Corrigé du BBN°3 Sujet du mardi.

## Exercice N°1 : 6 points

**Partie A : Étude de la trajectoire du drone d'Alex**

**1.** Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
Un vecteur directeur de cette droite est $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}(0\,;\,2\,;\,0,5)$. Cette droite passe par $A$ par exemple. On trouve ainsi une représentation paramétrique de $(AB)$ donnée, pour $t$ réel, par

$$\begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \\ z = z_A + t(z_B - z_A) \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = 0,25 + 0,5t \end{cases}$$

**2. a.** Justifier que le vecteur $\overrightarrow{n}(0\,;\,1\,;\,-1)$ est un vecteur normal au plan (PQU).
$\overrightarrow{PQ}(0\,;\,1\,;\,1)$ et $\overrightarrow{PU}(10\,;\,0\,;\,0)$ ne sont pas colinéaires, et on a

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$$
$$\overrightarrow{PU} \cdot \overrightarrow{n} = 10 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times (-1) = 0$$

Ainsi, $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (PQU), donc $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (PQU).

**b.** En déduire une équation cartésienne du plan (PQU).
$\overrightarrow{n}$ est normal au plan (PQU) donc ce plan admet une équation du type $0 \times x + 1 \times y + (-1) \times z + d = 0$, c'est-à-dire du type $y - z + d = 0$ avec $d$ à déterminer.
Or, $P(0\,;\,10\,;\,0)$ appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, d'où $10 - 0 + d = 0 \iff d = -10$.. Ainsi, une équation cartésienne de (PQU) est

$$y - z - 10 = 0.$$

**3.** Démontrer que la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(2\,;\,\dfrac{37}{3}\,;\,\dfrac{7}{3}\right)$.
(AB) de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}(0;2;0.5)$ et le plan (PQU) de vecteur normal $\overrightarrow{n}(0\,;\,1\,;\,-1)$ sont sécants si et seulement si $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n} \neq 0$, ce qui est le cas ici. Ils sont donc sécants en un point $I(x\,;\,y\,;\,z)$.
Par ailleurs, un point $I(x;y;z)$ appartient à l'intersection de la droite (AB) et du plan (PQU) si et seulement si il satisfait l'équation paramétrique de (AB) et l'équation cartésienne de (PQU) si et seulement si

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = 0,25 + 0,5t \\ y - z - 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = 0,25 + 0,5t \\ 4 + 2t - (0,25 + 0,5t) - 10 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 + 2t \\ z = 0,25 + 0,5t \\ 1,5t - 6,25 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{37}{3} \\ z = \frac{7}{3} \\ t = \frac{25}{6} \end{cases}$$

Ainsi, la droite (AB) et le plan (PQU) sont sécants au point I de coordonnées $\left(2\,;\,\dfrac{37}{3}\,;\,\dfrac{7}{3}\right)$.

**4.** Expliquer pourquoi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.
Les points se situant sur l'obstacle PQTU ont une cote comprise entre 0 et 1. Or, le point $I$, intersection des droites (AB), décrivant la trajectoire du drone d'Alex, et du plan (PQU), dont l'obstacle est le rectangle PQTU, a une cote de $\dfrac{7}{3} > 2$, donc ne peut se situer sur le rectangle PQTU. Ainsi, en suivant cette trajectoire, le drone d'Alex ne rencontre pas l'obstacle.

**Partie B : Distance minimale entre les deux trajectoires**

Pour éviter une collision entre leurs deux appareils, Alex et Élisa imposent une distance minimale de 4 mètres entre les trajectoires de leurs drones.
L'objectif de cette partie est de vérifier si cette consigne est respectée.
Pour cela, on considère un point $M$ de la droite (AB) et un point $N$ de la droite (CD).
Il existe alors deux réels $a$ et $b$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{A}M} = a\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{C}N} = b\overrightarrow{\mathrm{CD}}$.
On s'intéresse donc à la distance $MN$.

**1.** Démontrer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MN}$ sont $(2-2b\,;\,2-2a\,;\,-0{,}5a)$.

Par la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}\\ &= -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}\\ &= -a\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + b\overrightarrow{CD}\\ &= -a(0\,;\,2\,;\,0{,}5) + (2\,;\,2\,;\,0) + b(-2\,;\,0\,;\,0)\\ &= (2-2b\,;\,2-2a\,;\,-0{,}5a)\end{aligned}$$

**2.** On admet que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires. On admet également que la distance $MN$ est minimale lorsque la droite $(MN)$ est perpendiculaire à la fois à la droite (AB) et à la droite (CD).

Démontrer alors que la distance $MN$ est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$.

D'après ce qui est dit dans l'énoncé, la distance MN est minimale si et seulement si (MN) et (AB) sont perpendiculaires **et** (MN) et (CD) sont perpendiculaires. Ceci équivaut à $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ orthogonaux **et** $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{CD}$ orthogonaux, ce qui équivaut encore à $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ **et** $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$, ce qui équivaut au système

$$\begin{cases}2(2-2a) - 0{,}5\times 0{,}5a = 0\\ -2(2-2b) = 0\end{cases} \iff \begin{cases}4 - 4{,}25a = 0\\ 2-2b = 0\end{cases} \iff \begin{cases}a = \frac{4}{4{,}25} = \frac{16}{17}\\ b = 1\end{cases}$$

**3.** En déduire la valeur minimale de la distance $MN$ puis conclure.

La distance $MN$ est minimale lorsque $a = \frac{16}{17}$ et $b = 1$, et on a donc $\overrightarrow{MN}\left(0;\,\frac{2}{17},\,\frac{-8}{17}\right)$. Ainsi, la distance minimale $MN$ est donnée par

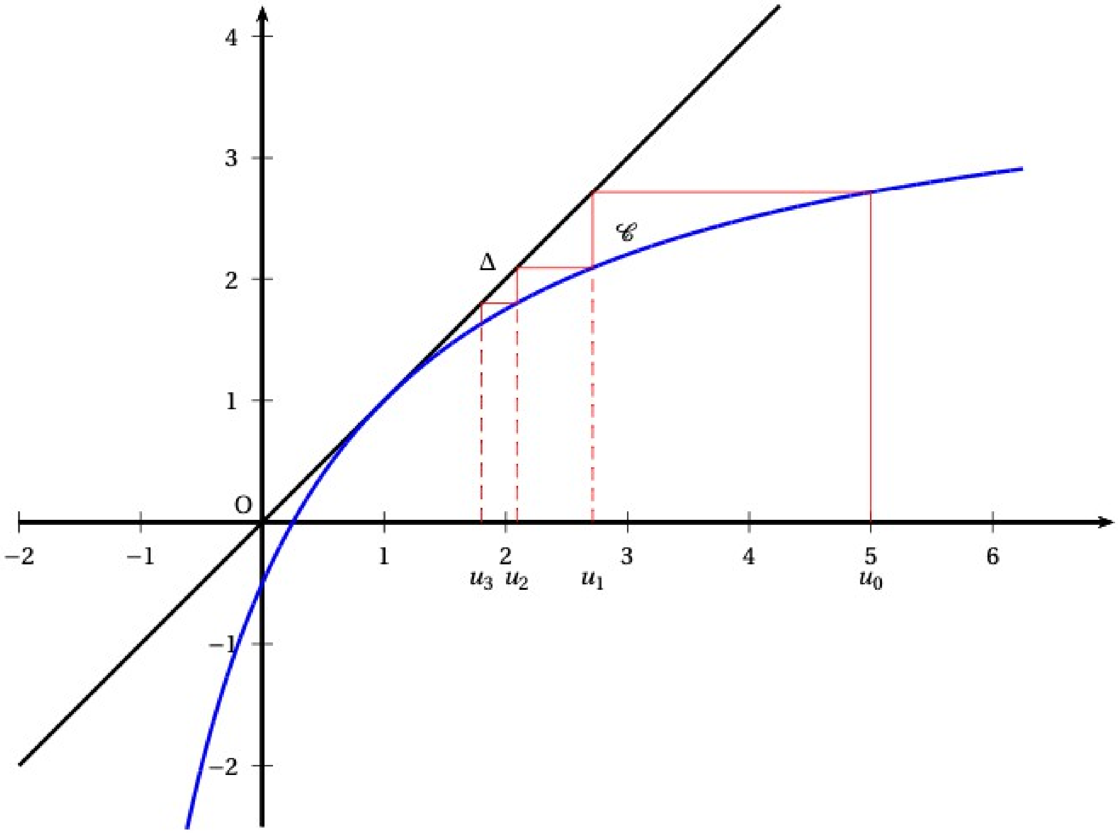
$$MN = \sqrt{(0)^2 + \left(\frac{2}{17}\right)^2 + \left(\frac{-8}{17}\right)^2} = \frac{2\sqrt{17}}{17}.$$

Or $\frac{2\sqrt{17}}{17} \approx 0{,}485\,071$.

L'unité étant égale à 1 décamètre la distance minimale est donc environ $4{,}85 > 4$ : la consigne est respectée.

**Exercice N°2 :** **4 points**

1. **a.** En partant du point (($u_0 = 5$ ; 0) et en allant alternativement verticalement vers la courbe $\mathscr{C}$ et horizontalement vers la droite $\Delta$, on obtient les points de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisses, $u_1$, $u_2$, $u_3$ etc. Voir la figure




**b.** Sur la vue des premiers termes il semble que la suite soit décroissante vers l'abscisse du point commun à $\mathscr{C}$ et à $\Delta$ soit vers 1.

2. **a.** • Initialisation : on a $u_0 - 1 = 5 - 1 = 4 > 0$ : vrai.

• Hérédité : supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n - 1 > 0$.

Or $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ donc $u_{n+1} - 1 = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 = \dfrac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} = \dfrac{3u_n - 3}{u_n + 2} = \dfrac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$.

On sait que $u_n - 1 > 0$, donc $u_n > 1$ et $u_n + 2 > 3 > 0$.

Tous les termes de $u_{n+1} - 1$ sont supérieurs à zéro, donc finalement $u_{n+1} - 1 > 0$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - 1 > 0$.

**b.** • Décroissance de la suite : soit $u_{n+1} - u_n = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \dfrac{4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \dfrac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = -\dfrac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n + 2} = -\dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$. Les deux termes du quotients sont positifs, donc finalement $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui démontre que la suite $(u_n)$ est décroissante.

Or $u_n - 1 > 0 \iff u_n > 1$ La suite étant minorée par 1 et décroissante converge vers une limite $\ell \geqslant 1$ et par continuité de la fonction $f$, on a $\ell = \dfrac{4\ell - 1}{\ell + 2}$ équation dont la seule solution est $\ell = 1$.

La suite $(u_n)$ converge vers 1.

3. **a.** On a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 1} - \dfrac{1}{u_n - 1}$.

Or on a vu ci-dessus (démonstration par récurrence) que $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$, donc

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \dfrac{1}{u_n - 1} = \dfrac{u_n + 2 - 3}{3(u_n - 1)} = \dfrac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \dfrac{1}{3}$, car on a vu que $u_n - 1 > 0$.

Ceci montre que la suite $(v_n)$ est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$, de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{5-1} = \frac{1}{4}$.

**b.** On sait que $v_n = v_0 + n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times n = \frac{1}{4} + \frac{n}{3} = \frac{3+4n}{12}$.

Or $v_n = \frac{1}{u_n - 1} \iff u_n - 1 = \frac{1}{v_n} \iff u_n = \frac{1}{v_n} + 1 = \frac{12}{3+4n} + 1 = \frac{12+3+4n}{3+4n} = \frac{15+4n}{3+4n}$, quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

On retrouve ici que les termes de $(u_n)$ sont des rationnels et comme le suggérait les constructions du 1. a. que $u_1 = \frac{19}{7}$, $u_2 = \frac{23}{11} = 2$, $u_3 = \frac{9}{5} = 1,8$.

**c.** Pour $n > 0$ on peut écrire $u_n = \frac{4 + \frac{15}{n}}{4 + \frac{3}{n}}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} 4 + \frac{15}{n} = 4 \\ \lim\limits_{n \to +\infty} 4 + \frac{3}{n} = 4 \end{array}\right\} \textit{ par quotient } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1 \ .$$

OU

Avec les monômes de plus haut degré

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{4n}}{\cancel{4n}} = 1.$$

**Exercice N°3 :** **6 points**

**Partie A :**

**1.** $\dfrac{4\times e^{x}}{e^{x}\times(1+7e^{-x})}=\dfrac{4}{1+7e^{-x}}$, donc $f_1(x)=\dfrac{4}{1+7e^{-x}}$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.

**2. a.** La courbe $\mathscr{C}_1$ admet deux asymptotes car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{7e^{-x}+1}=\dfrac{4}{0+1}=4$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^{x}}{e^{x}+7}=\dfrac{0}{0+7}=0$

Donc en $-\infty$ asymptote à $\mathscr{C}_1$ : la droite horizontale d'équation $y=0$.

Donc en $+\infty$ asymptote à $\mathscr{C}_1$ : la droite horizontale d'équation $y=4$.

**b.** $f_1'(x)=\dfrac{4\times 7e^{-x}}{(1+7e^{-x})^2}$, donc $f_1'(x)>0$.

$f_1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**c.**

| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_1'(x)$ | | + | |
| $f_1$ | 0 | $\nearrow$ | 4 |

Par ce tableau on prouve que $0<f_1(x)<4$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$ car $f_1$ est strictement croissante et voir ses limites aux bornes .

**3. a.** On doit prouver que $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$ pour prouver que $\Omega(a\ ;\ b)$ est centre de symétrie de la courbe (d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$).

Soit $h\in\mathbb{R}, f_1(\ln(7)+h)=\dfrac{4}{7e^{-\ln(7)-h}+1}=\dfrac{4}{7e^{+\ln(\frac{1}{7})-h}+1}=\dfrac{4}{7e^{\ln(\frac{1}{7})}e^{-h}+1}=\dfrac{4}{7\times\frac{1}{7}\times e^{-h}+1}=\dfrac{4}{e^{-h}+1}$.

En changeant $h$ en $-h$ on obtient : $f_1(\ln(7)-h)=\dfrac{4}{e^{h}+1}$,

on additionne et divise par 2 :

$\frac{f_1(\ln(7)+h)+f_1(\ln(7)-h)}{2}=\dfrac{\frac{4}{e^{h}+1}+\frac{4}{e^{-h}+1}}{2}=\dfrac{\frac{4}{e^{h}+1}+\frac{4e^{h}}{1+e^{h}}}{2}=\dfrac{4e^{h}+4}{2(1+e^{h})}=\dfrac{4(e^{h}+1)}{2(1+e^{h})}=2$

Donc $I_1(\ln(7)\ ;\ 2)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_1$

**b.** $f'(\ln(7))=\frac{4\times7e^{-\ln(7)}}{(1+7e^{-\ln(7)})^2}=\frac{28e^{\ln(\frac{1}{7})}}{(1+7e^{\ln(\frac{1}{7})})^2}=\frac{28\frac{1}{7}}{(1+7\frac{1}{7})^2}=\frac{4}{2^2}=1$,

$f_1(\ln(7))=2$ d'après le 3. a. avec $h=0$, donc l'équation de la tangente $(T_1)$ à la courbe $\mathscr{C}_1$ au point $I_1$ : $y=1(x-\ln(7))+2$; $y=x-\ln(7)+2$ .

**c.** Au point d'ordonnée 2 de $\mathscr{C}_1$, on trace une droite (rouge) de coefficient directeur 1 par la méthode de l'escalier.

**4. a.** Une primitive de la fonction $f_1: x\mapsto 4\times\dfrac{e^{x}}{7+e^{x}}$ sur $\mathbb{R}$ est

la fonction $F_1: x\mapsto 4\times\ln(7+e^{x})$.

**b.** La valeur moyenne de $f_1$ sur l'intervalle $[O\ ;\ \ln 7]$ est

$\frac{1}{\ln(7)}\times(4\times\ln(7+e^{\ln(7)})-4\ln(e^{0}+7))=\frac{4}{\ln(7)}\times\ln(\frac{14}{8})=\frac{4}{\ln(7)}\times\ln(\frac{7}{4})$ .

**Partie B :**

**1.** On remarque d'abord que $f_n(x)=f_1(nx)$ pour tout $x$ de $\mathbb{R}$.Pour tout entier naturel $n$ non nul le point $A\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_n$ si et seulement si $f_n(0)=\frac{1}{2}$ si et seulement si $f_1(n\times0)=\frac{1}{2}$si et seulement si $f_1(0)=\frac{1}{2}$or $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

**2. a.** Pour tout entier naturel $n$ non nul la courbe $\mathscr{C}_n$ et la droite d'équation $y=2$ ont un unique point d'intersection : on résout $f_n(x)=2$

$f_n(x)=2\iff 4e^{nx}=2e^{nx}+14\iff e^{nx}=7\iff nx=\ln(7)\iff x=\frac{\ln(7)}{n}$ (ici$n\in\mathbb{N}^*$). $\boxed{x=\frac{\ln(7)}{n}}$

**b.** $f_n'(x)=n\times f_1'(nx)=\dfrac{4n\times7e^{-nx}}{(1+7e^{-nx})^2}$, donc si $x=\dfrac{\ln(7)}{n}$, $f_n'\left(\dfrac{\ln(7)}{n}\right)=\dfrac{4n\times7e^{-n\frac{\ln(7)}{n}}}{(1+7e^{-n\frac{\ln(7)}{n}})^2}=n\times\frac{4\times7e^{\ln(\frac{1}{7})}}{(1+7e^{\ln(\frac{1}{7})})^2}=$

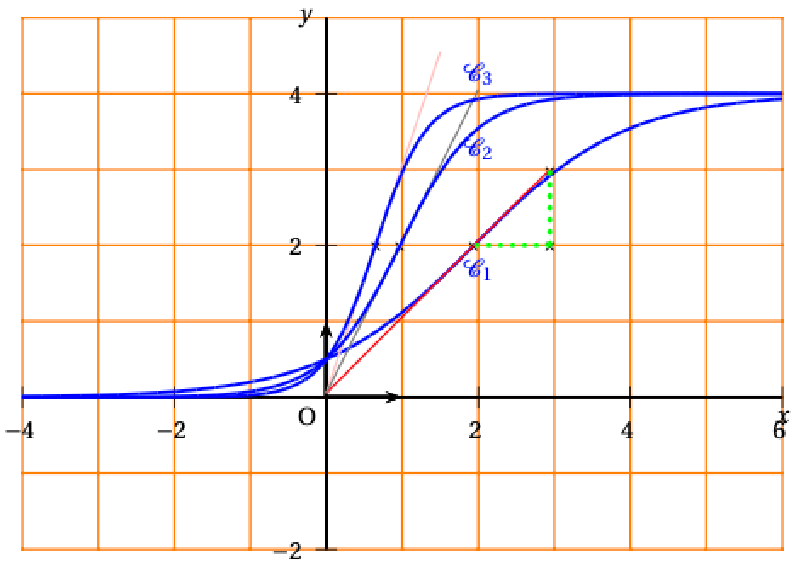
$n\times\frac{4\times1}{(1+7\times\frac{1}{7})^2}=n\times\frac{4}{(1+1)^2}=n.$

Une équation de la tangente $(T_n)$ à la courbe $\mathscr{C}_n$ au point $I_n$ est

$y=n(x-\frac{\ln(7)}{n})+2=nx-\ln(7)+2$,

elles coupent toutes l'axe des $y$ à la même ordonnée à l'origine.

**c.** Les droites $(T_2)$(gris) et $(T_3)$(rose).




**3.** Soit la suite $(u_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ non nul par

$$u_n = \frac{n}{\ln 7}\int_0^{\frac{\ln 7}{n}} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

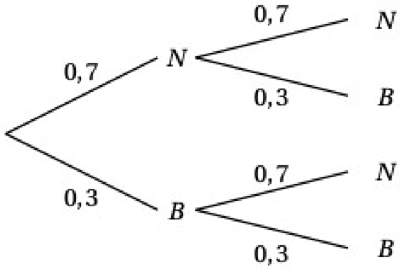
une primitive de $f_n$ c'est $F_n(x) = \frac{4}{n}\ln\left(\mathrm{e}^{nx}+7\right)$ donc $u_n = \dfrac{n}{\ln 7} \times \frac{4}{n} \times \left(\ln\left(\mathrm{e}^{n\times\frac{\ln 7}{n}}+7\right) - \ln(8)\right) =$
$\dfrac{4}{\ln 7} \times \left(\ln\left(\mathrm{e}^{\ln 7}+7\right) - \ln(8)\right) = \dfrac{4}{\ln 7} \times (\ln(14) - \ln(8)) = \dfrac{4}{\ln 7} \times \left(\ln\dfrac{14}{8}\right) = \dfrac{4}{\ln 7} \times \left(\ln\dfrac{7}{4}\right)$ qui ne dépend pas de $n$.

La suite $(u_n)$ est constante.

## Exercice n°4: 5 points

### Partie A

**1.**




Avec la formule des probabilités totales.

D'où : $p = P(G) = 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7 \Rightarrow \boxed{p = 0,42}$.

**2.** Soit $n$ un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue $n$ parties identiques et indépendantes.

On note $X$ la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et $p_n$ la pr
que le joueur gagne au moins une fois au cours des $n$ parties.

**a.** L'expérience aléatoire a deux issues :

— succès : le joueur gagne avec une probabilité de $p = 0,42$
— échec : le joueur perd avec une probabilité de $q = 1 - p = 0,58$

On répète cette expérience $n$ fois de manière indépendante. Donc, **la variable aléatoire qui co nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$** .

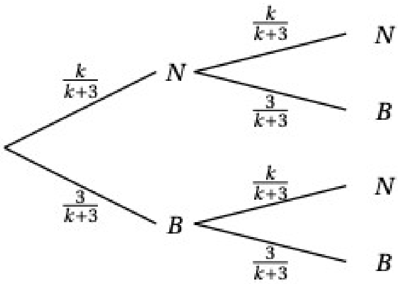
**b.** $p_n = 1 - P(X = 0) = \boxed{1 - 0,58^n = p_n} \Longrightarrow p_{10} = 1 - 0,58^{10} \approx \boxed{0,996 \approx p_{10}}$

**c.** $1 - 0,58^n \geqslant 0,99 \Rightarrow 0,01 \geqslant 0,58^n \Rightarrow \ln(0,01) \geqslant \ln\left(0,58^n\right) \Rightarrow \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)} \leqslant n \Rightarrow$

$\boxed{\textbf{le joueur doit jouer au moins 9 parties}}$.

### Partie B

**1. a.**




On en déduit que :

$$p\left(Y_k = 5\right) = \frac{k}{(k+3)} \times \frac{3}{(k+3)} + \frac{3}{(k+3)} \times \frac{k}{(k+3)} \Longrightarrow \boxed{p\left(Y_k = 5\right) = \frac{6k}{(k+3)^2}}$$

En procédant de même on obtient loi de probabilité suivant de variable $y_i$ .

**b.** d

| $y_i =$ | $-9$ | $-1$ | $+5$ |
|---|---|---|---|
| $P\left(Y_k = y_i\right) =$ | $\dfrac{9}{(k+3)^2}$ | $\dfrac{k^2}{(k+3)^2}$ | $\dfrac{6k}{(k+3)^2}$ |

**2.** $\mathrm{E}(Y_k) = -9 \times \dfrac{9}{(k+3)^2} + (-1) \times \dfrac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \dfrac{6k}{(k+3)^2} = \dfrac{-81 - k^2 + 30k}{(k+3)^2} = \dfrac{-(k-3)(k-27)}{(k+3)^2}$

D'où :

$$\mathrm{E}(Y_k) > 0 \Longleftrightarrow k \in ]3\ ;\ 27[$$

$\boxed{\text{Le jeu est favorable au joueur pour } k \in ]3\ ;\ 27[}$.