Universidade do Minho
Departamento de Matemática Lic. em Ciências da Computação

# Análise

— Folha de exercícios 8 — 2018'19 —

1. Calcule o valor do integral $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,d(x,y)$, onde:
   (a) $f(x,y) = 3$ e $\mathcal{R} = [1,2] \times [0,1]$;
   (b) $f(x,y) = e^{x+y}$ e $\mathcal{R} = [-1,0] \times [0,2]$;
   (c) $f(x,y) = x^3 + y^2$ e $\mathcal{R} = [0,1] \times [1,2]$;
   (d) $f(x,y) = xy^2$ e $\mathcal{R} = [-1,0] \times [1,2]$.

2. Calcule os seguintes integrais, esboçando as regiões de integração:
   (a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} dydx$;
   (b) $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dydx$;
   (c) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\,dydx$;
   (d) $\int_0^1 \int_1^{\mathrm{e}\ y} (x+y)\,dxdy$;.

3. Calcule o valor do integral $\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,d(x,y)$, usando as duas possíveis ordens de integração, quando $f$ e $\mathcal{R}$ são:
   (a) $f(x,y) = xy$ e $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x^2\}$;
   (b) $f(x,y) = x + y$ e $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2,\ x \leq y \leq -x^2 + 4x\}$;
   (c) $f(x,y) = e^{x+y}$ e $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ x \leq y \leq -x + 2\}$;
   (d) $f(x,y) = x + y$ e $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x \leq y \leq -x + 2\}$.

4. Identifique o domínio de integração (fazendo um esboço) e inverta a ordem de integração nos seguintes integrais:
   (a) $\int_0^1 \int_y^{y+3} f(x,y)\,dxdy$;
   (b) $\int_{-2}^2 \int_0^{4-x^2} f(x,y)\,dydx$;
   (c) $\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y} f(x,y)\,dxdy$;
   (d) $\int_0^1 \int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\,dydx$;
   (e) $\int_1^2 \int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\,dydx$;
   (f) $\int_0^2 \int_x^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dydx$;
   (g) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx + \int_1^2 \int_0^{-x+2} f(x,y)\,dydx$;
   (h) $\int_0^1 \int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$;
   (i) $\int_{-2}^0 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx + \int_1^2 \int_0^{-x+2} f(x,y)\,dydx$;
   (j) $\int_0^1 \int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$.

5. Invertendo a ordem de integração, calcule:

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-y^2}\,dydx$; (b) $\displaystyle\int_1^{e^3}\int_{\log y}^{3} dxdy$;

(c) $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^{1} e^{x^3}\,dx\,dy$; (d) $\displaystyle\int_1^{e}\int_{\log y}^{1} \frac{(x^2+1)^{13}}{y}\,dx\,dy$.

6. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas $R$ que se seguem:

(a) $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\ e^{-x}\le y\le e^x\}$;
(b) $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -y^2\le x\le y^2,\ 0\le y\le 1\}$;
(c) $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge 0,\ y\le -2x^2-x+3,\ y\le -x+1\}$;
(d) $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge x^2,\ y\le 4-x^2\}$;

7. Usando integrais duplos, calcule o volume de cada um dos sólidos $S$ que se seguem:

(a) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x\le 2,\ e^{-x}\le y\le e^x,\ 0\le z\le x+y\}$;
(b) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y\ge 0,\ y\le -x^2-2x,\ x-y\le z\le x+y\}$;
(c) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x\le 0,\ x\ge y^2-y,\ x\le z+y,\ y\le -x-z\}$;
(d) $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 4-x^2-y^2\}$.

8. Determine as coordenadas polares dos pontos cuja representação cartesiana é

$$A=(3,\sqrt{3}),\quad B=(0,2),\quad C=(0,-2),\quad D=(-4,-4),\quad E=(1,1).$$

9. Determine as coordenadas cartesianas dos pontos cuja representação polar é

$$A=\left(1,\frac{\pi}{4}\right),\quad B=\left(2,\frac{3\pi}{2}\right),\quad C=(5,0),\quad D=\left(5,\frac{\pi}{2}\right),\quad E=\left(3,\frac{11\pi}{6}\right).$$

10. Passando para coordenadas polares, calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,d(x,y)$, onde:

(a) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}$ e $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 5\right\}$;

(b) $f(x,y)=(x^2+y^2)^{-1}\log(x^2+y^2)$ e $\mathcal{D}$ é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências de equações $x^2+y^2=4$ e $x^2+y^2=9$;

(c) $f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ e $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 9,\ \sqrt{3}y\ge x,\ \sqrt{3}x\ge y\right\}$;

(d) $f(x,y)=x^2+y^2$ e $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 2,\ 0\le y\le\sqrt{2x-x^2}\right\}$;

(e) $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ e $\mathcal{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le x,\ y\ge x^2,\ x\ge 0\right\}$.

11. Usando integrais duplos, calcule a área de cada uma das regiões planas $R$ que se seguem:

(a) $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\ge -x,\ y\le x,\ x^2+y^2\le 9\}$;
(b) $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\le x,\ x\ge 0\}$;
(c) $R = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 16,\ (x+2)^2+y^2\ge 4,\ y\ge 0\}$.

12. Usando integrais duplos, calcule o volume dos seguintes sólidos:

(a) $A=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le x^2+y^2\right\}$;
(b) $B=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ z\ge 0,\ y+z\le 2\right\}$;
(c) $C=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1,\ z\ge 0,\ y+z\le 3\right\}$.