

ELU 501

Data science, graph theory and social network studies

Yannis Haralambous (IMT Atlantique)

18 mai 2020

VI

Lecture 7 Mathematical Methods

VII

Planarité

Représentation d'un graphe

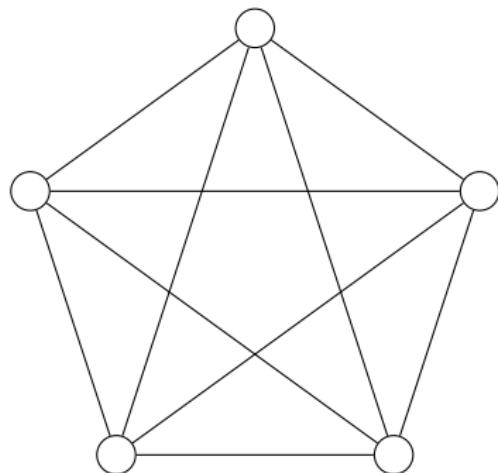
- Un *espace topologique* T est un ensemble où l'on définit une classe de sous-ensembles \mathcal{O} appelés *ouverts* tels que $\bigcup O \in \mathcal{O}, \bigcap_{\text{finie}} O \in \mathcal{O}, \emptyset \in \mathcal{O}, T \in \mathcal{O}$.
- Exemples : $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n$ (les sphères), \mathbb{T}_n (les tores à n trous), etc.
- Un *homéomorphisme* est une bijection continue dont l'inverse est continue.
- Une *courbe* est une fonction continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow T$. Deux courbes γ, γ' se coupent s'il existe $t, t' \in]0, 1[$ tels que $\gamma(t) = \gamma'(t')$.

Représentation d'un graphe

- Une *T-représentation* d'un graphe est la donnée d'une courbe $\gamma_{xx'} : [0, 1] \rightarrow T$ pour chaque arête xx' telle que les courbes ne se recoupent pas 2 à 2.
- On appelle *faces* les ouverts $T \setminus \bigcup_{v \in V} \text{im}(\gamma_v)$.
- Combien de faces a le graphe complet K_4 dans \mathbb{R}^2 ?
- Tout G peut être représenté sur un tore, à condition d'avoir suffisamment de trous. Le nombre minimum de trous est appelé *genre orientable* du graphe.
- De même, on appelle *genre non-orientable* du graphe le nombre minimum de cross-caps à attacher à une sphère pour qu'il puisse être représenté.

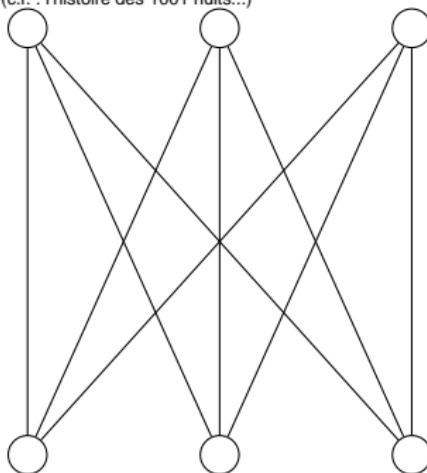
Deux graphes particuliers : K_5 et $K_{3,3}$

- On écrit $K_{p,q}$ le graphe biparti avec p et q sommets. Voici K_5 et $K_{3,3}$:



Ce graphe ne peut pas être représenté dans le plan

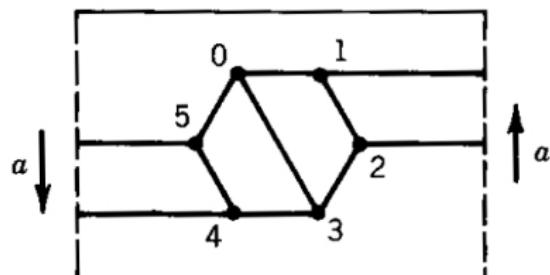
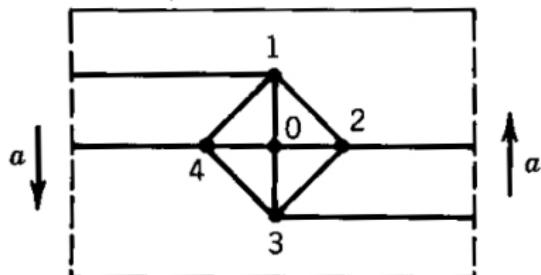
(c.f. : l'histoire des 1001 nuits...)



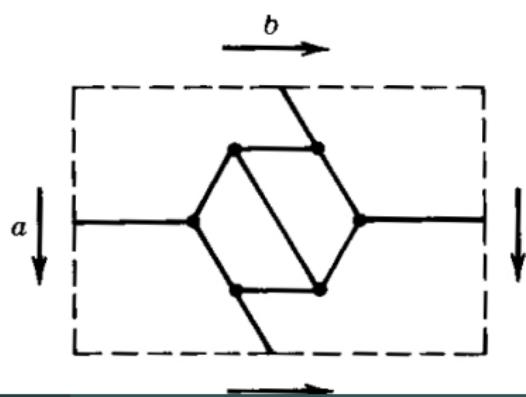
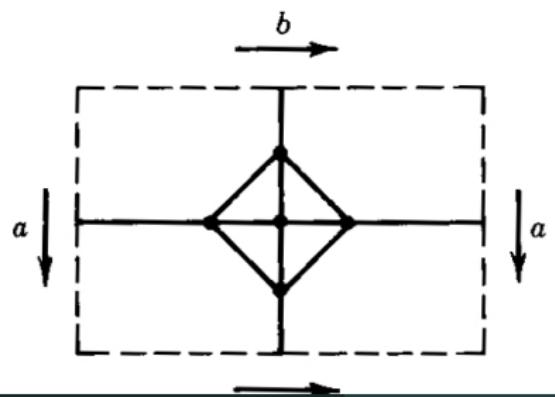
- Leur genres orientable et non-orientable sont égaux à 1.
- Lorsqu'un graphe est de genre 0, on l'appelle **graphe planaire**, il est alors représentable sur le plan, par projection stéréographique.

Deux graphes particuliers : K_5 et $K_{3,3}$

Voici comment on peut dessiner K_5 , $K_{3,3}$ sur la bande de Möbius :



Et K_5 , $K_{3,3}$ sur le tore :



Formule d'Euler

Théorème (Théorème d'Euler (1752))

Soit f le nombre de faces d'un graphe planaire G . Pour toute représentation plane de G , on a : $f = \|G\| - |G| + 2$.

nb arêtes - nb sommets +2

Démonstration.

On fixe $|G|$ et on procède par récurrence sur $\|G\|$: pour $\|G\| = |G| - 1$ on a un arbre et donc une seule face.

Soit $\|G\| \geq |G|$, alors on a au moins un cycle. Soit e une arête de ce cycle, on l'enlève. On obtient G' qui a une face de moins et une arête de moins, et pour qui l'hypothèse de récurrence donne : $f' = \|G'\| - |G'| + 2 \Rightarrow f - 1 = \|G\| - 1 - |G| + 2$.



On appelle *côté* d'une face F toute arête qui fasse partie de la frontière de \mathring{F} (xy et yx sont distinctes).

Lemma

Si G est connexe, pour toute représentation de G on a
 $2\|G\| \geq 3 \cdot f$.

Démonstration.

Par la définition des côtés $\sum_{\text{côtés}} = 2\|G\|$. Mais pour chaque face, on a au moins trois côtés, donc : $\sum_{\text{côtés}} = 2\|G\| \geq 3f$. □

Formule d'Euler

Corollary

Si G est planaire et $|G| \geq 3$, alors $\|G\| \leq 3|G| - 6$.

Démonstration.

On combinant la formule d'Euler et le lemme précédent on a
 $\frac{2}{3}|G| \geq \|G\| - |G| + 2 \Rightarrow 2\|G\| \geq 3\|G\| - 3|G| + 6 \Rightarrow 3|G| \geq \|G\| + 6$. □

Formule d'Euler

Corollary

K_n est planaire ssi $\Delta \leq 4$.

Démonstration.

$\|K_n\| = \frac{n(n-1)}{2}$ et $|K_n| = n$, donc $n(n-1) \leq 2 \cdot (3n - 6) \Leftrightarrow n \leq 4$. □

Formule d'Euler

On appelle *circonference* $\text{circ}(G)$ d'un graphe G le plus petit nombre d'arêtes nécessaire pour former un cycle.

Lemma

Si G est connexe, pour toute représentation de G on a
 $2\|G\| \geq \text{circ}(G) \cdot f$.

Démonstration.

Comme dans le lemme du transparent 9, sauf qu'on utilise $\text{circ}(G)$ au lieu de 3. □

Corollary

$K_{p,q}$ est planaire ssi $p + q \leq 5$.

Démonstration.

Pour $p = 1, 2, 3$ et $q = 1, 2$ on dessine. Pour $K_{3,3}$ on a vu qu'un graphe biparti n'a pas de cycle impair, donc $\text{circ} \geq 4$. D'autre part il a 5 faces par Euler. Pour qu'il soit planaire on devrait avoir $2\|K_{3,3}\| \geq 4 \cdot 5$, ce qui est faux. □

Formule d'Euler généralisée

Théorème

Soit f le nombre de faces d'un graphe planaire G . Pour toute représentation de G sur une surface S , on a : $f = \|G\| - |G| + 2 - \varepsilon(S)$.

- $\varepsilon(S)$ est appelée *genre d'Euler* de la surface, c'est un invariant topologique de celle-ci.
- Le genre d'Euler de la sphère \mathbb{S}^2 ou du plan \mathbb{R}^2 est 0.
- Quand on ajoute une poignée à une surface le genre d'Euler augmente de 2.
- Quand on ajoute un crosscap à une surface le genre d'Euler augmente de 1.

Corollary

Pour tout $p \in \mathbb{N}$ il existe une surface de genre d'Euler p .

Théorème de Kuratowski

- Soient x et y deux sommets de G on appelle *contraction de G par rapport à xy* et on note G/xy le graphe obtenu en identifiant x et y .

Théorème (Kuratowski)

Un graphe est planaire ss'il ne contient ni K_5 , ni $K_{3,3}$ (modulo des contractions).

Théorème de Kuratowski

- On a 1-connexe = connexe dans le sens classique.
- Un graphe connexe G avec $|G| > k$ est appelé *k-connexe* si le graphe qui reste quand on enlève $k - 1$ sommets quelconques est toujours connexe.
- On va montrer une version plus faible du théorème de Kuratowski :

Théorème

Un graphe 3-connexe est planaire ss'il ne contient ni K_5 , ni $K_{3,3}$ (modulo des contractions).

Lemma

Si G est 3-connexe et $|G| > 4$, alors il existe une arête e telle que G/e soit également 3-connexe.

Preuve du lemme

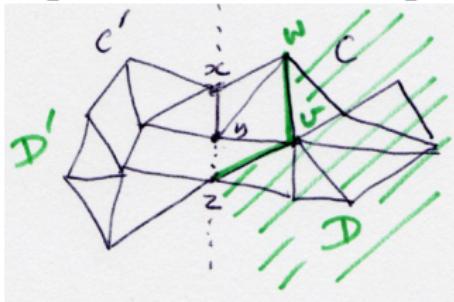
Au fait, le lemme dit que toutes les arêtes ne sont pas intérieures (et donc aptes à séparer le graphe en composantes), il y en a qui sont extérieures et donc qui ne changent pas la connexité quand elles disparaissent.

Preuve par l'absurde : supposons qu'il n'existe pas de e . Alors pour $\forall x, y \in G$, G/xy est 2-conn. mais pas 3-conn. $\Rightarrow \exists S$ séparateur de G/xy avec $|S| \leq 2$. Comme G est 3-conn., en fait $|S| = 2$ et $v_{xy} \in S$, il existe donc $z \in G$ avec $S = \{v_{xy}, z\}$ et $z \neq x, z \neq y$. Deux sommets séparés par S dans G/xy sont séparés par $S' = \{x, y, z\}$ dans G . S' sépare G en C et C' .

Pirouette : on choisit x, y, z tels que $|C|$ soit *minimal*.

Preuve du lemme (suite)

Aucun sous-ensemble propre de S' ne sépare G (car il est 3-c.), donc chacun de ses sommets a des voisins de part et d'autre. On prend v un voisin de z ds C . Par hypothèse, G/zv n'est pas 3-conn. donc $\exists w$ tq $S'' = \{z, y, w\}$ sépare G en D, D' et chacun des pts de S'' a des voisins des deux côtés. Comme x et y sont voisins, ils sont du même côté, soit D le côté où ils ne sont pas. D a la même propriété que C : il est l'une des composantes connexes d'un G/xy (pour $x, y, z = v, w, z$). Mais on a $D \subset C$ et $D \neq C$ puisque x et y n'y sont pas. Donc C n'est pas minimal, oups.



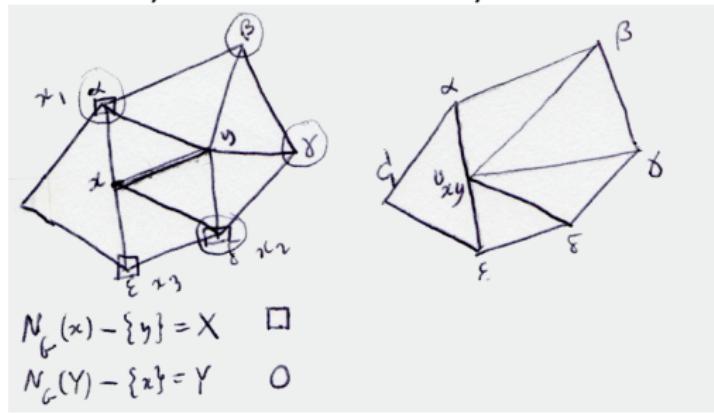
Preuve du théorème

Le sens \Rightarrow est trivial puisque $K_{3,3}$ ou K_5 ne sont pas planaires.

Pour le sens \Leftarrow (qd il y a pas de K_5 , $K_{3,3}$ on est pl.) on procède par récurrence : pour $|G| = 4$ c'est vrai. Considérons $|G| > 4$ et l'hypothèse vraie pour les graphes plus petits.

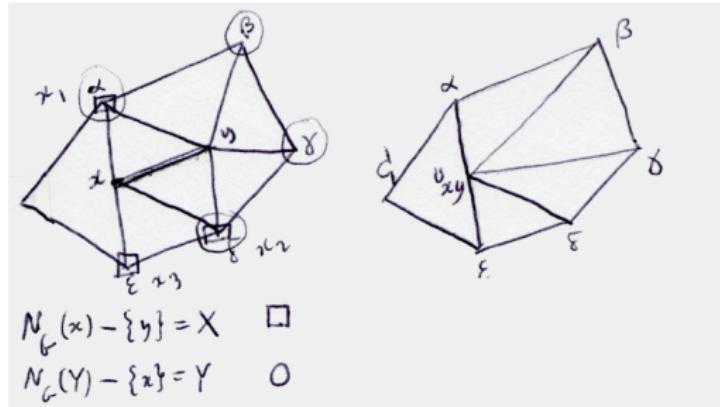
Par le lemme, $\exists xy$ tq G/xy soit 3-conn. Par réc., G/xy ne contient pas de K_5 , $K_{3,3}$.

Donc G/xy est planaire et admet une représentation \tilde{G} . Soit F la face de $\tilde{G} - v_{xy}$ qui contient v_{xy} et C sa frontière.



Preuve du théorème (suite)

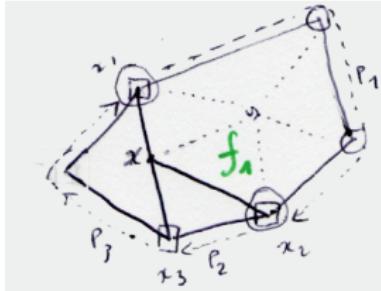
Soient $X = N_G(x) \setminus \{y\}$ et $Y = N_G(y) \setminus \{x\}$ les voisinages dans G , alors $X \cup Y \subseteq C$.



On peut considérer $\tilde{G}' = \tilde{G} - \{v_{xy}v \mid v \in Y \setminus X\}$ comme une représentation de $G - y$, où v_{xy} joue le rôle de x (dans le dessin Y est $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et X est $\alpha, \gamma, \epsilon, \delta$, et donc \tilde{G}' est $\tilde{G} - \{v_{xy}\beta, v_{xy}\gamma\}$). Comme \tilde{G} est 3-conn., $\tilde{G} - v_{xy}$ est 2-conn., et donc C est un cycle (il n'y a pas d'antennes).

Preuve du théorème (suite)

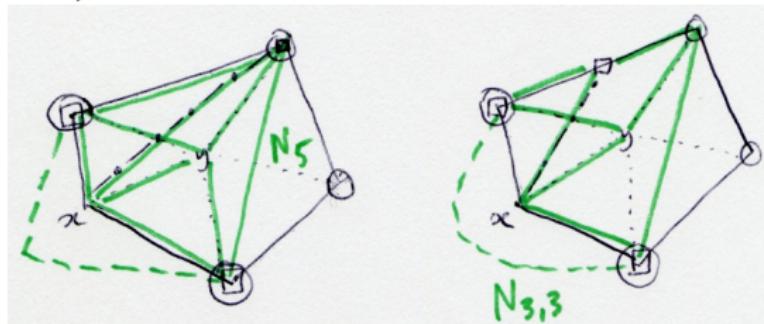
Soit x_1, \dots, x_k une énumération des sommets de X . Montrons qu'il existe i tq $Y \subseteq x_i x_{i+1}$. Dans le dessin X est noté par des carrés, Y par des ronds.



Qu'est-ce qui peut se passer pour que Y ne soit pas entièrement contenu entre deux x_i ? Soit qu'il y ait deux voisins de x qui soient aussi voisins de Y , soit qu'un voisin de X tombe entre deux voisins de Y .

Preuve du théorème (suite)

Qu'est-ce qui peut se passer pour que Y ne soit pas entièrement contenu entre deux x_i ? Soit qu'il y ait deux voisins de x qui soient aussi voisins de Y , soit qu'un voisin de X tombe entre deux voisins de Y . Dans le premier cas on a un K_5 , dans le deuxième un $K_{3,3}$ (voir dessin ci-dessous).



Soit $P_i = x_i x_{i+1}$ le segment qui contient Y , alors la face $xx_i P_i x_{i+1} x$ est une partie de F . Si elle contient $C \setminus P_i$ on prend l'autre partie F_1 , sinon on la garde et on l'appelle F_1 . Par la construction, dans F_1 il n'y a aucun xx_* donc on peut tranquillement placer y et le relier à tous ses voisins.

Triangulation

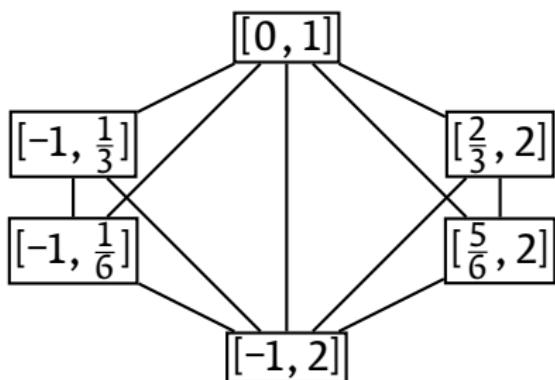
- Un graphe est *triangulé* (ou *cordal*) si tout cycle de longueur ≥ 4 possède une corde (c'est-à-dire, une arête entre deux sommets du cycle).
- Les graphes triangulés sont utilisés abondamment par les *systèmes d'information géographique* (SIG). Pour modéliser la surface de la Terre, on utilise la *triangulation de Delaunay* qui consiste à trianguler un ensemble de points de manière à ce qu'aucun point ne soit à l'intérieur du cercle circonscrit d'un des triangles de la triangulation.



Graphes d'intervalles

- Un *graphe d'intervalles* est un graphe non orienté dont les sommets représentent des intervalles (par exemple, de \mathbb{R}) et les arêtes représentent l'intersection non-vide entre deux intervalles.

Exemple :



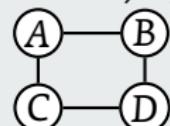
Graphes d'intervalles

Théorème

Un graphe d'intervalles est un graphe triangulé.

Démonstration.

Soit A, B, C, D quatre intervalles de \mathbb{R} qui forment un graphe



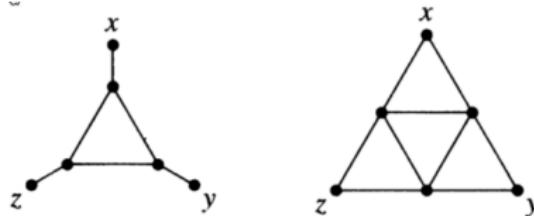
. Montrons qu'on a nécessairement une arête AD ou BC .

Notons $B \succ A$ lorsque $\exists a \in A, \forall b \in B, b \geq a$. On suppose donc $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap D \neq \emptyset$, $C \cap D \neq \emptyset$, $A \cap D = \emptyset$ et $B \cap C = \emptyset$. Pour aucun des A, B, C, D on ne peut avoir une inclusion. Exemple : si $A \subset B$ alors $C \cap A \neq \emptyset$ impliquerait $C \cap B \neq \emptyset$ ce qui est faux. Donc pour chaque paire i, j on a $i \succ j$ ou $j \succ i$.

Supposons $B \succ A$, alors forcément $D \succ B$ et $A \succ C$. Mais alors $D \cap C = \emptyset$ aussi, ce qui contredit la supposition $C \cap D \neq \emptyset$. Il en va de même pour $A \succ B$. □

Graphes d'intervalles

On appelle *triplet astéroïdal* un triplet de sommets x, y, z tel qu'entre toute paire de sommets parmi ceux-ci il existe un chemin qui évite le voisinage du troisième sommet.



Théorème (Hajós)

Un graphe d'intervalles est un graphe triangulé qui ne contient aucun triplet astéroïdal.

Démonstration.

Soient x, y, z les intervalles correspondants avec $z \succ y \succ x$ puisqu'ils sont disjoints. Si on prend $U = \bigcup_i u_i$ pour tous les u_i du chemin de x à z , on a forcément $y \subset U$ mais alors il existe i_0 tel que $y \cap u_{i_0} \neq \emptyset$, absurde. □

Qui a tué le duc de Densmore ?

- Il s'agit du titre d'une nouvelle policière (sur Moodle) de 27 pages, écrite par le grand spécialiste des graphes et membre fondateur de l'Oulipo, Claude Berge (1926–2002).
- L'intrigue est la suivante :
- Le Duc de Densmore est retrouvé carbonisé après l'explosion de son vieux château de l'île privée de White. L'enquête indique que l'explosion est due à une bombe placée dans la cave de château. Dans la période qui précédait l'explosion, le Duc avait invité ses 8 ex-femmes. Le capitaine du bateau qui faisait la navette entre l'île et le continent se souvient d'avoir transporté chacune des 8 femmes pour un aller-retour, mais sans se souvenir des dates et heures.
- Les femmes ne se souviennent pas non plus des dates et heures, mais se rappellent de s'être croisées. Ceci étant, l'enquête a beaucoup tardé et les souvenirs des femmes ne sont qu'approximatifs.

Qui a tué le duc de Densmore ?

Ainsi, elles se rappellent de s'être croisées comme suit :

- Anne a rencontré Félicie, Cynthia, Georgia, Emilie et Betty,
- Betty a rencontré Cynthia, Anne et Hélène,
- Cynthia a rencontré Anne, Emilie, Diane, Betty et Hélène,
- Diane a rencontré Cynthia et Emilie,
- Emilie a rencontré Félicie, Cynthia, Diane et Anne,
- Félicie a rencontré Emilie et Anne,
- Georgia a rencontré Anne et Hélène
- Hélène a rencontré Cynthia, Georgia et Betty.

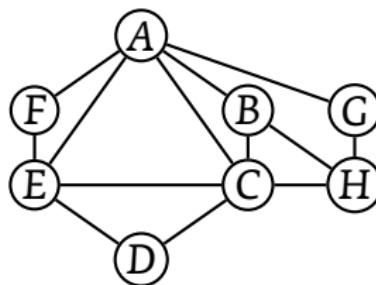
On sait d'autre part que l'une de ces femmes était désavantagée par le testament et donc avait un mobile pour poser la bombe. Le testament a malheureusement disparu dans l'incendie. Comment trouver la coupable ?

L'inspecteur Ralston de Scotland Yard suppose que la personne qui a posé la bombe n'a pas pris la navette et a donc menti. Comment trouver la menteuse parmi ces huit femmes ?



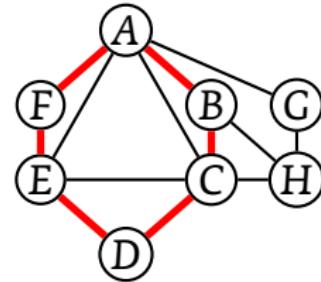
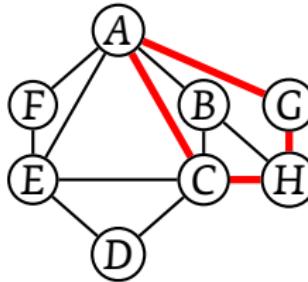
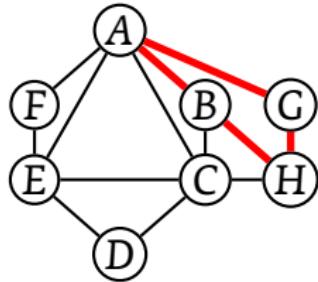
Qui a tué le duc de Densmore ?

- Méthode de solution du problème : la présence de chaque femme dans la navette peut être représentée par un intervalle de \mathbb{R} , on peut donc former le graphe des intervalles et vérifier s'il est triangulé et s'il ne contient aucun triplet astéroïdal.
Si jamais ce n'est pas le cas, on peut vérifier si le fait de supprimer un sommet le rend triangulé/sans triplet astéroïdal.



Qui a tué le duc de Densmore ?

Voilà déjà deux cycles non-triangulés (ABHG, ACHG) et un triplet astéroïdal (AEC) :



Qui est donc le coupable ?

A, parce que si on le retire, on a un graphe d'intervalles

VIII

Coloration

Le nombre chromatique d'un graphe

- Une *k-coloration* G d'un graphe est une fonction $c : G \rightarrow \{1, \dots, k\}$ telle que si xx' est une arête, $c(x) \neq c(x')$.
- Pour un graphe G le plus petit nombre k tel qu'il existe une k -coloration est appelé *nombre chromatique* $\chi(G)$.

Application pratique

L'école de dresseurs de phoques de Plouzané propose 47 modules aux 349 élèves de première année. Chaque élève peut s'inscrire à 3 modules. Étant donné qu'un élève ne peut pas être physiquement présent à deux cours en même temps, comment mettre les cours en parallèle pour les faire en un minimum de temps ?

- G est discret ssi $\chi(G) = 1$.
- G est biparti (non discret) ssi $\chi(G) = 2$.
- $\chi(K_n) = n$.

Le nombre chromatique d'un graphe

Soit $\Delta(G)$ le plus grand degré de G .

Méthode de coloration

On énumère les sommets. On colorie chaque sommet v_j avec le i le plus petit tel qu'aucun voisin de v_j ne soit de cette couleur. Chaque v_j a $\|N(v_j)\| \leq \Delta(G)$ voisins, donc on peut toujours colorier avec $\Delta(G) + 1$ couleurs.

Théorème(s)

Proposition

On a pour tout graphe G : $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2\|G\| + \frac{1}{4}}$.

Démonstration.

Si on a besoin de n couleurs alors il existe $x_i x_j$ pour chaque paire $1 \leq i, j \leq n$, sinon on peut faire avec moins de couleurs. Donc on a au moins $\frac{1}{2}\chi(G)(\chi(G) - 1)$ arêtes. On résoud l'équation de deuxième degré en $\chi(G)$. □

Théorème(s)

Proposition

On a pour tout graphe G : $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2\|G\| + \frac{1}{4}}$.

Démonstration.

Si on a besoin de n couleurs alors il existe $x_i x_j$ pour chaque paire $1 \leq i, j \leq n$, sinon on peut faire avec moins de couleurs. Donc on a au moins $\frac{1}{2}\chi(G)(\chi(G) - 1)$ arêtes. On résoud l'équation de deuxième degré en $\chi(G)$. □

Le nombre chromatique d'un graphe

Théorème (Célèbre théorème des quatre couleurs)

On a $\chi(G) \leq 4$ pour tout graphe planaire.

- Problème posé par Guthrie en 1852.
- Solution donnée par Appel & Haken en 1976 (741 pages de listing...).
- On va démontrer une version plus faible :

Théorème (Théorème des cinq couleurs)

On a $\chi(G) \leq 5$ pour tout graphe planaire.

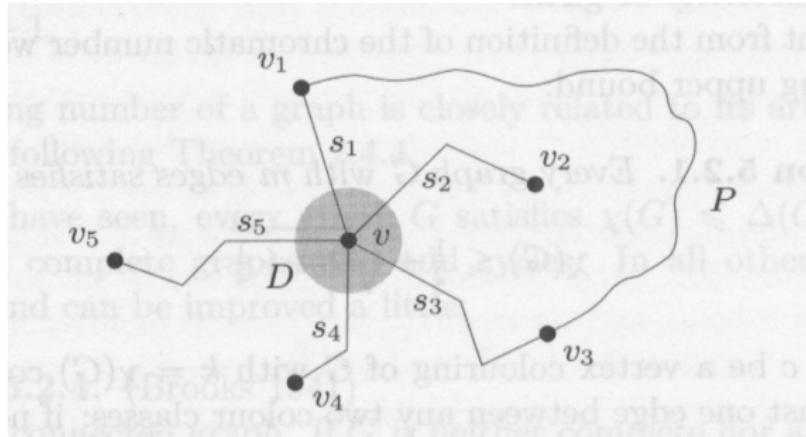
Preuve du théorème de cinq couleurs

Par récurrence. Pour $n = 5$ cinq couleurs suffisent.

Supposons l'assertion vraie pour les graphes d'ordre $|G| - 1$. Soit G planaire. Par le corollaire du théorème d'Euler, $\|G\| \leq 3|G| - 6$ et donc le degré moyen $d(G) = \frac{2\|G\|}{|G|} \leq \frac{2(3|G|-6)}{|G|} < 6$ ce qui signifie qu'on est sûr qu'il existe un sommet de degré ≤ 5 . S'il existe un sommet de degré ≤ 4 on l'enlève, on applique l'hypothèse de récurrence, on le rajoute avec une couleur manquante et bingo.

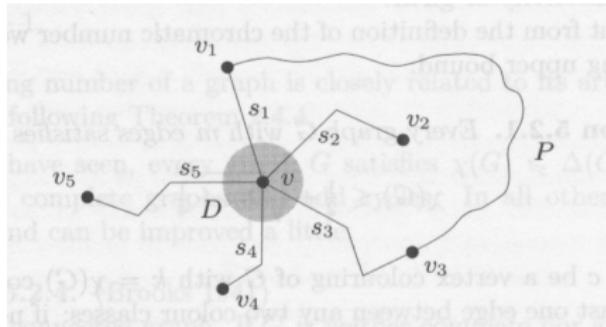
Preuve du théorème de cinq couleurs

Supposons que v est de degré 5 et que les 5 voisins v_i ont les 5 couleurs $\{1, 2, 3, 4, 5\}$:



Soit $H = G - v$. Montrons que tout chemin P de H (avec $v_2, v_4 \notin P$) qui relie v_1 à v_3 sépare v_2 de v_4 . Dans G , le cycle vv_1Pv_3v sépare v_2 et v_4 . Donc P les sépare dans H (montrer sur le dessin).

Preuve du théorème de cinq couleurs



Soit maintenant $H_{i,j}$ le sous-graphe induit par H de couleurs i et j uniquement. De deux choses l'une : soit v_1 et v_3 sont dans la même composante connexe de $H_{1,3}$ soit ils ne le sont pas.

(a) Ils ne le sont pas. Alors j'échange les couleurs 1 et 3 dans la composante connexe de v_1 , ils sont donc tous les deux de couleur 3, je mets v de couleur 1 et finito.

(b) Ils le sont. Alors $H_{1,3}$ contient un chemin qui relie v_1 et v_3 et qui ne passe pas par v_2 et v_4 . Il sépare donc v_2 de v_4 dans H , ils se trouvent donc dans deux composantes connexes de $H_{2,4}$ différentes. Même truc.

Théorème de Brooks

Théorème (Théorème de Brooks (1941))

Soit G un graphe connexe qui n'est ni complet ni un cycle impair, alors on a $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Preuve. — Par recurrence sur $\Delta(G)$. Pour $\Delta(G) \leq 2$ c'est ok (du moment que le cycle n'est pas impair !).

On considère que $\Delta(G) \geq 3$ et que ça marche pour des graphes plus petits.

Supposons que $\chi(G) > \Delta(G)$ (*).

Soit $v \in G$ et $H = G - v$. H n'est peut-être pas connexe, je prends une comp.conn. H' de H quelconque, l'hypothèse s'applique : $\chi(H') \leq \Delta(H') \leq \Delta(G)$ sauf si H' est complet ou un cycle impair, dans lequel cas $\chi(H') = \Delta(H') + 1$. Mais ceci est toujours $\leq \Delta(G)$ puisque dans ce cas, chaque sommet de H' est à degré maximal et au moins un parmi ses sommets était relié à v avant sa suppression, donc $\Delta(H') < \Delta(G)$. Donc H peut être $\Delta(G)$ -colorié mais pas G .

Preuve du théorème de Brooks (suite)

Donc : toute $\Delta(G)$ -coloration de H utilise toutes les couleurs $\{1, \dots, \Delta(G)\}$ au niveau des voisins de v et en particulier $d(v) = \Delta(G)$.

On appelle ces voisins $v_1, \dots, v_{\Delta(G)}$ et $H_{i,j}$ comme pour le th. des 5 coul. On a forcément :

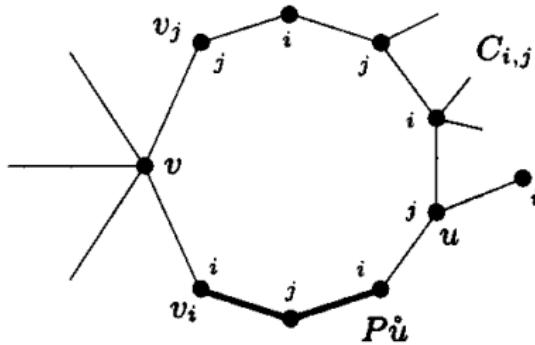
*pour tout i, j , les sommets v_i et v_j se trouvent sur la même comp. conn. $C_{i,j}$ de $H_{i,j}$ (**).*

Si ce n'était pas le cas, on pourrait appliquer le truc du th. des 5c. et avoir une couleur de moins.

On peut même dire plus : *$C_{i,j}$ est un chemin reliant v_i et v_j* . Pour le montrer par l'absurde, soit P un v_i - v_j -chemin ds $C_{i,j}$. Comme $d_H(v_i) \leq \Delta(G) - 1$, les voisins de v_i ont eux aussi des couleurs différentes (sinon on aurait pu donner une autre couleur à v_i et la sienne à v , ce qui contredit l'hypothèse (*)). Donc il n'y a qu'un seul voisin de v_i de couleurs i ou j , idem pour v_j .

Preuve du théorème de Brooks (suite)

Si $C_{i,j} \neq P$ cela veut dire qu'il existe un sommet intérieur à P de couleur, par exemple, j qui a (au moins) trois voisins de couleur i . Soit u le premier tel sommet.



Cela veut dire que parmi les $\Delta(G) + 1$ couleurs que l'on peut utiliser pour u et ses voisins, on n'utilise en fait que $\Delta(G) - 2$. Donc il reste une couleur disponible. Si l'on donne cette couleur à u , alors on a coupé $C_{i,j}$ en deux composantes connexes, ce qui contredit (**). Donc $P = C_{i,j}$.

Preuve du théorème de Brooks (suite)

Autre constatation : pour i, j, k distincts, $C_{i,j} \cap C_{j,k} = v_j$. (***)

Si c'était le cas contraire, avec $u \in C_{i,j} \cap C_{j,k}$, alors u aurait deux voisins i et deux voisins k , donc en appliquant le même truc, on pourrait recolorier u et contredire (**).

Finissons donc la preuve du théorème : si les voisins de v sont tous voisins entre eux 2-à-2, comme chacun a déjà $\Delta(G)$ voisins (avec tous les $C_{*,*}$ qui partent) dans le voisinage de v , il ne peut pas en avoir plus, donc G se résume à $N(v) \cup v$, et donc il est complet, ce qu'il ne devait pas être.

Soit $v_1v_2 \notin G$. Donc après v_1 dans $G_{1,2}$ il y a un u de couleur 2 qui n'est pas v_2 . Mais alors ce u appartient aussi à $C_{2,3}$ et donc $u \in C_{1,2} \cap C_{2,3}$, ce qui contredit (***)¹. Absurde, donc (*) est fausse.

IX

Hamilton et Euler

Graphes euleriens

- On appelle *parcours* P , un chemin $x_1 \dots x_n$ dont toutes les arêtes sont distinctes. Un parcours fermé est appelé un *tour*.
- Un tour est *eulérien* s'il passe par *toutes* les arêtes de G . On dit alors que le graphe est eulérien.

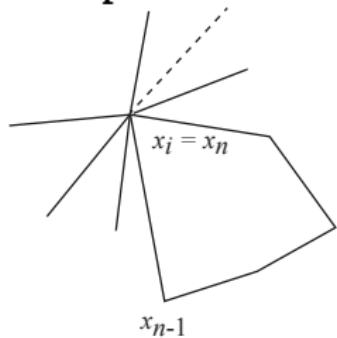
Théorème (Euler (1736))

Un graphe connexe est eulérienssi tous ses sommets sont de degré pair.

Démonstration du théorème d'Euler

CN : un sommet qui est traversé k fois a forcément un degré $2k$.

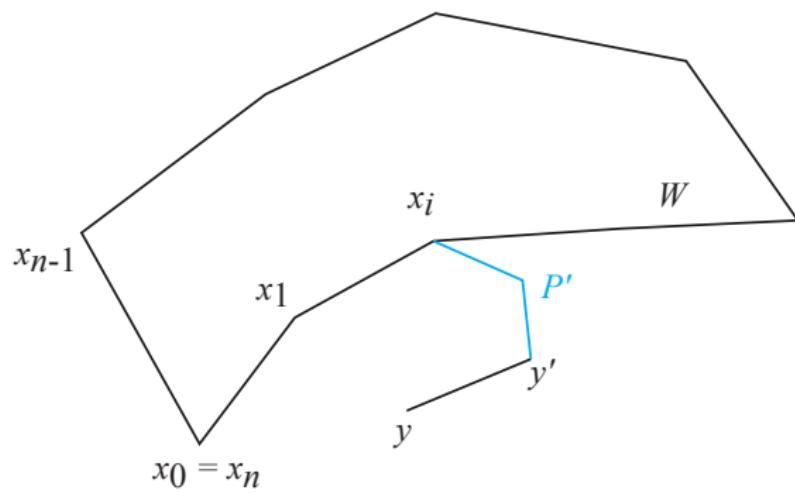
CS : soit G un graphe avec que des sommets pairs. Soit $W = x_0 \dots x_n$ un parcours. On va le rendre maximal : si une arête x_nx_{n+1} n'est pas dans W , on l'ajoute. Soit W maximal. Si toutes les arêtes incidentes à x_n sont dans W , comme le degré est pair il n'y a qu'une possibilité : $x_n = x_0$ (démonstration : (a) mq le dernier x_n fait forcément partie des x_0, \dots, x_{n-2} : oui car sinon on pourrait ajouter encore une arête ; (b) mq c'est forcément x_0 , par l'absurde : supposons $x_n = x_{i \neq 0}$, alors comme $d(x_i)$ pair il y a des paires d'arêtes de W mais aussi forcément une arête qui part de x_i et qui n'est pas dans W , donc W n'est pas maximal). Donc W est un tour.



Application sur la ville de Königsberg

Démonstration du théorème d'Euler

Supposons que W n'est pas eulérien. Alors il existe une arête $yy' \notin W$. Le graphe est connexe, il existe donc un chemin $y'Px_0$. Dans P il y a une première partie $P' = y'x_i$ (éventuellement vide avec $i = 0$) qui n'est pas dans W . Alors $yy'P'x_{i+1}x_nx_1\dots x_i$ est un parcours plus long que W (d'au moins une arête : yy'), c'est absurde. Donc il n'existe pas de yy' .



Graphes hamiltoniens et semi-hamiltoniens

- On appelle *chemin hamiltonien* un chemin qui passe une fois et une seule par tous les sommets d'un graphe.
- Un graphe qui admet un chemin hamiltonien est appelé *graphe semi-hamiltonien*.
- Le chemin $x_1x_2 \dots x_nx_1$ est un *circuit hamiltonien* si $x_1x_2 \dots x_n$ est un chemin hamiltonien.
- Un graphe qui admet un circuit hamiltonien est appelé *hamiltonien*.
- Une *orientation* d'un graphe est un choix d'orientation pour chaque arête. Une orientation d'un graphe *complet* est appelée un *tournoi*.

Théorème

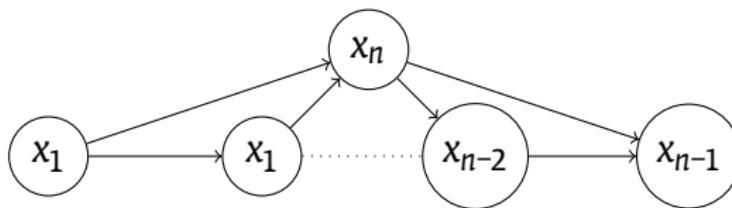
Tout tournoi est un graphe semi-hamiltonien (et le chemin hamiltonien est orienté).

Preuve du théorème

Par récurrence.

K_2 admet un chemin hamiltonien.

Supposons que K_{n-1} admet un ch. ham. Ajoutons un point x_n et toutes les arêtes pour en faire K_n . Supposons qu'il existe une orientation des nouvelles arêtes telle qu'il n'y a pas de chemin hamiltonien. Tracer les lignes :



Si la première flèche va vers le bas, alors on a un chemin hamiltonien. Donc elle va vers le haut. Idem, la dernière va forcément vers le bas. Si celle de x_j va vers le haut et celle de x_{j+1} vers le bas on a un chemin hamiltonien, donc ce phénomène ne peut pas se produire. Quand on commence par x_1 les flèches doivent aller vers le haut, et si on recule à partir de x_{n-1} les flèches doivent aller vers le bas. Elles vont forcément se rencontrer quelque part. Donc on a toujours un chemin hamiltonien.

Théorème (Dirac (1952))

Tout graphe G avec $|G| \geq 3$ et degré minimum $\geq \frac{|G|}{2}$ est hamiltonien.

Application : On a un groupe de n personnes dont chacune connaît au moins $\frac{n}{2}$ autres dans le groupe. Alors on peut s'asseoir autour une table de manière à ce que chacun soit assis entre deux de ses connaissances.

Preuve du théorème de Dirac

Soit G un tel graphe. G est forcément connexe, sinon : si on prend la plus petite des deux composantes, le degré de tout sommet serait $< \frac{n}{2}$ puisque cette composante a au plus $\frac{n}{2}$ sommets et le degré est toujours plus petit de 1 que le nombre de sommets.

Soit $P = x_0 \dots x_k$ un chemin de longueur maximale de G . Par maximalité tous les voisins de x_0 et de x_k sont sur P . Comme au moins $\frac{n}{2}$ des sommets x_0, \dots, x_{k-1} sont adjacents à x_k , au moins $\frac{n}{2}$ parmi ces mêmes sommets ont la propriété qu'il existe une arête x_0x_{i+1} (attention, on a au moins $\frac{n}{2}$ sommets qui ont la propriété que leur voisin suivant est connecté à x_0 , donc : *la propriété porte sur le voisin !!*), et n est plus grand que k , donc forcément quelque part au milieu il existe un i qui a les deux propriétés, c'est-à-dire tel qu'on ait aussi bien des arêtes x_0x_{i+1} que x_ix_k .

Application si on organise un dîner ou un colloque où chacun connaît au moins la moitié des gens.

Tout le monde peut s'asseoir à côté de deux personnes qu'il connaît. (Grande table circulaire)



Preuve du théorème de Dirac

Alors le cycle $C = x_0x_{i+1} \dots x_kx_i \dots x_0$ est hamiltonien : si ce n'était pas le cas, on aurait un sommet $y \notin C$. G est connexe donc il existe des chemins à partir de tous les points de C vers y , prenons le plus court $y \dots x_j$. Il suffirait alors de prendre $y \dots x_j \dots x_kx_i \dots x_0x_{i+1} \dots x_{j-1}$ pour avoir un chemin plus long que P : absurde.

