Sucessões

Definição

Uma função $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se uma **sucessão real**. *À regra de correspondência $n \longmapsto a(n)$ chamamos* **termo geral da sucessão** *e ao elemento $a(n)$ chamamos* **termo de ordem n**.

- Dada uma sucessão $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, denotando $a(n)$ por a_n, representamos a sucessão de uma das seguintes formas:
  - $\big(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\big)$
  - $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$
  - $\big(a_n\big)_n$ simplesmente, se daí não advier confusão.
- Dada uma sucessão, o seu contradomínio designa-se por **conjunto dos termos da sucessão**.

Definição

Uma sucessão $(a_n)_n$ *diz-se:*

- **estritamente crescente** *(respetivamente* **crescente***) se* $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n < a_{n+1}$ *(respetivamente* $a_n \leq a_{n+1}$*);*
- **estritamente decrescente** *(respetivamente* **decrescente***) se* $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} < a_n$ *(respetivamente* $a_{n+1} \leq a_n$*);*
- **estritamente monótona** *(respetivamente* **monótona***) se for estritamente crescente ou estritamente decrescente (respetivamente, crescente ou decrescente);*
- **majorada** *(respetivamente* **minorada**, **limitada***) se* $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ *for um conjunto majorado (respetivamente minorado, limitado).*

Exemplo

- *A sucessão* $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ *é estritamente decrescente e limitada.*
- *A sucessão* $(1+(-1)^n)_n$ *não é monótona mas é limitada.*

Definição

Uma **sucessão** $(x_n)_n$ *diz-se* **enquadrada** *pelas sucessões* $(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$ *se*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq x_n \leq b_n \qquad \text{ou} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad b_n \leq x_n \leq a_n.$$

Exemplo

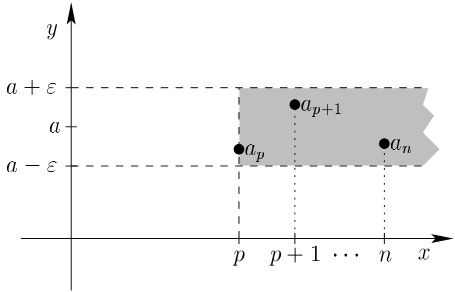
A sucessão $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ *está enquadrada pela sucessão constante igual a zero e pela sucessão constante igual a 1.*

Definição

Dado $a \in \mathbb{R}$, diz-se que uma **sucessão** $(a_n)_n$ *é* **convergente para** $\boldsymbol{a}$, *que* **tende para** $\boldsymbol{a}$ *ou que* **tem limite** $\boldsymbol{a}$, *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p \qquad |a_n - a| < \varepsilon.$$

Escreve-se $(a_n)_n \xrightarrow[n]{} a$, $a_n \xrightarrow[n]{} a$ *ou* $\lim_n a_n = a$.



Definição

Uma sucessão $(a_n)_n$ diz-se **convergente** *se existir um número real a tal que $\lim_n a_n = a$. Uma sucessão que não é convergente diz-se* **divergente**.

Teorema

Uma sucessão não pode convergir para dois limites diferentes.

Proposição

Toda a sucessão convergente é limitada.

Proposição

Sejam $(a_n)_n$ uma sucessão convergente para zero e $(b_n)_n$ uma sucessão limitada. Então $(a_n b_n)_n$ é uma sucessão convergente para zero.

Proposição

Sejam $(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$ *duas sucessões convergentes respetivamente para* a *e para* b. *Então:*

- $\left(a_n + b_n\right)_n$ *é uma sucessão convergente para* $a + b$;
- $\left(a_n b_n\right)_n$ *é uma sucessão convergente para* ab;
- *se* $b_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *e* $b \neq 0$, *então* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ *é uma sucessão convergente para* $\frac{a}{b}$.

Teorema

Sejam $(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$ *duas sucessões convergentes para* $c \in \mathbb{R}$. *Seja* $(c_n)_n$ *uma sucessão enquadrada por* $(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$.
Então $(c_n)_n \xrightarrow[n]{} c$.

Teorema

Seja $(a_n)_n$ *uma sucessão monótona e limitada. Então* $(a_n)_n$ *é convergente e:*

- *se* $(a_n)_n$ *é crescente,* $\lim\limits_n a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$*;*
- *se* $(a_n)_n$ *é decrescente,* $\lim\limits_n a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$*.*

Exemplo

A sucessão $(a_n)_n$ *definida por recorrência por*

$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

é crescente e majorada logo é convergente.

$$\lim_n a_n = \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Subsucessões

Definição

Dada uma sucessão $(a_n)_n$, diz-se que $(b_n)_n$ é uma **subsucessão** *ou* **sucessão parcial** *de $(a_n)_n$, se existir uma função $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad b_n = a_{\varphi(n)}$.*

Proposição

Se $(a_n)_n$ é uma sucessão convergente para a, qualquer sua subsucessão é convergente para a.

Corolário

Se uma sucessão $(a_n)_n$ possuir uma subsucessão divergente ou admitir subsucessões convergentes para limites diferentes então $(a_n)_n$ é divergente.

Limites infinitos

Definição

Diz-se que uma **sucessão** $(a_n)_n$ **tende para** $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) se*

$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p \qquad a_n > M \qquad \text{(resp. } a_n < M\text{).}$$

Escreve-se $\lim\limits_n a_n = +\infty$ *ou* $a_n \xrightarrow[n]{} +\infty$

(resp. $\lim\limits_n a_n = -\infty$ *ou* $a_n \xrightarrow[n]{} -\infty$*).*

Exemplo

A sucessão $\left(n^2\right)_n$ *tende para* $+\infty$.

Infinitésimos vs infinitamente grandes

Proposição

Se $(a_n)_n$ *é uma sucessão tal que* $a_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim\limits_n a_n = 0$ *se e só se* $\lim\limits_n \dfrac{1}{|a_n|} = +\infty$.

Nota

A proposição anterior diz-nos que o inverso de um infinitésimo (sucessão convergente para zero) é, em módulo, um infinitamente grande e que o inverso de um infinitamente grande em módulo é um infinitésimo.

Séries

Definição

Dada uma sucessão real $(a_n)_n$, *chama-se* **série real** *ao par de sucessões* $((a_n)_n, (s_n)_n)$ *tais que* $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, *para todo o* $n \in \mathbb{N}$.

- $(a_n)_n$ *diz-se a* **sucessão geradora** *da série.*
- $(s_n)_n$ *diz-se a* **sucessão das somas parciais** *da série.*

Chamamos termo de ordem n *de uma série ao termo* a_n *da sucessão geradora.*

Nota

Para conhecer uma série $((a_n)_n, (s_n)_n)$*:*

- *basta conhecer a sucessão geradora* $(a_n)_n$*, pois*
  $$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ n \in \mathbb{N};$$
- *basta conhecer a sucessão das somas parciais, pois*
  $$\begin{cases} a_1 = s_1, \\ a_n = s_n - s_{n-1}, \quad \textit{se} \ \ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Definição

A **série** *gerada por uma sucessão* $(a_n)_n$ *diz-se* **convergente** *se a sucessão das somas parciais,* $(s_n)_n$*, convergir. Nesse caso, a* $S = \lim_n s_n$ *chama-se* **soma da série** *e representa-se* $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Uma **série** *não convergente diz-se* **divergente**.

Nota

Por abuso de notação, escreveremos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ou* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *para designar a série gerada por* $(a_n)_n$*, quer se trate de uma série convergente ou de uma série divergente.*

Nota

Frequentemente, por conveniência, consideramos séries em que a sucessão geradora tem domínio $\mathbb{N}_0$ *ou domínio* $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$*, sendo* $n_0 \in \mathbb{N}$*. Escrevemos então* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *ou* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n$ *e* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ *ou* $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} a_n$.

Exemplo

Série harmónica $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}$. *É uma série divergente.*

Série geométrica *de termo inicial* a *e razão* r *com* $a, r \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a\, r^n$.

Convergente sse $|r| < 1$ *ou* $a = 0$.

Série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ *com* $\alpha > 0$. *Convergente sse* $\alpha > 1$.

Proposição

Sejam $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *e* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *duas séries convergentes, de soma* S *e* T*, respetivamente e seja* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Então:*

- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(a_n + b_n\right)_n$ *é uma série convergente de soma* $S + T$*;*
- $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\lambda a_n\right)_n$ *é uma série convergente de soma* λS*.*

Definição

Duas **séries** $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *e* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *dizem-se* **da mesma natureza** *se forem ambas convergentes ou ambas divergentes.*

Teorema

Seja $(a_n)_n$ *uma sucessão real. Se a série gerada por* $(a_n)_n$ *converge, então* $(a_n)_n$ *converge para zero.*

Definição

A uma série do tipo $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ *ou* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1} a_n$*, em que* $(a_n)_n$ *é uma sucessão de termos positivos, chamamos* **série alternada**.

Teorema (critério de Leibniz)

Seja $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ *uma série alternada tal que:*

- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é decrescente;*
- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para zero.*

Então a série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n a_n$ *é convergente.*

Definição

Uma **série** $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *diz-se* **absolutamente convergente** *se a série gerada pela sucessão dos módulos,* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$, *for convergente.*

Teorema

Se a série gerada por $(a_n)_n$ *for absolutamente convergente então é convergente. Além disso,*

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \,.$$

Teorema (primeiro critério de comparação)

Sejam $(a_n)_n$ *e* $(b_n)_n$ *sucessões de termos não negativos tais que*

$$\exists\, p \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq p \qquad a_n \leq b_n.$$

Se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *é convergente então a série* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *também é convergente.*

Teorema (segundo critério de comparação)

Sejam $(a_n)_n$ *uma sucessão de termos não negativos e* $(b_n)_n$ *uma sucessão de termos positivos tais que existe* $\lim_n \dfrac{a_n}{b_n} = \alpha$.

- *Se* $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *e* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *são séries da mesma natureza.*
- *Se* $\alpha = 0$, *a convergência de* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *implica a convergência de* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.
- *Se* $\alpha = +\infty$, *a convergência de* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *implica a convergência de* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n$.

Teorema (critério de Cauchy)

Seja $(a_n)_n$ *uma sucessão de termos não negativos tal que* $\lim\limits_{n} \sqrt[n]{a_n} = \alpha$.

- *Se* $\alpha < 1$, *então* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *é convergente.*
- *Se* $\alpha > 1$, *então* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *é divergente.*

Teorema (critério de d'Alembert)

Seja $(a_n)_n$ *uma sucessão de termos positivos tal que* $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha$.

- *Se* $\alpha < 1$, *então* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *é convergente.*
- *Se* $\alpha > 1$, *então* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *é divergente.*