Universidade do Minho — Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

— Folha de exercícios 6 — 2018'19 —

1. Calcule as derivadas parciais de segunda ordem das funções definidas por

   (a) $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$; (b) $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$;

   (c) $f(x,y,z) = \cos(xyz)$; (d) $f(x,y,z) = y^2 \log x + xe^{xz}$;

   (e) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy^2)$; (f) $f(x,y,z) = xy^2 + zy$;

   (g) $f(x,y) = \dfrac{y}{(x^2+y^2)^2}$; (h) $f(x,y,z) = xy^{\frac{3}{2}} + xe^{xy}$.

2. Usando o teorema de Schwarz, mostre que não pode existir uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ cujas derivadas parciais de primeira ordem sejam:

   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x^3\,, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 + x\,;$

   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x \operatorname{sen} y\,, \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y \operatorname{sen} x\,.$

3. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

   (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

   (b) Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

   (c) Explique porque não há contradição com o teorema de Schwarz.

4. Considere a função definida por $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x+y} & \text{se } x \neq -y, \\ 0 & \text{se } x = -y. \end{cases}$

   (a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$.

   (b) Verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

5. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

   $$f(x,y) = (x\mathrm{e}^{\,y} + \cos y, x, x + \mathrm{e}^{\,y}).$$

   de cada uma das funções definidas a seguir, indicando o conjunto dos pontos onde está definida:

   (a) Justifique que f é derivável em todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (b) Calcule a matriz Jacobiana de f para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

   (c) Calcule $Jf(2,0)$ e $f'(2,0)$.

6. Calcule a derivada de cada uma das funções definidas a seguir, indicando o conjunto dos pontos (x, y) onde está definida:
   (a) $f(x, y) = (x\mathrm{e}^{\,y} + \cos y, x, x + \mathrm{e}^{\,y})$;
   (b) $f(x, y) = (x\sqrt[3]{y}, e^{x+2y})$;
   (c) $f(x, y) = (\ln(x^2 + y^2), \cos(xy))$;
   (d) $f(x, y, z) = (zx^2, -ye^z)$.

   Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por
   $$f(x, y) = (3x - 2y, -y, \pi x + y).$$
   (a) Calcule $f'(x, y)$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;
   (b) Observe e comente o resultado obtido na alínea anterior;
   (c) O mesmo acontece em todas as aplicaçãoes lineares? Justifique.

7. Calcule a derivada de $f \circ g$ em (x, y, z), sendo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções definidas por
   $$g(x, y, z) = (xz, yz + x) \quad \text{e} \quad f(x, y) = 2x + y^2.$$

8. Use a "regra da cadeia" de várias variáveis para calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, sendo
   (a) $f(u, v) = 2uv, \quad \text{com} \quad u = u(x, y) = x^2 + y^2 \text{ e } v = v(x, y) = \dfrac{x}{y}$;
   (b) $f(s, t) = 2s^2 - st^2, \quad \text{com} \quad s = s(x, y) = y^2 \text{ e } t = t(x, y) = x\cos y$;

9. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla F(2, 3) = (-1, 2)$. Determine:
   (a) $f'(2)$, sendo $f(x) = F(x, x + 1)$;
   (b) $f'(1)$, sendo $f(x) = F(2x, -x^2 + 4)$.

10. Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $\nabla G(2, 3, 0) = (-1, 2, 3)$. Determine:
    (a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, 2)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, 2)$, sendo $g(x, y) = G\left(yx, x + y, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$;
    (b) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0, -1)$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0, -1)$, sendo $g(x, y) = G\left(-2ye^x, -3y + y^3x^2, x\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right)$.

11. Considere a seguinte equação
    $$xyz^3 + x^2yz^2 - x + 2y + z = 0.$$
    (a) Mostre que a equação apresentada define implicitamente z como função de (x, y) para pontos "próximos" de $(1, 1, -1)$.
    (b) Determine $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1, 1)$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1, 1)$.

12. Considere a seguinte equação de três variáveis reais
    $$xz^2 + xy^2z = yz^2 + 5.$$
    (a) Mostre que a equação apresentada define z como função de (x, y) para pontos "próximos" de $(3, 1, 1)$;
    (b) Determine $z'(3, 1)$;
    (c) Para $z(x, y)$, definida na alínea (a), determine $H'(3, 1)$, onde $H(x, y) = G(x, y, z(x, y))$ para (x, y) "próximo" de $(3, 1)$, com $G(x, y, z) = e^{xy} + xyz$.

13. Considere a seguinte equação de três variáveis reais
    $$xe^{yz} + z\log y = 1$$
    (a) Mostre que a equação apresentada define z como função de (x, y) para pontos "próximos" de $(1, 1, 0)$;
    (b) Determine $z'(1, 1)$.