

I. Pourquoi oscillations?Objet stable \rightarrow résistant aux perturbations

\hookrightarrow restant petit \rightarrow oscillations
 \rightarrow Taylor

exemples:
 (pert) \rightarrow force $F(x) \sim 0 - kx$ $\left(\text{de } d' \text{ une qualité } (t) \rightarrow \text{ perturbation} = \text{ de harmonique} \right)$
 \rightarrow condensateur $q(t) \sim 0 + CV$
 \rightarrow polarisation de laitance $P(\vec{E}) \sim 0 + \epsilon_0 E$ $\left(\text{champ} \rightarrow \text{ perturbation} = \text{ onde} \rightarrow \text{ var de } P \right)$
 \rightarrow accoustique $P(t) \sim 0 + A \frac{t}{T} = \frac{A}{T} t$

petit \Rightarrow relations linéaires

\hookrightarrow Effet est proportionnel à la cause
 \hookrightarrow Fonction de transfert $S = H(s)$

résultat/condensateur $x(t)$

\hookrightarrow $\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$ oscillations harmoniques ($\text{si perturbation dans le système est linéaire alors oscillations harmoniques, du à pouvoir non linéaire}$)

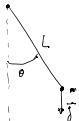
 $x_0 \rightarrow$ la solution exacte!

$\hookrightarrow x(t) = x_0 \cos(\omega t)$
 $\hookrightarrow S = \underbrace{\cos(\omega t)}_{H} e^{-s \omega t}, \omega = \omega_0$

On étudie la physique

\rightarrow se décale de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$
 \rightarrow harmonique de fréquence indépendante de x_0 $f = \frac{\omega}{2\pi}$

\hookrightarrow isochrone proprieté propre aux oscillations harmoniques

II. Pendule simple: prototype de l'oscillation NL

Théorème: $mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta$
 $\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0}$

$\omega_0 = \frac{g}{L}$

Région simple: $\theta \ll \frac{\pi}{2}$
 \hookrightarrow linéaire $\sin \theta \approx \theta \Rightarrow$ oscillations harmoniques.

Quel est son? $\ddot{\theta} = -\sin \theta$ (solution s'appelle "solution de Jacobi")
 pas de solution simple

D'expérience:
 \rightarrow oscillations pour petit angle
 \rightarrow oscillations pour de grands angles ($\approx \pi/2$)
 \rightarrow régime fait rotations: θ en fonction du temps.

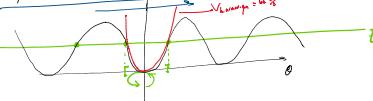
Comment décrire ces régimes à partir de l'équation?
 quelle est la transition entre les régimes?

(\hookrightarrow Apprécier énergie)
 énergie primaire du mouvement ($\text{on multiplie par } \dot{\theta} \text{ l'équation de mouvement pour intégrer}$)

$\frac{1}{2} \dot{\theta} \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta \sin \theta = 0$
 $\hookrightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \omega_0^2 (1 - \cos \theta) = E = \text{const}$

Si l'énergie restante est nulle, alors il n'y a pas d'énergie à perdre.

Équation d'énergie dans un potentiel $V(\theta) = \omega_0^2 (1 - \cos \theta)$



$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + V(\theta) = E$

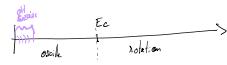
$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = E - V$

Transition entre les régimes:

$E_c = \min V(\theta) = \omega_0^2$ stade

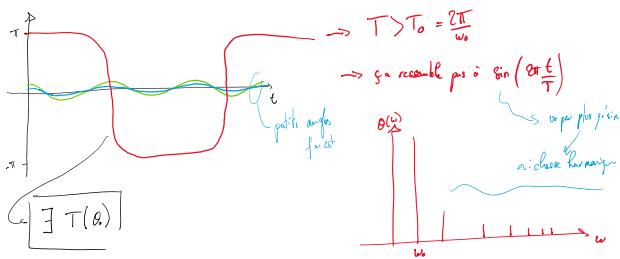
$E < E_c, E > E_c$

Exercice, le 22



Region d'instabilité $t < T_0$

$$\gamma_{\text{inst}} \neq \theta_0, (\dot{\theta}(t) = 0)$$



1) Formule de Borda

par correction de $T(\theta_0)$ en déla de $T = T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

1) à la physique

$$\text{Taylor ordre suivant : } \ddot{\theta} + \omega_0^2 (\theta - \theta_0) = 0$$

solution T -périodique

$$\theta(t) = \theta_0 \left(\sin(\omega_0 t) + E \sin(\omega_0 t) \right)$$

on injecte dans l'équation homogène

$$\begin{aligned} \theta = & \left[-\omega_0^2 + \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{8} \right] \sin(\omega_0 t) \\ & + \left(E \left(\omega_0^2 - 3\omega_0^2 \right) + \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{8} \right) \sin(3\omega_0 t) \\ & + O(\theta_0^3) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\omega_0^2 + \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{8} = 0 \quad (1) \\ E \left(\omega_0^2 - 3\omega_0^2 \right) + \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{8} = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

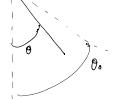
$$(1) \Rightarrow \omega_0 = \omega_0 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{16} \right)$$

$$\Rightarrow T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right) \quad \text{Borda}$$

$$(2) \Rightarrow E = \frac{\theta_0^2}{132} \quad \text{(mais doit faire attention que l'éq est valide)}$$

2) Fonctions spéciales

$t = 0$, vertical, allant vers la droite



$$t = \int_0^t dt$$

$$= \int_0^\theta d\phi \frac{dt}{d\phi} \quad \text{avec intégrale du mouvement}$$

$$= \frac{1}{\omega_0^2 \omega_0} \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \theta_0}}$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\omega_0} \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\theta_0}{2}}}$$

Sit $k = \sin \frac{\theta_0}{2}$ et changeant de variable $\sin \phi = \sin \frac{\theta}{2}$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\omega_0} \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}} = \frac{1}{\omega_0} F(\phi, k) \quad \text{intégrale elliptique incomplète de première espèce}$$

$$t = \frac{1}{\omega_0} F(\theta_0, k)$$

$$= \frac{1}{\omega_0} F\left(\frac{\theta_0}{2}, k\right) \quad \text{intégrale elliptique complète de première espèce}$$

$$= \frac{1}{\omega_0} K(k) \quad \text{intégrale elliptique complète de deuxième espèce}$$

$$\Rightarrow T = T_0 \frac{2}{\pi} K\left(\sin \frac{\theta_0}{2}\right)$$

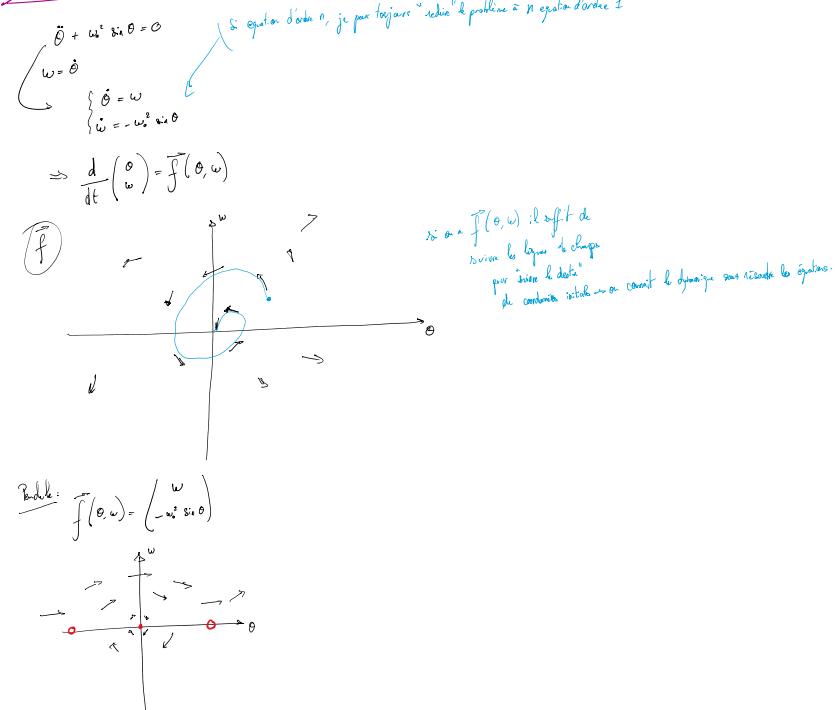
et 1) et 2) donnent en équivalence $K(k) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\theta_0) k^n$

$$\Rightarrow T = T_0 \frac{2}{\pi} K(\sin \frac{\theta}{2})$$

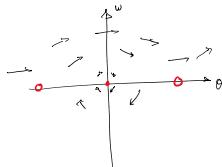
à l'ordre n=1

$$\boxed{T = T_0 \left(1 + \frac{\theta^2}{16}\right)} \quad \text{Borda (le retard)}$$

VII. Systèmes dynamiques



Problème: $\tilde{f}(\theta, w) = \begin{pmatrix} w \\ -\omega^2 \sin \theta \end{pmatrix}$



Point d'équilibre du système dynamique?

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ w \end{pmatrix} = 0 = \tilde{f}$$

"Points fixes"

Pour le probleme, c'est à dire si $w=0$ et $\sin \theta = 0$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} w=0 & \theta=0 \\ w=0 & \theta=\pi \end{cases}$

Équilibre stable ou instable?

$$\begin{aligned} \theta = \theta^* + u, \quad (\omega \ll \Gamma) \quad &\text{peut} \\ w = w^* + v, \quad |v| \ll |u| \quad & \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ w \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \tilde{f}(\theta^* + u, w^* + v) \sim \begin{pmatrix} \partial_\theta f_\theta & \partial_\theta f_w \\ \partial_w f_\theta & \partial_w f_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}} \quad A \text{ le Jacobien} \end{aligned}$$

Cas général:
 $\theta = \theta(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \exp(\lambda_1 t) c_1 \vec{v}_1 + \exp(\lambda_2 t) c_2 \vec{v}_2$

\vec{v}_1 et \vec{v}_2 les vecteurs propres de A (λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A (hypothèse)).

$$c_1 = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ y_1(0) \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_1$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} x_2(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} \cdot \vec{v}_2$$

Diagnostic de la stabilité

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{important } A \text{ est antisymétrique réelle!} \quad (f \text{ réel} \Rightarrow \partial_\theta f \text{ réel})$$

$$\text{Soit } \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 = \lambda_1 \pm i\sqrt{-\det(A)} = \lambda_1 \pm i\sqrt{-\lambda_1 \lambda_2}$$

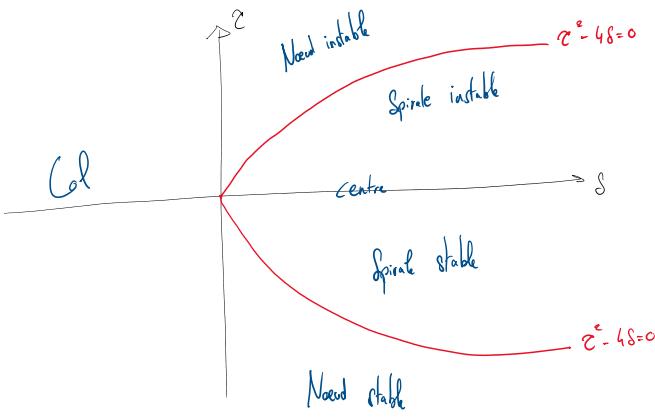
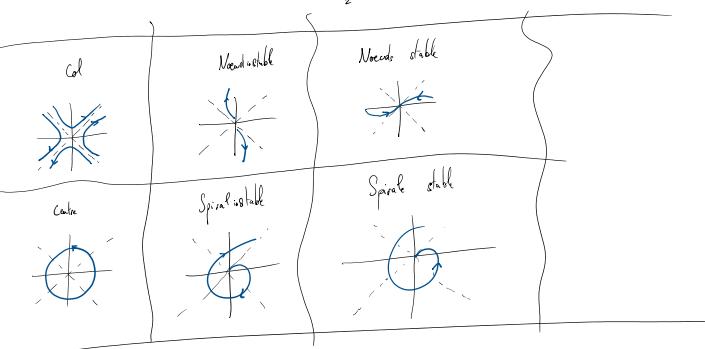
$$\text{Cas 1: } \lambda_1 < 0 \rightarrow \lambda^2 - 4\lambda_2^2 > 0 \quad 2\text{ réelles} \quad \text{un peu plus} \quad \text{instable}$$

$$\text{Cas 2: } \lambda_1 > 0 \rightarrow \lambda^2 - 4\lambda_2^2 > 0 \quad 2\text{ réelles} \rightarrow \lambda > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0 \Rightarrow \text{instable}$$

$$\rightarrow \lambda^2 - 4\lambda_2^2 > 0 \quad 2\text{ réelles conjuguées} \quad \lambda_1 = \pm \sqrt{-\det(A)} \quad \lambda = \pm \sqrt{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \quad \text{instable}$$

$$\text{Donc } \operatorname{Re}(\lambda) = \operatorname{Re}(\lambda_1) = \frac{\lambda_1}{2} \quad \text{stable}$$

$$\begin{aligned} \zeta^2 - 4\delta < 0 & \quad 2\text{p complex conjugate} \\ \lambda_1 = \zeta + i\omega & \quad \lambda_2 = \zeta - i\omega \\ \text{Dess } \operatorname{Re}(\lambda) = \operatorname{Re}(\lambda_2) & = \frac{\zeta}{2} \end{aligned}$$



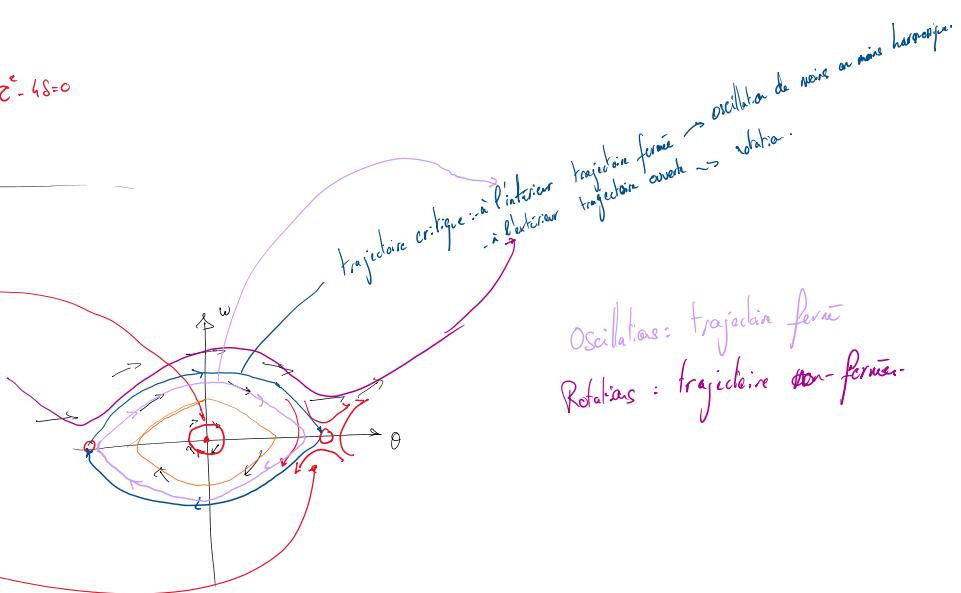
Pendule

$$1^{\text{er}} \text{ P.F.}: (\theta^*, \omega^*) = (0, 0)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^* \cos \theta^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^* & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\zeta=0, \delta=-\omega^*} \text{centre.}$$

$$2^{\text{nd}} \text{ P.F.}: (\theta^*, \omega^*) = (\pi, 0)$$

$$\hookrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^* & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\zeta=0, \delta=\omega^*} \text{col instable}$$



Bifurcation

Changement de nature d'un P.F.

Si on change un param. externe

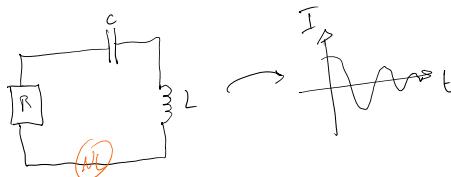
Spiral \Rightarrow Col.

Oscillateur réel dissipatif

↳ NL compensent les dissipations

Sans forcing! ↳ libre
fréquence propre

I- Oscillateur de Van der Pol

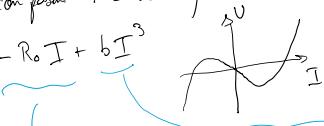


RLC clignotant (oscillateur réel dissipatif).

IDE du VdP:

- Réajuster un composant NL de la forme

$$U_{NL}(I) = -R_0 I + b I^3$$



à petit I on apprécie la dissipation et on entretient le trou

on consomme ce qu'on vient d'injecter comme énergie pour avoir des oscillations qui durent.

→ Loi des mailles

$$\frac{Q}{C} + L\dot{I} + RI + (-R_0 I + bI^3) = 0$$

$$\Rightarrow L\ddot{I} + (R - R_0 + 3bI^2)\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0} \quad \omega = \sqrt{\frac{R_0 + R}{3b}} I \quad \varepsilon = \sqrt{CL} t \quad \mu = (R_0 - R) \sqrt{\frac{C}{L}} > 0 \quad \Rightarrow \text{pour la vitesse } \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Système dynamique? ⇒ points fixes.

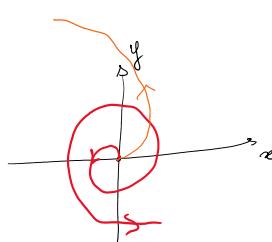
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\mu(x^2 - 1)y - x \end{cases}$$

$$\text{Cas pfif: } y = 0, \dot{y} = 0$$

Linéarisation autour de $(0,0)$

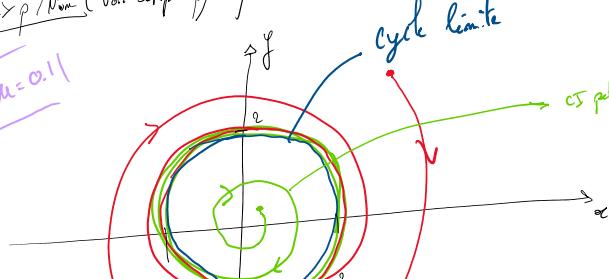
$$\frac{dy}{dx} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \mu > 0 \quad \delta = 1 > 0 \quad \rightarrow \text{Nœud ou spirale instable}$$

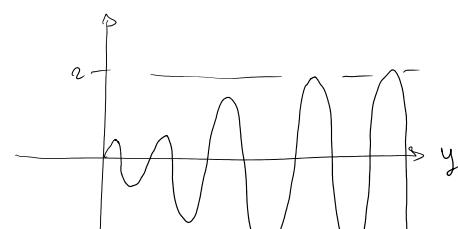


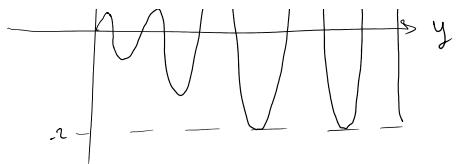
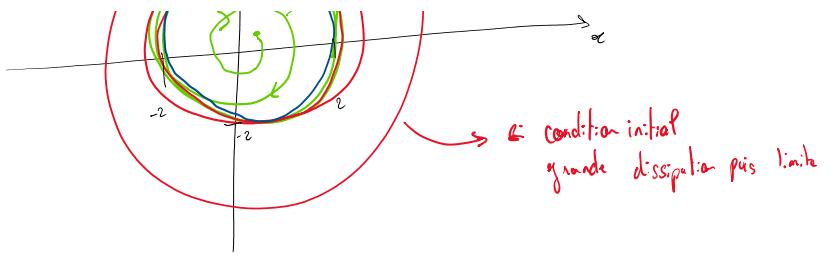
Exp/Nom (voir script python fourni):

$$\mu = 0.11$$

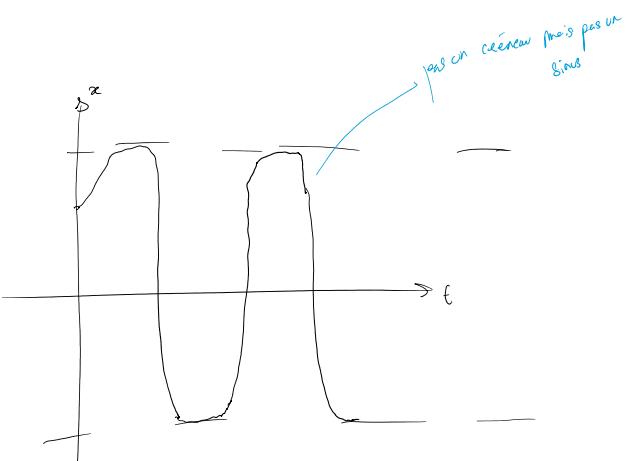
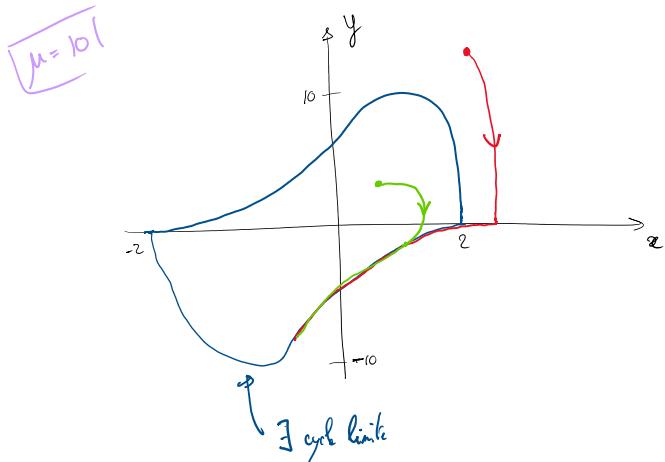


Ce n'est pas → éloignement car instable pris limite par dissipation





\exists un cycle limite (pas forcant circulaire).



II - Bilan énergétique

$$X = \sqrt{\mu} x \Rightarrow \ddot{X} + (\lambda^2 - \mu) \dot{X} + X = 0 \quad \left(\dot{X} = \frac{dx}{dt} \right)$$

$$E = \frac{1}{2} (\dot{X}^2 + X^2)$$

Évolue dans le temps $\dot{E} = (\mu - X^2) \dot{X}^2$
si ça oscille, E est conservé en moyenne

$$\overline{A} = \frac{1}{T} \int_0^T dt A$$

$$\overline{\frac{d}{dt} E} = 0$$

$$\Rightarrow (\mu - X^2) \dot{X}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \mu \dot{X}^2 = X^2 \dot{X}^2$$

↑ dissipatif NL
↑ pompage-dissipation
↑ terme linéaire
↑ quadratique en énergie

sature (explique le cycle limite).

III - Période d'oscillation à $\mu \gg 1$

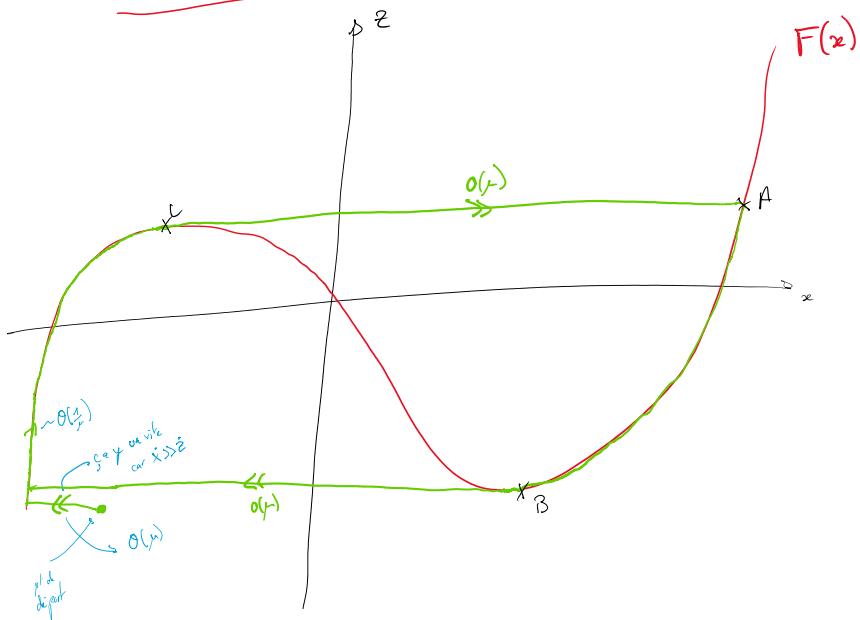
y sont les valeurs de μ à amplitude

benne d'oscillations par μ .

$$Z = \frac{1}{\mu} \dot{x} + F(x) \quad \text{avec } F(x) = \frac{1}{3} x^3 - x \quad \Rightarrow \ddot{z} = \frac{\ddot{x}}{\mu} + \dot{x} F(x) \quad \text{or} \quad \ddot{z} + \mu(\lambda^2 - 1)\dot{z} + x = 0$$

$$z = \frac{1}{\mu} \dot{x} + F(x) \quad \text{avec } F(x) = \frac{1}{3} x^3$$

SD $\Rightarrow \begin{cases} \dot{z} = \mu(z - F(x)) \\ \ddot{z} = -\frac{1}{\mu} x \end{cases}$



$\Rightarrow T = 2 \times t$ temps passé sur un morceau de courbe $F(x)$

$$= 2 \int_A^B dt$$

$$= 2 \int_{x_0}^{x_0} dx \frac{dt}{dx}$$

$$\left. \begin{array}{l} B : \text{minimum local de } T \\ F(A) = T(C) \text{ maximum local de } F \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x_A = 2 \quad x_B = 1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d\dot{z}}{dx} \frac{dx}{dx} = f'(x) \frac{dx}{dx}$$

car on écrit $z = F(x)$

$$z = -\frac{1}{\mu} x$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\mu(x^2-1)}$$

on retombe les bornes le moins se berner.

$$\Rightarrow T = 2 \int_1^2 dx \mu \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

$$\Rightarrow T = 2 \mu \left[\frac{x^2}{2} - \ln x \right]_1^2$$

$$\boxed{T = \mu (3 - 2 \ln 2)} \quad \text{Pour } \mu \gg 1$$

¶. Période à $\mu \ll 1$.

Si on a un petit paramètre (ici $\mu \ll 1$) \Rightarrow Méthode des échelles multiples

Si on a un petit paramètre (ici $\mu \ll 1$) \Rightarrow Méthode des échelles multiples

IV. Période τ :

Si on a un petit paramètre (ici $\mu \ll 1$) \Rightarrow méthode des échelles multiples
Pour les pb avec un petit paramètre / échelle bien séparée (une idée plus formelle et générale par WKB a moins g, qui consiste à basculer petit devant $V(x)$ pour résoudre schématiquement).

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad \text{si } \mu \ll 1$$

On suppose la forme:

$$x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k x_k(x_0, x_1, x_2, \dots)$$

$$= x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots$$

$x_i = \mu^i x$ = différentes échelles de temps

Il y a beaucoup de degrés de liberté dans cette forme

Il faut demander que $\frac{dx_0}{dt}$ reste borné sur des temps $\tau \gg 1$, l'échelle x_0 \leftarrow c'est à dire que $\mu^2 x_0 \ll \mu x_1 \ll x_2 \ll \dots$ sur l'échelle de temps x_0

$$\frac{dx}{dt} = \partial_{x_0} + \mu \partial_{x_1} + \mu^2 \partial_{x_2} + \dots$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \partial_{x_0} + 2\mu \partial_{x_0} \partial_{x_1} + \mu^2 (\partial_{x_0} \partial_{x_2} + \partial_{x_1} \partial_{x_1}) + \dots$$

On injecte dans l'ODE, et on résout ordre par ordre en traitant les résonances

Ordre 0: $\partial_{x_0}^2 x_0 + x_0 = 0$

$$\Rightarrow x_0(x_0, x_1, \dots) = X_0(x_0, x_1, \dots) \cos(x_0 + \frac{\phi}{2}(x_0, x_1, \dots))$$

\downarrow pas de dep en x_0 car ODE mais possible dep en les autres échelles \rightarrow ressemble à WKB ici

Ordre 1:

$$\partial_{x_0}^2 x_1 + x_1 = -2 \partial_{x_0} \partial_{x_1} x_0 - (x_0^2 - 1) \partial_{x_0} x_0$$

\downarrow il faut faire ici tout $\cos(x_0 + \dots), \sin(x_0 + \dots)$ sinon résonance.

OH à la fréquence 1

Termes sources:

$$= \left(2 \partial_{x_1} X_0 - X_0 + \frac{X_0^3}{4} \right) \sin(x_0 + \frac{\phi}{2}) - 2 X_0 \partial_{x_1} \cos(x_0 + \frac{\phi}{2}) + \frac{X_0^3}{4} \sin(3x_0 + \frac{3\phi}{2})$$

;

Il faut, par cohérence de la forme des solutions imposer que:

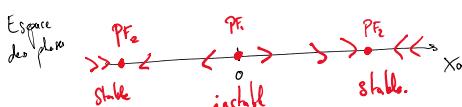
$$\begin{cases} 2 \partial_{x_1} X_0 - X_0 + \frac{X_0^3}{4} = 0 \\ -2 X_0 \partial_{x_1} \cos \frac{\phi}{2} = 0 \end{cases}$$

La deuxième est satisfaite par

$$\frac{\phi}{2} = \mathcal{F}(x_0, x_1, \dots)$$

La première c'est en SD!

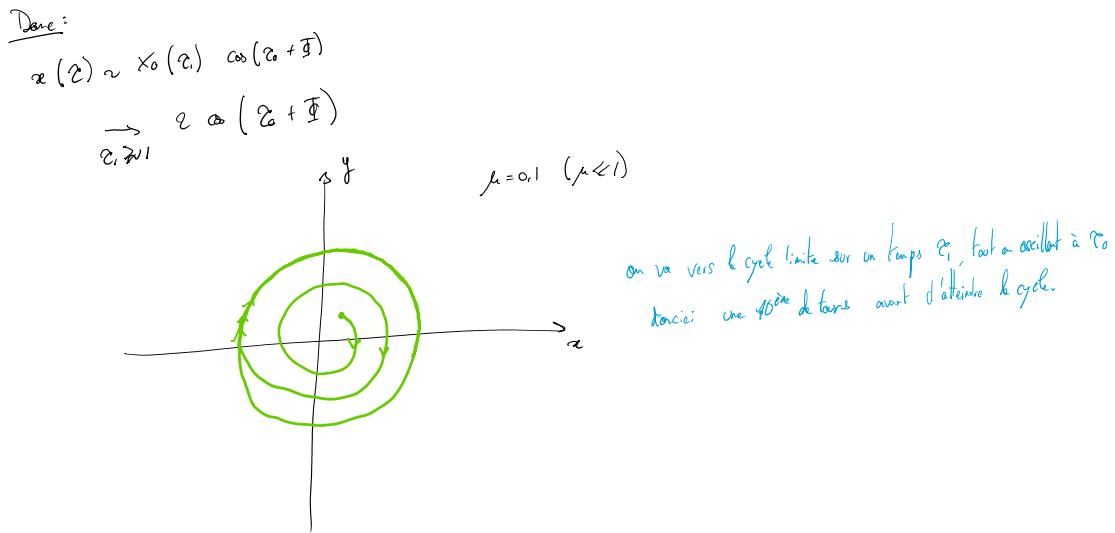
$$\hookrightarrow x_0' = \frac{X_0}{2} \left(1 - \frac{X_0^2}{4} \right) \quad x_0' = \partial_{x_1} x_0$$



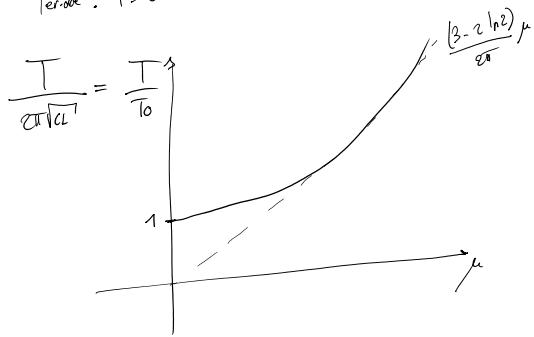
$x_0 \longrightarrow x$ sur une échelle de temps x_1

Dans:

$$x(\tau) \sim X_0(\tau) \cos(x_0 + \frac{\phi}{2})$$



$$\text{Période : } T = 2\pi$$



V. Autre exemple d'oscillations auto-entretenues: réaction Belousov-Zhabotinsky

Non linéarité: dans les équations cinétiques à cause de \rightarrow bimoléculaire
 \rightarrow autocatélyse

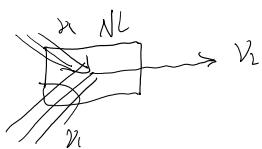
U pb hyper stable \rightarrow publi 2001
 3 bifurcation

\hookrightarrow + bifurcations
 + chaos

Chapitre 3: Solitons

mercredi 8 janvier 2025 13:36

Rq: NL sur faisceau lumineux

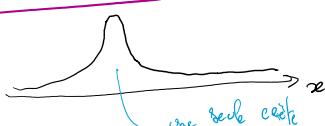


$$\lambda_2 = \frac{\lambda}{n} \quad n = 2 \lambda$$

↑ laser Nd:YAG 800 nm → 400 nm.

I) Ondes 100% non linéaires: Solitons

Soliton = onde solitaire

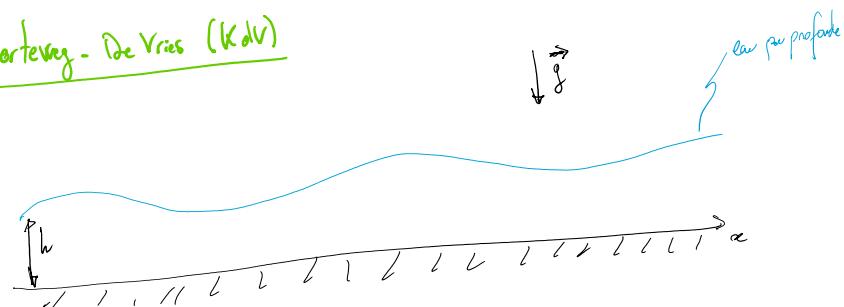


en milieu dispersif \Rightarrow l'onde stable et donc plus de soliton \Rightarrow il faut donc des NL pour composer les pertes.

Deux ingrédients obligatoires:

- dispersif
- NL

1) Korteweg - De Vries (KdV)



$\vec{v}_0 = \vec{0}$, $h \ll L$, régime compressible.
 $(\epsilon = \frac{h}{L} \ll 1)$

dispersif: $\omega^2 = \frac{k}{h} \propto k$
 $\sim h \left(h + \frac{h^3}{3} \right)$

NL. $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$

ref des courants parabolique

$$\partial_x u - 6u \partial_x u + \partial_x^3 u = 0 \quad | \quad \text{KdV}$$

d'où absence de turnover \rightarrow régime stationnaire pour ces ondes.

avec $u = \frac{\omega_x}{c_0}$, $c_0 = \sqrt{gh}$

ref des ondes allant à c_0

avec $\mu = \frac{\omega}{c_0}$, $c_0 = \sqrt{f^k}$

$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$ ref des ondes allant à c_0

$$z = \frac{(x - ct)}{h}, \quad Z = \frac{c_0 t}{h}$$

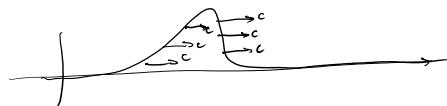
$$\boxed{\text{dispersion: } \omega \propto k^3 \quad (\partial_{zz} u + \partial_z^3 u = 0 \Rightarrow i\omega + k^3 h = 0 \rightarrow \omega \propto k^3)}$$

$$\boxed{\text{NL} \quad \partial_z u - 6u \partial_z u = 0 \quad (\text{si on a une forme en } z)}$$

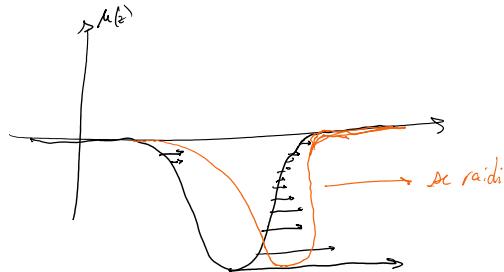
$$\Leftrightarrow \partial_z u = 6u \partial_z u$$

$$\partial_z u = -c \partial_z u$$

$\downarrow u(z - c t)$



$$\partial_z u = 6u \partial_z u$$



Une solution c'est donc une solution $u(z, t) = f(z - ct)$ (seule type de solution qui conserve sa forme).

Nouveau ref: $X = z - ct$

on injecte dans $V_d V$

$$-c f' - 6ff' + f''' = 0$$

intègre $\Rightarrow -cf + f'' - 3f''' = A$

$\Rightarrow 0$ pour un soliton

car $f \rightarrow 0$
 $f'' \rightarrow 0$

$$\Rightarrow f'' = cf + 3f^2 = -\frac{dV}{df} \quad \text{PFD-like!} \quad \text{si on pose } V = -\left(\frac{c}{2}f^2 + f^3\right)$$

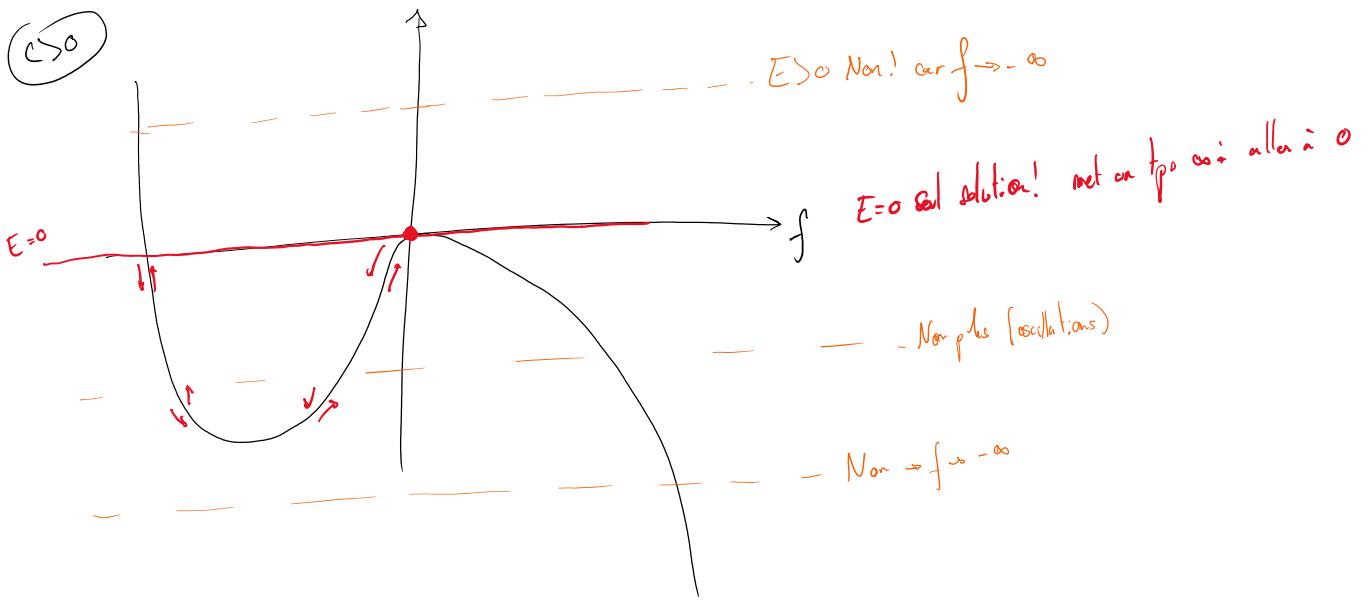
C'est une particule dans $V(f)$

$(c > 0)$

1

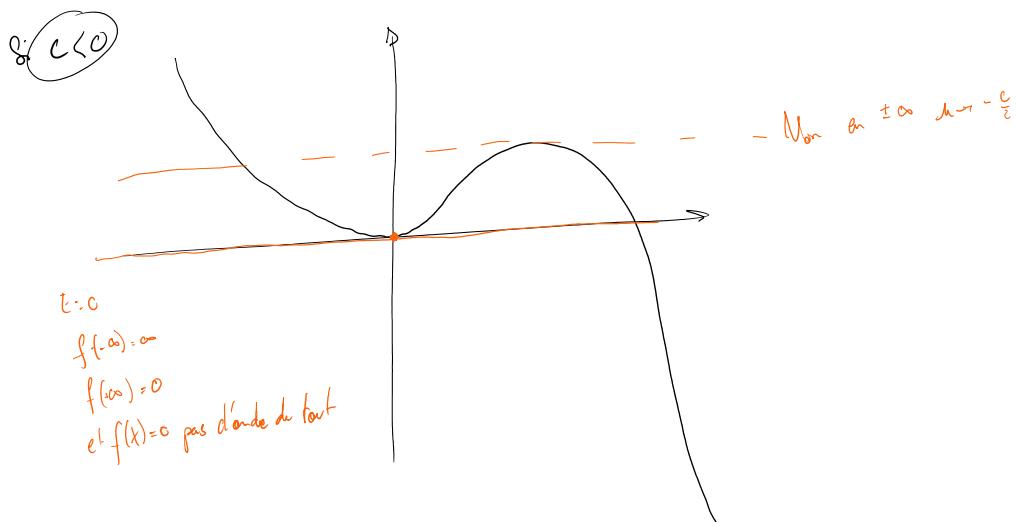


$E > 0$ Non! car $f \rightarrow -\infty$



à $t=0$ $f(-\infty)=0$ et $f(0) = -\frac{c}{2}$
 $f(+\infty)=0$

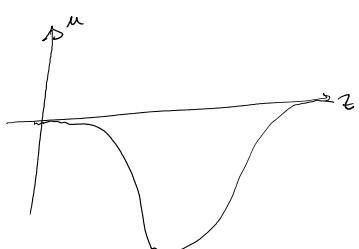
On a bien existence de la solution soliton. Qui a passage à un maximum $u = -\frac{c}{2}$



$\Rightarrow c > 0$ soit soliton \rightarrow dans un reculant soliton = onde plus rapide et de grande amplitude.

pas de soliton subsonique

Rq: la solution c'est $u(z, z) = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(z - cz)\right)$



modèle de tsunami assez bon

$$u(x, t) = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2h} (x - c_0(1+c)t) \right) \sim \text{modèle de tsunami: onde longue}$$

2) Schrödinger Non-Linéaire

Régit des champs complexes $A(x, t) \in \mathbb{C}$

$$i\partial_t A + \partial_x^2 A + 2|A|^2 A = 0$$

\rightarrow onde des surfaces en eau profonde } pour rencontrer en Ψ quantique
 \rightarrow optique dans les fibres

Dispersion: $i(-i\omega) + (\pm i\hbar)^2 = 0$ et NL
 $\Rightarrow \omega = \hbar^2$ convention de signe ou choisit un axe de temps

Typiquement régit les enveloppes de paquets d'onde.

Ondes en eau profonde: $\tilde{g} \downarrow$

Régime incompressible.

$$\text{NL: } (\vec{\omega} \cdot \vec{v}) \approx \text{Diélectricité } \omega = \omega(k) = \sqrt{gk}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Un paquet de la forme } g(x, t) = \operatorname{Re}(A(x, t) e^{i(kx - \omega t)}) \\ i\partial_x A = -\partial_x^2 A - 2\hbar^2 |A|^2 A \end{array} \right.$$

$$i\partial_x A = -\partial_x^2 A - 2\hbar^2 |A|^2 A$$

$$\omega = -\hbar^2 \omega''(k_0) t$$

$$k = k_0 (x - \omega'(k_0) t)$$

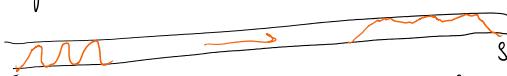
vitesses de groupe du paquet d'onde.

Une solution solitaire de ce problème existe et est un bon modèle de tsunami.

Impulsion dans fibres optiques

Fibres

$n(\omega)$
 \hookrightarrow dispersion: limitation de la fréquence de communication



\Rightarrow solitaires par garder leur forme et compenser la dispersion.

NL? Effet Kerr $\vec{P}(\vec{E}) \sim \epsilon_0 (\chi E + \chi^{(3)} |\vec{E}|^2 \vec{E})$ (pour matériau centro-symétrique $\chi^{(2)} = 0$ since c'est la norme).

NL? Effet Kerr $\vec{P}(\vec{E}) \sim \epsilon_0 (\chi \vec{E} + \chi^{(3)} |\vec{E}|^2 \vec{E})$ (pour matériau centro-symétrique $n = n_0$)

$$\hookrightarrow n(\omega, \vec{E}) = n_0(\omega) + n_2 \vec{E}^2$$

$$k = \frac{\omega}{c} (n_0(\omega) + n_2 \vec{E}^2)$$

$$\approx k_0 + k'(\omega - \omega_0) + k''(\omega - \omega_0)^2 + n_2 \vec{E}^2$$

$$\text{Requiert d'onde optique } \vec{E} = \sqrt{P} e(z, t) \exp(i(k_0 z - \omega_0 t))$$

d'^{re} puissance
d'onde
assez forte
sinon pas d'effet NL

$$\boxed{i \partial_z \epsilon + \partial_z^2 \epsilon + 2 |\epsilon|^2 \epsilon = 0}$$

$$\pm = \text{sign}(-k''(\omega))$$

Si $k'' < 0$, alors c'est bien NLS

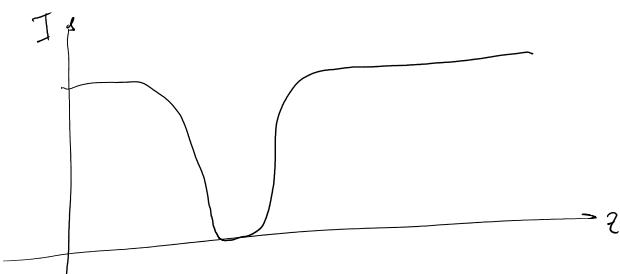
Solution soliton

$$\epsilon = \text{sech}(z + 2cz) \exp(-i(cz + (c^2 - 1)z)) \quad \text{"bright soliton"}$$

Si $k'' > 0$, pas de bright soliton

car par d'solution $\vec{E}(\pm \infty) = \vec{0}$

Mais il y a "dark soliton"



Solitons d'énergie infinie
pas sur d'être physique...

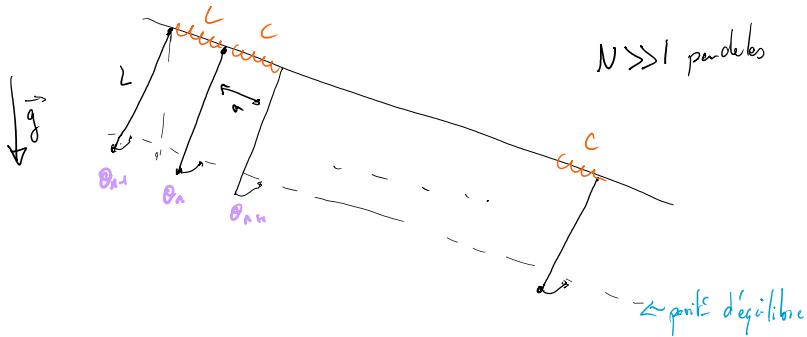
Vidage à effet Kerr typique:
 $\rightarrow \text{PPLN} \propto \text{PPLN/LiNbO}_3$

3 - Sine-Gordon

"Généralisation" de Klein-Gordon $(\square + m^2)\psi = 0$ Théorie des champs massifs $\square = \partial_t^2 - c^2 \Delta$

Sinc-Gordon

$$\boxed{\square \theta + \omega_0^2 \sin \theta = 0}$$



TNC sur pendule n:

$$I \frac{d^2\theta_n}{dt^2} = C(\theta_{n+1} - \theta_n) - C(\theta_n - \theta_{n-1}) - mgL \sin \theta_n$$

$$\Rightarrow I \ddot{\theta}_n - C(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n) + mgL \sin \theta_n = 0$$

systèmes d'ODE, NL, couplés
pas de solution.

$\theta(x)$

$$\theta_n = \theta(na)$$

$$\underline{\theta_{n+1} - \theta_n} = \frac{\theta((n+1)a) - \theta(na)}{a} \sim \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Approximation continue:

si a petit devant le mouvement : $a \ll L (\theta_{n+1} - \theta_n)$

$$\Rightarrow I \ddot{\theta} - c a^2 \ddot{\theta}_x \theta + mgL \sin \theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \frac{c a^2}{I} \ddot{\theta}_x \theta + \frac{mgL}{I} \sin \theta = 0$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $\zeta^2 \quad \omega^2$

$$\boxed{\ddot{\theta} - c^2 \ddot{\theta}_x \theta + \omega_0^2 \sin \theta = 0}$$

Solution ? $\theta(x, t) = \theta \underbrace{(\frac{x - \omega t}{a})}_{z}$

$$\Rightarrow \omega^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} - c^2 \frac{d^2\theta}{dz^2} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - c^2} \sin \theta$$

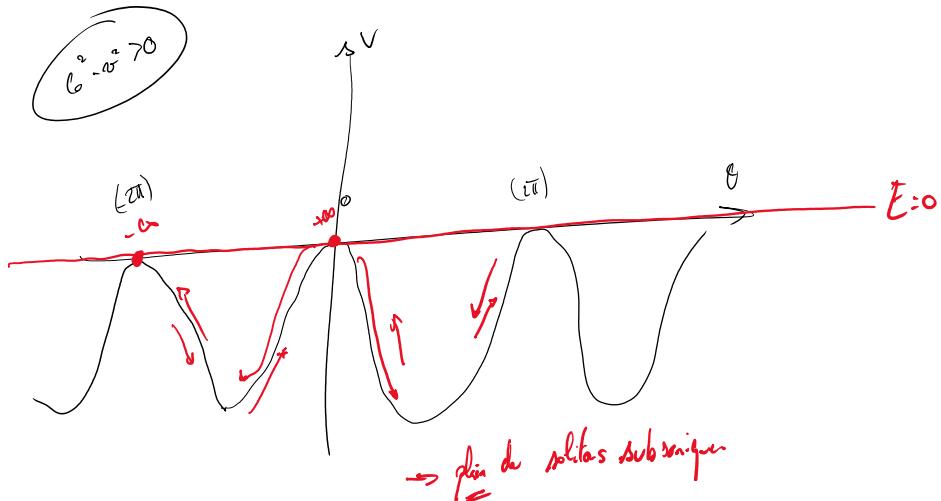
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{c^2 - \omega^2} (1 - \cos \theta) = E$$

$\begin{cases} \theta \\ \text{solution} \end{cases} \text{ car } \cos \theta (\pm \infty) = 1$
 , la constante

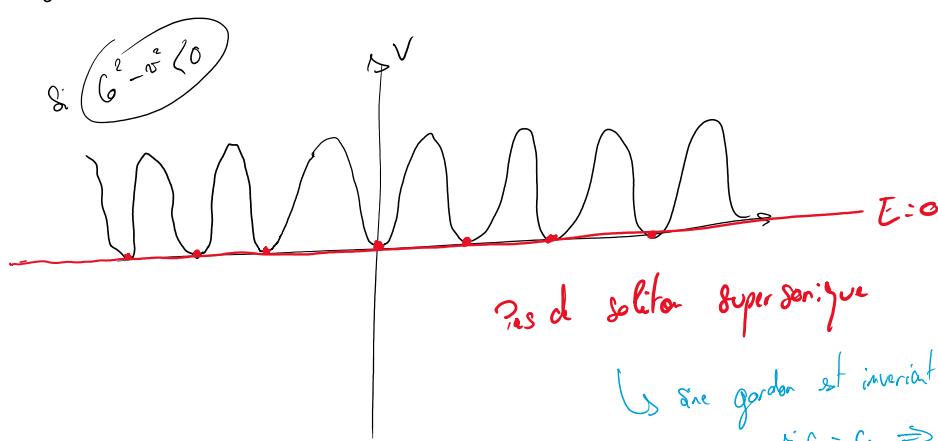
$$\Rightarrow \omega_0^2 (d\theta) = \theta_0^2 - \theta^2$$

$$\begin{aligned} & \theta = 0 \\ & \text{et} \quad \cos \theta (\pm \infty) = 1 \\ & \text{et} \quad \frac{d\theta}{dt} (\pm \infty) = 0 \end{aligned}$$

$$V = -\frac{\omega_0^2}{c_0^2 - \theta^2} (1 - \cos \theta)$$



Solutions à $E=0$, avec c_0 des solitons possibles



↳ une gordon est invariant de Lorentz
 $\gamma c_0 = c \Rightarrow$ pas d'onde qui va au delà de $c \Rightarrow$ Lorentz constant.

On a la forme exacte

$$\theta = 4 \operatorname{Arctan} \left(\exp \left(\pm \frac{\omega_0}{c_0} \sqrt{\frac{z}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \right)$$

$$= 4 \operatorname{Arctan} \left(\exp \left(\pm \frac{\omega_0 - vt}{c} \sqrt{\frac{1 - v^2/c^2}{c^2}} \right) \right)$$

$\propto \gamma(v)$!

Lorentz!

Si on transforme
de Lorentz

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{\gamma} (x - vt) \\ \tau = \frac{1}{\gamma} \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \left[\nabla_{\xi, \tau} \theta + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \right] \text{ invariant!}$$

$$\text{Contraction de Lorentz:} \\ \Rightarrow \theta = \gamma \arctan \left(\exp \left(\pm \frac{x - vt}{L(\sigma)} \right) \right)$$

$$L(\sigma) = \gamma(\sigma) \frac{c_0}{\omega}$$

Rq: preuve contre exemple

G. Berry 1978 Non spreading wave packets

$$i \partial_t \psi = - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \text{linéaire} \\ &\rightarrow \text{dispersif } (\omega \propto k^2) \\ &\rightarrow \text{particules libres} \end{aligned}$$

Sous le d'Alry

Mais si $\psi(x, \sigma) = A_i \left(\frac{Bx}{t^{2/3}} \right)$

alors $\psi(x, t) = A_i \left(\frac{B}{t^{2/3}} \left(x - \frac{B^3 t^2}{4m^2} \right) \right) \times \exp \left(i \frac{B^2 t}{2m \hbar} \left(x - \frac{B^3 t^2}{6m^2} \right) \right)$

$$|\psi|^2 = A_i^2 \left(\frac{B}{t^{2/3}} \left(x - \frac{B^3 t^2}{4m^2} \right) \right)$$

\rightarrow conserve sa forme avec le temps ! (contradict dispersif !)

\rightarrow accélère uniformément $v = \frac{B^3 t}{4m^2}$ (contradict aspect libre !)

\rightarrow linéaire donc pas en solution ! (contradict aspect linéaire).

Poly

mercredi 8 janvier 2025 13:36



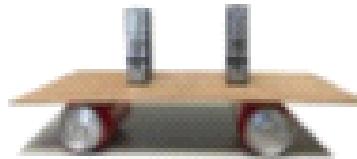
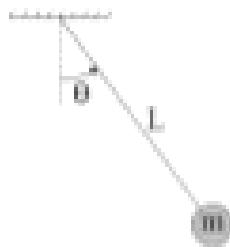
nonLinearP
hysics-2024

Physique non-linéaire

Agrégation Physique

Armand Leclerc
armand.leclerc@ens-lyon.fr

2023-2024



Bonus :

- M9 : Phénomènes non-linéaires
- M96 : Oscillateurs couplés
- Leçons type "Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarité" (2018 et agrégation doctorant 2022) ou "Oscillateurs ; Systèmes couplés ; Non Linéarité - applications" (2020)
- Exercice : Problème de Physique 2021
- arrêter de supposer que tout est linéaire parce qu'on sait pas faire autrement

Références pour oscillation auto-entretenue :

M. Kröll, *Exemples d'oscillateurs auto-entretenus*, IUT'90, 131 (1996)

Références pour oscillateurs couplés :

A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths (2001), *Synchronization. A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge: University Press, Cambridge

Référence pour ondes non-linéaires :

M. Peyrard, T. Dauxois, *Physique des ondes* (2004)

1 Oscillations libres

1.1 Les propriétés des oscillateurs harmoniques

Les oscillations sont des phénomènes fondamentaux. Peu importe que la dynamique soit mécanique, électromagnétique, électrique, gravitationnelle, nucléaire, il existe des objets stables. Ces systèmes stables résistent aux perturbations (par définition), il faut donc que ces perturbations restent au cours du temps au voisinage de l'équilibre de l'objet perturbé. Il est donc naturel que les perturbations d'un système stable oscillent au cours du temps.

Avec une telle approche des oscillations, vu ce qu'elles sont la dynamique des perturbations des objets, on est souvent amené à considérer qu'elles sont de faible amplitude (selon un sens qui dépend du système d'étude). Un tel raisonnement permet d'approximer certaines quantités, par un développement de Taylor.

- Mécanique : force $F(x) \sim 0 - kx$.
- Électrique d'un condensateur : charge $q(U) \sim 0 + CU$.
- EM dans la matière : polarisation $P(E) \sim 0 + \epsilon_0 \chi E$.
- Acoustique : pression $p(p) \sim 0 + A \frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{m} \frac{d^2}{dt^2}$.

Puisqu'on développe toujours autour d'un état d'équilibre, l'ordre 0 sera toujours nul, d'où l'obtention d'une relation linéaire, qui donne son nom à l'approximation. Une définition de la linéarité est donc : l'effet est proportionnel à la cause.

Ce sera utile prendre à la fois en termes d'amplitude (multiplicatif) et de superposition (additif). En effet, la linéarité suppose également que deux causes ajoutées l'une à l'autre auront comme sortie la somme de leurs effets. On verra se poser le concept de fonction de transfert, souvent utilisé en électronique. Les systèmes linéaires se modélisent bien par une équation du type

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (1)$$

tel que un effet $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ aura comme sortie $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$.

Dans les deux premiers exemples, les perturbations ne dépendent que du temps et pas de l'espace, on arrive donc à la relation du prototype de l'oscillation : l'oscillateur harmonique.

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (2)$$

Pour les deux autres exemples, la dépendance en espace rend les perturbations propagatives, car elles oscillent en espace également : on trouve l'équation d'onde. On discutera des effets non-linéaires sur les ondes en Partie III.

Les oscillations linéaires vérifient toutes l'équation de l'oscillateur harmonique. Cette équation s'intègre facilement pour obtenir la solution

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t), \quad (3)$$

si on se donne des conditions initiales sans vitesse (ou, dans le cas contraire, qu'on restabilise le temps initial), dont on peut alors étudier les propriétés directement. Dans ce cas de l'oscillateur harmonique, la cause est x_0 (le déplacement initial) et l'effet est $x(t)$. Il n'y a qu'une conclusion à tirer : x est périodique, d'une période indépendante de son amplitude initiale.

C'est l'oscillabilité : la dépendance en temps est la même pour tous, privilégiante à la perturbation.

La linéarisation d'un problème non-linéaire est toujours une approche valable et riche. Beaucoup de phénomènes

s'approximent bien à cet ordre, et les termes non-linéaires ne sont que des corrections. Le but de ce cours (et de la physique non-linéaire en général) est de discuter de phénomènes non modélisables en physique linéaire, même qualitativement. Il existe des phénomènes purement non-linéaires, et des domaines de la physique où la linéarisation est une approximation trop forte.

1.2 Le pendule, prototype d'oscillations non-linéaires

Le cas très académique du pendule est parfaitement adapté à la discussion des oscillations non-linéaires. Une masse m suspendue à un fil de longueur L dans un champ de gravité uniforme g vérifie comme dynamique

$$m\ddot{\theta} + mg\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0. \quad (4)$$

La fréquence caractéristique de l'oscillateur est $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$, formellement indépendante de la masse de l'objet. La procédure évidente face à cette équation différentielle non-linéaire du second ordre, puisqu'on n'a pas de méthode efficace pour en trouver la solution générale, c'est de se placer dans le régime particulier des petits angles : on linéarise. On note au passage qu'effectivement, on ne dispose pas de solution générale à cette équation. A chaque équation non-linéaire sa fonction spéciale, ici la fonction Amplitude de Jacobi est la solution formelle à l'équation $y'' = -\sin(y)$. Mais lui donner un nom n'est pas suffisant... Le physicien veut avoir une intuition de ses comportements physiques : est-ce qu'elle est périodique, est-ce qu'elle diverge en temps fini, quelles asymptotes peut-elle avoir, comment dépend-elle des conditions initiales, etc. Il est facile de s'attendre à deux régimes bien distincts de la dynamique du pendule : on sait déjà que pour des angles assez petits, on aura des oscillations, qui seront harmoniques pour des angles vraiment petits. Mais on sait aussi que si on lance le pendule assez fort (conditions initiales avec vitesse initiale suffisamment grande), il va tourner en décrivant des cercles pour toujours, si on néglige les frottements. Donc plus d'oscillations, il tourne avec une vitesse angulaire de signe constant.

Ce régime explore la totalité des positions disponibles au pendule, et repose sur le fait que le sinus est 2-périodique. Il est fondamentalement non-linéaire, car un tel comportement est incompréhensible par la linéarisation du problème.

Alors comment, basé sur l'équation du pendule, décire qualitativement ces deux régimes, et prédir une transition entre les deux ? Une approche simple est l'approche énergétique. Transformer l'équation différentielle en intégrale première du mouvement, on obtient

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \omega_0^2(1 - \cos(\theta)) = E = \text{const}. \quad (5)$$

On a donc un potentiel périodique $V(\theta) = \omega_0^2(1 - \cos(\theta))$, qu'on peut facilement tracer, sur la Fig.1. Puisque E est une intégrale première du mouvement, elle est déterminée par les conditions initiales qu'on impose. Elle sera donc de représentation de ces conditions initiales (qui sont 2), mesurées en un seul nombre E . Et là, on peut traiter le problème non-linéaire : si E et la courbe $V(\theta)$ se croisent, alors ce point sera un point de rebroussement, et un angle où le pendule fera demi-tour. Par symétrie, ces points viennent par deux. Donc si $E < \max(V)$, le pendule est piégé dans une région des angles, et doit osciller. Au contraire, pour des conditions initiales telles que $E > \max(V)$, $\dot{\theta}$ est de signe constant, il n'y a pas de points de rebroussement, le pendule tourne toujours dans le même sens : pas d'oscillations.

Il y a donc deux régimes qualitativement très différents, selon qui de E et $2\omega_0^2$ est le plus grand. Le régime appréciable au moins qualitativement par linéarisation est le régime de faible énergie. Mais cette transition et le second régime sont entièrement réglés par la non-linéarité du problème.

On résout numériquement quelques dynamiques du pendule pour illustrer cette discussion dans la Fig.2. On a noté $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse de rotation (rotation discutable), c'est-à-dire en résolvant l'équation différentielle d'ordre 2 comme un système d'ordre 2 de dérivées premières :

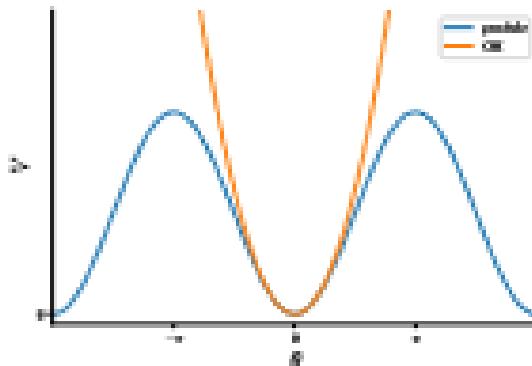


FIGURE 1 – Énergie potentielle du pendule et de l'approximation linéaire.

$$\dot{\theta} = \omega_0 \quad (6)$$

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \sin(\theta). \quad (7)$$

On voit que les petits angles décrivent bien un mouvement périodique harmonique, d'une période plus courte que les oscillations à des angles plus grands. Il y a donc une relation entre période et amplitude $T(\theta_0)$ quand on sort du régime linéaire. On n'a plus la propriété d'inéquivocable : l'amplitude est importante pour la dynamique. De plus, la trajectoire décrite dans l'espace $(\theta, \dot{\theta})$ est donc fermée puisqu'elle est périodique ! Les petits angles décrivent un cercle (ou une ellipse selon les unités des axes), et les angles plus grands décrivent une courbe dont on n'a pas l'équation (mais qu'on pourrait obtenir avec des fonctions spéciales sûrement). Les trajectoires dont l'énergie est juste sous le seuil $2\omega_0^2$ semblent dessiner des points angulaires. Pour une dynamique du second régime ($E > 2\omega_0^2$), qui tourne pour toujours dans le même sens, la trajectoire n'est plus fermée : elle n'est pas périodique.

On voit que la trajectoire critique qui possède les points angulaires sépare en deux régions l'espace (θ, ω) : à l'intérieur sont les oscillations, à l'extérieur les trajectoires de rotation. Il existe donc des moyens simples de déterminer les natures des différents régimes de dynamique, sans connaître la solution exacte du problème.

Calcul de la relation $T(\theta_0)$ et formule de Borda

On cherche à savoir, pour les oscillations, quel est la première correction non-linéaire à la période T .

Même méthode : physicienne

On reprend l'idée du développement de Taylor, mais on pousse l'ordre plus loin. On développe donc le sinus jusqu'à l'ordre 3 :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(\theta - \frac{\theta^3}{6}) = 0. \quad (8)$$

L'idée du développement est la suivante :

On sait que la solution est périodique, d'une certaine période T . La position initiale θ_0 est suffisamment petite pour que la dynamique ne soit pas harmonique. On sait donc que $\theta(t) = \theta_0 f(t)$, où f est T -périodique

et est plus "riche" qu'un simple sinus. Elle doit donc se décomposer en série de Fourier temporelle, et seul le fondamental survit dans la limite $\theta_0 \rightarrow 0$. Les composantes de Fourier dépendent donc de θ_0 . On cherche à développer à la première harmonique cette série de Fourier.

Puisque le terme non-linéaire est un cube, on utilise la relation trigonométrique $\sin(x)^3 = \frac{3}{4} \sin(x) - \frac{1}{4} \sin(3x)$ pour deviner qu'en cube, ça fait apparaître une harmonique d'ordre $k=3$. On se donne donc l'hypothèse

$$\theta(t) = \theta_0(\sin(\omega t) + \alpha \sin(3\omega t)), \quad (9)$$

où α est un paramètre fonction de θ_0 , d'ordre au moins $\mathcal{O}(\theta_0)$, donc petit (car la solution doit être harmonique quand $\theta_0 \rightarrow 0$). Avec cet ansatz, on peut injecter dans l'équation différentielle et identifier les termes :

$$0 = \left(-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2 \theta_0^2}{8}\right) \sin(\omega t) + \left(c(\omega_0^2 - 9\omega^2) + \frac{5\omega_0^2 \theta_0^2}{24}\right) \sin(3\omega t), \quad (10)$$

$$\Rightarrow \omega = \omega_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right). \quad (11)$$

On conclut alors que, à cet ordre, la période est

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right). \quad (12)$$

C'est la formule de Borda. La période augmente avec l'angle initial.

Le second terme donne la relation entre c et θ_0 , $c = \frac{\theta_0^2}{16}$, qui n'est qu'en produit dérivé du calcul.

On conclut donc qu'on a effectivement perdu l'isochronisme, et que les termes non-linéaires font nécessairement apparaître des harmoniques. L'oscillateur linéaire est l'oscillateur harmonique.

2nde méthode : Fonctions spéciales

On peut également établir la relation de Borda en se reposant sur l'étude des fonctions spéciales. En effet, on peut établir la relation $\theta(t)$ plutôt que $\dot{\theta}(t)$ sous une forme intégrale, qui est elle-même une fonction spéciale. Considérons que $t = 0$ est l'instant où le pendule est vertical, et se dirige vers les angles positifs. Alors

$$t = \int_0^t dt, \quad (13)$$

$$= \int_0^\theta d\theta \frac{d\theta}{ds}, \quad (14)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\omega_0}} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) - \cos(\theta_0)}}, \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2\omega_0} \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta_0/2)^2 - \sin(\theta/2)^2}}. \quad (16)$$

On pose alors $k = \sin(\theta_0/2)$, et on change de variable avec $k \sin \phi = \sin(\theta/2)$. On a alors

$$t = \frac{1}{\omega_0} \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin(\phi)^2}}, \quad (17)$$

$$= \frac{1}{\omega_0} F(\phi, k). \quad (18)$$

F est l'intégrale elliptique incomplète de première espèce. La complexité est cachée derrière le nom ; on peut cependant tirer des conséquences physiques de ses propriétés, notamment asymptotiques. Par exemple, on obtient une expression de la période T : le pendule a pris un quart de période de temps pour parcourir le chemin $0 \mapsto \theta_0$. Alors

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{\omega_0} F(\dot{\phi}|_{\phi=\theta_0}, k), \quad (19)$$

$$= \frac{1}{\omega_0} F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{1}{\omega_0} K(k), \quad (20)$$

$$\Rightarrow T = T_0 \times \frac{2}{\pi} K(\sin(\theta_0/2)). \quad (21)$$

$K(k)$ est l'intégrale elliptique complète de première espèce, dont on connaît l'expression en série entière, donnée par les polynômes de Legendre : $K(k) = \frac{2}{3} \sum_{m=0}^{+\infty} P_{2m}(k)^2 k^{2m}$. On a alors l'expression générale de la période, dont on peut obtenir le DL à n'importe quel ordre, dont l'ordre 2

$$T \sim T_0 \left(1 + \frac{K_0^2}{16}\right). \quad (22)$$

1.3 Systèmes dynamiques : que peut-on dire d'un système non-linéaire ?

Revenons sur les différents régimes de dynamique du pendule. On a vu que le plan (θ, ω) et les trajectoires dans ce plan permettait de distinguer les régimes en deux régions distinctes. Cet outil est générique aux systèmes non-linéaires, et s'appelle la représentation en espace des phases. Toute équation différentielle d'ordre n est équivalente à un système différentiel en dérivées premières d'ordre n . C'est ce qu'on a fait en introduisant la variable $x = \dot{\theta}$. Ainsi un système d'ordre 2 sera représenté dans un plan, sous la forme du système d'équation

$$\frac{dx}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(x, y). \quad (23)$$

où f est une fonction non-linéaire. C'est un champ de vecteur dans l'espace des phases, et ses lignes de champs sont les trajectoires du système, selon les conditions initiales. On est donc ramené à l'étude d'un champ de vecteur, dans un plan.

La première question à laquelle on peut répondre dans ce cadre est :
quels sont les équilibres du système ?

Ce sont les positions où f s'arrête :

$$\bar{f}(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

puisque c'est la "vitesse" du système dans cet espace. De tels points sont appelés des Points Fixes, ou sont les états d'équilibre du système. La question naturelle qui suit est : est-ce que ces équilibres sont stables ou instables ? Cela demande d'étudier la dynamique au voisinage d'un point fixe. C'est dans ce contexte qu'une linéarisation du système est justifiée.

Imaginons que (x^*, y^*) est un point fixe. Alors, la dynamique d'un système proche de ce point fixe est décrite

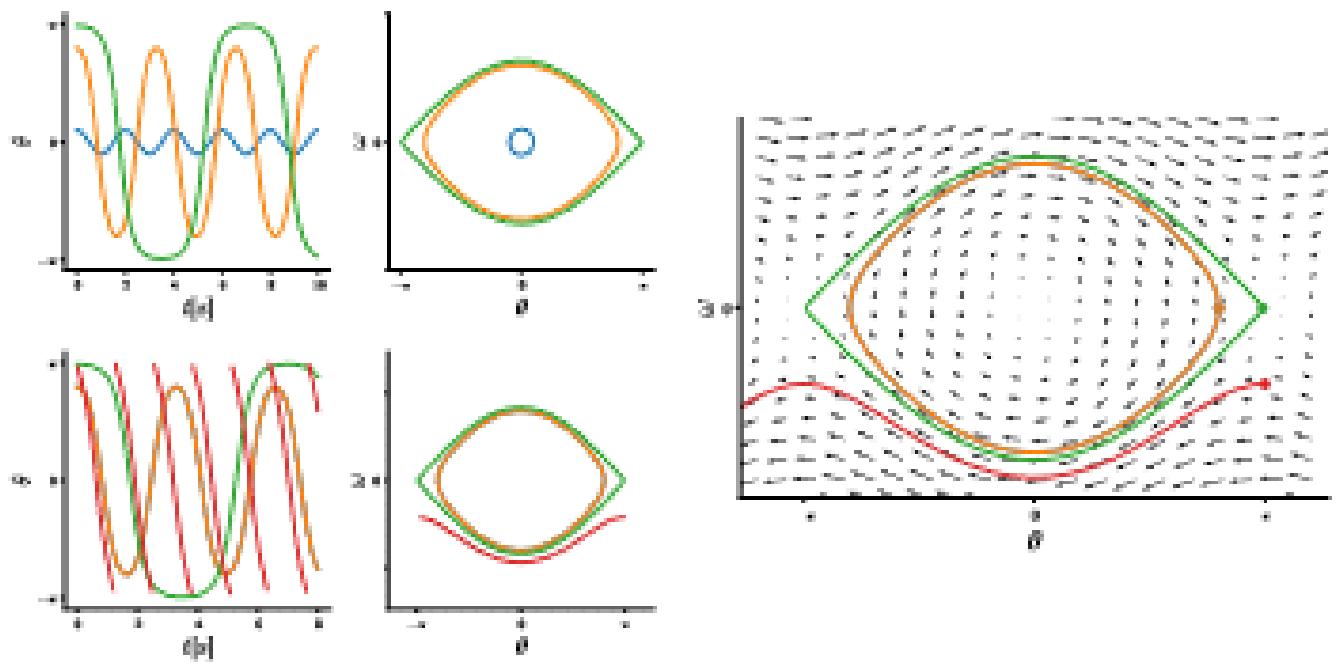


FIGURE 2 – Dynamique du pendule pour différentes positions initiales. **Couche Haut :** Trois oscillations du pendule sans vitesse initiale, avec positions initiales différentes. Les oscillations étant non-linéaires, le profile $\theta(t)$ ressemble moins à une harmonique $\sin(\omega_0 t)$, et la période augmente avec la position initiale θ_0 . La trajectoire dans l'espace des phases est fermée. **Couche Bas :** Une des trajectoires (rouge) à une position initiale à la verticale, et une vitesse initiale négative. Il tourne à l'infini dans le sens horaire, ce n'est plus une oscillation. Sa trajectoire dans l'espace des phases n'est plus fermée (si on rajoute le modulo 2π , $\theta(t)$ ne fait qu'augmenter). **Droite :** Carte du système dynamique dans l'espace des phases.

T

par

$$\dot{x} = x - x^*, \quad (25)$$

$$\dot{y} = y - y^*. \quad (26)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x f_1 & \partial_y f_1 \\ \partial_x f_2 & \partial_y f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (27)$$

On a noté $\tilde{f} = (f_1, f_2)$. La matrice A dans l'équation ci-dessus est la jacobienne de f prise à la position du point fixe. Ce sont ses valeurs propres qui déterminent si le système proche du point fixe va rester proche ou s'éloigner avec le temps. On pourra donc conclure, grâce à elles, sur la stabilité du point fixe étudié. En effet, comme on le fait en mécanique quantique en résolvant l'équation de Schrödinger sur les états propres du hamiltonien, on a la solution

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \exp(-\lambda_1 t) c_1 v_1^* + \exp(-\lambda_2 t) c_2 v_2^*, \quad (28)$$

où $v_{1,2}^*$ et $\lambda_{1,2}$ sont les vecteurs propres et valeurs propres de A , et $c_{1,2}$ sont les décompositions de la position initiale sur la base de vecteurs propres (produits scalaires $(u_0, v_0) \cdot v_{1,2}^*$). La méthode est donc simple :

- Pour un système donné, on cherche si on se trouve un zero (x^*, y^*) de \tilde{f}
- On calcule les dérivées premières à ce point fixe, et on obtient A
- On note r sa trace et δ son déterminant
- 1er cas : $\delta < 0$. On a $r^2 - 4\delta > 0$ donc les deux valeurs propres sont réelles, et de signe opposé (car produit est $\delta < 0$). Une direction grandit exponentiellement, une autre décroît exponentiellement.
- 2ème cas : $\delta > 0$. Si $r^2 - 4\delta > 0$, on a deux valeurs propres réelles de même signe. Stable si $r < 0$, instable si $r > 0$. Si $r^2 - 4\delta < 0$, elles sont complexes conjuguées. La partie imaginaire n'importe pas sur la stabilité, le point est stable si $r < 0$, instable si $r > 0$.

Cette classification suffit pour la plupart des systèmes physiques. Il existe des cas pathologiques si A n'est pas diagonalisable, ou si les points fixes ne sont pas isolés. La figure Fig.3 présente tous ces cas et leur nom, assez parlants.

Le pendule comme système dynamique

Grâce à ce formalisme, on peut décrire le pendule dans son espace des phases (θ, ω) . Le système est

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega \\ -\omega_0^2 \sin(\theta) \end{pmatrix}. \quad (29)$$

On trouve deux points fixes :

- $\omega^* = \theta^* = 0$
- $\omega^* = 0, \theta^* = \pi$.

D'expérience, on sait que le premier doit être stable, et le second instable. Calculons-le.

Premier Point Fixe : $\omega^* = \theta^* = 0$

On calcule la jacobienne

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\tau = 0, \quad (31)$$

$$\delta = \omega_0^2. \quad (32)$$

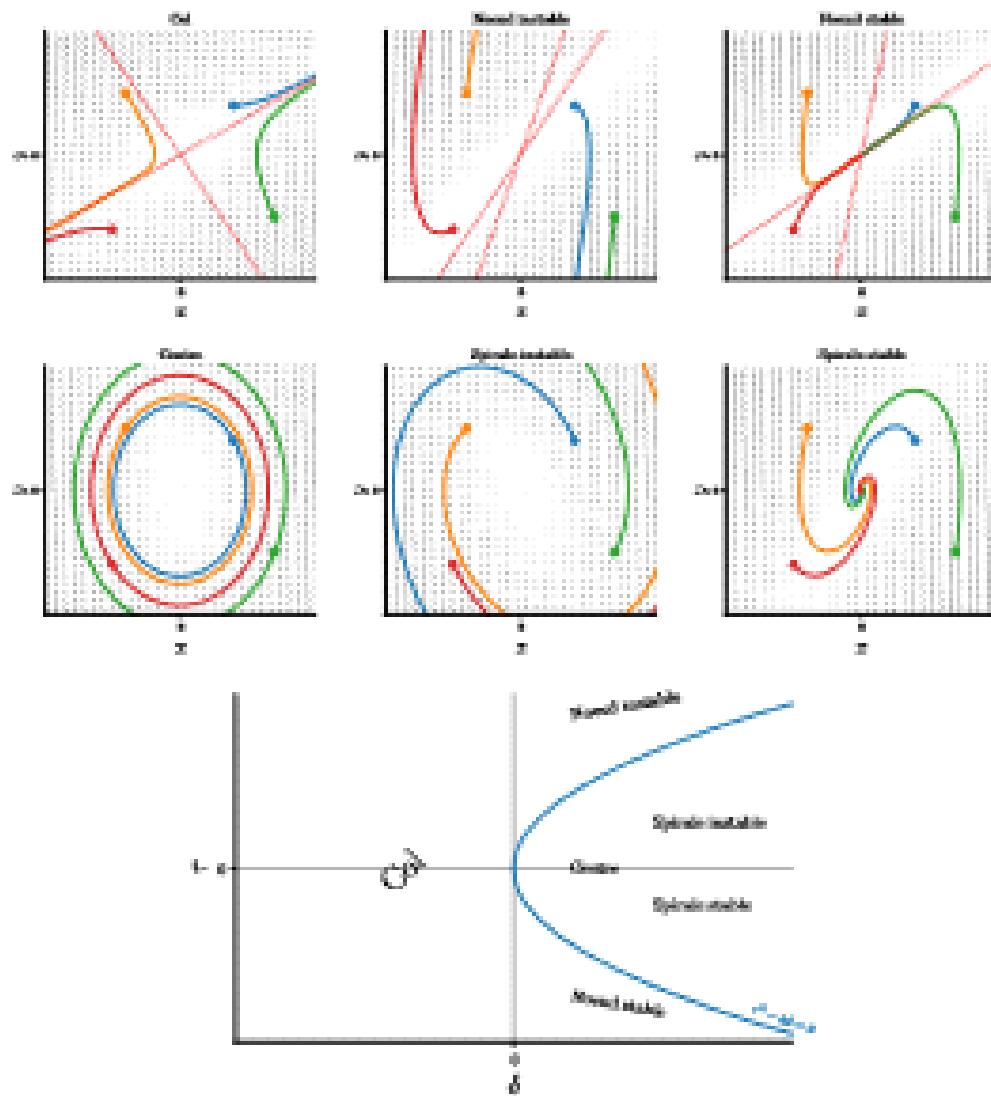


FIGURE 3 – Points fixes et leur nom, dans l'ordre haut puis bas, de gauche à droite : un col, un nœud instable, un nœud stable, un centre, une spirale instable, une spirale stable.

C'est un centre, d'où les trajectoires en ellipses/cercles. Les valeurs propres sont $\pm i\omega_0$. Tout est normal, c'est l'oscillateur harmonique.

Second Point Fixe : $\omega^* = 0, \theta^* = \pi$
On calcule la jacobienne:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

$$\tau = 0, \quad (34)$$

$$\delta = -\omega_0^2. \quad (35)$$

C'est un col, donc instable. Les valeurs propres sont $\pm i\omega_0$. En effet, un pendule (rigide bien sûr) positionné vers le bas s'écarte de cette position exponentiellement, avec une croissance en $\exp(\sqrt{\omega_0^2}t)$.

De manière générale, il existe des paramètres extérieurs au système. Si la nature des points fixes dépend d'un tel paramètre de contrôle, on parle de bifurcation. Il en existe de plusieurs types.

Exemple : Romeo et Juliette

"Deux assuraux prudent parviennent à tomber assuraux l'un de l'autre ? On modélise le système par $a < 0$ mesure la prudence, et $b > 0$ la réactivité."

$$\dot{R} = aR + bJ, \quad (36)$$

$$\dot{J} = bR + aJ. \quad (37)$$

Montrer que deux issues à l'histoire sont possibles, selon les valeurs de a et b .

2 Oscillations auto-entretenues

L'exemple du pendule permet d'introduire les concepts et les outils des systèmes dynamiques, et d'illustrer un peu l'oscillateur harmonique en tant que limite à des propriétés rares, qui ne seront pas conservées par les oscillations non-linéaires. Les non-linéarités font en général : perdre l'isochronisme, perdre l'harmonicité de l'oscillation (riche spectre de Fourier), voire perdre le régime oscillant pour les grandes énergies. Dans d'autres situations, les non-linéarités peuvent au contraire permettre l'extinction des oscillations qui devraient être dissipées par dissipations. On parle alors d'oscillations auto-entretenues, ou d'oscillateurs non-linéaires. Ce n'est pas le cas du pendule : d'expériences, on sait qu'un pendule amorti va dissiper son énergie jusqu'à l'inertie, quelles que soient les conditions initiales. Avec dissipation, le PF du pendule en $(0,0)$ est une orbite stable. Le prototype d'oscillateur non-linéaire est l'oscillateur de Van der Pol.

Un point important : un oscillateur auto-entretenue est donc un oscillateur dissipatif, dont la non-linéarité compense cette perte d'énergie. Il oscille à sa fréquence propre. La compensation énergétique ne provient pas d'un fourreau, qui imposerait en même temps la fréquence. Pas de fourreau périodique pour les oscillateurs auto-entretenus (même si on peut également faire osciller un système dissipatif en le forçant périodiquement, ce n'est pas la même nature d'extinction).

2.1 Le fameux oscillateur de Van der Pol

Van der Pol a conçu un circuit électrique qui peut compenser les dissipations par effet Joule d'un RLC. Pour ça, on ajoute en série d'un RLC un dipôle non-linéaire de caractéristique

$$U_{NL}(I) = -R_0 I + M^2. \quad (38)$$

On a donc comme équation pour le circuit

$$\frac{Q}{C} + L\dot{I} + RI + (-R_0 I + M^2) = 0, \quad (39)$$

$$\Rightarrow L\ddot{I} + (R - R_0 + 2M^2)\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0, \quad (40)$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \mu(x^2 - 1)x + x = 0. \quad (41)$$

La dernière équation s'obtient en adimensionnant le temps et l'intensité (par $\tau = \sqrt{LC}t$ et $x = I\sqrt{\frac{R_0+R}{L}}$). Le paramètre $\mu = (R_0 - R)\sqrt{C/L} > 0$ mesure l'importance de la variation d'énergie (terme en \dot{x}) par rapport aux oscillations ($x + \ddot{x}$). Cette variation d'énergie est une compétition entre non-linéarité et dissipation. En effet, quand $x^2 > 1$, le terme est positif, et l'énergie est dissipée. Quand $x^2 < 1$, "la dissipation est négative", c'est-à-dire qu'on pompe de l'énergie dans le système. On comprend donc que le système ne pourra pas tendre vers un état $x = 0$, et que l'oscillation sera entretenue. On peut calculer que le point $(0,0)$ est un point fixe instable.

Le système dynamique se récrit, avec $y = \dot{x}$

$$\dot{x} = y, \quad (42)$$

$$\dot{y} = -\mu(x^2 - 1)y - x. \quad (43)$$

Il ne possède qu'un unique PF, en $(0,0)$. On calcule qu'à ce voisinage, la dynamique linéarisée est

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (44)$$

La jacobienne a une trace $\tau = \mu > 0$ et un déterminant $\delta = 1 > 0$. Le PF est donc une spirale ou un noyau instable, selon le signe du discriminant du polynôme caractéristique. Ce discriminant vaut $\Delta = \tau^2 - 4\delta = \mu^2 - 4$. Donc selon si μ est supérieur ou inférieur à 2, la nature du PF est différente. Cependant on ne parle pas de bifurcation pour autant, puisqu'il reste instable dans les deux cas. Le système n'a donc pas de position d'équilibre stable : on ne peut pas dissiper l'énergie jusqu'à 0. Mais on a déjà vu qu'à grande intensité ($\mu > 1$), la friction dissipe bien l'énergie. On a qu'une conclusion possible : le système va tendre vers une oscillation. On parle de cycle limite.

On réitère la dynamique numériquement pour deux valeurs du paramètre μ sur la Fig.4. On observe que, pour toutes les conditions initiales, les trajectoires tendent vers un cycle limite, relativement circulaire pour petit μ , beaucoup moins pour grand μ . Les trajectoires qui commencent à l'extérieur s'enroulent en divergeant vers le cycle limite, les trajectoires commençant à l'intérieur croissent vers lui.

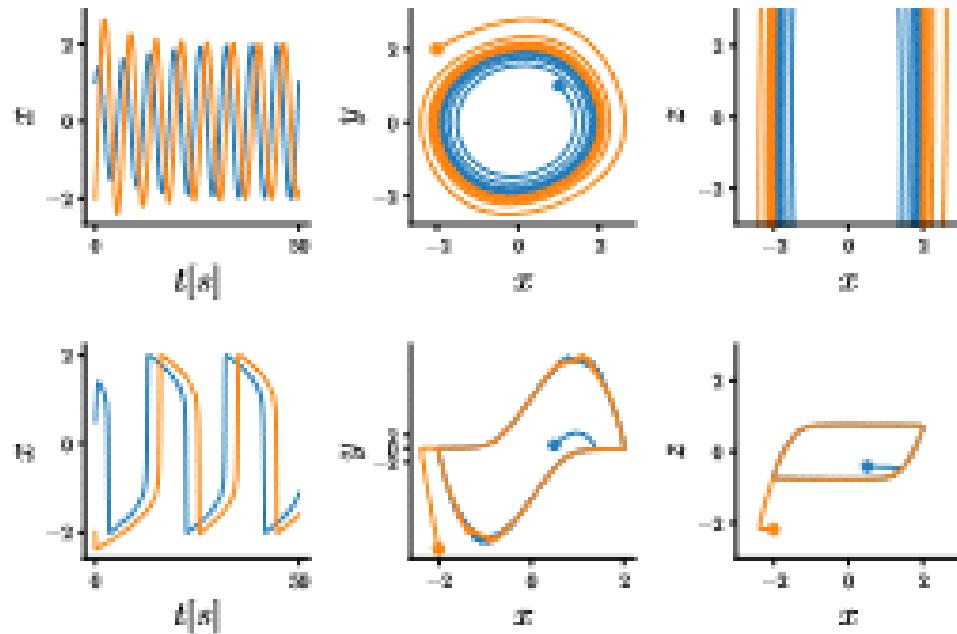


FIGURE 4 – Dynamique de l'oscillateur de Van der Pol, pour $\mu = 0.1$ (haut) et $\mu = 10$ (bas). Selon le régime, y ou x est plus convenable comme variable conjuguée à x pour décrire le cycle limite.

2.2 Considérations énergétiques

Si on réécrit la variable comme $X = \sqrt{\mu}x$, on obtient comme équation

$$\ddot{X} + (X^2 - \mu)\dot{X} + X = 0. \quad (45)$$

L'énergie stockée dans l'oscillation est contrainte à partir de l'oscillateur harmonique

$$E = \frac{1}{2} (X^2 + \dot{X}^2). \quad (46)$$

La variation d'énergie est donc $\dot{E} = (\mu - X^2)\dot{X}^2$, par l'équation de la dynamique.

Puisque le système suit bien une dynamique oscillante, alors l'énergie est en moyenne conservée, ce qui s'écrit

$$\frac{d}{dt} E = \int_0^T dt \frac{dE}{dt} = 0, \quad (47)$$

$$\Rightarrow \overline{(\mu - X^2)\dot{X}^2} = \overline{(\mu \dot{X}^2 - X^2 \dot{X}^2)} = 0. \quad (48)$$

$\mu = (R_0 - R) \sqrt{\frac{C}{2}} > 0$ mesure l'énergie pompée dans le système, et qui génère l'instabilité linéaire du PP au centre. Ce terme est quadratique car il provient d'un terme linéaire de l'équation de la dynamique. Il doit être compensé en moyenne sur une période par le terme quartique du terme non-linéaire de la dynamique, pour qu'en régime d'oscillation soit atteint.

Ce résultat est très générique aux oscillateurs non-linéaires, car le terme quartique est le premier terme à pouvoir compenser la variation d'énergie linéaire (dissipation/instabilité). En effet, un développement de Taylor de la fonction de dissipation (dans une équation type $\ddot{x} = \gamma(x)x^2$) à l'ordre 2 donnerait 3 termes

$$\gamma(x) = \gamma_0(1 + \alpha x - \beta x^2), \quad (49)$$

alors le terme linéaire donnerait une variation nulle en moyenne : $\overline{\alpha x^2} = 0$ (au moins pour une oscillation harmonique $x \sim \sin(t)$).

2.3 Période à $\mu \gg 1$

L'étude de l'espace des phases permet d'estimer la période de l'oscillateur dans le régime $\mu \gg 1$. Si on se donne comme seconde variable $z = \frac{1}{\mu}x + F(x)$ avec la fonction $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$, on obtient le système dynamique

$$\dot{x} = \mu(z - F(x)), \quad (50)$$

$$\dot{z} = -\frac{1}{\mu}x. \quad (51)$$

On peut alors poser le comportement de l'oscillation, ainsi que sa période. En effet, donnons-nous une condition initiale en dehors de la courbe $z = F(x)$. Alors on a

$$\dot{z} = O(\mu) \gg 1, \quad (52)$$

$$\dot{x} = O(1/\mu) \ll 1. \quad (53)$$

le mouvement est donc très fortement horizontal (direction x), jusqu'à atteindre la courbe $z = F(x)$. Plus précisément, si le système se situe au dessus de cette courbe, il y sera rameré avec une forte vitesse horizontale vers la droite. S'il se situe dessous, il y sera rameré avec une vitesse horizontale vers la gauche. Une fois sur la courbe, la vitesse horizontale devient faible voire nulle, de l'ordre de la vitesse verticale : $O(1/\mu)$. On suit la courbe $F(x)$ avec une vitesse de cet ordre jusqu'à atteindre le maximum/minimum local de la courbe. A ce point, on sort légèrement de la courbe, et on est entraîné loin d'elle avec une grande vitesse horizontale à nouveau. On répète toutes ces étapes, qui constituent le cycle limite. Elles sont clairement schématisées sur Fig.3, et visuellement réalisées par les dynamiques numériques de la Fig.4.

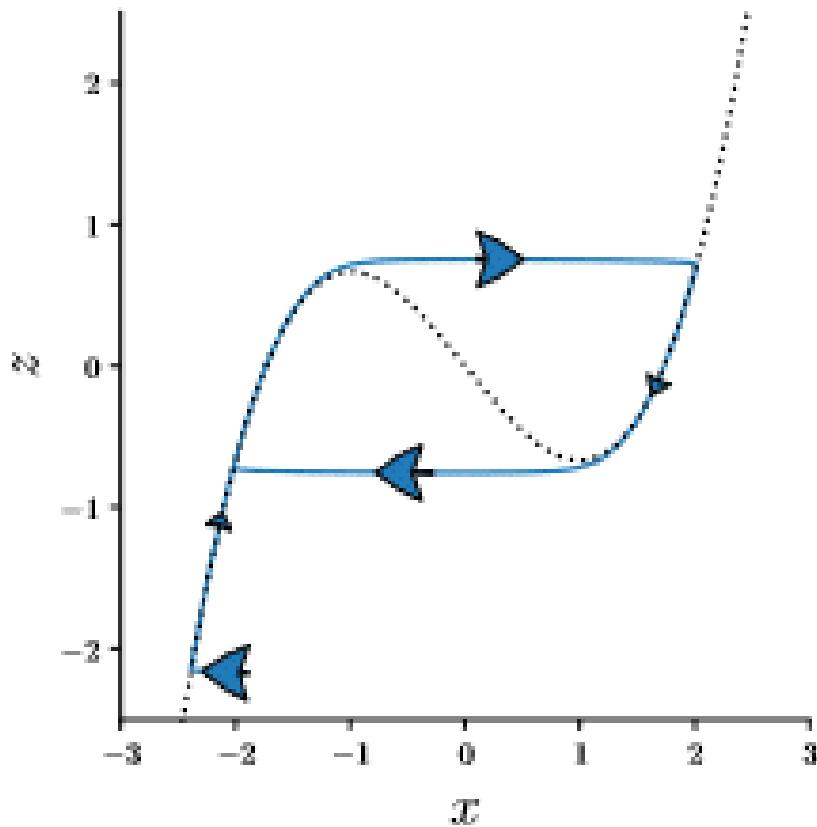


FIGURE 5 – Schéma du cycle limite à grand μ (10).

Il est alors évident que la période est dominée par le temps passé sur les deux branches à faible vitesse.
On a donc:

$$T \sim 2 \int_{x_0}^{x_1} dx \frac{dt}{dx}, \quad (54)$$

où $x_0 = -2$ et $x_1 = 1$ sont les deux positions différentes le long d'un branche de $x = F(x)$.
On a également:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dt} \sim F'(x) \frac{dx}{dt} = (x^2 - 1) \frac{dx}{dt} \quad (55)$$

$$= -\frac{1}{\mu} x \quad (56)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\frac{x}{\mu(x^2 - 1)}. \quad (57)$$

On peut alors calculer

$$T = 2 \int_1^{\infty} dx \mu \left(x - \frac{1}{x} \right) \quad (58)$$

$$= 2\mu \left[\frac{x^2}{2} - \ln x \right]_1^{\infty} \quad (59)$$

$$= \mu(2 - 2 \ln 2). \quad (60)$$

Ce résultat est valide à grand μ . À moyen μ , les étapes du cycle limite ne sont plus aussi séparées par échelles de temps. On va traiter l'autre régime ($\mu \ll 1$) avec une autre méthode, obtenir une idée du comportement général de la période $T(\mu)$.

2.4 Période à $\mu \ll 1$

Lorsque les dissipations et les non-linéarités sont faibles comparées à l'oscillation, on a $\mu \ll 1$. On peut donc les traiter perturbativement, par méthode des échelles multiples. Cette méthode analytique opère sur les problèmes qui profitent d'une séparation d'échelle (spatiale ou temporelle). Elle n'est pas sans connexion avec WKB pour les ondes dans les milieux lentement variables. Notre petit paramètre est μ , intervenant dans l'équation

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \quad (61)$$

On suppose donc la forme de solution intuitive qui se décomposerait comme

$$x(t) = \sum_{k=0} \mu^k x_k(\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots), \quad (62)$$

où on sépare explicitement les échelles de temps $\tau_k = \mu^k t$, et on les traite comme autant de variables indépendantes. En effet, pour que τ_i prenne des valeurs $O(1)$, il faut attendre des temps réels d'ordre $O(\mu^{-k})$. Attention : on introduit beaucoup de liberté dans une telle décomposition. On lui impose, par cohérence avec le développement multi-échelle, que chaque x_{k+1}/x_k reste borné sur des temps $\sim \mu^{-k}$, c'est-à-dire que chaque fonction reste assez faible devant la précédente sur l'échelle de temps de son ordre $O(\mu^{-k})$. Concrètement, à chaque ordre, il faut taper les termes résonants pour que la solution soit cohérente.

On injecte cette décomposition et on identifie terme à terme en ordre μ^k , qui seront des équations différentielles sur chacun des x_k . Il faut développer les dérivées temporelles concernées en la formule assez une règle de la chaîne

$$\frac{d}{dt} = \partial_{\tau_0} + \mu \partial_{\tau_1} + \mu^2 \partial_{\tau_2} + \dots, \quad (63)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \partial_{\tau_0 \tau_0} + 2\mu \partial_{\tau_0 \tau_1} + \mu^2 (2\partial_{\tau_1 \tau_1} + \partial_{\tau_2 \tau_2}) + \dots \quad (64)$$

On rassemble les termes et on obtient :

Ordre 0 :

$$\partial_{\tau_0 \tau_0} x_0 + x_0 = 0. \quad (65)$$

C'est la dynamique rapide, l'oscillation harmonique. On a $x_0 = X_0(\tau_1, \tau_2, \dots) \cos(\omega_0 t + \phi(\tau_1, \tau_2, \dots))$

Ordre 1 :

$$\partial_{\tau_0 \tau_0} x_1 + x_1 = -2\partial_{\tau_0 \tau_1} x_0 - (x_0^2 - 1)\partial_{\tau_0} x_0. \quad (66)$$

On doit tener les résonances pour la cohérence de la solution, c'est-à-dire les annuler dans le second membre. En le développant, on obtient

$$-2\partial_{r_0}x_2 - (x_0^2 - 1)\partial_{r_0}x_0 = (2\partial_{r_1}X_0 - X_0 + \frac{X_0^2}{4})\sin(r_0 + \phi) - 2X_0\partial_{r_1}\phi \cos(r_0 + \phi) + \frac{X_0^2}{4}\sin 2(r_0 + \phi). \quad (67)$$

Les deux premiers termes sont des seconds membres de même fréquence propre que l'ODE du membre de gauche : ils sont résonants. Pour les annuler, il faut

$$2\partial_{r_1}X_0 - X_0 + \frac{X_0^2}{4} = 0, \quad (68)$$

$$2X_0\partial_{r_1}\phi = 0. \quad (69)$$

La seconde équation demande simplement que $\phi = \phi(r_1, r_2, \dots)$ soit une constante à l'ordre 1 en échelle de temps. La première est une équation différentielle non-linéaire, c'est-à-dire elle aussi un système dynamique ! Mais d'ordre 1 donc facile à traiter. En effet, c'est l'équation

$$X'_0 = \frac{X_0}{2}(1 - \frac{X_0^2}{4}), \quad (70)$$

qui a deux PF. Un instable en 0 et un stable en 2. Donc, sur une échelle de temps r_1 , l'amplitude X_0 de l'oscillation harmonique va tendre vers $X_0 \rightarrow 2$.

On a donc obtenu la solution à l'ordre 1 en échelles multiples, qui est

$$x(t) \sim 2 \sin(t + \phi), \quad (71)$$

c'est-à-dire une oscillation harmonique à la pulsation \sqrt{CL}^{-1} en unités physiques. La variable conjuguée $y = \dot{x}$ est donc simplement en quadrature de phase et de même amplitude : la trajectoire dans l'espace des phases est un cercle de rayon 2. Le cycle limite est donc un cercle, parcouru en une période $2\pi\sqrt{CL}$ indépendante de μ .

Les oscillateurs non-linéaires sont donc les seuls systèmes physiques (dans le sens où on ne néglige pas les frottements) qui peuvent perdurer sur des échelles plus grandes que quelques oscillations. Les oscillateurs non-linéaires sont des systèmes à différencier des systèmes non dissipatifs et nonlinéaires, dont la dynamique dépend surtout de la position initiale.

2.5 Un exemple moins commun : chimie oscillante

Un exemple (apparemment) très adapté à une démonstration en montage est la réaction de Belousov-Zhabotinsky. C'est une réaction oscillante entre différents réactifs, qui ne se stabilise pas : c'est un oscillateur non-linéaire. C'est un problème très riche de physique non-linéaire, car il manifeste oscillations non-linéaires, hystérésis, et chaos déterministe, en plus d'être très graphique (Fig.6).

Intrinsèquement, la réaction est non-linéaire dans sa cinétique. Ce sont donc les équations d'évolutions temporelles des concentrations, autrement dit en dérivant les vitesses de réaction, qui nous intéressent et vont former le système dynamique. Les réactions possèdent la richesse qui rendent ces équations non-linéaires : réactions bimoléculaires et auto-entraînement.

Un paramètre de bifurcation entre régime d'équilibre et oscillant a été identifié comme étant lié à la stoichiométrie de l'an hydrogène dans une certaine étape, autrement dit difficile à contrôler... On donne plus loin un protocole pour se trouver dans le régime d'oscillations auto-entraînées. On trouve des détails sur les modélisations possibles du problème, qui sont toutes complexes, dans "Belousov-Zhabotinsky type reactions : the non-linear behavior of chemical systems" A.Casati, A.Morozov, M.Pianetti (Journal of Mathematical Chemistry 2021).

T.Darneil donnait dans son cours un protocole et des conseils pour en faire une démonstration pour un montage d'agrégation, qu'on redonne ici :



FIGURE 6 – Link to video <https://www.youtube.com/watch?v=PjyKSHu8Irc>.

► Dans le montage, il ne faut pas que la présentation soit purement qualitative ou descriptive. Il faudra choisir une étude quantitative selon vos goûts :

1. La réaction faisant intervenir des couples d'oxydo-réduction, un anel potentiométrique peut être une bonne solution (électrode de platin et électrode au sulfat de mercuric).
2. Un enregistrement des oscillations à l'aide d'un spectrophotomètre est une autre bonne solution. BUP 96 page 371 : Variations chromatiques sur la réaction de Belousov-Zhabotinsky par V. Pianova et al.
3. Idée supplémentaire :
 - Effectuer un test lors de la préparation à température ambiente et garder l'enregistrement. Mesurer la période.
 - Réaliser l'expérience devant le jury en ayant précédemment troué le bocal dans un bain marin. La vitesse de la réaction est fortement dépendante de la température. La période doit être significativement plus faible.

Conclusion : Cette réaction chimique est un exemple de choix pour l'enseignement de la dynamique des systèmes nonlinéaires. Cette réaction est peu présente malgré :

- son grand intérêt scientifique dans le développement de nouvelles idées de Physique non linéaire.
- son rôle très important dans la physique biologique, notamment à Bouloumié.
- le mélange physique-chimie qui est nécessaire pour un professeur de sciences physiques.
- voire la biochimie puisque la motivation initiale était la recherche d'un modèle du cycle de Krebs (cycle de l'acide citrique) qui correspond à une série de réactions bio-chimiques dont la finalité est de produire des intermédiaires énergétiques qui serviront à la production d'ATP dans la chaîne respiratoire.

ShuklaShiri B.Z. (1987) Certain catalyzed Bromate-Malic Acid reaction Chemical Demonstration vol 3 pp 257-261

Pour la présentation, prendre trois étapes :

1. Verser dans le bâton qui contient un aimant magnétique 10 ml. de solution A et 10 ml. de solution B
 2. Agiter 1 min
 3. Verser ensuite 10 ml. de solution C et puis 10 gouttes de bromate.
 4. Maintenir l'agitation.
 5. Le passage au vert est rapide, le reste de l'évolution est lente.
- A MPC, la période est de 30 s. On a facilement plus de 30 oscillations. A 27°C, c'est beaucoup plus lent et pour un examen je ne le recommande pas.
- L'idéal est d'avoir des solutions toutes les faites, la solution C à MPC sauf puisqu'elle réduira les autres).

18

Figure 7 – Conseils et protocole de Thierry Dauvois sur la réaction de Belousov-Zhabotinsky comme montage d'application.

3 $N \gg 1$ oscillateurs couplés : solitons

Discutons maintenant des phénomènes non-linéaires sur les ondes. Comme on l'a vu en partie I, dans un contexte de faible amplitude, les effets non-linéaires peuvent générer des harmoniques d'ordre plus élevé que le fondamental (apparition d'un $\sin(3\omega t)$ dans le pendule). Un tel effet permet par exemple de générer de la lumière de haute fréquence à partir de lasers pulsants de plus basse fréquence : dans un cristal non-linéaire, on peut faire coïncider deux photons de 800 nm pour en faire un seul de 400 nm. Ce genre de phénomènes est réellement en applications (laser Nd:YAG). On va se focaliser sur un autre résultat de physique non-linéaire, qui n'existe qualitativement qu'aux hautes fréquences : les solitons.

Les solitons sont des ondes solitaires, d'où leur nom, dans le sens où elles conservent une seule crête. Si ce genre de solutions existe dans le régime linéaire (un paquet d'ondes gaussien est toujours possible par superposition appropriée d'OPPH), les solitons existent uniquement dans le régime non-linéaire. En effet, deux conditions sont nécessaires à leur existence :

- Dispersion
- Non-linéarité

Dans un milieu dispersif, un paquet d'onde gaussien va s'étaler avec le temps, par différence de vitesses de phase de ses composantes harmoniques. Pour qu'une solution à crête unique conserve sa forme avec la propagation, il faut nécessairement un terme non-linéaire qui compensera cet étirement. On appellera donc soliton une onde solitaire qui conserve sa forme dans un milieu dispersif non-linéaire.

L'étude de telles solutions d'ondes est intrinsèquement liée à un domaine des mathématiques, les EDPs non-linéaires. Il existe donc beaucoup de variantes et généralisations formelles des équations non-linéaires qui vont nous intéresser, qui ne sont pas toujours motivées par la physique, mais par la compréhension des comportements mathématiques de ces équations. On va présenter et discuter trois équations non-linéaires qui se retrouvent dans différents domaines de la physique, et qui possèdent des solutions solitaires. La dernière est particulièrement intéressante et appropriée à une épreuve d'agrégation.

3.1 Korteweg-De Vries

L'équation de Korteweg-De Vries gère, entre autres, la dynamique d'ondes à la surface d'eau peu profonde. Elle peut s'établir dans ce contexte. On se donne un fluide incompressible 2D située dans le plan xOy , soumis à une pesanteur uniforme $-g\hat{e}_y$, qui au repos est situé entre les altitudes $y = 0$ et $y = H$. On étudiera les perturbations irrotationnelles, décrites par le déplacement vertical de la surface $\eta(x, t)$ et une vitesse donnée par une fonction courant $v = \nabla\phi(x, y, t)$. L'approximation d'eau peu profonde est caractérisée par le fait que le nombre $c = H/L$ est petit, où L est une longueur typique horizontale sur laquelle se propagent les ondes (autrement dit $\theta_c \ll \theta_y$). On manipule bien fort, on dimensionne les variables (voir par exemple "Shallow water waves and KdV equation", M.A.Held et H.N.Eli-Kham sur ResearchGate) pour obtenir

$$\partial_t u - 6u\partial_x u + \partial_{xxx}u = 0. \quad (72)$$

Dans ces variables, $\tau = \frac{x}{c}$ et $x = (x - c\tau)/\lambda$ représentent temps et espace (dans le différentiel se déplaçant vers la droite à vitesse $c_0 = \sqrt{gH}$), et u/c_0 l'amplitude de la perturbation (en vitesse horizontale ici). C'est l'équation de Korteweg-De Vries, souvent nommée KdV. Le 6 est conservé et peut être mis à 1 par d'autres changements de variables. Cette équation peut être vue comme un développement, où l'ordre des termes dispersifs et des termes non-linéaires est le même.

On obtient la relation de dispersion dans la limite linéaire (c'est à dire de faible amplitude), on trouve bien une propagation dispersive : $\omega = k_y^3$. La prise en compte du terme non-linéaire peut compenser la dispersion et autoriser des solutions de forme conservée dans le temps.

Cherchons une solution $u(x, \tau) = f(x - c\tau)$ qui se propage à une vitesse c et qui conserve sa forme dans le

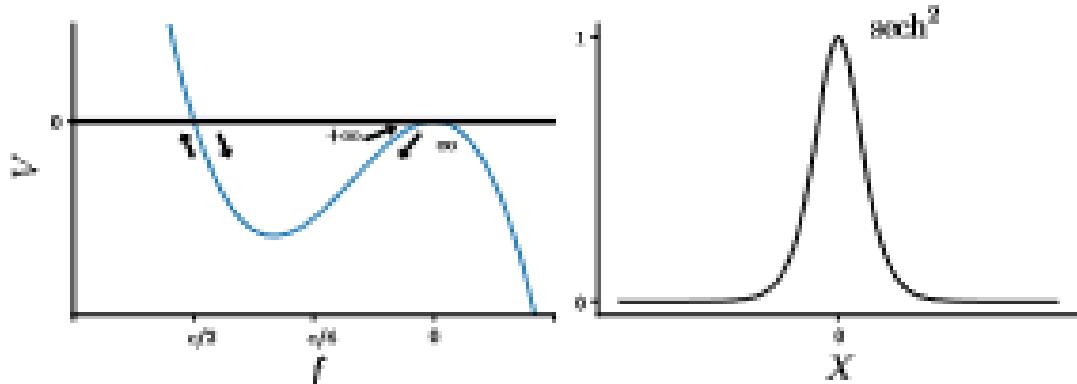


FIGURE 8 – La trajectoire de la particule dans le potentiel $V(f)$ se comprend facilement comme une dynamique newtonienne. On prend une solution qui atteint un maximum au point de reboulement, donc $\max(f) = -c/2$.

tempo. Si on introduit la coordonnée comobile $X = x - ct$, on réécrit l'équation KdV en

$$-cf' + f''' - 6ff' = 0, \quad (73)$$

qui donne comme intégrale première du mouvement

$$-cf + f'^2 - 3f^2 = A. \quad (74)$$

Puisque on cherche une onde solitaire, on demande les conditions à l'infini $f \rightarrow 0 = A$. On a donc l'équation

$$f'' - cf + 3f^2 = -\frac{dV}{df}, \quad (75)$$

similaire à la dynamique d'une particule dans un potentiels $V = -(\frac{1}{2}f^2 + f^3)$. Dans un tel potentiels, il existe une solution qui met un temps infini à sortir de la position d'équilibre instable $f = 0$ pour tomber dans le minimum local à sa gauche, rencontrer un point de reboulement, et revenir à cette position d'équilibre instable en un temps infini. (Le point de reboulement est un demi-tour en temps fini car il est entouré par un $V' \neq 0$, tandis que $V'(f=0) = 0$, d'où le temps infini à remonter la colline). Cette solution existe si $c > 0$. Voir Fig.8. On a obtenu ainsi quelques caractéristiques de la solution, mais on peut obtenir son expression exacte. La solution soliton de KdV est

$$u = -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) \right) \quad (76)$$

$$= -\frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2h} (x - c_0 t + c_0 h) \right), \quad (77)$$

Cosme $c > 0$ nécessairement, elle possède une propriété remarquable : elle possède une vitesse minimale $c_0 = \sqrt{gh}$, en dessous de laquelle il n'existe pas de solution soliton. C'était à attendre, puisque pour que la solution autosimilaire existe, il faut que la dispersion soit compensée par la non-linéarité. La non-linéarité n'entre en jeu que si les vitesses du fluide sont assez élevées. Cette propriété change si on a une capillarité à

la surface.

On a étudié cette solution pour la propagation vers la droite, évidemment il sont aussi valides pour les propagations vers la gauche.

Ces solutions solitaires sont très étudiées comme description des vagues solitaires et des tsunamis, mais ces modèles sont déficients. Shallow water linéaire suffisait pour les tsunamis, cependant les effets non-linéaires qui contribuent au déferlement sont importants proche des côtes. Ils ne relèvent pas de la théorie des solitons.

3.2 Schrödinger non-linéaire

L'équation dite de Schrödinger non-linéaire est appellée ainsi car elle lui ressemble formellement, mais n'a pas de lien direct avec la mécanique quantique. Cette équation s'écrit pour une fonction complexe $\psi(x, t)$

$$i\partial_t \psi + \partial_{xx} \psi + 2|\psi|^2 \psi = 0. \quad (78)$$

Selon les contextes, t peut être une coordonnée d'espace orthogonale à x , et ∂_{xx} peut être un laplacien de coordonnées orthogonales à x . On comprend le nom de cette équation, souvent abrégé NLS pour non-linéaire Schrödinger, puisqu'en retrouve l'équation de Schrödinger traditionnelle pour les fonctions ψ de hôte amplitude qui négligent le terme non-linéaire. Cette équation est bien dispersive car la relation de dispersion est celle de Schrödinger $\omega = k^2$. Elle a donc les bonnes propriétés pour gouverner des solutions solitaires. L'équation NLS gère typiquement les enveloppes de paquets d'ondes dans des milieux non-linéaires. C'est le cas des ondes à la surface d'un fluide (en eau profonde cette fois) et ψ est alors l'élevation de l'eau, où le terme non-linéaire est l'auto-advection. C'est le cas des ondes optiques dans une fibre ou un guide d'onde dont les non-linéarités sont significatives (PPLN ou PPLN/LiNbO₃).

Paquet d'onde de surface en eau profonde :

Référence : https://en.wikipedia.org/wiki/Non-linear_Schr%C3%B6dinger_equation

Dans un modèle de dynamique des fluides où on regarde la surface d'un fluide profond incompressible dans un champ de gravité, on a la relation de dispersion des ondes linéaires $\omega = \Omega(k) = \sqrt{gk}$. Si on garde le terme d'auto-advection de l'équation d'Euler $\frac{1}{2}\nabla \psi^2$, on a l'équation de la dynamique d'une onde non-linéaire dans un milieu dispersif. Si on cherche une solution en paquet d'onde, telle que l'élevation de l'eau vérifie

$$\eta = \operatorname{Re} \left(A(x, t)e^{i(k_0 x - \omega t)} \right), \quad (79)$$

on montre que l'enveloppe A vérifie l'équation NLS. En effet on obtient bien, dans les nouvelles coordonnées adimensionnelles $r = -k_0^2 \Omega'(k_0) t$ et $x = k_0(x - \Omega'(k_0)t)$,

$$i\partial_r A = -\frac{1}{2} \partial_{rr} A - 2k_0^2 |A|^2 A \quad (80)$$

Une solution de cette équation décritant une vague solitaire, pouvant décrire un tsunami ou une vague solitaire est donnée par la solution "bright soliton" de la partie suivante.

Impulsion dans une fibre optique :

Référence : http://www.scholarpedia.org/article/Non-linear_Schrodinger_systems:_continuous_and_discrete

Tous les matériaux sont plus ou moins dispersifs. La dispersion dans les fibres optiques est un problème, puisqu'elle mène à un étalement des impulsions, et limite donc la fréquence d'émission du signal/la longueur des fibres. Une solution à ce problème est d'utiliser des solitons plutôt que des paquets d'ondes linéaires, qui vont donc conserver leur forme pendant la transmission et ne pas s'étaler ! Pour cela, il faut un effet non-linéaire : Felft Kerr. Ce n'est rien de plus que la loi à l'ordre 3 de la polarisation de la matière : $P(E) \sim \epsilon_0(\chi E + \chi^{(3)} E^3)$ (le terme d'ordre 2 est nul pour les matériaux dont la maille vérifie une symétrie

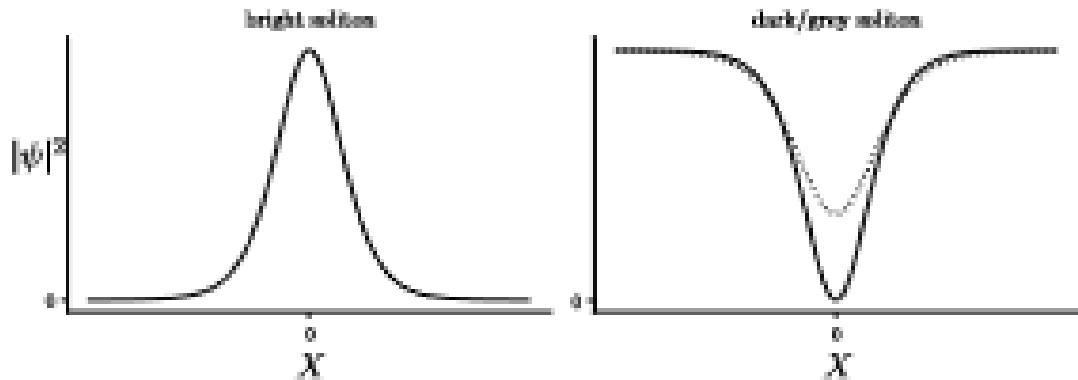


FIGURE 9 – Les deux types de solitons de l'équation NLSE.

centrale). On obtient un indice de réfraction de la forme

$$n(\omega, E) = n_0(\omega) + n_2 E^2, \quad (81)$$

$$\text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} (n_0(\omega) + n_2 E^2), \quad (82)$$

$$\sim k_0 + k' (\omega - \omega_0) + k'' (\omega - \omega_0)^2 + n_2 E^2. \quad (83)$$

Dans un tel milieu, un paquet d'onde du type $E = \sqrt{I^0} e(x, t) e^{i(k_0 x - \omega t)}$ se propage si l'amplitude normale α vérifie l'équation adimensionnelle

$$i\partial_x \alpha + \partial_{xx} \alpha + 2|\alpha|^2 \alpha = 0, \quad (84)$$

où le signe \pm est donné par $\text{sign}(-k''(\omega_0))$. Quand ce signe est $+$, le quand $k'' < 0$, la solution soliton est

$$\alpha = \text{sech}(r + 2\alpha x)e^{-i(\omega t + (k^2 - k')x)}. \quad (85)$$

Elle est appelée "bright soliton" car c'est un blob lumineux.

Au contraire, quand $k'' > 0$, la l'équation n'admet pas de solution soliton qui s'annule à l'infini. Mais il existe la solution intéressante dite de "grey soliton", qui est la propagation d'un intensité plus faible qu'un background lumineux (peut-être de ce qu'on appelle un trou en matière condensée). Une telle solution est paramétrée par un angle α et a la forme

$$\alpha = e^{2ia} (\cos \alpha + i \sin \alpha \tanh \sin \alpha (r - 2 \cos \alpha x)). \quad (86)$$

Le cas $\alpha = \frac{\pi}{2}$ est appelé "dark soliton" car l'intensité atteint 0, mais il est stationnaire. Ces solutions sont représentées Fig.9.

3.3 Sine-Gordon

La troisième équation non-linéaire prototypique des solitons est l'équation de Sine-Gordon, appelée ainsi en tant que généralisation de l'équation de Klein-Gordon de la théorie des champs. Elle est en effet employée pour décrire des particules relativistes, mais elle provient d'abord de physique classique. Par exemple, elle régit la dynamique d'une chaîne de pendules couplés, une manié bien adaptée à un MP de

physique non-linéaire...

Si on considère $N \gg 1$ pendules équidistants sur leur axe de rotation dans un champ de pesanteur uniforme g , chacun de moment d'inertie I , de masse m et de distance aux-centre de masse L , la description du système est donnée par l'ensemble des angles θ_n . Si on impose un couplage pur resort de tension de raideur C , on obtient l'équation de dynamique

$$I \frac{d^2}{dt^2} \theta_n - C(\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n) + mgL \sin \theta_n = 0. \quad (87)$$

Système d'ONR non-linéaire, dont on n'a pas la solution générale. Une approximation bien pratique est celle des milieux continus : on suppose la distance entre deux pendules à très petite devant les longueurs d'ondes qui nous intéressent. Autrement dit, on s'intéresse aux solutions telles que $\frac{\partial \theta_n - \theta_{n-1}}{\Delta \theta} \ll 1$. C'est une approximation gyration quand $C \gg mgL$, c'est-à-dire en couplage fort. On peut alors écrire efficacement l'ensemble des angles par une fonction $\theta(x, t)$ lentement variable dans l'espace par rapport à x . On obtient donc comme équation sur cette fonction l'EDP

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \theta + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0. \quad (88)$$

On a introduit une vitesse caractéristique $c_0^2 = \frac{C}{mgL}$ et une pulsation $\omega_0^2 = \frac{mgL}{I}$. Cette équation est effectivement très proche de Klein-Gordon, où le terme de masse n'est plus $m^2 \phi$ mais $m^2 \sin \phi$, d'où le nom de Sine-Gordon ou SG. On retrouve bien KG dans la limite des faibles amplitudes d'angles. SG possède bien dispersion et non-linéarité, tous deux propriétés du même terme de masse ω_0^2 .

Topologie du potentiel dans l'espace (x, θ) :

Le potentiel dû au champ de gravité ne dépend pas explicitement de x mais seulement de θ : $V(\theta) = mgL(1 - \sin \theta)$. On peut donc tracer la surface de potentiel dans l'espace (x, θ) , et voir qu'il y a des vallées de stabilité aux angles $\theta = 2\pi p$ pour tout entier p , et que le système est une corde massive posée sur cette surface. Voir Fig.10.

Pour une solution, on attribue une charge topologique

$$Q = \frac{1}{2\pi} (\theta(+\infty) - \theta(-\infty)). \quad (89)$$

Une onde "simple" a une charge $Q = 0$, une solution soliton a une charge non-nulle. Dans ce contexte, on appelle soliton une onde à $Q = +1$ et anti-soliton une onde à $Q = -1$. Cette charge est qualifiée de topologique car pour la modifier, il faudrait déplacer la totalité d'une extrémité de la corde vers une autre vallée, ce qui demande une énergie infinie. Un tel mouvement est impossible.

Solution soliton exacte :

Si on cherche une solution soliton, la procédure est toujours la même, on veut un profil conservé dans le temps. Donc ne dépendant que de la variable $x = x - vt$, et pas de la variable $y = x + vt$. On arrive donc à l'équation ODE

$$v^2 \frac{d^2}{dx^2} \theta - c_0^2 \frac{d^2}{dt^2} \theta + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0, \quad (90)$$

$$\text{soit} \quad \frac{d^2 \theta}{dx^2} = \frac{\omega_0^2}{v^2 - c_0^2} \sin(\theta). \quad (91)$$

On peut en faire une analyse énergétique efficace : l'intégrale première du mouvement de cette équation donne

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 - \frac{\omega_0^2}{c_0^2 - v^2} (1 - \cos(\theta)) = 0, \quad (92)$$

V

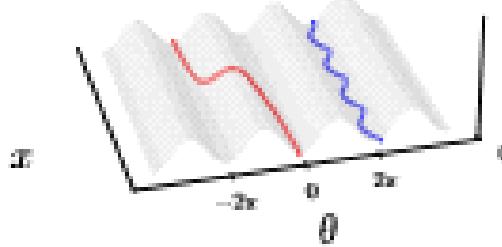


FIGURE 10 – Surface du potentiel de la chaîne de pendule. La chaîne est analogue à une corde massive posée sur cette surface. Les deux extrémités à l'infini de la corde doivent être dans une vallée, mais elles peuvent connecter deux vallées différentes (rouge). On a alors un soliton topologique, du fait de l'obstruction à pouvoir déformer la corde et rassembler les deux extrémités dans la même vallée. Au contraire, la situation bleue est une onde appréciable par la théorie linéaire.

ce qui est la dynamique d'une particule d'énergie nulle dans le potentiel $V = -\frac{c_0^2}{c_0^2 - v^2}(1 - \cos(\theta))$. Si $c_0^2 - v^2 < 0$, la position à énergie nulle est un fond de vallée : la solution est $\theta(z) = 0$. Pas de soliton supersonique. Si $c_0^2 - v^2 > 0$, la position d'énergie nulle frôle chacune des crêtes du potentiel. C'est donc une position d'équilibre instable, il existe une solution qui met un "temps virtuel" infini à tomber de sa position à $z = -\infty$, traverse une vallée, et met un "temps virtuel" infini à atteindre la prochaine position d'équilibre instable à $z = +\infty$. C'est la solution soliton. Il existe des solitons subsoniques. On a également l'avantage que $\theta(-\infty) \neq \theta(+\infty)$: il n'existe pas de solution à profil constant connectant la même vallée.

La solution exacte est

$$\theta = 4 \arctan \exp \left(\pm \frac{\omega_0}{c_0} \frac{x}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} \right). \quad (93)$$

Expériences de relativité :

L'équation de Sine-Gordon a le bon goût d'être invariant de Lorentz, comme Klein-Gordon puisqu'elle est relativiste. On peut changer de référentiel vers les coordonnées

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} (x - vt), \quad (94)$$

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}} (t - vx/c_0^2), \quad (95)$$

et obtenir la même équation. On peut écrire la solution soliton en

$$\theta = 4 \arctan \exp \left(\pm \frac{x - vt}{L(v)} \right), \quad (96)$$

avec $L(v) = \frac{c_0}{m} \sqrt{1 - v^2/c_0^2}$. On obtient la même physicienologique que la physique relativiste !

- Invariance de Lorentz par rapport à c_0 et existence d'une vitesse maximale
- Construction de Lorentz par l'expression $L(v)$
- Energie relativiste : $E = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x, t) dx = \gamma m_0 c^2$
- avec masse de particule $m_0 = \hbar \omega_0 / c_0$

On peut donc mixer les différentes expériences de quasi-particules relativistes : propagation libre, une réflexion transforme soliton en anti-soliton, collision entre mobile et statique, et annihilation entre soliton et anti-soliton en un breather.

$N \geq 2$ oscillateurs couplés : synchronisation

Références :

- Buck & Buck, Scientific American, 234, 74 (1976).
Ermentrout & Rinzel J. Math. Biol. 29, 571 (1994).

Un oscillateur (non isochrone) faiblement couplé à un autre de même période va se synchroniser. C'est un phénomène répété dans différentes domaines de la physique, et purement non-linéaire. On peut synchroniser : des lasers, des cellules du pacemaker, des métronomes, des horloges... Ce n'est possible que pour des oscillateurs auto-excitantes, et évidemment en interaction.

On parle d'accrochage de phase, pour des oscillateurs qui ont la même période. Leurs amplitudes peuvent être différentes. Un exemple très visuel est la cohorte de lucioles males émettant des bips lumineux, se synchronisant naturellement <https://www.youtube.com/watch?v=2DvtakdWytQ>.

Un modèle simple est le suivant : appelons α la variable d'intérêt qui oscille à la pulsation ω pour un monsieur luciole, A sa sensibilité au stimulus et $X = \dot{\alpha}$ le stimulus extérieur. Une équation du type

$$\ddot{\alpha} = -\omega^2 + A \sin X - \alpha \quad (97)$$

peut provoquer un accrochage de phase. En effet, en appelant $\theta = X - \alpha$ le décalage de phase, on obtient l'équation

$$\ddot{\theta} = \Omega^2 - \omega^2 + A \sin \theta. \quad (98)$$

C'est l'équation du pendule avec second membre. On peut montrer que si $|\Omega - \omega| < A$ (couplage fort), il y a accrochage de phase, et le déphasage θ oscille autour de 0 . Au contraire, si $|\Omega - \omega| > A$, pas d'accrochage possible, les pulsations sont trop différentes : la phase va dériver.