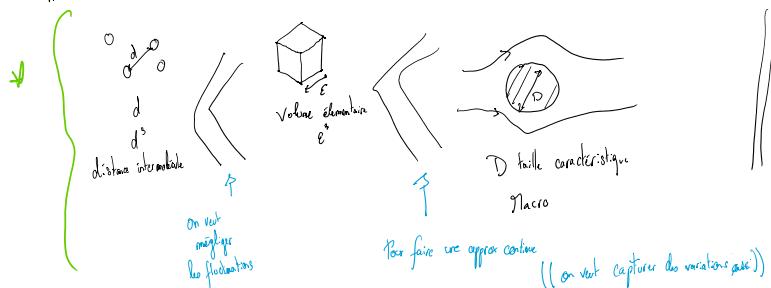




I. Qu'est-ce qu'un milieu continu?

L'approche continue repose sur la notion d'un volume élémentaire : particule de fluide ou de solide.



$$\rho(\vec{x}, t) = \text{densité du fluide ou de solide en } \vec{x} \text{ à } t$$

$$\rho(\vec{x}, t) = \frac{N(\vec{x}, t)}{\epsilon^3}$$

Typiquement, $\epsilon \approx 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$

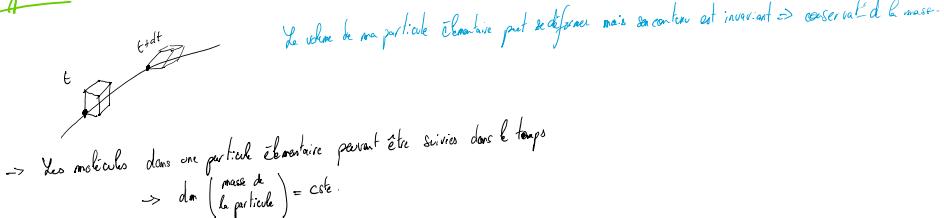
$$\text{d'où } N(\vec{x}, t) \sim \frac{(10^6)^3}{(2\pi \cdot 10^{-6})^3} = \frac{10^{18}}{10 \cdot 10^{-18}} = 10^{36} \text{ molécules dans } \epsilon^3$$

$$\text{Fluctuation } \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \sim 10^{-5}$$

1) Hypothèse 1: séparation des échelles d'espace et de temps.

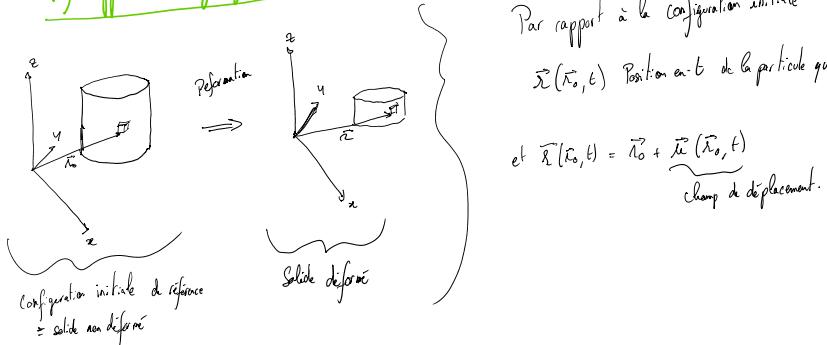
- Hypothèse 2: Équilibre thermodynamique local $T(\vec{x}, t)$ (plus de justification autre que par l'expérience sa marche \Rightarrow postulat?)

- Hypothèse 3: Particules élémentaires tragabba



II. Approches Lagrangienne et Eulerienne

1) Approche Lagrangienne



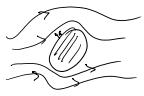
On a aussi: $\vec{x}_0(\vec{r}_0, t)$: position initiale de la particule qui est en \vec{r} à t .

$$\text{et } \vec{v}_L(\vec{r}_0, t) = \frac{D\vec{x}_0}{Dt} \text{ champ de vitesse Lagrangien: vitesse à } t \text{ de la particule en } \vec{r}_0 \text{ dans la config initiale.}$$

$$\vec{A}_L(\vec{r}_0, t) = \frac{\partial^2 \vec{x}_0}{\partial t^2}$$

Par rapport à la configuration initiale
 $\vec{x}(t_0, t)$ Position en t de la particule qui était en \vec{r}_0 dans la config initiale
 et $\vec{x}(t_0, t) = \vec{r}_0 + \vec{u}(t_0, t)$
 champ de déplacement.

graph:



S'il y a un fluide avec une approche Lagrangienne, qu'est ce que je dois faire, et où ça va me poser pb? (2 bca).

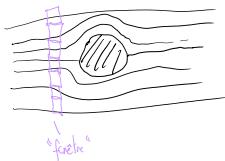
- on connaît des problèmes pour définir la configuration initiale (pour flot en écoulement permanent)

- $\vec{v}(x_0, t) \cdot \vec{n} = 0$ si $\vec{x}(x_0, t)$ est sur le septe \rightarrow condition aux bords confinés.

Quand on regarde l'écoulement d'un fluide, l'approche Lagrangienne n'est pas pratique car

- Difficulté de définir une config initiale
- Difficulté d'exprimer les conditions aux limites.

2) Approche Eulerienne



On définit des fenêtres fixes de la taille ϵ^3 et on considère

$\vec{v}(\vec{x}, t)$ vitesse de la particule en \vec{x} à t , indépendamment de son histoire. (par def on a plus de conditions initiales).

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \nabla (\vec{x}_0(\vec{x}, t), t) \quad \text{La vitesse extérieure est la vitesse de vent dans un Lagrange}$$

3) Trajectoires vs lignes de courants

Lagrangien : $\vec{x}(t_0, t)$ la trajectoire de la particule en \vec{x} dans la config initiale

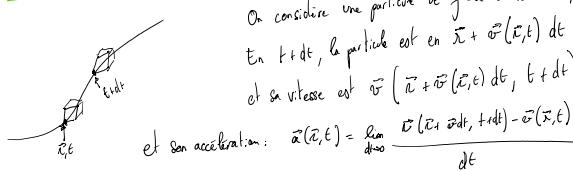
\rightarrow similitude en régime stationnaire

Eulerien : sans config initiale, pas de trajectoire mais des lignes de courants



lignes de courants: tangente à la vitesse au chaque point

4) Accélération Eulerienne



On considère une particule de fluide en \vec{x} à t , sa vitesse est $\vec{v}(\vec{x}, t)$

en $t + dt$, la particule est en $\vec{x} + \vec{v}(\vec{x}, t) dt$

et sa vitesse est $\vec{v}(\vec{x} + \vec{v}(\vec{x}, t) dt, t + dt)$

et son accélération : $\vec{a}(\vec{x}, t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(\vec{x} + \vec{v}(\vec{x}, t) dt, t + dt) - \vec{v}(\vec{x}, t)}{dt}$

$$\text{et } \vec{v}(\vec{x} + \vec{v}(\vec{x}, t) dt, t + dt) = \begin{pmatrix} \vec{v}_x(x + \vec{v}_x dt, y + \vec{v}_y dt, z + \vec{v}_z dt, t + dt) \\ \vec{v}_y(x + \vec{v}_x dt, y + \vec{v}_y dt, z + \vec{v}_z dt, t + dt) \\ \vec{v}_z(x + \vec{v}_x dt, y + \vec{v}_y dt, z + \vec{v}_z dt, t + dt) \end{pmatrix}$$

$\stackrel{\text{plus haut}}{\sim}$

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} \vec{v}_x(x, y, z, t) + \partial_x \vec{v}_x dt + \partial_y \vec{v}_x dt + \partial_z \vec{v}_x dt + \partial_t \vec{v}_x dt \\ \vec{v}_y(x, y, z, t) + \partial_x \vec{v}_y dt + \partial_y \vec{v}_y dt + \partial_z \vec{v}_y dt + \partial_t \vec{v}_y dt \\ \vec{v}_z(x, y, z, t) + \partial_x \vec{v}_z dt + \partial_y \vec{v}_z dt + \partial_z \vec{v}_z dt + \partial_t \vec{v}_z dt \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \partial_t \vec{v}$$

$$\text{avec } (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \partial_x \vec{v}_x + \partial_y \vec{v}_y + \partial_z \vec{v}_z$$

vitesse d'advection par un fluide

on devrait dire advection = alors que convection mouvement de table de \vec{x} graduel de T .

De façon générale, on note

$$\frac{D}{Dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) + \partial_t$$

Dérivée totale ou matérielle ou convective

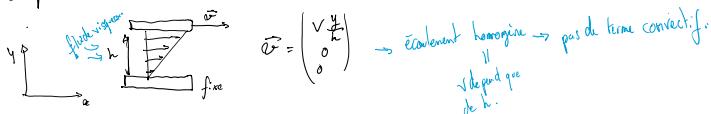
Rg: La dérivée totale s'applique à toute grandeur entraînée par le flux:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}, \quad \frac{D\rho}{Dt}, \quad \frac{D(dm)}{Dt} \text{ ar particules tracables.}$$

• Ecoulement permanent $\partial_t = 0$ mais $D_0 \neq 0$

• Cas inverse ? $\partial_t \neq 0$ mais $(\nabla, \vec{v}) = 0$?

Exemple : Ecoulement de Couette.



III. Déformations et contraintes

1) Déformations simples

a) Traction uniaxiale

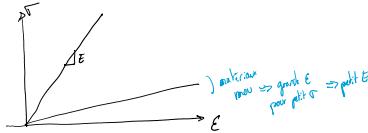


$$\left. \begin{array}{l} \text{on va chercher à studier } \Delta L \text{ en fonction de } F \text{ mais } \Delta L \text{ dépend de } L \Rightarrow \frac{\Delta L}{L} \\ E = \frac{\Delta L}{L} \text{ Déformation} \\ \sigma = \frac{F}{S} \text{ Contrainte} \end{array} \right\} \text{ Pour un solide élastique on a}$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad \text{Loi de Hooke}$$

$$Modèle d'Young \quad (E \text{ dépend de } T)$$

$$- \text{Unités: } [E] = 0 \quad [\sigma] = \frac{N}{m^2} = Pa \Rightarrow [E] = Pa.$$



$$- \text{Ordre de Grandeur: } E \sim 10^1 Pa = 100 GPa \text{ pour un métal}$$

$E \sim 10^8 Pa$ caoutchouc

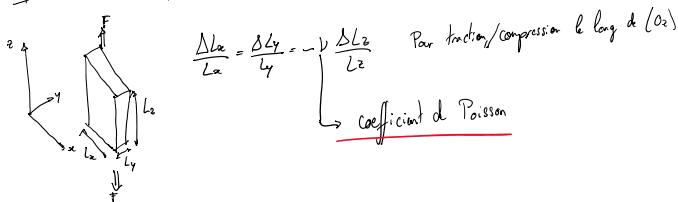
$E \sim 10^3 Pa$ Yaourt.

- Analogie avec un ressort

$$\text{On montre que l'énergie cinétique est } Energie = \frac{1}{2} V \sigma^2 E = \frac{V}{2} E \epsilon^2 = \frac{V}{2} \sigma^2$$

On montre que l'énergie cinétique est $Energie = \frac{1}{2} V \sigma^2 E = \frac{V}{2} E \epsilon^2 = \frac{V}{2} \sigma^2$

Rg: à cause de l'incompressibilité, on a une contraction latérale (le volume est constant) = incompressible, c'est pas vrai généralement mais la matière "cherche à garder son volume constant au général".



→ si matériau isotrope $\rightarrow \nu < \frac{1}{2}$

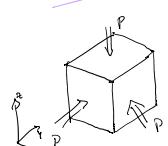
→ pour la majorité des matériaux $\nu \approx 0.3$

Rg: matériau incompressible $\nu = \frac{1}{2} \rightarrow$ caoutchouc

$\nu = 0 \rightarrow$ liège

$\nu < 0 \rightarrow$ matériau oxydant

b) Pression



Pression = contrainte isotrope
avec la convention $P > 0 \Rightarrow$ compression (inverse de la convention de traction uniaxial).

$P < 0 \Rightarrow$ traction

$$\frac{\Delta L_y}{L_y} = -\frac{P}{E} - 2\nu \left(-\frac{P}{E} \right) = -(1-2\nu) \frac{P}{E} \Rightarrow P = -\frac{E}{1-2\nu} \frac{\Delta L_y}{L_y}$$

et donc $\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L_x}{L_x} + \frac{\Delta L_y}{L_y} + \frac{\Delta L_z}{L_z}$

deformation principale du bilan dans 2 autres directions

au pratique on va avoir des termes comme donc $\frac{\Delta L_x}{L_x}$

c) Dilatation thermique



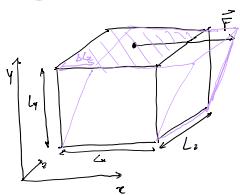
$$\epsilon_{therm} = \frac{\Delta L_x}{L_x} = \frac{\Delta L_y}{L_y} = \frac{\Delta L_z}{L_z} = \alpha \Delta T$$

coff de dilatation Thermique $[\alpha] = K^{-1}$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{(L_x + \Delta L_x)(L_y + \Delta L_y)(L_z + \Delta L_z) - L_x L_y L_z}{L_x L_y L_z} = \frac{\Delta L_x}{L_x} + \frac{\Delta L_y}{L_y} + \frac{\Delta L_z}{L_z} \\ &= 3 \times \frac{1-2\nu}{E} (P) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P = -\frac{E}{3(1-2\nu)} \frac{\Delta V}{V} \Rightarrow \chi_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} = \frac{3(1-2\nu)}{E}$$

d) Cisaillement



$$\left. \begin{aligned} \tau &= \frac{F_x}{L_x L_y} = \frac{F}{L_x L_y} \text{ surface sur lesquels elle s'applique.} \\ \gamma &= \frac{\Delta L_x}{L_y} \end{aligned} \right\} \tau = G \cdot \gamma$$

modèle de cisaillement [P.]

Quid des fluides? on peut mettre une pression un fluide sa charge n'en, cisaillement impossible
en l'état L à la vitesse $\dot{\gamma}$ \rightarrow loi de Newton.

e) Différence liquide/solide

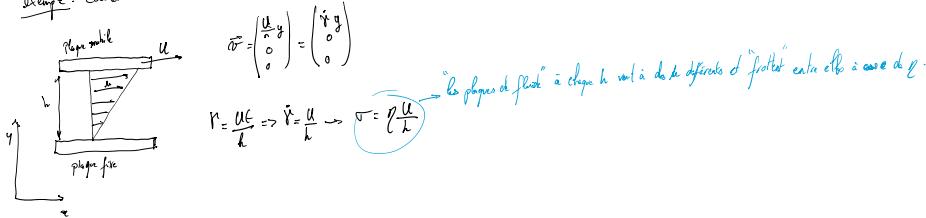
- Un liquide peut être mis sous pression, mais il ne peut développer des contraintes avec un cisaillement statique.



Pour imposer une contrainte, on doit imposer une vitesse de déformation $\dot{\gamma}$ et

$$\boxed{\tau = G \dot{\gamma}} \quad \text{Loi de Newton.}$$

Exemple: écoulement de Couette.



f) Gradient de déplacement et de vitesse

Le déplacement entre t et t+dt:

$$\vec{x}_B = \vec{x}_A + \underbrace{\vec{\omega}(\vec{x}_A, t) dt}_{\delta \vec{x}(r, t)}$$

entre t et t+dt

La position se déplace, se déforme et tourne

$$\delta \vec{x} = \vec{x}'_B - \vec{x}'_A = \delta \vec{x} + [\vec{\omega}(\vec{x}'_A, t) - \vec{\omega}(\vec{x}_A, t)] dt$$

$$\delta \vec{x} = \delta \vec{x} + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} dz \right) dt$$

$$= \delta \vec{x} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \omega_x}{\partial x} & \frac{\partial \omega_x}{\partial y} & \frac{\partial \omega_x}{\partial z} \\ \frac{\partial \omega_y}{\partial x} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \delta \vec{r} \cdot dt$$

$\nabla \vec{\omega}$ matrice telle que $[\nabla \vec{\omega}]_{ij} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}$

$$\Rightarrow \delta \vec{x} = \delta \vec{x} + (\mathbb{I} + \nabla \vec{\omega} \cdot dt)$$

$$\text{et } \boxed{\frac{\delta \vec{x}' - \delta \vec{x}}{dt} = (\nabla \vec{\omega}) \cdot \delta \vec{x}}$$

gradient des rotations

Pour un solide on a $\boxed{\delta \vec{x}' = \delta \vec{x} \cdot (1 + \nabla \vec{\omega})}$



g) Tenseur de déformation

La transformation $\delta \vec{x} \rightarrow \delta \vec{x}'$ peut venir d'une déformation et/ou d'une rotation. On sépare les 2 en écrivant au premier ordre.

$$\delta \omega = 1 / \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) + \frac{1}{\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x}}$$

La transformation $\delta\vec{x} \rightarrow \tilde{\delta}\vec{x}$ peut venir d'une déformation et/ou d'une rotation

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} \right)$$

Matrice symétrique Matrice anti-symétrique

$[\epsilon]$ Tenseur des vitesses de déformation $[\omega]$ Tenseur des vitesses de rotation.

Au 1^{er} ordre, seule $[\epsilon]$ participe à la déformation

$$\text{Pour toute matrice } 3 \times 3 \text{ anti-symétrique, } \exists \vec{Q} / [\epsilon] \cdot \vec{\delta}x = \vec{Q} \times \vec{\delta}x$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \tilde{\delta}x' &= \delta\vec{x} ([\epsilon] + \vec{Q}) \cdot \vec{Q} \times \vec{\delta}x \\ \tilde{\delta}x' &= \delta\vec{x} + \vec{Q} [\epsilon] \delta\vec{x} + \vec{Q} \times \vec{\delta}x \end{aligned}$$

Au premier ordre en $[\epsilon]$ et \vec{Q}

$$\|\delta\vec{x}\|^2 = \frac{d\|\vec{x}\|}{dt^2} = \|\delta\vec{x}\|^2 + 2 \dot{\vec{x}} \cdot [\epsilon] \cdot \delta\vec{x} + 2 \dot{\vec{x}} \cdot (\vec{Q} \times \delta\vec{x}) + \text{Térme quadratique.}$$

Pour un solide, on a la même décomposition

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_i} \right)$$

E_{ij} : Tenseur symétrique des déformations w_{ij} : tenseur anti-symétrique des rotations.

$$\vec{\delta}x = \begin{pmatrix} \frac{\Delta L_x}{2} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta \theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[\epsilon] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\Delta \theta}{2} & 0 \\ \frac{\Delta \theta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(1 + \vec{Q}) \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix}$$

$$(1 + [\epsilon]) \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \end{pmatrix}$$

5) Définition

$[\epsilon]$ et $[\tilde{\epsilon}]$ sont symétriques donc diagonalisables

Pour solide, dans le repère des axes principaux

$$[\epsilon] = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

liquide

$$\frac{(\Delta V)}{V} = \frac{L_x L_y L_z (\epsilon_1 \epsilon_1) (1 + \epsilon_2) (1 + \epsilon_3) - L_x L_y L_z}{L_x L_y L_z}$$

$$\text{trace}_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \text{Tr} [\epsilon] \quad \text{trace indépendant du repère (prop générale des solides).}$$

$$= \partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z = \text{div } \vec{u}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \text{Tr} [\epsilon] = \text{div } \vec{u} \quad \text{Solid Lagrangien}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \text{Tr} [\epsilon] dt = \text{div } \vec{u} \cdot dt \quad \Rightarrow \text{fluid incompressible } \Delta V = 0 \Rightarrow \text{div } \vec{u} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{V} \left(\frac{\Delta V}{dt} \right) = \text{Tr} [\epsilon] dt \quad \Rightarrow \boxed{\frac{1}{V} \frac{DV}{dt} = \text{Tr} [\epsilon]} \quad \text{Fluid Eulerien}$$

$$\frac{DV}{Dt}$$

$$\frac{D(dv)}{Dt} = 0 = \frac{D(\rho dv)}{Dt}$$

$$\begin{cases} \frac{D(Dv)}{Dt} + Dv \frac{Dp}{Dt} = 0 \\ \rho DV \text{div } \vec{u} + Dv \frac{Dp}{Dt} = 0 \end{cases}$$

$$p \frac{Dv}{Dt} + \rho v \frac{Dp}{Dt} = 0$$

$$p \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) p = 0$$

$\operatorname{div}(p\vec{v})$

$$\boxed{\partial_t p + \operatorname{div}(p\vec{v}) = 0} \quad \text{Équation de continuité}$$

IV. Écoulements Particuliers

1) Incompressible

$$\text{on a } \frac{D(\operatorname{div} \vec{v})}{Dt} = \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad p(x, t) = p_0 = \text{cste.}$$

Appar notable pour tout fluide si $\nu \ll c$, vitesse du son vient de

$$\frac{\delta p}{\rho} = B \frac{\delta v}{v}$$

Bernoulli: $\delta p \sim \frac{1}{2} \rho v^2 \rightarrow \delta v \propto \sqrt{\frac{\delta p}{\rho}}$

$$\frac{\delta v}{v} = \frac{1}{2} \frac{\delta p}{B \rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{\delta p}{\rho} \right)^{1/2}$$

\vec{v} est v.t pour les écoulements bidimensionnels.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi(x, y) \end{pmatrix} \quad \text{fonction courant}$$

$$\text{et } \operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \omega_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ et } \omega_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

le long d'une ligne de courant

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad \text{or} \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \times \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = 0 \Rightarrow dx \omega_y - dy \omega_x = 0$$

$$= -\omega_y dx + \omega_x dy$$

$$= 0$$

$\Rightarrow \omega$ est constant le long d'une ligne de courant.

$$\psi(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{écoulement circulaire}$$



$$\psi(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{hyperbole}$$

$$\begin{cases} \omega_x = -2y \\ \omega_y = 2x \end{cases}$$

$$\vec{\nabla} \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matrice symétrique}$$

⇒ écoulement irrotationnel
⇒ cisaillement pur

2) Irrotationnel

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \psi / \vec{v} = \vec{\nabla} \psi$$

$$[\vec{E}] = -\nabla \vec{B} + \epsilon_0 [\vec{E}] - \frac{1}{c} \operatorname{Tr}(\vec{E}[\vec{B}]) = \epsilon_0 [\vec{E}] \quad \text{in fluid Newton}$$

viscosité
de l'air

et le fluid Newton est incompressible Très bon

$$\rightarrow [\vec{E}] = -\nabla \vec{B} + 2\vec{v}[\vec{E}]$$

$$\text{et } \operatorname{div}([\vec{E}]) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{\nabla} P + \epsilon_0 \operatorname{div}[\vec{E}] = \vec{\nabla} \vec{B} \text{ si } \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

\Rightarrow Pas de fluid Newton n'importe où

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \epsilon_0 \vec{B} \times (\vec{E}) \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0 \end{array} \right] \text{ Équation de Navier-Stokes.}$$

$$\text{et } \operatorname{curl} \vec{B} = 0 \quad \text{et } \operatorname{curl} \vec{E} = 0$$



le moment $\vec{P}_0 P$

le $\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$ et $\operatorname{div}(\vec{E}) = 0$

P en dérivé par une équation de condition mais il faut vérifier
 $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ en II pour

S'applique en forme symétrique dans $\nabla \times (\vec{E} \times \vec{B}) = \mu_0 (\operatorname{div} \vec{E})$ (à vérifier)

→ dans ce cas S'applique $\vec{P}_0 P$

On a donc 2 S'applique

• NS \rightarrow

• $\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$ (condition d'homogénéité)
• équation de condition $\vec{P}_0 P = \vec{B} \cdot \vec{B}$
ou la condition

• Pas de onde solitaire:

on a $v = 0$ c'est à dire que le vent dans le tube

$\vec{v} = 0$ c'est à dire

$\vec{v} = 0$ c'est à dire

$$\left[\begin{array}{l} \vec{E} = [\vec{E}]; \vec{E} \\ \operatorname{div} \vec{E} = 0 \end{array} \right] \text{ le d'Hom} \quad \text{Généralisés}$$

$\nabla \times \vec{E} = \epsilon_0 \vec{B}$ (qui est aussi dans l'équation de Maxwell)

A priori $[\vec{E}] = \vec{B}$ car $\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$ et $\operatorname{div}(\vec{E}) = 0$ (dans l'équation de Maxwell)

→ $[\vec{E}] = \vec{B}$ coefficient (à priori 2 coefficients mais il n'y a pas de \vec{E})

la equation de onde solitaire a 2 nombre de coefficient indép

Pas de onde solitaire (comme un son) 2 coefficients

et $[\vec{E}] = \vec{B}$ (à priori 2 coefficients mais il n'y a pas de \vec{E})

(le onde solitaire = le fluid Newton).

la dérivée d'une onde solitaire → coefficients de base

→ à retrouver l'équation de Navier le plus tard de la PTD

(Navier pour onde)

NS pour onde

pourquoi 2 bases?

• $[\vec{E}] = f_1([\vec{B}])$

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad \text{et donc il faut faire } \vec{E} = f_1([\vec{B}]) \text{ pour que } \Delta \vec{E} = \frac{1}{c} (\vec{E} \times \vec{B}) \text{ soit vrai}$$

$$= \frac{1}{c} (\vec{B} \times \vec{B}), \vec{B}$$

• Si on a des ondes en régional en général R

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + f_1([\vec{B}]) - \frac{1}{c} \vec{B} \times \vec{B} \quad \text{et donc il faut faire } \vec{E} = f_1([\vec{B}]) \text{ pour que } \vec{E} = \vec{E}_0 + f_1([\vec{B}]) - \frac{1}{c} \vec{B} \times \vec{B} \text{ soit vrai}$$

→ le fond de la question

$$\begin{aligned} & \text{Reformuler formule à l'ordre } \vec{R} \\ & \vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{1}{c} \vec{B} \times \vec{B} \quad \text{et donc il faut faire } \vec{E} = f_1([\vec{B}]) \text{ pour que } \vec{E} = \vec{E}_0 + f_1([\vec{B}]) - \frac{1}{c} \vec{B} \times \vec{B} \text{ soit vrai} \\ & \vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{1}{c} \vec{B} \times \vec{B} \quad \text{et donc il faut faire } \vec{E} = f_1([\vec{B}]) \text{ pour que } \vec{E} = \vec{E}_0 + f_1([\vec{B}]) - \frac{1}{c} \vec{B} \times \vec{B} \text{ soit vrai} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = f_1([\vec{B}])$$

$$f_1([\vec{B}]) = \frac{1}{2} \rho \vec{B}^2 \vec{a}^2 + \text{constante}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_0 = -\rho \vec{B}^2 \vec{a}^2 + \text{constante}$$

$$= P_0 \vec{a}$$

= $P_0 \vec{a}$ surface.

$$z = \frac{C_{th} - P_0 + \frac{1}{c} \rho \vec{B}^2 \vec{a}^2}{\rho \vec{a}^2} \quad \text{et } z^2 \Rightarrow \text{courbe de hauteur est une parabole}$$



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \frac{1}{c} \vec{B} \times \vec{B} \quad \text{et donc il faut faire } \vec{E} = f_1([\vec{B}]) \text{ pour que } \vec{E} = \vec{E}_0 + f_1([\vec{B}]) - \frac{1}{c} \vec{B} \times \vec{B} \text{ soit vrai}$$

→ qu'en fait nous devons écrire $\vec{E} = f_1([\vec{B}])$ sur la moitié droite M

IV Nombre de Reynolds

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} + \vec{f} \quad \rightarrow \text{équation irréductible dans le général } \Rightarrow \text{on doit la simplifier}$$

term de viscosité term de gravité ...

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}$$

term de convection term diffusif

Remarque : $Re = \frac{\rho UL}{\eta}$ = $\frac{\rho UL^2}{\eta L} = \frac{\rho U^2 L}{\eta L^2}$ = $\frac{\rho UL}{\eta}$ longueur caract.



$$Re = \frac{\rho UL}{\eta} \quad | \quad \text{Nombre de Reynolds}$$

Si $Re \gg 1$, alors on peut négliger la viscosité

d'où $\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} P + \vec{f}$ Équation d'Euler

valable que le fluide soit incompressible au sens $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$ ou plus précisément $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.

[auquel le gaz est incompressible et sans viscosité donc on utilise Euler pour l'équation d'onde de propagation].

Si $Re \ll 1$, on néglige le terme convection

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}$$

avec $\text{div } \vec{v} = 0$

Équation de Stokes

Navier - Stokes

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}$$



$$Re = \frac{\rho U^2 L}{\eta U^2 L} = \frac{\rho UL}{\eta L^2} = \frac{UL}{\nu} \quad \text{où } \nu = \text{viscosité cinétique}$$

• Si $Re \gg 1$ $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \vec{f}$ Eq d'Euler origine de la turbulance
→ lamination si ce terme est négligé.

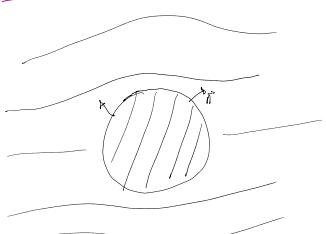
Fluides parfaits : $\nu = 0$ } $\{$ pas forcément constant
 $\vec{f} = -\rho \vec{g}$

• Si $Re \ll 1$ $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v} + \vec{f}$ Eq d' Stokes cas laminaires
mais il faut div $\vec{v} = 0$
Fluides visqueux incompressibles

Laminaires : lignes de champs parallèles (ce qui implique ne viene pas des éq's).



III. Conditions aux limites



Parfait	Visqueux
$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ sur l'obstacle	$\vec{v} = \vec{0}$ sur l'obstacle

à l'interface entre deux fluides

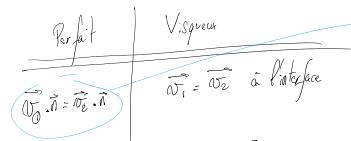
Parfait | Visqueux

peut être fait que pour garder l'interface "rigide" si $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$ ou y'a recouvrement
ou y'a variation de vitesse

et on veut que

à l'interface entre deux fluides

①



rendant le fait que pour garder l'interface "rigide" de $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 = 0$ on y a recouru au y'a création d'un vide

et on veut que

②

$$d\vec{F}_{1,2} = [\sigma_2] \cdot \vec{n} d\delta$$

$$([\sigma_2] \cdot \vec{n} d\delta) \cdot \vec{n} = ([\sigma_2] (\vec{n} \cdot \vec{n}) d\delta) \cdot \vec{n}$$

$$([\sigma_2] \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = ([\sigma_1] \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$\rightarrow P_2 = -P_1$$

$$\Rightarrow \boxed{P_2 = P_1}$$

interface avec une tension de surface γ

Surface dans un volume

P_1



$$\text{Loi de Laplace : } P_1 - P_2 = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

EAE PHP 3

SESSION 2021

AGREGATION
CONCOURS EXTERNE

Section : PHYSIQUE-CHIMIE
Option : PHYSIQUE

PROBLÈME DE PHYSIQUE

Durée : 6 heures

Colloquie discoursage de poche – à compréhension progressive, démonstratif ou à temps prescrit, à l'écriture immédiate, non imprimee, autorisé conformément à la circulaire n° 199-190 du 16 novembre 1990.

L'usage de tout outil de référence, de tout document et de tout autre matériel discoursage est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'impression, vous devrez la signaler sans hésitation sur votre copie, en préposant la correction si possible et l'explication conséquente. De même, si cette trace conduit à des erreurs dans les résultats que vous avez obtenus, il convient de les signaler.

NB : Conformément au principe d'autonomie, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le résultat que vous obtenez contient néanmoins un ou plusieurs d'au moins un de ces mots, vous devrez immédiatement vous démettre de la tigeure et de l'épreuve.

[Téléchargez la page S.V.P.](#)

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Ces codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Concours	Participation	Exposé	Mémoire
EAE	1500A	103	0889

Ondes non linéaires de déplétion et d'élévation

Ce sujet porte sur la propagation d'ondes dispersives et non linéaires à l'interface entre deux fluides. Il comporte quatre parties, rédigées de sorte à être très largement indépendantes. Si la partie I concerne les ondes de surface libres d'un liquide placé dans un flacon, la partie II concerne les ondes de surface libres d'un fluide dans un flacon.

Les parties III et IV sont destinées aux candidats qui pourront les aborder dans l'ordre de leur choix.

La partie I s'intéresse aux ondes à la surface libre d'un fluide, en régime linéaire.

Les résultats de validation expérimentale sont donnés dans les Annexes A et B, mais peuvent être demandés dans trois Annexes. On étudie le dispositif expérimental, les méthodes de mesures ainsi que les principes de fonctionnement des capteurs utilisés. Dans cette partie du problème on aborde plusieurs questions fondamentales de la physique des ondes : question de la dispersion, question de l'énergie et question de la transmission des ondes de surface, et on démontre le lien entre vitesse de groupe et vitesse de propagation de l'énergie.

La partie III concerne une étude expérimentale de la vitesse de phase d'une onde à l'interface entre deux fluides, dans un flacon. On étudie les méthodes de mesure et les résultats expérimentaux obtenus dans trois Annexes. On étudie le dispositif expérimental, les méthodes de mesures ainsi que les principes de fonctionnement des capteurs utilisés. Dans cette partie du problème on aborde plusieurs questions fondamentales de la physique des ondes : question de la dispersion, question de l'énergie et question de la transmission des ondes de surface, et on démontre le lien entre vitesse de groupe et vitesse de propagation de l'énergie.

La partie IV étudie les ondes non linéaires à la surface libre de surfaces.

La propagation est décrite par l'équation de Korteweg-de Vries. On étudie le dispositif expérimental, les méthodes de mesures ainsi que les principes de fonctionnement des capteurs utilisés. Dans cette partie du problème on aborde plusieurs questions fondamentales de la physique des ondes : question de la dispersion, question de l'énergie et question de la transmission des ondes de surface, et on démontre le lien entre vitesse de groupe et vitesse de propagation de l'énergie.

Trois annexes complètent l'exposé. Dans l'Annexe A on donne les valeurs numériques de plusieurs paramètres physiques. Le choix a été fait, tout au long de la partie III, d'utiliser ces valeurs en unités de physiques. Ces valeurs sont également indiquées dans l'Annexe B. L'Annexe C contient l'ensemble des figures illustrant les observations expérimentales discutées dans le texte (Figures 6 à 10).

I Ondes à la surface libre d'un liquide

Dans cette partie, on s'intéresse à la propagation des ondes à la surface libre d'un liquide placé dans un flacon de pesanteur uniforme d'acclimatation de la pesanteur $g > 0$. L'espacement rapporté à un référentiel galiléen (R). Ce référentiel est associé à un repère orthonormé direct ($0, x, z$) d'origine $O = (0, 0, 0)$ et dont l'axe z est dirigé vers le haut, soit $\vec{g} = -g\hat{e}_z$. Au repos, la surface du fluide est plane et définit le plan π_0 .

On s'intéresse à des ondes planes se propageant selon l'axe x et à la position x_0 la surface libre du fluide est à la position $y(x_0)$. La surface libre est immobile et le fluide est barré par une surface plane imperméable d'altitude h . La surface libre est en contact avec l'atmosphère dont la pression P_{∞} est constante dans le temps et uniforme. La Fig. 1 précise ces notations.

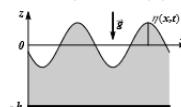


FIGURE 1 - Déformation de la surface libre du liquide.

On suppose le fluide newtonien et incompressible. Sa dynamique est donc décrite par les équations ci-dessous :

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla P + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}, \quad (2)$$

où les paramètres μ et ρ sont supposés constants.

I.1 Relation de dispersion des ondes de surface.

Une onde se traduit par une quantité physique dépendant à la fois de l'espace et du temps. À l'exception des ondes à la surface d'un fluide, objet de cette première partie, proposer un modèle d'onde, de faire la sorte que son mode de propagation soit entièrement prévisible. Proposer de modéliser l'onde par un propagateur classique (ondes harmoniques), pas dans un milieu tridimensionnel. Préciser dans chaque cas la nature du mode de propagation.

2) Dans un milieu où la propagation de l'onde est linéaire et dans lequel il existe une relation entre la vitesse de propagation v et le nombre d'onde k , appeler relation de dispersion, définir la vitesse de phase ω .

3) Identifier les variables physiques p et \vec{v} , et préciser leurs unités. Préciser la signification physique du champ de vecteur $\vec{v}(x, y, z, t)$ dans les équations (1) et (2).

4) Identifier les paramètres μ et ρ et préciser leurs unités.

5) Quelle(s) est la définition d'un fluide Newtonien ? Quel(s) terme(s) de l'équation de Navier-Stokes traduisent(s) cette définition ?

6) Supposer que l'écoulement soumis à un accélération uniforme lors de l'étude des ondes de surface ? Justifier votre réponse à l'aide d'ordres de grandeurs tirés de l'Annexe A et des figures 6 et 9 de l'Annexe C.

7) Construire à partir des constantes μ et ρ une quantité liée à la vitesse de diffusion, notée ℓ , et démontrer que lorsque l'onde de surface, c'est-à-dire un couple caractéristique de diffusion, à partir des données numériques disponibles et des figures fournis, donner le temps caractéristique de diffusion pour le mercure. Conclusion.

Décrire le phénomène physique porté par pris en compte. Simplifier en conséquence l'équation (2).

8) On note η_0 l'amplitude moyenne des ondes de surface, T la période typique et λ leur longueur d'onde typique. Calculer quelques ordres portant sur η_0 et λ peut-on négliger le terme non-linéaire des équations de Navier-Stokes ?

9) Pour toute la suite du problème, on suppose le fluide incompressible et sans viscosité. Pour toute la suite de cette partie, on se place dans le cadre de l'approximation linéaire (c'est-à-dire qu'on prend pour ω le double de la vitesse non-linéaire des équations de Navier-Stokes). Montrer que la vitesse du fluide peut être décrite comme le gradient d'un potentiel scalaire $\psi(x, z, t)$.

$$\nabla^2 \psi = -\vec{g}. \quad (3)$$

Obtenir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel, et montrer que l'on peut écrire

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g z - \frac{P_\infty}{\rho} = 0. \quad (4)$$

On cherche des ondes planes monochromatiques de nombre d'onde k et de pulsation ω . On prend alors le potentiel des vitesses, défini à une fonction du temps quelconque pris, sous la forme

$$\psi(x, z, t) = F(z) \cos(kx - \omega t). \quad (5)$$

- 1) 1) carte 2) $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\omega}{k}$ preuve
2D tourbillon $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{dw}{dt}$
3D tourbillon $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial z}$ vise de la particule à $x = kz + \omega t$
- 4) p viscole $\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$
l'onde $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \mu$ et constant $\Rightarrow \mu \neq 0$
- 5) gd ordre d'écartant \ll vitesse du son.

7) $v = \frac{k}{\mu}$ vitesse caractéristique

8) dans nœuds statiques si on n'ignor l'heure ...

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \ell \frac{\partial \psi}{\partial z} \Rightarrow \text{équation de diffusion}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\ell}{\mu}$$



Diffusion $\ell = \sqrt{Dt}$ si on est de la source du

longueur caractéristique:



$$\Rightarrow \text{par que l'oscillat jas } t \text{ doit être grand } \Rightarrow \text{on passe la rigolote (air accide)}$$

$$8) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g z - \frac{P_\infty}{\rho} = -\vec{g} \cdot \vec{v} + \ell^2$$

9) fait se placer au mode instationnel
 $\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\nabla} \psi$

$\alpha \alpha \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\vec{g} \cdot \vec{v} + \rho \vec{g}$

$\vec{\nabla} \left(-P - \rho g^2 - \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow$ est de l'éq

$\Rightarrow \rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \rho g^2 + P = f(t)$

$\hookrightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + g^2 = f(t) + \frac{P_0}{\rho}$

on fabrique de la vige potentielle definie a la bordure

10) $\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\nabla} \psi \Rightarrow \Delta \psi = 0$

$\psi = F(z) \cos(kx - \omega t) \Rightarrow \Delta \psi = -k^2 F(z) \cos(kx - \omega t)$

$\Rightarrow F''(z) = k^2 F(z)$

$\Rightarrow F(z) = A \sin(kz) + B \cos(kz)$

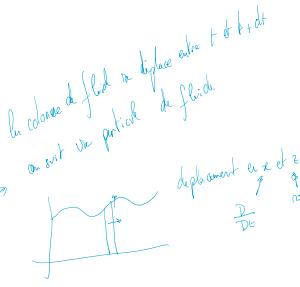
$F'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

$F''(0) = A \sin(0) + B \cos(0) \Rightarrow A = 0$

$F(z) = B \cos(kz)$

$A = B \frac{\sin(kh)}{\sin(kh)} \Rightarrow$

$\frac{1}{\rho} h \sin(kh) \frac{\sin(kh)}{\sin(kh)} = \frac{1}{\rho} h \sin(kh)$



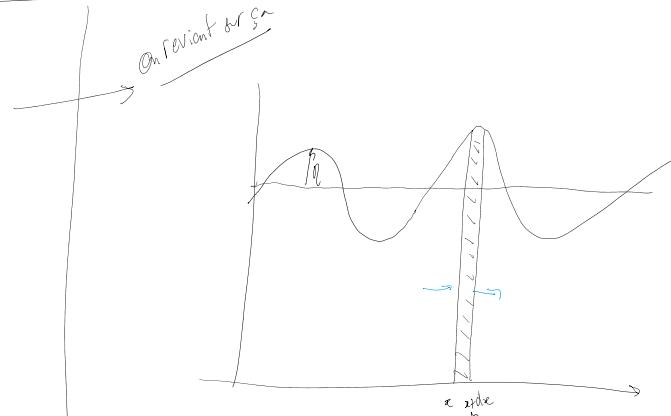
on considère une onde $f(x)$.

$$1) \frac{D\eta}{Dt} = \omega_2$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\vec{\omega} \cdot \vec{v}) h = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

negligé pour linearité

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} \approx \frac{\partial \psi}{\partial z}}$$



2) $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial z}$

$$\rightarrow -\omega_0 \cos(kx - \omega t) = F'(z) \cos(kz - \omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{F_0 = -\frac{\omega_0}{k \sin(kh)}}$$

Si on regarde l'évolution dans le temps de la colonne

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} dx = \int_0^{t(x)} \omega_x(z) dz dt - \int_0^{t(x-h)} \omega_x(z-h) dz dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{t(x)} \omega_x(z) dz dt - \int_0^{t(x)} \omega_x(z-h) dz dt - \int_0^{t(x)} \frac{\partial \omega_x}{\partial z} dz}$$

$$\int_0^{t(x)} \omega_x(z) dz dt - \int_0^{t(x)} \omega_x(z-h) dz dt - \frac{d\eta}{dt} \omega_x dz dt$$

$$h(kh) \operatorname{ch}(kh) + \sin(kh) \sin(kh)$$

intert plus portant donne varie de D .

$$dx dt = \int_{\eta}^{\eta + df(x)} \bar{w}_x(x+ct, z) dx dt -$$

Obtenir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par le potentiel, et montrer que l'on peut écrire

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + g z - \frac{\rho \omega}{\rho} = 0 \quad (4)$$

On cherche des onde planes monochromatiques de nombre d'onde k et de pulsation ω . On prend alors le potentiel des vagues, défini à une fonction du temps quelconque plus, sous la forme

$$\psi(x, t) = \psi_0 \sin(\omega t - \omega x) \quad (5)$$

Obtenir l'équation différentielle vérifiée par le potentiel $\psi(x, t)$. (On rappelle que $\nabla \cdot (\nabla \psi) = \Delta \psi$ et que $\nabla \times (\nabla \psi) = 0$).

11) Quelle est la condition sur la densité du fluide au fond, pour $x = -L$? En déduire une condition sur le potentiel des vagues ψ . Exprimer alors la fonction $F(x)$.

12) Exprimer la condition à la surface libre sur la vitesse du fluide. Simplifier cette relation dans le cadre de l'approximation linéaire et montrer qu'elle se traduit par

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=0} = 0 \quad (6)$$

13) Pour une onde plane monochromatique, la surface libre est donnée par

$$\eta(x, t) = \eta_0 \sin(\omega t - \omega x) \quad (7)$$

où η_0 est une constante homogène à une longueur. En déduire $F(x)$ en fonction de k, ω, η_0 et L .

14) Définir la tension de surface γ entre deux fluides en termes d'énergie, et en préciser une unité. La tension de surface admet aussi une interprétation en termes de force. Proposer un rapportage appuyant cette interprétation, et préciser l'orientation de la force.

15) À la transition d'une interface de rayon de courbure R entre deux fluides, la tension de surface induit une discontinuité de pression donnée par la loi de Laplace (voir Fig. 2)

$$P_{\text{in}} - P_{\text{ext}} = \frac{\gamma}{R} \quad (8)$$

Dans le cas d'une interface d'équation $\eta(x, t)$, la courbure $1/R$ est donnée par

$$\frac{1}{R} = \frac{\eta''^2}{1 + (\eta'^2)^2}^{1/2} \quad (9)$$

Sous quelle condition peut-on linéariser cette expression de la courbure en fonction de η et ses dérivées? Est-elle compatible avec la linéarisation de l'équation (5)?

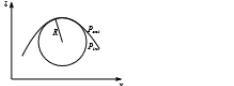
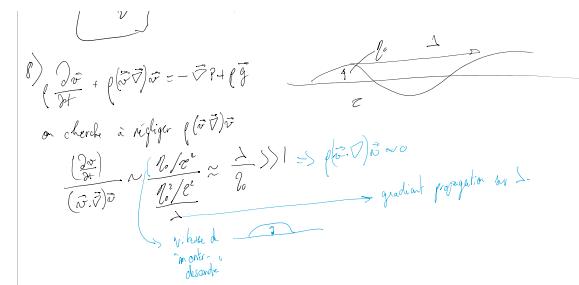


Figure 2. Schéma d'une interface courbe $z = \eta(x)$, avec les mêmes notations que dans l'Fig. 3. Dans un but de simplification, la courbure dans la direction normale à la feuille de papier est supposée constante.

16) Au dessus de l'interface, $z = \eta(x, 0)$, la pression est constante et uniforme, égale à P_{in} . Utiliser les résultats précédents pour exprimer de deux façons différentes la pression dans le fluide juste sous l'interface, à la limite $z \rightarrow 0$. Procéder à une linéarisation si nécessaire.

17) En déduire la relation de dispersion

$$\omega(k) = \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma k^2}{\rho}\right) \tanh k} \quad (10)$$



$$A = 15 \text{ cm}^2$$

$$\sin(kh)$$

$$F(z) = B \left(\frac{ch(bz)}{sh(bz)} ch(bz) + sh(bz) \right) B' \quad (c)$$

$$\Rightarrow F(z) = F_0 ch(b(b+z))$$

14) Coop énergétique pour mettre B (fluide en contact) du au interactions entre les particules du fluide. ~Robin

$$dF = \gamma dA \text{ à } T \text{ cst} \quad dF = \gamma dA = dW$$

Tension de surface énergie nécessaire pour augmenter la surface de l'interface.

en thermodynamique principe du travail maximal $\Delta F \leq W$

$$F(T, V, A, \alpha)$$

$$\downarrow dF = F(T, V, A + dA, \alpha) - F(T, V, A, \alpha) \quad \text{ordre 1 de Gibbs}$$

$$F = F_1 + F_2 + F_S = \bar{v}_1(T, V, \alpha) + F_2(T, V, \alpha) + F_S(A, T) \quad \downarrow dF = \gamma dA - S_1 dT$$

$$\downarrow T = cst \quad \downarrow dF = \gamma dA - \delta W \text{ est } W \text{ reversible.}$$

II Vitesse de groupe et propagation de l'énergie

II.1 Notion de vitesse de groupe

On considère maintenant un milieu de propagation *disposé* si linéaire, une sorte de modèle à 1D à deux milieux (1,2). On suppose un point d'onde comme une onde de densité et d'extinction spatiale linéaire. On suppose un point d'onde qui propage, selon la direction Oz un référentiel galiléen R(t), x,y,z d'origine O. On suppose comme on forme à l'instant initial t = 0,

$$u(k) = \sqrt{\left(gk + \frac{\gamma k^2}{\rho}\right) \tanh k} \quad (11)$$

oh $k^2 = -1$ et où

$$u(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t = 0) e^{ikx} dx \quad (12)$$

À un instant supérieur $t > 0$, l'amplitude du onde peut donc s'écrire :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(k) e^{ikx - \omega k t} dk \quad (13)$$

On fait pour utiliser les deux résultats suivants

[11] - On suppose que la distribution spectrale $u(k)$ est pppelle autour d'un nombre d'onde k_0 . Plus précisément, son module est négligeable au delà d'un intervalle $[k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k]$ avec $\Delta k \ll k_0$.

[12] - On suppose que la relation de dispersion admet un développement de Taylor au voisinage de k_0 ,

$$u(k) = u(k_0) + \frac{\partial u}{\partial k} \Big|_{k=k_0} (k - k_0) + \mathcal{O}[(k - k_0)^2] \quad (14)$$

On notera $u_0 = -u(k_0)$ et $u'_0 = (\partial u / \partial k)|_{k=k_0}$.

18) Proposer une expression de $u(k)$ compatible avec l'hypothèse [11]. En reprenant schématiquement le module $|u(k)|$, et la partie réelle de l'amplitude initiale de l'onde $u(x, t = 0)$ en fonction de x . Préciser l'expression de sa longueur d'onde typique λ_0 en fonction de k_0 . Indiquer sur le graphique $u(k)$ la valeur k_0 , λ_0 , Δk , Δx du packet d'onde et la longueur d'onde λ_0 . Quelle hypothèse vérifie-t-on à vis de k_0 ?

19) Donner un exemple de milieu de propagation où le développement (14) est impossible pour certain(s) pulsation(s).

20) Montrer que pour les hypothèses [11] et [12], en prenant approximativement le module de l'onde au point d'onde correspondant à une vitesse constante c_g , à pas un facteur de phase global (c_g est indépendant de la position). On indique très rapidement, chaque fois que nécessaire, l'expression des deux hypothèses [11] ou [12] intervenant dans la démonstration. Exprimer la vitesse c_g en fonction de u_0 , u'_0 et de la longueur d'onde typique λ_0 .

21) Quel phénomène physique pourrait-on mettre en évidence si on pouvait le développement de Taylor (14) à l'ordre deux dans la démonstration précédente ? (le calcul n'est pas demandé !)

II.2 Propagation de l'énergie

Donner une formule pour la vitesse de groupe, en supposant la profondeur du fluide infini, $h \rightarrow +\infty$. Pour une onde plane monochromatique de nombre d'onde k et de pulsation ω telle que $\eta(x, t) = \eta_0 \sin(\omega t - \omega x)$, le potentiel des vagues s'écrit alors

$$\psi(x, t) = -(u/k) \eta_0 e^{ikx} \cos(\omega t - \omega x) \quad (15)$$

et la relation de dispersion devient

$$\omega^2 = gk + \gamma k^2 / \rho \quad (16)$$

La valeur moyenne temporelle d'une fonction $f(t)$ périodique de période T est notée $\langle f \rangle$, avec

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (17)$$

On s'intéresse aux quantités énergétiques associées à la propagation de l'onde de surface. L'attention se portera sur ce qui est relié au fait que, pour être cohérente avec l'hypothèse [11], l'onde ne peut pas être une onde plane.

Pour aller plus loin, on calcule non pas une énergie potentielle absolue, mais la variation d'énergie potentielle entre le cas où le fluide est immobile et avec une interface horizontale, et le cas où le fluide est en mouvement.

22) Démontrer que la variation d'énergie de la surface libre due à l'onde est égale à la variation d'énergie potentielle de l'onde dans le fluide et une déformation de l'onde.

23) On considère une trame de fluide de profondeur infinité d'épaisseur dz , de longueur L , dans laquelle l'onde se propage. Calculer la densité énergétique d'énergie mécanique $\epsilon(x, z) = dE/dx$ en fonction de x , z et η . Calculer la densité énergétique de l'onde de surface $\epsilon_s(x, z)$ en fonction de x , z et η .

24) Lorsque l'onde est en repos, la surface de la trame de fluide est à l'horizontal $z = 0$, et lorsque l'onde est en mouvement, la surface est $z = \eta(x, 0)$. Calculer la densité énergétique de la variation d'énergie potentielle de l'onde $\epsilon_p = dE_p/dx$ en fonction de x , z et η . En déduire sa valeur moyenne $\langle \epsilon_p \rangle$ en fonction de x , L et η_0 .

25) Sous l'effet de la déformation de la surface libre due à l'onde, l'épaisseur dz de la trame est modifiée en surface. Calculer sa nouvelle longueur à l'onde le plus bas en $d\eta_0/dz$, puis la nouvelle longueur à l'onde le plus haut en $d\eta_0/dz$. Calculer la variation d'énergie potentielle de l'onde de la variation d'énergie potentielle de l'onde de la trame de fluide, en fonction de η_0 , L et $d\eta_0/dz$. En déduire sa valeur moyenne $\langle \epsilon_p \rangle$ en fonction de x , L et η_0 .

26) Montrer que

$$\langle \epsilon_p \rangle = \langle \epsilon_p^2 \rangle + \langle \epsilon_p^2 \rangle \quad (18)$$

Commenter. Exprimer la densité énergétique totale d'énergie $\langle \epsilon \rangle = \langle \epsilon_x \rangle + \langle \epsilon_s \rangle + \langle \epsilon_p \rangle$ en fonction de ρ , ω , L , η_0 et $d\eta_0/dz$.

27) La variation de pression σ due à l'onde de surface est la correction au champ de pression hydrostatique. Montrer que

$$\sigma = -\rho \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (19)$$

En déduire la pression Π_σ des forces de pression dans à l'onde de surface traversant une surface de tension γ dans la direction x . (C'est-à-dire dans le sens de propagation de l'onde).

28) Montrer que la variation de pression σ due à l'onde de surface est égale à la variation d'énergie ϵ due à l'onde de surface. Calculer la variation d'énergie $\langle \epsilon \rangle$ en fonction de ρ , ω , L et η_0 .

29) Exprimer la puissance totale $\langle P \rangle = \langle \Pi_\sigma \rangle + \langle \Pi_\epsilon \rangle$. Montrer que $\langle P \rangle/\langle \epsilon \rangle$ est homogène à une vitesse, et exprimer cette vitesse en fonction de ρ , ρ , γ , L et ω . Conclusion.

$$h(kh) \cosh(kz) + \sin(kh) \sin(kz)$$

$$\rightarrow d\eta dx = \sigma_x(\varphi, \eta(x))dx dt - \frac{d\eta}{dx} \sigma_x dx dt$$

$$\hookrightarrow \partial_t \eta = \sigma_x - \partial_x \sigma_x \rightarrow \frac{D\eta}{Dt} =$$

III Étude expérimentale de la vitesse de phase

La résolution de cette partie du problème nécessite la lecture des documents rassemblés dans les Annexes B.1 et B.2 qui explicitent les conditions expérimentales dans lesquelles ont été obtenus les Figs. 6, 7, 8, 9 et 10. La notation ainsi comprise du temps de lecture nécessaire.

III.1 Mesure de l'amplitude des ondes de surface

- 29) Dans l'Annexe B.1, lire comment procéder avec du mercure pour mesurer à bien leur échelle expérimentale. Commencer ce choix.
- 30) Faire un schéma clair du dispositif expérimental. Indiquer ses dimensions, la position de l'enseignant, ainsi que celle des deux capteurs mesurant la distance d .
- 31) Expliquer pourquoi il faut déplacer la bâche d'un schéma clair. Expliquer en particulier ce qu'il faut faire pour que cette mesure soit sensible à la pente de la surface libre et pas directement à la position de celle-ci. Cette mesure utilise un capteur CCD linéaire de 8 192 pixels, chaque pixel étant au carré de 5 µm de côté. Estimer la distance entre le capteur CCD et la surface du fluide si l'on souhaite enregistrer l'intégralité de la déformation de la surface libre, comme dans les Figures 7 et 9.
- 32) Les auteurs ont employé un Laser dans leur étude. Comparer la résolution spatiale des mesures optiques à celle des capteurs indiqués, qui est du même ordre de grandeur que leurs dimensions (cf. Fig. 9).

III.2 Principe d'un capteur inductif

Les capteurs inductifs étudiés dans l'Annexe B.1 sont aussi appelés capteurs à courants de Foucault (Anglais : Hall Effect Sensors). Ils sont constitués d'une bobine soléil enroulée par un matériau aimanté et d'un capteur Hall intégré. La bobine est produite à l'aide d'un circuit résonnant RLC. Un dispositif électromagnétique mesure la fréquence de résonance en fonction de la distance d de la bobine à une tige conductrice. Dans cette étude, on cherche uniquement la loi d'échelle entre la variation Δf de la fréquence de résonance et la distance d . La bobine est produite par un fil de cuivre d'un diamètre de rayon r , contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe Ox passant par son centre, parcourue par un courant I . Les candidats doivent présenter les approximations qu'ils ou elles seront amenés à faire.

- 33) Rappeler l'origine physique de la loi de Faraday et du principe d'un boucle de courant.
- 34) Schématiser la forme et la ligne de champ magnétique créé par une boucle de courant, et préciser les éventuelles symétries de la figure.
- 35) Rappeler l'origine et l'amplitude du champ magnétique créé par la boucle de courant sur son axe, à une distance d de son centre. On posera $\Delta f = \sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_0^2}$.
- 36) On note μ_0 la conductivité électrique du métal. Démontrer l'apport de puissance dans un conducteur et la loi de Faraday de grandeurs. Comparer à la loi de Lenz.
- 37) On rappelle le courant induit par la bobine dans le mercure par une boucle de courant de rayon a . On rappelle que pour deux circuits filiformes C_1 parcourus par un courant i_1 et C_2 parcouru par un courant i_2 , l'inductance mutuelle M est définie par

$$\Phi_{B2} = M i_2, \quad \Phi_{B1} = M i_1, \quad (29)$$

- 7 -

Tournez la page S.V.P.

où Φ_{B1} est le flux engendré par C_1 à travers C_1 , et respectivement Φ_{B2} est le flux engendré par C_2 à travers C_2 . Extraire l'inductance mutuelle entre la bobine et la distribution de courant induite dans le mercure, et préciser sa variation avec la distance d .

- 38) Le signal de sortie du capteur est une tension proportionnelle au décalage de fréquence constaté par rapport à la fréquence de résonance de la bobine. Dans une gamme de distances de 0 à 5 mm, ce décalage peut être ramené à zéro. Comment procéder pour que le capteur donne une réponse linéaire à la variation de distance entre le capteur et la surface libre du mercure ? À l'aide de la loi de Faraday et de la loi de Lenz.
- 39) Les auteurs de l'étude mentionnent l'emploi de deux capteurs C_1 et C_2 aux positions X_1 et X_2 , avec $X_1 < X_2$ si l'on se préoccupe dans le sens des x possibles. Les signaux issus des deux capteurs sont notés

$$\begin{cases} s_1(t) = a_1 \cos(\omega t) \\ s_2(t) = a_2 \cos(\omega t - \phi) \end{cases} \quad (31)$$

Donnez l'expression de ϕ en fonction de la fréquence de fond $f = \omega/(2\pi)$, de a_1 , a_2 , X_1 et X_2 . On rappelle de la Figure 3 les positions relatives des deux capteurs sur un ferme filodrôle à une fréquence f donnée. Identifier les deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$. Indiquer comment mesurer le déphasage ϕ entre ces deux signaux.

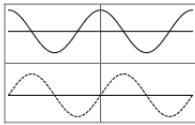


FIGURE 5. Visualisation des signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ sur un écran d'oscilloscope. L'origine du temps est au centre de l'écran.

- 8 -

- 40) La phase $\phi(f)$ est différente de la phase mesurée $\tilde{\phi}$. En effet, la valeur de cette dernière est nulle modulo 2π . Il existe donc les discontinuités de 2π qui figurent dans les mesures issues des deux capteurs $s_1(t)$ et $s_2(t)$. Expliquer, dans le texte de l'Annexe B.2, les auteurs explicitent la nécessité de ce traitement des données, qui est appelé dévouler la phase (en Anglais, unwrapping).
- 41) Comme les auteurs l'ont fait en testaments, il faut demander de tracer une des courbes de la Figure 6, en suivant leur procédé de mesure ?

- 42) Combien de fois la phase entre les deux capteurs varie-t-elle de 2π pour une fréquence de 5 Hz et pour une fréquence de 25 Hz dans chacune des configurations de la Fig. 6?
- 43) Comment la valeur trouvée expérimentalement pour la période de résonance peut servir pour ajuster les données expérimentales de la Fig. 6 à la théorie de Rupp (19).
- 44) Expliquer la relation entre la vitesse de phase $c_d(f)$ et la longueur d'onde $\lambda(f)$ à la fréquence f . Expliquer comment l'utilisation d'un stroboscopie peut donner un accès direct à la longueur d'onde $\lambda(f)$.

- 9 -

Tournez la page S.V.P.

IV Couplage entre effets dispersifs et effets non-linéaires.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'influence conjointe de la dispersion et des effets non-linéaires. Si $A(x, t)$ est l'élevation de la surface libre par rapport à la position d'équilibre $x = 0$, elle obéit à l'équation de Korteweg-de Vries (KdV),

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{2A}{3} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{3} \zeta A^2 (1 - 2Bo) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = 0. \quad (22)$$

On a introduit $\zeta := \sqrt{Bo}$ et le nombre de Bond $Bo := \gamma/c^2$. En conséquence, l'équation de KdV devient la propagation d'ondes dans le seul sens $x > 0$, et seules des ondes se propagent dans ce sens sensiblement.

L'équation de KdV peut être étudiée par un développement systématique à grande longueur d'onde et faible amplitude des équations d'onde et des conditions aux limites à l'interface, mais nous nous contentons d'arguments de plausibilité pour justifier son emploi dans le cadre des ondes à la surface libre d'un fluide.

IV.1 Ondes de surface et équation de Korteweg-de Vries

49) Vérifier que le nombre de Bond Bo en une dimension. Exprimer la relation de dispersion $\omega(k)$ [voir Eqs. (10)] en fonction de g , k , c et Bo .

50) On se place dans la limite de faible dispersion, $Bo < 1$. Développer la relation de dispersion à l'ordre 2 en Bo . Le résultat sera exprimé en fonction de c_0 , k , k et Bo . On rappelle :

$$\text{trc}(-k) = -\frac{c}{3} + \mathcal{O}(k^2) \quad \text{pour} \quad |k| < 1, \quad \sqrt{1 - k^2} = 1 - \frac{k^2}{2} + \mathcal{O}(k^4). \quad (23)$$

51) Réécrire l'équation de KdV (22) sans le terme non linéaire. Établir la relation de dispersion pour une onde plane, $A(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t)$, et démontrer sa compatibilité avec celle des ondes à la surface libre.

52) Montrer que dans la limite $kh \ll 1$ la propagation de l'onde n'est plus dispersif, et exprimer la vitesse de propagation en fonction de g et h .

Si l'élevation de la surface libre est pas négligeable, l'épaisseur de la couche de fluide devant bouger dans la direction x est proportionnelle à la vitesse de propagation de l'onde, notée c_0 au premier ordre dans la partie quantifiée $A(x, t)/h$.

53) La vitesse de phase est la vitesse de l'onde dans un référentiel où le fluide est au repos. Si l'on prend en compte les effets non linéaires, il faut prendre en compte la vitesse d'écoulement du fluide dans la direction x et donc la vitesse de l'onde dans le référentiel mobile (x', t) dans la première partie, ce qui donne comme ordre de grandeur $v(x, t) = A(x, t)$.

Démontrer l'équation (6) d'ordre de grandeur de la vitesse verticale v_z du fluide en surface. Déduire de la condition à la limite en $x = 0$ — à un ordre de grandeur pour le terme dominant de $\partial v_z / \partial x$.

Utiliser l'approximation d'écoulement pour estimator l'ordre de grandeur du terme dominant de la vitesse v_z en fonction des termes horizontaux v_x à la surface. En déduire la correction à apporter à c_0 en fonction de c_0 , A et h .

54) Réécrire l'équation de KdV (22) sans le terme dispersif. Conclure sur la validité de l'équation de KdV pour décrire les ondes faiblement dispersives ($k \rightarrow 0$) et faiblement non-linéaires ($|A(x, t)| < h$) à la surface libre d'un fluide.

- 12 -

IV.2 Intermédiaire : un peu de mécanique du point matériel

On considère une particule ponctuelle de masse m , accélérée à se déplacer selon l'axe Ox d'un référentiel galiléen. La seule force à laquelle soit soumise la particule décrit d'une énergie potentielle $U(x)$,

$$U(x) = \frac{\alpha}{2} x^2 - \frac{\beta}{3} x^3, \quad (24)$$

où α et β sont des constantes réelles strictement positives.

55) Obtenir l'équation du mouvement de la particule.

56) Calculer les positions d'équilibre de la particule en fonction de α et β , et prouver leur stabilité.

57) Représenter l'énergie potentielle $U(x)$ en fonction de x . On note U^* l'énergie potentielle correspondante à l'équilibre stable, $x = x_1$, et on calcule l'ordre de grandeur de U^* .

58) Justifier la conservation de l'énergie mécanique de la particule, notée K , et présenter son expression. On suppose $U^* < E < 0$, montrer graphiquement que la particule peut être animée d'un mouvement périodique entre deux positions x_1 et x_2 , avec $0 < x_1 \leq x \leq x_2$, et placer x_1 et x_2 sur la courbe de potentiel $U(x)$ en fonction de x . On note T la période d'oscillation T comme une intégrale entre x_1 et x_2 (on ne demande pas de la calculer).

59) Calculer la période T des petites oscillations autour de x_1 . Qu'appelle-t-on l'oscillatoire des petites oscillations?

60) On suppose $E < 0$. Expliquer x_1 et x_2 dans cette limite, en fonction de α et β . Montrer que la période d'oscillation T tend vers l'infini dans la limite $E \rightarrow 0$. Représenter schématiquement la période d'oscillation T ($T(x_1 - x_2)$) en fonction de l'amplitude des oscillations $x_2 - x_1$ pour $0 < E \ll 0$.

61) On se reporte dans la Figure 4 aux représentations graphiques de la position $x(t)$ en fonction du temps t , pour des énergies E telles que $U^* < E < 0$. Choisir ces figures par valeur de E croissante, et justifier ces réponses. Préciser par la courbe de droite l'énergie E , la valeur minimale de $x(t)$ et sa valeur maximale.

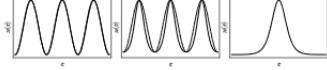


Figure 4 – En trait plein : solution exacte $x(t)$ pour une particule d'énergie mécanique E en fonction du temps t , pour $U^* < E \leq 0$. En traits pointillés : Simulation de même amplitude et de même période que la solution exacte. À droite la solution n'est pas périodique.

62) Faire un portrait de phase de l'oscillateur dans le plan (x, \dot{x}) où $\dot{x} = dx/dt$. On trace la position d'équilibre x_0 , une trajectoire périodique, la trajectoire d'énergie mécanique $E = 0$, et une trajectoire d'énergie $E > 0$. Dans le plan de phase, la trajectoire d'énergie $E = 0$ est appellée séparatrice. Pourquoi?

- 11 -

Tournez la page 5.V.P.

IV.3 L'onde solitaire de Korteweg-de Vries

63) Dans la Fig. 5, nous représentons l'élevation de la surface libre $A(x, t = 0)$ à un instant initial $t = 0$.

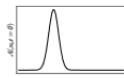


Figure 5 – Représentation schématique d'une onde $A(x, t) > 0$ se propageant selon l'axe Ox , de la gauche vers la droite, dans un milieu non linéaire. Le profil de l'onde est donné à l'instant initial $t = 0$.

Identifier le terme dispersif de l'équation de KdV (22). Illustrer sur un schéma l'évolution du profil de la Fig. 5 sous l'effet de la dispersion, pour $t > 0$.

64) On suppose que le terme dispersif de l'équation de KdV est absent. Exprimer alors la forme de l'onde à l'instant initial $t = 0$, $A(x, t = 0)$. Montrer sur un schéma comment évolue la forme d'onde de la Fig. 5 pour $t > 0$.

65) Noter A_0 l'amplitude maximale de l'onde, L la largeur spatiale typique. Représenter la relation entre A_0 , L et c_0 que les effets dispersifs et les effets non-linéaires sur la vitesse de propagation doivent nécessairement comporter.

66) On peut donc raisonnablement espérer trouver des solutions de type onde solitaire de l'équation de KdV. Il s'agit d'ondes non linéaires se propageant sans dispersion à vitesse constante c_0 . On appelle des ondes solitaires $A(x, t) = A(x)$ avec $y = x - ct$, solution de l'équation (22). Écrire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par la fonction $A(x)$. On pourra noter $\lambda = dA/dx$.

67) On cherche une onde localisée, c'est-à-dire telle que $A(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$, comme pour le profil de la Fig. 5. Indiquer la première loi l'équation différentielle précédente.

68) On suppose $Bo < 1/3$. Intégrer une seconde fois cette équation, et montrer que l'on peut écrire

$$\ln \left(\frac{A(x)}{A_0} \right) = -x^2 + \frac{\alpha}{3} x^3 + 2B, \quad (25)$$

où $\alpha = -c_0 A_0^2 L^2$, où $\alpha < 0$ et B sont des constantes réelles que l'on exprime en fonction de c_0 , A_0 et L , et où $2B$ est une constante d'intégration. On suppose $\beta > 0$, on déduit une inégalité entre les vitesses c_0 et c_0 .

69) Établir une analogie avec le problème précédent de Mécanique du Point. Dans un tableau, on portera systématiquement les quantités mécaniques et les quantités analogues au référant à l'onde solitaire. On précisera en particulier l'analogie mécanique de la constante d'intégration B .

- 12 -

70) Montrer que, pour une valeur de la constante K que l'on précisera, l'équation (25) admet la solution [on rappelle que ($\forall x \in \mathbb{R}$), $a^2x - b^2x = 1$]

$$A(x) = \frac{3b}{\alpha} \frac{1}{\cosh^2 \left[\left(\frac{\alpha}{3b} \right)^{1/2} \frac{x}{2} \right]}. \quad (26)$$

Représenter graphiquement cette fonction. Vous parlez-elle une représentation acceptable d'une onde solitaire?

71) Exprimer l'amplitude maximale de l'onde solitaire, A_0 , en fonction de α et β , ou vérifier $A_0 > 0$ (onde solitaire d'élevation). Exprimer la vitesse c en fonction de c_s , A_0 et h . Vérifier que cette expression est cohérente avec l'inégalité $f > c$.

72) À partir de l'expression de $A(x)$, enlever l'oscillation spatiale caractéristique L de l'onde solitaire. Quelle est alors l'onde à l'ordre de grandeur de L ?

73) On suppose maintenant $B\alpha > 1/3$. Il reste possible d'utiliser une analyse mécanique, en prenant garde que le paramètre équivalent à la masse soit positif. Reprendre l'analyse précédente en utilisant les équations appropriées. Montrer qu'il existe une onde solitaire avec $A_0 < 0$ (onde de dépression).

74) On définit le nombre de Froude $Fr = c_s g$. Préférer pour chacun des ondes solitaires prélevées dans les cas $B\alpha < 1/3$ puis $B\alpha > 1/3$, l'inégalité vérifiée par le nombre de Froude.

IV.4 Ondes solitaires de déplétion et d'élevation

75) Une première observation d'ondes solitaires est donnée dans la Fig. 7. Calculer le nombre de Bond plus élevé observé et vérifier que cette valeur est cohérente avec l'analyse précédente. On rappelle $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

76) Les résultats de l'onde expérimentale détaillée dans les Annexes montrent au fait qu'il n'existe pas de liaisons fixes pour la comparaison entre leurs mesures expérimentales et la formule théorique (26). Expliquer pourquoi.

77) Décrire de l'amplitude des ondes solitaires de la Fig. 7 leur vitesse de propagation, et estimates l'oscillation spatiale de ces ondes. Comment se compare-t-elle à la discuss sur laquelle elles se sont produites?

78) La forme des ondes solitaires de déplétion en fonction de leur distance à l'émetteur est représentée dans la Fig. 8. Pourquoi la comparaison entre théorie et expérience est-elle moins bonne pour la toute première onde solitaire que pour la deuxième?

79) La vitesse c est déterminée par $c = \sqrt{gh}$. Mesurer la vitesse c de plusieurs ondes solitaires dans la Fig. 9. Comparer ces résultats expérimentaux aux predictions théoriques de la partie IV.3. Commenter les valeurs expérimentales des nombres de Bond, la répartition des points de mesure par rapport à la valeur $c/\sqrt{gh} = 1$, et enfin la partie de la droite en traits pleins représentée sur la figure.

IV.5 Effets dissipatifs

Aucun effet dissipatif n'a été pris en compte jusqu'à présent. Il est néanmoins possible de les observer, comme le prouvent les mesures présentées dans la Fig. 10.

- 12 -

[Tourner la page 5.V.P.](#)

80) Quelle figure permet celles étudiées à la question précédente mettant en évidence une atténuation des ondes solitaires?

81) L'équation de KdV ne comporte aucun terme dissipatif. Comment expliquer qu'elle rende aussi bien compte de la forme des ondes solitaires observées expérimentalement?

82) A l'aide des données de la Fig. 10, donner une définition de la longueur d'atténuation $\zeta(b)$. Le résultat correspond à $b = 2,12 \text{ mm}$. Résumer $\zeta(b)$ à partir de la Figure 8 et vérifier la cohérence avec les résultats de la Figure 10.

83) Les ondes solitaires de déplétion se comportent-elles différemment des ondes solitaires d'élevation en ce qui concerne leur atténuation? Quel est le résultat expérimental sur la dépendance de $\zeta(b)$ en fonction de b ?

ANNEXES

A Valeurs numériques

TABLE 1 : Les valeurs numériques ci-dessous sont toutes exprimées en unités du système international, et valables à une température de 20°C pour un corps pur. Les symboles utilisés sont les mêmes que dans le corps du texte.

Symbol	Grandeur physique	Unité	Mercure
ρ	Masse volumique	1×10^3	$13,6 \times 10^3$
γ	Tension de surface liquide/air	0,073	0,064
μ	Viscosité dynamique	10^{-3}	$1,5 \times 10^{-3}$
σ	Conductivité électrique	$5,5 \times 10^{-4}$	$1,04 \times 10^{-6}$
Vitesse du son		1480	1487

B Extraits d'article scientifique

[Extraits de R. Falcon, C. Lanotte, S. Rave, Observation of depression solitary surface waves on a fluid layer, Physical Review Letters, volume 89, 208101 (2002). Ce texte référence son contenu aux Figures de l'Annexe C. Les mentions de l'article original sont par ailleurs adaptées à celles de l'étude.]

B.1 Descriptions du dispositif expérimental

Le dispositif expérimental consiste en un long canal horizontal en plastique d'une longueur de 1,5 m, large de 7 cm, rempli de mercure jusqu'à une hauteur h , avec $2,12 \leq h \leq 9,36 \text{ mm}$. h

- 14 -

est mesuré avec une précision de $\pm 0,02 \text{ mm}$ au moyen d'une jauge de profondeur utilisant un positionneur infrarouge microscopique.

Les ondes de surfaces sont engendrées par une excitation soit impulsionale soit continue fournie par le mouvement horizontal d'une plaque rectangulaire en Teflon placée sur un vibrateur électromagnétique. Les ondes sont capturées par deux capteurs placés à l'opposé de l'émission local de la plaque en réaction à leur excitation en mesure par deux capteurs placés non inscrits. Chaque capteur inscrit, d'un diamètre de 3 mm, est suspendu perpendiculairement à la surface du fluide au repère où sont placés 2,5 mm au dessus de la surface lors de l'émission des ondes solitaires d'élevation. L'émission des ondes solitaires d'élevation est réalisée par un laser diode à 632 nm. L'épaisseur de la plaque de réaction insérée dans le capteur permet la mesure d'une distance entre la tête du capteur et la surface du fluide jusqu'à 2,5 mm avec une sensibilité de 5 V/mm. Le premier capteur est placé à 1,2 m de la plaque d'émission et le second à 1,2 m de la première. La distance entre la tête de la plaque de réaction insérée dans le capteur permet la mesure d'une distance entre la tête du deuxième capteur et la surface du fluide jusqu'à 1,2 m. Bien que les capteurs industriels soient largement utilisés pour obtenir une mesure précise de la position d'une plaque métallique mobile, leur réponse dans le cas de la surface d'un fluide est très peu sûre. Nous avons donc opté pour une méthode alternative avec une détermination optique de la pente locale de la surface. Avec un détecteur de pente, nous avons enregistré la diffraction d'un rayon laser par l'onde de surface; le calcul de l'élévation de la surface à l'origine de la diffraction nous a permis de déterminer la pente locale de l'onde de surface. Les méthodes induktives et optiques sont complémentaires en ce sens que la réaction spatiale et la sensibilité de la méthode optique sont meilleures, mais la méthode induktive procure une meilleure mesure du déplacement de la surface et ne nécessite pas de transmettre d'onde dans la plaque, qui peut être préjudiciable pour la présence d'objets conducteurs ou de petites crêtes pouvant se cumuler suite à l'ingénierie numérique nécessaire au traitement du signal optique. Les deux méthodes ne sont pas limitées par leur temps de réponse relativement à la gamme de fréquence des ondes de surface. Les deux méthodes sont complémentaires et offrent de la technique induktive de mesure, et sans parce que sa vitesse cinétique est d'un ordre de grandeur plus élevé que celle de l'eau, réduisant fortement la dissipation des ondes.

B.2 Mesure de la vitesse de phase

Nous mesurons la vitesse de phase et déterminons la relation de dispersion des ondes gravitationnelles afin de valider notre technique de mesure et de mesurer la valeur de la tension de surface γ . À cette fin, le vibrer est en synchronisme à petite amplitude, à la fréquence f variant entre 0 et 10 Hz. La vitesse de phase c_0 est alors mesurée par la méthode d'interférence (écho en amplificateur) entre les signaux fournis par les deux capteurs à l'aide d'une détection synchrone (écho en amplificateur) en fonction de la fréquence f . La vitesse de phase c_0 est alors obtenue à partir de la phase décalée (φ_f) entre les deux signaux de tension de surface mesurés par les deux capteurs. La relation entre la vitesse de phase c_0 et la phase décalée φ_f est donnée par la relation de dispersion obtenue en négligeant la viscosité, Eq. (10) entre la pulsation $\omega = 2\pi f$ et le nombre d'onde k à condition de prendre $\gamma = 0 \text{ m/s}$. Il faut noter que cette valeur de $\gamma = 0 \text{ m/s}$ est de 29 % de la valeur tablée dans la Table 1. [...] Une autre manière indépendante de la formule (10) en mesurant la phase décalée de la Fig. 6. La relation $\omega = 2\pi f/k$ obtenue en fonction de f par la méthode précédente, est comparée à la mesure directe réalisée à l'aide d'un stroboscope.

- 15 -

[Tourner la page 5.V.P.](#)

C Résultats expérimentaux

[Figure extraits de R. Édou, C. Laroche, S. Ranc, Observation of depression solitary surface waves on a thin fluid layer, Physical Review Letters, volume 89, 204501 (2002).]

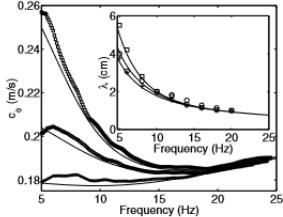


FIGURE 6 – Variation de la phase (m/s) en fonction de la fréquence f pour une profondeur $h = 3.3$ (\square), 4.6 (\triangle) et 8 (\circ) mm. Les lignes sont les résultats obtenus dans le cas de l'ordre (b) pour $h = 3.3$ mm et $h = 3.3$ (courbe du bas), 4.6 (milieu) et 8 (haut) mm. Dans l'insert on montre la longueur d'onde en fonction de la fréquence obtenue par des mesures additionnelles avec un stroboscopie (mêmes symboles que précédemment).

– 16 –

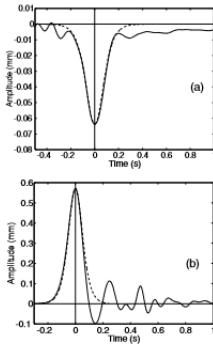


FIGURE 7 – (a) Profil d'une onde solitaire de dépression pour $h = 2.12$ mm et $A_0 = -0.064$ mm ; (b) profil d'une onde solitaire d'élévation pour $h = 5.00$ mm et $A_0 = 0.370$ mm. Les courbes en traits pleins sont l'expérimentation et les lignes pointillées sont les solutions théoriques obtenues par un rapport initial à 200 ms (a) et 200 ms (b) de l'amplitude d'onde. Les lignes pointillées sont les solutions théoriques (26) correspondant à chaque cas.

– 17 –

Tournez la page 5.V.F.

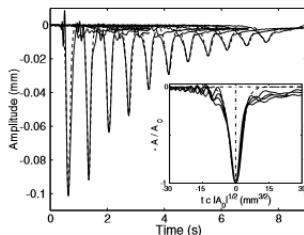


FIGURE 8 – Propagation d'une onde solitaire de dépression pour $h = 2.12$ mm, enregistrée à des distances de l'émetteur allant de 100 ms à 100 ms par pas de 100 ms. L'origine des temps est définie par l'émetteur. Les lignes pointillées sont les solutions théoriques (26) correspondant à chaque cas. L'insert montre les ondes solitaires de dépression aux distances 200, 300, 400 et 500 ms, en variables d'échelle $-A/A_0$ et $t c |A|_0^{1/2}$.

– 18 –

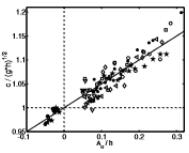


FIGURE 9 - Vitesse d'absorption D/D_{ref} en fonction de h/h_{ref} pour phantoms parallèles expérimentaux : couches solides de dépitaires, $h = 2,15 \text{ mm}$ et $2,77 \text{ mm}$ (†). Les autres graphes correspondent à des couches d'épaisseur, $3,30 \leq h \leq 8,40 \text{ mm}$. La droite en traits pleins a une pente de 0,5.

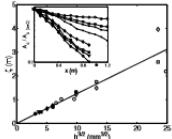
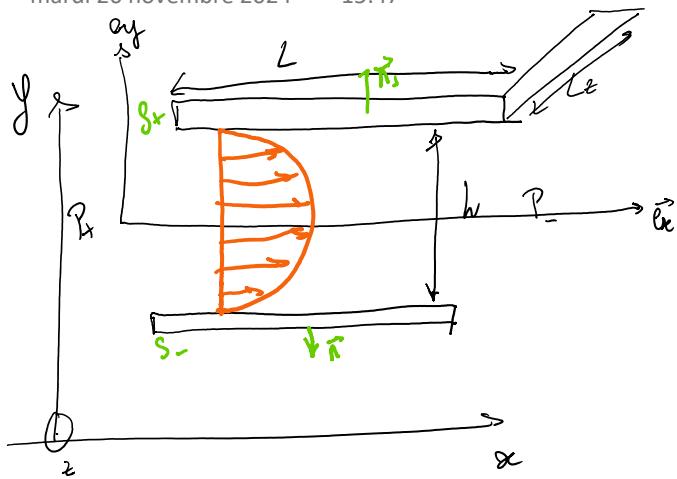


FIGURE 10 - Les symboles pleins correspondent à des couches solides de dépitaires, les symboles ouverts à des couches solides d'acrylique. En abscisse tout court (h/h_{water}) (échelle logarithmique) en fonction de x (en mm , échelle linéaire). Les figures jusqu'à celle précédente. Dans laquelle principale en traits, en échelle linéaire, la longueur d'atténuation $\zeta(h)$ (m) en fonction de $h^{3/2}$ ($\text{mm}^{3/2}$).

Écoulement de 1 Doiseuill•Plan.

mardi 26 novembre 2024 15:47



- Fluid de viscosité η
- Incompressible
- Régime stationnaire

Q1. Quel serait le profil du champ de vitesse ?

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(x, y) \\ v_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{car } L \gg h$$

$$\text{et } \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow v_y = \text{cste} = 0$$

$$\hookrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

invariant par translation
selon x
(écoulement homogène dans la direction de l'écoulement (terme d'écoulement))

Navier-Stokes : stationnaire car écoulement homogène dans la direction de l'écoulement (gravité négligée)

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + \eta \Delta \vec{v}$$

$$\Rightarrow \nabla P = \eta \Delta \vec{v}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \partial_x P \\ \partial_y P \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y^2 v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \partial_y P = 0 \rightarrow P(x)$$

$$\rightarrow \partial_x P(x) = \eta \partial_y^2 v_x(y) = C$$

↑
 possible que si forces
 sont constantes

$$C = -\frac{\Delta P}{L} \quad \Delta P = P^+ - P^-$$

$$v_x = -\frac{\Delta P}{2\rho L} y^2 + Cy + B$$

$$v_x(y) = -\frac{\Delta P}{2\rho L} \left(y^2 - \frac{h^2}{4} \right) \rightarrow \text{profil parabolique}$$

$$v_{max} = \frac{\Delta P}{8\rho L} h^2 \equiv U$$

2) débit massique Q?

$$Q = \frac{dm}{dt} = \rho \int v_x(y) dy \propto h^3$$

3) force de frottement du fluide sur les parages?

avec \vec{n} vecteur normal sortant

$$\rightarrow \int n \cdot -\vec{F}_n$$

avec \vec{n} vecteur normal sortant

$$\text{Par définition, } \vec{F}_{\text{Plaque} \rightarrow \text{fluid}} = \int_{S_{+} \cup S_{-}} [\bar{\sigma}] \cdot \vec{n} \cdot d\vec{S}$$

$$\hookrightarrow \vec{F}_{\text{fluid} \rightarrow \text{plaque}} = - \int_{S_{+} \cup S_{-}} \left(-P[\bar{1}] + 2\eta[e] \right) \vec{n} \cdot d\vec{S} \quad \text{avec EJ } e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\partial_{xy} v_i + \partial_{xz} v_j \right)$$

$\int P \vec{n} \cdot d\vec{S} = 0$ car P symétrique sur S_{+} et S_{-} mais \vec{n} s'inverse.

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & \partial_y v_x & 0 \\ \partial_y v_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad \Rightarrow \text{tenu selon } z$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{f \rightarrow p} = - 2\eta \times \underset{S_{+} \text{ et } S_{-} \text{ symétriques}}{\uparrow} 2 \times \frac{1}{2} \partial_y v_x \Big|_{S_{+}} L_x L_z \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 2\eta L_x L_z \frac{\Delta P}{2L} \frac{h}{2}$$

$$\vec{F} = \Delta P \cdot h \cdot L_z = \Delta P \cdot S \text{ avec } S = h L_z$$

on aurait pu le voir plus facilement

$$\oint \frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{r}} = - \vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v} = 0$$

$$= \operatorname{div} [\bar{\sigma}] = 0$$

par

On introduit un coefficient de frottement adimensionnel ζ en général pour les frottements on fait $\zeta =$

On introduit un coefficient de frottement adimensionnel ζ en gér.
on fait ça.

$$C_x = \frac{\|\vec{F}\|}{\rho U^2 S}$$

parfois
y a un 1/2
c'est une convention

norme à
une pression.

$$\text{Jac: } C_x = \frac{\Delta P}{\rho U^2} = \frac{8 f L \mu}{h^2 \cdot \rho U^2} = 8 \left(\frac{L}{h} \right) \left(\frac{\mu}{\rho U h} \right) \zeta \frac{1}{Re}$$

$\Rightarrow C_x \propto Re^{-1}$ caractéristique des fluides visqueux

Chapitre 3: Fluides Parfaits

mardi 26 novembre 2024 16:37

I - Théorème de Bernoulli:

On considère un fluide parfait en écoulement permanent (\rightarrow équation d'Euler)

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g}$$

car écoulement permanent

identité analytique vectorielle: $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) - \vec{v} \times \vec{\omega} \times \vec{v}$

$$\Rightarrow \rho (\vec{v} \times \vec{\omega} \times \vec{v}) = \vec{\nabla} \left(\frac{\rho \vec{v}^2}{2} + P + \rho g z \right) \quad (1)$$

Puis on regarde ça sur une même ligne de courant

A, B 2 points sur une même ligne de courant
On intègre (1) entre A et B

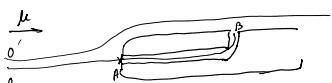
$$\int_A^B (\vec{v} \times \vec{\omega} \times \vec{v}) d\ell = \int_A^B \vec{\nabla} \left(\frac{\rho \vec{v}^2}{2} + P + \rho g z \right) d\ell$$

Car $d\ell / \vec{v}$
et $\vec{v} \times \vec{\omega} \times \vec{v} \perp \vec{v}$

$$\Rightarrow \rho \frac{v_B^2}{2} + P_B + \rho g z_B = \rho \frac{v_A^2}{2} + P_A + \rho g z_A$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z = \text{Cst} \quad \text{le long d'une ligne de courant}} \quad \text{Théorème de Bernoulli}$$

application: tube de Pitot (encore utilisé à l'avant des avions)



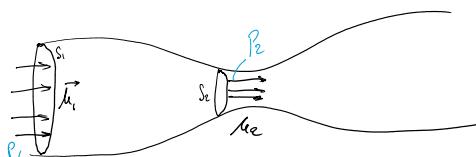
$$P_0 + \frac{1}{2} \rho U^2 = P_A + 0$$

$$P_0' = P_B$$

$P'_0 = P_0$ car écoulement unidirectionnel (voir Poiseuille)

$$\Rightarrow P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho U^2 \rightarrow \text{permet de mesurer la vitesse des avions.}$$

application: effet Venturi



Incompressible

$$\hookrightarrow M_1 S_1 = M_2 S_2$$

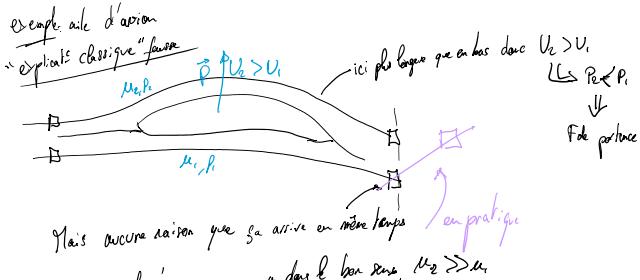
$$\rightarrow U_2 = \frac{S_1}{S_2} U_1 > 0$$

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho U_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho U_2^2$$

$$\Rightarrow P_2 - P_1 = \frac{1}{2} \rho (U_2^2 - U_1^2) \Rightarrow P_2 < P_1$$

< 0

Effet Venturi: la pression diminue lorsque le flux augmente.



mais attention effet géométrique aussi:

si j'ouvre la fenêtre puisque vous aussi ...

↳ application: Toricelli (voir livre)

 $v = \sqrt{2gh}$
(bien parce vitale du fluid qui sort par un trou).

II. Ecoulement parfaits et irrotationnels

1) Théorème de Bernoulli instationnaire

$$\text{Si } \text{rot } \vec{\omega} = 0, \exists \text{ potentiel } \vec{\Phi} / \vec{\omega} = \text{grad } \vec{\Phi}$$

$$\text{Euler} \Rightarrow \vec{\nabla} \left(\rho \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} \right) + \vec{\nabla} \left(\rho \frac{v^2}{2} \right) - \rho \vec{\omega} \times \text{rot} \vec{\omega} = - \vec{\nabla} (P + \rho g z)$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \left(\rho \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z \right) = 0$$

$$\boxed{\rho \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial t} + \rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z = \text{Cst}} \quad \text{dans l'écoulement}$$

et pas que le long des lignes de courant comme Bernoulli "classique"

2) Persistence de l'irrotationnalité

On appelle $\text{rot } \vec{\omega} = \vec{\omega}$ la vorticité

$$\text{et Euler} \Rightarrow \rho \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \rho (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = - \vec{\nabla} (P + \rho g z)$$

On prend le rotatif de Euler

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{\omega} + \rho \text{rot} ((\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}) = \vec{0}$$

$$\text{et } \text{rot} ((\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega}) = \text{rot} \left(\vec{\nabla} \frac{\rho \vec{\omega}}{2} - \vec{\omega} \times \text{rot} \vec{\omega} \right)$$

$$= - \vec{\omega} \text{rot} (\vec{\omega} \times \text{rot} \vec{\omega})$$

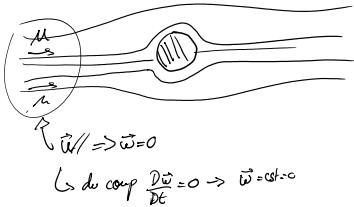
$$\therefore \partial_t \vec{\omega} - \vec{\omega} \text{rot} (\vec{\omega} \times \vec{\omega})$$

$$\therefore \text{div}(\text{rot}) = 0$$

incompressible = 0.

$$\begin{aligned}
 &= -\vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\omega}) \\
 \Rightarrow \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \vec{\omega} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\omega}) &= \text{div}(\vec{\omega}) = 0 \\
 &= (\omega \vec{v}) \vec{\omega} - (\vec{v} \cdot \vec{\omega}) \vec{\omega} + \vec{v} \text{ div } \vec{\omega} - \vec{\omega} \text{ div } \vec{v} \quad \text{incompressible} = 0 \\
 \Rightarrow \boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\omega \vec{v}) \vec{\omega}}
 \end{aligned}$$

exemple:



$\vec{u} \parallel \vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} = 0$
 \hookrightarrow du coup $\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \text{const.}$

\Rightarrow Si un écoulement est irrotationnel dans une région, il le reste partout où la région est transportée par l'écoulement

Autre manière de voir ... partie 1.

* Théorème de Kelvin

On prend un circuit fermé C et on calcul la circulation le long de C

$$\Gamma = \oint_C \vec{\omega} \cdot d\vec{l} = \int_C (\vec{\omega} \times \vec{\omega}) \cdot \vec{n} ds$$

$$\begin{aligned}
 \frac{D\Gamma}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \left(\sum \vec{\omega} \cdot d\vec{l} \right) \\
 &= \sum \frac{D}{Dt} \vec{\omega} \cdot d\vec{l} + \vec{\sigma} \frac{Dd\vec{l}}{Dt}
 \end{aligned}$$

$$= \int_C \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \cdot d\vec{l} + \int_C \vec{\sigma} \frac{Dd\vec{l}}{Dt}$$

éuler

$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \phi$

je suppose qu'on peut aussi utiliser des axes et dire que D est non nul.

$$\frac{D(d\vec{l})}{Dt} = \frac{\vec{dl}' - \vec{dl}}{Dt}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{dl}' &= \vec{r}_B - \vec{r}_A \\
 &= \vec{r}_B + \vec{\omega}((x_A + d\vec{l}, t)) dt - \vec{r}_A - \vec{\omega}(x_A, t) dt \\
 &= d\vec{l} + \vec{\omega} d\vec{l} dt
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \frac{D(d\vec{l})}{Dt} = (\vec{\nabla} \phi) \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = \int_C \vec{\omega} \cdot \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{l}$$

$$\int_C \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{D\vec{\tau}}{Dt} = \oint_{\partial} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS$$

$$= \oint_{\partial} \vec{v} \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial n} \right) \cdot d\vec{l} = 0$$

Théorème de Kelvin

$$\text{du coup carree } \vec{\tau} = \int_S \vec{\omega} \cdot \vec{n} dS \quad \text{si } \vec{\omega} = 0, \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{D\vec{\tau}}{Dt} = 0$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{+ mème conclusion que au dessus.}}$

\Leftrightarrow dans tout le domaine \vec{v} était constant!

3) Écoulement potentiel = écoulement irrotationnel et incompressible et sans viscosité

$$\text{On a } \nabla \times \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla} \phi$$

$$\text{et } \operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \Delta \phi = 0$$

\Rightarrow l'écoulement est solution d'une équation de Laplace avec la CL appropriée.

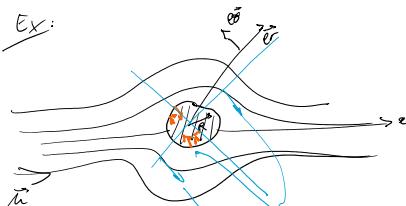
\Rightarrow si on connaît $\vec{\phi}$ $\Rightarrow \vec{v} = \vec{\nabla} \phi$

\rightarrow on connaît \vec{v} sans Navier-Stokes? Bizarre? pourquoi pas marche?

$$\text{calcul } \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\nabla} P + \vec{g} \quad \frac{1}{2} \rho \vec{v}^2 + P + \rho g^2 = \text{const.}$$

\hookrightarrow on dérive P de \vec{v} et pas l'inverse, \vec{v} est un "genre de multiplicateur de Lagrange"

\hookrightarrow la "pression" est bizarre vu que fluid incompressible.



on cherche $\phi / \Delta \phi = 0$

$$\text{On a CL: } \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0$$

$$\text{et } \vec{v}(r \rightarrow \infty) = \vec{U} \hat{x}$$

$$\begin{cases} \phi(r, \theta) = U R \cos \theta \left(\frac{r}{R} + \frac{R}{r} \right) \\ \omega_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = U \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \\ \omega_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -U \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \end{cases}$$

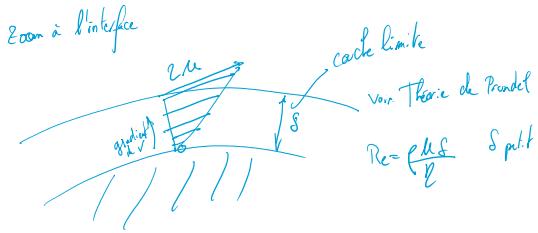
$\hookrightarrow \vec{F}_{\text{fluid} \rightarrow \text{cylindre}} = -\vec{F}_{\text{cylindre} \rightarrow \text{fluid}}$ vecteur sortant du fluide \vec{n} vers l'intérieur

$$= - \int_S [\vec{\sigma}] \cdot \vec{n} dS = + \int_S P \vec{n} dS.$$

$$\text{on a } \vec{v}(r, \theta) = \vec{v}(r, \theta + \pi) \quad \text{d'où } P(R, \theta) = P(R, \theta + \pi) \quad \text{ou } \vec{n}(\theta) = -\vec{n}(\theta + \pi)$$

$\Rightarrow \vec{P} = \vec{0}$ = paradoxe de D'Alembert.

\hookrightarrow argument pour le résoudre = existence d'une cache limite

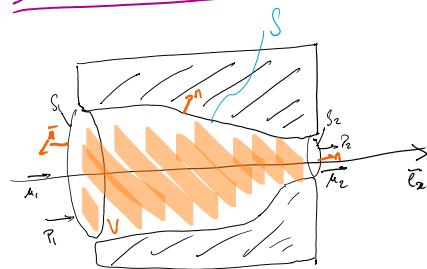


$\bar{v}_x(\text{raîne}) = 0$ = Paradoxe de d'Alambert car on n'a pas tenu compte de la couche limite.

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} \quad \delta \text{ petit donc } Re \text{ petit viscosité non négligeable}$$

$$\Rightarrow \vec{F} \neq 0 \text{ dans la couche}$$

III - Conservation de la quantité de mouvement



Tuyère de révolution
quelle est la force du fluide → tuyère ?
Fluid sans viscosité, en régime permanent

$$\rho \vec{g} + \rho (\vec{\omega} \cdot \vec{v}) \vec{\omega} = -\vec{\nabla} p + \rho \vec{f}$$

par contre contrairement à Poiseuille Plan $(\vec{\omega} \cdot \vec{v}) \vec{v} \neq 0$ car écoulement non homogène.

Volume de référence fixe V (permanent ou non)

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dV$$

$\sim \partial_t$ au sens mit pas les particules de fluide dans leur mouvement

$$\begin{aligned} &= \int_V (-\rho \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p) dV + \int_V \rho \vec{f} dV \\ &= \int_V \operatorname{div} (\rho (\vec{v} \otimes \vec{v}) - P \mathbb{I}) dV + \int_V \rho \vec{f} dV \quad \text{avec } \vec{v} \otimes \vec{v} \text{ matrice / } [\vec{v} \otimes \vec{v}]_{ij} = v_i v_j \\ &\text{si: } \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV &= - \int_S (\rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v} + P \vec{n}) dS + \int_V \rho \vec{f} dV \\ &= - \int_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS - \int_S P \vec{n} dS + \int_V \rho \vec{f} dV \\ \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV &= - \int_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS - \int_S P \vec{n} dS + \int_V \rho \vec{f} dV \end{aligned}$$

Si régime statique, sans gravité

$$\int_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS = - \int_S P \vec{n} dS$$

$$\vec{F}_{\text{fluide} \rightarrow \text{tuyère}} = \int_S P \vec{n} dS$$

$$\int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS = - \rho \vec{u}_1^e \cdot \vec{S}_1 \vec{e}_x$$

$$\int_S P \vec{n} dS = -P_1 \vec{S}_1$$

$$\int_S (\rho \vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS = 0 \quad \text{à cause de condition de non-pénétrabilité}$$

$$\int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{v} dS = \rho \vec{u}_2^e \cdot \vec{S}_2 \vec{e}_x$$

$$\int_S P \vec{n} dS = P_2 \vec{S}_2$$

$$\rightarrow \rho \vec{u}_1^e \cdot \vec{S}_1 - \rho \vec{u}_2^e \cdot \vec{S}_2 \rightarrow \text{on peut simplifier en utilisant}$$

\rightarrow la forme autorise $\vec{F} < 0$ c'est-à-dire probablement des am nbs & hypothèse ...

$$\rightarrow \vec{F}_{\text{statique}} = \rho V_i S_i + P_i S_i - \rho u^2 S_i - P_2 S_2 \quad \rightarrow \text{on peut simplifier en utilisant Bernoulli: la conservation } u_i S_i = u_2 S_2 \quad \rightarrow \Delta \text{ la forme autorise } F < 0 \text{ c'est un peu probablement des erreurs de hypothese ...}$$

Chapitre 4: Écoulement à bas Reynolds.

mardi 3 décembre 2024 16:38

$$Re = \frac{\rho UL}{\eta}$$

$Re \ll 1$ dans 2 cas typiques:

- Ecoulement macroscopique très visqueux (ex: Glacier $\eta \approx 10^{-2} \text{ Pa.s}$)
verre $\eta \approx 10^{13} \text{ Pa.s}$
(au continuiel $\eta \approx 10 \text{ Pa.s}$)

- Ecoulement microscopique (ex: Bactérie dans l'eau) $Re = \frac{10^3 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6}}{10^{-3}} = 10^6$

I - Équation de Stokes

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} P + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \left(\frac{\eta}{\rho} \right) \Delta \vec{v} - \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{g}$$

Eq de diffusion avec un coefficient de diffusion $D = \frac{\eta}{\rho}$

viscosité cinématique avec un terme de source.

→ éq. linéaire → on peut utiliser la superposition
+ unicité de la solution.
+ réversible.

, si on veut comparer $\rho \frac{\partial v}{\partial t}$ et $\eta \Delta v$

$$N = \frac{\left| \rho \frac{\partial v}{\partial t} \right|}{\left| \eta \Delta v \right|}$$

avec $U = \text{vitesse caract}$

$L = \text{longeur caract}$

$T = \text{temps caract}$

"Temps de diffusion"

$$\rightarrow N = \frac{\rho U T}{\eta L^2} = \frac{\rho / \rho L^2}{T} = \frac{L^2 / D}{T}$$

Si $T \gg \frac{L^2}{D}$ donc temps caract \gg temps de diffusion.

On est alors dans un régime quasi statique où Stokes devient

$$\vec{v} = \eta \Delta \vec{v} - \vec{\nabla} P + \rho \vec{g} \quad \text{avec } \vec{v}(R, t) \quad P(R, t)$$

une balle qui tombe :

$$\text{Diagramme d'une balle avec forces : } \vec{g} - \vec{\xi} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Si régime quasi stationnaire stable : $\vec{v}_{\infty} = \frac{m}{\xi} \vec{g}$

Si $\vec{g} \rightarrow -\vec{g}$ $\vec{\xi} \rightarrow \vec{0}$ \Rightarrow système renversable mais pas reversible car dissipation de l'énergie à charge instant.

Ici \vec{v} atteint sa valeur de saturation qui équilibre les forces de pression et volumique

Si on inverse P et \vec{g} , on inverse \vec{v}

\Rightarrow l'écoulement est renversable mécaniquement mais pas réversible thermodynamiquement car on dissipe continuellement de l'énergie.

$$\begin{aligned} \text{Puissance dissipée par unité de volume} &= \nu \eta [e] : [e] \\ &= \nu \eta \sum_i e_{ij}^2 \end{aligned}$$

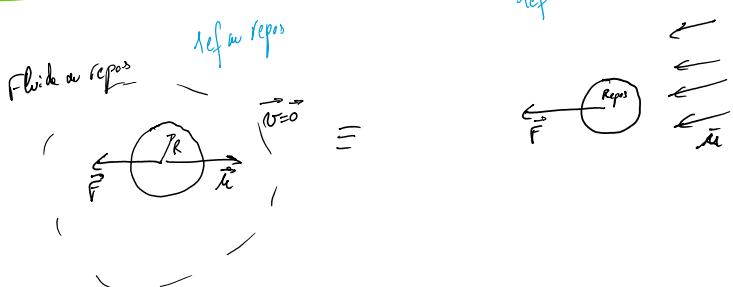
Petit rappel du modèle de Langevin :

particule de maïzena dans l'eau qui subit une force aléatoire

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = F(t) - \xi \vec{v} \quad \vec{v} \text{ variable aléatoire liée à } \xi \rightarrow \text{fluctuation/dissipation.}$$

II - Force de frottement sur une sphère

1) Formule de Stokes



On veut résoudre :

$$\nabla P = \eta \Delta \vec{v} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{v}(r=R) = \vec{0} \\ \vec{v}(r \rightarrow \infty) = \vec{U}_{\infty} \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{incompressible}) \end{cases}$$

1^{ere} étape : $\Delta P = 0$ (car Δ est divexe, $\operatorname{div}(\vec{v}) = \Delta$ et $\operatorname{div}(\Delta \vec{v}) = \Delta(\operatorname{div} \vec{v}) = 0$)

2^{eme} étape : intégrer $\Delta \vec{v} = \frac{1}{\ell} \nabla P$

3^{eme} étape : $\vec{F} = \int \vec{E} \cdot \vec{n} \cdot dS$ très long.

On trouve F en utilisant que pour un fluide visqueux

On trouve F en utilisant que pour un fluide visqueux

$$C_x = \frac{F}{\rho \mu^2 S} \approx \frac{1}{Re}$$

$$\Rightarrow F_C \left(\frac{\mu \pi R^2 L}{\rho \mu R} \right) = \pi \rho R \mu$$

$$\Rightarrow \vec{F} = -A \pi \rho R \vec{\mu}$$

Si on fait le calcul complet horrible $A=6$.

$$\rightarrow \boxed{\vec{F} = -6 \pi \rho R \vec{\mu}} \quad \text{dans langage du cap} \quad \frac{d\vec{F}}{dt} = \vec{F}(t) - 6 \pi \rho R \vec{\dot{\mu}}$$

Si on veut parler de distance d'arrêt:

$$E_C = \frac{1}{2} \rho_s \mu^2 \cdot V \stackrel{\text{force de frottement}}{\approx} \underbrace{6 \pi \rho R \mu \cdot \Delta x}_{\text{distipe sur } \Delta x \text{ tout } E_C}$$

$$\rightarrow \Delta x \propto \rho_s \frac{\mu R^2}{\eta}$$

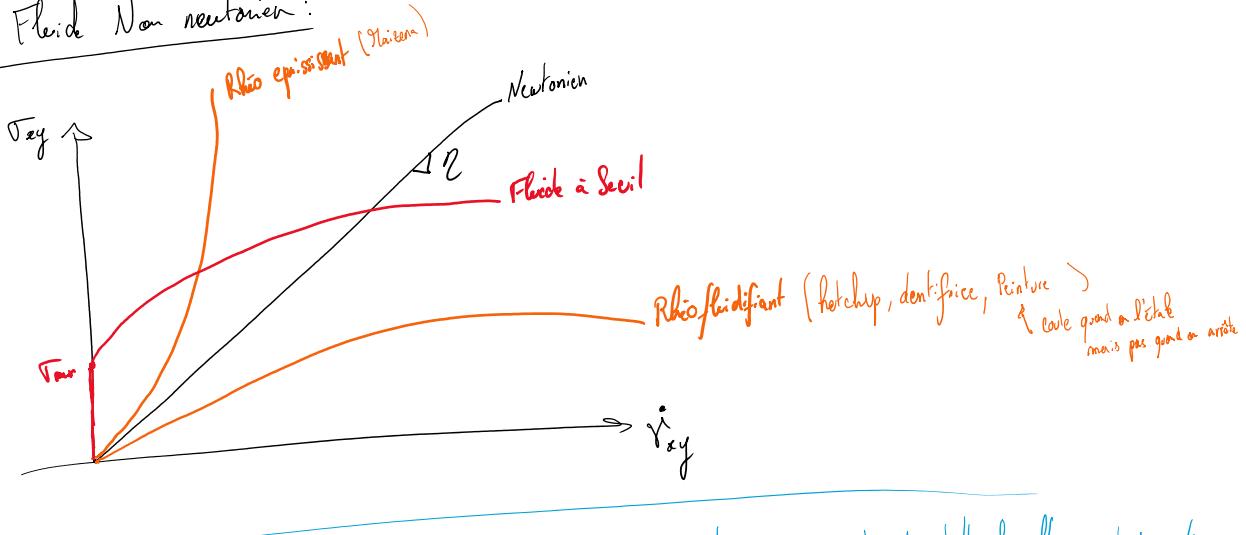
$$\propto \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\mu R}{\eta} \cdot R$$

$$\propto \frac{\rho_s}{\rho} Re \cdot R \approx \text{infiniment petit}$$

(à l'inverse si fluide parfait $\Delta x \rightarrow \infty$ d'après la formule de ferme d'énergie pour $(\Delta^2, \nabla \Delta^2)$)

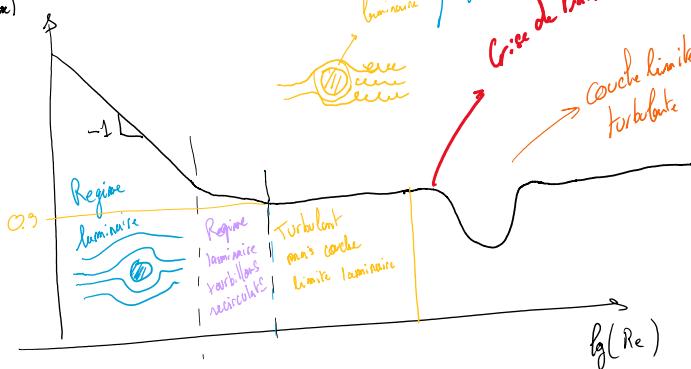
Parathèse

Fluide Non newtonien:



Existe une balle de golf dans l'air

$\log(\alpha)$



④

⑤

couche limite
lumineuse

se regime
resout le paradoxe
de d'Alambert.

application

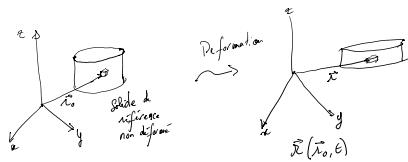
des bras des balles de golf servent à éviter

cette crise de traînée pour que la balle va
plus loin



flot de
champ
ne boule en étant pas //

I) Loi de Hooke généralisée



2 différences avec les fluides :

$$1-\text{Approche lagrangienne: } \vec{r}(\vec{x}_0, t) = \vec{x}(x_0, t) - \vec{r}_0$$

Champ de déplacement:
le déplacement à l'instant t de la particule en \vec{x}_0 dans
l'état de référence

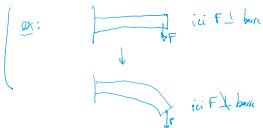
$$\Rightarrow \vec{u}_t = \partial_t \vec{r}_0, \quad \vec{a}_t = \partial_t^2 \vec{r}_0$$

On suppose que $\|\vec{u}\| \ll 1$, ce qui permet de faire tous les calculs dans le solide de référence (domaine élastique petit déformation).

On suppose que la force se répartit dans l'état de référence
pas ou pas régulièrement

$$\vec{F}_{int} = \int_V \sigma(\vec{x}_0, t) \cdot \vec{n} \, dV$$

solide de référence



et la variation de la quantité de mouvement

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{x}_0) \vec{v}_t(\vec{x}_0, t) \, dV$$

\vec{v}_t étant par conséquent dépendant de t et par conséquent hypothèse valable dans état de ref. pl?

$d\vec{v}_t = f(\vec{x}_0) \, dV$ si $\rho(\vec{x}_0, t) \Rightarrow dV(t)$ par conséquent conservé.

$$\int_V \rho \frac{\partial \vec{v}_t}{\partial t} \, dV = \int_V dV \vec{f} \, dV + \int_V \vec{g} \, dV$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{\partial \vec{v}_t}{\partial t} = \operatorname{div}(\vec{f}) + \vec{g}}$$

$$2-\text{La constante dépend de la déformation } [\epsilon] \text{ et pas de la cause de déformation}$$

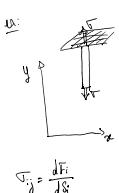
$$[\sigma] = [C] : [\epsilon]$$

taux 3,3,3,3
de constante élastique

Le solide isotrope n'a que 3 coefficients indépendants et

$$[\sigma] = \lambda \operatorname{Tr}[\epsilon] [G] + 2\mu [E]$$

avec (λ, μ) coefficients de Lévy



$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

coeff de Poisson ν \rightarrow si on tire le solide il s'allonge \rightarrow sous une compression

E = module d'Young \rightarrow loi de Hooke

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \nu E & -\nu E & 0 \\ -\nu E & \nu E & 0 \\ 0 & 0 & \nu E \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = \lambda [1-2\nu] \frac{1}{E} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + 2\mu \frac{1}{E} \left[\begin{array}{ccc} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \lambda (1-2\nu) \frac{1}{E} - 2\mu \nu \frac{1}{E} \\ 0 = \lambda (1-2\nu) \frac{1}{E} + 2\mu \nu \frac{1}{E} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\mu\nu = \lambda(1-2\nu) \\ E = \lambda(1-2\nu) + 2\mu \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}}$$

petite discussion sur cisaillement et saillant $\Rightarrow \operatorname{Tr}[\epsilon] = 0$ mais

en général trace of diag de Tr[epsilon] correspond à un cisaillement pur indépendant de la rotation \Rightarrow cisaillement dans le repère \Rightarrow $\operatorname{Tr}[\epsilon] \neq 0$ mais

$$\Rightarrow \boxed{E = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \text{ et } D = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}}$$

et on peut écrire la loi de Hooke

$$\boxed{[\sigma] = \frac{E}{1+D} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{Tr}[\epsilon] [\epsilon] + [\epsilon] \right)}$$

de même on montre

$$\begin{cases} G = \mu \\ \text{et } \beta = \lambda + \frac{2}{3}\mu \end{cases}$$

II - Équation de Navier

$$\text{on a } \rho \ddot{\epsilon}_{ij} = \operatorname{div}[\sigma] + f_j^i \quad \text{et} \quad \epsilon_{ij} = \frac{E}{1+D} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \operatorname{Tr}[\epsilon] [\epsilon] + [\epsilon] \right) \quad \text{et} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Après calculs,

$$\boxed{\rho \frac{\partial^2 \vec{\epsilon}}{\partial t^2} = \frac{E}{2(1+D)} \left(\Delta \vec{u} + \frac{1}{1-2\nu} \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} \right) + \vec{f}} \quad \text{Équation de Navier.}$$

→ équation linéaire → méthode de séparation de variables → inconnue quasi-telle le temps →

recherche avec:

en symétrie cylindrique ou sphérique.



Propriétés de l'équation:

- linéaire ⇒ méthode de séparation de variables et principe d'uperposition.
- Réversible ⇒ si \vec{u} (x_i, t) est solution, \vec{u} ($x_i, -t$) est aussi solution.

Ex: Un câble tendu sans relief de ses propres poids. De combien s'allonge-t-il?
 $\Omega = \mathbb{R}^2 = \begin{cases} \lambda_x(x, z) \\ \lambda_y(x, z) \\ \lambda_z(z) \end{cases} \rightarrow \text{irréductible.}$
 donc on cherche \vec{u} qui vérifie l'éq. aux gouv. appr.
 \Rightarrow on suppose $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_z(z) \end{pmatrix}$

$$\Delta \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \operatorname{div} \vec{u} = \partial_z \lambda_z \quad \vec{\nabla} \operatorname{div} \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_z^2 \lambda_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{A l'équation, } & \underbrace{\frac{E}{(1+\nu)} \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\partial^2 \lambda_z}{\partial z^2} + f_z = 0}_{\text{correspond à dire } \rho = 0} \\ & \text{le câble est donc } z=0 \text{ ce qui est une condition à la base.} \\ & \lambda_z(0) = -\frac{f_z}{2E} z^2 + A + B \\ & \lambda_z(L) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ & \lambda_z(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ & \lambda_z(z) = -\frac{f_z}{2E} z^2 \\ & A = \frac{f_z L^2}{E} \Rightarrow \lambda_z = \frac{f_z}{E} z \left(-\frac{z}{2} + L \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta L = \frac{f_z}{E} L^2}$$

Autre méthode:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{d(u)}{dz} = \frac{\sum}{E} = \frac{f_z}{E}$$

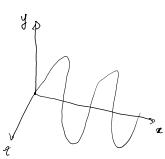
$$\delta L = \int_0^L d(u) dz = \int_0^L \frac{f_z}{E} (L-z) dz$$

III - Ondes Elastiques



On regarde une onde plane dans $(0xy)$
se déplaçant le long de (Ox)

III - Undes longitudinales



On regarde une onde plane dans (Oxy)
se déplaçant le long de (Ox)

$$\vec{u} = \begin{cases} u_x(x, t) \\ u_y(x, t) \\ 0 \end{cases}$$

$$\Delta \vec{u} = \begin{pmatrix} \partial_x^2 u_x \\ \partial_y^2 u_x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \partial_x \vec{u} = \partial_x u_x \quad \nabla^2 \vec{u} = \begin{pmatrix} \partial_x^2 u_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho \left(\ddot{\vec{u}}_g \right) = \frac{E}{\nu(1+\nu)} \left(\left(\partial_x^2 u_x \right) + \frac{1}{1-\nu} \left(\partial_y^2 u_x \right) \right)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho \ddot{u}_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \partial_x^2 u_x \quad \rightarrow \text{onde de compression} \\ \rho \ddot{u}_y = \frac{E}{\nu(1+\nu)} \partial_y^2 u_x \quad \rightarrow \text{onde de cisaillement} \end{array} \right. \text{ qui se déplace à des vitesses différentes}$$

on peut noter que compression > cisaillement

Deux équations d'onde:

- Onde de compression avec une vitesse $c_p = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}$
onde longitudinale
- Onde de cisaillement avec une vitesse $c_t = \sqrt{\frac{E}{\nu(1+\nu)\rho}}$
onde transversale

Un solide isotrope est stable si: $\nu < \frac{1}{2}(1-\nu)$
 $1+\nu > 0 \Leftrightarrow |\nu| < 1$

et soit $\begin{cases} 1-\nu > 0 & \nu < 1 \\ 1-2\nu > 0 & \nu < \frac{1}{2} \end{cases}$ soit $1-\nu < 0 \quad \nu > \frac{1}{2}$

cliquez sur $-1 < \nu < \frac{1}{2}$ mais pas $\nu > \frac{1}{2}$ alors:

\hookrightarrow $\nu > 0$ & matériau instable au pression.

Exemple: Une bouteille qui court, la pression fait verticalement pression?

$F_x = P \cdot \pi R^2$
 $T_{xz} = \frac{P \cdot \pi R^2}{2\pi R \cdot e} = \frac{P}{2} \frac{R}{e}$
 $\sigma_{xz} = \frac{P(L+2R+TR^2)}{2\pi R \cdot e} \sim \frac{P(L+2R^2)}{2\pi R \cdot e} \approx \frac{P(R^2)}{e} \Rightarrow$ contrainte 2 fois plus grande selon $x \Rightarrow$ goutte verticalement.



**MINISTÈRE
NATIONAUX
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE,
DU LOGEMENT
ET DES SPORTS**

EAE PHP 1

SESSION 2022

**AGREGATION
CONCOURS EXTERNE**

Section : PHYSIQUE-CHIMIE
Option : PHYSIQUE

COMPOSITION DE PHYSIQUE

Durée : 5 heures

Calculatrice autorisée selon les modalités de la circulaire du 17 juillet 2021 publiée au BOEN du 29 juillet 2021.

L'usage de tout ouvrage de référence, de tout dictionnaire et de tout autre matériel électronique est rigoureusement interdit.

Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'impression, vous devez le signaler très littéralement sur votre copie, en préparant la correction et pourrainsi l'apporter au corrigéuse. De même, si cela vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, vous devez le/les mentionner également.

NB : Conformément au principe d'anonymat, votre copie ne doit comporter aucun signe distinctif, tel que nom, signature, origine, etc. Si le travail qui vous est demandé contient notamment en la rédaction d'un projet ou d'une note, vous devrez impérativement vous absenter de la copie ou de l'écran.

Tournez la page S.V.P.

INFORMATION AUX CANDIDATS

Vous trouverez ci-après les codes nécessaires vous permettant de compléter les rubriques figurant en en-tête de votre copie.

Des codes doivent être reportés sur chacune des copies que vous remettrez.

Candidat	Section/option	Épreuve	Matière
EAE	1500A	101	0385

- 2 -

Quelques propriétés des vitrages d'habitation

Ce sujet s'intéresse principalement aux propriétés mécaniques, optiques, et acoustiques du verre utilisé dans les vitrages d'habitation. Ces propriétés, dont certaines peuvent être contrôlées, sont des éléments essentiels du confort domestique qui mettent en jeu une physique riche et variée.

Les trois parties du problème sont indépendantes.

Le candidat notera que certaines questions, régées par une barre en marge, sont moins guidées et exigent des réponses nécessitant une prise d'initiatives : les réponses correctement argumentées, même non abouties seront valorisées.

La clarté de la rédaction et la présentation seront prises en compte dans l'évaluation.

Notations :

- En un point M de l'espace, dans un repère d'origine O , on note $\vec{r} = \vec{OM}$ le vecteur position.
- On note λ le nombre complexe tel que $\lambda^2 = -1$.

- La grandeur complexe associée à une fonction périodique dépendant du temps de façon harmonique, on note en la soulignant la grandeur complexe associée.

On note par exemple $f(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{f}(t)\}$, avec $\tilde{f}(t) = f_0 e^{i\omega t}$ pour la grandeur $f(t) = f_0 \cos(\omega t)$.

On pourra noter que les représentations complexes de fonctions sinusoidales sont les seules qui répondent à cette convention. Les autres grandeurs sont associées à des lettres non soulignées. Par exemple, un indice de refraction complexe sera représenté par la lettre n , non soulignée, même si sa partie imaginaire n'est pas nulle.

Formulaires :

$$\text{Opérateurs vectoriels : } \begin{aligned} \vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}\vec{A}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{A}) - \vec{\nabla}(\vec{A}) \\ \operatorname{div}(\operatorname{grad}f) &= \Delta f \end{aligned}$$

- On rappelle le développement limité suivant, à l'ordre 2 en ε : $(1 + \varepsilon)^a = 1 + a\varepsilon + \frac{a(a-1)}{2}\varepsilon^2$.

Constantes et valeurs numériques :

Fonctionnel électrique du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$

Fonctionnel magnétique du vide : $\mu_0 = 1,27 \times 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{A}^{-2}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Constante de Planck : $\hbar = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Masse de l'électron : $m_e = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

Charge de l'électron : $q_e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Constante de Boltzmann : $k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Constantes des gaz parfaits :

L'air est considéré comme un gaz parfait de coefficient $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$ et de masse

molaire $M = 29 \text{ g/mol}$.

Valeurs numériques de grandeurs liées au verre :

Grandeur physique	Notation	Valeur numérique
Masse volumique	ρ_v	$2,5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
Modèle d'Young	E	70 GPa
Célérité des ondes sonores	c_s	$5,5 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

1

Tournez la page S.V.P.

**I. Le verre, milieu de propagation des ondes électromagnétiques**

- 1) Rappeler les équations de Maxwell vérifiées par les champs électriques \vec{E} et magnétiques \vec{B} dans le vide, en l'absence de charges et de courants.

Obtenir l'équation de D'Alembert de propagation des champs électriques \vec{E} et magnétiques \vec{B} dans le vide, en développant les calculs qui portent sur un de ces deux champs, et donner l'expression de a .

Dans le cas d'une onde électromagnétique plane progressive harmonique de pulsation ω , se propageant dans le vide, de vecteur d'onde \vec{k} , d'amplitude complexe \tilde{E}_0 , écrire le champ électrique $\underline{E}(M, t)$. Obtenir la relation de dispersion.

- 2) On admet que le verre est un dielectrique linéaire homogène isotrope.

Définir chacun de ces 4 mots écrits en caractères gras. Expliciter alors le lien entre champ électrique \vec{E} et polarisation volumique ρ .

Dans un milieu donné tel que le verre, on considère en bonne approximation que la polarisation du milieu est essentiellement électrique. Pour étudier l'interaction du champ électromagnétique avec les charges liées au milieu, on utilise ci-dessous le modèle classique nécessaire de l'électrostatique élastiquement lié, proposé par A. Lorentz dans lequel :

- le mouvement des électrons est non relativiste ;
- les électrons d'un atome centré sur l'origine de l'espace sont soumis de la part du reste de l'atome à une force de rappel élastique $\vec{f} = -K\vec{r}$, où K est une constante ;
- les phénomènes dissipatifs d'énergie sont pris en compte sous la forme d'une force $\vec{f}' = -\frac{\alpha}{\tau}\vec{v}$ où τ est un temps de relaxation et \vec{v} le vecteur vitesse.

On s'intéresse au domaine spectral allant de l'ultra-violet (UV) au proche infrarouge (IR).

- 3) Montrer que dans la gamme de longueurs d'onde considérée, le champ électrique de l'onde est pratiquement uniforme à l'échelle des atomes constitutifs le verre.

Comparer en ordre de grandeur la composante magnétique de la force de Lorentz exercée par une onde électromagnétique sur un électron à la composante électrique, et conclure.

- 4) Écrire l'équation du mouvement d'un atome sous la forme

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{m_e E}{Q} \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = \frac{\vec{E}_0}{m_e} \vec{E},$$

où \vec{E} est le champ électrique de l'onde auquel l'atome est exposé. Donner l'expression et la signification concrète des paramètres ω_0 et Q .

Le milieu étudié est globalement neutre, contenant N charges libres par unité de volume. Dans ce modèle simple, on assimile le champ électrique local au champ de l'onde électromagnétique dans le verre.

- 5) Exprimer le moment dipolaire \vec{p} associé à une charge induit par le champ électrique.

Pour une onde électromagnétique monochromatique de pulsation ω , déduire qu'en notation complexe, le vecteur polarisation volumique \underline{P} peut s'écrire sous la forme $\underline{P} = \chi_0 \underline{E} \underline{E}$, avec :

$$\chi_0 = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\omega_0}{Q\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}.$$

Normer χ_0 et exprimer χ_0 en fonction de ω_0 et de la pulsation plasma $\omega_p = \sqrt{\frac{\omega_0}{m_e}}$.

2

On se rappelle que dans un diélectrique il apparaît des charges volumiques de polarisation $\rho_{pol} = -\operatorname{div}(\vec{P})$ et des courants volumiques de polarisation $j_{pol} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$.

6) Rédiger les équations de Maxwell dans ce diélectrique, en régime sinusoidal forcé. Montrer qu'elles prennent la forme de la question 1) en remplaçant ϵ_0 par $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, et définir ϵ_r , grandeur complexe, en fonction de χ . Donner le sens et l'unité de cette grandeur.

On note $\vec{k} = k(\omega)\vec{u}_z$ la vecteur d'onde (complexe) d'une onde plane progressive de pulsation ω se propageant dans la direction \vec{u}_z .

7) Déterminer la relation de dispersion en exprimant $k^2(\omega)$ en fonction de ϵ_r , ω et c .

8) Définir l'indice optique complexe du verre, noté n .

On peut écrire, en général, $n = n_1 - i n_2$ avec n_1 et n_2 réels positifs dépendant de ω . À partir d'une discussion sur les phénomènes de propagation et d'absorption des ondes électromagnétiques, préciser le sens concret que l'on peut donner aux paramètres n_1 et n_2 .

L'onde spectrale du verre montre que la pulsation caractéristique ω_0 des verres utilisés en vitrage d'habitation, où ω_0 est la pulsation définie question 4), correspond à une longueur d'onde notée λ_0 d'environ 100 nm, et que la valeur de Q est très supérieure à 1.

9) À l'aide des courbes de $n_1(\lambda)$ et $n_2(\lambda)$ issues du modèle de l'émission élastiquement liée (voir figure 1), expliquer la transparence du verre dans la visibilité et la proche infrarouge, ainsi que l'absorption partielle dans le domaine ultra-violet. Justifier que dans le domaine visible, on peut écrire approximativement $n \equiv n_1$.

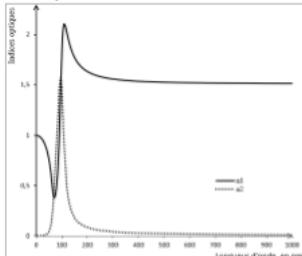


FIGURE 1 - Indices optiques d'un vitrage d'habitation dans le modèle de l'émission élastiquement liée.
Courbes tracées pour $Q=4$ (pas souci de commodité de lecture)

5

Tournez la page S.V.P.

10) Retrouver, dans le cadre du modèle simple développé ci-dessus et dans le cas d'une onde dans le domaine visible, la loi de Cauchy donnant l'indice de refraction d'un verre en fonction de la longueur d'onde λ :

$$n = n_0 + \frac{S}{\lambda^2}$$

Exprimer les constantes n_0 et S en fonction de χ_0 et χ_0' .

On souhaite vérifier expérimentalement la loi de Cauchy, en étudiant la dispersion de la lumière par un prisme de verre droit. On utilise pour cela un goniomètre, dont la photographie est donnée en figure 2 ci-dessous.

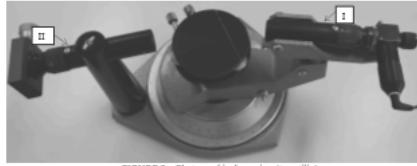


FIGURE 2 - Photographie du goniomètre utilisé

11) Donner le nom et décrire succinctement le rôle et le principe de réglage des éléments identifiés par les règlets I et II dans la photographie de la figure 2.

Le goniomètre est utilisé avec une lampe à vapeur de mercure, qui émet 6 raies spectrales visibles, dont on donne les longueurs d'onde dans le tableau 1.

λ en μm	0,4047	0,4078	0,4358	0,5461	0,5770	0,5791
TABLEAU 1 - Longueurs d'onde des 6 raies visibles d'une lampe à vapeur de mercure						

12) Sur la plateforme du goniomètre, on dispose le prisme, d'angle au sommet δ opposé à sa base. Grâce au schéma d'un rayon lumineux incident avec l'angle i sur une face d'entrée, traversant le prisme et sortant de la face de sortie, définir l'angle D de déviation.

Préciser, sans le résoudre, mais en le justifiant et en précisant les notations utilisées, un système d'équations qui permet de déterminer D si l'angle d'incidence i et l'indice du verre sont connus (l'indice de réfraction de l'air est pris égal à 1).

On peut montrer que l'angle de déviation D admet pour chaque longueur d'onde λ un minimum de déviation : lorsque l'angle d'incidence i varie à longueur d'onde λ fixée, on note ce minimum $D_m(\lambda)$.

13) Sans calcul, expliquer succinctement pourquoi il est préférable de mesurer l'angle de déviation minimum plutôt que l'angle de déviation obtenu pour une incidence quelconque.

4

On estime que le minimum de déviation D_m est déterminé avec une incertitude de 6 minutes d'angle : $\Delta D_m = 6'$. Pour le prisme étudié, on mesure $A = 60^\circ 01'$, avec une incertitude négligeable.

Par ailleurs, on peut montrer que l'indice optique du verre n est relié au minimum de déviation par :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{A+D_m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

Un calcul de propagation d'erreur, non demandé ici, permet de déduire l'incertitude sur n , due par :

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{1}{2} \cotan\left(\frac{A+D_m}{2}\right) \Delta D_m$$

- 14) Faire l'application numérique de $\frac{\Delta n}{n}$ pour une valeur de $D_m = 72,0''$, et indiquer le nombre de chiffres significatifs adéquat pour n .

Des résultats expérimentaux avec une lampe à vapeur de mercure sont les suivants :

λ en μm	0,4047	0,4078	0,4358	0,5461	0,5770	0,7911
n	1,865	1,862	1,847	1,812	1,807	1,807

TABLEAU 2 – Résultats expérimentaux

Un code Python d'exploitation des données expérimentales du tableau 2 est fourni en annexe, à la fin du sujet. On rappelle que :

- la fonction "list.append(x)" ajoute x à la fin de la liste « liste ».

- la fonction "np.random.uniform(x,y)" tire aléatoirement avec une loi de distribution uniforme une valeur dans l'intervalle $[x,y]$.

Les lignes 24 à 35 de ce code permettent d'afficher les écarts entre les valeurs expérimentales de $n(1/\lambda^2)$ et les valeurs modélisées par la droite de tendance dont l'allure est donnée figure 3.

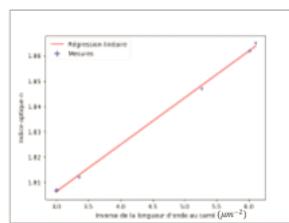


FIGURE 3 – Résultat du calcul statistique correspondant aux lignes 17 à 24
du code Python donné en annexe à la fin du sujet

5

Tournez la page S.V.P.

- 15) Préciser l'action de la ligne 17 du code en indiquant la signification et la nature des variables $nb8$, $inv12$ et N .

On donne, ci-dessous, les résultats affichés dans la console Python suite à l'exécution des lignes 31 et 35 du code Python.

```
Ecarts:
[0.0011238905577830832, 0.0001082148899295725, 0.00130912889927795066, 0.001021500082701108,
 0.00042857878766515484, -0.0008295640842528998]
Incertitudes:
[0.0005304585322433168, 0.0005370945929952658, 0.00066695575720773862, 0.00073875796907569,
 0.000747935210467482, 0.0007442074670646794]
```

- 16) Discuter, en argumentant, la validité du modèle affiché de la figure 3.

- 17) Décrire le principe de la méthode, dite de Monte Carlo, mise en œuvre dans le bloc de lignes 40 à 50.

- 18) D'écrire des histogrammes, donnés figures 4 et 5, les valeurs que l'expérience permet d'obtenir pour les paramètres n et B , la loi de Cauchy étant supposée valable. Préciser leur unité.

Estimer l'incertitude sur ces deux grandeurs, avec une courte explication.

Préciser la ligne du code qui définit le nombre d'itérations, ainsi que la valeur choisie ici pour ce nombre.

Décrire succinctement l'effet qu'aurait une multiplication par dix de ce nombre d'itérations sur les histogrammes.

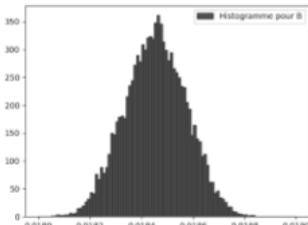


FIGURE 4 – Histogramme affiché après exécution de la ligne 35 du code Python
donné en annexe à la fin du sujet

6

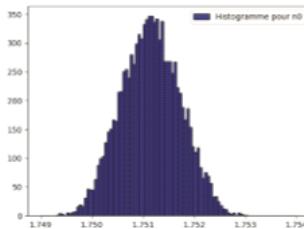


FIGURE 5 – Histogramme affiché après exécution de la ligne 55 du code Python donné en annexe à la fin du sujet

Une innovation récente permet de modifier de façon contrôlée les propriétés optiques d'un vitrage. Il s'agit d'une vitre electrochrome : plaque vitrée qui, comme la voit sur la figure 6, sous l'effet d'un champ électrique appliquée, peut passer d'un état clair (vitre incoloré) à un état foncé (vitre plus ou moins bleutée). Le changement de teinte est dû à la présence, au sein du vitrage, d'une couche de titaneoxyde de tungstène, appelé matériau electrochrome car son absorption optique dans une couleur (complémentaire au bleu) dépend de son degré d'oxydation, via la présence ou non de cations en son sein.



FIGURE 6 - Séquence de coloration d'une fenêtre electrochrome.

Source : "Electrochrome Verbundglas Gasmat EC", Guérinot

La figure 7 présente le dispositif à cinq couches minces inséré visuellement dans un vitrage electrochrome : sous l'influence d'un champ électrique produit par la tension appliquée entre deux électrodes conductrices (notées EC1 et EC2), des ions se déplacent à travers la couche electrolyte solide. Cette couche électrolyte

7 Tournez la page S.V.P.

est elle-même placée entre deux couches notées OCT (comme Oxydes Conducteurs Transparents), dont l'une est constituée d'un matériau electrochrome, qui, selon la présence ou non de cations, prend une coloration différente.

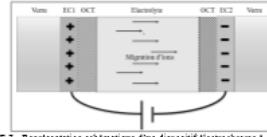


FIGURE 7 - Représentation schématique d'un dispositif electrochrome à cinq couches

Les couches OCT doivent posséder une excellente conductivité électrique de type métallique. Afin de mesurer la conductivité électrique γ_e d'une telle couche mince, d'épaisseur e_e , on procède selon la méthode des 4 points, représentée figure 8(a).

- On aligne quatre points, équidistants d'une distance a petite par rapport aux dimensions transversales de l'échantillon.
- On enroule un courant électrique d'intensité I continu entre la pointe 1 et la pointe 4 et on mesure la différence de potentiel U entre les points 2 et 3.

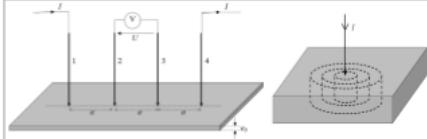


FIGURE 8 – (a) Principe de la méthode des 4 points. (b) Forme cylindrique des équipotentielles autour de la pointe 1 dans le cas d'une couche mince d'épaisseur e_e .

Dans le cas d'une couche mince d'épaisseur e_e négligeable par rapport aux dimensions transversales, on identifie que les équipotentielles créées par une pointe où circule un courant électrique sont de forme cylindrique (Figure 8(b)).

19) Trouver, par un raisonnement détaillé, que dans ce cas on aura accès à la valeur de la conductivité électrique γ_e du matériau par la relation :

$$\gamma_e = \frac{\ln 2}{m_e U}$$

20) Expliquer qualitativement le fait remarquable que la distance a n'intervient pas dans l'expression du rapport U/I que l'on peut déduire de la question précédente ?

5

On donne, figure 9, l'allure du facteur de transmission optique d'une surface-échantillon $S = 10 \text{ cm}^2$ d'un dispositif électrochrome à trionde de tungstène, mesuré à la longueur d'onde $\lambda = 550 \text{ nm}$, lorsqu'on le soumet alternativement aux différences de potentiels de coloration (-1V) et de décoloration (+1V).

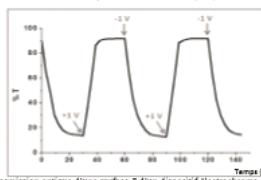


FIGURE 9 - Transmission optique d'une surface S d'un dispositif électrochrome, lors de l'application périodique, toutes les 30 secondes, des différences de potentiels de coloration et de décoloration

La figure 10 donne les variations de la quantité de charge électrique insérée dans la couche d'oxyde électrochrome, par unité de surface, en fonction de la différence de potentiel en régime stationnaire.

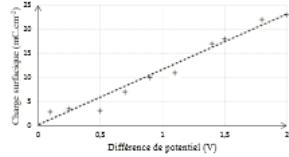


FIGURE 10 - Charge électrique insérée dans la couche électrochrome par unité de surface (en mC/cm^2) en fonction de la différence de potentiel en régime stationnaire

On cherche à modéliser (très simplement) cet élément de dispositif électrochrome à cinq couches, de surface $S = 10 \text{ cm}^2$, par un modèle de circuit RCL :

- chaque couche électronconductrice OCT, d'épaisseur $a = 250 \text{ nm}$, et de conductivité électrique mesurée par la méthode des quatre pointes, est équivalente à une résistance $R_s = 4 \Omega$;
- la migration des ions, en phase transitoire, est un facteur contribuant à limiter le temps de réponse du système. On modélise cette situation en admettant que la résistance R_i est en série avec une résistance R_s , essentiellement due à la résistance ionique de l'électrolyte.

21) Dans le modèle simple adopté, on suppose que la transmission optique du dispositif est une fonction affine de la tension aux bornes de la capacité du circuit RCL. Estimer la valeur de la résistance ionique R_i de l'échantillon de surface 10 cm^2 . Commenter le résultat.

[Tournez la page S.V.P.](#)

II. Isolation phonique des vitrages

On s'intéresse dans cette partie à la transmission du son à travers un vitrage qui sépare deux demi-espaces d'air, dans la gamme de fréquences de l'audible de 20 Hz à 20 kHz.

Dans un premier temps, on stabilis les résultats fondamentaux concernant la propagation du son dans l'air. On suppose l'air au repos, à la température $T_0 = 10^\circ \text{C}$, à la pression $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Il est assimilé à un gaz parfait de masse volumétrique $y = \frac{M}{c_p} = 1,4$ et de masse molaire $M = 29 \text{ g/mol}$.

Du point de vue thermodynamique, les évolutions de l'air associées aux ondes sonores sont considérées comme isentropiques et caractérisées par le coefficient de compressibilité isentropique χ_0 .

On n'intègre pas compte de la gravité.

En présence de l'onde acoustique, les champs de pression et masse volumétrique deviennent :

$$P(M, t) = P_0 + p(M, t) \quad \text{avec} \quad p(M, t) \text{ la surpression acoustique.}$$

$$\rho_{iso}(M, t) = \rho_0 + \mu(M, t)$$

Le champ des vitesses en norme $\vec{v}(M, t)$.

22) Préciser les hypothèses qui concernent « l'approximation acoustique ».

Ecrire l'équation d'Euler et l'équation de conservation de la masse.

En déduire deux équations linéarisées en $p(M, t)$, $\rho(M, t)$ et $\vec{v}(M, t)$ en justifiant avec soin les approximations utilisées.

D'autre part, on rappelle la définition de la compressibilité isentropique d'un fluide : $\chi_0 = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P}\right)_S$, que l'on linéarise également : $\chi_0 \cong \frac{\partial \rho}{\partial P}$.

Par découplage des équations ainsi linéarisées, on obtient $\Delta p = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0$ avec $\frac{1}{c_0^2} = \rho_0 \chi_0$.

23) Dans le modèle du gaz parfait, établir l'expression de la vitesse c_0 en fonction de la température T .

A l'aide des données numériques fournies en début d'énoncé, calculer c_0 pour $T_0 = 293 \text{ K}$.

On s'intéresse, dans toute la suite, au cas particulier d'une onde acoustique plane, harmonique de pulsation ω , progressive dans la direction \vec{u}_x , d'amplitude de surpression p_0 .

24) Quel(s) argument(s) peut-on donner en faveur de la restriction de l'étude à une onde acoustique sincèrement harmonique ?

25) On définit l'impédance acoustique dans le fluide par : $Z_0 = \frac{P_0}{c_0}$, dans le cas d'une onde progressive. Établir l'expression de cette impédance en fonction de ρ_0 et c_0 . Évaluer sa valeur dans l'air au repos.

26) On appelle $\vec{I} = p \vec{v}$ le vecteur de Poynting acoustique. Faire valoir sa signification physique.

L'intensité sonore I est donnée par la relation $I = \langle |\vec{I}| \rangle$, où $\langle \cdot \rangle$ représente l'opération de moyenne temporelle.

27) Exprimer l'intensité sonore I en fonction de ρ_0 , ρ_0 et c_0 .

28) Pour un niveau sonore de 40 dB, c'est-à-dire une intensité sonore $I_0 = 10^{-10} \text{ W.m}^{-2}$, évaluer les amplitudes des grandeurs progressives associées à cette onde, p_0 pour la surpression, v_0 pour la vitesse et θ_0 pour la variation de température autour de T_0 . Commenter les valeurs obtenues.

On cherche à posteriori à justifier l'hypothèse d'évolution adiabatique réversible. On rappelle que dans un milieu homogène de diffusivité thermique D_{th} , le champ de température $T(M, t)$ vérifie l'équation de diffusion thermique :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - D_{th} \Delta T = 0.$$

29) Donner les étapes principales du raisonnement permettant d'établir cette équation de diffusion thermique, en identifiant les notions, lois et principes mobilisés. La réponse n'accorde pas une dizaine de lignes ; elle ne comportera pas de détails analytiques, mais pourra s'appuyer sur un schéma.

30) Justifier, à l'aide de grandeurs caractéristiques de temps, l'hypothèse d'évolution isotropique de l'air associée à une onde sonore. On donne la valeur numérique de la diffusivité thermique de l'air $D_{th,air} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$.

On s'intéresse maintenant à la propagation du son dans un vitrage.

Dans le domaine de températures usuellement rencontrées dans les applications domestiques, le verre est solide et parfaitement élastique qui obéit à la loi de Hooke. Celle-ci prévoit que la contrainte mécanique σ , définie comme une force par unité de surface, est liée à l'allongement relatif ε par une loi linéaire, qui s'écrit $\sigma = E \varepsilon$, où E est appellé module d'Euler.

31) En explicitant hypothèses et notations, mener le raisonnement qui conduit à établir l'équation de propagation de l'onde acoustique dans le vitrage.
Donner alors l'expression de la célérité de l'onde c , en fonction des paramètres.
Édouard de la valeur numérique tabulée de c , une valeur de E que l'on compare à celle tabulée.

La suite de cette partie s'intéresse à l'interaction acoustique à travers un vitrage. Pour simplifier, on limite ici l'étude à l'incidence normale. On envisage donc un vitrage plongé dans l'air au repos, les deux milieux de part et d'autre du vitrage étant considérés identiques dans cette étude (en particulier, pas de différence de température), assimilés à un gaz parfait de température T_0 , de pression P_0 , de masse volumique ρ_0 hors onde acoustique.

On peut montrer qu'aux fréquences considérées, on peut, en première approximation, négliger l'influence du châssis sur lequel est monté ce vitrage et considérer que celle-ci se déjoue sous la seule influence des ondes sonores existant de part et d'autre. En particulier, on peut considérer que les effets de l'élasticité du vitrage sont négligeables : l'épaisseur a est supposée constante et la simple vitrage vibre « en bloc » sans frottements.

On définit l'atténuation d'une onde à la traversée du vitrage par :

$$R = -10 \times \log\left(\frac{p_0}{p_i}\right), \text{ où } R \text{ est en décibel (dB).}$$

11

Tournez la page S.V.P.

Le vitrage est ici une lame de verre simple d'épaisseur a , homogène isotrope de masse volumique ρ_0 à la température T_0 . La direction normale à ce vitrage est \vec{n}_0 .

32) Pour les fréquences auditives et pour un vitrage uni d'épaisseur $a \sim 4 \text{ mm}$, justifier que l'on peut décrire la vitre comme une plaque mince (c'est-à-dire sans épaisseur) pouvant se déplacer selon \vec{n}_0 et de masse surfacique σ , que l'on exprime en fonction des données.

Le vitrage simple est soumis à une onde acoustique plane harmonique de fréquence f , d'amplitude de surpression $p_{0,i}$, incidente dans l'air des $x < 0$ dans la direction \vec{n}_0 . La vibration de la plaque mince induit l'existence d'une onde réfléchie de surpression $p_{0,r}$ et une onde transmise de surpression $p_{0,t}$.

33) Justifier que ces trois ondes sont harmoniques de pulsation ω et se propagent selon l'axe Oz. Soient les amplitudes complexes de surpressions $p_{0,r,i}$ pour l'onde réfléchie et $p_{0,t,i}$ pour l'onde transmise, écrire les couples de fonctions : $(p_{0,r}(x,t), \dot{p}_{0,r}(x,t))$, $(p_{0,t}(x,t), \dot{p}_{0,t}(x,t))$ et $(p_{0,i}(x,t), \dot{p}_{0,i}(x,t))$.

34) On note $w(r)$ la position complexe du vitrage autour de $x = 0$, $w(r)$ étant une fonction harmonique de pulsation ω et d'amplitude complexe w_0 . Montrer que l'on peut écrire : $-i\omega w_0 = 2p_{0,r} - 2i\omega x_0 w_0$

35) Obtenir la transmission acoustique $\frac{p_{0,t}}{p_{0,i}}$ et l'écrire sous la forme canonique de la fonction de transfert d'un filtre passe bas du premier ordre, dont on donnera l'expression de la fréquence de coupure f_c en fonction de Z_0 et G_0 . Calculer numériquement f_c .

36) Montrer alors que l'atténuation à travers le vitrage simple s'écrit : $R = 10 \log\left(1 + \left(\frac{Z_0}{G_0}\right)^2\right)$
Éclaircir le graphique R en fonction de $\log\left(\frac{Z_0}{G_0}\right)$ dans la copie, en faisant apparaître plusieurs décadres.

Décrire le comportement du simple vitrage prévu par ce modèle du point de vue de l'atténuation acoustique.

Comment faut-il choisir le simple vitrage pour une bonne atténuation acoustique ?

On s'intéresse désormais à un double vitrage, dont on veut modéliser l'atténuation acoustique. Pour simplifier, on envisage donc un vitrage plongé dans l'air au repos : les deux milieux de part et d'autre du double vitrage sont identiques dans cette étude, sans différence de température, assimilés à un gaz parfait de température T_0 , de pression P_0 , de masse volumique ρ_0 hors onde acoustique.

Le double vitrage est constitué de deux vitres identiques, parfaitement parallèles, chacune d'épaisseur a , séparées par un espace interne d'épaisseur d d'air, assimilé à un gaz parfait de température T_0 , de pression P_0 , de masse volumique ρ_0 hors onde acoustique. La situation est schématisée sur la figure 11.

L'influence du bâti est toujours négligée, l'excitation du système est une onde acoustique plane harmonique de fréquence f , d'amplitude de surpression $p_{0,i}$, incidente dans l'air des $x < 0$ dans la direction \vec{n}_0 , sous incidence normale donc.

Chacun des vitres vibre en bloc selon l'axe Oz :

- la vitre « à gauche » autour de $x = 0$ avec une amplitude $w_{0,0}(t) = w_{0,0} \exp(i\omega t)$
- la vitre « à droite » autour de $x = d$ avec une amplitude $w_{0,d}(t) = w_{0,d} \exp(i\omega t)$.

12

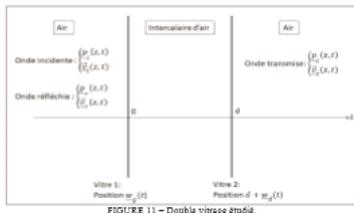


FIGURE 11 – Double vitrage étudié.

Conformément aux résultats précédents, l'épaisseur des vitres est représentée enille.

37) Justifier que l'on peut considérer que la pression dans la cavité est uniforme.

On note désormais \underline{u}_i la représentation complète de la suppression de l'onde acoustique dans la cavité intercalaire d'air.

38) Montrer que, dans l'hypothèse d'une évolution adiabatique, la suppression de l'air peut s'y exprimer par la relation :

$$\frac{p_i}{p_0} = \frac{\rho_0 c_0^2}{\rho_i c_i^2} \left(\underline{u}_i - \frac{p_i}{\rho_i c_i} \right)$$

Écrire les équations du mouvement des vitres à gauche et à droite.

Le double vitrage est analogue au système mécanique à une dimension de type « masse – ressort – masse » représenté sur la figure 12.

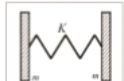


FIGURE 12 – Système équivalent masse – ressort – masse.

Les deux masses m sont identiques et correspondent à la masse d'une section S d'une face du vitrage. Le ressort qui les relie est de raideur K , sans masse, dans son domaine d'élasticité. On note $u_1(t)$ et $u_2(t)$ les déplacements des masses par rapport à leur position à l'équilibre, pour lequel le ressort a sa longueur à vide.

39) Écrire l'équation du mouvement de régime libre de chacune des deux masses. Exprimer enfin la raideur K_{eq} qui convient pour un système analogue au double vitrage, en fonction de ρ_0 , c_0 , d et s .

40) Déduire de la question précédente les modes propres de ce système, les commenter et montrer l'apparition d'une fréquence propre f_0 dont on donnera l'expression en fonction de K et m .

41) Dans l'approximation $\frac{s \pi n d}{\lambda} \ll 1$, des calculs non demandés aboutissent à l'expression suivante de la transmission acoustique $t_0 = \frac{p_{t0}}{p_{i0}}$ du double vitrage :

$$t_0 = \frac{\frac{1}{1 + \frac{4m}{Kd}}}{1 - \frac{4m}{Kd}}, \text{ qu'on peut donc ré-écrire } t_0 = \frac{1 + \frac{4m}{Kd}}{1 - \frac{4m}{Kd}}.$$

Comparer la fréquence f_0' associée à la pulsation ω_0 à la fréquence propre f_0 obtenue question 40).

42) Un graphique expérimental d'atténuation acoustique en fonction de la fréquence est reproduit figure 13, pour un vitrage double « 4 – 12 – 4 », soit deux vitres de verre d'épaisseur $s = 4 \text{ mm}$ avec un intercalaire d'air d'épaisseur $d = 12 \text{ mm}$.

En commentant la courbe R donnée sur cette figure, discuter de la validité de l'expression théorique de la transmission acoustique :

- Décrire le comportement au voisinage de f_0' : on dira à quel phénomène cela correspond pour le système analogique « masse – ressort – masse » et on évaluerà numériquement f_0' . Quel(s) phénomène(s) physique(s) non pris en compte dans le modèle limite(s) et ceci en réalité ?
- Déterminer le comportement asymptotique de l'atténuation acoustique R pour $f \ll f_0'$ et $f \gg f_0'$. Commenter l'accord entre expérience et modèle théorique.

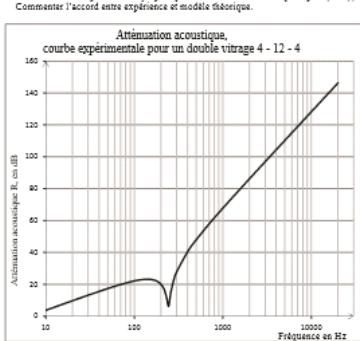


FIGURE 13 – Atténuation acoustique d'un double vitrage en fonction de la fréquence

III. Le verre, un matériau fragile

Dans le domaine des comportements uniaxiallement élastiques dans les applications domestiques, le verre est un solide « parfaitement » élastique qui obéit à la loi de Hooke sans qu'un comportement plastique grise fût décelé avant sa rupture. Celle-ci survient brutalement, sans avissement préalable, à l'endroit où une contrainte d'extension limite a été dépassée : c'est là le comportement caractéristique d'un matériau dit fragile.

Le comportement élastique d'un solide est le plus souvent caractérisé par le module d'élasticité E appelé aussi module d'Young et par le coefficient de Poisson ν .

On considère l'essai de traction unidirectionnelle schématisé sur la figure 14 : sur une éprouvette de verre de longueur initiale l et de section carrée, de côté $a = 1$ cm, on applique une force unidirectionnelle, uniformément répartie sur la section de l'éprouvette, et d'intensité $F = 700$ N.

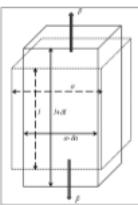


FIGURE 14 - Déformation d'une éprouvette de verre soumise à une traction unidirectionnelle

Le coefficient de Poisson est défini par la relation $\nu = \frac{a\epsilon}{\epsilon l}$ et il vaut 0,2 pour le verre.

La loi de Hooke prévoit que la contrainte σ , définie comme une force par unité de surface, est liée à l'allongement relatif $\frac{\Delta l}{l}$ par une loi linéaire, qui s'écrit $\sigma = E \frac{\Delta l}{l}$, où E est appelé module d'Young.

43) Donner la valeur numérique de l'allongement relatif $\Delta l/l$ mesuré ici.

Quand un verre est placé dans son châssis il peut être partiellement enserré. La partie insérée va donc s'échauffer plus fortement que la partie à l'ombre et, si l'écart de température est trop important, il peut y avoir une cassure dite « cassure d'origine thermique ».

Soit $\alpha = 3,9 \times 10^{-5} K^{-1}$ le coefficient de dilatation thermique linéique du verre. On considère l'éprouvette de verre de la figure 14, dont la longueur est maintenant maintenue inchangée par le châssis, lui-même supposé indéformable. On élève la température de l'échantillon de ΔT , de façon uniforme.

15

Tournez la page S.V.P.

44) Établir l'expression de la contrainte σ , qui s'exerce alors aux extrémités du verre, en fonction de α , E et ΔT . Calculer la valeur de l'écart de température provoquant la rupture de l'éprouvette, sachant que la contrainte longitudinale de rupture vaut $\sigma_{rupt} = -40$ MPa pour un verre courant (verre non trempé).

La surface du verre est très dure, seulement recouverte par des matériaux plus durs comme le diamant. Cependant c'est l'état de cette surface qui détermine la résistance mécanique du verre. Dès 1920 Griffith pointe l'existence de minuscules fissures, dites « failles de Griffith », sur la surface du verre. Celles-ci sont susceptibles de se propager, notamment en présence de petites quantités de vapeur d'eau, et c'est cette propagation qui conduit à la rupture du verre. On a pu observer, plus tard, l'existence de ces microfissures, ainsi que leur propagation grâce à la microscopie à force atomique.

Afin de verser l'expression mathématique de la contrainte de Griffith, nous nous limitions à l'exemple d'une plaque mince d'épaisseur b soumise à une contrainte de traction unidirectionnelle σ et dont la fissure est une entaille de faible profondeur $a < < b$, s'étendant sur toute l'épaisseur de la plaque (figure 15).

On peut montrer que la croissance de l'entaille, tout en maintenant fixes les points d'application des forces appliquées (morts fixes), a pour effet :

- une augmentation d'énergie $2\gamma_{fb}eb$, où γ_{fb} est un paramètre caractéristique de l'interface verre/air,
- la libération d'énergie $\frac{G_0}{2}$ emmagasinée dans le matériau : la zone soulignée de cette énergie apparaît en gris sur la figure 15.

Ainsi, dans le modèle de Griffith, l'enthalpie libre G de la plaque peut s'écrire :

$$G = G_0 - \frac{\pi a^2}{8E} + 2\gamma_{fb}eb,$$

où G_0 est l'enthalpie libre de la plaque avant apparition de la fissure.

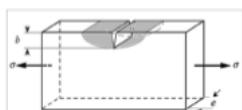


FIGURE 15 - Représentation schématique d'une plaque fissurée soumise à un essai de traction.

45) On considère que le système évolue en contact avec l'atmosphère, de température T_0 et de pression P_0 constantes. En début et en fin d'évolution, la plaque est en équilibre thermique et mécanique avec l'environnement. Montrer que l'enthalpie libre G de la plaque ne peut diminuer ou rester constante.

46) En raisonnant par analogie proposer une origine physique pour les deux termes énergétiques liés à la présence de la fissure : $\frac{\pi a^2}{8E}$ et $2\gamma_{fb}eb$. Comment s'appelle habituellement la constante γ_{fb} ?

47) Donner l'expression de la dimension b_* de la faille qui correspond à l'équilibre de celle-ci sous la contrainte σ . Discuter la stabilité de l'équilibre et décrire l'évolution prévisible d'une fissure de profondeur initiale $b=b_*$ et d'une autre de profondeur initiale $b>b_*$.

16

ANNEXE : Code Python (Questions 15 à 18)

```

011 #!/usr/bin/python
# coding: utf-8
012
013 import numpy as np
014 import math
015 import netplotlib.pyplot as plt
016
017 # Préparation des listes basées sur les valeurs expérimentales
018 Nef=[1.005, 1.002, 1.004, 1.012, 1.007, 1.007]
019 Lambdas=[0.4087, 0.4076, 0.4056, 0.5042, 0.5279, 0.5791]
020 InvL2=[1.711e-05, 7.711e-05, 3.443e-05, 4.045e-05, 4.014e-05]
021 InvL2w=[]
022 for i in range(0,6):
023     InvL2w.append((Lambdas[i]**2)*InvL2[i])
024
025 # Trace de la droite tendance et des points expérimentaux
026 resexp=np.polyfit(Nef,InvL2w,1)
027 xfitexp=np.linspace(1,1.01)
028 yfitexp= resexp[0]*xfitexp + resexp[1]
029 plt.plot(xfitexp,yfitexp,label='Régression linéaire')
030 plt.xlabel('inverse de la longueur d'onde au carreau')
031 plt.ylabel('inverse optique')
032 plt.legend()
033 plt.show()
034
035 # Calcul des incertitudes pour chaque point et affichage des valeurs
036 InvL2=[]
037 for i in range(0,6):
038     InvL2.append(resexp[0]*InvL2[i]+resexp[1]-Nef[i])
039 print('Ecarts :')
040 print(Ecarts)
041
042 # ***Monte-Carlo***
043 NbreIterations=1000
044 Ecarts=[]
045 for i in range(0,6):
046     a=InvL2[i]
047     for j in range(0,NbreIterations):
048         y_aleatoire=(a*InvL2[i])+np.random.uniform(-1,1)
049         valB_aleatoire=y_aleatoire-a
050         ValB.append(valB_aleatoire)
051
052 # Trace des Histogrammes
053 plt.figure(1)
054 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour B")
055 plt.hist(hist[0], range=[1.705, 1.755], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour B")
056 plt.legend()
057
058 hist= np.histogram(InvL2, bins = 100, color="red", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2")
059 plt.hist(hist[0], range=[0.398, 0.418], bins = 100, color="red", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2")
060 plt.legend()
061
062 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
063 plt.hist(hist[0], range=[0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
064 plt.legend()
065
066 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
067 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
068 plt.legend()
069
070 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
071 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
072 plt.legend()
073
074 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
075 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
076 plt.legend()
077
078 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
079 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
080 plt.legend()
081
082 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
083 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
084 plt.legend()
085
086 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
087 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
088 plt.legend()
089
090 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
091 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
092 plt.legend()
093
094 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
095 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
096 plt.legend()
097
098 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
099 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
100 plt.legend()
101
102 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
103 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
104 plt.legend()
105
106 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
107 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
108 plt.legend()
109
110 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
111 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
112 plt.legend()
113
114 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
115 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
116 plt.legend()
117
118 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
119 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
120 plt.legend()
121
122 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
123 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
124 plt.legend()
125
126 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
127 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
128 plt.legend()
129
130 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
131 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
132 plt.legend()
133
134 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
135 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
136 plt.legend()
137
138 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
139 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
140 plt.legend()
141
142 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
143 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
144 plt.legend()
145
146 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
147 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
148 plt.legend()
149
150 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
151 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
152 plt.legend()
153
154 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
155 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
156 plt.legend()
157
158 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
159 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
160 plt.legend()
161
162 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
163 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
164 plt.legend()
165
166 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
167 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
168 plt.legend()
169
170 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
171 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
172 plt.legend()
173
174 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
175 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
176 plt.legend()
177
178 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
179 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
180 plt.legend()
181
182 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
183 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
184 plt.legend()
185
186 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
187 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
188 plt.legend()
189
190 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
191 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
192 plt.legend()
193
194 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
195 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
196 plt.legend()
197
198 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
199 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
200 plt.legend()
201
202 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
203 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
204 plt.legend()
205
206 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
207 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
208 plt.legend()
209
210 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
211 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
212 plt.legend()
213
214 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
215 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
216 plt.legend()
217
218 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
219 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
220 plt.legend()
221
222 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
223 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
224 plt.legend()
225
226 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
227 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
228 plt.legend()
229
230 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
231 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
232 plt.legend()
233
234 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
235 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
236 plt.legend()
237
238 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
239 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
240 plt.legend()
241
242 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
243 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
244 plt.legend()
245
246 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
247 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
248 plt.legend()
249
250 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
251 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
252 plt.legend()
253
254 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
255 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
256 plt.legend()
257
258 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
259 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
260 plt.legend()
261
262 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
263 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
264 plt.legend()
265
266 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
267 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
268 plt.legend()
269
270 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
271 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
272 plt.legend()
273
274 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
275 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
276 plt.legend()
277
278 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
279 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
280 plt.legend()
281
282 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
283 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
284 plt.legend()
285
286 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
287 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
288 plt.legend()
289
290 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
291 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
292 plt.legend()
293
294 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
295 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
296 plt.legend()
297
298 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
299 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
300 plt.legend()
301
302 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
303 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
304 plt.legend()
305
306 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
307 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
308 plt.legend()
309
310 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
311 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
312 plt.legend()
313
314 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
315 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
316 plt.legend()
317
318 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
319 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
320 plt.legend()
321
322 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
323 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
324 plt.legend()
325
326 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
327 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
328 plt.legend()
329
330 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
331 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
332 plt.legend()
333
334 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
335 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
336 plt.legend()
337
338 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
339 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
340 plt.legend()
341
342 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
343 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
344 plt.legend()
345
346 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
347 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
348 plt.legend()
349
350 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
351 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
352 plt.legend()
353
354 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
355 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
356 plt.legend()
357
358 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
359 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
360 plt.legend()
361
362 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
363 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
364 plt.legend()
365
366 hist= np.histogram(Ecarts, bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
367 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="orange", edgecolor="black", label="Histogramme pour Ecarts")
368 plt.legend()
369
370 hist= np.histogram(ValB, bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
371 plt.hist(hist[0], range=[-0.005, 0.005], bins = 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour ValB")
372 plt.legend()
373
374 hist= np.histogram(InvL2w, bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w")
375 plt.hist(hist[0], range=[-0.0001, 0.0002], bins = 100, color="green", edgecolor="black", label="Histogramme pour InvL2w
```

```
49| wain.append(p1)
50| Valn.append(p2)
51|
52| # Trace des histogrammes
53| plt.hist(W1B, range=(0.810,0.819), bins =
54| 100, color="blue", edgecolor="black", label="Histogramme pour W")
55| plt.show()
56| plt.hist(W1B, range=(1.749,1.751), bins =
57| 100, color="red", edgecolor="black", label="Histogramme pour nB")
58| plt.legend()
59| plt.show()
```

17



Étude d'une membrane optomécanique

Ce sujet traite de divers aspects du domaine de l'optomécanique qui s'intéresse à l'interaction entre la lumière et un résonateur mécanique. Grâce à des mesures interférométriques, les mouvements du résonateur peuvent être observés avec une sensibilité prodigieuse, meilleure que l'atomètre (10^{-38} m) sur certains dispositifs. Avec une telle sensibilité, il est possible d'observer les fluctuations quantiques du résonateur. Cependant, ces dernières sont généralement masquées par le mouvement brownien provoqué par l'agitation thermique et il est nécessaire de fortement refroidir le résonateur pour observer son caractère quantique. La température à atteindre est généralement inférieure à celles accessibles par des techniques de cryogénie standard et l'on a recours à un refroidissement actif du résonateur.

Si la diversité des objets mécaniques qu'il est possible d'étudier est considérable, un des résonateurs les plus utilisés est une membrane diélectrique en nitre de silicium, fortement tendue, de surface de l'ordre de 1 mm^2 et d'épaisseur quelques centaines de nanomètres. La problématique est alors d'avoir un facteur de qualité mécanique et une réflectivité optique de ce système les plus grands possible.

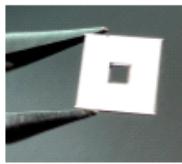


Figure 1: Membrane optomécanique : le cadre en silicium fait 5 mm de coté, la membrane carrée ultrafine au centre est quasiment parfaitement transparente.

Le problème se décompose en quatre parties très largement indépendantes. La première partie traite de l'aspect mécanique de la membrane et de son équilibre thermique. Cette partie se termine sur l'étude d'une technique de refroidissement actif permettant de réduire la température du résonateur au détriment d'une augmentation de son amortissement. La seconde partie s'intéresse à la mesure de l'amortissement de la membrane grâce à la technique de ring down qui nécessite l'extraction des quantités appelées quadratures du mouvement. La troisième partie étudie le profil spatial des modes de vibration mécanique ainsi que leur fréquence de résonance. Cette étude permet d'évaluer différents phénomènes d'amortissement tels que le rayonnement acoustique et les pertes intrinsèques dans le matériau. Enfin, la quatrième partie s'intéresse aux aspects optiques de la membrane considérée comme une couche fine diélectrique. On y étudie la possibilité de rendre la membrane extrêmement réfléchissante grâce à la gravure d'un cristal photonique.

1

Toutes les applications numériques seront données avec un seul chiffre significatif.

On donne :

Constante de Boltzmann	$k_B = 1,4 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Constante de Planck réduite	$\hbar = h/2\pi = 1,6 \times 10^{-34} \text{ Js}$
Vitesse de la lumière dans le vide	$c = 3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0 = 8,9 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$

Pour les caractéristiques de la membrane et de son environnement, on prendra :

Masse volumique du nitre de silicium	$\rho = 3200 \text{ kg m}^{-3}$
Epaisseur	$h = 100 \text{ nm}$
Largur	$a = 1 \text{ mm}$
Masse du mode fondamental	$M = 80 \text{ ng}$
Pulsion du mode fondamental	$\Omega_M = 2\pi \times 400 \text{ kHz}$
Masse volumique de l'air	$\rho_A = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$
Vitesse du son dans l'air à 300 K	340 ms^{-1}

Dans le problème, $\delta(x)$ désigne la distribution de Dirac, nulle partout sauf en $x = 0$ où elle diverge, avec la propriété que pour toute fonction f :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0)$$

On rappelle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(2\pi t/T)dt &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(2\pi t/T)dt = \frac{1}{2} \\ \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \cos a \cos b &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) + \cos(a+b)) \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} (\sin(a-b) + \sin(a+b)) \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2} (\cos(a-b) - \cos(a+b)) \end{aligned}$$

Dans le texte, on utilise les notations $\vec{X} = \frac{d\vec{A}}{dr}$ et $f' = \frac{df}{dr}$. Enfin, on rappelle que si $V(r)$ est un champ scalaire, $\vec{A}(r)$ un champ vectoriel, $f(x)$ une fonction d'une variable réelle et x_0 une constante réelle :

$$\begin{aligned} \vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{grad}} V &= \vec{0} \\ \vec{\operatorname{div}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} &= 0 \\ \vec{\operatorname{div}} \vec{\operatorname{grad}} V &= \Delta V \\ \vec{\operatorname{rot}} \vec{\operatorname{rot}} \vec{A} &= \vec{\operatorname{grad}} \vec{\operatorname{div}} \vec{A} - \Delta \vec{A} \\ \vec{\operatorname{div}} (\vec{V} \vec{A}) &= (\vec{\operatorname{grad}} V) \cdot \vec{A} + (\operatorname{div} \vec{A}) V \\ \vec{\operatorname{grad}} f(x_0 + \vec{u} \cdot \vec{r}) &= \vec{u} f'(x_0 + \vec{u} \cdot \vec{r}) \end{aligned}$$

2

1 Équilibre thermique de la membrane

Dans cette partie, on étudie les mouvements de la membrane induits par le couplage à son environnement. La membrane est assimilée à un oscillateur harmonique, constitué d'une masse M se déplaçant uniquement selon l'axe horizontal Ox , et d'un ressort sans masse, de raideur K . La position de la masse est repérée par son abscisse $x(t)$. La position de repos du système est à l'abscisse $x = 0$.

1. Faire un schéma du système équivalent à la membrane et écrire l'équation du mouvement de la masse en l'absence de frottement.
2. Donner la solution générale réelle de cette équation, en faisant intervenir la pulsation propre Ω_M du résonateur, que l'on exprimera en fonction des paramètres du système.

L'interaction de la membrane avec son environnement se traduit par une force de frottement visqueux

$$F_x = -M \Gamma \dot{x} \quad (1)$$

où Γ est le coefficient de frottement visqueux réel et strictement positif.

3. A quelle condition sur les paramètres Γ et Ω_M , peut-on encore parler d'un système oscillant ? Dans ce cas, exprimer la nouvelle pulsation Ω de résonance du système et montrer qu'au premier ordre en Γ/Ω_M , elle est égale à celle du cas non amorti.
4. Tracer $x(t)$. On fera apparaître sur le graphe les principales constantes de temps du problème.

La force de frottement visqueux provient du couplage avec l'environnement qui est à une température T non nulle et s'accompagne de l'introduction dans le système de fluctuations. Ce phénomène se traduit par une force supplémentaire aléatoire appelée force de Langevin. Sa composante selon l'axe du mouvement est notée F_T , c'est un bruit blanc gaussien avec les propriétés statistiques suivantes :

$$\langle F_T(t) \rangle = 0, \quad (2)$$

$$\langle F_T(t) F_T(t') \rangle = A_T \delta(t-t') \quad (3)$$

$$\text{avec } A_T = 2M\Gamma k_B T \quad (4)$$

où k_B désigne la constante de Boltzmann et où $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne statistique.

5. Que traduisent physiquement les équations 2 et 3 ?

3

La solution de l'équation différentielle d'un oscillateur amorti en présence d'une force extérieure $F_{ext}(t)$ autre que les forces de rappel et d'amortissement est donnée par :

$$\overbrace{x(t) = \int_0^t x(t-\tau) F_{ext}(\tau) d\tau + M [(\Gamma x(0) + \dot{x}(0)) x(t) + \ddot{x}(0) \dot{x}(t)]}^{1er terme} \quad (5)$$

$$\text{avec } x(t) = \frac{\sin(\Omega_M t)}{M\Omega_M} \exp\left[-\frac{\Gamma}{2}t\right] \quad (6)$$

6. Qualitativement, que représentent les deux termes dans l'expression de $x(t)$? Que traduisent les bornes d'intégration 0 et t dans le premier terme, en particulier pourquoi l'intégration ne se fait-elle pas de $-\infty$ à $+\infty$?
7. Que devient le second terme pour des temps t grands devant $1/\Gamma$? Vérifier alors que, dans le cas où la seule force extérieure est la force de Langevin, la valeur moyenne de la position, $\langle x(t) \rangle$, est nulle.
8. Toujours dans le cas où la seule force extérieure est la force de Langevin et pour des instants t suffisamment grands devant $1/\Gamma$, calculer les quantités $\langle x^2(t) \rangle$ et $\langle \dot{x}^2(t) \rangle$.

On pourra utiliser la relation suivante valable pour une fonction de plusieurs variables :

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(t,\tau) d\tau = f(t,t) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(t,\tau) d\tau \quad (7)$$

ainsi que

$$\int_0^{+\infty} x^2(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2M^2 \Omega_M^2 \Gamma} \quad (8)$$

$$\int_0^{+\infty} \dot{x}^2(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2M^2 \Gamma} \quad (9)$$

9. Définir l'énergie potentielle E_p et l'énergie cinétique E_c du résonateur et montrer que sous l'effet de la force de Langevin on a la relation :

$$\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (10)$$

10. Pour un oscillateur de pulsation $\Omega_M = 2\pi \times 400$ kHz et de masse $M = 80$ ng, à température ambiante, donner l'ordre de grandeur de l'amplitude moyenne des oscillations et la comparer à la taille d'un atome.

Malgré la très faible amplitude des fluctuations thermiques, celles-ci restent en pratique 3 à 4 ordres de grandeur plus importantes que l'amplitude des fluctuations quantiques que l'on cherche à observer dans les expériences d'optomécanique. Il est possible de diminuer les fluctuations

4

thermiques en modifiant la température du résonateur par une méthode active : on mesure la position de l'oscillateur et on applique une force de contre-réaction du type :

$$F_x(t) = -g_1 K x(t) - g_2 M \Gamma \dot{x}(t) \quad (11)$$

où g_1 et g_2 sont des constantes sans dimension caractérisant les gains de la chaîne de mesure et de contre-réaction.

11. En utilisant les équations (5) et (6) et en considérant $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$, montrer que le déplacement $x(t)$ du résonateur soumis à la force de Langevin et à la force supplémentaire F_x de contre-réaction, se met sous la forme

$$x(t) = \int_0^t \chi_\alpha(t-\tau) F_\alpha(\tau) d\tau \quad (12)$$

pour une fonction χ_α que l'on précisera.

12. En déduire que pour des gains g_2 positifs, l'énergie mécanique du résonateur correspond à celle d'un oscillateur à une température T' que l'on précisera. En déduire que l'on peut refroidir le résonateur au détriment d'une augmentation de l'amortissement.

2 Mesure du facteur de qualité par Ring Down

Dans le document scientifique 1 ci-dessous et pour les questions traitant d'électrocinétique, on utilise la notation j pour désigner le nombre imaginaire par tel que $j^2 = -1$.

Document scientifique 1 : Extrait de thèse

Pour un système mécanique, on définit les quadratures X_1 et X_2 du mouvement comme les composantes de la position sur les fonctions sinus et cosinus oscillant à une pulsation de référence Ω_{ref} .

$$x(t) = X_1(t) \cos(\Omega_{\text{ref}} t) + X_2(t) \sin(\Omega_{\text{ref}} t) \quad (1.4)$$

L'observation des quadratures correspond en fait à l'étude du mouvement dans un référentiel tournant à Ω_{ref} . Dans le cas d'un oscillateur harmonique de pulsation Ω_M , prendre la pulsation du référentiel tournant Ω_{ref} proche de (ou égale à) la pulsation Ω_M permet de s'affranchir dans le mouvement $x(t)$ de la partie purement oscillante et de n'étudier que l'évolution lente des quadratures. En effet, le temps caractéristique d'évolution de l'amplitude d'oscillation d'un mode du résonateur est l'inverse de son taux de relaxation Γ qui, pour un oscillateur harmonique faiblement amorti, est très petit devant Ω_M . Les quadratures sont donc lentement variées par rapport à la période d'oscillation du résonateur. Cette propriété permet de négliger les termes évoluant à des fréquences élevées, voisines de $\Omega_M/2\pi$, dans l'expression des composantes de Fourier des quadratures X_1 et X_2 . Dans ce cas, l'expression obtenue coïncide avec la définition usuelle des quadratures, telle qu'elle existe par exemple

en optique pour un mode du champ électromagnétique.

Les quadratures de la position $x(t)$ sont obtenues expérimentalement par une méthode de démodulation. Pour obtenir par exemple la quadrature X_1 , on multiplie la fonction $x(t)$ par la fonction $Q_1(t) = \cos(\Omega_{\text{ref}} t)$. En utilisant l'équation 1.4, on trouve que le résultat est la somme de $X_1(t)/2$ et d'autres termes oscillants à des pulsations de l'ordre de $2\Omega_M$. Un filtre passe-bas permet d'éliminer ces termes à haute fréquence et d'accéder ainsi à X_1 au gain du filtre pris. L'extraction de X_2 se fait de manière similaire, mais en multipliant $x(t)$ par $Q_2(t) = \sin(\Omega_{\text{ref}} t)$.

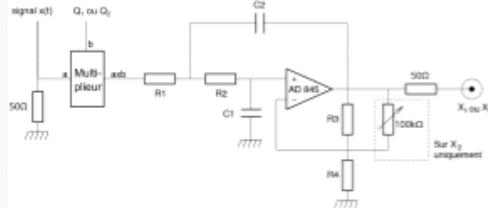


Figure A: Circuit électrique d'extraction des quadratures du signal $x(t)$.

En pratique, on utilise un multiplicateur pour effectuer la multiplication du signal $x(t)$ et de la cosinuside Q_1 ou sinuside Q_2 de référence. La sortie de chaque mélangeur est filtrée par un filtre passe-bas du second ordre construit autour d'un amplificateur linéaire intégré rapide AD 845.

Le gain G du filtre à fréquence nulle varie de $\frac{R_3+R_4}{R_2}$. En pratique les résistances R_1 et R_2 sont égales, ainsi que les capacités C_1 et C_2 . La figure ci-dessous montre le module de la fonction de transfert pour différentes gains G . Pour les valeurs particulières $G = 3 \pm \sqrt{2}$ du gain, on élimine les termes en ω^2 dans l'expression du module carré de $H[j\omega]$:

$$|H[j\omega]|^2 = \frac{G^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_b}\right)^4} \quad (1.5)$$

où ω_b est la pulsation de coupure égale à $1/R_1 C_1$ fixée ici par la valeur des composants à environ 500 Hz. En pratique on utilise un gain légèrement supérieur au gain optimal $G = 3 - \sqrt{2}$ (le filtre est installé pour la solution $G = 3 + \sqrt{2}$ car $H[j\omega]$ possède des pôles de partie réelle positive), afin d'augmenter sensiblement la plage de fréquence où la réponse

du filtre est plate. Pour la valeur $G = 1,65$ on obtient une fonction de transfert très plate, avec une variation relative d'amplitude inférieure à 0,5 % jusqu'à des pulsations de $0,46 \times \omega_0$ mais qui conserve une pente raide au delà de la fréquence de coupure.

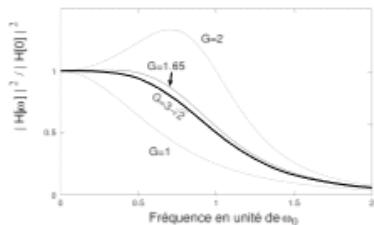


Figure B: Module carré normalisé de la fonction de transfert du filtre pour différentes valeurs de G .

13. Quelle est l'utilité des résistances de valeur 50Ω disposées en entrée et en sortie du circuit de la Figure A du document scientifique 1 ? Pourquoi utiliser une telle valeur et quelles problèmes entraînerait leur absence ?
14. Pourquoi cherche-t-on à obtenir la fonction $|H[j\omega]|$ la plus plate possible en fréquence ? Quel autre paramètre non représenté sur la figure B du document scientifique 1 devrait-on contrôler pour s'assurer de cet aspect ?
15. En ne considérant que la partie du circuit représentée sur la figure 2, calculer la fonction de transfert $H[j\omega] = V_s/V_d$ du filtre. On exprimera le résultat en fonction uniquement de G , $\omega_0 = 1/RC$ et ω .
16. Pourquoi le fait que $H[j\omega]$ possède un pôle (une annulation du dénominateur) dont la partie réelle est positive, entraîne une instabilité du filtre ? Montrer que c'est le cas si le gain est supérieur à 3.
17. Compte tenu de la façon dont sont extraites les quadratures (document scientifique 1), donner l'expression de $X_1(t)$ et $X_2(t)$ en fonction de $x(t)$ et Ω_M en considérant que la pulsation Ω_M

7

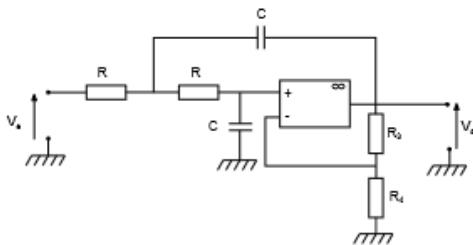


Figure 2: Circuit électrique du filtre.

est proche de Ω_M . En déduire l'expression de $X_1(t)$ et $X_2(t)$ dans le cas d'un mouvement faiblement amorti (Γ petit devant Ω_M) du type :

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega_M t) \exp\left[-\frac{\Gamma}{2}t\right] \quad (13)$$

On ne conservera que les composantes lentement variables dans l'expression des quadratures.

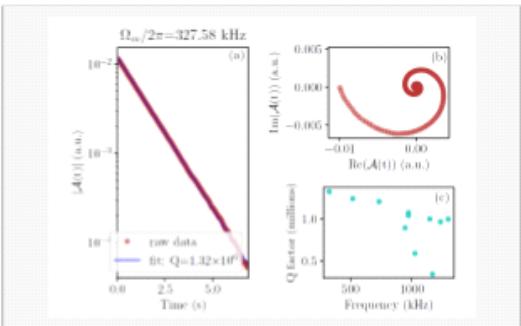
Document scientifique 2 : Extrait de thèse

Ring down peut se traduire par tintement de cloche : le son s'atténue lentement après une excitation brève.

La mesure du facteur de qualité par *ring-down* consiste à appliquer sur la membrane une excitation mécanique grise, par exemple, à un élément piezo électrique placé en contact avec la membrane. L'excitation produit une vibration monochromatique d'amplitude beaucoup plus importante que le mouvement thermique. L'excitation est alors brusquement stoppée et on mesure de manière optique les déplacements de la membrane. Les quadratures X_1 et X_2 sont extraites par démodulation et on suit l'évolution dans l'espace complexe de l'amplitude complexe $A(t)$ définie par :

$$A(t) = X_1(t) + iX_2(t) \quad (2.A)$$

8



La figure ci-dessus présente l'évolution du module de A (figure (a)), ainsi que la trajectoire de A dans le plan complexe (figure (b)). La figure (c) présente les facteurs de qualité $Q = \Omega_m/\Gamma$ des premiers modes mécaniques de la membrane en fonction de leur fréquence.

18. Expliquer l'failure de l'évolution de $|A|$ et celle de la trajectoire de A dans le plan complexe présentées dans le document scientifique 2.

9

3 Modes propres de la membrane

On étudie dans cette partie les caractéristiques mécaniques des modes de vibration de la membrane.

Profil spatial et fréquence des modes propres

On considère une membrane fine, carré de côté a et d'épaisseur h très petite devant a . On suppose d'autre part que la membrane est maintenue rigide sur tous ses bords. Elle est de plus soumise à une forte tension uniformément dans les directions x et y dont on va estimer les effets.

On considère le morceau de membrane de forme parallélépipédique de taille L_x par L_y et d'épaisseur h représenté sur la Figure 3. Sa surface horizontale est notée S . Sa surface intérieure de limite Σ , griseée sur la Figure 3, subit une force extérieure de tension T normale à Σ et dirigée vers l'extérieur.

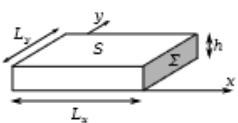


Figure 3: Morceau de membrane

19. Lorsque le morceau de membrane subit une petite élévation dans la direction x , montrer que son énergie potentielle élastique augmente d'une quantité $h\sigma dS$, où σ est une constante que l'on exprimera en fonction de T , L_y et h .

La constante σ est appelée tension de la membrane et s'exprime en Pascal. Les membranes utilisées ont généralement des tensions de l'ordre du GPa à la limite de rupture du matériau.

On considère dans cette partie que la membrane est suffisamment fine pour négliger ce qui se passe dans son épaisseur. La membrane au repos se situe dans le plan horizontal xy et l'on note $w(x, y, t)$ le déplacement vertical de la membrane par rapport à sa position au repos (voir Figure 4). La fonction w s'annule en $x = \pm \frac{a}{2}$ et $y = \pm \frac{a}{2}$.

On considère dans la suite que la déformation w reste petite devant les dimensions de la membrane.

20. On considère la coupe de la membrane dans le plan zx représentée à droite sur la Figure 4, subissant le déplacement $w(x, 0, t)$. Montrer que l'élément de membrane de cette coupe compris entre x et $x + dx$ est étiré dans la direction x par rapport à sa position au repos d'une longueur df :

$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (14)$$

10

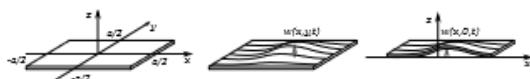


Figure 4: A gauche, membrane au repos. Au milieu, membrane sous l'effet d'un déplacement. A gauche coupe de la membrane dans le plan zx .

21. En déduire que l'augmentation V d'énergie potentielle élastique de la membrane est

$$V = \frac{ah}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (15)$$

Handwritten notes:

Figure 3: A hand-drawn diagram of a rectangular membrane element of size L_x by L_y and thickness h . The top surface S is white, and the bottom surface Σ is shaded grey. A coordinate system (x , y) is shown at the bottom left corner.

Figure 4: A hand-drawn diagram showing three stages of membrane deformation. The first stage shows a flat membrane from $-a/2$ to $a/2$ in the x -direction. The second stage shows the membrane displaced downwards, labeled $w(x, y, t)$. The third stage shows a cross-section of the membrane in the zx -plane, labeled $w(x, 0, t)$, with a small element of width dx and height h .

Equation 14:
$$df = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad \checkmark$$

Equation 15:
$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \cdot L_x \cdot L_y \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} \times L_x \cdot L_y \cdot h = \frac{1}{2} \left(\frac{T}{h \cdot L_y} \right) \cdot \left(\frac{L_x}{L_y} \right) \cdot L_x \cdot L_y \cdot h \end{aligned}$$

Equation 20:
$$\begin{aligned} \Delta E_p &= W = T \cdot \Delta L \\ &= \frac{T}{h \cdot L_y} \cdot h \cdot L_y \end{aligned}$$

Pythagorean theorem:
$$df = \sqrt{dx^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} dx$$

gauche coupe de la membrane dans le plan xx.

21. En déduire que l'augmentation V d'énergie potentielle élastique de la membrane est

$$V = \frac{\sigma h}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (15)$$

22. Écrire de la même façon l'énergie cinétique K de la membrane. On fera intervenir la masse volumique de la membrane ρ et la dérivée temporelle de w .

On cherche des solutions sous la forme :

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}(t) \xi_{nm}(x, y) \quad (16)$$

avec

$$\xi_{nm}(x, y) = \sin \left(\frac{n\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right) \sin \left(\frac{m\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) \quad (17)$$

23. Pourquoi une telle décomposition est-elle toujours possible quelle que soit la fonction w ? On s'interrogera en particulier sur l'utilisation des fonctions sinus et sur les arguments de ces fonctions.

Les coefficients q_{nm} peuvent être considérés comme des coordonnées généralisées et permettent un traitement de la dynamique du système grâce à la mécanique lagrangienne. Pour ce système, le lagrangien L est défini comme la différence entre l'énergie cinétique K et l'énergie potentielle V :

$$L = K - V \quad (18)$$

24. Montrer que le lagrangien du système en fonction des coordonnées généralisées $\{q_{nm}\}$ et de leurs dérivées temporales $\{\dot{q}_{nm}\}$ se met sous la forme :

$$L(\{q_{nm}\}, \{\dot{q}_{nm}\}) = A_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{q}_{nm}^2 - B_0 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \dot{q}_{nm}^2 (n^2 + m^2) \quad (19)$$

avec des constantes A_0 et B_0 que l'on exprimera en fonction de σ , ρ , a et h .

Dans ce formalisme les coordonnées généralisées satisfont les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{nm}} = \frac{\partial L}{\partial q_{nm}} \quad (20)$$

11

25. Montrer que chaque coordonnée $q_{nm}(t)$ satisfait une équation différentielle du second ordre.

26. En déduire que la membrane possède une infinité de modes propres de vibration, indexés par les entiers n et m non nuls et dont on exprimera les fréquences de résonance f_{nm} en fonction A_0 , B_0 , n et m pris de a , σ , ρ , n et m .

La masse M_{nm} du mode n, m représente la masse qui est effectivement mise en mouvement par le mode. Si l'on considère que seul le mode n, m est excité, l'énergie cinétique de la membrane s'écrit :

$$K = \frac{1}{2} M_{nm} \dot{q}_{nm}^2(t) \quad (21)$$

27. Montrer qu'avec cette définition tous les modes de la membrane ont la même masse que l'on précisera.

Document scientifique 3 : Extrait de thèse

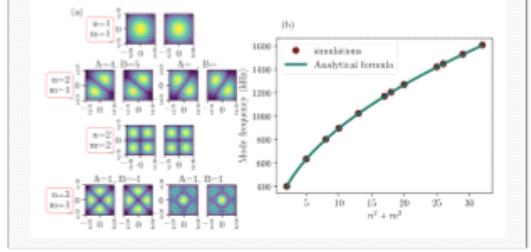
The frequencies f_{nm} are non degenerate and the modes node lines draw a rectangular grid, with equations $x_0 = -\frac{a}{2} + i\frac{a}{2}$ and $y_0 = -\frac{a}{2} + j\frac{a}{2}$ for $(i, j) \in [0, n]$. The mode amplitude reads:

$$\xi \propto \sin \left(\frac{n\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right) \sin \left(\frac{m\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) \quad (3.A)$$

On the other hand, due to the membrane symmetry, the frequencies f_{nm} , with $m \neq n$ are degenerate. The mode amplitude is:

$$\xi \propto A \sin \left(\frac{n\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right) \sin \left(\frac{m\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) + B \sin \left(\frac{m\pi}{a} \left(x + \frac{a}{2} \right) \right) \sin \left(\frac{n\pi}{a} \left(y + \frac{a}{2} \right) \right) \quad (3.B)$$

where A and B are two arbitrary real constants. The frequencies and mode shapes obtained with those formulas show a remarkable agreement with FEM (Finite Element Modelisation) simulations, as shown in figure below:



12

$$\begin{aligned} dl &= l \cdot dx = dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2} \right) DL \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dS &= dx dy \\ d(dS) &= dx d(dy) + dy d(dx) \\ &\rightarrow dx \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dy \right) + dy \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= \rho h \int dS - d(dS) \\ &= \frac{\rho h}{2} \int_{a_i}^{a_f} \int_{y_i}^{y_f} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy \end{aligned}$$

$$K = \frac{1}{2} \rho h \int_{y_i}^{y_f} \int_{a_i}^{a_f} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)^2 dx dy$$

[93] On peut prendre le TF car fonction derivable à chaque instant $q_m = \text{coeff de Fourier}$
mais pour satiffaire CL

[91] pourtant du calcul
on pose $w = \sum q_m e^{j\omega_m t}$ don $K \propto V \Rightarrow L = K - V$

- (a) mode shapes for the first 6 modes of a square membrane. For each mode, the simulated mode shape is on the left, while the mode shape given by the analytic formula is on the right.
(b) Frequencies of the first 20 modes of a square membrane of width $a = 1$ mm, thickness $h = 100$ nm and internal stress $\sigma = 1$ GPa. The simulated frequencies are presented as dots, while the straight line corresponds to the formula.

28. Le document scientifique 3 présente les profils des modes de plus basses fréquences d'une membrane carree. Les modes de la ligne ($n = 2, m = 1$) ne semblent pas respecter les symétries de la membrane. Expliquer ce phénomène.
29. Les coefficients réels A et B (équation 3.B) ont été choisis égaux à 4 et 5 pour définir le premier mode ($n = 2, m = 1$) de la figure du document scientifique 3. Quels sont les coefficients A et B (à un facteur de normalisation près) du deuxième mode ?

Perthes mécaniques par rayonnement acoustique

Il existe divers canaux de perte d'énergie pour l'oscillateur. Le plus évident est dû au rayonnement acoustique dans l'air entourant la membrane.

On considère l'air comme un gaz parfait de pression $P(r', t)$, de masse volumique $\rho_g(r', t)$ et de vitesse euclidienne $\vec{v}(r', t)$.

30. Rappeler l'équation de conservation de la masse dans le fluide qui le ρ_g et \vec{v} .

L'équation d'Euler dans le fluide s'écrit :

$$\rho_g \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho_g (\vec{v} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{v} = -\vec{\text{grad}} P \quad (22)$$

On ne s'intéresse qu'aux petites variations des grandeurs P , ρ_g et \vec{v} autour de leur valeur moyenne respective P_0 , ρ_0 et $\vec{v}_0 = \vec{0}$ (le fluide étant au repos) :

$$\begin{cases} P = P_0 + \tilde{P} \\ \rho_g = \rho_0 + \tilde{\rho}_g \\ \vec{v} = \vec{v}_0 \end{cases} \quad (23)$$

31. Réécrire les équations de conservation de la masse et d'Euler (équation 22) au premier ordre en \tilde{P} , $\tilde{\rho}_g$ et \tilde{v} .

32. Dans le cas d'un déplacement de l'air isentropique, pourquoi la pression ne dépend-elle que de la variable ρ_g ?

13

On introduit la constante c_0 définie par la dérivée de la pression par rapport à la masse volumique à entropie constante :

$$c_0^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho_g} \right|_{S, T = P_0, \rho_0, \gamma = \gamma_0} \quad (24)$$

33. Quelle est la dimension de la constante c_0 . Exprimer c_0 en fonction de P_0 , ρ_0 et de l'indice adiabatique γ appelé également coefficient de Laplace.

34. Écrire l'équation de propagation pour la pression acoustique P_a .

35. Donner pour P_a la forme générale d'une onde plane (pas nécessairement harmonique), solution de l'équation de propagation, se propageant dans une direction quelconque orientée par le vecteur unitaire \vec{n} . Préciser la vitesse de propagation de l'onde. Donner également le champ de vitesse \vec{u}_a de cette onde.

36. En repartant notamment de l'équation d'Euler linéarisée trouvée à la question 31, établir que :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \rho_g \tilde{v}_a^2 + \frac{1}{2 \rho_0 c_0^2} \tilde{P}_a^2 \right] = -\text{div} \vec{I} \quad (25)$$

où \vec{I} est un vecteur que l'on exprimera en fonction de P_a et \vec{u}_a .

37. Que représente l'équation 25 dans son ensemble et donner la signification physique de chacun de ses termes.

38. Dans le cas d'une onde plane se propagant dans la direction \vec{n} , montrer que le vecteur \vec{I} s'écrit :

$$\vec{I} = c_0 \rho_0 \tilde{v}_a^2 \vec{n} \quad (26)$$

On veut calculer les pertes d'énergie du mode fondamental de la membrane par radiation acoustique. Pour ce mode la déformation $u(x, y, t)$ de la membrane s'écrit

$$u(x, y, t) = u_0 \sin \left(\frac{\pi}{a} (x + \frac{a}{2}) \right) \sin \left(\frac{\pi}{a} (y + \frac{a}{2}) \right) \cos(\Omega_M t) \quad (27)$$

où u_0 est l'amplitude du déplacement de la membrane en son centre.

39. A quelle condition sur la fréquence et sur les dimensions de la membrane, peut-on négliger les effets de diffraction sur l'onde acoustique émise ? Montrer par une application numérique que le mode fondamental de la membrane décrite dans le document scientifique 3 (avec $a = 1$ mm et $\Omega_M = 2\pi \times 400$ kHz), placée dans l'air à pression et température ambiantes, est à la limite de cette condition.

14

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{\rho}_g \vec{v} \right) = \vec{\text{div}} \left(\tilde{\rho}_g \vec{v} \right) = 0$$

$$\boxed{30} \quad \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_g + \text{div} \left(\tilde{\rho}_g \vec{v} \right) = 0$$

$$\boxed{31} \quad \tilde{\rho}_g = \rho_0 + \tilde{\rho}_a \quad \tilde{\rho}_a \ll \rho_0$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 \ll 1$$

$$\boxed{32} \quad \frac{\partial \tilde{\rho}_a}{\partial t} = -\text{div} \left(\rho_0 \vec{v} \right) \quad \rightarrow \quad \boxed{\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} = -\nabla P_a}$$

$$\boxed{33} \quad \text{loi de Laplace} \quad PV^\gamma = \text{cte}$$

$$\boxed{34} \quad \frac{P}{V^\gamma} = \text{cte}$$

$$\boxed{35} \quad P = \text{cte} \rho_g^\gamma \quad dP = \gamma \text{cte} \rho_g^{\gamma-1} d\rho_g$$

$$\frac{\gamma}{\rho_g} \cdot P d\rho_g$$

$$\Rightarrow c_0^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho_g} = \frac{\gamma}{\rho_0} P_0$$

$$\boxed{36} \quad c_0 = m \cdot s^{-1}$$

$$\boxed{37} \quad \frac{\partial^2 \tilde{P}_a}{\partial t^2} = -\text{div} \left(\rho_0 \frac{\partial \vec{v}_a}{\partial t} \right) = + \text{div} \vec{\nabla} P_a = \Delta P_a$$

$$\boxed{38} \quad \frac{\partial^2 P_a}{\partial t^2} = c_0^2 \Delta P_a$$

On ne tiendra pas compte des effets de diffraction et on considérera que chaque élément de surface de la membrane rayonne une onde plane.

40. En écrivant la condition aux limites de l'onde au niveau de la surface de la membrane et en intégrant sur les deux faces de la membrane, écrire la puissance acoustique moyenne rayonnée par le mode fondamental en fonction de u_0 , Ω_M , c_0 , ρ_0 et α .

Le facteur de qualité Q d'un oscillateur harmonique faiblement amorti est défini par

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E} \quad (28)$$

où E est l'énergie intiale de l'oscillateur (égale à l'énergie cinétique maximale sur une période par exemple) et ΔE l'énergie perdue lors d'une oscillation.

41. En considérant que l'amortissement de la membrane ne provient que de la puissance perdue par rayonnement acoustique, exprimer le facteur de qualité du mode fondamental dans l'air en fonction de Ω_M , h , ρ_0 , c_0 et ρ_0 .
42. Montrer qu'à pression ambiante le facteur de qualité du mode fondamental n'excède pas quelques unités.

Pertes mécaniques intrinsèques

Lois de la flexion de la membrane, une partie de l'énergie élastique est dissipée dans le matériau par des mécanismes internes. Pour estimer ces pertes, il est nécessaire d'étudier les allongements et compressions des différentes couches dans l'épaisseur de la membrane.

On considère que l'allongement du matériau dans une direction n'entraîne pas de compression dans les directions perpendiculaires (ce qui revient à annuler le module du Poisson ν du matériau). Ainsi, les déformations dans les directions x et y seront traitées de manière indépendante.

Comme on souhaite évaluer uniquement l'énergie due à la flexion, on peut considérer que la tension σ est nulle. La surface centrale est alors non tendue et non allongée au premier ordre.

Dans un premier temps, on ne considère qu'une bande de membrane à l'ordonnée $y = y_0$ de largeur dy (bande grisée sur le schéma de gauche de la Figure 5).

Cette bande est décomposée en une superposition de couches horizontales d'épaisseur de repérées par la coordonnée u variant de $-h/2$ à $h/2$. L'élément de volume élargi dans la membrane possède, lorsqu'il est étiré dans la direction x , une raideur effective K telle que :

$$K = \frac{1}{dx} Y dy du \quad (29)$$

où la constante Y (positive) est le module d'élasticité du matériau, appelé encore module d'Young.

15

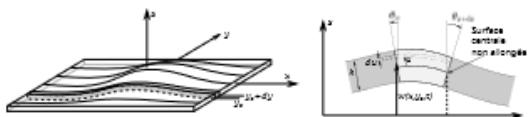


Figure 5: À gauche : En gris, bande de membrane en $y = y_0$ de largeur dy . À droite la même bande vue en coupe, où un élément infinitésimal de longueur dx est mis en évidence.

43. Justifier la dépendance de la raideur K en dx , dy et du , en particulier pourquoi les quantités dy et du apparaissent au numérateur et dx au dénominateur. On pourra s'appuyer sur une analogie avec des ressorts placés en parallèle ou en série en considérant par exemple un élément de volume deux fois plus long ou deux fois plus large ou épais.

On note θ_x l'angle que fait la normale à la surface centrale de la membrane en x avec l'axe vertical (Figure 5 à droite). Cet angle est directement relié au déplacement de la w de la membrane :

$$\theta_x(t) = \frac{\partial w}{\partial x}(x, y_0, t) \quad (30)$$

On rappelle que la surface centrale de la membrane ($u = 0$) n'est pas étirée. Dans le cas particulier de l'élément représenté sur la Figure 5 à droite, l'élément $dy du dx$ est allongé pour des u positifs et comprimé pour des u négatifs.

44. Représenter l'énergie potentielle élastique de l'élément de membrane $dy du dx$ en fonction de u , Y , dx , dy , et $d\theta_x = \theta_{x+dx} - \theta_x$.
45. Représenter l'angle $d\theta_x$ grâce notamment au déplacement w , puis en intégrant sur l'épaisseur de la membrane, exprimer l'énergie potentielle élastique de l'élément de volume $h dy dx$ de la membrane (élément mis en évidence sur la figure 5 à droite) en fonction de Y , h , dx , dy , et w .

46. En considérant désormais les déformations dans les directions x et y de la membrane montrer que l'énergie potentielle élastique totale due à la flexion se met sous la forme :

$$E_{\text{flex}} = D \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy dx \quad (31)$$

où D est une constante que l'on exprimera en fonction de Y et de h .

Le taux d'énergie perdue ne dépend que des propriétés du matériau et se modélise en supposant qu'à chaque période d'oscillation une fraction Φ de l'énergie moyenne de flexion (E_{flex}) est dissipée

16

dans le matériau. Φ est un nombre sans dimension appelé angle de perte généralement petit devant 1.

47. En utilisant la définition du facteur de qualité (équation 28), la masse effective des modes de vibration (question 27) et leur fréquence de résonance (question 26), montrer que le facteur de qualité du mode n , si limité par les pertes intrinsèques du matériau vaut :

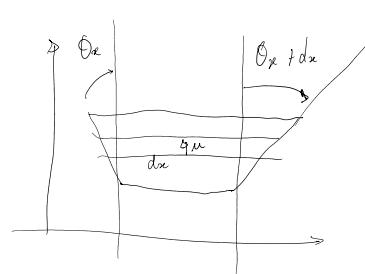
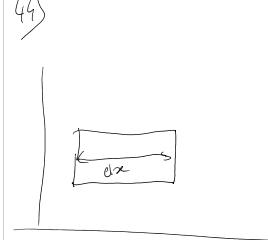
$$Q_{\text{mat}} = \frac{4\pi}{\pi h^2 Y \Phi} \frac{u^2 + m^2}{u^2 + m^2} \quad (32)$$

48. Pour une membrane fabriquée dans un matériau donné (Module d'Young Y et angle de perte Φ fixés), quel design (géométrie, tension) est le plus favorable pour obtenir un facteur de

$$(35) \quad K = \frac{1}{dx} Y dy du$$

$$\begin{aligned} F &= K d(dx) = \frac{1}{dx} dy du \\ &= Y \frac{d(dx)}{dx} dy du \\ \Rightarrow K &= Y \frac{dy du}{dx} \end{aligned}$$

44)



$$E = \frac{1}{2} K \left[d(dx) \right]^2$$

$$\begin{aligned} \text{d}(dx) &= \tan \theta_{x+dx} - \tan \theta_x \\ \Rightarrow d(dx) &= L (\tan \theta_{x+dx} - \tan \theta_x) = u d\theta_x \end{aligned}$$

$$\propto \tan \theta_x \frac{du}{dx}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} K u^2 (\theta_x)^2 = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} dy \int_{-h/2}^{h/2} d\theta_x^2$$

$$(45) \quad d\theta_x = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} Y \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dy dx \\ &\sim \frac{1}{3} \frac{h^3}{8} \times 2 = \frac{h^3}{12} \end{aligned}$$

$$E = \frac{Y h^3}{12} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dy dx$$

$$Q_{\text{tot}} = \frac{48}{\pi} \frac{n^2 \sigma}{kT} \frac{n^2 + m^2}{n^2 + m^2} \quad (32)$$

48. Pour une membrane fabriquée dans un matériau donné (Module d'Young Y et angle de perte Φ fixés), quel design (géométrie, tension) est le plus favorable pour obtenir un facteur de qualité important ?

4 Une membrane très réfléchissante

Dans cette partie, on étudie la possibilité de rendre une membrane fine, constituée d'un matériau diélectrique, extrêmement réfléchissante pour certaines longueurs d'onde de la lumière. Il faut pour cela considérer le champ électromagnétique à l'intérieur de la membrane ainsi que les réflexions et transmissions de ce champ aux deux interfaces de la membrane.

Interface diélectrique

Dans le matériau diélectrique que l'on considère, le vecteur polarisation électrique \vec{P} est relié au champ électrique \vec{E} par la relation :

$$\vec{P}(r', t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(r', t) \quad (33)$$

49. Nommer la constante χ_e et donner son unité.

50. Quelles hypothèses doit-on faire sur le matériau diélectrique pour que la relation 33 soit valide ?

51. Citer deux exemples de matériaux vérifiant les hypothèses précédentes, et deux exemples de matériaux ne les vérifiant pas en indiquant quelles propriétés sont défaut.

Le matériau constituant la membrane est un isolant non chargé et non magnétique.

52. Écrire les quatre équations de Maxwell dans le matériau, liant les champs électrique \vec{E} , magnétique \vec{B} et induction électrique $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

17

$$\begin{aligned} E &= \frac{y k^2}{2h} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 dz dy \\ u_0 D &= \frac{y h^2}{2h} \end{aligned}$$

53. A partir des équations précédentes, écrire l'équation de propagation vérifiée par \vec{E} d'une part et par \vec{B} d'autre part.

54. On considère une solution sous forme d'onde plane progressive harmonique de la forme :

$$\vec{E}(r', t) = \vec{E}_0 \exp(i\omega t - ik \cdot r') \quad (34)$$

$$\vec{B}(r', t) = \vec{B}_0 \exp(i\omega t - ik \cdot r') \quad (35)$$

Donner la relation de dispersion reliant $|k|$ et ω , ainsi que la relation reliant les amplitudes \vec{E}_0 et \vec{B}_0 .

55. Pourquoi parle-t-on d'onde transverse ?

On considère désormais ce qui se passe à l'interface entre deux milieux diélectriques caractérisés par des coefficients χ_{e1} et χ_{e2} . Les deux milieux sont isolants et non magnétiques (pas de courants superficiels libres ou liés au niveau de l'interface) et non chargés (pas de charges superficiques libres au niveau de l'interface).

56. Quelles sont les composantes des champs \vec{E} , \vec{B} et \vec{D} qui sont continues au passage de l'interface ? Donner alors les relations de continuité sur les composantes des champs \vec{E} et \vec{B} . On introduira les constantes diélectriques relatives sans dimension c_1 et c_2 des milieux 1 et 2, constantes que l'on définira.

On s'intéresse à une onde incidente venant du milieu 1 en incidence normale d'amplitude E_i et on cherche à déterminer les amplitudes E_r de l'onde réfléchie et E_t de l'onde transmise.

57. En utilisant les relations de continuité trouvées à la question précédente, calculer les coefficients de transmission t et de réflexion r en amplitude pour le champ électrique. On les exprimera en fonction des indices optiques n_1 et n_2 des milieux 1 et 2 que l'on définira.

58. Quelle relation entre r , t et les indices optiques n_1 et n_2 traduit la conservation de l'énergie électromagnétique ? Montrer que les expressions de r et t trouvées à la question précédente satisfont cette relation.

Membrane simple et membrane à cristaux photoniques

Dans ce qui suit, on s'intéresse tout d'abord aux propriétés de réflexion d'une membrane simple en fonction de son épaisseur, puis on étudie la possibilité d'augmenter le coefficient de réflexion grâce à la gravure d'un réseau de trous dans la membrane, appelé cristal photonique.

On considère une membrane fine d'épaisseur h dont les dimensions latérales sont supposées infinies. L'indice optique de la membrane est noté $n_m > 1$. De part et d'autre de cette membrane, le milieu

18

est le vide. Au niveau d'une interface, le coefficient de transmission en amplitude du vide vers le diélectrique est noté t , celui du diélectrique vers le vide t' , le coefficient de réflexion en amplitude vide vers vide est noté r et celui diélectrique vers diélectrique vaut $-r$. Les résultats des questions précédentes montrent que les coefficients r , t et t' sont réels et vérifient :

$$-1 < r < 0 \quad (36)$$

$$0 < t < 1 \quad (37)$$

$$t' + r^2 = 1 \quad (38)$$

On pourra utiliser ces propriétés sans démonstration dans la suite.

Une onde plane progressive harmonique de la forme :

$$\vec{E}_0(r', t) = E_0 \exp(i\omega t - ikz) \hat{e}_x \quad (39)$$

d'amplitude E_0 , polarisée selon l'axe x , venant des z négatifs et se propageant vers les z croissants, est envoyée sur la membrane dans la zone 1 (voir Figure 6).



Figure 6: Membrane diélectrique vue de coté (zone 2) entourée de vide (zone 1 et 3).

On note E^+ (respectivement E^-) l'amplitude du champ électrique dans la zone 2 se propageant selon les z croissants (respectivement décroissants), E_1 l'amplitude du champ réfléchi par la membrane dans la zone 1 et E_2 celle du champ transmis dans la zone 3.

59. En écrivant les relations de continuité au niveau des interfaces en $z = 0$ et $z = h$ ainsi que la propagation des champs dans l'épaisseur de la membrane, trouver le coefficient de réflexion en amplitude $r_m = E_1/E_0$ de la membrane et son coefficient de transmission en amplitude $t_m = E_2/E_0$. On exprimera ces coefficients en fonction de r , k , h et n_m .
60. En déduire que, lorsque l'on fait varier l'épaisseur de la membrane, le module $|r_m|$ du coefficient de transmission et le module $|r_m|$ du coefficient de réflexion de la membrane présentent des maxima et des minima que l'on exprimera en fonction du coefficient r . Exprimer en fonction de la longueur d'onde λ et n_m les valeurs de h pour lesquelles ces maxima et minima sont atteints. Tracer l'allure du module de r_m et t_m .

19

Dans le cas d'une membrane en nitride de silicium d'indice $n_m = 2$, le coefficient de réflexion total de la membrane $|r_m|$ est ainsi limité à 0,6 ce qui est, dans la plupart des expériences d'optomécanique, très insuffisant. Pour améliorer la réflectivité de la membrane, on a recours à un procédé de gravure qui transforme la membrane en un réseau appelé cristal photonique.

On étudie dans la suite le cas d'une membrane dans laquelle ont été percées, sur toute son épaisseur, de longues tranchées orientées selon l'axe y et régulièrement espacées selon l'axe x (voir Figure 7). Le problème reste donc invariant selon l'axe y et devient périodique selon x . La périodicité spatiale sera notée Λ .

Pour obtenir une réflectivité quasiment parfaite de la membrane, le principe est de créer par diffraction des modes guidés se propageant selon $+x$ et $-x$ à l'intérieur de la membrane. En utilisant une interférence destructive entre ces modes et l'onde transmise, on peut obtenir une situation où toute l'énergie est réfléchie par la membrane.

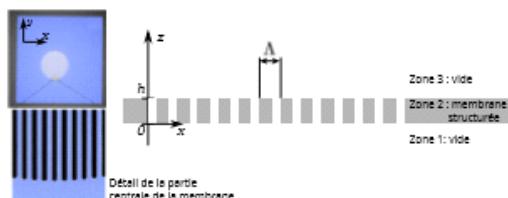


Figure 7: A gauche : Image au microscope d'une membrane carrée vue de haut avec en son centre un cristal photonique. A droite : schéma de la membrane vue sur la tranche.

Il faut tout d'abord s'assurer que l'énergie apportée par l'onde incidente ne soit pas perdue dans des modes diffractés d'ordre non nul dans les zones 1 et 3 à l'extérieur de la membrane.

61. On considère que l'onde incidente arrive sur la membrane avec un angle θ_{inc} orienté par rapport à l'axe Ox . Faire un schéma représentant le faisceau incident et les faisceaux diffractés dans les différents ordres m réfléchis et transmis par la membrane.
62. En écrivant la différence de marche entre les rayons diffractés par deux fentes consécutives, retrouver les expressions des angles θ_m^R et θ_m^T des faisceaux diffractés dans l'ordre m réfléchis (zone 1) et transmis (zone 3) par la membrane en fonction de λ , Λ , m et θ_{inc} .

On note η le taux de remplissage qui vaut 1 lorsque la membrane est pleine (sans tranchées) et tend vers 0 pour une membrane complètement creuse (voir Figure 8). Les ondes se propagent dans la zone 2 voient donc un indice optique moyen $n_{\text{eff}} = 1 + \eta(n_m - 1)$.

20



Figure 8: Membrane à cristal photonique avec un taux de remplissage η proche de 0 à gauche, égale à 0,5 au milieu et proche de 1 à droite.

63. Dans le cas d'une onde arrivant en incidence normale $\theta_{\text{inc}} = 0$, donner les conditions sur λ , Λ et ω_{ur} pour n'avoir aucun onde diffracté autre que l'ordre 0 dans les zones 1 et 3 et qu'il y ait au moins un ordre non nul diffracté dans la membrane (zone 2).

On se place désormais dans le cadre de la condition de la question précédente en supposant que dans la membrane, seul un mode guidé existe. Sans perte de généralité, on ne s'intéresse qu'à une seule polarisation du champ qui sera décrit par des quantités scalaires. L'amplitude du champ du mode guidé dans la zone 2 et celles des champs incident, réfléchi et transmis dans les zones 1 et 3 sont notées respectivement :

$$a(t) = Ae^{i\omega t} \quad (40)$$

$$e_i(t) = E_0 e^{i\omega t} \quad (41)$$

$$e_r(t) = E_r e^{i\omega t} \quad (42)$$

$$e_t(t) = E_t e^{i\omega t} \quad (43)$$

Concernant le mode guidé, l'essentiel de la physique du problème est décrit par l'équation d'évolution temporelle de a :

$$\frac{da}{dt} = (i\omega_0 - \gamma)a + \sqrt{\gamma}e_t \quad (44)$$

où ω_0 est la pulsation de résonance du mode guidé et γ une constante réelle qui décrit le couplage à l'onde incidente.

64. Donner la relation liant A et E_t .

Grâce aux coefficients de réflexion r_m et de transmission t_m de la membrane, on peut écrire :

$$E_p = r_m E_i + e^{i\phi} \sqrt{\gamma} A \quad (45)$$

$$E_t = t_m E_i + e^{i\phi} \sqrt{\gamma} A \quad (46)$$

où ϕ représente la phase du couplage.

La résonance du mode guidé étant très fine, on peut supposer qu'au voisinage d'une résonance, les coefficients r_m et t_m ainsi que ϕ sont constantes.

65. Écrire les coefficients de réflexion r_c et transmission t_c de la membrane à cristal photonique en fonction de r_m , t_m , ϕ , γ , ω et ω_0 .

21

On se place dans le cas particulier où le coefficient t_m vaut 1 et $r_m = 0$.

66. En utilisant la conservation de l'énergie montrer que le coefficient $e^{i\phi}$ vaut nécessairement -1 . Sur le même graphe, tracer l'allure des modules des coefficients r_c et t_c en fonction de ω . On se placera dans le cas où $\gamma \ll \omega_0$.

On se place maintenant dans la situation inverse où le coefficient r_m est maximal égal à 0,6 et t_m égal à 0,8 i.

Dans ce cas $e^{i\phi} \neq -1$ et les trajectoires de r_c et t_c dans le plan complexe sont représentées sur la Figure 9. Lorsque ω varie de $-\infty$ à $+\infty$ les coefficients r_c et t_c décrivent un cercle de rayon $\frac{1}{2}$ parcouru dans le sens anti trigonométrique partant respectivement de r_m et t_m et y revenant.

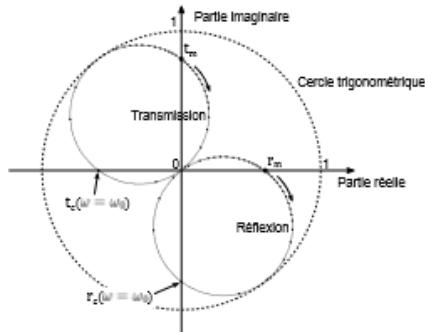
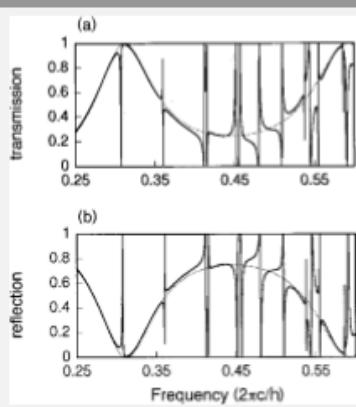


Figure 9: Évolution des coefficients de transmission t_c et réflexion r_c dans le plan complexe en fonction de ω . Les points sur les trajectoires circulaires sont atteints pour des valeurs de ω régulièrement espacées d'un écart $\omega_0/100$.

67. En utilisant la figure 9 tracer sur le même graphe l'allure de $|r_c|$ et $|t_c|$ lorsque ω varie autour de la résonance ω_0 .

22



Module des coefficients de transmission et de réflexion d'une membrane à cristaux photoniques de facteur indice $n_m = 4$. La ligne en pointillée représente ces mêmes coefficients pour une membrane non structurée, d'épaisseur h .

68. À partir des résultats obtenus dans cette partie expliquer l'allure des coefficients de transmission et de réflexion présentés dans le document scientifique 4, et conclure sur la possibilité d'obtenir une membrane hautement réfléchissante.

5 Traitement quantique de la membrane

Cette cinquième partie ne fait pas partie du sujet original. Elle est donnée ici à titre d'exercice tout en complétant le sujet.

Cette partie traite de l'aspect quantique de la membrane avec la détermination de la température nécessaire pour observer ses fluctuations quantiques.

Si l'on se considère qu'un seul mode mécanique de la membrane, celle-ci peut être décrite au niveau quantique comme un oscillateur harmonique de masse M et de pulsation de résonance Ω_M . Dans la suite, les opérateurs de position et d'impulsion seront notés \hat{x} et \hat{p} .

On appelle \hat{b} l'opérateur d'annihilation défini par :

$$\hat{b} = \sqrt{\frac{M\Omega_M}{2\hbar}} \hat{x} + i\frac{1}{\sqrt{2M\Omega_M\hbar}} \hat{p} \quad (47)$$

69. Écrire l'opérateur création \hat{b}^\dagger hermitique conjugué de \hat{b} , et montrer que la relation de commutation de \hat{b} et \hat{b}^\dagger est :

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = \text{Id} \quad (48)$$

où Id représente l'opérateur identité. On pourra utiliser sans démonstration la relation de commutation de \hat{x} et \hat{p} :

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \text{Id} \quad (49)$$

Le Hamiltonien \hat{H} du système s'écrit

$$\hat{H} = \hbar\Omega_M \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \text{Id} \right) \quad (50)$$

On rappelle que les états propres de ce hamiltonien sont les états numéros $|n\rangle$ associés aux énergies propres $E_n = \hbar\Omega_M(n + \frac{1}{2})$. Ces vecteurs forment une base orthonormée. L'action des opérateurs \hat{b} et \hat{b}^\dagger sur les vecteurs $|n\rangle$ est :

$$\hat{b}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad \text{si } n \neq 0 \quad (51)$$

$$\hat{b}|0\rangle = \vec{0} \quad (52)$$

$$\hat{b}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (53)$$

L'action de \hat{x} sur les fonctions d'onde est la multiplication par x , l'action de \hat{p} est $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$.

70. En utilisant $\hat{b}|0\rangle = \vec{0}$, vérifier que la fonction d'onde de l'état fondamental est :

$$\psi_0(x) = C \exp\left(-\frac{x^2}{4x_{\text{ZPM}}^2}\right) \quad (54)$$

où l'on exprimera la constante x_{ZPM} en fonction de M , Ω_M et \hbar . On ne cherchera pas à déterminer la constante de normalisation C .

L'extension x_{ZPM} représente l'amplitude des fluctuations de l'état fondamental, aussi appelée fluctuations de point zéro ou Zero Point Motion.

71. Quelles différences y a-t-il entre l'état de plus faible énergie dans les descriptions classique et quantique ? Quelle est l'origine de ces différences ?

72. Donner la valeur numérique de x_{rms} pour une membrane de pulsation propre $\Omega_M = 2\pi \times 400$ kHz et de masse 80 ng.

Lorsque le système est à l'équilibre thermique à la température T , la valeur moyenne d'une observable quantique \hat{A} est donnée par :

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\text{Tr}(\hat{A} e^{-\beta \hat{H}})}{\text{Tr}(e^{-\beta \hat{H}})} \quad (55)$$

où Tr désigne la trace de l'opérateur, c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux et $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

73. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, montrer que cette valeur moyenne se met sous la forme :

$$\frac{1}{Z} \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle n | \hat{A} | n \rangle e^{-\beta E_n} \quad (56)$$

où E_n est l'énergie de l'état $|n\rangle$ et où Z est appelé fonction de partition, que l'on exprimera en fonction de β et des énergies E_n .

On rappelle que si \hat{B} est un opérateur et $|\psi\rangle$ un vecteur propre de \hat{B} associé à la valeur propre b alors pour toute fonction f on a $f(\hat{B})|\psi\rangle = f(b)|\psi\rangle$.

74. En exprimant \hat{x} en fonction de \hat{b} et \hat{b}^\dagger , calculer la variance $\langle \hat{x}^2 \rangle$ de l'opérateur position et la mettre sous la forme :

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{\hbar}{M\Omega_M} \left(n_T + \frac{1}{2} \right) \quad (57)$$

où n_T est le nombre moyen d'excitations thermiques dans le résonateur, donné par

$$n_T = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \quad (58)$$

On rappelle les formules :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad (59)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \quad (60)$$

75. Tracer la variance de l'opérateur position en fonction de la température. Préciser la limite et la tangente en $T = 0$ et l'asymptote pour T grand. Montrer que l'on retrouve le comportement classique quand la température est grande devant une température que l'on précisera. Cette température limite est appelée température quantique.

76. Pour un oscillateur de pulsation $\Omega_M = 2\pi \times 400$ kHz, donner la valeur de la température quantique à atteindre pour observer les fluctuations quantiques.