecté, on pourra ajuster l'éloignement de la caméra, son inclinaison, le zoom et le diaphragme de la caméra. Une fois la caméra ajustée, il faudra réaliser le calibrage en distance. On pourra par exemple, pour différentes positions du mobile (mesurées à la règle), noter le nombre de pixels correspondant.
> On pourra enfin réaliser une acquisition. On pourra par exemple enregistrer une dizaine de phases de stick-slip. La mesure des durées des phases de glissement et de non-glissement, ainsi que l'amplitude du mouvement du patin dans la phase de glissement, permettent notamment de remonter à la différence entre les coefficients de frottements statique et dynamique. On pourra alors comparer aux valeurs obtenues dans les expériences précédentes.

Le dispositif VidéoCom est constitué de LED qui émettent des flashs lumineux à intervalles réguliers, et d'une barrette CCD qui détecte la position du mobile grâce à la réflexion du flash lumineux sur une bande réfléchissante scotchée sur le mobile (voir également le TP2).

Le traitement théorique du problème et la description des différentes phases du mouvement se font comme suit. On applique le principe fondamental de la dynamique au mobile dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen en projection selon l'horizontale :

$$m_p\ddot{x} = -k(x - x_a(t) - \ell_0) + T, \tag{4}$$

où m_p désigne la masse du patin, $x_a(t)$ la position du point d'attache du ressort au cours du temps (qui vérifie $\dot{x}_a(t) = -v$ avec v la vitesse de translation communiquée par l'actionneur), et T la norme de la composante tangentielle de la réaction du support.

On fait tout d'abord l'hypothèse que le patin ne glisse pas. Dans ce cas, on a simplement

$$T = k(x - x_a(t) - \ell_0), \tag{5}$$

et cette égalité est possible tant que $\epsilon < \mu_s m_p g/k$, où $\epsilon = x - x_a - \ell_0$ désigne l'allongement du ressort.

On fait maintenant l'hypothèse que le patin glisse à la suite d'une phase de non-glissement, en notant $t = 0$ le début de la phase de glissement. Dans ce cas, l'équation différentielle se réécrit pour l'allongement

$$m_p\ddot{\epsilon} + k\epsilon = \mu_d m_p g \Longrightarrow \epsilon(t) = \frac{\mu_d m_p g}{k} + \frac{(\mu_s - \mu_d)m_p g}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_p}}t\right) + v\sqrt{\frac{m_p}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_p}}t\right). \tag{6}$$

en utilisant la continuité de la position et de la vitesse du patin à la rupture du non-glissement. Dans ce cas de glissement, la position du mobile est donc donnée par (avec $x_0(t) = x_0(0) - vt = -\ell_0 - \mu_d m g/k - vt$)

$$x(t) = -vt - \frac{(\mu_s - \mu_d)m_p g}{k}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_p}}\,t\right)\right] + v\sqrt{\frac{m_p}{k}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_p}}\,t\right). \tag{7}$$

La phase de glissement s'arrête quand la vitesse du mobile s'annule. En effet, à cet instant-ci, le mobile ne glisse pas et la composante tangentielle de la réaction du support est égale à $\mu_d m_p g < \mu_s m_p g$ (cas statique). On aboutit alors à la durée de la phase de glissement ($v\delta pt$) :

$$\dot{x}(t_g) = 0 \Longrightarrow t_g = 2\sqrt{\frac{m_p}{k}}\left[\pi - \arctan\left(\sqrt{\frac{m_p}{k}}\,\frac{(\mu_s - \mu_d)g}{v}\right)\right]. \tag{8}$$

Au moment de l'arrêt du mobile, l'élongation du ressort vaut

$$\epsilon(t_g) = \frac{(2\mu_d - \mu_s)m_p g}{k}, \tag{9}$$

tandis que le patin s'est déplacé d'une distance (en valeur absolue)

$$\Delta x = x(0) - x(t_g) = \frac{2(\mu_s - \mu_d)m_p g}{k} + vt_g. \tag{10}$$

À partir de ce moment, une nouvelle phase de non-glissement (stick) reprend jusqu'à ce que l'élongation du ressort atteigne la valeur limite $\epsilon(t_g + t_{ng}) = \mu_s m_p g/k$, où t_{ng} désigne la durée de la phase de non-glissement.

Ainsi, un résumé du mouvement du patin est une alternance de :

- phases de non-glissement durant lesquelles le mobile reste immobile tandis que l'élongation du ressort croît de façon linéaire à la vitesse v, ces phases de non-glissement ayant une durée

$$t_{ng} = \frac{\epsilon(t_g + t_{ng}) - \epsilon(t_g)}{v} = \frac{2(\mu_s - \mu_d)m_p g}{k}\,; \tag{11}$$

- phases de glissement durant lesquelles l'élongation varie de façon sinusoïdale, ces phases de glissement ayant une durée

$$t_g = 2\sqrt{\frac{m_p}{k}}\left[\pi - \arctan\left(\sqrt{\frac{m_p}{k}}\,\frac{(\mu_s - \mu_d)g}{v}\right)\right]. \tag{12}$$

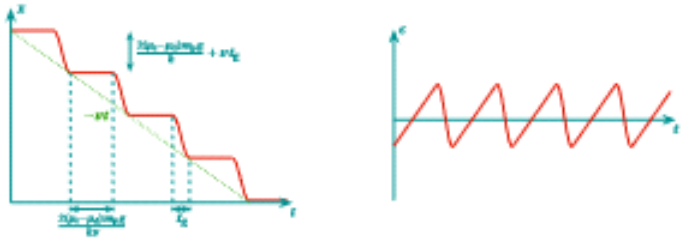


FIGURE 6 – Allure de la position x du bloc et de l'allongement ϵ du ressort en fonction du temps lors d'un mouvement de stick-slip.

Un exemple de trajectoire du patin obtenu avec le matériel de la collection est donné Fig. A2. La trajectoire du patin est également schématisée Fig. 6.

III. FORCE CAPILLAIRE

On propose de réaliser l'expérience suivante, inspirée de la Réf. [3] (pp. 13-15), décrite dans la Réf. [12] (pp. 40-41), et schématisée Fig. 7. Cette expérience permet d'illustrer le concept de force capillaire.

Liste du matériel :

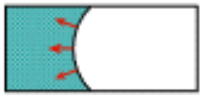


FIGURE 7 – Expérience illustrant la notion de force capillaire.

- un cadre rectangulaire avec un fil de nylon P105 . 15.
- le « liquide à bulles » P76.

> On propose de préparer un liquide savonneux dans lequel on plonge un cadre rectangulaire d'environ 5 cm de côté sur lequel est fixé un fil ou un rail mobile. Cela permettra de former deux films de savon de part et d'autre du fil ou du rail. On pourra alors percer l'un des deux films avec le doigt et observer la déformation du fil ou le déplacement du rail.
> Ne pas gaspiller le liquide à bulle : remettre le contenu du bêcher dans le flacon une fois l'expérience terminée.

Le fil ou le rail se déplace de façon à faire diminuer l'aire du film de savon[1] restant. Au départ, chaque interface exerce une force dirigée dans le plan de la surface, et qui s'oppose à toute croissance de cette dernière. Les forces s'équilibrent donc, de sorte que le fil est au repos. Lorsqu'on brise un film, les forces capillaires ne se compensent plus, menant à la déformation du film de savon. Cette déformation est en réalité complexe et la forme prise par le fil dépend notamment de son élasticité.

IV. Loi de Laplace et mûrissement d'Ostwald

On propose de réaliser l'expérience schématisée Fig. 8, inspirée des Réf. [3] (p. 16) et Réf. [12] (p. 44).

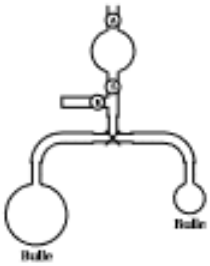


FIGURE 8 – Expérience illustrant le mûrissement d'Ostwald.

Liste du matériel :

- le « liquide à bulles » P76,
- une propipette et un système de robinets P105 . 41.

> On propose de remplir un bêcher d'un liquide savonneux, puis de mettre un robinet à trois entrées de façon à relier la propipette et le premier tuyau. La propipette permet de souffler l'air dans chacun des conduits, et donc de gonfler des bulles. On pourra alors tremper l'extrémité du conduit dans le liquide et gonfler la bulle en appuyant sur B. On pourra ensuite faire de même pour le second conduit, en formant une bulle de taille différente. On pourra enfin tourner le robinet de façon à relier les deux bulles et observer l'évolution des deux gouttes.

On doit observer que la petite bulle se vide dans la grande, un phénomène appelé mûrissement d'Ostwald.

1. On rappelle qu'un film de savon est constitué de deux interfaces liquide-gaz.

FIGURE 9 – Schéma de l'expérience de la goutte posée pour la mesure de la tension de surface entre un liquide et l'air.

La loi de Laplace indique qu'à l'équilibre thermodynamique avec un thermostat et un réservoir de volume à la pression p_0, la pression p au sein d'une bulle sphérique de rayon R est $p = p_0 + 4\gamma_{\ell g}/R$, où $\gamma_{\ell g}$ est la tension superficielle de l'interface liquide-air[2]. En mettant les deux robinets en contact, la pression du gaz dans la grande bulle est inférieure à celle dans la petite bulle, ce qui génère un écoulement d'air dirigé de la petite bulle vers la grande.

V. GOUTTE POSÉE (*) [MP 10]

On propose l'expérience suivante décrite dans la Réf. [12] (pp. 46-47) et schématisée Fig. 9.

Liste du matériel :

- une lampe QI,
- un filtre anticalorique,
- un support ajustable `P25.0`,
- divers substrats solides `P105.48`,
- de l'eau distillée,
- un achromat de distance focale $f' = 10$ cm,
- un écran.

> On propose, avec une lampe en lumière blanche, d'éclairer un substrat solide sur lequel on aura déposé une goutte suffisamment grosse d'un liquide dont on souhaite connaître la tension de surface avec l'air $\gamma_{\ell g}$. La goutte doit paraître écrasée, comme un « pancake ». Avec une lentille de projection de distance focale $f' = 10$ cm, on pourra faire l'image de la goutte sur un écran à une distance $D = 1$ m de la lentille. On pourra alors mesurer sur l'écran de projection l'angle de mouillage θ que fait la ligne triple de contact entre les phases solide, liquide et gaz avec le substrat solide, ainsi que la hauteur h du dôme liquide. Cela permettra de remonter à la tension de surface $\gamma_{\ell g}$ entre le liquide et l'air.
> Pour mesurer la hauteur h, il faudra au préalable effectuer la calibration entre distance vraie et distance mesurée sur l'écran en remplaçant le substrat et la goutte par un objet de taille connue (comme une grille).
> On peut rendre l'expérience plus quantitative en considérant plusieurs substrats solides pour un même liquide au contact avec l'air. Pour chaque substrat, on pourra mesurer θ et h pour en déduire $\gamma_{\ell g}$.

La hauteur h est reliée à l'angle θ par la relation

$$h = 2\sqrt{\frac{\gamma_{\ell g}}{\rho_\ell g}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \tag{13}$$

où ρ_ℓ désigne la masse volumique du liquide. Pour plus de détails sur l'obtention de cette formule, on renvoie le lecteur à la Réf. [3] (pp. 40-42). Cela permet *in fine* de remonter à la tension de surface $\gamma_{\ell g}$.

En premier lieu, il faut s'assurer que la distance D entre la goutte et l'écran est supérieure à $4f'$, avec f' la distance focale de la lentille de projection. Dans le cas où $D > 4f'$, il y a alors deux positions de la lentille qui donnent une image nette sur l'écran, et celle de grandissement maximal correspond à la situation où la lentille est plus proche de l'objet que de l'image. Il faut alors placer le côté le plus plat de la lentille vers l'objet pour minimiser les aberrations géométriques (4P pour Plus Plat Plus Près), tandis que l'utilisation d'un achromat permet de s'affranchir des aberrations chromatiques. En second lieu, pour maximiser le grandissement, il faut privilégier des petites distances focales f' et des grandes distances objet-écran D. Néanmoins, cela diminue la luminosité. Un compromis est donc trouvé pour une distance focale $f' = 10$ cm et une distance D inférieure ou de l'ordre du mètre.

2. On rappelle qu'un film de savon est composé de deux interfaces liquide-gaz, et on néglige l'épaisseur du film devant le rayon de courbure de l'interface.

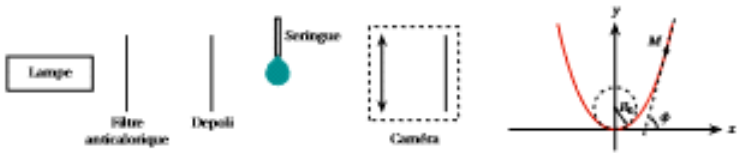


FIGURE 10 – À gauche, schéma de l'expérience de la goutte pendante. À droite, schéma d'une goutte pendante introduisant différentes notations utilisées dans la suite.

Comme mentionné précédemment, la goutte doit être suffisamment grosse pour que l'Éq. (13) soit vérifiée. En effet, pour de petites tailles de gouttes, les effets capillaires dominent les effets de pesanteur (dont la compétition est dictée par la longueur capillaire $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma_{lg}/(\rho_l g)}$) et la goutte forme alors une calotte sphérique. Par contre, à plus grands volumes de gouttes, la goutte s'aplatit du fait des effets de pesanteur et l'Éq. (13) devient valable.

Dans le cas où on utilise plusieurs substrats solides, on effectuera la régression affine h en fonction de $\sin(\theta/2)$ dont la pente permet de remonter à γ_{lg}. Pour une mesure correcte de θ, on mesurera les deux angles de mouillage visibles sur l'écran et on en fera la moyenne afin de tenir compte de l'hystérésis de mouillage. Pour plus de détails sur cet aspect, on renvoie le lecteur à la Réf. [3] (pp. 69-71). La mesure de l'angle de mouillage reste délicate, et soumise à d'importantes incertitudes quant au tracé de la tangente à la surface libre de la goutte au niveau de la ligne triple.

VI. GOUTTE PENDANTE [MPS 10 ET 47]

On propose de réaliser l'expérience suivante, largement inspirée de la Réf. [7], et schématisée Fig. 10.

Liste du matériel :

- une lampe QI,
- un dépoli,
- un filtre anticalorique,
- un achromat convergent de distance focale $f' = 10$cm,
- un écran,
- une seringue P104.44,
- de l'eau distillée,
- un Palmer P96.14,
- un système de potences, noix et pinces,
- une caméra P32.27,
- un objectif zoom macro P32.60.

> On propose, avec une lampe en lumière blanche, d'éclairer une seringue contenant un liquide dont on souhaite connaître la tension de surface avec l'air. On formera avec la seringue une goutte en se plaçant juste avant que la goutte ne se décroche par gravité. On placera entre la lampe et la seringue un dépoli qui diffuse la lumière afin d'éclairer la goutte de façon homogène. On fera alors l'image de la goutte la plus grande et la plus nette possible à l'aide d'un appareil photo (ou d'une caméra) muni(e) d'un zoom. On prendra garde à bien aligner les différents éléments du dispositif, notamment afin que les pans de la seringue soient parallèles aux bords de l'image.

Le fait de se placer juste avant que la goutte ne se décroche par gravité permet de former une goutte la plus grosse possible, et donc d'augmenter la résolution. La forme de la goutte résulte d'une compétition entre pesanteur et capillarité (comme cela sera détaillé plus loin). Les effets capillaires dominent aux petites échelles, tandis que les effets de pesanteur dominent aux plus grandes échelles, et cette compétition est dictée par la longueur capillaire $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma_{lg}/(\rho_l g)}$ (avec γ_{lg} la tension de surface à l'interface liquide-air, et ρ_l la masse volumique du liquide).

Dans un premier temps, on peut faire l'image de la goutte à l'aide d'une lentille de projection sur un écran afin de vérifier que l'éclairement est bien homogène. Pour cela, il faut s'assurer que la distance D entre la goutte et l'écran est supérieure à $4f'$, avec f' la distance focale de la lentille de projection. Dans le cas où $D > 4f'$, il y a alors deux positions de la lentille qui donnent une image nette sur l'écran, et celle de grandissement maximal correspond à la situation où la lentille est plus

proche de l'objet que de l'image. Il faut alors placer le côté le plus plat de la lentille vers l'objet pour minimiser les aberrations géométriques, tandis que l'utilisation d'un achromat permet de s'affranchir des aberrations chromatiques.

Une fois l'image prise, il faut effectuer un traitement de l'image pour obtenir les coordonnées des points de la surface de la goutte.

> L'étape suivante consiste à extraire de la photographie prise le profil de la goutte, et pour cela, on propose d'utiliser le logiciel ImageJ. On effectuera alors la succession de commandes suivantes.
>
> 1. On mesurera une distance connue sur l'image afin de connaître la conversion mpa/mm de l'image (par exemple à l'aide du diamètre de la seringue).
> 2. On transformera l'image en une image en noir et blanc codée sur 8 bits grâce à la commande `Image > Type > 8-bit`.
> 3. On rognera l'image de telle sorte à ne garder que l'image de la goutte (sans la seringue) en sélectionnant la partie d'intérêt de l'image avec l'Outil `Rectangle`, puis on utilisera la commande `Image > Crop`.
> 4. On utilisera la macro `macro_goutte_pendante.ijm`, construite à partir de la Réf. [8] (pp. 27-28), et qui permet, à partir de cette image rognée, d'extraire le profil squelettique de la goutte au pixel près.
>
> On obtiendra finalement un fichier .txt qui contient les coordonnées (x, y) en pixels des points de la surface libre de la goutte dans les deux premières colonnes et l'intensité dans la dernière colonne (égale à 255 car le contour est noir à la fin du traitement de l'image).

La macro `macro_goutte_pendante.ijm` est reproduite et commentée ci-dessous. L'élément `[nom_du_fichier]` doit être modifié avec le nom sous lequel on veut enregistrer les coordonnées des points du profil de la goutte.

```
setAutoThreshold("Default");
//run("Threshold...");
//setThreshold(0, 85);
setOption("BlackBackground", false);
run("Convert to Mask");
run("Fill Holes");
run("Find Edges");
run("Skeletonize");
run("Save XY Coordinates...", "background=0 save=[nom_du_fichier].txt");
```

La macro ImageJ réalise les instructions suivantes (voir Fig. 11, qui constitue également un exemple de réalisation de cette expérience avec le matériel de la collection) :

1. un seuillage d'image `Image > Adjust > Threshold`, qui permet de définir quel niveau de gris correspond à la limite entre « noir » et « blanc »,
2. un remplissage des trous `Process > Binary > Fill Holes` afin que la goutte apparaisse toute noire et l'extérieur tout blanc,
3. une détection de contours `Process > Find Edges` pour obtenir le profil de la goutte,
4. un détermination du contour au pixel près `Process > Binary > Skeletonize`,
5. un enregistrement des données sous la forme de coordonnées en pixels des points du profil de la goutte `Analyze > Tools > Save XY Coordinates`.

Une fois le traitement de l'image effectué, il faut traiter les données, notamment afin de remonter à la tension de surface. Pour cela, on propose d'utiliser le code Python `python_Stalagmometrie_lyon.py`, inspiré de la Réf. [7] (à laquelle on pourra se référer pour des détails sur la théorie), qui permet d'en déduire une estimation de la tension de surface avec l'air. Le code est reproduit et commenté ci-dessous. Il repose sur la résolution d'un système non linéaire et adimensionné d'équations différentielles du premier ordre qui décrit la forme de la courbe paramétrée formée par l'intersection entre la surface libre de la goutte et le plan image [4, 7] :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dS} = \cos\phi \\ \dfrac{dY}{dS} = \sin\phi \\ \dfrac{d\phi}{dS} = 2 - \dfrac{\sin\phi}{X} - \beta Y \end{cases} . \tag{14}$$

Dans le système précédent, $X = x/R_0$ et $Y = y/R_0$ désignent les coordonnées adimensionnées des points de la courbe paramétrée $(x(s), y(s))$, $S = s/R_0$ l'abscisse curviligne le long de la courbe dont l'origine est prise au sommet de la goutte, ϕ l'angle que fait la tangente à la courbe paramétrée avec l'axe (Oz), R_0 le rayon de courbure de la goutte à son sommet, et $\beta = (\rho_1 - \rho_0)g R_0^2/\gamma_{1V}$. On renvoie à la Fig. 10 pour l'introduction des différentes notations. La recherche des paramètres optimaux (β, R_0) permettant d'avoir un accord maximal entre les mesures expérimentales et la résolution numérique aboutit

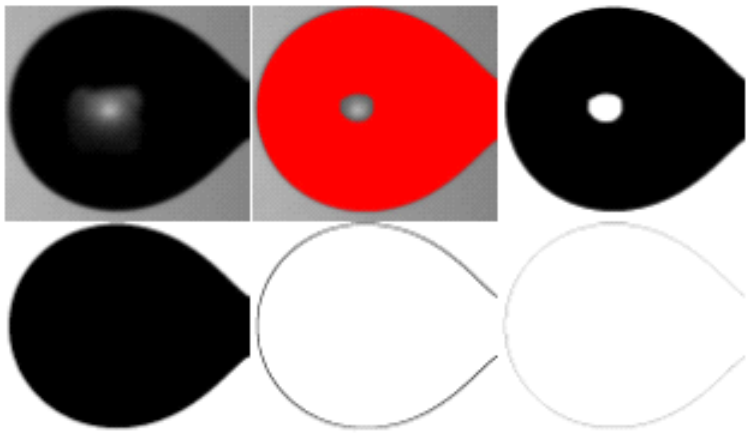


FIGURE 11 – Action de la macro `macro_goutte_pendante.ijm` pour le traitement de l'image d'une goutte rognée afin d'en extraire le profil de la surface libre (dans l'ordre de gauche à droite et de haut en bas). Illustration inspirée de la Réf. [6].

alors à une mesure de la tension de surface. Pour simplifier la résolution de l'Éq. (14), avec notamment le choix des conditions initiales, on découpe le profil de la goutte en deux portions correspondant aux intervalles $z \leq 0$ et $z \geq 0$.

```
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-

"""
Post-traitement d'une image (enregistrée dans un fichier) d'une goutte pendante permettant d'accéder à la
    mesure de
tension superficielle par stalagmométrie
Format des données: cf preamble()
Référence: "Mesure de la tension superficielle par la technique de la goutte pendante", Gassin P.-M., BUP
    108, 1 (2014)

Dépendances:

Usage: python python_stalagmometrie_lyon.py

Auteurs: C. Winisdoerffer (14/01/2021, examen CMP L3)
         M. Guizetin (23/03/2022)
         C. Winisdoerffer (28/03/2022)
"""

# Importation des librairies
import numpy as np
import scipy
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.integrate as integrate
import scipy.interpolate as interp
import scipy.optimize as opt

# Définition des fonctions
def preamble():
    """ Préambule """
    print("Les étapes de traitement de l'image de la goutte pendante ne font pas partie de ce script, qui n
     'effectue que l'optimisation du profil 'skeletonisé'.\n" + "L'extraction de ce profil peut être
     effectué par exemple avec le logiciel ImageJ, en effectuant les commandes suivantes :\n" + "
     setAutoThreshold('Default');\n" + "   //run('Threshold...');\n" + "   //setThreshold(0, 85);\n" + "
     setOptions('BlackBackground', false);\n" + "   run('Convert to Mask');\n" + "   run('Fill Holes');\n" +
      "   run('Find Edges');\n" + "   run('Skeletonize');\n" + "   run('Save XY Coordinates...', '
```

```
    background-0 save-[nom_du_fichier].txt');\n")
    return

def basic_parameters():
    *** Définition des paramètres physiques dans le cas d'une goutte d'eau pendant à l'extrémité d'un
     capillaire dans l'air sur Terre ***
    g     = 9.81   # intensité de la pesanteur en m/s^2
    rho_l = 998.30 # Masse volumique du liquide en kg/m^3
    rho_g = 1.204  # Masse volumique du gaz en kg/m^3
    return g, rho_l, rho_g

def picture2profils(fname, calib, u_calib, rotate):
    *** Récupération des données brutes contenues dans le fichier fname, conversion en unités physiques et
     incertitudes, suivi de
l'extraction des profils gauche et droit avec l'origine située à l'apex de la goutte ***
    # Données brutes
    try:
        data = np.genfromtxt(fname)
    except IOerror:
        raise IOerror("Impossible d'accéder au fichier {}".format(fname))
    # Coordonnées (en pixel) et incertitudes correspondantes
    x_px = data[:,0]
    y_px = data[:,1]
    u_x_px = 2.
    u_y_px = 2.
    # Conversion en unités physiques et incertitudes correspondantes (par propagation)
    x = x_px * calib
    y = y_px * calib
    u_x = np.sqrt((u_x_pxcalib)**2 + (u_calibx_px)**2)
    u_y = np.sqrt((u_y_pxcalib)**2 + (u_caliby_px)**2)
    # Rotation de l'image de pi/2 si nécessaire (= permutation des axes X et Y)
    if rotate:
        x, y = y, x
        u_x, u_y = u_y, u_x
    # Detection de l'apex et décalage
    imin = np.argmin(y)
    imin2 = len(y) - np.argmin(y[::-1]) - 1
    iorig = int((imin+imin2)/2.)
    x -= x[iorig]
    y -= y[iorig]
    u_x = np.sqrt(u_x**2 + u_x[iorig]**2)
    u_y = np.sqrt(u_y**2 + u_y[iorig]**2)
    # Split le profil en 2 1/2 profils
    profil_pos = np.array([ x[x>-0.], y[x>-0.], u_x[x>-0.], u_y[x>-0.]])
    profil_neg = np.array([-x[x<-0.], y[x<-0.], u_x[x<-0.], u_y[x<-0.]])
    return profil_pos, profil_neg

def get_fordhamestimates(x, y):
    *** Estimation des paramètres beta et R0 par les tables de Fordham ***
    D0 = 2. * np.amax(x)
    i5 = np.argmin(np.absolute(y-D0))
    D5 = 2. * np.absolute(x[i5])
    sigma = D5/D0
    beta  = 0.12836 + sigma * (-0.3577 + sigma*(1.7713-0.5626*sigma))
    R0    = 0.9987 + beta * (0.1983 + beta*(-0.0736+0.36788*beta))
    R0    = 0.5*D0/R0
    return beta, R0

def goutte_ODEs(S, V, beta):
    *** Young-Laplace ODEs pour la goutte ; V = (phi, X, Y)
        Adimensionnement : R0 = rayon de courbure @ apex de la goutte
                           beta \propto R0**2 / \gamma
        Variables : S = s/R0 : abscisse curviligne adim.
                    X = x/R0 : abscisse cart. adim.
                    Y = y/R0 : ordonnée cart. adim.
        ODEs : dphi/dS = 2 - beta*Y - sin(phi)/X
               dX/dS   = cos(phi)
               dY/dS   = sin(phi) ***
    phi, X, Y = V
    if X == 0. and phi == 0.:
        dphi_dS = 2.-beta*Y
    else:
        dphi_dS = 2.-beta*Y-np.sin(phi)/X
    dX_dS = np.cos(phi)
    dY_dS = np.sin(phi)
    return dphi_dS, dX_dS, dY_dS

def solution_numerique(beta):
```

```
    *** Résolution numérique du jeu d'équations différentielles ***
    # Intervalle d'intégration (doit être suffisamment étendu)
    I = np.array([0,5])
    # Conditions initiales [phi, X, Y] # X=0
    CIs = np.array([0.0, 0.0, 0.0])
    # Intégration numérique
    if scipy.__version__ < "1.4.1":
        #https://stackoverflow.com/questions/60002048/solve-ivp-error-missing-2-required-positional-
    arguments
        #http://stackoverflow.com/questions/62725468/args-not-being-passed-to-scipy-solve-ivp
        sol = integrate.solve_ivp(lambda S, V: goutte_ODEs(S, V, beta), S, CIs, max_step=0.1)
    else:
        sol = integrate.solve_ivp(goutte_ODEs, S, CIs, max_step=0.1, args=(beta,))
    return sol.y[1], sol.y[2]

def residu(param, x_exp, y_exp, u_x, u_y):
    *** Définition de l'erreur à optimiser par la méthode des moindres carrés ***
    beta, RD = param
    # Solution numérique
    X_sol, Y_sol = solution_numerique(beta)
    # Interpolation de la solution numérique aux mêmes ordonnées (y_exp) que les données expérimentales
    spl = interp.splrep(Y_sol,X_sol) # interpolation par des fonctions splines de la solution numérique
    dspl = interp.spder(spl)         # dérivée de l'interpolation
    # Résidu entre la solution numérique et les données expérimentales par la méthode de la variance
    effective
    err = (x_exp-interp.splev(y_exp/RD,spl)*RD) / np.sqrt(u_x**2 + (u_y*interp.splev(y_exp/RD,dspl))**2)
    return err

# Programme principal
if __name__ == "__main__":
    # Interaction avec l'utilisateur
    if True:
        preambule()
    if False:
        fname   = input("Nom du fichier contenant les données: ")
        calib   = input("Échelle de distance (en m/pixel): ")
        u_calib = input("Incertitude correspondante: ")
        rotate  = input("Rotation de l'image (oui/non, la gravité est supposée être dirigée vers le bas): ")
    else:
        fname  = 'eau_2_crop.txt'
        calib  = 0.71e-3/99.
        u_calib = calib * np.sqrt((0.01e-3/0.71e-3)**2 + (2./99.)**2) # propagation des incertitudes sur L
    et N px
        rotate = True

    # Récupération des données et des incertitudes correspondantes (en unités physiques)
    profils = picture2profils(fname, calib, u_calib, rotate)

    # Optimisation des 2 1/2 profils
    param_opts = []
    for profil in profils:
        x   = profil[0]
        y   = profil[1]
        u_x = profil[2]
        u_y = profil[3]
        # Estimation des paramètres avec FordHam (guess initial pour l'optimisation)
        beta, RD = get_FordHamEstimates(x, y)
        # Optimisation
        param = [beta, RD]
        leq = opt.least_squares(residu, param, args=(profil[:]))
        param = leq.x
        jac = leq.jac
        hess = np.linalg.inv(np.matmul(jac.transpose(),jac))
        beta_opt  = param[0]
        RD_opt    = param[1]
        u_beta_opt = np.sqrt(2.*hess[0,0])
        u_RD_opt   = np.sqrt(2.*hess[1,1])
        param_opts.append([beta_opt, RD_opt, u_beta_opt, u_RD_opt])

    # Estimation des tensions de surface profils droit/gauche
    g, rho_l, rho_g = basic_parameters()
    DRho = rho_l - rho_g
    gamma_opts = []
    for param_opt,label in zip(param_opts,['(+)','(-)']):
        beta   = param_opt[0]
        RD     = param_opt[1]
        u_beta = param_opt[2]
        u_RD   = param_opt[3]
```

```
101         gamma   = Rchoose0**2/beta
102         u_gamma = gamma * np.sqrt((2.*u_R0/R0)**2 + (u_beta/beta)**2)
103         gamma_opt.append([gamma, u_gamma])
104         print("Tension de surface {} = {{:.2f} \pm {:.1f}} mN / m".format(label, 1.e3*gamma, 1.e3*u_gamma))
105     # Moyenne sur les 2 1/2 profils
106     gamma_avg   = (gamma_opt[0][0]+gamma_opt[1][0])/2.
107     u_gamma_avg = np.sqrt((gamma_opt[0][1]+gamma_opt[1][1])**2 +
108                           ((gamma_opt[0][0]-gamma_opt[1][0])/np.sqrt(2.))**2)/2.
109     print("Tension de surface (moy) = {{:.2f} \pm {:.1f}} mN / m".format(1.e3*gamma_avg, 1.e3*u_gamma_avg))
110
111     # Plot
112     fig, ax = plt.subplots(figsize=(5, 5))
113     ax.set_aspect('equal')
114     ymax = np.amax([np.amax(profils[0][1]),np.amax(profils[1][1])])
115     step = 5 # on ne dessine les données expérimentales que tous les step points
116     for profil,param_opt,label in zip(profils,param_opts,["(+)","(-)"]):
117         # Données expérimentales
118         x_exp = profil[0]
119         y_exp = profil[1]
120         # Fit
121         beta = param_opt[0]
122         R0   = param_opt[1]
123         x_num, y_num = solution_numerique(beta)
124         x_num *= R0
125         y_num *= R0
126         if label == '(-)':
127             x_exp = -x_exp
128             x_num = -x_num
129         ax.plot(x_exp[::step] * 1e3, y_exp[::step] * 1e3, 'o', label = "Data {}".format(label))
130         rend = ymax-y_num > 0
131         ax.plot(x_num[rend] * 1e3, y_num[rend] * 1e3, '-', lw=2, label = "Mod {}".format(label))
132     ax.set_title(r"$\gamma={:.2f} \pm {:.1f}$ mN / m".format(1.e3*gamma_avg, 1.e3*u_gamma_avg))
133     ax.set_xlabel('x (mm)')
134     ax.set_ylabel('y (mm)')
135     plt.legend()
136     if False:
137         plt.savefig('stalagmometrie.png')
138     plt.show()
```

Le programme principal débute à la ligne 133 après l'importation des librairies et la définition de diverses fonctions qui seront utilisées dans la suite. Les données sont importées des lignes 135 à 146. Cette importation peut être être faite de manière interactive (des lignes 138 à 141) ou bien de manière directe (des lignes 142 à 146). Dans les deux cas, `fname` désigne le nom du fichier contenant les coordonnées (x, y) en pixels des points de la surface libre de la goutte, `calib` l'échelle de conversion en m·px^{-1}, `u_calib` l'incertitude sur le facteur de calibration, et `rotate` est un booléen pour décider s'il faut effectuer une rotation de l'image de 90° (si la goutte n'est pas verticale sur l'image) avant d'effectuer le traitement des données.

La ligne 149 permet de récupérer le profil de la goutte. Pour cela, les données sont lues dans le fichier, puis la conversion des pixels en unités de longueur est faite. Enfin, le minimum de la goutte est repéré, et le profil de la goutte est séparé en deux parties gauche et droite (voir les lignes 40 à 73).

Les deux demi-profils sont ensuite ajustés entre les lignes 151 et 170. Cet ajustement repose sur l'Éq. (14). L'obtention de ces équations est détaillé ci-dessous. Ici on s'intéresse davantage à la manière dont le programme réalise l'ajustement. Pour faciliter l'optimisation des deux paramètres (β, R_0), une première estimation $(\beta^{(est)}, R_0^{(est)})$ peut être obtenue à partir des tables de Fordham. Par la mesure du diamètre maximal de la goutte $D_0 = 2\,x_{max}$ (avec $x_{max} = \max_s x(s)$) et du diamètre D_S de la goutte à une hauteur D_0 depuis le sommet de la goutte ($D_S = 2\,x(x^*)$ avec $y(x^*) = D_0$), les tables de Fordham donnent [8]

$$\begin{cases} \beta^{(est)} = 0{,}12836 - 0{,}7577\sigma + 1{,}7713\sigma^2 - 0{,}5429\sigma^3 \\ \dfrac{D_0}{2R_0^{(est)}} = 0{,}9987 + 0{,}1987\beta^{(est)} - 0{,}0734\beta^{(est)2} + 0{,}34708\beta^{(est)3} \end{cases}, \tag{15}$$

avec $\sigma = D_S/D_0 < 1$. Cela est effectué ligne 120 à l'aide de la fonction `get_FordhamEstimates` (voir les lignes 75 à 84). À partir de cette première estimation, le programme procède par la méthode des moindres carrés (voir les lignes 161 à 170) déjà implémentée dans Python (fonction `least_squares` de la librairie `scipy.optimize`), qui consiste à minimiser la somme χ^2 des résidus entre la courbe paramétrée expérimentale et celle calculée numériquement pour des paramètres donnés. La fonction `residu` (voir les lignes 120 à 130) permet de calculer ces résidus et repose sur la fonction `solution_numerique` (voir les lignes 105 à 118) qui permet de calculer la solution de l'Éq. (14) pour des paramètres donnés à partir de la commande `solve_ivp` de la librairie `scipy.integrate` de Python pour la résolution d'équations différentielles. Le système différentiel, quant à lui, est défini par la fonction `goutte_ODE` entre les lignes 86 et 103. La détermination du minimum absolu du χ^2 par intégrations successives de l'Éq. (14) pour différents jeux de paramètres permet d'en déduire les paramètres optimaux $\beta^{(opt)}$ et $R_0^{(opt)}$. La routine Python permet également de déterminer des incertitudes sur ces paramètres à partir de la matrice Hessienne au voisinage du minimum du χ^2. Pour plus de détails, on renvoie à la Réf. [10] (pp. 11-12).

À partir des paramètres ajustés pour chaque demi-profil, une valeur de tension de surface est calculée, puis la moyenne des deux valeurs obtenues est réalisée. Une incertitude sur la valeur finale de la tension de surface est également fournie. Cela constitue l'objet des lignes 172 à 189 du code ci-dessus. Enfin, les profils expérimentaux de la surface libre de la goutte, ainsi que les profils numériques ajustés, sont tracés entre les lignes 191 et 218.

Nous terminons par mentionner les détails théoriques qui permettent d'aboutir à l'Éq. (14). La forme de la goutte résulte d'une compétition entre capillarité et pesanteur qui est déterminée par la loi de Laplace. Pour plus de détails sur la loi de Laplace, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [3] (pp. 16-17). En coordonnées cylindriques (r, θ, y), les pressions p_l et p_g dans le liquide et le gaz respectivement sont non uniformes du fait des effets de pesanteur et de capillarité. Cependant, la pression ne peut pas dépendre de r sous peine d'induire un écoulement radial, en contradiction avec l'hypothèse d'une goutte à l'équilibre. En outre, le problème étant invariant par rotation autour de la verticale, la pression ne dépend pas de θ. Ainsi, la pression ne dépend que de l'altitude y depuis le sommet de la goutte, et la pression dans le liquide immédiatement à l'interface s'écrit

$$p_l(y) = p_g(y) + \gamma_{lg}\mathcal{C}(y), \tag{16}$$

où γ_{lg} désigne la tension de surface à l'interface liquide-gaz et $\mathcal{C}(y)$ la courbure de l'interface à l'altitude y, qui est la somme des inverses des deux rayons de courbure principaux. Par ailleurs, comme la pression ne dépend pas de r, la loi de la statique des fluides dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen donne les deux relations

$$\begin{cases} p_l(y) = p_l(0) - \rho_l g y \\ p_g(y) = p_g(0) - \rho_g g y \end{cases}, \tag{17}$$

où ρ_l et ρ_g désignent respectivement les masses volumiques du liquide et du gaz. Enfin, l'application de la loi de Laplace au sommet de la goutte donne

$$p_l(0) = p_g(0) + \frac{2\gamma_{lg}}{R_0}, \tag{18}$$

où R_0 désigne le rayon de courbure de l'interface au sommet[3]. La combinaison de toutes les équations précédentes donne finalement

$$\mathcal{C}(y) = \frac{2}{R_0} - \frac{(\rho_l - \rho_g)gy}{\gamma_{lg}}, \tag{19}$$

qui régit la géométrie de l'interface liquide-gaz. Il reste maintenant à déterminer la courbure de l'interface. Si cette dernière est caractérisée par son rayon $r = \rho(y)$ en coordonnées cylindriques, la courbure s'obtient à partir de la divergence du vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur [2] (pp. 620-625) et a l'expression suivante :

$$\mathcal{C}(y) = \frac{1}{\rho(y)\sqrt{1+\rho'(y)^2}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\rho'(y)}{\sqrt{1+\rho'(y)^2}}\right), \tag{20}$$

où $\rho'(y) = \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}y$. On se place par la suite dans le plan de projection de la goutte. Son intersection avec la surface libre génère une courbe paramétrée dont les points ont pour coordonnées $(x(s), y(s))$ paramétrées par l'abscisse curviligne s dont l'origine est prise au sommet de la goutte. On introduit également $\phi(s)$ l'angle que fait la tangente à la courbe paramétrée avec l'axe des abscisses. On obtient alors facilement que

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\phi \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\phi \end{cases}. \tag{21}$$

Par ailleurs, dans ce plan, l'expression de la courbure devient, en faisant les substitutions $\rho(y) = x(s)$ et $\rho'(y) = \mathrm{d}\rho/\mathrm{d}y = \mathrm{d}x/\mathrm{d}s \times \mathrm{d}s/\mathrm{d}y = \cot\phi$, et en utilisant les équations précédentes,

$$\mathcal{C} = \frac{\sin\phi}{x} + \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}, \tag{22}$$

où la courbure est maintenant prise comme une fonction de l'abscisse curviligne s. En utilisant l'Éq. (19) et le système précédent, on obtient finalement le système non linéaire de trois équations différentielles couplées du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos\phi \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin\phi \\ \dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \dfrac{2}{R_0} - \dfrac{\sin\phi}{x} - \dfrac{(\rho_l - \rho_g)gy}{\gamma_{lg}} \end{cases}. \tag{23}$$

3. Au sommet de la goutte, les deux rayons de courbure principaux sont égaux.

On peut finalement adimensionner ces équations, en posant $X = x/R_0$, $Y = y/R_0$ et $S = s/R_0$ pour aboutir à [4, 7]

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dS} = \cos\phi \\ \dfrac{dY}{dS} = \sin\phi \\ \dfrac{d\phi}{dS} = 2 - \dfrac{\sin\phi}{X} - \beta Y, \end{cases} \tag{24}$$

avec $\beta = (\rho_l - \rho_g)gR_0^2/\gamma_{lg}$, en accord avec l'Éq. (14) mentionnée plus haut.

VII. Loi de Jurin [MP 10]

On renvoie le lecteur à la Réf. [5] (pp. 472-476) pour une description détaillée de l'expérience et des aspects théoriques associés.

Liste du matériel :

- les capillaires et la cuve P105.16,
- une propipette,
- de l'éthanol,
- un appareil photo.

Expérimentalement, il faut faire attention que la température peut avoir une influence non négligeable sur la tension de surface. Pour des valeurs de tension de surface à différentes températures, on renvoie à la Réf. [5] (p. 471).

On mentionne également que la dynamique de l'ascension capillaire est régie par la loi de Washburn et est très rapide : on ne peut pas l'étudier avec le matériel dont nous disposons. Cette loi prédit une croissance en deux étapes. À temps courts, la hauteur du liquide dans le capillaire croît en fonction de la racine du temps. À temps plus longs, la hauteur converge exponentiellement vers la hauteur d'équilibre donnée par la loi de Jurin, avec un temps caractéristique de montée

$$\tau = \frac{4\eta h_{eq}^2}{\gamma_{lg} d \cos\theta}, \tag{25}$$

où h_{eq} désigne la hauteur d'équilibre du fluide dans le capillaire donnée par la loi de Jurin, d le diamètre du capillaire, η la viscosité du fluide, γ_{lg} la tension de surface à l'interface liquide-gaz, et θ l'angle de mouillage à l'équilibre entre la paroi solide, le liquide et l'air. Dans le cas de l'éthanol, pour lequel $\eta \simeq 1{,}2 \times 10^{-3}$ Pa·s à 20°C, et pour un capillaire de diamètre $d = 1$ mm, on trouve $h_{eq} = 1{,}1$ cm et $\tau = 28$ ms (en utilisant les propriétés de l'éthanol données dans la Réf. [5]).

On termine par mentionner que dans la collection, il existe aussi une cuve à base triangulaire P105.19. Si on la remplit, on observe que la surface libre prend une forme hyperbolique.

VIII. Balance d'arrachement [MPs 10 et 58]

On renvoie le lecteur à la Réf. [5] (pp. 466-471) pour une description détaillée de l'expérience et des aspects théoriques associés.

Liste du matériel :

- un anneau de du Noüy P105.22,
- un dynamomètre 1N dans la boîte ou P97.2,
- une boîte de Petri,
- un support élévateur P25.0,
- de l'éthanol,
- de l'eau distillée,
- un pied à coulisse.

On tient à préciser que le bilan des forces doit être fait proprement dans le cas de ce système. Pour cela, on liste les actions mécaniques s'exerçant sur l'anneau de rayon r, en notant $\vec{e_z}$ le directeur unitaire dirigé vers le haut :

- le poids $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$,

- la poussée d'Archimède associée à la partie immergée $\overrightarrow{\Pi} = \pi r^2 h \rho_l g \overrightarrow{e_z}$, avec h la hauteur de solide plongée dans le fluide et ρ_l la masse volumique du liquide,
- la force capillaire exercée par le liquide $\overrightarrow{F_{\ell s}} = 2\gamma_{\ell s} 2\pi r \overrightarrow{e_z}$, dirigée vers le haut car toute plongée de la tige augmente la taille de l'interface, où le facteur 2 vient du fait qu'il y a deux interfaces liquide-solide de longueur $2\pi r$, et où $\gamma_{\ell s}$ désigne la tension de surface de l'interface solide-liquide,
- la force capillaire exercée par le gaz $\overrightarrow{F_{\ell g}} = -2\gamma_{\ell g} 2\pi r \overrightarrow{e_z}$, avec $\gamma_{\ell g}$ la tension de surface de l'interface solide-gaz,
- la force de rappel exercée par un opérateur extérieur (par exemple par un dynamomètre) $\overrightarrow{F_{op}} = F_{op}\overrightarrow{e_z}$.

À la limite de rupture $h \to 0$, le bilan des forces donne simplement

$$F_{op} = mg + 4\pi r\left(\gamma_{\ell g} - \gamma_{\ell s}\right) = mg + 4\pi r \gamma_{\ell g} \cos\theta, \tag{26}$$

où nous avons utilisé la loi de Young-Dupré

$$\cos\theta = \frac{\gamma_{\ell g} - \gamma_{\ell s}}{\gamma_{\ell g}}, \tag{27}$$

avec $\gamma_{\ell g}$ la tension de surface à l'interface liquide-gaz, et θ l'angle de mouillage. Cela redonne alors la relation de la Réf. [3].

On termine par mentionner que cette expérience nécessite un traitement rigoureux des incertitudes. En particulier, la force mesurée à la rupture fluctue et il peut être judicieux d'effectuer plusieurs fois l'expérience avant d'effectuer un traitement statistique des incertitudes.

IX. Concentration micellaire critique (*) [MPs 10 et 58]

L'objectif de cette expérience est d'illustrer l'influence d'un tensioactif sur la tension superficielle de l'eau. Pour des détails théoriques concernant le rôle des tensioactifs (ou surfactants), nous renvoyons le lecteur à la Réf. [3] (pp. 174-175).

Liste du matériel :

- du SDS solide n°76,
- des fioles jaugées,
- de l'eau distillée,
- de l'éthanol,
- le matériel de l'Exp. V, ou bien de l'Exp. VI, ou bien même de l'Exp. VIII.

Figure 12 – Représentation de la molécule de SDS, présentant une « tête » hydrophile et une « queue » composée d'une chaîne carbonée hydrophobe.

> On propose de mesurer la tension de surface d'une ou plusieurs solutions d'eau contenant une concentration variable en surfactant, ici du SDS (sodium dodécylsulfate), qui présente une chaîne alkyle hydrophobe et une « tête » polaire et ionique, voir Fig. 12. Pour cela, on se référera à l'Exp. V, ou bien à l'Exp. VI, ou bien même à l'Exp. VIII. Il faudra penser à bien nettoyer le dispositif utilisé entre deux solutions de concentrations différentes par exemple avec de l'éthanol.

En faible concentration, l'ajout de surfactant conduit à une diminution de la tension de surface. Au-delà d'une certaine concentration, appelée concentration micellaire critique (cmc), ajouter des tensioactifs ne modifie plus la tension de surface. Pour le SDS, on a cmc $\approx 2{,}4\,\mathrm{g\cdot L^{-1}}$ [11].

Dans de l'eau pure, les tensioactifs se disposent de façon à ce que leur « queue » hydrophobe ne soit pas en contact avec de l'eau : ils se placent donc préférentiellement à l'interface et abaissent ainsi la tension superficielle. Schématiquement, l'interface liquide-gaz est remplacée par une double interface liquide-groupe hydrophile et gaz-groupe hydrophobe, moins défavorable. Cependant, l'adsorption est en compétition avec un second phénomène, à savoir la formation de micelles en solution, où tous les surfactants pointent leur « tête » hydrophile vers l'extérieur et leur chaîne hydrophobe vers l'intérieur de la micelle. La compétition est dictée par la valeur du potentiel chimique du soluté libre en solution et dans une micelle. On peut alors montrer que pour des concentrations supérieures à la concentration micellaire critique, le potentiel chimique du

surfactant est inférieur quand celui-ci se trouve dans une micelle. Il n'est donc plus libre en solution, et ne peut plus s'adsorber sur la surface. Attention que la concentration micellaire critique est une fonction complexe des potentiels chimiques des micelles et des surfactants, et dépend donc de la température.

Pour le traitement de l'expérience, on pourra tracer la tension de surface en fonction de la concentration. On attend une décroissance plus ou moins affine avant saturation à une valeur plus basse que la tension de surface de l'eau pure, quand la concentration en surfactants introduits atteint la concentration micellaire critique. Un exemple de réalisation expérimentale avec le matériel d'enseignement et utilisant la balance d'arrachement (voir l'Exp. VIII) est donné Fig. A3.

X. Loi de Tate (*) [MP 10]

On propose de réaliser l'expérience suivante, décrite dans la Réf. [12] (p. 53) et schématisée Fig. 13.

Figure 13 – Schéma de l'expérience de stalagmométrie pour vérifier la loi de Tate.

Liste du matériel :

- une burette,
- de l'eau distillée,
- de l'éthanol,
- un système de potences, noix et pinces,
- un bécher,
- une balance P97 , 23.

> On propose de suspendre une burette remplie d'un liquide au-dessus d'un bécher, lui-même posé sur une balance de précision préalablement tarée. On pourra alors ouvrir le robinet de la burette permettant un débit suffisamment faible (de l'ordre d'une goutte par seconde), et on pèsera un nombre N de gouttes. La loi de Tate prédit alors que le poids des gouttes est proportionnel à la tension de surface à l'interface liquide-gaz, ce qui permet de remonter à cette tension de surface.

Plus précisément, la loi de Tate donne que (voir les détails théoriques ci-dessous)

$$mg = N\mu\gamma_{\ell g}, \tag{28}$$

où m désigne la masse pesée des gouttes, et $\gamma_{\ell g}$ la tension de surface à l'interface liquide-gaz. Le coefficient μ est dimensionné (homogène à une longueur) et dépend du rayon du robinet de la burette ainsi que de la fraction du volume de la goutte qui reste accrochée à la burette au moment où celle-ci se décroche. Il peut également dépendre de la masse volumique du liquide et de la tension de surface à l'interface liquide-gaz, ce qui sera négligé en première approximation [9]. On voit donc qu'il faut au préalable « calibrer » cette méthode.

> On propose donc de réaliser une première fois l'expérience avec un liquide de tension de surface avec l'air connue (comme l'eau ou l'éthanol). Une fois la « calibration » faite, on peut faire une seconde fois l'expérience avec un liquide dont la tension de surface avec l'air veut être déterminée. On fera attention à bien rincer la burette entre les deux expériences, les mesures de tension de surface étant très sensibles aux impuretés ou aux défauts de composition.

Pour ces expériences, on aura tout intérêt à mesurer la masse d'un grand nombre de gouttes, afin d'être plus précis sur la mesure de la tension de surface. Il faudra également bien régler la verticalité de la burette, sous peine de sous-estimer la valeur de la tension de surface (voir le développement théorique ci-dessous). Enfin, on gardera un faible débit d'écoulement pour s'affranchir des effets dynamiques.

Pour rendre l'expérience plus quantitative, on pourra tracer m en fonction de N pour deux liquides différents, et effectuer des ajustements affines. Le rapport des pentes, permet alors, toutes choses étant égales par ailleurs, d'en déduire le rapport des tensions de surface des deux liquides avec l'air. En supposant l'une connue, on pourra remonter à l'autre tension de surface.

Nous terminons par détailler l'obtention de la loi de Tate. En première approximation, on peut considérer qu'une goutte pendante se détache lorsque son poids excède la force capilaire qui la retient au niveau de la ligne triple, soit

$$2\pi r \gamma_{lg} = m_g g, \tag{29}$$

avec r le rayon du robinet et m_g la masse d'une goutte posée à la balance. Nous avons là encore utilisé la loi de Young-Dupré, en supposant que l'angle de mouillage était quasiment nul. Pour plus de détails sur la loi de Young-Dupré, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [3] (pp. 24-25). Cependant, lors du décrochage, un pincement apparaît, une partie de la goutte reste attachée et seule une fraction $\alpha < 1$ de la goutte tombe, soit

$$2\pi\alpha r \gamma_{lg} = m_g g, \tag{30}$$

car la masse mesurée à la balance est inférieure à la masse maximale lorsque toute la goutte se décroche par compensation du poids par la force capilaire. En comparant avec l'Éq. (28), cela donne $\mu = 2\pi\alpha r$. Cependant, comme mentionné plus haut, le coefficient μ peut dépendre de la tension de surface γ_{lg} et de la masse volumique ρ_l du liquide. Des expériences ont montré qu'on pouvait écrire

$$\mu = 2\pi r f(\kappa r), \tag{31}$$

où $\kappa^{-1} = \sqrt{\gamma_{lg}/(\rho_l g)}$ désigne la longueur capillaire. La fonction f décroît depuis 1 quand $\kappa r \ll 1$, et peut atteindre 0,6 pour $\kappa r \approx 1$, ce qui correspond à des corrections jusqu'à 40 % en valeur relative. Par ailleurs, il peut y avoir des corrections dues à la viscosité du liquide ou à la valeur du débit, car le décrochage de la goutte est un processus dynamique, mais cela est également négligé [13].

XI. Ondes capillaires à la surface d'un liquide [MPs 10, 13, 30 et 31]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [5] (pp. 503-514) pour une description détaillée de l'expérience et des aspects théoriques associés.

Liste du matériel :

- le dispositif `P0.19`,
- de l'éthanol,
- de l'eau distillée,
- un multimètre en mode fréquencemètre `P69.25`.

On mentionne, au passage, que la cuve à ondes permet aussi de faire des expériences qualitatives intéressantes pour illustrer les phénomènes ondulatoires.

1. En plaçant deux longs blocs dans la cuve, on peut réaliser une fente, et observer la figure de diffraction correspondante. En réalisant deux fentes, on observe une figure d'interférences.
2. En plaçant un bloc en incidence normale sur le chemin de l'onde, on peut observer la formation d'une onde stationnaire par superposition d'une onde progressive et de sa réflexion.
3. Avec un dispositif d'injection d'air par un tuyau, il est possible de générer des ondes cylindriques. On peut alors mettre en évidence la diminution d'amplitude au cours de la propagation.

XII. Instabilité de Rayleigh-Plateau (*) [MPs 8, 10, 12, 13 et 47]

On renvoie le lecteur à la Réf. [10] (pp. 451-472) pour une description détaillée de l'expérience et des aspects théoriques associés.

Liste du matériel :

- une burette graduée,
- un système de noix, pinces et potences,
- deux cristallisoirs,
- un tuyau en caoutchouc souple,
- de l'eau distillée,

Fixé la fréquence au strobo, et chercher le régime stationnaire au GBF et pas l'inverse

- de l'hydroxyde de calcium P75,
- un appareil photographique,
- un stroboscope P3.3,
- un réglet,
- une balance de précision P97.23,
- un chronomètre P96.56,
- un trépied P32.11 (demander une platine aux techniciens si besoin).

Références

[1] B. Andreotti, Y. Forterre et O. Pouliquen, *Les milieux granulaires : entre fluide et solide*, EDP Sciences (2011).

[2] P. M. Chaikin, T. C. Lubensky et T. A. Witten, *Principles of condensed matter physics*, Cambridge University Press (1995).

[3] P-G. De Gennes, F Brochard-Wyart et D. Quéré, *Gouttes, bulles, perles et ondes*, Belin (2002).

[4] S. Fordham, « On the calculation of surface tension from measurements of pendant drops », *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 194 (1948).

[5] M. Fruchart, P. Lidon, E. Thibierge, M. Champion et A. Le Diffon, *Physique expérimentale. Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, De Boeck Supérieur (2016).

[6] P-M. Gassin, « Interfaces liquides/liquides actives : apport de l'optique non linéaire et de la tensiométrie », thèse de doctorat, Université Lyon 1 (2013).

[7] P-M. Gassin, « Mesure de la tension superficielle par la technique de la goutte pendante », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 963 (2014).

[8] F. K. Hansen et G. Rodsrud, « Surface tension by pendant drop : I. A fast standard instrument using computer image analysis », *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 141 (1991).

[9] W. D. Harkins, et E. C. Humphery, « The Drop Weight Method for the Determination of Surface Tension. », *Journal of the American Chemical Society*, vol. 38 (1916).

[10] Jolidon, *Physique expérimentale - Optique, magnétisme, électrotechnique, mécanique, thermodynamique et physique non linéaire*, EDP Sciences (2021).

[11] Y. Moroi, K. Motomura et R. Matuura, « The critical micelle concentration of sodium dodecyl sulfate-bivalent metal dodecyl sulfate mixtures in aqueous solutions », *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 46 (1974).

[12] L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale. Tome I : la mécanique*, Pierron (2002).

[13] O. E. Yildirim, Q. Xu et O. A. Basaran, « Analysis of the drop weight method », *Physics of Fluids*, vol. 17 (2005).

EXEMPLES DE RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

FIGURE A1 – Exemple de mesure du coefficient de frottement statique (à gauche) et dynamique (à droite) (voir l'Exp. I).

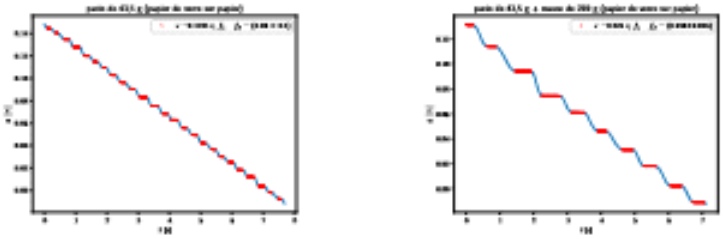


FIGURE A2 – Exemple d'évolution du patin (à vide ou lesté) en fonction du temps dans l'expérience de stick-slip (voir l'Exp. II). « J'ai utilisé le système VideoCom comme suggéré dans le TE mais en l'utilisant pour observer le patin de côté. J'ai aussi utilisé un moteur P96.37/2 au lieu du système avec verrin et capteur de force, pour pouvoir acquérir des trajectoires plus longues avec plus de phases de stick-slip. Le point délicat est la détection du patin par la caméra (il faut bien régler la caméra et la position du montage). » © *J. Deleuze*

```python
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Thu Feb 18 21:05:50 2021

Auteur: Tristan Jostout & Julie Deleuze

Commentaires CM: si vous voulez que ce script parle aux gens, il faudra le mettre en forme... : dire
                 ce qu'il fait, comment il est utilisé, ..., bref, mettre des docstrings et des
                 commentaires et lui donner un nom conforme aux attentes du jury, python_Blabla_lyon.py
"""

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np


A = np.loadtxt('stickslip200.txt')

t = A[:,0]
x = A[:,1]

X = x
T = t
```

```
dt = t[1]-t[0]

k = 27.25 #raideur du ressort de traction en N/m
uk = 2.00# incertitude sur k
m = 2.44e-01 # masse du système patin + masse éventuelle en kg
um = 5.00e-05# incertitude sur m
g = 9.81

def derivee(x,t):

    x_prime = (x[2:]-x[:-2])/(2*dt)
    t_prime = t[1:-1]

    return t_prime, x_prime

t_prime, x_prime = derivee(x,t)

x = x[1:-1]

plt.figure()
plt.rcParams.update({
    "text.usetex": True})

plt.plot(t_prime,x)
plt.show()
plt.xlabel("$t$ (s)")
plt.ylabel("$x$ (m)")
plt.title("patin de 43,5 g + masse de 200 g (papier de verre sur papier)")

#plt.figure()
#plt.plot(t_prime,x_prime)
#plt.show()

x = x[np.where(abs(x_prime)<0.005)] # pour montrer les plateaux en rouge
t = t[np.where(abs(x_prime)<0.005)]


#plt.show()


L3 = []
L = []
j = -1

moy = np.mean(x[np.where(abs(x-x[0])<1e-3)])
L3.append(moy)

for i in range(len(x)):              # on calcule la durée de chaque palier en nombre d'éléments (stick)
    dans L et la position en x du palier dans L3
    moy = np.mean(x[np.where(abs(x-x[i])<1e-3)])
    if x[i] moy in L3:
        L3.append(moy)
        L.append(j+1)
        j = 0
    else:
        j = j+1

N = len(L)
L = np.array(L)

tau = (np.mean(L)-1)*dt   # on calcule la durée de chaque palier en temps
dtau = np.std(L)/np.sqrt(N)*dt # incertitude statistique sur la durée de chaque palier

[a,b] = np.polyfit(T,X,1)
v = -a # calcul de la vitesse de traction



deltaf = tau * k * v /(2*m*g) # différence entre les coefficients de frottement statique et dynamique
udeltaf = deltaf*np.sqrt((uk/k)**2 + (dtau/tau)**2 + (um/m)**2) #incertitude sur deltaf

plt.plot(T,X,' x',markersize=1,label = r'$\tau$ =+str(tau)+' s, '+r'$f_s-f_d$ = (' +'{:.3f}'.format(
    deltaf)+ r'$\pm$' +'{:.3f}'.format(udeltaf)+')' )
plt.legend()
```

FIGURE A3 – Exemple d'évolution de la tension de surface de l'eau en présence d'une concentration variable en SDS (voir l'Exp. IX). La tension de surface pour chaque solution a été mesurée à l'aide d'une balance d'arrachement (voir l'Exp. VIII).

Mesures de températures

Table des expériences

I.	Thermomètre à gaz [MP 16]	88
II.	Thermomètre acoustique [MPs 14, 16, 30 et 31]	89
III.	Le thermomètre à résistance de platine [MPs 16 et 50]	90
IV.	Les thermocouples [MPs 16 et 35]	91
V.	Les thermistances [MPs 16, 36, 57 et 59]	92
VI.	Thermomètre à dilatation [MPs 16 et 57]	93
VII.	Bruit thermique [MPs 00 et 03]	94

Certaines expériences constituent des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

Dans ce TP, nous mettons en évidence certaines propriétés des thermomètres, dont l'objectif est de mesurer une température. Pour une introduction générale sur les thermomètres, nous conseillons très vivement la lecture de la Réf. [5] (pp. 323-326). Pour de plus amples détails, on conseille également la lecture de la Réf. [1] (pp. 240-252). Pour des rappels généraux sur les propriétés principales des capteurs en Physique, on pourra consulter la Réf. [6]. Il faut notamment avoir à l'esprit les principales caractéristiques importantes des capteurs : capteurs actifs et passifs, conditionnement, étalonnage, linéarité, sensibilité, rapidité, hystérésis, fidélité, justesse, précision, résolution, finesse. Dans les expériences qui suivent, plusieurs thermomètres sont présentés : il faudra dans chaque cas discuter ces différentes propriétés!

Par ailleurs, on distingue parmi les thermomètres ceux dits primaires qui permettent directement de mesurer la température thermodynamique T, et ceux dits secondaires qui mesurent une grandeur thermométrique (c'est-à-dire une propriété physique du système qui dépend de la température) et qui nécessitent un étalonnage préalable pour obtenir une mesure de la température. Parmi les thermomètres primaires, on peut citer :

- le thermomètre à gaz qui repose sur la mesure de la pression d'un gaz à volume constant (voir l'Exp. I);
- le thermomètre acoustique qui repose sur la mesure de la vitesse du son dans un résonateur (voir l'Exp. II);
- le thermomètre à rayonnement qui utilise la mesure du rayonnement dans tout le domaine spectral. Il permet de remonter à la température grâce à la loi de Stefan reliant la puissance rayonnée P à la température (voir le TP8).

Dans le système international, la température s'exprime en kelvin (K) [8]. Depuis 2019, le kelvin n'est plus défini comme étant 1/273,16 de la température du point triple de l'eau. Il est plutôt défini à partir de la valeur fixée de la constante de Boltzmann k_B de sorte qu'un 1 K est égal à la variation de température thermodynamique qui implique une variation d'énergie thermique $k_B T = 1{,}380649 \times 10^{-23}$ J. Sa définition étant peu utilisable en pratique, le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM en français ou CIPM en anglais) a défini une échelle internationale de température (ITT-90 en français ou ITS-90 en anglais) qui indique comment la température doit être mesurée à partir de points fixes de référence mesurés à l'aide d'instruments légaux. Ces points fixes correspondent le plus souvent à des températures de changement d'état à pression fixée, ou à des températures de point triple. Pour plus de détails sur tous ces éléments, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [9] ou bien à la Réf. [7]. Les instruments légaux de mesures de température sont listés ci-dessous.

- Entre 0,65 K et 5 K, la température est définie à partir de la relation entre la pression de vapeur saturante et la température pour l'hélium 3 (entre 0,65 K et 3,2 K) et l'hélium 4 (entre 1,25 K et 5 K).
- Entre 3 K et le point triple du néon à 24,5561 K, la température est définie à partir d'un thermomètre à gaz constitué d'hélium calibré à trois points fixes, puis on utilise des procédés d'interpolation spécifiques pour mesurer la température entre ces différents points fixes.
- Entre le point triple du dihydrogène à 13,8033 K et le point de fusion de l'argent à 1234,93 K et à la pression atmosphérique $p_{\text{Paris}} = 1013{,}25$ hPa, la température est définie à partir d'un thermomètre à résistance de platine qui est calibré par différents ensembles de points fixes, puis on utilise des procédés d'interpolation spécifiques pour mesurer la température entre ces différents points fixes[1].
- Au-delà du point de fusion de l'argent à 1234,93 K, la température est définie à partir de la loi de Planck sur le rayonnement thermique (pyromètre optique) et d'un point fixe.

La liste des points fixes est également donnée dans le Tab. I.

À partir de ces instruments légaux et des points fixes associés, on peut alors étalonner n'importe quel thermomètre secondaire.

1. Pour le thermomètre à résistance de platine, il existe deux procédés distincts de calibration.

Point fixe	Température (K)	Température (°C)
Point triple du dihydrogène	13,8033	−259,3467
Point triple du néon	24,5561	−248,5939
Point triple du dioxygène	54,3584	−218,7916
Point triple de l'argon	83,8058	−189,3442
Point triple du mercure	234,3156	−38,8344
Point triple de l'eau	273,16	0,01
Point de fusion du gallium	302,9146	29,7646
Point de fusion de l'indium	429,7485	156,5985
Point de fusion de l'étain	505,078	231,928
Point de fusion du zinc	692,677	419,527
Point de fusion de l'aluminium	933,473	660,323
Point de fusion de l'argent	1234,93	961,78
Point de fusion de l'or	1337,33	1064,18
Point de fusion du cuivre	1357,77	1084,62

TABLE 1 – Liste des points fixes pour l'échelle internationale de température ITT-90. Pour les points de fusion, ceux-ci sont donnés à la pression atmosphérique de 1013,25 hPa.

I. THERMOMÈTRE À GAZ [MP 16]

On propose de réaliser un thermomètre primaire qui sert d'instrument légal de mesure de la température dans une certaine gamme de températures, à savoir le thermomètre à gaz. Pour cela, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [5] (pp. 323-338) pour la description de l'expérience et des éléments théoriques associés. Nous suggérons d'utiliser un thermocouple de type K (voir l'Exp. IV) comme thermomètre de référence.

Liste du matériel :

- une bassine haute remplie d'eau,
- une bassine remplie de glace,
- un thermostat P101.14,
- une bouilloire P101.28,
- un manomètre P96.55,
- un système de potences, noix et pinces,
- un thermocouple de type K P102.16,
- un convertisseur analogique numérique pour thermocouple P102.29,
- un ballon monocol muni d'un bouchon et d'un tuyau souple,
- de la glace,
- du gros sel.

Cette expérience est longue à mettre en œuvre, car le gaz met du temps à atteindre l'équilibre thermique, et l'eau met un certain temps à acquérir une température homogène égale à la température de consigne. Il faut donc la préparer dès le début du TP !

On pourra dans un premier temps vérifier la linéarité de la pression avec la température (modèle du gaz parfait) et regarder les écarts à l'idéalité. Pour cela, on pourra utiliser la bassine contenant de l'eau maintenue à température constante avec un thermostat pour les températures au-dessus de 0 °C. On pourra aussi utiliser un mélange eau-glace-sel pour atteindre des températures inférieures à 0°C. Enfin, on peut illustrer le principe de la mesure de point fixe en faisant chauffer de l'eau dans une bouilloire puis en plongeant le ballon dedans. On notera cependant que le point d'ébullition de l'eau n'est pas un point fixe reconnu par l'ITT-90.

L'étude de la réponse dynamique du thermomètre à gaz sera faite par la suite (voir l'Exp. V). Ainsi, on veillera à ne pas démonter le dispositif avant de passer à l'expérience suivante !

On termine par mentionner certains aspects liés au capteur « thermomètre à gaz » :

- grandeur thermométrique : pression p du gaz dans le ballon, reliée à la température par la relation $p = nRT/V$, avec n la quantité de gaz dans le ballon, R la constante d'état des gaz parfaits, T la température absolue et V le volume du ballon ;
- étalonnage : il n'en nécessite pas dans la limite du gaz parfait, mais pour des forts écarts à l'idéalité, ou dans le cas où la composition du gaz n'est pas connue, un étalonnage s'impose ;

- gamme d'utilisation : ce capteur est limité par les écarts à l'idéalité à basse température (la gamme précise dépend du type de gaz qui compose le thermomètre) ;
- linéarité : la linéarité est bien vérifiée ;
- sensibilité : elle est ici constante et vaut $s = nR/V$ qu'on peut estimer à partir de la pente de la droite affine représentant p en fonction de T ;
- rapidité : cela sera discuté dans l'Exp. V mais on anticipe que ce capteur sera lent par rapport à d'autres thermomètres comme les thermocouples du fait du temps de thermalisation du gaz dans le ballon ;
- précision : elle est reliée à celle du manomètre utilisé ;
- justesse : ce capteur ne souffre pas à priori d'erreur systématique ;
- finesse : il s'agit d'un gros capteur, donc il perturbe le milieu à étudier.

II. THERMOMÈTRE ACOUSTIQUE [MPs 14, 16, 30 ET 31]

On propose de réaliser un second thermomètre primaire, à savoir un thermomètre acoustique. La mesure de la célérité des ondes acoustiques dans un gaz permet de remonter à la température de ce dernier. Pour cela, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [4] (pp. 528-538) pour la description de l'expérience et des éléments théoriques associés. Comme dans l'expérience précédente, le caractère primaire de ce thermomètre repose sur la modélisation du gaz comme un gaz parfait. Si ce n'est pas le cas, la relation entre la vitesse des ondes sonores et la température n'est pas connue exactement, et se servir d'un tel dispositif comme un thermomètre requiert un étalonnage préalable : ce thermomètre devient alors un thermomètre secondaire.

Liste du matériel :

- le dispositif du tube de Kundt `P72.3`,
- le thermostat `P0.86`,
- un adaptateur pour microphone `P74.38`,
- un convertisseur analogique numérique pour thermocouple `P102.27`,
- un générateur basses fréquences,
- un mètre ruban,
- un oscilloscope.

La robustesse de la mesure de la célérité repose sur celle de la longueur d'onde. Pour rendre l'expérience plus robuste, on peut, à température fixée, effectuer la mesure de la longueur d'onde λ pour plusieurs fréquences f de résonance (meilleure résolution), puis tracer λ en fonction de $1/f$ dont la pente permet de remonter à la célérité c des ondes acoustiques dans l'air à la température de travail.

Pour éviter les erreurs systématiques lors de la mesure de la longueur d'onde, on pourra marquer la tige du microphone à l'aide d'un stylo ou d'un feutre pour éviter toute erreur de parallaxe.

Attention que la température affichée par le bain thermique n'est qu'une estimation de la température de l'eau qui circule dans le circuit à eau. Il faut toujours mesurer la température avec le thermocouple associé au microphone. Par ailleurs, il faudra toujours mettre la tige totalement dans le tube avant de changer la température afin que la tige thermalise elle aussi. L'inertie thermique du dispositif est assez importante : la thermalisation peut prendre plusieurs minutes. Il est donc conseillé de mener d'autres expériences en parallèle de celle-ci.

On termine par mentionner certains aspects liés au capteur « thermomètre acoustique » :

- grandeur thermométrique : célérité c des ondes acoustiques dans le tube de Kundt, dont la variation avec la température T absolue est donnée par la relation $c = \sqrt{\gamma RT/M}$, avec γ le facteur adiabatique, R la constante d'état des gaz parfaits, et M la masse molaire du gaz dans le tube ;
- étalonnage : il n'en nécessite pas dans la limite du gaz parfait, mais pour des forts écarts à l'idéalité, ou dans le cas où la composition du gaz n'est pas connue, un étalonnage s'impose ;
- gamme d'utilisation : en l'état, ce thermomètre ne peut mesurer que des températures supérieures à la température de fusion et inférieures à la température de vaporisation du fluide caloporteur (ici l'eau) ;
- linéarité : le capteur n'est pas linéaire car la célérité varie comme $\sqrt{T}$;
- sensibilité : elle dépend de la température et vaut $s = (1/2)\sqrt{\gamma R/(MT)}$;
- rapidité : c'est un capteur extrêmement lent car le temps de thermalisation du gaz dans le tube est long, et car la mesure de la célérité en elle-même peut être fastidieuse ;

- précision : elle dépend essentiellement de la précision sur la mesure de la longueur d'onde des ondes acoustiques dans le tube aux résonateurs;
- justesse : ce capteur ne souffre pas à priori d'erreur systématique;
- finesse : il s'agit d'un gros capteur, donc il perturbe le milieu à étudier.

III. Le thermomètre à résistance de platine [MPs 16 et 59]

On propose d'étudier le thermomètre à résistance de platine, qui représente un outil légal de mesure de température entre 13,8033 K et 1234,93 K.

1. Étalonnage

Dans une première expérience, on se propose d'étalonner la sonde de platine à partir de points fixes.

Liste du matériel :
- une sonde de platine et son boîtier P102.120,
- un multimètre mesure quatre fils P69.35,
- un bec Bunsen P101.29,
- de l'étain solide P75,
- du gallium solide P75,
- de l'eau distillée,
- de la glace,
- un bécher,
- une plaque chauffante P101.16,
- un creuset P101,
- des tuyaux rouges P101 pour alimenter le bec Bunsen en gaz,
- un système de noix, pinces et potences.

> On propose de brancher la résistance de platine à un multimètre de précision permettant une mesure quatre fils. On pourra alors mesurer quatre points fixes : la température de fusion de l'eau $T = 273{,}15\,\mathrm{K}$, celle du gallium $T = 302{,}92\,\mathrm{K}$, celle de l'étain $T = 505{,}08\,\mathrm{K}$, et la température d'ébullition de l'eau $T = 373\,\mathrm{K}$. On repèrera à chaque fois le changement d'état par la présence d'un palier de température.
> On commencera par mesurer la résistance en immergeant l'extrémité de la sonde dans un mélange eau/glace. On doit alors trouver 100Ω.
> On pourra ensuite faire fondre du gallium dans un creuset suspendu par un trépied en chauffant quelques secondes avec un bec Bunsen (relié au gaz avec les tuyaux rouges). On pourra alors y placer la sonde de platine. On enregistrera alors la résistance et relèvera la valeur de résistance correspondant au plateau de température. Pour récupérer la sonde de platine, il faudra faire refondre le gallium. Cette solution pourra être l'occasion d'une deuxième mesure en montée.
> On pourra réitérer la même expérience dans le cas de l'étain.
> Enfin, on pourra faire bouillir de l'eau en déposant un bécher sur une plaque chauffante et enregistrer simultanément la résistance et relever la valeur de résistance correspondant au plateau de température.

Pour l'utilisation du multimètre, les deux bornes du haut à une extrémité de la résistance doivent être branchées sur les entrées HI, les deux autres bornes sont à relier aux entrées LOW. Il ne faut pas oublier d'activer la fonction 4-WIRE également. L'intérêt de la mesure quatre fils est détaillé dans la Réf. [4] (pp. 399-400).

On notera que les points fixes de l'eau ne sont pas des points fixes légaux, seul le point triple de l'eau l'est, mais cela requiert d'avoir une enceinte dont on peut contrôler la pression. Pour avoir plus de deux points de mesure, on a rajouté ces deux températures.

À la suite de cette expérience, on pourra vérifier que la loi de Callendar-van Dusen (valable entre 0 °C et 661 °C)

$$R(\theta) = R_0\left(1 + a\theta + b\theta^2\right) \tag{1}$$

est vérifiée, où $R(\theta)$ désigne la résistance de la sonde de platine, $R_0 = (100{,}00 \pm 0{,}02)\,\Omega$ sa valeur à 0 °C (d'où son nom), θ la température en °C, $a = (3{,}908 \pm 0{,}002) \times 10^{-3}\,\Omega\cdot(°\mathrm{C})^{-1}$ et $b = (-5{,}80 \pm 0{,}04) \times 10^{-7}\,\Omega\cdot(°\mathrm{C})^{-2}$ [1]. Attention que ces coefficients peuvent dépendre de l'état de la sonde, et de la pureté du matériau. Ils ont été obtenus à partir des valeurs de résistance données par la norme NF C 42-330 qui sont tabulées dans la Réf. [1] (pp. 321-322).

2. Mise en évidence de l'auto-échauffement (*)

Le problème de l'utilisation d'un ohmmètre est qu'on ne contrôle pas le courant qui traverse le capteur pour mesurer la résistance. On peut alors utiliser un autre montage qui permet de contrôler le courant débité, et qui permet également de mettre en évidence l'auto-échauffement. Cette expérience est analogue à l'Exp. V. On renvoie donc à cette expérience directement pour le protocole.

On termine par mentionner certains aspects liés au capteur « sonde de platine » :

- grandeur thermométrique : résistance R de la sonde de platine ;
- étalonnage : il en nécessite un ;
- gamme d'utilisation : la sonde de platine présente une très large gamme d'utilisation, entre 13,8033 K et 1234,93 K ;
- linéarité : le capteur est linéaire pour une faible variation de température (typiquement entre 0 °C et 100 °C), mais ne l'est plus si on considère une plus grande gamme de températures de mesure ;
- sensibilité : elle ne dépend pas de la température dans la limite de variations faibles de température et est donnée par la valeur de a ;
- rapidité : c'est un capteur dont la rapidité dépend de sa taille et du conditionnement, en l'occurrence pour celle de la collection, le temps de réponse est assez élevé, de l'ordre de la dizaine de secondes (voir l'Exp. V) ;
- précision : elle dépend essentiellement de la précision sur la mesure de la résistance ;
- justesse : ce capteur peut avoir une erreur systématique du fait de l'auto-échauffement ;
- finesse : il s'agit d'un gros capteur, donc il perturbe le milieu à étudier (les capteurs industriels sont beaucoup plus fins).

IV. LES THERMOCOUPLES [MPs 16 ET 35]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [5] (pp. 347-353) pour une description de l'expérience et des éléments théoriques associés. Nous conseillons d'utiliser la sonde de platine Pt100 comme thermomètre étalon (de référence).

Liste du matériel :

- deux thermocouples de type K `P102.121`,
- un bécher contenant un mélange eau-glace,
- un bécher contenant de l'eau,
- un agitateur chauffant `P101.16`,
- un barreau aimanté,
- une sonde de Platine Pt100 `P102.120`,
- le multimètre quatre fils Fluke 8846A `P69.35`.

On mentionne que la jonction soumise à la température inconnue est appelée soudure chaude, celle maintenue à la température connue (souvent 0 °C) est nommée soudure froide. On peut mettre en évidence l'effet Seebeck en utilisant des métaux différents d'usage courant (fer, cuivre) mais l'effet obtenu est assez faible. C'est pour cela que les thermocouples utilisés sont composés d'alliages de métaux ou de semi-conducteurs, et on pourra se référer à la Réf. [5] (p. 348) ou à la Réf. [3] (pp. 178-186) pour une liste des principaux matériaux utilisés.

Les avantages des thermocouples par rapport aux thermomètres dont la grandeur thermométrique est une résistance sont listés dans la Réf. [5]. On peut également mentionner que le fait que la grandeur thermométrique est une tension implique qu'il n'est pas nécessaire de réaliser de conditionnement en aval.

On ne traitera dans cette expérience que l'étalonnage du capteur. La mesure de son temps de réponse sera faite dans l'Exp. V.

On liste certains aspects liés au capteur « thermocouple » :

- grandeur thermométrique : force électromotrice Seebeck e ;
- étalonnage : il en nécessite un ;
- gamme d'utilisation : il présente une très large gamme d'utilisation, typiquement entre −200 °C et 1300 °C pour le thermocouple de type K ;
- linéarité : le capteur n'est pas linéaire, la relation entre la force électromotrice et la température θ en °C est mieux modélisée par la relation $e(\theta) = e_0 + c_0\theta + q\theta^2$, avec c_0 le coefficient Seebeck, e_0 la force électromotrice à la température de la soudure froide, et q un coefficient de correction à la linéarité ;

- sensibilité : elle dépend à priori de la température et vaut $s = e_0 + 2\alpha T$, proche de la température de la soudure froide, elle vaut environ $e_0 = 0{,}037\,\mathrm{mV{\cdot}(°C)^{-1}}$;
- rapidité : c'est un capteur extrêmement rapide du fait de sa petite taille (voir l'Exp. V) ;
- précision : elle dépend essentiellement de la précision sur la mesure de la tension ;
- justesse : ce capteur peut avoir une erreur systématique du fait de la variation de la température de la soudure froide (dans le cas d'un montage à deux soudures) ;
- finesse : il s'agit d'un petit capteur, donc il perturbe peu le milieu à étudier, il peut même être utilisé dans des atmosphères explosives ou nocives, être soudé, etc.

Enfin, on mentionne que l'usage d'un bain eau-glace permet une meilleure précision mais n'est pas pratique à l'utilisation. La plupart du temps, la soudure froide est placée dans l'appareil de mesure, et est donc à température ambiante T_{amb}. Pour compenser ce fait, un circuit électronique ajoute une tension égale à (avec les notations de la Réf. [5]) $e_0(T_{amb} - T_0)$ (circuits dits de compensation de soudure froide). La mesure de T_{amb} est usuellement effectuée au moyen d'une résistance thermométrique. Pour plus de détails sur ces circuits, nous renverrons le lecteur à la Réf. [1] (pp. 306-307).

V. Les thermistances [MPs 16, 36, 57 et 59]

1. Étalonnage

On renvoie le lecteur à la Réf. [5] (pp. 339-347) pour la description de l'expérience et des éléments théoriques associés. Pour plus de détails sur la fabrication et la modélisation des thermistances, on pourra se reporter à la Réf. [2]. Comme dans l'Exp. IV, la sonde de platine servira de thermomètre de référence.

Liste du matériel :

- une alimentation continue P53.20,
- une thermistance CTN de 47 Ω P102.120,
- un bécher rempli d'eau,
- un agitateur chauffant P101.16,
- un barreau aimanté,
- un voltmètre,
- un ampèremètre,
- une sonde de Platine Pt100 P102.120,
- le multimètre quatre fils Fluke 8846A P69.35.

Pour être efficace, on pourra mener cette expérience en même temps que l'Exp. IV en utilisant le même bécher chauffé.

On liste certains aspects liés au capteur « thermistance à CTN » :

- grandeur thermométrique : résistance électrique R de la thermistance ;
- étalonnage : il en nécessite un ;
- gamme d'utilisation : il présente une large gamme d'utilisation couvrant plusieurs centaines de degrés Celsius ;
- linéarité : le capteur n'est pas linéaire, la relation entre la résistance et la température absolue T est $R(T) = R_\infty e^{E_g/(2k_BT)}$, avec R_∞ la résistance à température infinie, k_B la constante de Boltzmann, et E_g l'énergie de gap du matériau semi-conducteur ;
- sensibilité : elle dépend fortement de la température et vaut $s = -R(T)E_g/(2k_BT^2)$, et augmente très fortement quand la température diminue, ce qui en fait un capteur très sensible ;
- rapidité : c'est un capteur plutôt rapide du fait de sa petite taille (voir l'expérience qui suit) ;
- précision : elle dépend essentiellement de la précision sur la mesure de la résistance ;
- justesse : ce capteur peut avoir une erreur systématique du fait de l'auto-échauffement ;
- finesse : il s'agit d'un petit capteur, donc il perturbe peu le milieu à étudier.

On mentionne, en passant, qu'à l'inverse des thermistances à CTN, les thermistances à CTP ont une faible gamme d'utilisation, car la résistance varie de façon non monotone avec la température.

2. Étude du temps de réponse des différents thermomètres

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [5] (pp. 329-333 et pp. 352-356) pour la description de l'expérience et des éléments théoriques associés.

Liste du matériel :

- une bassine haute remplie d'eau,
- un thermostat P101.14,
- un manomètre P96.55,
- un système de poteaux, noix et pinces,
- un ballon monocol muni d'un bouchon et d'un tuyau souple,
- deux thermocouples de type KP102.121,
- un bécher contenant un mélange eau-glace,
- deux alimentations continues P53.20,
- une thermistance CTN de 47 Ω P102.130,
- une sonde de Platine Pt100 P102.130,
- deux résistances $R_1 = 100\,\mathrm{k\Omega}$ et $R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}$,
- un amplificateur linéaire intégré,
- une carte d'acquisition.

On pourra notamment étudier le temps de réponse des thermomètres quand on les place dans un récipient d'eau chauffée à 60°C depuis la température ambiante, puis leur temps de réponse quand on les sort de l'eau et qu'on laisse se refroidir à température ambiante. Pour étudier l'importance du conditionnement du capteur, on pourra aussi mesurer le temps de réponse avec le thermocouple P102.120, plus massif. De façon générique, le temps de réponse du capteur dépend de la résistance thermique entre lui et le milieu ambiant (et donc du conditionnement), mais aussi de sa capacité thermique. Un capteur sera d'autant plus rapide que la résistance thermique entre lui et le milieu ambiant sera grande, et sa capacité thermique petite. Comme la capacité thermique est extensive, un capteur sera d'autant plus rapide qu'il sera petit.

VI. THERMOMÈTRE À DILATATION [MPs 16 ET 57]

On propose dans cette expérience d'étudier un thermomètre à dilatation de liquide. Étant déjà étalonné, on va se contenter ici d'étudier son temps de réponse. Il est constitué d'un liquide en équilibre avec sa vapeur saturante, qui va se dilater plus ou moins en fonction de la température : des graduations sont ensuite placées pour mesurer le volume du liquide. Il faut l'immerger jusqu'à la ligne de colonne émergente pour garantir le résultat. Pour une description plus détaillée de ce thermomètre, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [3] (pp. 434-438).

Liste du matériel :

- un thermomètre à dilatation de liquide P102.2,
- un bain eau-glace,
- un bécher rempli d'eau,
- un agitateur chauffant P101.16,
- un barreau aimanté,
- un chronomètre P96.56.

> On propose de plonger un thermomètre à dilatation d'un bain eau-glace à un bain d'eau de température connue, et de mesurer le temps de réponse du thermomètre, c'est-à-dire le temps qu'il lui faut pour que la surface libre du liquide se déplace d'une fraction de son déplacement total en régime établi (par exemple 90 %).

Attention qu'un ajustement exponentiel de la dénivellation du liquide en fonction du temps par une exponentielle pour remonter au temps de réponse n'a pas de sens ici, car le capteur n'est pas linéaire (voir plus loin).

On termine par mentionner certains aspects liés au capteur « thermomètre à dilatation de liquide » :

- grandeur thermométrique : dénivellation du liquide dans la colonne (ce qui n'en fait pas un capteur pratique car la mesure n'est pas de nature électrique et l'information ne peut pas être traitée par un circuit électronique en aval) ;
- étalonnage : il en nécessite un ;

- gamme d'utilisation : il présente une faible gamme d'utilisation qui dépend du coefficient de dilatation isobare du liquide et de la hauteur maximale de la colonne de liquide ;
- linéarité : le capteur n'est pas linéaire, et on peut le voir qualitativement en notant que l'écart entre les graduations n'est pas constant en fonction de la température ;
- sensibilité : elle dépend de la température car le capteur est non linéaire, et dépend également du coefficient de dilatation isobare ;
- rapidité : c'est un capteur plutôt lent par rapport à d'autres capteurs étudiés dans l'Exp. V du fait de l'inertie du liquide et surtout de la gaine en verre qui l'entoure ;
- précision : elle dépend essentiellement du nombre de graduations, de la taille du ménisque, et de l'appréciation par l'expérimentateur de la position de la surface libre ;
- justesse : ce capteur ne souffre pas, à priori, d'erreurs systématiques ;
- finesse : il s'agit d'un capteur dont la taille est de plusieurs centimètres, il perturbe donc le milieu à étudier.

VII. BRUIT THERMIQUE [MPs 00 ET 00]

P. Pajuello

RÉFÉRENCES

[1] G. Asch. et coll., *Les capteurs en instrumentation industrielle*, Dunod (2010).

[2] M. Cantagrel, « Thermistances à CTN », *Techniques de l'ingénieur* e2120 (1986).

[3] J.-M. Donnini et L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale. Tome II : thermodynamique et applications*, Pierron (1997).

[4] M. Fruchart, P. Lidon, E. Thibierge, M. Champion et A. Le Diffon, *Physique expérimentale. Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, De Boeck Supérieur (2016).

[5] Jolidon, *Physique expérimentale - Optique, magnétisme, électrotechnique, mécanique, thermodynamique et physique non linéaire*, EDP Sciences (2021).

[6] Y. Pannetier et E. Kuntz, « Capteurs - Définitions, principes de détection », *Techniques de l'ingénieur* r400 (2009).

[7] M. Sadli, « L'échelle internationale de température : ITT-90 », *Techniques de l'ingénieur* r2510 (2006).

[8] https://www.bipm.org/documents/20126/41483022/SI-Brochure-9-EN.pdf.

[9] https://www.bipm.org/documents/20126/41773843/Guide_ITS-90_1_Introduction_2018.pdf/1cbdf00e-441e-e154-536b-62e96ef7f4c7.

Thermodynamique des transitions de phase

Table des expériences

I.	Transition liquide-gaz de l'hexafluorure de soufre [MP 17]	95
II.	Mesure de la chaleur latente de fusion de la glace par la méthode des mélanges [MP 17]	97
III.	Mesure de la chaleur latente de vaporisation du diazote par la méthode électrique [MP 17]	99
IV.	Mesure de la résistance d'un supraconducteur (*) [MPs 17 et 35]	99
V.	Bouillant de Franklin	100
VI.	Transition ferromagnétique-paramagnétique du fer [MPs 17 et 35]	101
VII.	Recalescence du fer [MPs 17 et 35]	102
VIII.	Effet Meissner [MPs 17, 34 et 35]	103
IX.	Surfusion de l'étain [MPs 17 et 57]	103

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

Dans toutes les expériences qui suivent, il conviendra (notamment dans la perspective d'un montage ou d'une leçon) de mettre en évidence quelques propriétés des transitions de phase, notamment :

- le paramètre d'ordre de la transition : grandeur thermodynamique qui varie continuement ou discontinuement à la transition et qui permet de distinguer les deux phases ;
- l'ordre de la transition (due à Landau)[1] : une transition est discontinue (ou du premier ordre) si le paramètre d'ordre varie discontinuement à la transition, sinon elle est dite continue (ou du second ordre).
- la symétrie spontanément brisée[2], si elle existe.

Pour des détails sur toutes les notions associées aux transitions de phase, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [12], ou bien à la Réf. [14]. On pourra également consulter la Réf. [7] (pp. 645-662) qui aborde aussi la classification des transitions de phase.

I. Transition liquide-gaz de l'hexafluorure de soufre [MP 17]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [10] (pp. 370-383) pour la description de l'expérience et des éléments théoriques associés. Le dispositif expérimental sur lequel cette expérience s'appuie est décrit dans la Réf. [11].

Liste du matériel :

- le dispositif `P0.13`,
- le bain thermostaté `P0.06`,
- un thermomètre à alcool `P102.2`.

Le choix de l'hexafluorure de soufre SF_6 comme gaz pour la mesure de ses propriétés thermoélastiques est justifié en détail dans la Réf. [11].

La colonne met un temps conséquent à atteindre l'équilibre thermique au contact de l'eau. Par souci de temps on doit alors limiter le nombre de températures à explorer : on propose d'en étudier quatre dans ce TP de part et d'autre du point critique, à savoir 23°C, 25°C, 27°C et 46°C. On mentionne qu'on pourrait étudier des températures encore plus basses en actionnant le réfrigérateur (bouton `Menu`).

1. Il existe une autre classification des transitions de phase due à Ehrenfest, qui définit les transitions de phase du premier ordre comme celles pour lesquelles une dérivée première de l'énergie libre est discontinue à la transition, et les transitions du second ordre comme celles pour lesquelles une dérivée seconde de l'énergie libre est discontinue à la transition. Cette classification présente l'inconvénient de ne pas inclure les transitions de phase pour lesquelles une dérivée seconde de l'énergie libre diverge à la transition, ce qui se produit souvent lors des transitions de phase du second ordre au sens de Landau (par exemple dans le modèle champ moyen de la transition ferromagnétique-paramagnétique).

2. Dans le cas des transitions de phase du premier ordre, les symétries des deux phases peuvent être différentes. Par contre, dans le cas d'une transition de phase du second ordre, l'une des phases est plus symétrique que l'autre, ce qui se traduit effectivement par une brisure spontanée de symétrie.

1. Isothermes dans le diagramme de Watt

Une première expérience réalisable consiste à relever la pression et le volume du gaz pour différentes températures et ainsi construire les isothermes du SF_6 dans le diagramme de Watt (p, V). Cela est détaillé dans la Réf. [10] (pp. 370-378).

Pour réaliser la mesure des isothermes, on propose de commencer par les températures les plus froides. Pour chaque température, on commencera par les grandes valeurs de volumes (de l'ordre de 3,5 mL) puis on diminuera le volume en faisant tourner le volant. On peut raisonnablement faire quinze points jusqu'à $V \simeq 0{,}2$ mL. On pensera bien à remettre le volume de l'enceinte à 3,5 mL avant de changer la température de consigne.

Les incertitudes devront être traitées avec soin dans cette expérience, notamment celles sur le volume de la chambre (qui dépendent des graduations, mais aussi de la forme du ménisque et de l'hystérésis de mouillage), et sur la pression dans la chambre (qui dépendent là encore de la résolution du manomètre).

En traçant les différentes isothermes dans le diagramme de Watt, on doit observer différents comportements. Pour les isothermes à 23 °C, 25 °C et 27 °C, on distingue trois régimes : une phase gazeuse homogène à grands volumes et faibles pressions, la coexistence liquide-gaz sur le plateau à pression « constante », et une phase liquide homogène à petits volumes et grandes pressions. Par contre, sur l'isotherme à 46 °C, le plateau a disparu car le système se trouve au-dessus du point critique.

2. Mesure de la quantité de matière

Pour déterminer les propriétés thermodynamiques du fluide (notamment sa chaleur latente de vaporisation), il est nécessaire de connaître la quantité de matière n de SF_6 dans la colonne. Pour cela, on approxime l'équation d'état du fluide par son développement du viriel au second ordre

$$\frac{pV}{RT} = n\left[1 + B_1(T)\frac{n}{V} + B_2(T)\left(\frac{n}{V}\right)^2\right]. \tag{1}$$

On pourra alors en déduire n en reproduisant l'analyse de la Réf. [10] (p. 375). En particulier, on pourra faire un ajustement quadratique de $pVT/(RT)$ en fonction de $1/V$ de la forme $pVT/(RT) = a + b(1/V) + c(1/V)^2$ avec a, b et c trois paramètres ajustables, dont le paramètre a permet de remonter à n. On peut faire le traitement pour chaque température, ce qui permettra d'effectuer un traitement statistique des incertitudes pour la mesure de n. On attend $n \simeq 1{,}74$ mmol.

On pourra également dans un second temps remonter aux paramètres du viriel $B_1(T) = b/n^2$ et $B_2(T) = c/n^3$ en fonction de la température, comme cela est fait dans la Réf. [10] (pp. 376-377).

3. Chaleur latente de vaporisation de SF_6

Connaissant n, on peut par exemple obtenir la chaleur latente de vaporisation $L(T)$ de SF_6 (qui représente la variation d'enthalpie lors du changement d'état par unité de quantité de matière). Pour cela, on peut utiliser la relation de Clapeyron, valable pour les transitions de phase du premier ordre,

$$\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{sat}}}{\mathrm{d}T}(T) = \frac{L(T)}{T\left[V_{\mathrm{g,m}}(T) - V_{\mathrm{l,m}}(T)\right]}, \tag{2}$$

où $p_{\mathrm{sat}}(T)$ désigne la pression sur le palier de changement d'état des isothermes d'Andrews, $V_{\mathrm{g,m}}(T)$ le volume molaire pour lequel on observe la première goutte de liquide (extrémité droite du palier de changement d'état dans le diagramme de Watt divisée par n) et $V_{\mathrm{l,m}}(T)$ le volume molaire pour lequel la dernière bulle de gaz disparaît (extrémité gauche du palier de changement d'état dans le diagramme de Watt divisée par n).

Pour déterminer la chaleur latente, on peut utiliser la méthode décrite dans la Réf. [10] (pp. 378-380), mais qui nécessite d'avoir mesuré les isothermes d'Andrews pour une dizaine de températures. Ici, on peut se contenter d'estimer la chaleur latente à 25 °C. Pour cela, on approxime

$$\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{sat}}}{\mathrm{d}T}(\theta = 25\,^\circ\mathrm{C}) \simeq \frac{p_{\mathrm{sat}}(\theta = 27\,^\circ\mathrm{C}) - p_{\mathrm{sat}}(\theta = 23\,^\circ\mathrm{C})}{T(\theta = 27\,^\circ\mathrm{C}) - T(\theta = 23\,^\circ\mathrm{C})}, \tag{3}$$

où θ désigne la température en °C. On peut alors mesurer V_{g} et V_{l} à 25 °C à partir de l'isotherme à cette température, ce qui permet d'en déduire $L(\theta = 25\,^\circ\mathrm{C})$ par la relation

$$L(\theta = 25\,^\circ\mathrm{C}) \simeq T(\theta = 25\,^\circ\mathrm{C}) \times \left(\frac{V_{\mathrm{g}}(\theta = 25\,^\circ\mathrm{C}) - V_{\mathrm{l}}(\theta = 25\,^\circ\mathrm{C})}{n}\right) \times \left(\frac{p_{\mathrm{sat}}(\theta = 27\,^\circ\mathrm{C}) - p_{\mathrm{sat}}(\theta = 23\,^\circ\mathrm{C})}{T(\theta = 27\,^\circ\mathrm{C}) - T(\theta = 23\,^\circ\mathrm{C})}\right). \tag{4}$$

Pour déterminer p_{sat}, on prendra la valeur moyenne de la pression sur le « palier » de changement d'état. La variation de p_{sat} sur le « palier » permettra d'en déduire une incertitude sur la pression qui s'ajoutera à celle découlant de la résolution du manomètre.

4. Observation de l'opalescence critique (*)

On peut observer également le phénomène d'opalescence critique, caractéristique du point critique de la transition de phase liquide-gaz. Un protocole analogue à celui de la Réf. [10] (pp. 380-383) mais utilisant du matériel optique de base est proposé ci-dessous.

Liste du matériel :

- le dispositif P0.13,
- le bain thermostaté P0.86,
- un thermomètre à alcool,
- un bécher rempli d'un mélange eau-glace,
- une lampe QI,
- une lentille de distance focale $f' = 10\,\text{cm}$,
- un écran.

> On propose de porter la cellule contenant le SF_6 à une température de 48°C supérieure à la température du point critique. Avec une lampe quartz-iode, on pourra ensuite faire l'image de la cellule sur un écran avec une lentille de distance $f' = 10\,\text{cm}$. On pourra alors abaisser brusquement la température de la chambre en posant un bécher contenant un mélange eau-glace sur la cellule.

On doit observer que le fluide devient trouble. Cela est dû aux grandes fluctuations de densité près du point critique. Ces dernières induisent de grandes fluctuations d'indice optique, le fluide devient alors fortement diffusant et il devient plus difficile pour la lumière de traverser la chambre, expliquant le teint laiteux et sombre pris par le fluide.

Pour la réalisation de cette expérience, il faut s'assurer que la distance D entre la chambre et l'écran est supérieure à $4f'$. Dans le cas où $D > 4f'$, il y a alors deux positions de la lentille qui donnent une image nette sur l'écran, et celle de grandissement maximal correspond à la situation où la lentille est plus proche de l'objet que de l'image. Il faut alors placer le côté le plus plat de la lentille vers l'objet pour minimiser les aberrations géométriques (40° pour Plus Plat Plus Près), tandis que l'utilisation d'un achromat permet de s'affranchir des aberrations chromatiques. En second lieu, pour maximiser le grandissement, il faut privilégier des petites distances focales f' et des grandes distances objet-écran D. Néanmoins, cela diminue la luminosité. Un compromis est donc trouvé pour une distance focale $f' = 10\,\text{cm}$ et une distance D inférieure ou de l'ordre du mètre.

Comme cela est expliqué dans la Réf. [10], l'opalescence critique est un phénomène d'équilibre mais qu'on observe ici hors-équilibre car le dispositif ne permet pas un contrôle suffisamment fin de la température de la chambre.

On termine par mentionner quelques aspects théoriques en lien avec la transition de phase liquide-gaz :

- le paramètre d'ordre est la densité, ou encore la masse volumique ;
- la transition est du premier ordre sous le point critique (car la masse volumique ou le volume molaire sautent discontinûment), et du second ordre au point critique ;
- il n'y a pas de symétrie spontanément brisée.

Il existe une multitude d'ouvrages qui traitent de la transition liquide-vapeur du corps pur. On donne ici quelques références « classiques » que le lecteur pourra consulter : la Réf. [14] (pp. 251-262), la Réf. [12] (pp. 117-134), la Réf. [7] (pp. 297-341), la Réf. [6] (pp. 415-433) ou bien la Réf. [2] (pp. 215-244).

II. MESURE DE LA CHALEUR LATENTE DE FUSION DE LA GLACE PAR LA MÉTHODE DES MÉLANGES [MP 17]

Nous proposons de réaliser l'expérience suivante, également présentée dans la Réf. [8] (pp. 49-51) et dans la Réf. [9] (pp. 278-280).

Liste du matériel :

- un calorimètre P103.47,
- une balance de précision P97.24,
- un thermocouple de type K P102.12/1,
- un convertisseur analogique numérique pour thermocouple P102.31,
- une bouilloire P101.28,

- un chronomètre P96 , 56,
- un cristallisoir,
- un bécher,
- de l'eau,
- des glaçons.

1. **Détermination de la masse en eau du calorimètre**

> Pour les expériences de calorimétrie, il est nécessaire pour commencer de déterminer la masse en eau du calorimètre, qui est le rapport de sa capacité thermique sur la capacité thermique massique de l'eau $c_e = 4{,}18\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$. Pour cela, on remplira le calorimètre avec une masse m_1 d'eau connue mesurée précisément (par exemple $m_1 = 300\,\mathrm{g}$). On relèvera alors la température T_1 de l'eau avec un thermocouple de type K. On fera ensuite chauffer de l'eau avec une bouilloire, et on en versera une masse m_2 mesurée précisément dans un bécher, et on en mesurera sa température T_2. On pourra prendre, là encore, $m_2 = 300\,\mathrm{g}$. On versera alors le contenu du bécher dans le calorimètre, et on fermera le calorimètre. On plongera le thermocouple dans le calorimètre et on suivra l'évolution de la température en fonction du temps. On pensera à mélanger doucement le contenu du calorimètre pour faciliter l'homogénéisation de la température.

On doit observer que la température se stabilise à la température T_f. En réalité, elle diminue lentement du fait des fuites thermiques du calorimètre. On note alors μ la masse en eau du calorimètre. Le bilan d'enthalpie appliqué au système constitué du calorimètre et de l'eau donne alors que son enthalpie est constante, ce qui donne, par additivité de l'enthalpie :

$$(\mu + m_1 + m_2)\,c_e T_f = (\mu + m_1)\,c_e T_1 + m_2 c_e T_2 \Longrightarrow \mu = \frac{m_2\,(T_1 - T_f) + m_2\,(T_2 - T_f)}{T_f - T_1}. \tag{5}$$

On attend un résultat de l'ordre de la dizaine de grammes. On notera qu'on a supposé que la capacité thermique de l'eau ne dépendait pas de la température sur la gamme de température entre 20 °C et 100 °C. Cela est raisonnable car celle-ci varie de $4{,}182\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ à 20 °C à $4{,}216\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ à 100 °C, ce qui correspond à une variation de 0,8 % bien inférieure aux erreurs sur la mesure de la température.

2. **Détermination de la chaleur latente de fusion de l'eau**

Connaissant la masse en eau du calorimètre, on peut déterminer la chaleur latente spécifique[3] de fusion de l'eau L_{fus} à pression atmosphérique (ou bien à 0 °C).

> On commencera par faire tremper une grande quantité de glaçons dans de l'eau dans un cristallisoir. On pourra alors suivre la température de l'eau avec un thermocouple. Quand la température stabilise, on attendra encore un peu pour être sûr que les glaçons sont à $\theta_g = 0\,°\mathrm{C}$ (avec θ la température en °C et T la température absolue en K).

Cette première partie du protocole permet de s'assurer que la température des glaçons est bien égale à 0 °C. En effet, à leur sortie du congélateur, ils sont à une température de l'ordre de −20 °C, et les placer au contact de l'eau liquide permet de s'assurer qu'ils sont bien à la température de changement d'état liquide–solide de 0 °C. Dans le traitement de l'expérience qui suit (voir l'Éq. (6)) le réchauffement des glaçons de la température en sortie du congélateur à 0 °C n'est pas pris en compte, une telle étape préparatoire est donc nécessaire.

> On pourra ensuite verser une quantité d'eau m_1 (à température ambiante) d'environ 300 g mesurée précisément dans le calorimètre et relever la température T_i. On pourra alors récupérer dans le cristallisoir quelques gros glaçons, les sécher sur un papier absorbant et mesurer leur masse m_g. On les introduira alors dans le calorimètre, on fermera celui-ci et on suivra l'évolution de la température, jusqu'à ce qu'elle se stabilise à T_f. On pensera à mélanger doucement le contenu du calorimètre pour faciliter l'homogénéisation de la température.

Il faut bien sécher sur un papier absorbant les glaçons car l'eau liquide ainsi introduite ne participe pas à la fusion, et sa masse n'est pas prise en compte dans le bilan enthalpique ci-dessous. Par ailleurs, il faut que les glaçons aient entièrement fondu une fois l'équilibre thermique atteint (ce qu'on vérifie facilement en obtenant une température finale supérieure à 0 °C). C'est pour cela que quatre gros glaçons sont amplement suffisants.

On effectue un bilan enthalpique au système constitué du calorimètre, de l'eau liquide et de la glace. En négligeant les fuites thermiques, son enthalpie est conservée. Par ailleurs, étant une fonction d'état et étant une grandeur additive, la variation d'enthalpie au cours de l'expérience s'écrit

$$(m_1 + \mu)\,c_e\,(T_f - T_i) + m_g L_{fus} + m_g c_e\,(T_f - T_g) = 0 \Longrightarrow L_{fus} = c_e\left(\frac{m_1 + \mu}{m_g}\,(T_i - T_f) + T_g - T_f\right). \tag{6}$$

3. La chaleur latente est le plus souvent entendue comme une variation d'enthalpie par unité de quantité de matière. Ici, on s'intéresse à la variation d'enthalpie par unité de masse, d'où l'appellation « chaleur latente spécifique ».

On attend pour l'enthalpie de fusion massique $\ell_{\text{fus}}^{\text{lab}} \simeq 334\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

Dans ces expériences, on néglige l'ensemble des fuites thermiques qui se produisent, notamment les pertes par conducto-convection avec l'air emprisonné dans le calorimètre, et l'énergie apportée par l'expérimentateur lors de l'agitation (c'est pour cela qu'il faut mélanger doucement pour minimiser cet apport d'énergie). Ces pertes dépendent de la durée de l'expérience, et pour les estimer, on peut utiliser la méthode de Regnault décrite dans la Réf. [8]. Dans cette méthode, on suppose que la puissance perdue par fuites thermiques est constante au cours du temps, de sorte que la température a une dérive linéaire une fois l'état stationnaire sous hypothèse adiabatique atteint, de la forme $T(t) = T_f + \alpha t$. On peut alors estimer α à partir des données expérimentales, puis si on note Δt la durée du régime transitoire, une correction de la température finale tenant compte des fuites thermiques est

$$T_f^{\text{corr}} = T_f - \alpha\Delta t. \tag{7}$$

Ces expériences souffrent de larges incertitudes, notamment du fait des fluctuations de la température. Il pourrait donc être avisé de réaliser plusieurs fois l'expérience, et d'effectuer un traitement statistique des incertitudes. De façon générique, ces pertes d'énergie conduisent à sous-estimer la chaleur latente de fusion de la glace.

On termine par mentionner quelques aspects théoriques en lien avec la transition de phase liquide-solide :

- le paramètre d'ordre peut être pris comme la transformée de Fourier du champ de densité $\rho(\vec{r})$ (représentant la masse locale par unité de volume élémentaire) évaluée aux vecteurs $\vec{K} \neq \vec{0}$ du réseau réciproque ;
- la transition est toujours du premier ordre ;
- il y a une brisure spontanée de symétrie, qui est la symétrie par translation : le liquide est invariant par translation par tout vecteur $\vec{R} \in \mathbb{R}^3$, le solide uniquement par les translations par un vecteur $\vec{R}$ du réseau direct.

Pour des rappels sur les notions de réseaux direct et réciproque d'un solide cristallin, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [1]. Pour plus de détails sur la description théorique de la transition de phase solide-liquide, nous renvoyons le lecteur à la Réf. [4] (pp. 188-198).

III. Mesure de la chaleur latente de vaporisation du diazote par la méthode électrique [MP 17]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [13] (pp. 369-378) pour une description de l'expérience et des éléments théoriques associés. On pourra également consulter la Réf. [8] (pp. 55-57). Cette expérience requiert l'utilisation de diazote liquide : il faudra donc se munir de gants cryogéniques et de lunettes pour sa réalisation !

Liste du matériel :

- un vase Dewar muni d'une résistance chauffante `P103.48`,
- du diazote liquide,
- une balance `P97.20` ou `P97.21`,
- un wattmètre `P50.17`,
- un système de potences, noix et pinces,
- un chronomètre `P96.56`,
- un alternostat `P57.3`.

Cette méthode a l'avantage de ne pas nécessiter la détermination de la valeur en eau du calorimètre (puisque l'expérience est à température constante), contrairement à la méthode des mélanges. Elle permet également de mieux s'affranchir des pertes en supposant que celles-ci ne dépendent pas de la puissance électrique.

Pour la mesure de la masse de diazote évaporée, si on utilise la balance Kern `P97.21`, on peut réaliser un suivi de la masse d'eau écoulée au cours du temps avec le logiciel Kern. Sinon, on se contentera d'une mesure manuelle du temps à l'aide d'un chronomètre.

On termine par mentionner que les propriétés de la transition de phase liquide-gaz ont déjà été mentionnées dans l'Exp. I.

IV. Mesure de la résistance d'un supraconducteur (*) [MPs 17 et 35]

On propose de réaliser l'expérience illustrant la chute de résistance d'un métal lors de la transition de phase métal-supraconducteur. Nous renvoyons pour cela à la Réf. [13] (pp. 379-390). Cette expérience requiert l'utilisation de diazote liquide : il faudra donc se munir de gants cryogéniques et de lunettes pour sa réalisation !

Liste du matériel :

- le dispositif supraconducteur + thermocouple de type TP102.36,
- une alimentation continue P53.10,
- un bécher rempli d'un mélange eau-glace,
- du diazote liquide,
- de la graisse de silicone,
- deux amplificateurs linéaires intégrés en montage amplificateur non inverseur,
- des résistances $R_{a,1} = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $R_{a,2} = 1\,\mathrm{M\Omega}$ pour l'amplification du signal de tension aux bornes du métal,
- des résistances $R_{b,1} = 3\,\mathrm{k\Omega}$ et $R_{b,2} = 1\,\mathrm{M\Omega}$ pour l'amplification du signal de tension aux bornes du thermocouple,
- un filtre passe-bas de Butterworth du quatrième ordre P41.21,
- un condensateur de capacité $C = 150\,\mathrm{nF}$ et une résistance $R = 1\,\mathrm{M\Omega}$ pour la réalisation d'un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure de l'ordre de 1 Hz,
- un support élévateur P35.0,
- un vase Dewar P103.47,
- un système de potences, noix et pinces,
- une carte d'acquisition.

On pensera à étalonner le thermocouple de type T si celui-ci ne l'est pas déjà (on renvoie pour cela au TP6).

On propose dans cette expérience de ne réaliser que la mesure de résistance. La mise en évidence de l'effet Meissner sera faite dans l'Exp. VIII.

On termine par mentionner quelques propriétés de la transition de phase métal-supraconducteur.

- En premier lieu, le paramètre d'ordre $\Psi(\vec{r})$ est complexe et représente physiquement la densité de fonctions d'onde de paires de Cooper[4] dans un volume mésoscopique (de telle sorte que $|\Psi(\vec{r})|^2$ représente la densité de paires de Cooper dans le métal). Cela implique que les fonctions d'onde des paires de Cooper individuelles sont toutes en phase dans un volume mésoscopique.
- En second lieu, la transition est du second ordre en l'absence de champ magnétique, mais du premier ordre en présence de champ magnétique.
- En dernier lieu, il y a une brisure spontanée de symétrie, qui est la brisure de symétrie de jauge locale du potentiel vecteur, la liberté sur le choix d'une jauge locale n'étant plus possible dans la phase supraconductrice. En effet, si les paires de Cooper étaient toutes indépendantes, alors on pourrait décrire l'état quantique de chaque paire avec une jauge différente pour le potentiel vecteur. [On rappelle que le Hamiltonien quantique qui décrit un électron fait intervenir un terme de la forme $(\vec{p} + e\vec{A})^2/(2m)$, avec $\vec{p}$ l'impulsion de l'électron, e la charge électrique élémentaire, $\vec{A}$ le potentiel vecteur, et m la masse de l'électron.] Le fait que les paires de Cooper aient toutes des fonctions d'onde individuelles en phase localement signifie qu'elles doivent toutes être décrites localement par le même potentiel vecteur (et donc la même jauge), car sinon on pourrait changer arbitrairement la phase de chaque fonction d'onde individuelle par un nouveau choix de jauge. [On rappelle que le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ est défini à un gradient près, et si on effectue une transformation de jauge $\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Lambda)(\vec{r})$, alors la fonction d'onde d'un électron $\psi(\vec{r})$ devient $\psi'(\vec{r}) = \psi(\vec{r})e^{-i\Lambda(\vec{r})/\hbar}$.] Pour un rappel sur la description des particules chargées en mécanique quantique et les transformations de jauge, on renvoie le lecteur à la Réf. [5] (pp. 325-330).

Pour plus de détails théoriques sur la transition de phase métal-supraconducteur en l'absence de champ magnétique extérieur, on renvoie le lecteur à la Réf. [1] (pp. 725-777) ou bien à la Réf. [15] (pp. 285-318) plus complète. La transition métal-supraconducteur en présence d'un champ magnétique est quant à elle traitée dans la Réf. [7] (pp. 350-355).

V. Bouillant de Franklin

Nous proposons de réaliser l'expérience suivante, également décrite dans la Réf. [8] (pp. 484-485).

Liste du matériel :

- un ballon monocol de 250mL muni d'un bouchon,
- de l'eau,
- un bec Bunsen P101.29,
- les tuyaux rouges pour relier le bec Bunsen au gaz P101,
- une pince en bois (se trouvant dans un tiroir sous la grande table dans la collection).

4. On rappelle qu'une paire de Cooper représente un état lié de deux électrons de spins opposés.

> On propose de remplir à moitié un ballon monocol d'eau et de porter cette eau à ébullition en utilisant la flamme d'un bec Bunsen. On tiendra le ballon avec une pince en bois pendant le chauffage pour éviter de se brûler. On laissera alors l'eau bouillir une trentaine de secondes puis on sortira le ballon de la flamme. On bouchera le col du ballon à l'aide d'un bouchon dédié puis on placera le ballon sous un jet d'eau froide.

On doit alors observer la reprise de l'ébullition. Cette expérience impressionnante repose sur le fait que la courbe de transition liquide-vapeur n'est pas verticale dans le diagramme (p, T), mais de pente finie. Le passage du liquide au gaz peut donc se faire en chauffant (cas habituel), mais aussi en diminuant la pression. Cette diminution de pression est ici obtenue en refroidissant la vapeur : on fait ainsi bouillir l'eau en la refroidissant ! Plus précisément, lors de cette expérience, on a saturé l'atmosphère du ballon en vapeur d'eau. Le système { liquide + gaz } est alors à une température $\theta_v = 100°C$ et une pression $p_{sat}(\theta_v) = p_{atm}$. En refroidissant le ballon, on fait liquéfier la vapeur sur les parois et on diminue ainsi la pression dans le ballon. Le liquide se trouve alors à une température $\theta \lesssim 100°C$ et à une pression $p < p_{sat}(\theta)$. Le liquide est donc instable vis-à-vis de la phase vapeur, ce qui provoque une nouvelle ébullition du liquide.

VI. TRANSITION FERROMAGNÉTIQUE-PARAMAGNÉTIQUE DU FER [MPs 17 ET 35]

Nous proposons de réaliser l'expérience schématisée Fig. 1, également décrite dans la BdE [3], mais aussi dans la BdE [8] (pp. 458-459).

Liste du matériel :

- le dispositif `P102.32/1`, composé d'une plaque réfractaire, d'un aimant en néodyme et d'un clou sur une potence,
- un chalumeau `P101.11`,
- le dispositif `P102.12R` constitué de deux thermocouples de type K, dont l'un est soudé à un échantillon de fer,
- un système de noix, pinces et potences,
- un bécher contenant un mélange eau-glace,
- un oscilloscope.

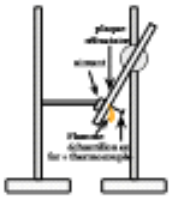


FIGURE 1 – Schéma de l'expérience montrant le point de Curie du fer.

> On propose de réaliser le montage de la Fig. 1. D'un côté d'une plaque réfractaire se trouve un aimant en néodyme. De l'autre côté, on placera un échantillon en fer relié à un thermocouple de type K préalablement étalonné. On pourra utiliser un thermocouple à deux soudures, dont l'autre soudure sera plongée dans un bain eau-glace. Le thermocouple sera retenu par une pince reliée à une potence. On observera alors le signal de tension aux bornes du thermocouple à l'oscilloscope en mode « Défilement ». Avec un chalumeau, on pourra alors chauffer l'échantillon de fer (et non la plaque car elle peut se briser) jusqu'à ce qu'il se désaimante et se sépare de l'aimant. À partir de la variation de tension aux bornes du thermocouple entre le début de l'expérience et le moment où le thermocouple se détache, on pourra remonter à la température de Curie du fer. **Il ne faut surtout pas toucher l'échantillon juste après la fin de l'expérience : il reste très chaud pendant une bonne minute !**

La plaque réfractaire permet d'éviter de chauffer l'aimant qui retient le fer, qui pourrait lui aussi subir une transition ferromagnétique-paramagnétique et cesser de se comporter comme un aimant permanent.

Le décrochage du matériau se produit à la température de Curie du fer qui est aux alentours de 770°C.

Il faut mentionner que cette expérience souffre d'une erreur systématique sur la mesure de la température de Curie, du fait notamment du poids du matériau ferromagnétique et du thermocouple. En effet, quand l'aimantation devient suffisamment faible (mais toujours non nulle), la force magnétique ne peut plus compenser le poids du dispositif qui se met alors à

tomber. On aura donc tendance à sous-estimer la température de Curie par ce dispositif. Par ailleurs, le moment où le matériau se décroche peut fluctuer d'une expérience à l'autre, et on pourra donc effectuer plusieurs fois l'expérience afin de réaliser par la suite un traitement statistique des incertitudes.

On termine par mentionner quelques propriétés de la transition de phase ferromagnétique-paramagnétique :

- le paramètre d'ordre peut être pris comme l'aimantation, c'est-à-dire la moyenne locale des moments magnétiques microscopiques;
- la transition est du second ordre en l'absence de champ magnétique, et du premier ordre sinon;
- il y a une brisure spontanée de symétrie, qui est la symétrie par rotation à l'échelle d'un domaine de Weiss : le solide paramagnétique est invariant par rotation autour de n'importe quel vecteur unitaire $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, le solide ferromagnétique uniquement par les rotations par un vecteur $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ colinéaire à l'aimantation locale.

Il faut faire attention à bien distinguer l'absence d'aimantation à température ambiante, due aux domaines de Weiss, et la perte d'aimantation lorsque l'on chauffe, due à la transition de phase ferromagnétique-paramagnétique. En effet, au-dessous de la température de Curie, le fer est ferromagnétique mais ne présente pas une aimantation globale car il se décompose en domaines de Weiss, chacun présentant une aimantation finie pointant dans une direction différente. Cependant, le fer est pourtant bien ferromagnétique, et il suffit pour le voir d'approcher un aimant qui va orienter les différents domaines : le fer devient aimant à son tour. Pour plus de détails sur les domaines de Weiss, on renvoie le lecteur à la Réf. [13] (pp. 142-150).

Pour plus de détails sur la description de la transition ferromagnétique-paramagnétique, on renvoie le lecteur à la Réf. [7] (pp. 213-224) ou bien à la Réf. [6] (pp. 444-477).

VII. Recalescence du fer [MPs 17 et 35]

On propose dans cette expérience d'illustrer une transition de phase allotropique entre le Fe_α (la ferrite[5]) et le Fe_γ (l'austénite). Cette expérience est détaillée dans la Réf. [3], à laquelle on se référera pour la description du dispositif expérimental.

Liste du matériel :

- le dispositif `P0.63`,
- un générateur de courant continu `P53.10`,
- une masselotte $m = 50$g.

Pour le matériel de la collection, on ne dépassera pas un courant de 5A sous peine de casser le fil sous l'effet du poids de la masselotte ! Il faut augmenter progressivement le courant et être attentif à sa couleur : une fois la couleur jaune-orange atteinte, il faut couper l'alimentation. Le phénomène étant peu marqué, il est nécessaire d'utiliser une webcam et de projeter l'image si on veut la présenter en classe.

Le Fe_α a une structure cristalline cubique centré. Quant au Fe_γ, il présente une structure cubique à faces centrées. Ces deux variétés allotropiques n'ont pas la même densité, par conséquent le passage d'une phase à l'autre se traduit par une dilatation. Les phases stables sont Fe_α à température ambiante et Fe_γ au-dessus de 905°C. Le Fe_α est moins dense que le Fe_γ. L'arrangement cubique centré du fer (Fe_δ) est à nouveau la phase d'équilibre au-dessus de 1390°C et jusque 1538°C (au-delà, le fer fond), mais on ne peut pas atteindre ces températures avec l'expérience de la Réf. [3].

Plus précisément, la masse sert à tendre le fil. En chauffant le fil par effet Joule, celui-ci se dilate progressivement. Le passage $Fe_\alpha \to Fe_\gamma$ est masqué par la dilatation thermique. Au contraire, après la coupure du courant, le refroidissement tend à rétrécir le fil mais la transition inverse $Fe_\gamma \to Fe_\alpha$ va le détendre : on verra donc la masse remonter progressivement puis descendre brusquement à la transition avant de continuer sa remontée. Le processus étant ici hors-équilibre (on ne contrôle pas le refroidissement), il est illusoire de vouloir mesurer la température de transition (même au pyromètre optique, voir TP8).

On termine par mentionner quelques propriétés de la transition de phase allotropique :

- le paramètre d'ordre peut être pris comme la transformée de Fourier du champ de densité $\rho(\vec{r})$ (représentant la masse locale par unité de volume élémentaire) évaluée aux vecteurs $\vec{k} \neq \vec{0}$ n'appartenant au réseau réciproque que d'une seule des deux variétés allotropiques;
- la transition peut être du premier ou du second ordre selon le solide considéré, dans le cas du fer, il s'agit d'une transition du premier ordre;
- il y a une brisure spontanée de symétrie, qui est la symétrie par translation : le solide dans une variété allotropique α est invariant par translation par tout vecteur $\vec{R}$ du réseau de Bravais $\mathcal{R}_\alpha$, le solide dans une variété allotropique γ par translation par tout vecteur $\vec{R}$ du réseau direct $\mathcal{R}_\gamma$.

Pour plus de détails sur la description des transitions allotropiques, on pourra consulter la Réf. [14] (pp. 446-451).

5. Ceci n'est pas à confondre avec le ferrite, qui correspond à un alliage isolant à base d'oxyde de fer.

VIII. Effet Meissner [MPs 17, 34 et 35]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [13] (pp. 379-386) pour la description de l'expérience et des éléments théoriques associés. On pourra également consulter le descriptif de l'Exp. IV. Cette expérience requiert l'utilisation de diazote liquide : il faudra donc se munir de gants cryogéniques et de lunettes pour sa réalisation !

Liste du matériel :

- le supraconducteur YBaCuO P63.16,
- un bol en polystyrène,
- du diazote liquide,
- une pince en bois,
- un petit aimant cubique.

IX. Surfusion de l'étain [MPs 17 et 57]

Cette expérience permet d'illustrer l'existence d'« états métastables » autour d'une transition de phase du premier ordre. Ce phénomène n'existe pas pour les transitions du second ordre. Les états métastables au sens thermodynamique n'existent rigoureusement que dans la limite du champ-moyen où l'énergie libre peut présenter des non-convexités et donc plusieurs minima. Cela n'est pas possible en dimension finie à la limite thermodynamique (principe de la construction de la double tangente). Néanmoins, on peut tout de même observer du retard au changement d'état du fait du coût en énergie libre à la formation d'une interface entre les deux phases différentes. On trouvera une description de l'expérience dans la Réf. [3]. Cette expérience est également décrite dans le TP6 lors de l'étalonnage d'une sonde de platine.

Liste du matériel :

- de l'étain solide P75,
- un creuset P101 suspendu par un trépied,
- un bec Bunsen P101.29,
- des tuyaux rouges pour alimenter en gaz le bec Bunsen P101,
- un thermocouple de type K P102.120,
- un transmetteur P70.20 pour carte Syscom,
- une carte d'acquisition.

> On propose de placer un peu d'étain dans un creuset suspendu par un trépied. On pourra alors chauffer le creuset par dessous avec un bec Bunsen jusqu'à faire fondre tout l'étain. On arrêtera alors le chauffage et on plongera dans l'étain liquide un thermocouple de type K relié à un transmetteur fixé sur une carte d'acquisition. À défaut, on pourra utiliser un thermocouple préalablement étalonné qu'on branchera aux bornes d'un oscilloscope. On pourra alors lancer une acquisition pour suivre l'évolution de la température en fonction du temps lors du refroidissement. On analysera en particulier le comportement de la température juste avant le palier de changement d'état.
> Il faudra à la fin de l'expérience chauffer de nouveau l'étain pour libérer le thermocouple.

Le plateau observé correspond à la solidification de l'étain : pendant la coexistence des deux phases, la température ne change pas et est égale à la température de fusion. On observe avant le plateau que la température est descendue sous la température de fusion, signe qu'on a eu de l'étain liquide à une température où il est solide à l'équilibre. Ce retard au changement d'état est d'autant plus prononcé que le refroidissement est rapide. On pourra par ailleurs relever la température sur le plateau et la comparer à la température de fusion de l'étain à pression atmosphérique de 232 °C. On explique la différence à la valeur tabulée par le fait que l'échantillon n'est sûrement pas pur.

On termine par mentionner que les propriétés de la transition de phase solide-liquide ont déjà été abordées dans l'Exp. II.

Références

[1] N. W. Ashcroft et N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders College Publishing (1976).

[2] H. B. Callen, *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, John Wiley & Sons (1985).

[3] J. Cavoret, C. Mulet-Marquis et S. Rechtenwalle, « Quelques aspects expérimentaux des transitions de phase », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 955-956 (2013).

[4] P. M. Chaikin, T. C. Lubensky et T. A. Witten, *Principles of condensed matter physics*, Cambridge University Press (1995).

[5] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Laloë, *Mécanique Quantique. Tome I. Nouvelle édition*, EDP Sciences (2018).

[6] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer et B. Roulet, *Éléments de physique statistique*, Hermann (2001).

[7] B. Diu, C. Guthmann, D. Lederer et B. Roulet, *Thermodynamique*, Hermann (2007).

[8] J.-M. Donnini et L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale. Tome II : thermodynamique et applications*, Pierron (1997).

[9] R. Duffait, *Expériences de Physique - CAPES de sciences physiques*, Bréal (2008).

[10] M. Feuchart, P. Lidon, E. Thibierge, M. Champion et A. Le Diffon, *Physique expérimentale. Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, De Boeck Supérieur (2016).

[11] J.-P. Gautier, A. Degain et R. Roldy, « Appareil d'enseignement pour l'étude des propriétés des fluides au voisinage du point critique », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 589(1) (1976).

[12] N. Goldenfeld, *Lectures on phase transitions and the renormalization group*, CRC Press (2018).

[13] Jolidon, *Physique expérimentale - Optique, magnétisme, électrotechnique, mécanique, thermodynamique et physique non linéaire*, EDP Sciences (2021).

[14] L. D. Landau et E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Pergamon Press (1980).

[15] L.-P. Lévy, *Magnétisme et supraconductivité*, EDP Sciences (1997).

Échanges thermiques

Table des expériences

I.	Diffusion du glycérol dans l'eau [MPs 19 et 57]	105
II.	Vérification de la loi des gaz parfaits	105
III.	Expérience de Röchardt [MPs 18 et 57]	106
IV.	Étude d'une lampe à incandescence [MPs 18, 19, 20 et 60]	107
V.	Mesure d'une capacité thermique par calorimétrie [MP 18]	112
VI.	Mise en évidence de la convection thermique [MPs 12, 18 et 19]	113
VII.	Instabilité de Rayleigh-Bénard (*) [MPs 12, 18 et 19]	113

Les expériences marquées d'une étoile ne sont pas indispensables pour la première séance sur le sujet et vous pouvez donc les réaliser uniquement si vous avez le temps. Il sera possible de revenir dessus au cours des moments libres ou des séances de révisions plus tard dans l'année. Certaines expériences constituent également des suggestions d'expériences pouvant être introduites dans l'épreuve orale de montage de Physique (MP), et cela est alors indiqué dans le titre de l'expérience, entre crochets, avec les numéros de montage associés (se reporter à la liste fournie par le jury).

I. Diffusion du glycérol dans l'eau [MPs 19 et 57]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [7] (pp. 400-415) pour la description de l'expérience et des éléments théoriques associés. Cette expérience illustre un phénomène de diffusion de matière, dont les propriétés sont en réalité analogues à celles de la diffusion thermique, ce qui justifie la place de cette expérience dans cet énoncé. L'étude directe de la diffusion thermique sera faite dans les TPs d'électromagnétisme.

Liste du matériel :

- une lentille cylindrique P108.14,
- de l'eau distillée,
- du glycérol P75,
- une cuve en plastique P10.45,
- un support élévateur P25.0,
- un laser vert P5.6,
- une seringue munie d'un tuyau souple P104.29,
- un écran,
- du papier millimétré,
- une balance de précision P97.23,
- un chronomètre P96.56,
- un pied à coulisse P96.13,
- un réfractomètre P19.12.

Attention que cette expérience dure longtemps, il peut être judicieux de la lancer dès le début de la séance, quitte à mener une autre expérience en parallèle par la suite!

II. Vérification de la loi des gaz parfaits

On propose de réaliser l'expérience suivante, schématisée Fig. 1.

Liste du matériel :

- une haute bassine d'eau,
- un thermostat P101.14,
- de l'eau,

- de la glace,
- un thermocouple de type K P102.16,
- un convertisseur analogique numérique pour thermocouple P102.27,
- un manomètre P96.55,
- une seringue de 50 mL P104.29.

Cette expérience est longue à mettre en œuvre, car l'eau met un certain temps à acquérir une température homogène égale à la température de consigne. Il faut donc la préparer dès le début du TP !

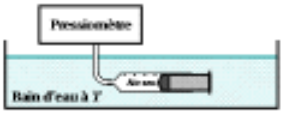


FIGURE 1 – Vérification de la loi des gaz parfaits.

> On propose de réaliser l'expérience de la Fig. 1. Pour cela, on préparera une grande bassine d'eau qu'on maintiendra à une température de l'ordre de 40 °C à l'aide d'un thermoplongeur. On plongera alors une seringue graduée en volume dans le bain thermostaté, reliée de façon étanche à un manomètre à l'aide d'un tuyau flexible. Si la seringue est étanche, la pression doit être constante dans la seringue lorsqu'elle est mise sous pression (piston maintenu). On fera alors varier le volume V de cette seringue, et on enregistrera les variations de pression p correspondantes pour obtenir l'équation d'état du gaz (voir l'Éq. (2)) et vérifier la validité du modèle du gaz parfait.
> On pourra réitérer la même expérience en plongeant la seringue dans un bain eau-glace, sans changer la quantité de matière de gaz dans la seringue.
> Dans les deux situations, on pourra utiliser des gants de vaisselle si la température est inconfortable pour les mains.

À chaque variation de volume, il faudra s'assurer qu'on a bien atteint l'équilibre thermodynamique, et laisser le temps à la pression de s'équilibrer. Cela se fait rapidement, sur un temps caractéristique de l'ordre de quelques secondes.

Pour l'analyse des données, il faut remarquer que l'on ne connaît le volume de gaz qu'à une constante près. En effet, le volume du tuyau V_0 (de l'ordre de quelques millilitres) s'ajoute au volume de la seringue, et n'est pas connu. Par ailleurs, il faut tenir compte des écarts à l'idéalité. Pour cela, on écrit l'équation d'état du gaz dans la seringue sous la forme

$$\frac{p(V+V_0)}{nRT} = 1 + B_1(T)\frac{n}{V+V_0}, \tag{1}$$

où n désigne la quantité de matière du gaz dans la seringue, T la température absolue et B_1 le premier coefficient du viriel pour le gaz dans la seringue. On se référera à la Réf. [7] (pp. 335-336) pour des détails sur cette relation. Or le premier coefficient du viriel étant de l'ordre de $10\,\mathrm{cm^3\cdot mol^{-1}}$, la correction est ici faible, et on peut réécrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{p(V+V_0)}{nRT} = 1 + C(T)\frac{p}{RT} \Longrightarrow pV = nRT + (nC(T) - V_0)\,p, \tag{2}$$

où $C(T)$ est un coefficient qui dépend à priori de la température. On peut alors tracer pV en fonction de p dont l'ordonnée à l'origine est égale à nRT et la pente à $nC(T) - V_0$. En faisant le rapport des ordonnées à l'origine pour les deux températures, on doit alors remonter au rapport des deux températures de travail. Un exemple de réalisation de cette expérience avec le matériel de la collection est donné Fig. A1.

Il est également possible d'étudier $pV = f(p)$ avec le dispositif SF_6 étudié au TP7. Cependant, on se situe proche d'un changement d'état, le comportement est donc assez éloigné d'un gaz parfait : les corrections du viriel sont importantes et peuvent dépendre de la température.

III. Expérience de Rüchardt [MPs 18 et 57]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [7] (pp. 366-368) pour une description détaillée de l'expérience et des éléments théoriques associés.

Liste du matériel :

- un vase de Mariotte P104.42,
- un tube en verre et un masse coulissante P104.41,
- un manomètre Jouin P96.55,
- une pompe manuelle et un accumulateur P104.43,
- de l'éthanol,
- des masses marquées P98.13,
- un oscilloscope ou une carte d'acquisition.

L'amortissement du mouvement du mobile dans l'expérience de Röchardt est dû aux transferts conducto-convectifs entre le gaz dans le vase de Mariotte et le verre. Par ailleurs, la mesure de la période du mouvement du mobile permet de remonter au facteur adiabatique γ qui décrit les échanges thermiques au cours d'une transformation adiabatique d'un gaz parfait. Cela justifie la présence de cette expérience dans cet énoncé de TP.

IV. Étude d'une lampe à incandescence [MPs 18, 19, 20 et 60]

On propose de réaliser l'expérience suivante, décrite dans les Réf. [1, 3] et schématisée Fig. 2.

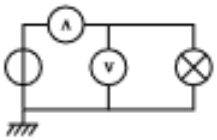


Figure 2 – Schéma de l'expérience pour l'étude du rayonnement d'une lampe à incandescence.

Liste du matériel :

- une lampe 6 V/100 mA (dans les tiroirs à côté de l'ordinateur),
- une lampe 110 V/60 W (dans les tiroirs à côté de l'ordinateur),
- deux supports pour ampoules (dans les tiroirs à côté de l'ordinateur),
- une source continue de tension P53.20,
- un alternostat P57.3,
- une prise pour transformateur P57.14,
- un pyromètre optique P102.26,
- un système de potences, noix et pinces,
- un voltmètre,
- un ampèremètre,
- un wattmètre.

On propose de réaliser le montage électrique de la Fig. 2 qui utilise une lampe haute puissance 220 V/100 W ou 110 V/60 W reliée à un alternostat branché sur le secteur. On manipule ici de fortes tensions, et il est donc important de relier la terre du support de la lampe à la terre de l'alternostat! Avant de mettre la lampe dans le circuit, on mesurera sa résistance R_0 à l'ohmmètre. Le circuit comporte également un wattmètre pour mesurer le courant traversant la lampe et la tension à ses bornes. On fera alors varier la tension U aux bornes de la lampe, et on mesurera à chaque fois le courant I qui circule dans la lampe. Cela permettra alors d'en déduire la puissance électrique fournie à la lampe $P = UI$, ainsi que la résistance du filament $R = U/I$. À partir de l'Éq. (7), on pourra remonter à la température T_f du filament qui constitue la lampe, et alors vérifier la loi de Stefan sur le rayonnement d'équilibre thermique [voir l'Éq. (5)]. On pourra également utiliser un pyromètre optique afin d'avoir une seconde mesure de la température. On le positionnera devant le filament avec une potence, à une distance de l'ordre du mètre. La distance préconisée dans la notice du pyromètre commercial de la collection est de l'ordre de 60 cm. Pour utiliser ce pyromètre, il faudra au préalable le laisser chauffer pendant 15 min, puis le régler sur 2C. On pourra faire la mise au point sur le filament en faisant tourner l'objectif à l'avant du pyromètre. Attention que la température mesurée est donnée en °C. Le pyromètre permet également de préciser la valeur d'émissivité du corps dont on souhaite connaître la température, mais ici on la laissera égale à 1.
On pourra répéter l'expérience en remplaçant l'alternostat par une source continue de tension et la lampe haute puissance par une lampe basse puissance 6 V/100 mA. On remplacera alors le wattmètre par un voltmètre et un

ampèremètre en mode DC. Dans les deux cas, on observera la dépendance de la puissance avec la température.

On a ici réalisé un montage courte-dérivation, qui est le seul montage acceptable dans ce cas, car l'impédance de la lampe est de l'ordre de celle de l'ampèremètre.

Dans le cas de la lampe haute puissance, on utilise un alternostat afin de fournir des hautes tensions à la lampe (de l'ordre de la centaine de volts). Mais attention que le signal est maintenant sinusoïdal et que la puissance est à priori différente du produit des valeurs efficaces du courant et de la tension, du fait d'un déphasage éventuel entre le courant et la tension. Cependant, l'impédance de la lampe est essentiellement résistive, et on peut donc faire le produit des valeurs efficaces de la tension et du courant pour remonter à la puissance. De plus, dans le cas de la lampe basse puissance, les puissances appelées sont faibles et on ne peut plus utiliser le wattmètre qui est destiné à mesurer de fortes puissances.

Dans l'expérience, le pyromètre optique utilisé est un thermomètre infrarouge dit « à deux couleurs » (2C). Il mesure la puissance rayonnée par l'objet à deux longueurs d'onde différentes dans le domaine infrarouge, et le rapport de ces deux valeurs permet d'en déduire la température du corps rayonnant. Cependant, la notice est assez lacunaire et ne précise pas le photorécepteur utilisé, ainsi que le circuit de conditionnement en aval.

Les incertitudes devront être mesurées avec soin lors de cette expérience, du fait, par exemple, que la loi de Stefan fait intervenir une puissance quatrième de la température. On se référera à la notice des multimètres pour cela. En ce qui concerne la mesure de la température au pyromètre, on notera que la température du filament est non uniforme le long de celui-ci, et l'incertitude est alors dominée par les fluctuations locales de la température du filament [6].

Pour traiter quantitativement cette expérience, on effectue un bilan de puissance au filament présent dans la lampe en supposant qu'on se trouve à l'équilibre thermodynamique, et en négligeant tous les échanges thermiques parasites. Cela comprend notamment les pertes par diffusion thermique au niveau des soudures, les pertes par convection thermique avec le gaz dans le volume délimité par l'ampoule, l'énergie thermique reçue par rayonnement de la part des autres lampes présentes dans la pièce, et une sublimation partielle du filament. Le filament reçoit une puissance électrique $P_e = UI$, ainsi qu'une puissance radiative P_v de la part du globe de verre, et émet une puissance radiative P_f. Le bilan de puissance s'écrit alors

$$P_e = P_f - P_v. \tag{3}$$

On explicite ensuite les puissances radiatives en utilisant la loi de Stefan. On a d'une part $P_f = \epsilon_f \sigma T_f^4 S_f$, où ϵ_f désigne l'émissivité du filament (dont une valeur raisonnable est 0,2), T_f sa température absolue, $\sigma \simeq 5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$ la constante de Stefan-Boltzmann, et S_f la surface latérale du filament. On a ici fait l'hypothèse que le filament se comportait comme un corps gris d'émissivité ϵ_f constante et de surface S_f. Cela implique plusieurs limitations. En premier lieu, l'émissivité peut dépendre de la température (ce qu'on néglige ici). En second lieu, on néglige le fait que le filament n'est pas un corps convexe, et qu'une partie du rayonnement thermique qu'il émet lui est retransmis. En dernier lieu, on a considéré que la surface du filament restait constante au cours de l'expérience, ce qui implique de négliger la dilatation thermique du filament. De la même manière, on peut écrire que $P_v = \kappa \epsilon_v \sigma T_v^4 S_v$, où κ désigne la fraction du rayonnement émis par le verre et reçu par le filament, ϵ_v l'émissivité du verre, T_v sa température absolue et S_v sa surface. En l'absence de puissance électrique reçue par le filament, on a $P_v = P_f$, soit $\kappa \epsilon_v S_v = \epsilon_f S_f$, et finalement

$$UI = \sigma \epsilon_f S_f \left(T_f^4 - T_v^4\right). \tag{4}$$

En pratique, dans le cas de lampes haute puissance, les échanges thermiques par conduction et convection avec l'extérieur ne sont pas négligeables, et il faut tenir compte de ces échanges dans le bilan de puissance, amenant à la relation

$$UI = \sigma \epsilon_f S_f \left(T_f^4 - T_v^4\right) + h S_f (T_f - T), \tag{5}$$

où h est le coefficient de conducto-convection entre l'air dans la lampe et le filament.

Il reste maintenant à faire le lien entre les propriétés électriques du filament et ses propriétés thermiques. En supposant toujours qu'on se trouve à l'équilibre thermique, et en supposant que le filament est constitué de tungstène pur, sa résistivité pour des températures comprises entre 273 K et 3000 K est donnée par la relation [4]

$$\rho = a T_f^2 + b T_f + c, \tag{6}$$

où $a = 2{,}00 \times 10^{-16}\,\Omega\cdot\mathrm{m\cdot K^{-2}}$, $b = 2{,}48 \times 10^{-10}\,\Omega\cdot\mathrm{m\cdot K^{-1}}$ et $c = -1{,}86 \times 10^{-8}\,\Omega\cdot\mathrm{m}$. La valeur de la résistance R_0 à température ambiante T_0 du filament ayant été mesurée, on en déduit que

$$\frac{R}{R_0} = \frac{a T_f^2 + b T_f + c}{a T_0^2 + b T_0 + c} \Longrightarrow T_f = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac + 4aR/R_0\left[a T_0^2 + b T_0 + c\right]} - b}{2a}. \tag{7}$$

Faire le rapport des résistances à deux températures différentes nous a permis de nous affranchir des dimensions du filament de tungstène, inconnues. Néanmoins, cela suppose là encore que les effets de dilatation thermique sont négligeables.

Le coefficient de dilatation isobare du tungstène varie avec la température, mais $\alpha \simeq 5 \times 10^{-6}\,°C^{-1}$, de sorte qu'une élévation de 2000 °C conduit à une variation relative de résistance de l'ordre de 1 %. Cela pourrait être pris en compte dans l'incertitude sur T_f.

Par ailleurs, l'estimation de la température à partir de l'Éq. (7) est en réalité approchée et souffre de nombreuses incertitudes. En fonction des valeurs lues dans la littérature pour les paramètres a, b et c, on trouve des fluctuations relatives de l'ordre de 2 % sur la température, dont il faudra tenir compte pour estimer l'incertitude sur la température T_f.

Une fois l'expérience réalisée, on propose d'utiliser le programme Python `python_rayonnement_lampe_lyon.py` pour traiter les données. Ce programme est reproduit et commenté ci-dessous.

```python
#!/usr/bin/env python3
# -*- coding: utf-8 -*-
'''
Benjamin GOUSSEAU
Version du 24/10/2022
'''

#\\\\ Importation des librairies À NE PAS MODIFIER
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.optimize as opt

#\\\\ Définition de fonctions pour effectuer des modélisations affine et non linéaire de données À NE PAS
    MODIFIER
def modele_NL(X,Y,u_X,u_Y,params_test,f,f_deriv):
    '''
    Effectue une modélisation non linéaire Y = f(X,params), en tenant compte des incertitudes sur X (u_X)
    et Y (u_Y).
    La fonction utilise la méthode des moindres carrés à partir de paramètres d'essai contenus dans le
    tableau params_test.
    La fonction renvoie un tableau qui contient dans l'ordre :
        - les paramètres optimisés dans l'ordre (params_opt),
        - leurs incertitudes dans l'ordre (u_params_opt),
        - la valeur du chi2 réduit (chi2_opt).
    f_deriv désigne la dérivée de la fonction f pour le calcul des résidus.
    '''
    def residu_NL(params,x,y,u_x,u_y):
        return ( y - f(x,params) ) / np.sqrt ( u_y + u_y + ( f_deriv(x,params) + u_x ) ** 2 )

    opt_NL = opt.least_squares(residu_NL,params_test,args=(X,Y,u_X,u_Y))
    params_opt = opt_NL.x
    hessian_NL = np.matmul(opt_NL.jac.transpose(),opt_NL.jac)
    u_params_opt = np.sqrt( 2. / np.abs( np.diagonal(hessian_NL) ) )
    chi2_opt = np.sum( residu_NL(params_opt,X,Y,u_X,u_Y) ** 2 )/( len(X) - 2 )
    return np.hstack((params_opt,u_params_opt,np.array([chi2_opt])))

#\\\\ Définition de fonctions pour effectuer une modélisation affine À NE PAS MODIFIER
def modele_affine(X,Y,u_X,u_Y,a_test,b_test):
    '''
    Effectue une modélisation affine Y = a + X + b, en tenant compte des incertitudes sur X (u_X) et Y (
    u_Y).
    La fonction utilise la méthode des moindres carrés à partir de paramètres d'essai a_test et b_test.
    La fonction renvoie un tableau qui contient dans l'ordre :
        - la valeur de a optimisée (a_opt),
        - la valeur de b optimisée (b_opt),
        - l'incertitude sur la valeur de a (u_a_opt),
        - l'incertitude sur la valeur de b (u_b_opt),
        - la valeur du chi2 réduit (chi2_opt).
    '''
    def affine(x,a,b):
        return a * x + b

    def residu_affine(p_affine,x,y,u_x,u_y):
        a = p_affine[0]
        b = p_affine[1]
        return ( y - affine(x,a,b) ) / np.sqrt ( u_y + u_y + ( a + u_x ) ** 2 )

    opt_affine = opt.least_squares(residu_affine,np.array([a_test, b_test]),args=(X,Y,u_X,u_Y))
    a_opt = opt_affine.x[0]
    b_opt = opt_affine.x[1]
    hessian_affine = np.matmul(opt_affine.jac.transpose(),opt_affine.jac)
    u_a_opt = np.sqrt( 2. / hessian_affine[0,0]]
    u_b_opt = np.sqrt( 2. / hessian_affine[1,1]]
    chi2_opt = np.sum( residu_affine(np.array([a_opt,b_opt]),X,Y,u_X,u_Y) ** 2 )/( len(X) - 2 )
    print("Résultats de l'ajustement :")
    print("- pente = {0:.2e} +/- {1:.1e}".format(a_opt,u_a_opt))
```

```
    print("- ordonnée à l'origine - {0:.2e} +/- {1:.1e}".format(b_opt,u_b_opt))
    return np.array([a_opt,b_opt,u_a_opt,u_b_opt,chi2_opt])

def Fcts_T(x,param):
    a = param[0]
    b = param[1]
    c = param[2]
    return a * ( x ** 4 - b ** 4 ) + c * ( x - b )

def deriv_Fcts_T(x,param):
    a = param[0]
    b = param[1]
    c = param[2]
    return 4 * a * x ** 3 + c

#\\\ Paramètres À MODIFIER
filename = "data3.txt" # nom du fichier avec U en V et I en A puis l'incertitude sur U en V et l'
    incertitude sur I en A
R0 = 63.9 # résistance de la lampe à température ambiante en ohm
T0 = 294.65 # température ambiante en K
l0 = 0.02 # estimation de la longueur du filament de tungstène en m
r0 = 0.000 # estimation du rayon de courbure du filament de tungstène en m
emiss = 0.2 # estimation de l'émissivité du tungstène

#\\\ Importation des données
data = np.genfromtxt(filename)
U = data[:,0]
I = data[:,1]
u_U = data[:,2]
u_I = data[:,3]
a = 2.88e-14 # loi empirique de la résistivité du tungstène en fonction de la température (SI)
b = 2.48e-10 # loi empirique de la résistivité du tungstène en fonction de la température (SI)
c = -1.86e-8 # loi empirique de la résistivité du tungstène en fonction de la température (SI)
sigma = 5.67e-8 # constante de Boltzmann (SI)
P = U * I # puissance en W

#\\\ Calcul des incertitudes À MODIFIER
u_P = P * np.sqrt( ( u_U / U ) ** 2 + ( u_I / I ) ** 2 ) # incertitude sur la puissance en W
if False:
    T = data[:,4] + 273 # température mesurée au pyromètre optique en K
    u_T = data[:,5]
else:
    T = ( np.sqrt( b * b - 4 * a * c + 4 * a * U / I / RS * ( a * T0 * T0 + b * T0 + c ) ) - b ) / ( 2 * a
     ) # température calculée en K à partir des propriétés électriques d'un filament de tungstène
    u_T = 0.01 * T # incertitude sur T calculée en K

#\\\ Introduction de variables auxiliaires
X = T / np.amax(T) # normalisation de la température, sinon l'optimisation ne fonctionne pas
Y = P / np.amax(P) # même procédure pour P
u_X = u_T / np.amax(T)
u_Y = u_P / np.amax(P)

#\\\ Effectuer une modélisation de P en fonction de T^4
a_ext = 2. * np.pi * r0 * l0 * sigma * emiss * np.amax(T**4) / np.amax(P)
b_ext = - 2. * np.pi * r0 * l0 * sigma * emiss * T0 ** 4 / np.amax(P)
param_affine = modele_affine([Xe4,Y,4*u_X*X**3,u_Y,a_ext,b_ext])
a_affine = param_affine[0] / np.amax(T**4) * np.amax(P) # extraction de la pente sans facteurs de
    normalisation
u_a_affine = param_affine[2] / np.amax(T**4) * np.amax(P) # extraction de l'incertitude sur la pente sans
    facteurs de normalisation
b_affine = param_affine[1] * np.amax(P) # extraction de l'ordonnée à l'origine sans facteurs de
    normalisation
u_b_affine = param_affine[3] * np.amax(P) # extraction de l'incertitude sur l'ordonnée à l'origine sans
    facteurs de normalisation
chi2_affine = param_affine[4] # extraction du chi2 réduit
T0_affine = ( - b_affine / a_affine ) ** 0.25 # température ambiante optimisée
u_T0_affine = 0.25 * T0_affine * np.sqrt( ( u_b_affine / b_affine ) ** 2 + ( u_a_affine / a_affine ) ** 2
    )

#\\\ Effectuer une modélisation de ln(P) en fonction de ln(T)
n_ext = 4.
c_ext = np.log(2. * np.pi * r0 * l0 * sigma * emiss)
param_affine = modele_affine([np.log(T),np.log(P),u_T/T,u_P/P,n_ext,c_ext])
n_affine = param_affine[0] # extraction de la pente
u_n_affine = param_affine[2] # extraction de l'incertitude sur la pente
c_affine = param_affine[1] # extraction de l'ordonnée à l'origine
u_c_affine = param_affine[3] # extraction de l'incertitude sur l'ordonnée à l'origine
chi2_affine_2 = param_affine[4] # extraction du chi2 réduit
```

```
134
135 #\\\ Effectuer une modélisation non linéaire de P en fonction de T qui tient compte de la convection
136 d_ext = 10 * 2 * np.pi * r0 * 10 * np.amax(T) / np.amax(P)
137 param_NL = modele_NL(P,T,u_P,u_T,np.array([a_ext,T0/np.amax(T),d_ext]),Fun_T,deriv_Fun_T)
138 a_NL = param_NL[0] / np.amax(T**4) * np.amax(P)
139 u_a_NL = param_NL[3] / np.amax(T**4) * np.amax(P)
140 T0_NL = param_NL[1] * np.amax(T)
141 u_T0_NL = param_NL[4] * np.amax(T)
142 d_NL = param_NL[2] / np.amax(T) * np.amax(P)
143 b_NL = d_NL / a_NL
144 b_NL *= sigma * emiss
145 u_b_NL = param_NL[5] / np.amax(T) * np.amax(P)
146 u_b_NL = b_NL * np.sqrt( (u_b_NL / d_NL ) ** 2 + ( u_a_NL / a_NL ) ** 2)
147 chi2_NL = param_NL[-1]
148
149 #\\\ Tracé des données
150 T_fin = np.linspace(np.amin(T),np.amax(T),100)
151 plt.figure()
152 plt.errorbar(T**4,P,u_P,4*T**3*u_T,'o')
153 plt.plot(T_fin**4,a_affine*T_fin**4+b_affine,'-',label=r'$T_v=(${0:.2f}$\pm${1:.1f}) K,$\chi_2=${2:.2f}'.
        format(T0_affine, u_T0_affine, chi2_affine))
154 plt.xlabel(r'$T^4$ (K)')
155 plt.ylabel(r'$P$ (W)')
156 plt.legend()
157 plt.show()
158
159 plt.figure()
160 plt.errorbar(np.log(T),np.log(P),u_P/P,u_T/T,'o')
161 plt.plot(np.log(T_fin),n_affine*np.log(T_fin)+o_affine,'-',label=r'$n=(${0:.2f}$\pm${1:.1f}),$\chi_2=$
        {2:.2f}'.format(n_affine, u_n_affine, chi2_affine_2))
162 plt.xlabel(r'$\ln(T)$')
163 plt.ylabel(r'$\ln(P)$')
164 plt.legend()
165 plt.show()
166
167 plt.figure()
168 plt.errorbar(T,P,u_P,u_T,'o')
169 plt.plot(T_fin,Fun_P(T_fin,np.array([a_NL,T0_NL,d_NL])),'-',label=r'$b=(${0:.2f}$\pm${1:.1f}), $T_v=(${
        2:.2f}$\pm${3:.1f}) K,$\chi_2=${4:.2f}'.format(b_NL, u_b_NL, T0_NL, u_T0_NL, chi2_NL))
170 plt.xlabel(r'$T$')
171 plt.ylabel(r'$P$')
172 plt.legend()
173 plt.show()
```

Dans ce programme, les librairies sont importées entre les lignes 8 et 11, puis sont définies des fonctions qui permettent d'effectuer un ajustement affine ou non linéaire de données expérimentales entre les lignes 13 et 64 (voir le TP1 d'électronique). L'Éq. (5) donnant la puissance électrique reçue par le filament en fonction de la température est donnée entre les lignes 66 et 70, et sa dérivée en fonction de la température entre les lignes 72 et 76 (pour l'ajustement non linéaire des données expérimentales).

Entre les lignes 78 et 84, l'utilisateur peut modifier certaines paramètres, notamment le nom du fichier où trouver les données, la résistance de la lampe à température ambiante, la température ambiante, les dimensions estimées du filament (pour l'estimation des paramètres d'ajustement) et l'émissivité du filament (là encore pour l'estimation des paramètres d'ajustement mais aussi pour estimer le coefficient de transfert conducto-convectif b). Les tableaux de données sont ensuite créés entre les lignes 86 et 96.

La température du filament est ensuite obtenue entre les lignes 98 et 105, soit par mesure au pyromètre optique (le booléen doit alors être `True`) ou alors par calcul à partir de l'Éq. (7) (le booléen doit alors être `False`). Les données de température et de puissance sont ensuite normalisées par leur valeur maximale entre les lignes 107 et 111. En effet, si cela n'est pas fait, les valeurs prises par la puissance quatrième de la température deviennent très grande (de l'ordre de 10^{12} K^4), et l'ajustement par la méthode des moindres carrés ne fonctionne plus.

Le code effectue un premier ajustement entre les lignes 113 et 123. Cet ajustement consiste à négliger les pertes d'énergie par convection, et à effectuer une régression affine de la puissance P_e en fonction de T_f^4. La qualité de l'ajustement est déterminée par la valeur du χ^2, mais aussi par la valeur de T_v (correspondant à la variable `T0_affine`). Il n'est pas rare de trouver $T_v < 0$, suggérant que le modèle sans terme convectif ne reproduit pas fidèlement les données expérimentales.

Cela est confirmé en effectuant un second ajustement affine entre les lignes 125 et 133. Cet ajustement consiste là encore à obtenir la manière dont croît la puissance avec la température. Pour cela, on ajuste $\ln(P_e)$ en fonction de $\ln(T_f)$ et la pente n permet d'obtenir l'exposant de la loi de puissance. En effet, au cours de l'expérience, les températures atteignent 1900 K, et il est alors légitime de négliger T_v^4 devant T_f^4 dans l'Éq. (5). Dans ce cas cette équation devient $\ln(P_e) = 4\ln(T_f) + \ln(\sigma\varepsilon S)$. On obtient le plus souvent un exposant inférieur à 4, ce qui indique que la puissance électrique n'est pas dissipée seulement par rayonnement, mais aussi par conducto-convection.

Cela suggère alors de faire un ajustement non linéaire de P_e en fonction de T_f avec l'Éq. (5). Cela est fait entre les lignes 135 et 147. La qualité de l'ajustement est là encore jugée en regardant la valeur du χ^2, mais aussi la valeur de T_v obtenue.

Cet ajustement permet également d'en déduire une estimation du coefficient de transfert conducto-convectif en supposant connues l'émissivité du tungstène et la constante de Stefan-Boltzmann.

Enfin, les données sont tracées avec les différents ajustements entre les lignes 149 et 173.

Un exemple de réalisation de cette expérience avec du matériel d'enseignement est montré Fig. A2. Le dernier ajustement proposé dans le programme ci-dessus permet de valider le modèle de l'Éq. (5) à la condition que h et T_r soient positives. Par ailleurs, on notera que l'effet des pertes par conducto-convection est plus important dans le cas de la lampe haute puissance (l'exposant obtenu par ajustement affine du logarithme de la puissance électrique en fonction du logarithme de la température diminue), comme on aurait pu s'y attendre. On termine par mentionner qu'il est préférable d'utiliser l'estimation de la température à partir de la résistance du filament, plutôt que d'utiliser la valeur obtenue par le pyromètre, qui est soumise à de très grandes incertitudes.

V. Mesure d'une capacité thermique par calorimétrie [MP 18]

Nous proposons de réaliser l'expérience suivante, également présentée dans la Réf. [2] (pp. 33 à 45).

Liste du matériel :

- un calorimètre P103.47,
- une balance de précision P97.24,
- un thermocouple de type K P102.12/1,
- un convertisseur analogique numérique pour thermocouple P102.31,
- une bouilloire P101.28,
- un chronomètre P96.56,
- un bloc solide de cuivre P103.53,
- de l'eau,
- un bécher.

> Pour les expériences de calorimétrie, il est nécessaire pour commencer de déterminer la masse en eau du calorimètre, qui est le rapport de sa capacité thermique sur la capacité thermique massique de l'eau $c_e = 4{,}18\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$. Pour cela, on remplira le calorimètre avec une masse m_1 d'eau connue mesurée précisément (par exemple $m_1 = 300\,\mathrm{g}$). On relèvera alors la température T_1 de l'eau avec un thermocouple de type K. On fera ensuite chauffer de l'eau avec une bouilloire, et on en versera une masse m_2 mesurée précisément dans un bécher, et on en mesurera sa température T_2. On pourra prendre, là encore, $m_2 = 300\,\mathrm{g}$. On versera alors le contenu du bécher dans le calorimètre, et on fermera le calorimètre. On plongera le thermocouple dans le calorimètre et on suivra l'évolution de la température en fonction du temps. On pensera à mélanger doucement le contenu du calorimètre pour faciliter l'homogénéisation de la température.

On doit observer que la température se stabilise à la température T_f. En réalité, elle diminue lentement du fait des fuites thermiques du calorimètre. On note alors μ la masse en eau du calorimètre. Le bilan d'enthalpie appliqué au système constitué du calorimètre et de l'eau donne alors que son enthalpie est constante, ce qui donne, par additivité de l'enthalpie :

$$\left(\mu + m_1 + m_2\right) c_e T_f = \left(\mu + m_1\right) c_e T_1 + m_2 c_e T_2 \Longrightarrow \mu = \frac{m_2 (T_2 - T_f) + m_1 (T_1 - T_f)}{T_f - T_1}. \tag{8}$$

On attend un résultat de l'ordre de la dizaine de grammes. On notera qu'on a supposé que la capacité thermique de l'eau ne dépendait pas de la température sur la gamme de température entre 20 °C et 100 °C. Cela est raisonnable car celle-ci varie de $4{,}182\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ à 20 °C à $4{,}216\,\mathrm{kJ\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$ à 100 °C, ce qui correspond à une variation de 0,8 % bien inférieure aux erreurs sur la mesure de la température.

Une fois la masse en eau du calorimètre mesurée, on peut mesurer la capacité thermique d'un bloc solide.

> On propose de réaliser une expérience analogue à celle présentée ci-dessus pour la mesure de la masse en eau du calorimètre. On prendra un bloc solide dont on mesurera la masse m_s puis on le placera dans un calorimètre contenant une masse m_0 d'eau. On mesurera la température T_0 de l'ensemble. On fera ensuite chauffer une masse m_e connue d'eau avec une bouilloire qu'on placera dans un bécher et on en mesurera sa température T_e. On placera ensuite cette masse d'eau dans le calorimètre qu'on fermera (l'eau doit alors recouvrir l'ensemble du solide), et on suivra l'évolution de la température de l'eau dans le calorimètre en fonction du temps. Pour cela, on plongera le thermocouple dans le calorimètre. On notera alors la température T_f du mélange dans le calorimètre. On pensera à mélanger doucement le contenu du calorimètre pour faciliter l'homogénéisation de la température.

Le bilan d'enthalpie au système constitué du calorimètre, du solide et de l'eau donne alors, en notant $C_{m,s}$ la capacité thermique molaire du solide et M_s sa masse molaire,

$$m_e c_e T_e + \frac{m_s C_{m,s}}{M_s} T_s + (\mu + m_R + m_e) c_e T_f + \frac{m_s C_{m,s}}{M_s} T_f \Longrightarrow C_{m,s} = \frac{M_s c_e}{m_s} \left((\mu + m_R)(T_e - T_f) + m_e (T_e - T_f) \right). \quad (9)$$

On pourra en particulier vérifier si la loi de Dulong et Petit $C_{m,s} = 3R = 24{,}94\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$, indépendamment de la nature du solide. On rappelle que la masse molaire du cuivre vaut $M_s = 0{,}0635\,\mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$.

Dans ces expériences, on néglige l'ensemble des fuites thermiques qui se produisent, notamment les pertes par conduction-convection avec l'air emprisonné dans le calorimètre, et l'énergie apportée par l'expérimentateur lors de l'agitation (c'est pour cela qu'il faut mélanger doucement pour minimiser cet apport d'énergie). Ces pertes dépendent de la durée de l'expérience, et pour les estimer, on peut utiliser la méthode de Regnault décrite dans la Réf. [2]. Dans cette méthode, on suppose que la puissance perdue par fuites thermiques est constante au cours du temps, de sorte que la température a une dérive linéaire une fois l'état stationnaire sous hypothèse adiabatique atteint, de la forme $T(t) = T_f - \alpha t$. On peut alors estimer α à partir des données expérimentales, puis si on note Δt la durée du régime transitoire, une correction de la température finale tenant compte des fuites thermiques est

$$T_f^{\mathrm{corr}} = T_f + \alpha \Delta t. \quad (10)$$

Ces expériences souffrent de larges incertitudes, notamment du fait des fluctuations de la température. Il pourrait donc être avisé de réaliser plusieurs fois l'expérience, et d'effectuer un traitement statistique des incertitudes.

On termine par mentionner que l'expérience marche d'autant mieux que le solide est de faible épaisseur et de grande surface, pour accélérer sa mise à l'équilibre avec le fluide ambiant.

VI. Mise en évidence de la convection thermique [MPs 12, 18 et 19]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [5] (pp. 406-407) pour la description de l'expérience.

Liste du matériel :

- un tube coudé P106.29 rempli d'eau,
- de la sciure de bois P75,
- un chalumeau P101.11.

VII. Instabilité de Rayleigh-Bénard (*) [MPs 12, 18 et 19]

Nous renvoyons le lecteur à la Réf. [5] (pp. 407-411) pour la description de l'expérience et des éléments théoriques associés. L'expérience proposée dans la Réf. [5] peut être longue à réaliser, notamment si on souhaite observer la formation des rouleaux de convection.

Liste du matériel :

- le dispositif P106.15.

L'instabilité de Rayleigh-Bénard est une instabilité hydrodynamique susceptible de se développer dans un fluide soumis à un gradient vertical de température. La plaque inférieure est maintenue à une température T_c plus chaude que la plaque supérieure, qui est maintenue à une température T_f. Sous l'effet du gradient de température, le fluide proche de la plaque inférieure est moins dense et tend donc à monter. À l'inverse, le fluide proche de la plaque supérieure tend à descendre, ce qui induit un mouvement global du fluide qui prend la forme de rouleaux thermo-convectifs.

L'instabilité ne peut se développer que si le gradient de température est suffisamment important pour compenser la conduction thermique dans le fluide. On définit alors le nombre de Rayleigh

$$\mathrm{Ra} = \frac{g \beta d^3 \Delta T}{\nu \kappa}, \quad (11)$$

avec g l'accélération de la pesanteur, d la distance entre les deux plaques, β le coefficient de dilatation thermique isobare du fluide, ν sa viscosité cinématique, κ son coefficient de diffusion thermique et $\Delta T = T_c - T_f$ la différence entre les températures des deux plaques. L'instabilité se développe si le nombre de Rayleigh du système dépasse une valeur critique Ra_c, de l'ordre de quelques milliers.

RÉFÉRENCES

[1] A. Deiber et O. Krempf, « Lampe à incandescence, corps noir, loi de Stefan et filtre passe-bas thermique », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 827 (2000).

[2] J.-M. Donnini et L. Quaranta, *Dictionnaire de physique expérimentale. Tome II : thermodynamique et applications*, Pierron (1997).

[3] F. Durand, « Étude d'une lampe à incandescence », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 827 (2000).

[4] W. E. Forsythe et E. M. Watson « Resistance and radiation of tungsten as a function of temperature », *Journal of the Optical Society of America* 24(4) (1934).

[5] M. Fruchart, P. Lidon, E. Thibierge, M. Champion et A. Le Diffon, *Physique expérimentale. Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*, De Boeck Supérieur (2016).

[6] J.-G. Gitton et C. de Izarra, « Température du filament d'une lampe à incandescence et pyrométrie optique », *Bulletin de l'Union des Physiciens* 924 (2010).

[7] Jolidon, *Physique expérimentale - Optique, magnétisme, électrotechnique, mécanique, thermodynamique et physique non linéaire*, EDP Sciences (2021).

EXEMPLES DE RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

FIGURE A1 – Exemple de vérification de l'équation d'état des gaz parfaits à deux températures différentes (voir l'Exp. II).

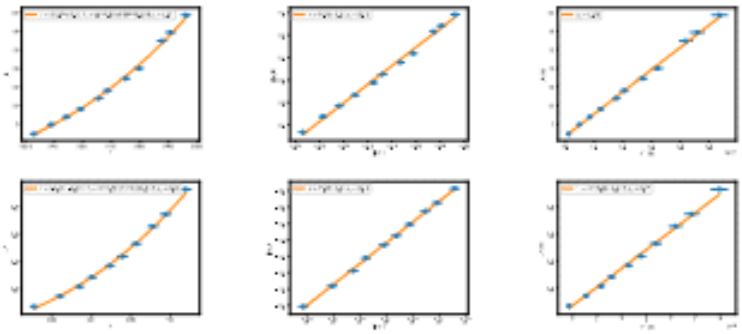


FIGURE A2 – Exemple de mesure de la puissance électrique reçue par une lampe en fonction de la température de son filament (voir l'Exp. IV) : "grosse" ampoule sur la ligne du haut, "petite" sur celle du bas. © *J. Delmaze / R. Busson*