Notas de Álgebra Linear

Carla Mendes

2015/2016

1. Matrizes

1.1 Conceitos básicos

São bastantes os contextos na área da matemática e suas aplicações em que o conceito de matriz se revelou ser fundamental. Por exemplo, para a representação e tratamento de informação que esteja dependente de parâmetros é frequente o recurso a matrizes.

Ao longo deste capítulo designamos por $\mathbb{K}$ o conjunto dos números reais ou o conjunto dos números complexos; quando necessário indicaremos explicitamente se nos referimos ao conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais ou ao conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos. Aos elementos de $\mathbb{K}$ damos a designação de **escalares**.

Definição 1.1.1. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Chama-se **matriz de ordem** $m \times n$ (lê-se ordem m por n) **sobre** $\mathbb{K}$ a uma aplicação $A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$ definida por $A(i, j) = a_{ij}$ e que se representa por um quadro em que os mn elementos a_{ij} são dispostos em m filas horizontais e n filas verticais do seguinte modo*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3\,n-1} & a_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & \cdots & a_{m-1\,n-1} & a_{m-1\,n} \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & \cdots & a_{m\,n-1} & a_{m\,n} \end{bmatrix}.$$

*Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, chama-se **linha** i **da matriz** A ao elemento $(a_{i1}, \ldots, a_{in})$ de $\mathbb{K}^n$.*
*Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, chama-se **coluna** j **da matriz** A ao elemento $(a_{1j}, \ldots, a_{mj})$ de $\mathbb{K}^m$.*
*Ao elemento a_{ij} de $\mathbb{K}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, chama-se **entrada** (i, j) ou **elemento da posição** (i, j) da matriz A.*

O conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ sobre $\mathbb{K}$ representa-se por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e o conjunto de todas as matrizes sobre $\mathbb{K}$ é representado por $\mathcal{M}(\mathbb{K})$.

Exemplo 1.1.2. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ é uma matriz de ordem 3×2 sobre o corpo $\mathbb{R}$, i.e. $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ (é claro que também temos $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{C})$). A linha 2 da matriz A é o elemento $(3,4)$ de $\mathbb{R}^2$. A coluna 2 da matriz A é o elemento $(0,4,-1)$ de $\mathbb{R}^3$. O elemento a_{22} (situado na linha 2 e coluna 2 da matriz) é o real 4.

Se $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m\,1} & \dots & a_{m\,n} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, escreve-se abreviadamente $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ou $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ ou $A = [a_{ij}]_{\substack{i\,=\,1,\,\dots\,,\,m \\ j\,=\,1,\,\dots\,n}}$. Quando o tipo da matriz for claro pelo contexto ou se não for importante para o estudo em questão, podemos escrever simplesmente $A = [a_{ij}]$.
Por vezes, representa-se a entrada (i,j) da matriz A por $A_{i,j}$.

Exemplo 1.1.3. Por $C = [c_{ij}]_{2\times 3}$, onde $c_{ij} = i^j$, para $i \in \{1,2\}$ e $j \in \{1,2,3\}$, representa-se a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1^2 & 1^3 \\ 2 & 2^2 & 2^3 \end{bmatrix}.$$

Definição 1.1.4. *Sejam $m,n,p,q \in \mathbb{N}$. Diz-se que as matrizes $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ e $B = [b_{ij}]_{p\times q}$ são **iguais**, e escreve-se $A = B$, se $m = p$, $n = q$ e $a_{ij} = b_{ij}$, quaisquer que sejam $i \in \{1,...,m\}$ e $j \in \{1,...,n\}$.*

Exemplo 1.1.5. As matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = [b_{ij}]_{3\times 3}$, com $b_{ij} = \text{m.d.c.}(i,j)$ são duas matrizes iguais.

Definição 1.1.6. *Sejam $m,n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ diz-se **matriz nula de ordem** $m \times n$, e representa-se por $\mathbf{0}_{m\times n}$ ou apenas por $\mathbf{0}$, se, para todo $i \in \{1,...,m\}$ e para todo $j \in \{1,...,n\}$, tem-se $a_{ij} = 0$.*

Exemplo 1.1.7. $\mathbf{0}_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Definição 1.1.8. *Sejam $m,n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Diz-se que:*

- *A é uma **matriz linha** se $m = 1$.*
- *A é uma **matriz coluna** se $n = 1$.*
- *A é uma **matriz quadrada** se $m = n$.*

Exemplo 1.1.9. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz coluna (de ordem 3×1) e a matriz $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ é uma matriz linha (de ordem 1×4).

É usual representar matrizes coluna e matrizes linha por letras minúsculas, assim como é costume omitir o índice 1 que é comum a todos os elementos. Por exemplo,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

representam uma matriz linha de ordem 4 e uma matriz coluna de ordem 3, respectivamente.

O conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ das matrizes quadradas de ordem n também se representa por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Uma matriz pertencente a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se uma matriz quadrada de ordem n ou, simplesmente, uma matriz de ordem n e pode representar-se por $A = [a_{ij}]_n$.

Definição 1.1.10. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}]_n$ uma matriz quadrada sobre $\mathbb{K}$. Os elementos a_{ii}, $i \in \{1, ..., n\}$, designam-se por* ***elementos principais de*** *A. Diz-se que os elementos $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ se dispõem na* ***diagonal principal de*** *A e que os elementos $a_{1n}, a_{2\,n-1}, ..., a_{n1}$ se dispõem na* ***diagonal secundária*** *de A.*

Exemplo 1.1.11. Os elementos principais da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

são -1, 0 e 2 e os elementos que se dispõem na sua diagonal secundária são 1, 0 e -4.

Definição 1.1.12. Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]_n$ diz-se:

- ***triangular superior*** se, para todos $i, j \in \{1, ..., n\}$,

$$i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0;$$

- ***triangular inferior*** se, para todos $i, j \in \{1, ..., n\}$,

$$i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0;$$

- ***diagonal*** se é simultaneamente triangular superior e triangular inferior, i.e., se, para todos $i, j \in \{1, ..., n\}$,

$$i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$$

Exemplo 1.1.13. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
A matriz A é uma matriz triangular superior, B é uma matriz triangular inferior e C é uma matriz diagonal.

Uma matriz diagonal $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pode representar-se abreviadamente por $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Exemplo 1.1.14. *No exemplo anterior, tem-se* $C = \mathrm{diag}(1, 0, 2, 3)$.

Definição 1.1.15. *Sejam $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz diagonal em que todos os elementos diagonais são iguais diz-se uma **matriz escalar**. À matriz escalar de ordem n em que todos os elementos diagonais são iguais a 1 dá-se a designação de **matriz identidade de ordem n**, e representa-se por I_n.*

Para $i, j, \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j; \\ 0 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Abreviadamente, escreve-se $(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$ onde δ_{ij} se designa por **símbolo de Kronecker** e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$.

Exemplo 1.1.16. $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.2 Operações com matrizes

Nesta secção apresentamos várias operações envolvendo matrizes: adição de matrizes, multiplicação de um escalar por uma matriz e multiplicação de matrizes.

Comecemos pela definição da operação de adição de matrizes.

Definição 1.2.1. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Chama-se **matriz soma de** A **e** B, e representa-se por $A + B$, à matriz cuja entrada (i, j) é o elemento $A_{ij} + B_{ij}$, i.e.,*

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \ \ i \in \{1, ..., m\}, \ j \in \{1, ..., n\}.$$

Exemplo 1.2.2. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ então

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+3 & 2+0 & 3+4 \\ 2+2 & 1+(-1) & 0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Proposição 1.2.3. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Então,*

i) $A + B = B + A$; (*comutatividade da adição em* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$; (*associatividade em* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

iii) $\mathbf{0}_{m\times n} + A = A = A + \mathbf{0}_{m\times n}$; ($\mathbf{0}_{m\times n}$ *elemento neutro da adição em* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

iv) existe uma matriz A' *tal que* $A + A' = \mathbf{0}_{m\times n} = A' + A$.
(*existência de oposto, para a adição, de qualquer* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$)

Demonstração: Demonstramos as propriedades *i*) e *iv*), deixando a *ii*) e a *iii*) como exercício.

i) Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então $A + B, B + A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \quad \text{e}$$
$$(B + A)_{ij} = B_{ij} + A_{ij}.$$

Como a adição em $\mathbb{K}$ é comutativa, temos $(A+B)_{ij} = (B+A)_{ij}$, pelo que $A+B = B + A$.

iv) Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e seja A' a matriz de $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A'_{ij} = -A_{ij}$. Então $A + A' \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$, temos

$$(A + A')_{ij} = A_{ij} + A'_{ij} = A_{ij} + (-A_{ij}) = 0.$$

Logo $A + A' = \mathbf{0}_{m\times n}$. Por i) temos $A' + A = \mathbf{0}_{m\times n}$. $\square$

Observação:

- Atendendo à associatividade da adição em $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ podemos escrever, sem ambiguidade, $A + B + C$.
- A matriz A' da proposição anterior representa-se por $-A$.
- Dadas duas matrizes A e B com a mesma ordem, representa-se por $A - B$ a soma de matrizes $A + (-B)$.

Definição 1.2.4. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$*,* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*. Chama-se* ***produto do escalar*** α ***pela matriz*** A*, e representa-se por* αA*, a matriz de* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *cujo elemento* (i, j) *é* αA_{ij}*, i.e.,*

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}, \quad i \in \{1, ..., m\}, \; j \in \{1, ..., n\}.$$

Exemplo 1.2.5. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ então $2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$.

Proposição 1.2.6. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$*,* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$*. Então,*

i) $(\alpha\beta)\,A = \alpha\,(\beta A)$.

ii) $(\alpha + \beta)\,A = \alpha A + \beta A$.

iii) $\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

iv) $0A = \mathbf{0}_{m\times n}$.

v) $1A = A$.

vi) $(-\alpha A) = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.

Demonstração: Demonstramos a propriedade i), deixando a prova das restantes propriedades como exercício.

i) Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Então $(\alpha\beta)A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e, uma vez que $(\beta A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, também temos $\alpha(\beta A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Por outro lado, para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$\begin{array}{ll} ((\alpha\beta)A)_{ij} = (\alpha\beta)A_{ij} & \text{e} \\ (\alpha(\beta A))_{ij} = \alpha(\beta A)_{ij} = \alpha(\beta A_{ij}). & \end{array}$$

Então, uma vez que o produto de elementos de $\mathbb{K}$ é associativo, tem-se $((\alpha\beta)A)_{ij} = (\alpha(\beta A))_{ij}$, para todo $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$, e portanto, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.$\square$

Observação: A matriz A' da proposição 1.3.3 é a matriz $(-1)A$ e, tal como já referimos, escrevemos $-A$ para representar esta matriz.

Definição 1.2.7. *Sejam* $m, n, p \in \mathbb{N}$*,* $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ *e* $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$*. Designa-se por* ***produto de*** A ***por*** B*, e representa-se por* AB*, a matriz de* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *tal que, para cada* $i \in \{1, ..., m\}$ *e para cada* $j \in \{1, ..., n\}$*,*

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= \sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj} \\ &= A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + ... + A_{i\,p-1}B_{p-1\,j} + A_{ip}B_{pj}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.2.8. Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Então,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 0 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 1 & 0 \times 0 + 1 \times 2 + 0 \times 1 & 0 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 2 \\ 2 \times 2 + 3 \times 1 + 1 \times 1 & 2 \times 0 + 3 \times 2 + 1 \times 1 & 2 \times 1 + 3 \times 0 + 1 \times 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observe-se que a matriz resultante é uma matriz 2×3 (tem o mesmo número de linhas da matriz A e o mesmo número de colunas da matriz B).

Contrariamente ao que sucede com a adição de matrizes, a multiplicação de matrizes não é, em geral, comutativa, tal como se pode constatar nos exemplos que a seguir se apresentam.

Exemplo 1.2.9. Considerando as matrizes A e B do exemplo anterior, concluímos que BA não está definido, pois o número de colunas de B não coincide com o número de linhas de A.

Exemplo 1.2.10. *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$. *Então,*

$$AB = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix} = BA.$$

Definição 1.2.11. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e A e B duas matrizes quadradas de ordem n. Diz-se que as matrizes A e B são* ***comutáveis*** *ou* ***permutáveis*** *se $AB = BA$.*

Embora o produto de matrizes não seja comutativo, existem outras propriedades que se prova serem válidas relativamente a esta operação.

Proposição 1.2.12. *Sejam A, B e C matrizes e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Então, sempre que as seguintes operações estejam definidas, tem-se que:*

i) $(AB)\,C = A\,(BC)$; (*associatividade da multiplicação*)

ii) $A\,(B + C) = AB + AC$;
(*distributividade, à esquerda, da multiplicação em relação à adição*)

iii) $(A + B)\,C = AC + BC$;
(*distributividade, à direita, da multiplicação em relação à adição*)

iv) $\alpha\,(AB) = (\alpha A)\,B = A\,(\alpha B)$.

Demonstração: *Exercício.* $\square$

Observação: Sejam A, B e C matrizes tais que os produtos $(AB)C$ e $A(BC)$ estão definidos. Então, atendendo à associatividade da multiplicação, podemos escrever ABC para representar qualquer um dos produtos indicados.

Proposição 1.2.13. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e A uma matriz de ordem $m \times n$. Então,*

i) $AI_n = A$;

ii) $I_m A = A$;

iii) se $m = n$, $\quad I_n A = AI_n = A$.

Demonstração: *Exercício.* $\square$

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Atendendo à definição de multiplicação de matrizes, é simples concluir que a multiplicação de A por A está definida se, e só se, $m = n$. Consideremos então a seguinte definição.

Definição 1.2.14. *Sejam $n \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Chamamos* **potência de expoente** k **de** A, *com $k \in \mathbb{N}_0$, à matriz de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que representamos por A^k, definida por*

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{se } k = 0 \\ A^{k-1}A & \text{se } k \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Proposição 1.2.15. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $k, l \in \mathbb{N}_0$. Então*

i) $A^k A^l = A^{k+l}$.

ii) $(A^k)^l = A^{kl}$.

1.3 Matrizes invertíveis

Definição 1.3.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diz-se* ***invertível*** *(ou* ***regular*** *ou* ***não singular****) se existe uma matriz $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AX = XA = I_n$.*

Exemplo 1.3.2. *A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é invertível, pois existe $X = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ tal que*

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } AX = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposição 1.3.3. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é uma matriz invertível, então existe uma e uma só matriz $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AA' = I_n = A'A$.*

Demonstração: Sejam X e Y matrizes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tais que $AX = XA = I_n$ e $AY = YA = I_n$. Então

$$X = XI_n = X\,(AY) = (XA)\,Y = I_nY = Y. \quad \square$$

Definição 1.3.4. *Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível. A única matriz $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A'A = I_n = AA'$ designa-se por* **matriz inversa** *de A e representa-se por A^{-1}.*

Exemplo 1.3.5. *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Do exemplo 1.3.2 sabe-se que A é invertível e tem-se*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tal como se pode verificar no exemplo seguinte, nem toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ é invertível.

Exemplo 1.3.6. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ não admite inversa. Com efeito, se admitirmos que existe $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ tal que $AX = XA = I_2$, tem-se

$$AX = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -a-c & -b-d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-b & a-b \\ c-d & c-d \end{bmatrix} = XA,$$

pelo que $0 = c - d = 1$. (contradição).

Definição 1.3.7. *Uma matriz quadrada que não admite inversa diz-se uma **matriz singular** ou **não invertível**.*

Note que pode suceder que para $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ exista $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que $AB = I_m$ e $BA \neq I_n$. Contudo, se $m = n$ prova-se que sempre que $AB = I_n$ também se tem $BA = I_n$. Com os conceitos e resultados apresentados anteriormente ainda não é possível apresentar uma prova desta afirmação, porém pode-se estabelecer os dois resultados seguintes.

Proposição 1.3.8. *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível e $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $A'A = I_n$ (respectivamente $AA' = I_n$). Então $A' = A^{-1}$ e, portanto, $AA' = I_n$ (respectivamente $A'A = I_n$).*

Demonstração: Seja $n \in \mathbb{N}$ e suponhamos que A é uma matriz invertível de ordem n e que A' é uma matriz quadrada de ordem n tal que $A'A = I_n$. Então,

$$A'A = I_n \Rightarrow A'AA^{-1} = I_nA^{-1} \Rightarrow A'I_n = A^{-1} \Rightarrow A' = A^{-1},$$

e, portanto, $AA' = I_n$.□

Proposição 1.3.9. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A, B, C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se $AB = I_n$ e $CA = I_n$, então $B = C$, A é invertível e $A^{-1} = B = C$.*

Demonstração. Tem-se $AB = I_n$ e $CA = I_n$. Logo $C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B$. Logo A é invertível e da Proposição 1.3.3 segue que $A^{-1} = B$. □

Proposição 1.3.10. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrizes invertíveis. Então:*

i) *A^{-1} é invertível e $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.*

ii) *AB é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Demonstração: i) Imediata pela própria definição de matriz invertível.

ii) Como

$$(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

e

$$\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

temos que a inversa de AB existe e é $B^{-1}A^{-1}$. □

1.4 Transposta e transconjugada de uma matriz

Definição 1.4.1. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Chama-se* ***transposta de*** *A, e representa-se por A^T, à matriz de $\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ tal que, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ e $j \in \{1, ..., m\}$, $(A^T)_{ij} = A_{ji}$.*

Exemplo 1.4.2. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$, então $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Proposição 1.4.3. *Sejam A e B matrizes sobre $\mathbb{K}$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então, sempre que as operações seguintes estejam definidas, tem-se que* *i)* $\left(A^T\right)^T = A$;

ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

iv) $(AB)^T = B^T A^T$;

v) $(A^{-1})^T = \left(A^T\right)^{-1}$.

Demonstração: Demonstramos as propriedades iv) e v).

iv) Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ e $B = [b_{ij}]_{p\times n}$.

Por um lado, $AB = [c_{ij}]_{m\times n}$ onde, para cada $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e para cada $j \in \{1, ..., n\}$,

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ip-1}b_{p-1j} + a_{ip}b_{pj}.$$

Logo, $(AB)^T = [d_{ij}]_{n\times m}$ onde, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ e para cada $j \in \{1, ..., m\}$,

$$d_{ij} = c_{ji} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + ... + a_{jp-1}b_{p-1i} + a_{jp}b_{pi}.$$

Por outro lado, como $A^T = [e_{ij}]_{p\times m}$ e $B^T = [f_{ij}]_{n\times p}$, onde

$$e_{ij} = a_{ji} \quad \text{e} \quad f_{ij} = b_{ji},$$

temos que $B^T A^T = [x_{ij}]_{n\times m}$ onde, para cada $i \in \{1, ..., n\}$ e para cada $j \in \{1, ..., m\}$,

$$\begin{aligned} x_{ij} &= f_{i1}e_{1j} + f_{i2}e_{2j} + ... + f_{ip-1}e_{p-1j} + f_{ip}e_{pj} \\ &= b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + ... + b_{p-1i}a_{jp-1} + b_{pi}a_{jp} \\ &= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + ... + a_{jp-1}b_{p-1i} + a_{jp}b_{pi}, \end{aligned}$$

pelo que $d_{ij} = x_{ij}$,para cada $i \in \{1, ..., n\}$ e para cada $j \in \{1, ..., m\}$. Logo, $(AB)^T = B^T A^T$.

v) Pela alínea anterior temos que

$$\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = (I_n)^T = I_n$$

e

$$A^T \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^{-1}A\right)^T = (I_n)^T = I_n.$$

Logo, pela definição de inversa de uma matriz, concluímos que $\left(A^T\right)^{-1} = (A^{-1})^T$.
□

Definição 1.4.4. *Uma matriz quadrada A diz-se:*

i) ***simétrica*** *se* $A = A^T$*;*

ii) ***antissimétrica*** *se* $A = -A^T$*.*

Exemplo 1.4.5. A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é uma matriz simétrica.

Proposição 1.4.6. *Seja* A *uma matriz simétrica e invertível. Então* A^{-1} *é uma matriz simétrica.*

Demonstração: Se A é uma matriz simétrica, temos que $A^T = A$. Então,

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = A^{-1},$$

pelo que A^{-1} é uma matriz simétrica. □

Definição 1.4.7. *Seja* $n \in \mathbb{N}$*. Uma matriz quadrada* A *de ordem* n *diz-se* ***ortogonal*** *se*

$$AA^T = A^T A = I_n.$$

Se A é uma matriz ortogonal, então A é uma matriz invertível e $A^{-1} = A^T$.

Exemplo 1.4.8. A matriz $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal, pois

$$AA^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

e

$$A^T A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2.$$

Proposição 1.4.9. *Seja* A *uma matriz ortogonal. Então,* A^{-1} *é também uma matriz ortogonal.*

Demonstração: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se A é uma matriz ortogonal, temos que

$$AA^T = A^T A = I_n.$$

Então,

$$A^{-1}(A^{-1})^T = A^{-1}(A^T)^{-1} = (A^T A)^{-1} = I_n^{-1} = I_n$$

e

$$(A^{-1})^T A^{-1} = (A^T)^{-1} A^{-1} = (AA^T)^{-1} = I_n^{-1} = I_n,$$

pelo que A^{-1} é também uma matriz ortogonal. □

Definição 1.4.10. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Chama-se* ***conjugada de*** A, *e representa-se por* $\overline{A}$, *à matriz de* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ *tal que, para cada* $i \in \{1, ..., m\}$ *e* $j \in \{1, ..., n\}$, $(\overline{A})_{ij} = \overline{A_{ij}}$. *Define-se a* ***transconjugada*** *de* A, *e representa-se por* A^*, *como sendo a transposta da conjugada de* A.

Proposição 1.4.11. *Sejam* A *e* B *matrizes sobre* $\mathbb{K}$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$. *Então, sempre que as operações seguintes estejam definidas, tem-se que*

i) $(A^*)^* = A$;

ii) $(A + B)^* = A^* + B^*$;

iii) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;

iv) $(AB)^* = B^* A^*$;

v) $\left(A^k\right)^* = (A^*)^k$, *onde* $k \in \mathbb{N}$.

Definição 1.4.12. *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Uma matriz* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *diz-se* ***hermítica*** *se* $A^* = A$.

Definição 1.4.13. *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *Uma matriz* $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ *diz-se* ***unitária*** *se* $AA^* = I_n = A^* A$.