ÁLGEBRA LINEAR

Exercícios - Transformações Lineares

Lic. Ciências da Computação

1. Sejam V, W espaços vectoriais sobre $\mathbb{K}$ e $t : V \to W$ uma transformação linear. Mostre que
   (a) $t(0) = 0$.
   (b) Para $v_1, ..., v_n \in V$, $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$,
   $$t(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 t(v_1) + ... + \alpha_n t(v_n).$$

2. Diga quais das aplicações seguintes, entre espaços vectoriais reais, são transformações lineares:
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y) = (2x + y, x, y - x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x, y, z) = (y^2, y)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   (c) $h : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ definida por $h(ax^2 + bx + c) = (1, a + b)$, $\forall\ ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$.
   (d) $t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $t(a, b) = 5a - 2b$, $\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

3. Para cada $k \in \mathbb{R}$, seja $g_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por
   $$g_k(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_4 - k, 0, 2a_1 + a_3), \forall (a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{R}^4.$$
   Determine os valores de k para os quais g_k é transformação linear.

4. Considere a transformação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
   $$f(x, y, z) = (x + y, 0, y - z), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$
   Determine Nuc$f$, Imf e uma base para cada um destes subespaços vectoriais.

5. Sejam V, V' espaços vectoriais reais, $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ uma base de V, (v'_1, v'_2, v'_3) uma base de V' e $f : V \to V'$ a transformação linear definida por
   $$f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 + x_5 v_5) = (x_2 - x_3)v'_1 + (x_3 - x_2)v'_2 + (x_1 + x_4 + x_5)v'_3,$$
   $$\forall x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$
   (a) Determine Nuc$f$
   (b) Diga, justificando, se f é injectiva.
   (c) Dê exemplo de um vector $u \in V$ tal que $u \notin$ Nuc$f$. Justifique.
   (d) Verifique que $v_1 - v_4 \in$ Nuc$f$.

6. Diga, justificando, se existe
   (a) uma transformação linear $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(1, 0, 0) = (0, 0, 1)$, $f(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$, $f(7, 0, 14) = (0, 0, 7)$.

(b) uma transformação linear $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $g(-1,2) = (0,1,2,3)$, $g(2,-1) = (0,-1,-2,-3)$.

7. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ a transformação linear definida por

$$g(1,0,0) = (1,0,1,0), \quad g(0,1,0) = (0,1,-2,0), \quad g(0,0,1) = (1,1,0,0).$$

(a) Determine i) $g(2,3,1)$. ii) $g(-1,2,0)$.

(b) Determine uma base de Img e indique a característica de g.

(c) Diga, justificando, se g é injectiva.

8. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ e V, V' espaços vectoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ tais que $\dim V = n$ e $\dim V' = m$. Sejam $(v_1, ..., v_n)$ uma base de V e $f : V \to V$, $g : V \to V'$ transformações lineares. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

(a) $(g(v_1), ..., g(v_n))$ é base de V'.

(b) Se g é sobrejectiva, então $n \geq m$.

(c) Se $n \geq m$, então g é sobrejectiva.

(d) Se $g(v_i) \neq g(v_j)$ sempre que $i \neq j$ $(i, j \in \{1, ..., n\})$, então g é injectiva.

(e) Se g é sobrejectiva, então g é injectiva.

(f) Se g é injectiva, então g é sobrejectiva.

(g) f é injectiva se e só f é sobrejectiva.

9. Considere as transformações lineares

$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z,w) = (x-y, x+w, y+z)$, $\forall (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$;

$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $g(x,y,z,w) = (x, x+z, -w, 2y+z)$, $\forall (x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$;

$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $h(1,1,1) = (2,0,1)$, $h(1,1,0) = (1,0,-1)$, $h(1,0,0) = (0,0,2)$;

$t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $t(x,y,z) = (x-y, 0, 0, x+y+z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;

e as bases

$B_1 = ((0,0,0,1), (0,0,1,1), (0,1,1,1), (1,1,1,1))$ e

$B_2 = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1))$ de $\mathbb{R}^4$;

$B_1^{'} = ((1,1,1), (1,1,0), (1,0,0))$ e

$B_2^{'} = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1))$ de $\mathbb{R}^3$.

Determine

a) $M(f; B_1, B_1')$. b) $M(f; B_1, B_2')$. c) $M(g; B_2, B_1)$.
d) $M(g; B_1, B_2)$. e) $M(h; B_1', B_2')$. f) $M(h; B_1', B_1')$.
g) $M(t; B_2', B_2)$. h) $M(t; B_1', B_1)$.

10. Considere as bases $B = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{C}^2$ e $B' = (v'_1, v'_2, v'_3)$ de $\mathbb{C}^3$ em que $v_1 = (-1, 1)$, $v_2 = (1, 1)$ e $v'_1 = (1, 1, 1)$, $v'_2 = (0, 1, 1)$, $v'_3 = (0, 0, 1)$.

    Seja $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ a transformação linear tal que $M(f; B, B') = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

    Determine
    (a) $f(2, 3)$. (b) $f(-1, 1)$.
    (c) $f(0, 0)$. (d) $f(0, 2)$.

11. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, a base $B = ((1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$ e o endomorfismo f definido por $f(1, 0, 1) = (1, -1, 1)$, $f(1, 1, 0) = (2, 1, 1)$, $f(0, 1, 1) = (1, 0, 0)$.

    (a) Determine $M(f; B, B)$.
    (b) Determine $f(a, b, c)$, $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
    (c) Mostre que f é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$ e determine f^{-1}.

12. Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$ e seja B base canónica de $\mathbb{R}^3$.

    Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que $M(g; B, B) = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

    (a) Determine $g(0, 1, 2)$ e $g(1, 1, 0)$.
    (b) Mostre que i) $\dim \mathrm{Im} g = 2$. ii) $\mathrm{Nuc}(g) = < (0, 1, 2) >$.
    (c) Indique um vector $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $v \neq (1, 1, 0)$ e $g(v) = (0, 0, 1)$. Justifique.

13. Sejam V, V' espaços vectoriais reais, $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base de V e $B' = (v'_1, v'_2, v'_3, v'_4)$ uma base de V' e $f : V \to V'$ a transformação linear tal que $M(f; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

    Determine a) $\mathrm{Im} f$. b) $\mathrm{Nuc} f$.

14. Considere as transformações lineares $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definidas, respectivamente, por

    $f(x, y, z) = (2x + z, x + 2z)$, $g(x, y, z) = (x, x - y - z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$;
    $h(a, b) = (2a, a - b, a + b)$, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

    Sendo B a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e B' a base canónica de $\mathbb{R}^2$, determine

    (a) $M(f + g; B, B')$.
    (b) $M(h \circ f; B, B)$.
    (c) $M((f + g) \circ (3h); B', B')$.

15. Sejam $B = ((1, 1), (1, 0))$ uma base de $\mathbb{R}^2$, $B' = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $M(g; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Determine $M(g; B_1, B_1')$ onde B_1 é a base canónica de $\mathbb{R}^2$ e B_1' é a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(b) $M(g; B_2, B')$ onde $B_2 = \{(0,1), (2,1)\}$.

16. Sejam V, V' espaços vectoriais reais de dimensão 3, B uma base de V e B' uma base de V'.

Seja $f : V \to V'$ a transformação linear tal que $M(f; B, B') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que f é isomorfismo de V em V'.

(b) Determine $M(f^{-1}; B', B)$.

17. Sejam V um espaço vectorial real, $B = (u_1, u_2, u_3)$ e $B' = (v_1, v_2, v_3)$ bases de V e $f : V \to V$ a transformação linear tal que $M(f; B, B') = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Determine $f(u_1)$ e $f(2u_2 + 2u_3)$.

(b) Determine $\dim \mathrm{Nuc} f$. Justifique.

(c) Sendo $M(id_V; B, B') = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, determine $M(f; B', B)$.