ÁLGEBRA LINEAR

Exercícios - Matrizes

Lic. Ciências da Computação **2017/2018**

1. Escreva a tabela das seguintes matrizes:

   (a) $A = [i+j]_{\substack{i=1,\ldots,4 \\ j=1,\ldots,5}}$; (b) $B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,4 \\ j=1,\ldots,5}}$ onde $b_{ij} = |i-j|$;

   (c) $A + 2B$.

2. Escreva a matriz $A = [a_{ij}]$, quadrada de ordem n, tal que

   (a) $n = 3$ e $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i+j \text{ é par} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$; (b) $n = 3$ e $a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{se } i > j \\ 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i < j \end{cases}$;

   (c) $n = 6$ e $a_{ij} = \begin{cases} i+j & \text{se } i > j-1 \\ 2i/j & \text{caso contrário} \end{cases}$.

3. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix}; \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Diga quais das seguintes expressões identificam matrizes, e em tais casos calcule-as.

   (a) $A + 2B$; (b) AB;

   (c) $AC + D$; (d) $(A+B)C$;

   (e) ACD; (f) $2ACA + A$.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique que:

   (a) $A - 3A + 2I_3 \neq 0_{3\times 3}$;
   (b) $A.I_3 = A = I_3.A$;
   (c) $A.0_{3\times 3} = 0_{3\times 3}$;
   (d) $2A - 3A = -A$.

5. Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B, C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que

   (a) $A + B = B + A$ (comutatividade da adição).

   (b) $A + 0 = A = 0 + A$ (0 é o elemento neutro da adição).

   (c) $A + (-A) = (-A) + A = 0$ ($-A$ é o simétrico de A).

6. Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $m, n \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Mostre que

   (a) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$. (b) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

   (c) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$. (d) $1A = A$.

7. Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A, B, C, D, I, 0 \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ (matrizes de dimensões tais que as operações abaixo indicadas estejam definidas). Mostre que

   (a) $(AB)C = A(BC)$ (o produto de matrizes é associativo).

   (b) $A(B + C) = AB + AC$ (o produto de matrizes é distributivo em relação à adição),

   (c) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.

   (d) $AI = A = IA$.

   (e) $A0 = 0$, $0A = 0$.

8. Se possível calcule AB e BA sendo

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$;

   (b) $A = \begin{bmatrix} 2+i & -1 \\ 0 & 4+i \\ -3 & -i \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1-i & 0 & 2 & -2i \\ 2 & -i & 1 & 0 \end{bmatrix}$;

   (c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$;

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1+2i & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2i \\ -1+i & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} i & 0 & -3i \\ 2 & 2 & 1+4i \\ 1-3i & 0 & 3i \end{bmatrix}$.

9. Sejam A, B matrizes 2×2 reais tais que
$$AB - BA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
   Mostre que $a + d = 0$.

10. Seja A uma matriz do tipo $m \times (m + 5)$ e B uma matriz do tipo $n \times (11 - n)$ tais que AB e BA estão definidas. Determine os valores possíveis para m e n.

11. Determine a matriz $X \in \mathcal{M}_{4\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $A + 3X = B$, onde $A = [2i - 3j]_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,2}}$ e $B = [2i + 3j]_{\substack{i=1,\dots,4 \\ j=1,2}}$.

12. Demonstre a proposição: "Para quaisquer matrizes $A, B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$, existe e é única a matriz X tal que $A + 3X = B$".

13. Dê exemplos de matrizes A e B tais que $A \neq B$ e:

    (a) $A^2 = -I$;
    (b) $A^2 = 0_{2\times 2}$ e $A \neq 0$;
    (c) $AB = 0_{2\times 2}$, com $A \neq 0$ e $B \neq 0$;
    (d) $AB = 0_{2\times 2}$, com A e B sem elementos nulos;
    (e) A, C e D tais que $AC = AD$ e $C \neq D$.
    (f) A e B tais que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$;
    (g) A e B tais que $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$.

    Sugestão: procurar as condições gerais a satisfazer e depois construir os exemplos.

14. Seja $A = \begin{bmatrix} 2+i & \sqrt{2}+3i \\ 0 & 1-i \\ i & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{C})$. Determine matrizes reais A_1 e A_2 tais que $A = A_1 + iA_2$.

15. Simplifique a expressão seguinte onde A, B e C representam matrizes quadradas com a mesma ordem,

$$A.(B + C) + B.(C - A) - (A + B).C.$$

16. Desenvolva a expressão $(A + B)^3$ no caso de:

    (a) A e B serem matrizes de ordem n quaisquer.
    (b) A e B serem comutáveis.

17. Seja

$$\mathcal{G} = \{\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

    (a) Mostre que quaisquer dois elementos de $\mathcal{G}$ comutam entre si.
    (b) Mostre que $A, B \in \mathcal{G} \Rightarrow AB \in \mathcal{G}$.

18. Verifique que a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz $B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

19. Use a definição para calcular a inversa de cada uma das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

    com $x, y \in \mathbb{R}$.

20. Sejam C uma matriz invertível e $A = CBC^{-1}$. Mostre que A é invertível se e só se B é invertível.

21. Dada uma matriz invertível A, mostre que toda a potência de A é também invertível.

22. Indique A^T no caso de A ser

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 3 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

    (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

23. Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $A, B \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que

    (a) $(A^T)^T = A$.
    (b) $(A + B)^T = A^T + B^T$.
    (c) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.
    (d) $(AB)^T = B^T A^T$.
    (e) $(A^k)^T = (A^T)^k$, $k \in \mathbb{N}$.
    (f) Se A for invertível, então $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

24. Verifique se é válida a igualdade $AA^T = A^T A$, para qualquer matriz A.

25. Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que

    (a) As matrizes $A + A^T$ e AA^T são simétricas;
    (b) Se as matrizes A e B são simétricas, então
        i) As matrizes $A + B$ e αA são simétricas;
        ii) A matriz AB é simétrica se e só se $AB = BA$.

26. Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $m, n, p \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{K})$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Mostre que

    (a) $(A^*)^* = A$.
    (b) $(A + B)^* = A^* + B^*$.
    (c) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$.
    (d) $(AB)^* = B^* A^*$.
    (e) $(A^k)^* = (A^*)^k, k \in \mathbb{N}$.
    (f) Se A for invertível, então $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

27. Diga quais das seguintes matrizes são simétricas, quais são ortogonais, quais são hermíticas e quais são unitárias:

    (a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -i & 2i \\ i & 1 & 1-i \\ -2i & 1+i & 0 \end{bmatrix}$; (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1+i & 5-i \\ 1-i & 7 & i \\ 5+i & -i & -1 \end{bmatrix}$;

    (c) $C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & -1 \end{bmatrix}$; (d) $D = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$.