Universidade do Minho
Departamento de Matemática e Aplicações

Lic. em Ciências da Computação

Análise

Folha de exercícios 3 — 2018'19

1. Estude a existência dos seguintes limites:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,,\quad$ com $\quad f(x,y)=\begin{cases} 1 & \text{se } y=x^2\,, \\ 0 & \text{se } y\neq x^2\,; \end{cases}$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)\,,\quad$ com $\quad g(x,y)=\begin{cases} 2 & \text{se } x^2+y^2\leq 1\,, \\ 5 & \text{se } x^2+y^2> 1\,; \end{cases}$

2. Calcule, caso exista (ou demonstre que não existe) cada um os seguintes limites:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$; (d) $\lim_{(x,y,z)\to(2,0,1)} \dfrac{x^4z}{(x^4+y^2)^3}$;

   (e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2y}{2x^2+4y^2}$; (f) $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x+y}{x-y}$;

   (g) $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}$; (h) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$;

   (i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-2x^2y^3}{2x^4+3y^6}$ (j) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$;

   (l) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2-2y}{x^4+y^2}$; (m) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{-2x^2+3y}{x^2+y^2}$;

   (n) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy^3}{3x^2+4y^6}$; (o) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} \dfrac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$;

   (p) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2\operatorname{sen} x}{x^2+3y^2}$; (q) $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \cos\left(\dfrac{\log\,(x^6)}{y^2-x+1}\right)$;

   (r) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}$; (s) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

   (t) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2+2}$; (u) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{e}^{\,xy}}{x+1}$;

3. Estude a continuidade de cada uma das funções $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2xy^2+y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

4. Apresente, caso seja possível, um prolongamento contínua à origem de cada uma das funções definidas por:

(a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$; (b) $f(x,y) = \dfrac{3x^2(y-1)}{x^2+y^2}$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$; (d) $f(x,y) = \dfrac{x^3y^2}{x^4+2y^4}$;

5. Estude a continuidade das funções definidas por:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (b) $f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } xy \neq 0, \\ 0 & \text{se } xy = 0; \end{cases}$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (d) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < y < x^2, \\ 1 & \text{caso contrário}; \end{cases}$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (f) $f(x,y) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq y, \\ y & \text{se } x < y; \end{cases}$

(g) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (h) $f(x,y) = \log(x^3y)$

(i) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (j) $f(x,y) = \begin{cases} x, & x < y \\ -y+2, & x \geq 0 \end{cases}$

(k) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0); \end{cases}$ (l) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x-y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$

6. Relativamente a uma função $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, diga, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa:

   (a) se $f(0,0) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 1$ então f é contínua em $(0,0)$;

   (b) se $f(0,0) = 1$ e $f(x,x^3) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, então f é descontínua em $(0,0)$;

   (c) se f é contínua em $(0,0)$ e $f(x,x^2) = 2x+1,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, então $\lim\limits_{x\to 0} \lim\limits_{y\to 0} f(x,y) = 1$;

   (d) se $f(x,x^2) = x+2,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, e $f(x,-x^2) = e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, então f é contínua em $(0,0)$.