

$$\sigma = \sqrt{R^2 + x^2 + y^2 - 2xz - 2yz}$$

$$= R \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2} - \frac{2xz + 2yz}{R^2} \right)^{1/2}$$

En toute rigueur on remplace z dans l'expression de HF et on a la "fin d'antenne" au point P ... mais calcul pénible. On va utiliser une approx très pratique et assez réaliste : Fraunhofer.

deq précise?

→ II Approximation de Fraunhofer :

$$\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \frac{x}{R}\right) = 0$$

$$\frac{\pi b}{\lambda} \frac{x}{R} = n \cdot \Delta R$$

$$x = n \cdot \frac{\lambda}{b} R$$

En pratique : ~~$\sigma \approx R / \lambda$~~ $R \gg$ autre dimension $\rightarrow Q = \text{cst}$

↳ DL de n , on garde que les termes linéaires en x et y .

$$\rightarrow \sigma \approx R \left(1 - \frac{zx + yy}{R^2} \right)$$

$$\approx R - (\alpha x + \beta y) \quad \text{ou} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{x}{R} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{y}{R} \quad \text{et} \quad \vec{e} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{e} = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y = \frac{\vec{OP}}{\|OP\|^2}$$

$$\Rightarrow \sigma \approx R - \vec{e} \cdot \vec{OR}$$

$$\rightarrow \text{Dans HF: } \underline{N}(P) \approx Q \int_D \frac{\underline{A}_0(\vec{n}) \exp(ihR)}{R} \exp(-ih \cdot \vec{e} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\approx Q \frac{\exp(ihR)}{R} \int_D \underline{A}_0(\vec{n}) \exp(-ih \cdot \vec{e} \cdot \vec{n}) dS$$

$$\text{où } h = h \cdot \vec{e} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\vec{OP}}{\|OP\|^2}$$

Formule fondamentale de la diffraction dans l'approx de Fraunhofer.

Diffraction de Fraunhofer

Intro: Limite de l'optique géométrique : on ne peut pas expliquer ce qu'on voit !
Le besoin d'un nouveau modèle : la ~~diffraction~~. Théorie de Huyghens - Fresnel.

I)

A) Principe de Huyghens - Fresnel.

"Pour calculer l'amplitude d'une onde à l'intérieur d'une région délimitée par une surface S entourant les sources, il suffit de supposer que chaque point P de cette surface se comporte comme une source isotrope (l'unique source seconde) dont la phase et l'amplitude sont égales à celles de l'onde incidente au point P."

(Proposé par Huyghens en 1678 → Fresnel en 1815 !)

→ Tout point η d'une surface d'onde Σ se comporte
SLIDE

Concrètement: on va calculer l'intensité ~~à~~^{des v} au point, provenant d'une infinité d'ondes cohérentes. La diffraction est alors un problème d'interférences !

Alors: l'amplitude complète de l'onde au point P s'écrit:

$$\underline{Y}(P) = \int_S Y_0(\eta) Q \exp(i\varphi_\eta) dS$$

Où $\varphi = \pi P$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ $Q = \text{coefficient d'inclinaison (cf)} = [L^{-1}]$
(dépend de $\varphi = (\pi \cdot \pi P)$)

B) Diffraction par un diaphragme plan et approximation de Fraunhofer.

Considérons la situation sur le slide.

$$On a \underline{Y}(P) = \int_D Y_0(\eta) Q \exp(i\varphi_\eta) dS \quad \lambda = \pi P \quad \text{et} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Coordonnées de P: (X, Y, z) $\eta = (x, y, 0)$ $\rightarrow r = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + z^2}$

$$= \sqrt{X^2 + Y^2 + z^2 + x^2 + y^2 - 2xX - 2yY}$$

Soit en introduisant $R = \|OP\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + z^2}$

Diffraktion de Fraunhofer

Intro: Vous avez vu que l'optique géométrique n'explique pas tout et notamment ce qui se passe à la fin.

I A) Principe de Huygen-Fresnel

→ SLIDE

Concrètement on va calculer l'intensité reçue en un point, provenant d'une infinité de sources cohérentes. La diffraction est donc un pb d'interférences!

D) Diffraction par une diaphragme plan et approx de Fraunhofer.

L'amplitude complète en un point s'écrit :

Source à ∞ SLIDE

$$A(P) = \int_P A_0(\eta) Q \exp(i k z) dS \quad \eta = |\vec{OP}| \text{ et } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \text{Coordonnées de } P: (x, y, z) \\ \eta: (\alpha, \gamma, 0) \end{aligned} \quad \rightarrow z = \sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \gamma)^2 + z^2} = |\vec{OP}|$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, Q = \text{coeff d'inclinaison} = [L^{-1}] \text{ dep de } \theta = (\eta \cdot \vec{OP})$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } R = |\vec{OP}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \left(R^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - 2x\alpha - 2y\gamma \right)^{1/2} \\ &= R \left(1 + \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{R^2} - \frac{2x\alpha + 2y\gamma}{R} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

En toute rigueur on remplace ça dans HF et on a l'amplitude au point P
→ nclou! Approximation de Fraunhofer.

Def: Régime dans lequel on peut considérer que la source est la région dont infiniment éloignée de l'objet diffractant.

Soit $R \gg \alpha$ et $s \gg \frac{\alpha^2}{\lambda}$: on avait déjà considéré la source à l'infini.

$$\left(R \gg \frac{\alpha^2}{\lambda} \text{ et } s \gg \frac{\alpha^2}{\lambda} \right)$$

En pratique $R \gg$ autres dimensions $\rightarrow Q = \text{ct}$

+ DL de δ en gardant que les termes linéaires en x et y .

$$-\delta \approx R \left(1 - \frac{\alpha X + Y}{R} \right)$$

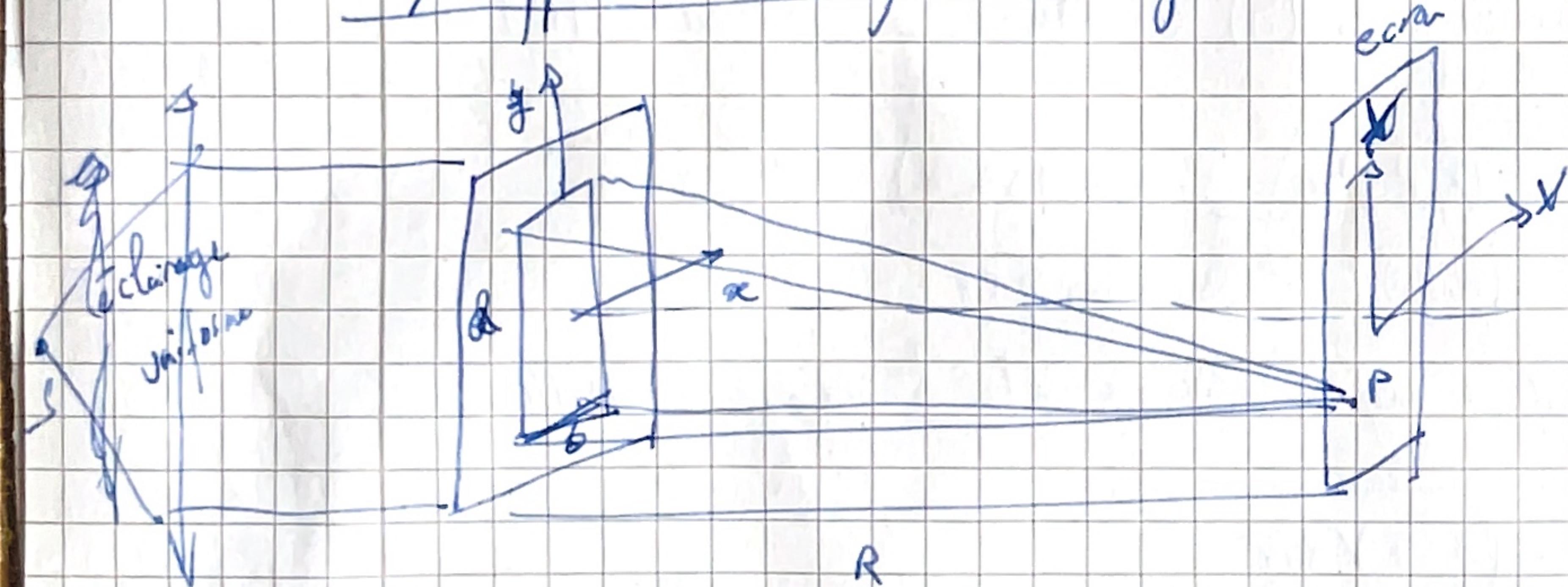
\rightarrow dans HF:

$$\underline{A}(P) \approx \int_{\Omega} Q A_0(r) \exp\left(\frac{i k R}{R}\right) \exp\left(-i \frac{e \pi}{\lambda} \left(\frac{\alpha X + Y}{R}\right)\right) dxdy$$

$$\rightarrow \underline{A}(P) \approx Q \exp\left(\frac{i k R}{R}\right) \int_{\Omega} A_0(r) \exp\left(-i \frac{2 \pi}{\lambda} \left(\frac{\alpha X + Y}{R}\right)\right) dxdy$$

Formule fondamentale de la diffraction dans l'apprx de Fraunhofer.

C) Application à la fente rectangulaire



$$\underline{A}(P) \approx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(-i \frac{2 \pi \alpha X}{\lambda R}\right) dx + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp\left(-i \frac{2 \pi \gamma Y}{\lambda R}\right) dy$$

$$\underline{A}(P) \approx I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{\exp\left(-i \frac{2 \pi}{\lambda} \frac{\alpha X}{R}\right)}{-i \frac{2 \pi}{\lambda} \frac{\alpha X}{R}} dx$$

$$= N \cos \frac{\alpha X}{\lambda R} \left[\cos\left(\frac{2 \pi X}{\lambda R} \frac{a}{2}\right) - i \sin\left(\frac{2 \pi X}{\lambda R} \frac{a}{2}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{-\frac{2 \pi X}{\lambda R}} \left[-2i \sin\left(\frac{2 \pi X}{\lambda R} \frac{a}{2}\right) + i \cos\left(\frac{2 \pi X}{\lambda R} \frac{a}{2}\right) \right]$$

$$= a \sin\left(\frac{\pi X a}{\lambda R}\right)$$

idem pour A_x et donc $I = |A|^2$

$$\Rightarrow I(x, y) = I_0 \sin^2\left(\frac{\pi b x}{\lambda R}\right) \sin^2\left(\frac{\pi a y}{\lambda R}\right)$$

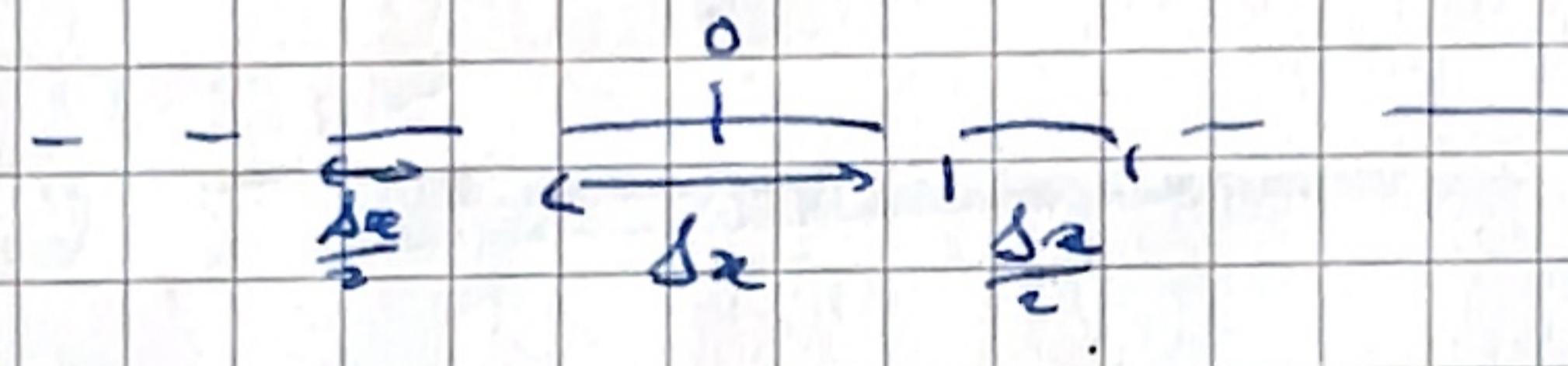
À noter: $A(p)$ peut s'écrire comme $A(p) = TF(t)$ où t est la transmission (ici fait partie).

Explication manip: pour nous $b \gg z \Rightarrow I(x) = I_0 \sin^2\left(\frac{\pi b x}{\lambda R}\right)$

Le premier minima est atteint quand $\sin^2 = 0$

$$\Rightarrow x = n \cdot \frac{\Delta R}{b} \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\hookrightarrow \Delta x = 2 \cdot \frac{\Delta R}{b}$$



Résultats cherchés

D) Théorème de Babinet

La diffraction d'une onde plane par deux ouvertures complémentaires donne les mêmes distributions d'intensité, sauf au centre.

(Résultat via TF de t , conjugué $= 1 - t \rightarrow TF = A_0 - T F_t$)

$$\hookrightarrow I = I_0 + I_t(t)$$

P_t centrale ↑ profonde pour I .

+ slide sur qq figure de diffraction

IV - Applications et limites

a. Filtrage optique

Comme la diffraction de Fraunhofer réalise une TF de l'objet diffractant
on peut modifier l'image d'un objet en agissant sur son spectre de fréquence spatiale.

→ slide

Qu'est-ce qui se passe ? → on laisse passer que les rayons proches du centre
= "basse fréquence spatiale" → filtre passe-bas !

petit λ

ie $\frac{1}{\lambda}$

petit λ
⇒ grande

b) Critère de Rayleigh

Picot

Pour un point source la largeur de la tache centrale est en angle

$$\theta_a \approx 1.22 \frac{\lambda f}{D}$$

$$\rightarrow \Delta \theta \approx \frac{1.22 \lambda}{D}$$

→ image bifocale

Conclusion :

On a vu ...

Autre limite si on report de H-F ⇒ Fresnel !

↳ ie petits angles mais distances fines