Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação

Análise

Folha de exercícios 4 — 2018'19

1. Sendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = x^2 y$ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calcule, usando a definição de derivada parcial:
   (a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$;
   (b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$;
   (c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$;
   (d) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

2. Determine as funções derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por
   (a) $f(x, y) = 5y^3 + 2xy - x^2$;
   (b) $f(x, y) = ye^x + x\cos(x^2 y)$;
   (c) $f(x, y) = \sqrt[3]{x}y^3$;
   (d) $f(x, y) = \log(\cos(xy))$;
   (e) $f(x, y, z) = \operatorname{sen} x + \log x + e^{xz}$;
   (f) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 y z^3}$.

3. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem das funções definidas por
   (a) $f(x, y) = 1$ se ($x = 0$ ou $y = 0$), e $f(x, y) = 0$ se $xy \neq 0$;
   (b) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$, e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$;
   (c) $f(x, y) = \dfrac{2xy^2}{x^2 + y^4}$ se $(x, y) \neq (0, 0)$, e $f(x, y) = 0$ se $(x, y) = (0, 0)$;
   (d) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x + y}$ se $x + y \neq 0$, e $f(x, y) = x$ se $x + y = 0$;

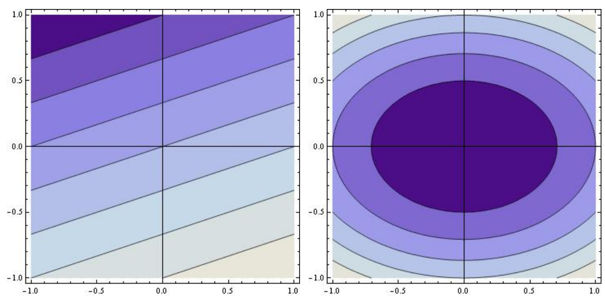
4. Mostre que:
   (a) se $f(x, y) = \mathrm{e}^{\,xy}$, então $x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}$;
   (b) se $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + xy)$, então $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2$;
   (c) se $f(x, y, z) = x + \frac{x-y}{y-z}$, então $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 1$.

5. Usando a definição, calcule a derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(A)$ da função f no ponto A na direcção e sentido do vector $\vec{v}$, para:
   (a) $f(x, y) = xy$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $A = (1, 0)$;
   (b) $f(x, y) = x^2 y + x$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $A = (1, 0)$;
   (c) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$, $\vec{v} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $A = (1, 1)$;
   (d) $f(x, y) = 3x + y^2$, $\vec{v} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $A = (0, 0)$;

(e) $f(x,y,z)=z\mathrm{e}^{\,x^2+y^2}$, $\vec{v}=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $A=(0,0)$;

(f) $f(x,y,z)=x^2+xy+z^2$, $\vec{v}=\vec{e}_1+2\vec{e}_2+\vec{e}_3$, $A=(1,2,-1)$.

6. As curvas de nível de uma função f, nas quais os níveis mais elevados têm a cor mais clara, são apresentadas em cada uma das seguintes figuras. Qual o sinal de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e de $\frac{\partial f}{\partial y}$ (para uma série de pontos à sua escolha)?



7. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ para qualquer $\vec{v}\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, onde:

   (a) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$;

   (b) $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$.

8. Mostre que não são deriváveis em $(0,0)$ cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$;

   (b) $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$;

   (c) $f(x,y)=\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ se $(x,y)\neq(0,0)$ e $f(x,y)=0$ se $(x,y)=(0,0)$.

9. Calcule o gradiente de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x,y,z)=x\mathrm{e}^{\,y^2+z^2}$;

   (b) $f(x,y,z)=\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2+2}$;

   (c) $f(x,y,z,w)=z^2\cos(xy)\ln(xy)$.

10. Para cada uma das seguintes funções:

$$f(x,y,z)=x+y+\operatorname{sen}(xy^2),\qquad g(x,y,z)=e^{xy}+4z,\qquad h(x,y,z)=\operatorname{sen}x+3\operatorname{sen}y+z,$$

   (a) jusifique que são diferenciáveis na origem;

   (b) determine a derivada direccional na origem segundo o vector $\vec{v}=(1,3,-1)$.

11. Considere a função $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$.

   (a) Determine as funções derivadas parciais de primeira ordem de f.

   (b) Verfique se f é diferenciável em $(0,0)$. Justifique.

12. Encontre uma equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y)=x^2+y^3$ no ponto de coordenadas $(3,1)$.

13. Mostre que os gráficos das funções $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $g(x,y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ têm o mesmo plano tangente em $(0,0)$.

14. Determine o ponto de interseção do plano tangente à superfície de equação $z = \mathrm{e}^{\,x-y}$ no ponto $(1,1,1)$ com o eixo de zz.

15. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

    (a) Mostre que existe $Df(A, \vec{u})$, $\forall A, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$;

    (b) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

16. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

    (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

    (b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ e verifique quenão são contínuas em $(0,0)$;

    (c) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

17. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

    Mostre que:

    (a) f é contínua;

    (b) $Df((0,0),(a,b)) = f(a,b)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$;

    (c) Verifique se f é derivável em $(0,0)$.

18. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por $f(x,y) = 3xy + y^2$.

    (a) Justifique que f é derivável em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$;

    (b) Determine $f'(2,3)$;

    (c) Determine a taxa de variação de f no ponto $(2,3)$ e na direcção de $\vec{v} = (3,4)$;

    (d) Qual o sentido e direcção a seguir, partindo de $(2,3)$, para que a taxa de variação de f seja máxima?

    (e) Qual a taxa de variação máxima de f no ponto $(2,3)$?

    (f) Encontre a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2,3,27)$.