Notas de Álgebra Linear

Carla Mendes

2015/2016

6. Valores e Vetores Próprios

6.1 Definição. Propriedades

Definição 6.1.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Diz-se que $v \in V$ é* ***vetor próprio*** *de f se:*

i) $v \neq 0_V$*;*

ii) existe $\lambda \in \mathbb{K}$ *tal que* $f(v) = \lambda v$.

O escalar λ diz-se ***um valor próprio de f associado ao vetor próprio*** *v.*

Nas condições da definição anterior, existe um único escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(v) = \lambda v$. De facto, se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ são escalares tais que $f(v) = \lambda_1 v$ e $f(v) = \lambda_2 v$, então $\lambda_1 v - \lambda_2 v = 0_V$, pelo que $(\lambda_1 - \lambda_2)v = 0_V$ e como $v \neq 0_V$, temos $\lambda_1 - \lambda_2 = 0_{\mathbb{K}}$ e, portanto, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Definição 6.1.2. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Diz-se que $\lambda \in \mathbb{K}$ é* ***valor próprio*** *de f se existe $v \in V \setminus \{0_V\}$ tal que $f(v) = \lambda v$. Neste caso, diz-se que v é um* ***vetor próprio de f associado a*** *λ. Ao conjunto de valores próprios de f dá-se a designação de* ***espectro de*** *f.*

Sendo V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ um valor próprio de f, prova-se que existem vetores próprios distintos associados ao mesmo valor próprio λ. Com efeito, se v é um vetor próprio associado a λ, então para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v).$$

Logo, se $\alpha \neq 0_{\mathbb{K}}$, temos $\alpha v \neq 0_V$ e, portanto, αv é vetor próprio de f.

Exemplo 6.1.3. *Consideremos, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$, o endomorfismo f definido por $f(a, b, c) = (2a, c, 2c)$, para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, e os vetores* $(1, 0, 0)$*,* $(0, 1, 2)$*,* $(1, 2, 4)$*,* $(0, 1, 0)$*,* $(0, -2, 0)$*. Tem-se*

$$\begin{array}{rcccl} f(1,0,0) & = & (2,0,0) & = & 2 \cdot (1,0,0), \\ f(0,1,2) & = & (0,2,4) & = & 2 \cdot (0,1,2), \\ f(1,2,4) & = & (2,4,8) & = & 2 \cdot (1,2,4), \end{array}$$

logo $(1,0,0)$*,* $(0,1,2)$*,* $(1,2,4)$ *são vetores próprios de* f *associados ao valor próprio* 2.
Temos também

$$\begin{array}{rcccl} f(0,1,0) & = & (0,0,0) & = & 0\cdot(0,1,0), \\ f(0,-2,0) & = & (0,0,0) & = & 0\cdot(0,-2,0), \end{array}$$

e, portanto, $(0,1,0)$*,* $(0,-2,0)$ *são vetores próprios de* f *associados ao valor próprio* 0.

Exemplo 6.1.4. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita,* $(v_1,\ldots,v_n)$ *uma base de* V*,* $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ *e* f *o endomorfismo de* V *tal que*

$$M(f;(v_j),(v_i)) = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n).$$

Para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$*, tem-se* $v_i\neq 0_V$ *e* $f(v_i)=\lambda_i v_i$*, logo* v_i *é vetor próprio de* f *associado ao valor próprio* λ_i*.*

Exemplo 6.1.5. *Sejam* $\mathcal{B}$ *a base canónica de* $\mathbb{R}^2$ *e* $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ *tal que*

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -5 & 12 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} = A.$$

Uma vez que $A\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$*, temos* $f(2,1)=1\cdot(2,1)$*, logo, como* $(2,1)\neq 0_{\mathbb{R}^2}$*, o vetor* $(2,1)$ *é vetor próprio de* f *associado ao valor próprio* 1*.*

Um endomorfismo dum espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ pode não admitir valores próprios e, consequentemente, não admitir vetores próprios.

Proposição 6.1.6. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*,* $f\in\mathcal{L}(V,V)$ *e* $\lambda\in\mathbb{K}$*. Seja* $V_\lambda=\{v\in V : f(v)=\lambda v\}$*. Então* V_λ *é subespaço vetorial de* V*.*

Demonstração. Exercício. □

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $f\in\mathcal{L}(V,V)$ e $\lambda\in\mathbb{K}$. Se λ não é valor próprio de f, tem-se $V_\lambda=\{0_V\}$. Caso λ seja valor próprio de f, os vetores próprios de f associados a λ são os elementos de $V_\lambda\setminus\{0_V\}$.

Definição 6.1.7. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*,* $f\in\mathcal{L}(V,V)$ *e* $\lambda\in\mathbb{K}$ *um valor próprio de* f*. O subespaço* $V_\lambda=\{v\in V : f(v)=\lambda v\}$ *designa-se por* ***subespaço próprio de*** f ***associado ao valor próprio*** λ*.*

No caso de endomorfismos de um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita ≥ 1, a utilização de matrizes facilita o estudo dos valores próprios e dos vetores próprios.

Definição 6.1.8. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diz-se que $y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é **vetor próprio** de A se*

i) $y \neq \mathbf{0}_{n\times 1}$;

ii) existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $Ay = \lambda y$.

*Nestas condições, o escalar λ diz-se um **valor próprio de** A **associado ao vetor próprio** y.*

Definição 6.1.9. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diz-se que $\lambda \in \mathbb{K}$ é* **valor próprio** *de A se existe $y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) \setminus \{\mathbf{0}_{n\times 1}\}$ tal que $Ay = \lambda y$. Neste caso, diz-se que y é um **vetor próprio de** A **associado ao valor próprio** λ.*

Exemplo 6.1.10. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \lambda = 2.$$

Uma vez que

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda x.$$

concluímos que $\lambda = 2$ é valor próprio de A e $x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é um vetor próprio de A associado a $\lambda = 2$.

Exemplo 6.1.11. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz escalar, ou seja, tal que $A = \beta I_n$, para algum $\beta \in \mathbb{K}$. Tem-se*

$$Ax = (\beta I_n)x = \beta(I_n x) = \beta x,$$

para qualquer $x \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, pelo que A tem apenas o valor próprio β.

Note-se que, um vetor próprio de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ está associado a um único valor próprio de A. De facto, dado $x \in \mathcal{M}_{n\times 1} \setminus \{\mathbf{0}_{n\times 1}\}$

$$Ax = \lambda x \quad \text{e} \quad Ax = \mu x \Rightarrow \lambda x = \mu x \Leftrightarrow (\lambda - \mu)\, x = \mathbf{0}_{n\times 1} \Rightarrow \lambda - \mu = 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow \lambda = \mu.$$

Porém, a cada valor próprio de A está associada uma infinidade de vetores próprios de A. Com efeito, dados $x \in \mathcal{M}_{n\times 1} \setminus \{\mathbf{0}_{n\times 1}\}$ e $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$

$$Ax = \lambda x \quad \text{e} \quad y = \alpha x \Rightarrow Ay = A\,(\alpha x) = \alpha\,(Ax) = \alpha\,(\lambda x) = \lambda\,(\alpha x) = \lambda y,$$

pelo que $y \in \mathcal{M}_{n\times 1} \setminus \{\mathbf{0}_{n\times 1}\}$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio λ.

Proposição 6.1.12. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.*
Seja $M_\lambda = \{y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : Ay = \lambda y\}$. Então M_λ é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

Demonstração. Exercício. □

Definição 6.1.13. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ um valor próprio de A. Ao subespaço $M_\lambda = \{y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K}) : Ay = \lambda y\}$ dá-se a designação de* ***subespaço próprio de A associado ao valor próprio*** *λ.*

A relação entre valores e vetores próprios de endomorfismos e valores e vetores próprios de matrizes é estabelecida no resultado seguinte.

Proposição 6.1.14. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita ≥ 1, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Então*

a) $v \in V$ é vetor próprio de f se e só se o vetor coluna de v na base $\mathcal{B}$ é vetor próprio de A.

b) $\lambda \in \mathbb{K}$ é valor próprio de f se e só se λ é valor próprio de A.

Demonstração. a) Sejam $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$ e $Y_v = \begin{bmatrix} \alpha_1 \ldots \alpha_n \end{bmatrix}^T$ o vetor coluna de v na base $\mathcal{B}$.
Se v é vetor próprio de f tem-se $v \neq 0_V$ e existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(v) = \lambda v$. Então $Y_v \neq \mathbf{0}_{n\times 1}$ e

$$AY_v = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{bmatrix} = \lambda Y_v.$$

Logo Y_v é vetor próprio de A.
Reciprocamente se admitirmos que Y_v é vetor próprio de A, temos $Y_v \neq \mathbf{0}_{n\times 1}$ e $AY_v = \lambda Y_v$, para algum $\lambda \in \mathbb{K}$. Logo $v \neq 0_V$ e

$$f(v) = (\lambda\alpha_1)v_1 + \ldots + (\lambda\alpha_n)v_n = \lambda(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \lambda v;$$

portanto v é vetor próprio de f.

b) Imediato a partir de a). □

Exemplo 6.1.15. *Na sequência do exemplo 6.1.5 concluímos que $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é vetor próprio de $A = \begin{bmatrix} -5 & 12 \\ -3 & 7 \end{bmatrix}$ e que 1 é valor próprio de A.*

6.2 Determinação de valores próprios e de vetores próprios

Vamos estudar processos para determinar os valores próprios e os vetores próprios de um endomorfismo dum espaço vetorial de dimensão finita ≥ 1.

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita ≥ 1, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ um valor próprio de f. O facto de se ter $V_\lambda = \mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{id}_V)$ resolve o problema da determinação dos vetores próprios associados a λ.

Proposição 6.2.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita ≥ 1, $\mathcal{B}$ uma base de V, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Para cada $v \in V$, seja Y_v o vetor coluna de v na base $\mathcal{B}$. Então $V_\lambda = \{v \in V : (A - \lambda I_n)Y_v = \mathbf{0}_{n\times 1}\}$.*

Demonstração. Temos $V_\lambda = \mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{Id}_V)$. Por outro lado, sendo $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$, tem-se $M(f - \lambda \mathrm{id}_V; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = A - \lambda \mathrm{I}_n$. Assim, uma vez que, para cada $v \in V$, $(f - \lambda \mathrm{id}_V)v = 0_V$ se e só se $(A - \lambda I_n)Y_v = \mathbf{0}_{n\times 1}$, segue que

$$V_\lambda = \{v \in V : (A - \lambda I_n)Y_v = \mathbf{0}_{n\times 1}\}.$$

$\square$

As noções de matriz de uma aplicação linear e de determinante de uma matriz permitem obter um processo prático para a determinação dos valores próprios de f.

Proposição 6.2.2. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita ≥ 1, $\mathcal{B}$ uma base de V, $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.*
São equivalentes as afirmações seguintes:

1) *λ é valor próprio de f.*

2) *$f - \lambda \mathrm{id}_V$ não é automorfismo de V.*

3) *$A - \lambda \mathrm{I}_n$ não é invertível.*

4) $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Demonstração. Sejam $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $\mathcal{B}$ uma base de V, $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) $\Rightarrow$ *2)* Se λ é valor próprio de f, tem-se $V_\lambda \neq \{0_V\}$, ou seja $\mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{id}_V) \neq \{0_V\}$. Logo $f - \lambda \mathrm{id}_V$ não é automorfismo de V.

2) $\Rightarrow$ *1)* Uma vez que V tem dimensão finita, se $f - \lambda \mathrm{id}_V$ não é automorfismo de V, então $f - \lambda \mathrm{id}_V$ não é injetiva. Logo $\mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{id}_V) \neq \{0_V\}$, i.e., $V_\lambda \neq \{0_V\}$. Portanto, λ é valor próprio de f.

2) $\Leftrightarrow$ *3)* Resulta de termos $A - \lambda \mathrm{I}_n = M(f - \lambda \mathrm{id}_V; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.

3) $\Leftrightarrow$ *4)* Resulta da Proposição 5.2.5. $\square$

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita ≥ 1, $\mathcal{B}$ uma base de V, $f \in \mathcal{L}(V,V)$, $A = M(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$. Do teorema anterior resulta, em particular,

$$\begin{aligned} 0 \text{ é valor próprio de } f \quad &\Leftrightarrow \quad f \text{ não é automorfismo de } V \\ &\Leftrightarrow \quad |A| = 0. \end{aligned}$$

Corolário 6.2.3. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
São equivalentes as afirmações seguintes:

1) λ é valor próprio de A.

2) $A - \lambda \mathrm{I}_n$ não é invertível.

3) $|A - \lambda \mathrm{I}_n| = 0$.

Demonstração. Tendo em conta a Proposição 6.1.14, basta aplicar a proposição anterior ao endomorfismo f de $\mathbb{K}^n$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{K}^n$ é A. □

Definição 6.2.4. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Chama-se* **polinómio característico de** *A, e representa-se por p_A, o polinómio na indeterminada x sobre $\mathbb{K}$, que resulta do determinante da matriz (simbólica) $A - x\mathrm{I}_n$, i.e.,*

$$p_A = |A - x\mathrm{I}_n| = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix}.$$

Chama-se ***raiz característica de*** *A a qualquer raiz do polinómio p_A em $\mathbb{K}$.*

Exemplo 6.2.5. *Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. O polinómio característico de A é*

$$p_A = \begin{vmatrix} 2 - x & 1 \\ 2 & 3 - x \end{vmatrix} = (2-x)(3-x) - 2 = x^2 - 5x + 4 \in \mathbb{R}_2[x].$$

As raízes características de A são 1 e 4.

Definição 6.2.6. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Chama-se* ***traço*** *de A, e representa-se por $\mathrm{tr}A$, ao elemento de $\mathbb{K}$ que é a soma dos elementos principais de A, i.e., $\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.*

Proposição 6.2.7. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e p_A o polinómio característico de A. Então grau $p_A = n$. Além disso, se $p_A = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, tem-se $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = -\mathrm{tr}A$ e $a_0 = |A|$.*

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, qualquer equação na variável x da forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

com $a_n \neq 0$, $n \geq 1$, e $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$ tem exactamente n raízes em $\mathbb{C}$. Sendo assim, é válido o resultado seguinte.

Proposição 6.2.8. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
Então A tem, no máximo, n valores próprios distintos.

Corolário 6.2.9. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Então f tem, no máximo, n valores próprios distintos.*

Demonstração. Imediato, tendo em conta a Proposição 6.1.14. □

Reduzimos o problema da determinação dos valores próprios dum endomorfismo f dum espaço vetorial de dimensão finita ao problema da determinação das raízes características de A onde A é a matriz de f em relação a uma dada base $\mathcal{B}$ de V. Como a matriz dum endomorfismo depende da base fixada para a definir, poderia acontecer que matrizes de f em relação a bases diferentes de V tivessem raízes características diferentes. No entanto, tal não acontece pois, como vamos ver, as matrizes de f têm todas o mesmo polinómio característico.

Proposição 6.2.10. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $\mathcal{B}_1$ uma base de V e $A = M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$. Seja $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. As matrizes A e B são semelhantes se e só se existe uma base $\mathcal{B}_2$ de V tal que $B = M(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2)$.*

Demonstração. Admitamos que $\mathcal{B}_2$ é uma base de V tal que $B = M(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2)$. Então

$$M(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2) = M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = P^{-1}AP$$

onde $P = M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, uma vez que é uma matriz de mudança de base. Logo A e B são semelhantes.
Reciprocamente, suponhamos que A e B são semelhantes. Então existe uma matriz $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertível tal que $B = P^{-1}AP$. Uma vez que P é invertível, existe uma base $\mathcal{B}_2$ de V tal que $P = M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$. Então

$$B = M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1) M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = M(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2).$$ □

Proposição 6.2.11. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
Se A e B são semelhantes, então têm o mesmo polinómio característico (e consequentemente os mesmos valores próprios).

Demonstração. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrizes semelhantes. Então $B = P^{-1}AP$, para alguma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Logo, atendendo às propriedades de determinantes, tem-se

$$\begin{aligned} p_B &= |B - x\mathrm{I}_n| \\ &= |P^{-1}AP - P^{-1}x\mathrm{I}_nP| \\ &= |P^{-1}||A - x\mathrm{I}_n||P| \\ &= |A - x\mathrm{I}_n||P^{-1}||P| \\ &= |A - x\mathrm{I}_n| \\ &= p_A. \end{aligned}$$

□

Corolário 6.2.12. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ bases de V, $A = M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$ e $B = M(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_2)$. Então $p_A = p_B$.*

Demonstração. Imediato, uma vez que A e B são matrizes do mesmo endomorfismo f em relação a diferentes bases de V. Logo A e B são semelhantes e o resultado segue da proposição anterior. □

Definição 6.2.13. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Chama-se* ***polinómio característico*** *de f, e representa-se por p_f, o polinómio característico de qualquer matriz de f em relação a uma base de V.*

Dados um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$, os valores próprios de f são as raízes características do polinómio característico de f.

Exemplo 6.2.14. *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 3 e $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ uma base de V. Seja $f : V \to V$ o endomorfismo definido por*

$$f(v_1) = 2v_1 - v_2 - v_3, \quad f(v_2) = v_2 - v_3, \quad f(v_3) = -v_2 + v_3.$$

Recorrendo à matriz de f em relação à base $\mathcal{B}$, vamos determinar os valores próprios e os vetores próprios de f. Sendo $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, λ é valor próprio de f se e só se $|A - \lambda \mathrm{I}_3| = 0$. Uma vez que

$$\begin{aligned}
|A - \lambda \mathrm{I}_3| &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)[(1-\lambda)^2 - 1]
\end{aligned}$$

então $|A - \lambda \mathrm{I}_3| = 0$ se e só se $\lambda = 2$ ou $\lambda = 0$, i.e., os valores próprios de f são 0 e 2 (em particular, conclui-se que f não é automorfismo).
Relativamente ao subespaço próprio associado ao valor próprio 0, tem-se o seguinte:

$$V_0 = \mathrm{Nuc}(f - 0\mathrm{id}_V) = \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in V : (A - 0\mathrm{I}_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \right\}.$$

Resolvendo o sistema $(A - 0\mathrm{I}_3)X = 0$, i.e., $AX = 0$,

$$\begin{aligned}
[A|0] &= \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \\
&\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

temos $V_0 = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in V : \alpha_1 = 0, \alpha_2 - \alpha_3 = 0\} =< v_2 + v_3 >$.
Os vetores próprios de f associados ao valor próprio 0 são os elementos de $V_0 \setminus \{0_V\}$, ou seja são os vetores $\alpha(v_2 + v_3)$, para $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Vamos, agora, determinar o subespaço próprio associado ao valor próprio 2:

$$V_2 = \left\{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in V : (A - 2\mathrm{I}_3) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

Resolvendo o sistema $(A - 2\mathrm{I}_3)X = 0$,

$$[A - 2\mathrm{I}_3|0] = \left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

temos

$$V_2 = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \in V : \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0\} =< v_1 - v_3, v_2 - v_3 > .$$

Os vetores próprios de f associados ao valor próprio 2 são os elementos de $V_2 \setminus \{0_V\}$, i.e., os vetores $\lambda_1(v_1 - v_3) + \lambda_2(v_2 - v_3)$ em que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e λ_1, λ_2 não são simultaneamente nulos.

6.3 Diagonalização

As matrizes diagonais, para muitos propósitos, são os tipos mais simples de matrizes com as quais podemos trabalhar. Como já vimos, um endomorfismo f de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ pode ser estudado através de qualquer matriz que o represente, mas há vantagem em considerar matrizes diagonais. Nesta secção, determinamos condições sob as quais uma transformação linear pode ser representada por uma matriz diagonal.

Definição 6.3.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Diz-se que*

- *f é **diagonalizável** se existe uma base de V em relação à qual a matriz de f é diagonal.*
- *A é **diagonalizável** se A é semelhante a uma matriz diagonal.*

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ uma base de V, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$. Atendendo a que matrizes do endomorfismo f em relação a bases diferentes são semelhantes, é imediato que f é diagonalizável se e só se A é diagonalizável.

Estabelecemos de seguida uma condição necessária e suficiente para que um enfomorfismo f de V seja diagonalizável. Esta condição dá-nos informação sobre a natureza dos vetores de uma base de V em relação à qual a matriz de f é diagonal.

Proposição 6.3.2. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$.*
Então f é diagonalizável se e só se existe uma base de $\mathcal{B}$ de V formada por vetores próprios de f. Neste caso, $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ é uma matriz diagonal e os seus elementos principais são valores próprios de f.

Demonstração. Suponhamos que f é diagonalizável. Então existe uma base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de V e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se $v_i \neq 0_V$ e $f(v_i) = \lambda_i v_i$, i.e., v_i é vetor próprio de f associado a λ_i. Logo, $\mathcal{B}$ é uma base de V formada por vetores próprios de f.
Reciprocamente, suponhamos que existe uma base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de V formada por vetores próprios de f. Então, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tal que $f(v_i) = \lambda_i v_i$. Logo $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ e, portanto, f é diagonalizável. □

Exemplo 6.3.3. *O endomorfismo f considerado no exemplo anterior é diagonalizável, uma vez que existe uma base de V formada por vetores próprios de f; por exemplo $\mathcal{B} = (v_2 + v_3, v_1 - v_3, v_2 - v_3)$ é uma base de V onde $v_2 + v_3$ é um vetor próprio associado ao valor próprio 0 e $v_1 - v_3$, $v_2 - v_3$ são vetores próprios de f associados ao valor próprio 2. Tem-se $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathrm{diag}(0, 2, 2)$.*

Sendo V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$, o próximo resultado é útil para determinar vetores próprios de f linearmente independentes.

Proposição 6.3.4. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$.*
Se $v_1, \ldots, v_m$ são vetores próprios de f associados, respetivamente, a valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ distintos dois a dois, então os vetores $v_1, \ldots, v_m$ são linearmente independentes.

Demonstração. A prova é feita por indução no número de vetores próprios.
Se v_1 é vetor próprio de f, então $v_1 \neq 0_V$ e, portanto, v_1 é linearmente independente.
Dado $m \in \mathbb{N}$, admitamos, por hipótese de indução, que se $v_1, \ldots, v_m$ são vetores próprios de f associados a valores próprios distintos dois a dois, então os vetores $v_1, \ldots, v_m$ são linearmente independentes. Nestas condições, vamos mostrar que o resultado é válido para $m + 1$. De facto, se admitirmos que $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ são vetores próprios de f associados a valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$ distintos dois a dois, então, pela hipótese de indução, segue que os vetores $v_1, \ldots, v_m$ são linearmente independentes. Por redução ao absurdo, conclui-se que os vetores $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ são linearmente independentes. De facto, se supusermos que $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ são linearmente dependentes, então v_{m+1} é combinação linear de $v_1, \ldots, v_m$, i.e., existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ tais que $v_{m+1} = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m$. Como $v_{m+1} \neq 0_V$, existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\alpha_j \neq 0_{\mathbb{K}}$. Uma vez que $f(v_{m+1}) = \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_m f(v_m)$, tem-se $\lambda_{m+1} v_{m+1} = \alpha_1(\lambda_1 v_1) + \ldots + \alpha_m(\lambda_m v_m)$. Logo $(\lambda_{m+1}\alpha_1)v_1 + \ldots + (\lambda_{m+1}\alpha_m)v_m = (\lambda_1\alpha_1)v_1 + \ldots + (\lambda_m\alpha_m)v_m$ e, como $v_1, \ldots, v_m$ são linearmente independentes, segue que $\lambda_{m+1}\alpha_i = \lambda_i\alpha_i$, para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$. Em particular, $\lambda_{m+1}\alpha_j = \lambda_j\alpha_j$ e, como $\alpha_j \neq 0_{\mathbb{K}}$, conclui-se que $\lambda_{m+1} = \lambda_j$; o que é absurdo, pois por hipótese, os escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}$ são distintos dois a dois. Logo os vetores $v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}$ são linearmente independentes. □

Segue deste resultado uma condição suficiente para que um endomorfismo f seja diagonalizável.

Proposição 6.3.5. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$.*
Se f admite n valores próprios distintos, então f é diagonalizável.

Demonstração. Suponha-se que f admite n valores próprios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ distintos dois a dois. Para $i \in \{1, \ldots, n\}$, seja $v_i \in V$ um vetor próprio de f associado a λ_i. Pela proposição anterior, os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. Logo $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V, pois $\dim V = n$. Assim, V admite uma base formada por vetores próprios de f e, portanto, f é diagonalizável. $\square$

Corolário 6.3.6. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
Se A admite n valores próprios distintos, então A é diagonalizável.

Demonstração. Seja f o endomorfismo de $\mathbb{K}^n$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{K}^n$ é A. Como A e f têm os mesmos valores próprios, e A é diagonalizável se e só se f é diagonalizável, da proposição anterior, obtemos o resultado enunciado. $\square$

A condição estabelecida na Proposição 6.3.5 é suficiente, mas não é necessária. De facto, no exemplo anterior tem-se um endomorfismo f dum espaço vetorial de dimensão 3 com apenas dois valores próprios distintos e, no entanto, f é diagonalizável.

Relativamente a valores próprios distintos é ainda possível estabelecer o seguinte.

Proposição 6.3.7. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são valores próprios de f distintos dois a dois, então a soma $V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_m}$ é direta.*

Demonstração. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ valores próprios de f distintos dois a dois e $V_{\lambda_1}, \ldots$, V_{λ_m} os subespaços próprios respetivos. Vamos provar que para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $V_{\lambda_i} \cap (V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_{i-1}} + V_{\lambda_{i+1}} + \ldots + V_{\lambda_m}) = \{0_V\}$. De facto, se admitirmos que existe $v \in V$ tal que $v \neq 0_V$ e $v \in V_{\lambda_i} \cap (V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_{i-1}} + V_{\lambda_{i+1}} + \ldots + V_{\lambda_m})$, então, $v = v_i$, para algum $v_i \in V_{\lambda_i}$, e $v = v_1 + \ldots + v_{i-1} + v_{i+1} + \ldots + v_m$, onde $v_j \in V_{\lambda_j}$. Como $v \neq 0_V$, tem-se $v_i \neq 0_V$ e existem vetores não nulos na sequência $v_1 + \ldots + v_{i-1} + v_{i+1} + \ldots + v_m$; sejam $v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}$ esses vetores. Assim, $v_i = v_{j_1} + \ldots + v_{j_k}$, pelo que $v_i - v_{j_1} - \ldots - v_{j_k} = 0_V$ com $v_i, v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}$ vetores próprios de f associados a valores próprios distintos, o que é absurdo, pois os vetores $v_i, v_{j_1}, \ldots, v_{j_k}$ são linearmente independentes. Logo $V_{\lambda_i} \cap (V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_{i-1}} + V_{\lambda_{i+1}} + \ldots + V_{\lambda_m}) = \{0_V\}$, e a soma $V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_m}$ é direta. $\square$

Podemos, agora, estabelecer uma condição necessária e suficiente para que um endomorfismo seja diagonalizável em termos de subespaços próprios.

Proposição 6.3.8. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V, V)$.*
Então f é diagonalizável se e só se V é soma direta de subespaços próprios de f associados a valores próprios distintos.

Demonstração. Suponhamos que $V = V_{\lambda_1} \bigoplus \ldots \bigoplus V_{\lambda_m}$ onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são valores próprios de f distintos dois a dois. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, seja $(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{k_i}})$ uma base de V_{λ_i}. Então $(v_{1_1}, \ldots, v_{1_{k_1}}, \ldots, v_{m_1}, \ldots, v_{m_{k_m}})$ é uma base de V formada por vetores próprios de f e, portanto, f é diagonalizável.
Reciprocamente, se f é diagonalizável, existe uma base $\mathcal{B}$ de V formada por vetores próprios de f. Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ os valores próprios distintos a que estão associados os vetores próprios de $\mathcal{B}$. Pela Proposição 6.3.7 a soma $V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_m}$ é direta. Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$ seja s_i o número de vetores de $\mathcal{B}$ associados a λ_i. Então $\dim V_{\lambda_i} \geq s_i$ e $s_1 + \ldots + s_m = n$. Logo $n = \dim \mathrm{V} \geq \dim(V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_m}) = \sum_{i=1}^{m} \dim V_{\lambda_i} \geq s_1 + \ldots + s_m = n$. Assim, $V = V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_m}$ e, portanto, V é soma direta de $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_m}$. ☐

Exemplo 6.3.9. *No exemplo 6.1.5 tem-se*

$$V_0 =< v_2 + v_3 > \quad e \quad V_2 =< v_1 - v_3, v_2 - v_3 > .$$

A soma $V_0 + V_2$ *é direta. Como* $\dim V_0 = 1$ *e* $\dim V_2 = 2$*, tem-se* $\dim(V_0 + V_2) = 3 = \dim V$*. Logo* V *é soma direta de* V_0 *e* V_2 *e, portanto,* f *é diagonalizável.*

6.3.1 Multiplicidade e diagonalização

Nesta secção estudamos outras condições que permitem a caracterização de endomorfismos diagonalizáveis.

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é valor próprio de f (resp. de A), então

- λ é raíz do polinómio característico de f (resp. λ é raíz do polinómio característico de A);
- V_λ é um subespaço não nulo de V (resp. M_λ é um subespaço não nulo de $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$).

Definição 6.3.10. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita* $n \geq 1$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ *e* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Se* λ *é valor próprio de* f *(resp.* A*), designa-se por*

- ***multiplicidade algébrica de*** λ*, e representa-se por* m.a.(λ)*, a multiplicidade de* λ *como raiz do polinómio* p_f *(resp.* p_A*). Se* m.a.$(\lambda)=k$*, diz-se que* λ *tem multiplicidade algébrica* k*; no caso particular de* $k = 1$*, diz-se que* λ *é valor próprio simples.*
- ***multiplicidade geométrica de*** λ*, e representa-se por* m.g.(λ)*, a dimensão do subespaço próprio* V_λ *de* V *(resp. do subespaço* M_λ *de* $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$*).*

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$, $\mathcal{B}$ uma base de V, $f \in \mathcal{L}(V,V)$, $A = M(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ um valor próprio de f. Uma vez que $V_\lambda = \mathrm{Nuc}(f - \lambda \mathrm{id}_V)$, tem-se $\mathrm{m.g.}(\lambda) = \mathrm{dim} V_\lambda = n - r_{f-\lambda\mathrm{id}_V} = n - car(A - \lambda \mathrm{I}_n)$.

A multiplicidade algébrica e geométrica podem ter valores distintos, tal como se verifica no exemplo seguinte.

Exemplo 6.3.11. *Sejam $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^2$ e $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ tal que*

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A.$$

O polinómio característico de f é

$$p_f = p_A = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2.$$

Tem-se $(\mathbb{R}^2)_1 = \mathrm{Nuc}(f - 1\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$. *Logo* $\dim(\mathbb{R}^2)_1 = 2 - car(A - 1\mathrm{I}_2) = 2 - 1 = 1$. *Assim, 1 é valor próprio de f e tem-se* $\mathrm{m.a.}(1) = 2$ *e* $\mathrm{m.g.}(1) = 1$.

Embora as multiplicidades algébrica e geométrica possam ser diferentes, elas estão relacionadas.

Proposição 6.3.12. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V,V)$. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é valor próprio de f, então* $\mathrm{m.g}(\lambda) \leq \mathrm{m.a}(\lambda)$.

Demonstração. Seja λ um valor próprio de f e seja $k = \mathrm{m.g.}(\lambda)$, i.e., $k = \mathrm{dim} V_\lambda$. Sejam $(w_1, \ldots, w_k)$ uma base de V_λ e $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_{n-k})$ uma base de V. Então

$$A = M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}$$

onde $B = \mathrm{diag}(\lambda, \ldots, \lambda) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$, $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{(n-k)\times k}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{k \times (n-k)}(\mathbb{K})$ e $D \in \mathcal{M}_{(n-k)}(\mathbb{K})$. Tendo em conta o Teorema de Laplace, segue que

$$\begin{aligned} p_f &= |A - x\mathrm{I}_n| = \begin{vmatrix} B - x\mathrm{I}_k & C \\ 0 & D - x\mathrm{I}_{n-k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - x & \ldots & 0 \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ldots & \lambda - x \end{vmatrix} |D - x\mathrm{I}_{n-k}| \\ &= (-1)^k (x - \lambda)^k |D - x\mathrm{I}_{n-k}| \end{aligned}$$

Portanto, $\mathrm{m.a.}(\lambda) \geq k = \mathrm{m.g.}(\lambda)$. $\square$

Corolário 6.3.13. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
Se $\lambda \in \mathbb{K}$ é valor próprio de A, então $\mathrm{m.g.}(\lambda) \leq \mathrm{m.a.}(\lambda)$.

Demonstração. O resultado é imediato, tendo em conta a Proposição 6.1.14 e aplicando a proposição anterior ao endomorfismo f de $\mathbb{K}^n$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{K}^n$ é A. □

Sendo V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V,V)$, é possível estabelecer uma condição necessária e suficiente para a diagonalização de f em termos das multiplicidades algébrica e geométrica dos valores próprios de f.

Proposição 6.3.14. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $f \in \mathcal{L}(V,V)$ tal que p_f se decompõe em fatores lineares. Então f é diagonalizável se e só se, para cada valor próprio λ de f, se tem* $\mathrm{m.g.}(\lambda) = \mathrm{m.a.}(\lambda)$.

Demonstração. Admitamos que f é diagonalizável. Então existe uma base de V em relação à qual a matriz de f é diagonal. Sem perda de generalidade, podemos considerar uma base $\mathcal{B}$ tal que, sendo $A = M(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$, os primeiros s_1 elementos principais de A sejam iguais a λ_1, os s_2 elementos seguintes sejam iguais a λ_2, ..., os s_m últimos elementos sejam iguais a λ_m, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são valores próprios de f distintos dois a dois. Então $p_f = |A - x\mathrm{I}_n| = (-1)^n(x-\lambda_1)^{s_1}(x-\lambda_2)^{s_2} \ldots (x-\lambda_m)^{s_m}$. Portanto, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, tem-se $\mathrm{m.a.}(\lambda_i) = s_i$. Por outro lado, cada vetor da base $\mathcal{B}$ é vetor próprio de f; assim, em $\mathcal{B}$, ocorrem s_i vetores próprios associados a λ_i, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$. Logo tem-se $\mathrm{m.g.}(\lambda_i) = \dim(V_{\lambda_i}) \geq s_i = \mathrm{m.a.}(\lambda_i)$ e, pela proposição anterior, segue que $\mathrm{m.a.}(\lambda_i) = \mathrm{m.g.}(\lambda_i)$.
Reciprocamente, admitamos que $p_f = (-1)^n(x-\lambda_1)^{s_1}(x-\lambda_2)^{s_2} \ldots (x-\lambda_m)^{s_m}$, com $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ distintos dois a dois e tais que, para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, se tem $\mathrm{m.a.}(\lambda_i) = s_i = \mathrm{m.g.}(\lambda_i)$. Então $s_1 + \ldots + s_m = \mathrm{grau}\, p_f = n$ e $\dim V_{\lambda_i} = s_i$, para todo $i \in \{1,\ldots,m\}$. Uma vez que a soma $V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_m}$ é direta, tem-se $\dim(V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_m}) = \sum_{i=1}^m \dim V_{\lambda_i} = s_1 + \ldots + s_m = n = \dim V$, pelo que $V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_m} = V$. Logo V é soma direta de $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_m}$ e, portanto, f é diagonalizável. □

Corolário 6.3.15. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que p_A se decompõe em fatores lineares. Então A é diagonalizável se e só se, para cada valor próprio λ de A, se tem* $\mathrm{m.g.}(\lambda) = \mathrm{m.a.}(\lambda)$.

Demonstração. Seja f o endomorfismo de $\mathbb{K}^n$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{K}^n$ é A. Uma vez A e f têm os mesmos valores próprios, o resultado é imediato, uma vez que A é diagonalizável se e só se f é diagonalizável. □

Exemplo 6.3.16. *Sejam $\mathcal{B}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tal que*

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$p_f = \begin{vmatrix} 2-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & 0 \\ 2 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x) \begin{vmatrix} 2-x & -1 \\ -1 & 2-x \end{vmatrix} = (-1)(x-1)^2(x-3).$$

Logo o polinómio característico de f decompõe-se em fatores lineares sobre $\mathbb{R}$, e os valores próprios de f são 1 e 3. Como m.a(3)=1, também m.g.(3)=1. Tem-se m.a.(1)=2 e m.g.(1)=$\dim(\mathbb{R}^3)_1 = 3 - car(A - 1\mathrm{I}_3)$. *Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz $A - 1\mathrm{I}_3$*

$$A - \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

temos $car(A - 1\mathrm{I}_3) = 2$, pelo que m.g.(1)=3-2=1. Como m.g.(1) $\neq$ m.a.(1), *o endomorfismo f não é diagonalizável.*

Exemplo 6.3.17. *Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 4, $\mathcal{B}$ uma base de V e $f \in \mathcal{L}(V,V)$ tal que*

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} p_f &= \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -x & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1-x \end{vmatrix} = (-x) \begin{vmatrix} -1-x & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 1 & -1 & -1-x \end{vmatrix} \\ &= (-x)(-x) \begin{vmatrix} -1-x & 1 \\ 1 & -1-x \end{vmatrix} = x^3(x+2) \end{aligned}$$

Logo o polinómio característico de f decompõe-se em fatores lineares sobre $\mathbb{R}$, e os valores próprios de f são 0 e -2. Como m.a.$(-2) = 1$, *também* m.g.$(-2) = 1$.

Tem-se $\text{m.a.}(0) = 3$ *e* $\text{m.g.}(0) = \text{dim}V_0 = 4 - car(A - 0\text{I}_4) = 4 - car(A)$. *Uma vez que*

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Logo $\text{m.g.}(0) = 4-1 = 3 = \text{m.a.}(0)$. *Para cada valor próprio de* f, *as multiplicidades geométricas e algébricas são iguais, logo* f *é diagonalizável.*