Notas de Álgebra Linear

Carla Mendes

2015/2016

3. Espaços Vetoriais

Muitas estruturas matemáticas têm propriedades em comum que podem ser generalizadas através de um estudo num plano mais abstrato. Um dos principais objetos de estudo da Álgebra Linear são os Espaços Vetoriais. Esta noção é uma generalização, por exemplo, da estrutura que está associada ao conjunto formado por todos os segmentos orientados com origem num determinado ponto, munido das operações de adição de segmentos orientados e da multiplicação de um escalar por um segmento. Os elementos deste conjunto são conhecidos por vetores e é esta designação que está na origem da nomenclatura espaço vetorial.

3.1 Definições e propriedades

Os espaços vetoriais são definidos sobre corpos. A noção de corpo será estudada com mais detalhe no âmbito de outras unidades curriculares, mas por uma questão de conveniência apresentamos aqui a sua definição.

Definição 3.1.1. *Dá-se a designação de* ***corpo*** *a um triplo* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *onde* $\mathbb{K}$ *é um conjunto não vazio e* $+$ *e* $\cdot$ *são aplicações de* $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ *em* $\mathbb{K}$ *tais que:*

(C_1) $(\forall x, y, z \in \mathbb{K}) \quad (x + y) + z = x + (y + z)$;
(a operação + é associativa)

(C_2) $(\forall x, y \in \mathbb{K}) \quad x + y = y + x$;
(a operação + é comutativa)

(C_3) $(\exists^1 0_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K})(\forall x \in \mathbb{K}) \quad 0_{\mathbb{K}} + x = x = x + 0_{\mathbb{K}}$;
(ao elemento $0_{\mathbb{K}}$ *dá-se a designação de elemento zero de* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$*)*

(C_4) $(\forall x \in \mathbb{K})(\exists^1 - x \in \mathbb{K}) \quad x + (-x) = 0_{\mathbb{K}} = (-x) + x$;
(o elemento $-x$ *é chamado o simétrico de* x*)*

(C_5) $(\forall x, y, z \in \mathbb{K}) \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;
(a operação $\cdot$ *é associativa)*

(C_6) $(\forall x, y \in \mathbb{K}) \quad x \cdot y = y \cdot x$;
(a operação $\cdot$ é comutativa)

(C_7) $(\exists^1 1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K})(\forall x \in \mathbb{K}) \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x = x \cdot 1_{\mathbb{K}}$;
(o elemento $1_{\mathbb{K}}$ é designado a identidade de $(\mathbb{K}, +, \cdot)$)

(C_8) $(\forall x \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\})(\exists^1 x^{-1} \in \mathbb{K}) \quad x \cdot x^{-1} = 1_{\mathbb{K}} = x^{-1} \cdot x$;
(o elemento x^{-1} é chamado o inverso de x)

(C_9) $(\forall x, y, z \in \mathbb{K}) \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ e $(y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$;
(as operações $+$ e $\cdot$ estão relacionadas pela lei distributiva)

Caso $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ seja um corpo diz-se que $\mathbb{K}$, juntamente com as aplicações $+$ e $\cdot$ é um corpo ou, caso não exista ambiguidade quanto às operações envolvidas, diz-se apenas que $\mathbb{K}$ é um corpo. Às operações $+$ e $\cdot$ dá-se a designação de adição e multiplicação em $\mathbb{K}$, respectivamente.

Exemplo 3.1.2. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, *onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais em* $\mathbb{R}$, *é um corpo.*

Exemplo 3.1.3. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, *onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais em* $\mathbb{C}$, *é um corpo.*

Definição 3.1.4. *Sejam* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ *um corpo e* V *um conjunto não vazio. Dá-se a designação de **espaço vetorial** a um quádruplo* $(V, \mathbb{K}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ *onde* $\widetilde{+} : V \times V \to V$ *e* $\widetilde{\cdot} : \mathbb{K} \times V \to V$ *são aplicações tais que:*

(V_1) $(\forall x, y \in V) \quad x \widetilde{+} y = y \widetilde{+} x$;

(V_2) $(\forall x, y, z \in V) \quad x \widetilde{+} \left(y \widetilde{+} z\right) = \left(x \widetilde{+} y\right) \widetilde{+} z$;

(V_3) $(\exists 0_V \in V)\,(\forall x \in V) \quad x \widetilde{+} 0_V = x = 0_V \widetilde{+} x$;

(V_4) $(\forall x \in V)\,(\exists x' \in V) \quad x \widetilde{+} x' = 0_V = x' \widetilde{+} x$;

(V_5) $(\forall x, y \in V)\,(\forall \alpha \in \mathbb{K}) \quad \alpha \widetilde{\cdot} \left(x \widetilde{+} y\right) = \alpha \widetilde{\cdot} x \widetilde{+} \alpha \widetilde{\cdot} y$;

(V_6) $(\forall x \in V)\,(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}) \quad (\alpha + \beta) \widetilde{\cdot} x = \alpha \widetilde{\cdot} x \widetilde{+} \beta \widetilde{\cdot} x$;

(V_7) $(\forall x \in V)\,(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}) \quad (\alpha \cdot \beta) \widetilde{\cdot} x = \alpha \widetilde{\cdot} \left(\beta \widetilde{\cdot} x\right)$;

(V_8) $(\forall x \in V) \quad 1_{\mathbb{K}} \widetilde{\cdot} x = x$.

Caso $(V, \mathbb{K}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ *seja um espaço vetorial, diz-se que* V ***juntamente com as aplicações*** $\widetilde{+}$ *e* $\widetilde{\cdot}$ ***é um espaço vetorial sobre o corpo*** $\mathbb{K}$.

Para simplificar a linguagem, em vez de dizermos que um conjunto V juntamente com as aplicações $\widetilde{+}$ e $\widetilde{\cdot}$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$, dizemos apenas que V é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$ (subentendendo as operações envolvidas).
Ao longo deste capítulo consideramos apenas espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ e sobre $\mathbb{C}$ e passamos a representar por $\mathbb{K}$ um destes conjuntos. Um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ diz-se um ***espaço vetorial real*** e a um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ dá-se a designação de ***espaço vetorial complexo***.
Aos elementos de V dá-se o nome de ***vectores*** e aos elementos de $\mathbb{K}$ o de ***escalares***.
Ao elemento 0_V dá-se a designação de ***vector nulo*** e ao zero de $\mathbb{K}$ damos o nome de ***escalar nulo***. Desde que não exista ambiguidade podemos representar tanto o vector nulo como o escalar nulo por 0.
A operação $\widetilde{+}$ designa-se por ***adição de vectores*** e a operação $\widetilde{\cdot}$ por ***multiplicação de um escalar por um vector***. Simplificamos também a notação, escrevendo $+$ quer se trate da adição em $\mathbb{K}$ quer se trate da adição de vectores e escrevemos $\cdot$ quer seja a multiplicação em $\mathbb{K}$ quer o produto de um escalar por um vector.
Para cada $x \in V$, ao elemento x' determinado na condição (V_4), chama-se ***simétrico de*** x e representa-se por $-x$.

Exemplo 3.1.5. *Seja $n \in \mathbb{N}$. O conjunto*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, ..., n\},$$

dos n-úplos ordenados de elementos de $\mathbb{R}$, algebrizado com as aplicações $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definidas, respectivamente, por:

- $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$,
  para todos $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$,
- $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$,
  para todos $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

é um espaço vetorial real.

Exemplo 3.1.6. *O conjunto $\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ dos polinómios, na indeterminada x e com coeficientes reais, que têm grau menor ou igual a 2, algebrizado com as operações $+ : \mathbb{R}_2[x] \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ e $\cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, definidas, respetivamente, por*

- $(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x_2 + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)$, *para quaisquer $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$,*
- $\alpha \cdot (ax^2 + bx + c) = (\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + \alpha c$, *para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.*

é um espaço vetorial real.

Exemplo 3.1.7. *O conjunto $\mathbb{R}[x]$ de todos os polinómios na ideterminada x e de coeficientes reais, com a adição usual de polinómios e a mulatiplicação de um número real por um polinómio, é um espaço vetorial real.*

Exemplo 3.1.8. *Sejam $m, n \in I\!N$. O conjunto $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, das matrizes reais de ordem $m \times n$, algebrizado com a adição de matrizes e a multiplicação de um real por uma matriz, é um espaço vetorial real.*

A partir das propriedades satisfeitas por um espaço vetorial é possível deduzir outras propriedades, como as que a seguir se apresentam.

Teorema 3.1.9. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Então, para quaisquer $x, y \in V$ e para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, tem-se*

i) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$;

ii) $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_V$;

iii) *se* $\alpha \cdot x = 0_V$, *então* $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ *ou* $x = 0_V$;

iv) $(-\alpha) \cdot x = -(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x)$;

v) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$;

vi) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$.

Demonstração: Demonstramos as propriedades *i)*, *iii)* e *iv)*, deixando a prova das restantes propriedades como exercício.

i) Por definição de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha \cdot 0_V &= \alpha \cdot (0_V + 0_V) && (\text{por } V_3) \\ &= \alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V && (\text{por } V_5)\,. \end{aligned}$$

Sendo $-\alpha 0_V$ o simétrico de $\alpha 0_V$ (cuja existência é garantida por V_4), segue que

$$\alpha 0_V + (-\alpha 0_V) = (\alpha 0_V + \alpha 0_V) + (-\alpha 0_V),$$

donde resulta por V_2 que

$$\alpha 0_V + (-\alpha 0_V) = \alpha 0_V + (\alpha 0_V + (-\alpha 0_V)).$$

Logo, novamente por V_4,

$$0_V = \alpha 0_V + 0_V,$$

e por V_3,

$$0_V = \alpha 0_V.$$

iii) Suponhamos que $\alpha \cdot x = 0_V$ e que $\alpha \neq 0$. Então existe $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}$ e por V_8, V_7 e *i)* segue que

$$x = 1_{\mathbb{K}} \cdot x = (\alpha^{-1}\alpha) \cdot x = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot 0_V = 0_V.$$

iv) Sejam $x \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então, por V_6 e ii) temos

$$\alpha \cdot x + (-\alpha) \cdot x = (\alpha + (-\alpha)) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_V$$

pelo que, por definição, $(-\alpha) \cdot x$ é o simétrico de $\alpha \cdot x$ em V, i.e., $-(\alpha \cdot x) = (-\alpha) \cdot x$. Agora, por V_5, V_4 e i), tem-se

$$\alpha \cdot x + \alpha \cdot (-x) = \alpha \cdot (x + (-x)) = \alpha \cdot 0_V = 0_V$$

e, novamente por definição, $\alpha \cdot (-x)$ é o simétrico de $\alpha \cdot x$ em V, i.e., $-(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (-x)$. □

3.2 Subespaços vetoriais

Definição 3.2.1. *Sejam $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ um espaço vetorial e U um subconjunto de V. Diz-se que U é um **subespaço vetorial** de V, e escreve-se $U \leq V$, se as correspondências $\widehat{+}$ de $U \times U$ em U e $\widehat{\cdot}$ de $\mathbb{K} \times U$ em U definidas, respectivamente, por*

$$x \widehat{+} y = x + y \quad \text{e} \quad \alpha \widehat{\cdot} x = \alpha \cdot x$$

para todos $x, y \in U$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, são aplicações e U juntamente com estas aplicações é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Dado um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ existem critérios que permitem caracterizar os subconjuntos de V que são subespaços vetoriais.

Teorema 3.2.2. *Sejam $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ um espaço vetorial e U um subconjunto de V. Então U é um subespaço vetorial de V se e só se são satisfeitas as seguintes condições:*

i) $U \neq \emptyset$;

ii) $(\forall x, y \in U) \quad x + y \in U$;

iii) $(\forall x \in U)\ (\forall \alpha \in \mathbb{K}) \quad \alpha \cdot x \in U$.

Demonstração: Suponha-se que U é um subespaço vetorial de V. Então as correspondências $\widehat{+}$ e $\widehat{\cdot}$, indicadas na definição anterior, são aplicações e, portanto, para todo $x, y \in U$ e para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \widehat{+} y = x + y \in U$ e $\alpha \widehat{\cdot} x = \alpha \cdot x \in U$. Por outro lado, como U é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ quando algebrizado com as aplicações $\widehat{+}$ e $\widehat{\cdot}$, tem-se $U \neq \emptyset$. Logo as condições *i)*, *ii)* e *iii)* são satisfeitas.

Reciprocamente, suponhamos que U é um subconjunto de V que satisfaz as condições $i), ii)$ e $ii)$. Então por $ii)$ e $iii)$ resulta que $\widehat{+}$ e $\widehat{\cdot}$ são aplicações. Vejamos, agora, que U juntamente com estas aplicações é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma vez que $U \subseteq V$ e que as operações de U são as operações de V restringidas a elementos de U, é óbvio que U satisfaz propriedades análogas às propriedades V_1, V_2, V_5, V_6, V_7 e V_8. Resta, então, mostrar que, relativamente à operação $\widehat{+}$, existe elemento neutro e que todo o elemento de U tem simétrico. Ora, como $U \neq \emptyset$, existe $x \in U$. Logo, por $iii)$, $-1_{\mathbb{K}} \cdot x = -x \in U$ e, por $ii)$, $x + (-x) = 0_V \in U$. Atendendo a que $U \subseteq V$, temos, para todo $x \in U$, $x \widehat{+} 0_V = x + 0_V = x = 0_V + x = 0_V \widehat{+} x$, e, portanto, 0_V é elemento neutro para a operação $\widehat{+}$. Uma vez que, para todo $x \in U$, $-1_{\mathbb{K}} \cdot x = -x \in U$ e $x \widehat{+} (-x) = 0_V = (-x) \widehat{+} x$, concluímos que para todo o vetor de U existe um elemento em U que é o seu simétrico relativamente à operação $\widehat{+}$. $\square$

Exemplo 3.2.3. *Seja V um espaço vetorial qualquer. Então V e $\{0_V\}$ são subespaços vetoriais de V.*

Exemplo 3.2.4. *O conjunto $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$ é subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$. De facto,*

i) $(0, 0) \in W$, pelo que $W \neq \emptyset$;

ii) dados $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in W$, temos $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$, pelo que $x_2 + y_2 = 0 + 0 = 0$ e, portanto,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in W;$$

iii) dados $(x_1, x_2) \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $\alpha \cdot x_2 = \alpha \cdot 0 = 0$, pelo que

$$\alpha \cdot (x_1, x_2) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2) \in W.$$

Exemplo 3.2.5. *O conjunto $W = \{ax^2 + bx + x : a, b \in \mathbb{R}$ e $c = 0\}$ é subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}_2[x]$. De facto,*

i) $0x^2 + 0x + 0 \in W$, pelo que $W \neq \emptyset$;

ii) dados $a_1x^2 + b_1x + c_1, a_2x^2 + b_2x + c_2 \in W$, temos $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$, pelo que $a_1 + a_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 + b_2 \in \mathbb{R}$, $c_2 + c_2 = 0 + 0 = 0$ e, portanto,

$$(a_1x^2 + b_1x + c_1) + (a_2x^2 + b_2x + c_2) = (a_1 + a_2)x^2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2) \in W;$$

iii) dados $ax^2 + bx + c \in W$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos $a, b \in \mathbb{R}$ e $c = 0$ donde $\alpha a, \alpha b \in \mathbb{R}$ e $\alpha c = 0$. Portanto,

$$\alpha \cdot (ax^2 + bx + c) = (\alpha a)x^2 + (\alpha b)x + \alpha c \in W.$$

Exemplo 3.2.6. *Seja* $n \in \mathbb{N}$. *O conjunto*

$$W = \{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : A \text{ é uma matriz diagonal}\}$$

é subespaço vetorial de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Exemplo 3.2.7. *O conjunto* $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 2\}$ *não é subespaço vetorial do espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$. *De facto, dados*

$$x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in W,$$

tem-se $x_2 = 2$ *e* $y_2 = 2$. *Logo*

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \notin W,$$

uma vez que $x_2 + y_2 = 4 \neq 2$.

Teorema 3.2.8. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* U *um subespaço vetorial de* V. *Então* $0_V \in U$.

Demonstração: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U um subespaço vetorial de V. Então $U \neq \varnothing$, pelo que existe $x \in U$. Como $-1_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$, conclui-se que

$$-x = (-1_{\mathbb{K}}) \cdot x \in U$$

e, consequentemente,

$$0_V = x + (-x) \in U.\ \square$$

Dado um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, vamos estudar formas de construir, a partir de subsespaços vetoriais, outros subespaços vetoriais.

Exemplo 3.2.9. *No espaço vetorial* $\mathbb{R}^3$ *consideremos os subespaços vetoriais*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\}.$$

Então

$$\begin{aligned} F \cap G &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in F \text{ e } (x, y, z) \in G\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ e } y = 2z\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -3z \text{ e } y = 2z\} \\ &= \{(-3z, 2z, z) \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

e é simples verificar que $F \cap G$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$.

Com efeito, a intersecção de quaisquer dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V é também um subespaço vetorial de V.

Teorema 3.2.10. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Então $U \cap W$ é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração: Provemos, recorrendo ao critério de subespaço, que $U \cap W$ é subespaço vetorial de V.

i) U e W são subespaços vectorais de V, pelo que, pelo teorema anterior, $0_V \in U$ e $0_V \in W$. Logo $0_V \in U \cap W$ e, portanto, $U \cap W \neq \varnothing$.

ii) Sejam $x, y \in U \cap W$. Então $x, y \in U$ e $x, y \in W$, pelo que $x + y \in U$ e $x + y \in W$, uma vez que U e W são subespaços vetoriais de V. Logo $x + y \in U \cap W$.

iii) Sejam $x \in U \cap W$ e $\alpha \in \mathbb{K}$. Então $x \in U$ e $x \in W$, pelo que $\alpha \cdot x \in U$ e $\alpha \cdot x \in W$, atendendo a que U e W são subespaços vetoriais de V. Logo $\alpha \cdot x \in U \cap W$.

De *i)*, *ii)* e *iii)* conclui-se que $U \cap W$ é subespaço vetorial de V. □

Mais geralmente, prova-se o seguinte

Teorema 3.2.11. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Se $\{U_i : i \in I\}$ é uma família não vazia de subespaços vetoriais de V, então $\bigcap_{i \in I} U_i$ é subespaço vetorial de V.* □

Naturalmente, coloca-se a questão se a união de dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V é também um subespaço vetorial de V.

Exemplo 3.2.12. *Consideremos, novamente, os subespaços vetoriais*

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\} \quad G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2z\}$$

do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Então

$$F \cup G \;=\; \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \in F \text{ ou } (x, y, z) \in G\}$$

Facilmente se verifica que $F \cup G$ não é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, uma vez que $(2, 0, -2) \in F \subseteq F \cup G$, $(0, 4, 2) \in G \subseteq F \cup G$, mas $(2, 0, -2) + (0, 4, 2) = (2, 4, 0) \notin F \cup G$.

Tal como acabámos de verificar, a união de dois subespaços vetoriais de um espaço vetorial V nem sempre é um subespaço vetorial de V e tal só se verifica nas condições seguintes.

Teorema 3.2.13. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Então $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V se e só se $U \subseteq W$ ou $W \subseteq U$.*

Demonstração: Suponhamos que $U \subseteq W$ ou que $W \subseteq U$. Então $U \cup W = W$ ou $U \cup W = U$, respectivamente. Logo $U \cup W$ é, obviamente, um subespaço vetorial de V.
Reciprocamente, admitamos que $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V e que $U \nsubseteq W$. Então existe $u \in U$ tal que $u \notin W$. Logo, dado $w \in W$, temos $w, u \in U \cup W$ e, uma vez que $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V, vem que $w + u \in U \cup W$. Assim, $w+u \in U$ ou $w+u \in W$ donde resulta que $(w+u)+(-u) \in U$ ou $(-w)+(w+u) \in W$, ou seja, $w \in U$ ou $u \in W$. Atendendo a que $u \notin W$, temos, então, $w \in U$. Uma vez que todo o elemento de W é também elemento de U, provámos que $W \subseteq U$. $\square$.

Definição 3.2.14. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Chama-se* ***soma dos subespaços*** *U e W, e representa-se por $U + W$, o conjunto $\{u + w : u \in U \text{ e } w \in W\}$.*

É óbvio que se U e W são subespaços vetoriais de um espaço vetorial V, então $U \subseteq U + W$. Com efeito, se W é subespaço vetorial de V, tem-se que $0_V \in W$. Então, como $u = u + 0_V$, para todo $u \in U$, temos que $u \in U + W$. Assim, fica provado que $U \subseteq U + W$. De modo análogo, prova-se que $W \subseteq U + W$.

Da definição de soma de susbespaços vetoriais e da comutatividade da adição de vetores também é imediato que, sendo U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V, temos $U + W = W + U$.

Exemplo 3.2.15. *Consideremos, no espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, os subespaços*

$$\begin{array}{rcl} S &=& \{(s,t,u,v) \in \mathbb{R}^4 : s = 0, u = 0\} \\ U &=& \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a - d = 0 \text{ e } a - c = 0\} \\ W &=& \{(x,0,x,2x) \in \mathbb{R}^4 : x \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

Então

$$S = \{(0,t,0,v) \in \mathbb{R}^4 : t, v \in \mathbb{R}\} \text{ e } U = \{(a,b,a,a) \in \mathbb{R}^4 : a, b \in \mathbb{R}\}$$

e, portanto,

$$\begin{array}{rcl} S + U &=& \{(a, t+b, a, a+v) \in \mathbb{R}^4 : a, b, t, v \in \mathbb{R}\}, \\ U + W &=& \{(x+a, b, x+a, 2x+a) \in \mathbb{R}^4 : a, b, x \in \mathbb{R}\}, \\ S + W &=& \{(x, t, x, v+2x) \in \mathbb{R}^4 : x, t, v \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

Facilmente se verifica que qualquer um destes conjuntos é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$.

Tal como acontece no exemplo anterior, a soma de quaisquer dois subespaços do mesmo espaço vetorial V é ainda um subespaço vetorial de V.

Teorema 3.2.16. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Então $U+W$ é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração: Sejam U e W subespaços vetoriais de V. Então

i) $U+W \neq \emptyset$, uma vez que $U \neq \emptyset$ e $W \neq \emptyset$;

ii) Dados $x, y \in U+W$, tem-se

$$x = u_1 + w_1 \text{ e } y = u_2 + w_2, \text{ com } u_1, u_2 \in U \text{ e } w_1, w_2 \in W.$$

Logo, recorrendo às propriedades associativa e comutativa da adição de vectores,

$$x + y = (u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2).$$

Ora, como U é subespaço vetorial de V e $u_1, u_2 \in U$, o vector $u_1 + u_2$ é um elemento de U. De modo análogo concluímos que $w_1 + w_2$ é um elemento de W. Logo $x + y \in U + W$.

iii) Dado $x \in U+W$ tem-se $x = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$. Logo, para qualquer $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$\alpha x = \alpha(u + w) = \alpha u + \alpha w$$

e, uma vez que U e W são subespaços vetoriais de V, temos que $\alpha u \in U$ e $\alpha w \in W$. Assim, $\alpha x \in U + W$.

De *i)*, *ii)* e *iii)* conclui-se que $U+W$ é subespaço vetorial de V. □

Definição 3.2.17. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Diz-se que $U+W$ é uma* ***soma direta*** *se $U \cap W = \{0_V\}$. Diz-se que V é soma direta de U e W se $V = U + W$ e a soma $U+W$ é direta. Escreve-se, então, $V = U \bigoplus W$ e diz-se que U é* ***suplementar*** *de W relativamente a V (e que W é suplementar de U relativamente a V ou que U e W são suplementares).*

Exemplo 3.2.18. *Consideremos o espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ e os subespaços S, U e W indicados no exemplo anterior. Uma vez que*

$$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : b = 0, c = a, d = 2a\}$$

temos

$$\begin{aligned}
S \cap U &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0, z = 0, x = w, x = z\} \\
&= \{(0, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : y \in \mathbb{R}\}, \\
U \cap W &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - d = 0, a - c = 0, b = 0, c = a, d = 2a\} \\
&= \{(0, 0, 0, 0)\}, \\
S \cap W &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a = 0, c = 0, b = 0, c = a, d = 2a\} \\
&= \{(0, 0, 0, 0)\}.
\end{aligned}$$

Então $S+U$ não é uma soma direta e $U+W$ e $S+W$ são somas diretas. Uma vez que $(1,1,2,1) \notin U+W$, temos $\mathbb{R}^4 \neq U+W$ e, portanto, $\mathbb{R}^4$ não é soma direta de U e W. Atendendo a que $S+W \subsetneqq \mathbb{R}^4$, concluímos que $\mathbb{R}^4$ também não é soma direta de S e W.

Como podemos verificar no exemplo que se segue, podem existir subespaços de um espaço vetorial V que admitam mais do que um suplementar relativamente a V.

Exemplo 3.2.19. *Consideremos no espaço vetorial complexo $\mathbb{C}^3$, os subespaços*

$$\begin{array}{rcl} W_1 & = & \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 : b=c=0\}, \\ W_2 & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : x=0\}, \\ W_3 & = & \{(s,t,u) \in \mathbb{C}^3 : s=t\}. \end{array}$$

Tem-se $\mathbb{C}^3 = W_1 \bigoplus W_2$ e $\mathbb{C}^3 = W_1 \bigoplus W_3$ e $W_2 \neq W_3$.

Teorema 3.2.20. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e U, W subespaços vetoriais de V. Então:*

i) V é soma direta de U e W se e só se cada vector de V se escreve, de modo único, como soma de um elemento de U com um elemento de W;

ii) V é soma direta de U e W se e só se $V=U+W$ e 0_V se escreve, de modo único, como soma de um elemento de U com um elemento de W.

Demonstração: *i)* Suponhamos que V é soma direta de U e W, ou seja, que V=$U+W$ e $U \cap W = \{0_V\}$. Vamos mostrar que todo o elemento de V se escreve, de modo único, como soma de um elemento de U com um elemento de W.
Uma vez que V=U+W, então, para todo $v \in V$, existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$. Logo todo o elemento de V se escreve como soma de um elemento de U com um elemento de W. Agora, se admitirmos, que x é um elemento de V tal $x = u + w$ com $u \in U$ e $w \in W$ e $x = u' + w'$ com $u' \in U$ e $w' \in W$, prova-se que $u = u'$ e $w = w'$. De facto, como $u + w = u' + w'$, vem que $u - u' = w - w'$. Como $u, u' \in U$, e $w, w' \in W$, então $u - u', w - w' \in U \cap W = \{0_V\}$. Logo $u - u' = 0_V$ e $w - w' = 0_V$, pelo que $u = u'$ e $w = w'$. Portanto, cada elemento de V escreve-se, de modo único, como soma de um elemento de U com um elemento de W.
Reciprocamente, suponhamos que cada elemento de V se escreve, de modo único, como soma de um elemento de U com um elemento de W. Para concluir que V é soma direta de U e W resta, então, provar que $U \cap W = \{0_V\}$.
Uma vez que $U \cap V$ é um subespaço vetorial de V, é claro que $\{0_V\} \subseteq U \cap W$. Por outro lado, dado $v \in U \cap W$, tem-se $v \in V$, $v = v + 0_V$ com $v \in U$ e $0_V \in W$ e $v = 0_V + v$ com $0_V \in U$ e $v \in W$. Ora, como v se escreve de, modo único, como soma de um elemento de U com um elemento de W, temos $v = 0_V$. Logo $U \cap W \subseteq \{0_V\}$.

Deixamos ao cuidado do leitor a prova de *ii)*. □

A noção de soma de subespaços pode ser generalizada, de modo natural, a um número finito (≥ 2) de subespaços.

Definição 3.2.21. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e W_1, W_2, ..., W_n subespaços vetoriais de V. Designa-se por **soma dos subespaços** W_1, W_2, ..., W_n, e representa-se por $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ o conjunto*

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_n = \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n : x_1 \in W_1, x_2 \in W_2, \ldots, x_n \in W_n\}.$$

Proposição 3.2.22. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e W_1, W_2, ..., W_n subespaços vetoriais de V. Então $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ é um subespaço vetorial de V.*

Demonstração: Exercício. □

A noção de soma direta de subespaços também pode ser estendida a um número finito (≥ 2) de subespaços.

Definição 3.2.23. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e W_1, W_2, ..., W_n subespaços vetoriais de V. Diz-se que $W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ é uma **soma direta** se*

$$W_i \cap (W_1 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_n) = \{0_V\}, \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

*Diz-se que V **é soma direta** de W_1, W_2, ..., W_n, e escreve-se $V = W_1 \bigoplus W_2 \bigoplus \ldots \bigoplus W_n$, se*

i) $V = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$;

ii) $W_i \cap (W_1 + \ldots + W_{i-1} + W_{i+1} + \ldots + W_n) = \{0_V\}$, *para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração: Exercício. □

Proposição 3.2.24. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e W_1, W_2, ..., W_n subespaços vetoriais de V. Então são equivalentes as três afirmações seguintes:*

i) V *é soma direta de* W_1, W_2, ..., W_n.

ii) $V = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ *e cada elemento de* V *escreve-se, de maneira única, como soma de elementos de* W_1, W_2, ..., W_n.

iii) $V = W_1 + W_2 + \ldots + W_n$ *e* 0_V *escreve-se, de maneira única, como soma de elementos de* W_1, W_2, ..., W_n.

3.3 Conjunto de geradores

Definição 3.3.1. Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um subconjunto não vazio de V. Diz-se que:

- $v \in V$ é ***combinação linear dos elementos*** $v_1, v_2, ..., v_n \in V$, $n \in \mathbb{N}$, se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_n \cdot v_n.$$

  Neste caso, aos escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ dá-se a designação de ***coeficientes*** da combinação linear;

- $v \in V$ é ***combinação linear de elementos de S*** se existem v_1, v_2, ..., $v_n \in S$ tais que v é combinação linear destes elementos.

Exemplo 3.3.2. *No espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$*, consideremos os vetores* $v_1 = (1, 2, 0)$*,* $v_2 = (-2, 3, 4)$ *e* $v_3 = (-1, 12, 8)$*. O vetor* v_3 *é combinação lienar de* v_1 *e* v_2*, pois*

$$(-1, 12, 8) = 3 \cdot (1, 2, 0) + 2 \cdot (-2, 3, 4).$$

Exemplo 3.3.3. *No espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$*, consideremos os vetores* $v_1 = (1, 2, 0)$*,* $v_2 = (-2, 3, 0)$ *e* $v_3 = (-1, 2, 2)$*. O vetor* v_3 *não é combinação lienar de* v_1 *e* v_2*, pois*

$$(-1, 2, 2) \neq \alpha \cdot (1, 2, 0) + \beta \cdot (-2, 3, 0), \text{ para quaisquer } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.3.4. *No espaço vetorial real* $\mathbb{R}^n$ *temos*

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot (1, 0, ..., 0) + x_2 \cdot (0, 1, 0, ..., 0) + \cdots + x_n \cdot (0, ..., 0, 1),$$

pelo que qualquer vector $x \in \mathbb{R}^n$ *é combinação linear dos vectores*

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, ..., 0) \\ e_2 &= (0, 1, 0, ..., 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, ..., 0, 1). \end{aligned}$$

Exemplo 3.3.5. *No espaço vetorial real* $\mathbb{R}^2$*, todo o vector* (x, y) *é combinação linear dos vectores* $(1, 0)$*,* $(0, 1)$ *e* $(1, 1)$*, uma vez que*

$$(x, y) = (x - 1) \cdot (1, 0) + (y - 1) \cdot (0, 1) + 1 \cdot (1, 1).$$

Exemplo 3.3.6. *No espaço vetorial* $\mathbb{R}_2[x]$, *todo o vetor* ax^2+bx+c *é combinação linear dos vetores* $x^2 = 1x^2+0x+0$, $x = 0x^2+1x+0$ *e* $1 = 0x^2+0x+1$, *pois*

$$ax^2+bx+c = a\cdot x^2 + b\cdot x + c\cdot 1.$$

Exemplo 3.3.7. *No espaço vetorial* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, *todo o vector* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *é combinação linear dos vectores*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\cdot\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.3.8. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *e* S *um subconjunto não vazio de* V. *Então,*

i) o conjunto

$$W = \{x : x \text{ é combinação linear de elementos de } S\}$$

é um subespaço vetorial de V;

ii) $S \subseteq W$;

iii) W *é o menor subespaço vetorial de* V *que contém* S.

Demonstração: Sejam V, S e W conjuntos nas condições indicadas no enunciado do teorema.

i) Nestas condições prova-se que W é subespaço vetorial de V. De facto,

a) Uma vez que $S \subseteq V$ e V é espaço vetorial, toda a combinação linear de elementos de S é um elemento de V, ou seja, todo o elemento de W é também elemento de V. Logo $W \subseteq V$.

b) Dado que $S \neq \emptyset$, existe $x \in S$. Então, como $0_V = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$, tem-se que 0_V é combinação linear de elementos de S. Logo $0_V \in W$ e, portanto, $W \neq \emptyset$.

c) Sejam $x, y \in W$. Então existem $x_1, x_2, ..., x_n$, $y_1, y_2, ..., y_m \in S$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n$$

e

$$y = \beta_1 \cdot y_1 + \beta_2 \cdot y_2 + ... + \beta_m \cdot y_m.$$

Assim,

$$x + y = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n + \beta_1 \cdot y_1 + \beta_2 \cdot y_2 + ... + \beta_m \cdot y_m,$$

i.e., $x + y$ é combinação linear de $n + m$ elementos de S.

d) Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x \in W$. Dado que $x \in W$, existem $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n.$$

Então,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot x &= \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + ... + \alpha_n \cdot x_n) \\ &= \alpha \cdot (\alpha_1 \cdot x_1) + \alpha \cdot (\alpha_2 \cdot x_2) + ... + \alpha \cdot (\alpha_n \cdot x_n) \\ &= (\alpha\alpha_1) \cdot x_1 + (\alpha\alpha_2) \cdot x_2 + ... + (\alpha\alpha_n) \cdot x_n, \end{aligned}$$

i.e., $\alpha \cdot x$ é combinação linear de elementos de S.

De a), b), c) e d), conclui-se que W é subespaço vetorial de V.

ii) Para todo $x \in S$, $x = 1_{\mathbb{K}} \cdot x$, pelo que $x \in W$. Logo $S \subseteq W$.

iii) Pretendemos mostrar que se U é um subespaço de V tal que $S \subseteq U$, então $W \subseteq U$. De facto, dado $x \in W$, existem $x_1, x_2, ..., x_n \in S$ e $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n.$$

Então, se admitirmos que U é um subespaço vetorial de V tal que $S \subseteq U$, temos $x_1, x_2, ..., x_n \in U$ e, consequentemente, $x \in U$. Logo $W \subseteq U$. □

Definição 3.3.9. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um subconjunto não vazio de V. Ao subespaço vetorial*

$$W = \{x \in V : x \text{ é combinação linear de elementos de } S\}$$

*de V chama-se **subespaço gerado por** S, e representa-se por $\langle S \rangle$. Ao conjunto S chamamos **conjunto gerador** de W.*

Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Por convenção, $\langle \emptyset \rangle = \{0_V\}$.

Notação: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ e $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ um subconjunto de V. Neste caso pode-se representar o subespaço gerado por S por $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$ em vez de $\langle \{x_1, x_2, ..., x_n\} \rangle$.

Definição 3.3.10. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e W um subespaço de V. Se W é gerado por um conjunto finito de vetores de V diz-se que o subespaço W* ***é finitamente gerado****. Caso W seja gerado por um conjunto infinito de vetores de V diz-se que o subespaço W* ***é infinitamente gerado****.*

Exemplo 3.3.11. *Na sequência do exemplo 3.3.5, tem-se*

$$\mathbb{R}^2 = \langle (1,0), (0,1), (1,1) \rangle,$$

e portanto, $\mathbb{R}^2$ é um subespaço vetorial finitamente gerado.

Exemplo 3.3.12. *Consideremos o espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$ e sejam*

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (1,0,0,...,0) \\ e_2 & = & (0,1,0,...,0) \\ & & \vdots \\ e_n & = & (0,0,...,0,1). \end{array}$$

Com base no exemplo 3.3.4, podemos afirmar que

$$\mathbb{R}^n = \langle e_1, ..., e_n \rangle.$$

Exemplo 3.3.13. *Considere-se, em $\mathbb{R}^3$, o conjunto $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - y\}$. Então*

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{(x,y,x-y) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{x \cdot (1,0,1) + y \cdot (0,1,-1) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in \mathbb{R}\} \\ & = & \langle (1,0,1), (0,1,-1) \rangle, \end{array}$$

pelo que $\{(1,0,1), (0,1,-1)\}$ é um conjunto gerador de U.

Exemplo 3.3.14. *Do exemplo 3.3.7 podemos concluir que*

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Exemplo 3.3.15. *Na sequência do exemplo 3.3.6 temos*

$$\mathbb{R}_2[x] = \left\langle x^2, x, 1 \right\rangle.$$

Teorema 3.3.16. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $v_1, v_2, ..., v_n, v \in V$ tais que v é combinação linear de $v_1, v_2, ..., v_n$. Então,*

$$\langle v_1, v_2, ..., v_n, v\rangle = \langle v_1, v_2, ..., v_n\rangle .$$

Demonstração: Sejam $U = \langle v_1, ..., v_n\rangle$ e $W = \langle v_1, ..., v_n, v\rangle$. Para provar a igualdade $U = W$, vamos mostrar que $U \subseteq W$ e $W \subseteq U$.

$(U \subseteq W)$: Do teorema anterior segue que

$$\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq \{v_1, v_2, ..., v_n, v\} \subseteq W.$$

Logo, como U é o menor subespaço de V que contém $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ e W é um subespaço de V que também contém este conjunto, temos $U \subseteq W$.

$(W \subseteq U)$: Por hipótese, v é combinação linear de $v_1, v_2, ..., v_n$, pelo que $v \in U$. Logo, como $\{v_1, v_2, ..., v_n, v\} \subseteq U$ e W é o menor subespaço de V que contém este conjunto, temos $W \subseteq U$. □

Teorema 3.3.17. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, v_1, v_2, ..., $v_n \in V$, α_1, ..., α_{i-1}, α_{i+1}, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ e $\alpha_i \in \mathbb{K} \setminus \{0_\mathbb{K}\}$. Então*

$$\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle = \langle v_1, \ldots, v_{i-1}, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n\rangle.$$

Demonstração: Exercício.

3.4 Dependência e independência linear

Definição 3.4.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ e $(v_1, v_2, ..., v_n)$ uma sequência de vetores de V. Diz-se que os vetores da sequência $(v_1, v_2, ..., v_n)$ são* ***linearmente independentes*** *se*

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + ... + \alpha_n \cdot v_n = 0_V \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Caso contrário, diz-se que os vetores da sequência $(v_1, v_2, ..., v_n)$ são ***linearmente dependentes****.*

Nas condições da definição anterior, e para simplificação de linguagem, dizemos apenas que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente independentes.

Note-se que se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e v_1, v_2, ..., v_n são vetores de V, então é sempre possível escrever 0_V como combinação linear destes vetores, pois

$0_V = 0_{\mathbb{K}} \cdot v_1 + 0_{\mathbb{K}} \cdot v_2 + \ldots + 0_{\mathbb{K}} \cdot v_n$. Logo os vetores v_1, v_2, …, v_n são linearmente independentes se e só se $0_{\mathbb{K}} \cdot v_1 + 0_{\mathbb{K}} \cdot v_2 + \ldots + 0_{\mathbb{K}} \cdot v_n$ é a única forma de escrever 0_V como combinação linear de v_1, v_2, …, v_n .

A definição anterior pode ser generalizada a sequências infinitas de vetores.

Definição 3.4.2. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, I um conjunto infinito e $(v_i)_{i\in I}$ uma sequência de vetores de V. Diz-se que os vetores da sequência $(v_i)_{i\in I}$ são linearmente independentes se, para cada $t \in \mathbb{N}$ e cada t elementos distintos $i_1, \ldots, i_t \in I$, $v_{i_1}, \ldots, v_{i_t}$ são linearmente independentes.*

Exemplo 3.4.3. *Os vetores $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 0, -1, 1)$, $(2, 1, 0, 1)$ são linearmente independentes, pois, para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}
&\alpha(1, 0, 0, 0) + \beta(1, 0, -1, 1) + \gamma(2, 1, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)\\
&\Rightarrow (\alpha + \beta + 2\gamma, \gamma, -\beta, \beta + \gamma) = (0, 0, 0, 0)\\
&\Rightarrow \alpha + \beta + 2\gamma = 0, \gamma = 0, -\beta = 0, \beta + \gamma = 0\\
&\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0
\end{aligned}$$

Exemplo 3.4.4. *No espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ os vetores $(1, 0), (0, 1), (1, 1)$ são linearmente dependentes, pois*

$$1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1) + (-1) \cdot (1, 1) = (0, 0).$$

Note-se que o vetor nulo pode ser escrito como combinação linear dos três vetores indicados utilizando escalares não nulos.

Exemplo 3.4.5. *No espaço vetorial real $\mathbb{R}^n$, os vetores $e_1, e_2, ..., e_n$, onde cada e_i é o n-uplo cujo elemento na coordenada i é 1 e todos os outros elementos são zero, são linearmente independentes. De facto,*

$$\begin{array}{rl}
& \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n}\\
\Rightarrow & (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) = (0, 0, ..., 0)\\
\Rightarrow & \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0
\end{array}.$$

Exemplo 3.4.6. *No espaço vetorial $\mathbb{R}_2[x]$, os vetores x^2, x e 1 são linearmente independentes, pois, para quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,*

$$\alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0x^2 + 0x + 0 \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Exemplo 3.4.7. *Considerando o espaço vetorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, as matrizes*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são linearmente independentes.

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $v \in V$. Se $v \neq 0_V$, é simples verificar que v é linearmente independente. De facto, dado $\alpha \in \mathbb{K}$, se $\alpha v = 0_V$, então $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ ou $v = 0_V$. Como, por hipótese, $v \neq 0_V$, então $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$. Logo v é linearmente independente. Caso $v = 0_V$, então v é linearmente dependente pois $0_V = 1_{\mathbb{K}} \cdot 0_V$ e $1_{\mathbb{K}} \neq 0_V$.

Teorema 3.4.8. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, e $v_1, ..., v_n, v$ vetores de V. Então*

i) se $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, então $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n$ são linearmente independentes;

ii) se $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes, então $v_1, \ldots, v_n, v$ são linearmente dependentes.

iii) se $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes e $v_1, \ldots, v_n, v$ são linearmente dependentes, então v é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.

Demonstração: Exercício.

Teorema 3.4.9. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Então $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes se e só se qualquer combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$ tem coeficientes únicos, i.e., se e só se*

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \text{ e } \ldots \text{ e } \alpha_n = \beta_n.$$

Demonstração: $\Rightarrow$) Suponhamos que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes e que $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ são tais que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n.$$

Então

$$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot v_n = 0_V$$

e, uma vez que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, da igualdade anterior resulta que

$$\alpha_1 - \beta_1 = 0_{\mathbb{K}}, \ \ldots, \ \alpha_n - \beta_n = 0_{\mathbb{K}}$$

i.e.

$$\alpha_1 = \beta_1, \ \ldots, \ \alpha_n = \beta_n.$$

$\Leftarrow$) Suponha-se que qualquer combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$ tem coeficientes únicos i.e., que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = \beta_1 \cdot v_1 + \ldots + \beta_n \cdot v_n \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \text{ e } \ldots \text{ e } \alpha_n = \beta_n.$$

Então, dados escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V,$$

temos

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \ldots + \alpha_n \cdot v_n = 0_{\mathbb{K}} \cdot v_1 + \ldots + 0_{\mathbb{K}} \cdot v_n,$$

pelo que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0_{\mathbb{K}}$. Logo os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. $\square$

Teorema 3.4.10. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ e $v_1, v_2, ..., v_n$ elementos de V. Então $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente dependentes se e só se pelo menos um dos vetores é combinação linear dos restantes.*

Demonstração: $\Rightarrow$) Sejam $v_1, v_2, ..., v_n$, com $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, vetores de V linearmente dependentes. Então temos

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = 0_V,$$

com algum α_i não nulo $(i = 1, 2, ..., n)$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\alpha_n \neq 0_{\mathbb{K}}$. Então existe $\alpha_n^{-1} \in \mathbb{K}$ e da igualdade anterior resulta que

$$\alpha_n^{-1} \cdot (\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n) = \alpha_n^{-1} \cdot 0_V,$$

i.e.,

$$\left(\alpha_n^{-1}\alpha_1\right) \cdot v_1 + \left(\alpha_n^{-1}\alpha_2\right) \cdot v_2 + \cdots \left(\alpha_n^{-1}\alpha_{n-1}\right) \cdot v_{n-1} + \ v_n = 0_V.$$

Assim,

$$v_n = \left(-\alpha_n^{-1}\alpha_1\right) \cdot v_1 + \left(-\alpha_n^{-1}\alpha_2\right) \cdot v_2 + \cdots + \left(-\alpha_n^{-1}\alpha_{n-1}\right) \cdot v_{n-1},$$

e portanto, v_n é combinação linear dos restantes elementos.

$\Leftarrow$) Suponhamos, sem perda de generalidade, que existem $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ tais que

$$v_n = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot v_{n-1}.$$

Então,

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot v_{n-1} + (-1_{\mathbb{K}}) \cdot v_n = 0_V,$$

i.e.,

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot v_{n-1} + \alpha_n \cdot v_n = 0_V$$

com $\alpha_n = -1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$. Logo, $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente dependentes. $\square$

Corolário 3.4.11. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $v_1, v_2, ..., v_n$ são vetores de V tais que $v_i = 0_V$, para algum $i \in \{1, ..., n\}$, então os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são linearmente dependentes.* □

Teorema 3.4.12 (Teorema de Steinitz)**.** *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $S = \{v_1, ..., v_n\}$ um subconjunto de V com n vetores, $n \in \mathbb{N}$. Se $w_1, ..., w_p$, $p \in \mathbb{N}$, são vetores de V tais que*

i) $w_1, ..., w_p$ *são linearmente independentes,*

ii) *para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$, o vetor w_i é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$,*

então

1) $p \leq n$,

2) *é possível substituir p dos vetores de S por $w_1, ..., w_p$ de forma a obter um subconjunto S' de V tal que $< S >=< S' >$.*

Demonstração: Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, e $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um subconjunto de V com n vetores. Pretendemos mostrar que se $w_1, ..., w_p$, $p \in \mathbb{N}$, são vetores de V que satisfazem *i)* e *ii)*, então são satisfeitas as condições *1)* e *2)*. A prova é feita recorrendo ao método de indução matemática aplicado a p (o número de vetores linearmente independentes).

Caso $p = 1$: Suponhamos que w_1 é linearmente independente e que w_1 é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.

1) É óbvio que $1 \leq n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

2) Como w_1 é linearmente independente, então $w_1 \neq 0_V$. Por outro lado, como w_1 é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$, existem $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$, com $\lambda_i \neq 0$, para algum $i \in \{1, 2, ..., n\}$, tais que

$$w_1 = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \cdots + \lambda_n \cdot v_n.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\lambda_1 \neq 0$. Então pelo Teorema 3.3.17,

$$V = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle = \langle w_1, v_2, ..., v_n \rangle .$$

Logo as condições *1)* e *2)* são satisfeitas para $p = 1$.

Passo de indução: Admita-se, por hipótese de indução, que as afirmações são verdadeiras para $k \in \mathbb{N}$, ou seja, admita-se que se $w_1, ..., w_k \in V$, são k vetores de V linearmente independentes tais que, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, o vetor w_i é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$, então

$h_1)$ $k \leq n$;

$h_2)$ é possível substituir k dos vetores de S por $w_1, ..., w_k$ de forma a obter um subconjunto S' de V tal que $< S' >=< S >$.

Pretendemos mostrar que o resultado é válido para $k+1$, ou seja, temos de provar que se $w_1, w_2, ..., w_k, w_{k+1}$ são $k+1$ vetores de V linearmente independentes tais que, para cada $i \in \{1, \ldots, k, k+1\}$, o vetor w_i é combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$, então

$t_1)$ $k+1 \leq n$;

$t_2)$ é possível substituir $k+1$ dos vetores de S por $w_1, ..., w_k, w_{k+1}$ de forma a obter um subconjunto S'' de V tal que $< S'' >=< S >$.

De facto, se admitirmos que $w_1, ..., w_k, w_{k+1}$ são vetores de V linearmente independentes, então, pelo Teorema 3.4.8, os vetores w_1, ..., w_k são linearmente independentes. Logo

$t_1)$ Por $h_1)$, temos $k \leq n$. Se admitirmos que $k = n$, então por $h_2)$ segue que $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle w_1, \ldots w_k \rangle$ pelo que w_{k+1} é combinação linear de $w_1, \ldots w_k$, o que contaria a hipótese de que w_1, ..., w_k, w_{k+1} são linearmente independentes. Assim, $k < n$ e, portanto, $k+1 \leq n$.

$t_2)$ Por $h_2)$ é possível substituir k dos vetores de S por $w_1, w_2, ..., w_k$ de forma a obter um subconjunto S' de V tal que $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que

$$S' = \{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}.$$

Logo w_{k+1} é combinação linear dos vetores w_1, ..., w_k, v_{k+1}, ..., v_n, isto é, existem λ_1, ..., λ_k, λ_{k+1}, ..., λ_n tais que

$$w_{k+1} = \lambda_1 \cdot w_1 + \ldots + \lambda_k \cdot w_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} \ldots \lambda_n \cdot v_n.$$

Como w_1, ..., w_k, w_{k+1} são linearmente independentes, temos $\lambda_i \neq 0_{\mathbb{K}}$, para algum $i \in \{k+1, ..., n\}$, caso contrário viria

$$w_{k+1} = \lambda_1 \cdot w_1 + \ldots + \lambda_k \cdot w_k$$

o que contraria a hipótese de que os vetores w_1, w_2, ..., w_k, w_{k+1} são linearmente independentes. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\lambda_{k+1} \neq 0_{\mathbb{K}}$. Então, pelo Teorema 3.3.17,

$$\langle w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n \rangle = \langle w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots, v_n \rangle.$$

Logo $S'' = \{w_1, \ldots, w_k, w_{k+1}, \ldots, v_n\}$ é um conjunto obtido de S substituindo $k+1$ dos vetores de S por $w_1, ..., w_k, w_{k+1}$ e tal que $\langle S \rangle = \langle S'' \rangle$. □

Corolário 3.4.13. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ e $S = \{v_1, ..., v_n\}$, um conjunto de n vetores de V. Se S é um conjunto gerador de V e $w_1, ..., w_p$, $p \in \mathbb{N}$, são vetores de V linearmente independentes, então $p \leq n$ e é possível substituir p dos vetores de S por $w_1, ..., w_p$ de forma a obter um subconjunto S' de V que é também gerador de V.*

Exemplo 3.4.14. *No espaço vetorial $\mathbb{R}^4$, consideremos os vetores $u_1 = (-2, 0, 0, 2)$, $u_2 = (1, 0, 2, -1)$, $v_1 = (0, 0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0, 0)$. Os vetores u_1, u_2 são linearmente independentes e tem-se*

$$\begin{aligned} u_1 &= 2v_1 + 0v_2 + (-2)v_3, \\ u_2 &= (-1)v_1 + 2v_2 + 1v_3 \end{aligned}$$

i.e., u_1 e u_2 são combinações lineares de v_1, v_2, v_3. Logo, pelo teorema anterior, é possível substituir, pelo menos, dois dos vetores de $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, de forma a obter um conjunto S' tal que $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$. A substituição faz-se vetor a vetor seguindo o processo descrito no teorema. Pode haver mais de uma maneira de efectuar a substituição e o conjunto S' obtido no final do processo pode não ser o mesmo, mas qualquer que seja o conjunto obtido, este gera o mesmo subespaço que o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$. Vamos ver duas duas formas de efectuar essa substituição.

Temos $u_1 = 2v_1+0v_2+(-2)v_3$ e $2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, logo $< v_1, v_2, v_3 >=< u_1, v_2, v_3 >$. Como u_2 é combinação linear de v_1, v_2, v_3, então também é combinação linear de u_1, v_2, v_3. De facto, $v_1 = \frac{1}{2}u_1 + 0v_2 + 1v_3$ e $u_2 = (-1)v_1 + 2v_2 + 1v_3 = -\frac{1}{2}u_1 + 2v_2 + 0v_3$ onde $2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Assim, tem-se $< u_1, v_2, v_3 >=< u_1, u_2, v_3 >$; logo $< v_1, v_2, v_3 > = < u_1, u_2, v_3 >$.
Uma vez que $u_1 = 2v_1 + 0v_2 + (-2)v_3$ e $-2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, outra substituição possível seria a de v_3 por u_1, uma vez que $< v_1, v_2, v_3 >=< v_1, v_2, u_1 >$. Como u_2 é combinação linear de v_1, v_2, v_3, então também é combinação linear de v_1, v_2, u_1. Tem-se $v_3 = 1v_1 + 0v_2 - \frac{1}{2}u_1$ e, portanto, $u_2 = 0v_1 + 2v_2 - \frac{1}{2}u_1$ com $2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então $< v_1, v_2, u_1 >=< v_1, u_2, u_1 >$, donde $< v_1, v_2, v_3 >=< v_1, u_2, u_1 >$.

Lema 3.4.15. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n, p \in \mathbb{N}$ tais que $p \leq n$, $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um subconjunto de V com n vetores linearmente independentes e $w_1, \ldots, w_p$ vetores de V linearmente independentes. Seja S' um conjunto que se obtém de S substituindo p dos vetores de S por $w_1, \ldots, w_p$. Se $< S' >=< S >$, então os vetores de S' são linearmente independentes.*

Demonstração: A prova é feita por indução em p. $\square$.

3.5 Bases e dimensão

Definição 3.5.1. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, I um conjunto e $(v_i)_{i\in I}$ uma sequência de vetores de V. Diz-se que a sequência $(v_i)_{i\in I}$ é uma **base** de V se:*

- *os vetores da sequência $(v_i)_{i\in I}$ são linearmente independentes;*
- *$\cup_{i\in I}\{v_i\}$ é um conjunto gerador de V.*

Em particular, dado $n \in \mathbb{N}$, uma sequência $(v_1, \ldots, v_n)$ de vetores de V é uma base de V se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V e os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes.

Por convenção, diz-se que $(v_i)_{i\in\emptyset}$ é a única base do espaço $\{0_V\}$.

Observação: Uma vez que uma base é definida como sendo uma sequência, duas bases com os mesmos elementos ordenados de forma diferente são distintas.

Definição 3.5.2. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $v \in V$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V. Chamam-se **componentes** ou **coordenadas** de v na base $(v_1, \ldots, v_n)$ aos coeficientes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ da combinação linear $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.*

Exemplo 3.5.3. *Considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, a sequência $(e_1, ..., e_n)$, onde cada e_i é o n-uplo cujo elemento na coordenada i é 1 e todos os outros elementos são zero, é uma base de V. De facto, de exemplos anteriores sabemos que os vetores $e_1, ..., e_n$ são linearmente independentes e que $\{e_1, ..., e_n\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^n$. À base $(e_1, \ldots, e_n)$ dá-se a designação de* **base canónica** *de $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 3.5.4. *Dos exemplos 3.3.15 e 3.4.6 concluímos que $(x^2, x, 1)$ é uma base do espaço vetrorial real $\mathbb{R}_2[x]$.*

Exemplo 3.5.5. *Considerando o espaço vetorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, a sequência*

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

é uma base deste espaço.

Exemplo 3.5.6. *No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, a sequência $((1,0), (0,1), (1,1))$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$, uma vez que os vetores que a constituem são linearmente dependentes.*

Teorema 3.5.7. *Sejam V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$, e $(v_1, ..., v_n)$ uma sequência de vetores de V. Então $(v_1, ..., v_n)$ é uma base de V se e só se todo o elemento de V se escreve de um único modo como combinação linear dos vetores $v_1, ..., v_n$.*

Demonstração: $\Rightarrow$) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V. Seja $x \in V$. Como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é gerador de V, sabemos que existem α_1, ..., $\alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que $x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Para além disso, como os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, sabemos pelo Teorema 3.5.18 que x se escreve de modo único como combinação linear destes vetores. Logo, cada vetor de V escreve-se de modo único como combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n$.
$\Leftarrow$) Suponha-se que cada vetor de V se escreve de modo único como combinação linear dos vetores $v_1, ..., v_n$. Então, pelo Teorema 3.5.18, os vetores $v_1, ..., v_n$ são linearmente independentes. Por outro lado, se todo o vetor se escreve como combinação linear destes vetores, temos que $V = \langle v_1, ..., v_n \rangle$. Logo $(v_1, ..., v_n)$ é uma base de V.
$\square$

Teorema 3.5.8. *Sejam $V \neq \{0_V\}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e S um conjunto finito gerador de V. Então existem $u_1, \ldots, u_p \in S$, $p \in \mathbb{N}$, tais que $(u_1, \ldots, u_p)$ é uma base de V.*

Demonstração: Seja $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ um subconjunto de V com n vetores, $n \in \mathbb{N}$, tal que $< S >= V$. A prova de que existe uma base de V formada por elementos de S é feita por indução no número de elementos do conjunto gerador.

Caso $n = 1$: Se $S = \{v_1\}$ é um conjunto gerador de V, então $v_1 \neq 0_V$, pois $V \neq \{0_V\}$. Logo v_1 é linearmente independente e, portanto, (v_1) é uma base de V.

Passo de indução: Por hipótese de indução, admitamos que, dado $t \in \mathbb{N}$, se $\{v_1, \ldots, v_t\}$ é um subconjunto de V com t elementos tal que $< v_1, \ldots, v_t >= V$, então existe uma base de V formada por elementos de $\{v_1, \ldots, v_t\}$.
Suponhamos que $S = \{v_1, \ldots, v_{t+1}\}$ é um subconjunto de V com $t + 1$ elementos e que $< v_1, \ldots, v_{t+1} >= V$. Então dá-se um dos seguintes casos:
i) $v_1, \ldots, v_{t+1}$ são linearmente independentes e, portanto, $(v_1, \ldots, v_{t+1})$ é uma base de V formada por elementos de S.
ii) $v_1, \ldots, v_{t+1}$ são linearmente dependentes e, neste caso, um dos vetores v_i é combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{t+1}$. Então

$$< v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{t+1} >=< v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{t+1} > .$$

Assim, $S' = \{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_{t+1}\}$ é um conjunto gerador de V com t elementos e, por hipótese de indução, existe uma base de V formada por elementos de S'. Consequentemente, como $S' \subseteq S$, existe uma base de V formada por elementos de S. $\square$

Corolário 3.5.9. *Todo o espaço vetorial finitamente gerado admite uma base.*

Demonstração: Caso $V = \{0_V\}$, então V admite uma base; por convenção $(v_i)_{i\in\emptyset}$ é uma base de $\{0_V\}$.
Caso $V \neq \{0_V\}$, o resultado é imediato a partir do teorema anterior. □

Exemplo 3.5.10. *No espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$, *consideremos os vetores*

$$u_1 = (-1,0,0), u_2 = (1,0,1), u_3 = (0,0,2), u_4 = (1,-1,1), u_5 = (1,1,0).$$

É simples verificar que $\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ *é um conjunto gerador de* $\mathbb{R}^3$. *De facto, dado* $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ *e* $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5 \in \mathbb{R}$, *tem-se*

$$(a,b,c) = \lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3+\lambda_4u_4+\lambda_5u_5 \text{ se e só se } \left\{\begin{array}{lcl}\lambda_1 & = & -a+b+\lambda_2+2\lambda_4\\ \lambda_3 & = & (c-\lambda_2-\lambda_4)/2\\ \lambda_5 & = & b+\lambda_4\end{array}\right. .$$

Assim $(a,b,c) = (-a+b+\lambda_2+2\lambda_4)u_1+\lambda_2u_2+((c-\lambda_2-\lambda_4)/2)u_3+\lambda_4u_4+(b+\lambda_4)u_5$.
Em particular, $(0,0,0) = (\lambda_2+2\lambda_4)u_1+\lambda_2u_2+((-\lambda_2-\lambda_4)/2)u_3+\lambda_4u_4+\lambda_4u_5$, *para todo* $\lambda_2,\lambda_4 \in \mathbb{R}$ *e, portanto, os vetores* u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 *são linearmente dependentes. Tomando, por exemplo,* $\lambda_2 = -1$ *e* $\lambda_4 = 1$, *vem* $u_4 = -u_1+u_2+0u_3-u_5$, *pelo que* $< u_1,u_2,u_3,u_4,u_5 >=< u_1,u_2,u_3,u_5 >$.
Agora, para quaisquer $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_5 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3+\lambda_5u_5 = (0,0,0) \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl}\lambda_1 & = & \lambda_2\\ \lambda_3 & = & -(\lambda_2/2)\\ \lambda_5 & = & 0\end{array}\right.$$

e, portanto, $(0,0,0) = \lambda_2u_1+\lambda_2u_2+(-\lambda_2/2)u_3+0u_5$, *para todo* $\lambda_2 \in \mathbb{R}$. *Logo* u_1,u_2,u_3,u_5 *são linearmente dependentes. Tomando, por exemplo,* $\lambda_2 = 1$, *vem* $u_1 = -u_2+(1/2)u_3+0u_5$, *pelo que* $< u_1,u_2,u_3,u_5 >=< u_2,u_3,u_5 >$.
Para quaisquer $\lambda_2,\lambda_3,\lambda_5 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_2u_2+\lambda_3u_3+\lambda_5u_5 = (0,0,0) \Rightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_5 = 0.$$

Assim, os vetores u_2,u_3,u_5 *são linearmente independentes. Portanto* (u_2,u_3,u_5) *é uma base de* $\mathbb{R}^3$.

Teorema 3.5.11. *Sejam* $V \neq \{0_V\}$ *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *finitamente gerado,* $t \in \mathbb{N}$ *e* $u_1,\ldots u_t$ *vetores de* V *linearmente independentes. Então existe uma base de* V *da qual fazem parte os vetores* $u_1,\ldots,u_t$.

Demonstração: Sejam $V \neq \{0_V\}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado, $t \in \mathbb{N}$ e $u_1,\ldots,u_t$ vetores de V linearmente independentes.
Sendo $V \neq \{0_V\}$ um espaço vetorial finitamente gerado, então admite uma base;

seja $(v_1, \ldots, v_n)$, $n \in \mathbb{N}$, uma base de V. Então $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V com n elementos distintos. Logo, pelo Corolário 3.4.13, temos $t \leq n$ e é possível substituir t dos elementos de S pelos vetores $u_1, \ldots, u_t$ de forma a obter um conjunto S' gerador de V.
Se $t = n$, temos $S' = \{u_1, \ldots, u_t\}$ e, portanto, $(u_1, \ldots, u_t)$ é uma base de V.
Se $t < n$, suponhamos, sem perda de generalidade que $S' = \{u_1, \ldots, u_t, v_{t+1}, \ldots, v_n\}$. Uma vez que os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes e $< S > = < S' >$, do Lema 3.4.15 conclui-se que os vetores u_1, …, u_t, v_{t+1}, …, v_n são também linearmente independentes. Logo $(u_1, \ldots, u_t, v_{t+1}, \ldots, v_n)$ é uma base de V. $\square$

Exemplo 3.5.12. *Consideremos, no espaço vetorial real* $\mathbb{R}^3$*, os vetores* $u_1 = (0, 1, -1)$ *e* $u_2 = (1, -1, -1)$.
Os vetores u_1*,* u_2 *são linearmente independentes, logo existe uma base de* $\mathbb{R}^3$ *da qual fazem parte estes vetores. Vamos determinar uma dessas bases seguindo o processo descrito na demonstração anterior. Sendo* $v_1 = (1, 0, 0)$*,* $v_2 = (0, 1, 0)$*,* $v_3 = (0, 0, 1)$*, a sequência* (v_1, v_2, v_3) *é uma base de* $\mathbb{R}^3$*. Uma vez que* $u_1 = v_2 - v_3$*, tem-se* $< v_1, v_2, v_3 > = < v_1, u_1, v_3 >$*. Agora, como* $u_2 = v_1 - v_2 - v_3$ *e* $v_2 = u_1 + v_3$*, vem* $u_2 = v_1 - u_1 - 2v_3$*, pelo que* $< v_1, u_1, v_3 > = < v_1, u_1, u_2 >$*. Logo* $< v_1, v_2, v_3 > = < v_1, u_1, u_2 >$*. Pelo Lema 3.4.15 segue que os vetores* v_1, u_1, u_2 *são linearmente independentes e, portanto,* (v_1, u_1, u_2) *é uma base de* $\mathbb{R}^3$*.*

Teorema 3.5.13. *Se* V *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *finitamente gerado, então todas as bases de* V *são finitas.*

Demonstração: Seja V um espaço vetorial finitamente gerado.
Se $V = \{0_V\}$, é óbvio que V não admite bases infinitas.
Se $V \neq \{0_V\}$, então, pelo Teorema 3.5.8, o espaço vetorial V admite uma base finita, digamos $(v_1, \ldots, v_n)$. Suponhamos que V admite uma base infinita $(u_i)_{i \in I}$. Em, particular, os vetores da sequência $(u_i)_{i \in I}$ são linearmente independentes. Logo, tomando $n + 1$ elementos distintos $i_1, \ldots, i_{n+1} \in I$, os vetores $u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n+1}}$ são linearmente independentes. Por outro lado, como $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V, pelo Corolário 3.4.13 vem $n + 1 \leq n$ (absurdo). Portanto V não admite bases infinitas. $\square$

Teorema 3.5.14. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *finitamente gerado e* $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *uma base de* V*. Então qualquer base de* V *tem exactamente* n *vetores.*

Demonstração: O resultado é imediato a partir do Corolário 3.4.13. $\square$

O resultado anterior fundamenta a definição que se segue.

Definição 3.5.15. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado. Chama-se **dimensão** de V, e representa-se por $\dim V$, ao número de elementos de uma sua qualquer base. Por convenção, diz-se ainda que $\dim\{0_v\} = 0$. Se V não é finitamente gerado, diz-se que V tem **dimensão infinita**.*

Exemplo 3.5.16. *Para $n \in \mathbb{N}$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.*

Exemplo 3.5.17. *O espaço vetorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tem dimensão 4.*

Teorema 3.5.18. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado de dimensão n. Então,*

i) *se $v_1, v_2, ..., v_p$ são p vetores de V com $p > n$, então são linearmente dependentes;*

ii) *se $v_1, \ldots, v_n$ são n vetores de V linearmente independentes, então $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V;*

iii) *se $v_1, \ldots, v_n$ são n vetores de V, distintos dois a dois, e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V, então $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V.*

Demonstração: O resultado *i)* é imediato a partir do Corolário 3.4.13, a alínea *ii)* resulta dos teoremas 3.5.14 e 3.5.11, e *ii)* resulta dos teoremas 3.5.14 e 3.5.8. □

Teorema 3.5.19. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ finitamente gerado e W um subespaço vetorial de V. Então*

i) *W tem dimensão finita e $\dim W \leq \dim V$;*

ii) *se $\dim W = \dim V$, então $W = V$.*

Demonstração: *i)* A prova é feita com base no Corolário 3.4.13.
ii) Resulta do teorema anterior. □

Teorema 3.5.20. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e W um subespaço de V. Então existe um suplementar de W relativamente a V.*

Demonstração: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão n, $n \in \mathbb{N}_0$, e seja W um subespaço de V.
Se $W = \{0_V\}$, então V é um suplementar de W relativamente a V.
Se $W = V$, então $\{0_V\}$ é um suplementar de W relativamente a V.
Se $W \neq \{0_V\}$ e $W \neq V$, seja $p = \dim W$ e $(w_1, \ldots, w_p)$ uma base de W. Uma vez que $W \neq V$, temos $p < n$. Por outro lado, como $w_1, \ldots, w_p$ são vetores linearmente

independentes de V, segue pelo Teorema 3.5.11 que existe uma base de V da qual fazem parte os vetores $w_1, \ldots, w_p$. Suponha-se, sem perda de generalidade que $(w_1, \ldots, w_p, u_1, \ldots, u_{n-k})$ é essa base. Seja $U =< u_1, \ldots, u_{n-k} >$. Fica ao cuidado do leitor a verificação de que $V = W \bigoplus U$. $\square$

Teorema 3.5.21. *Sejam V um espaço vetorial de V de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e W e U subespaços de V. Então* $\mathrm{dim(W+U) = dimW + dimU - dim(W \cap U)}$.

Demonstração: Sejam W e U subespaços de V.
Se $U = \{0_V\}$ ou $W = \{0_V\}$, o resultado é imediato.
Se $U \neq \{0_V\}$ e $W \neq \{0_V\}$, admitamos que $\mathrm{dimW = k} \geq 1$ e $\mathrm{dimU = t} \geq 1$. Sejam $(w_1, \ldots, w_k)$ uma base de W e $(u_1, \ldots, u_t)$ uma base de U. Então

$$W + U =< w_1, \ldots, w_k > + < u_1, \ldots, u_t >=< w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_t > .$$

Consideremos, agora, dois casos:

1) $W \cap U = \{0_V\}$:
Neste caso, prova-se que os vetores $w_1, \ldots w_k, u_1, \ldots, u_t$ são linearmente independentes. De facto, dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_t \in \mathbb{K}$,

$$\begin{array}{ll} & \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_k w_k + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_t u_t = 0_V \\ \Rightarrow & \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_k w_k = -\beta_1 u_1 - \ldots - \beta_t u_t \\ \Rightarrow & \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_k w_k \in W \cap U \text{ e } -\beta_1 u_1 - \ldots - \beta_t u_t \in W \cap U \\ \Rightarrow & \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_k w_k = 0_V \text{ e } -\beta_1 u_1 - \ldots - \beta_t u_t = 0_V \\ \Rightarrow & \alpha_1 = \ldots \alpha_k = 0_{\mathbb{K}} \text{ e } -\beta_1 = \ldots = \beta_t = 0_{\mathbb{K}}, \end{array}$$

ou seja, $w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_t$ são linearmente independentes.
Assim, $(w_1, \ldots, w_k, u_1, \ldots, u_t)$ é uma base de $W+U$, e tem-se $\mathrm{dim(W+U) = k+t = dimW + dimU - dim(W \cap U)}$.

2) Caso $W \cap U \neq \{0_V\}$:
Sejam $p = \mathrm{dimW \cap U}$ e $(v_1, \ldots, v_p)$ uma base de $W \cap U$. Uma vez que $v_1, \ldots, v_p$ são vetores de W linearmente independentes, existe uma base de W da qual fazem parte estes vetores, seja $(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{k-p})$ essa base. De modo análogo, existe uma base de U da qual fazem parte os vetores $v_1, \ldots, v_p$, seja $(v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_{t-p})$ essa base. Então

$$\begin{array}{rcl} W + U & = & < v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{k-p} > + < v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_{t-p} > \\ & = & < v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{k-p}, u_1, \ldots, u_{t-p} > \end{array}$$

Vamos, agora, verificar que os vetores $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{k-p}, u_1, \ldots, u_{t-p}$ são linearmente independentes. De facto, dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-p}, \beta_1, \ldots, \beta_{t-p} \in \mathbb{K}$,

$$\begin{array}{ll} & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p + \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_{k-p} w_{k-p} + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_{t-p} u_{t-p} = 0_V \\ \Rightarrow & \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_p v_p + \alpha_1 w_1 + \ldots \alpha_{k-p} w_{k-p} = -\beta_1 u_1 - \ldots - \beta_{t-p} u_{t-p}. \end{array}$$

Então $-\beta_1 u_1 - \ldots - \beta_{t-p} u_{t-p} \in W \cap U$. Logo existem $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_p \in \mathbb{K}$ tais que

$$-\beta_1 u_1 - \ldots - \beta_{t-p} u_{t-p} = \lambda'_1 v_1 + \ldots + \lambda'_p v_n,$$

donde

$$\lambda'_1 v_1 + \ldots + \lambda'_p v_n + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_{t-p} u_{t-p} = 0_V$$

e, como $(v_1, \ldots, v_p, u_1, \ldots, u_{t-p})$ é base de U, temos

$$\lambda'_1 = \ldots = \lambda'_p = \beta_1 = \ldots = \beta_{t-p} = 0_{\mathbb{K}}.$$

De modo análogo, prova-se que $\lambda'_1 = \ldots = \lambda'_p = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-p} = 0_{\mathbb{K}}$. Uma vez que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-p} = \beta_1 = \ldots = \beta_{t-p} = 0_{\mathbb{K}}$ e os vetores $v_1, \ldots, v_p$ são linearmente independentes, tem-se também $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}$. Logo os vetores $v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{k-p}, u_1, \ldots, u_{t-p}$ são linearmente independentes. Portanto $(v_1, \ldots, v_p, w_1, \ldots, w_{k-p}, u_1, \ldots, u_{t-p})$ é uma base de $W + U$, e tem-se

$$\begin{aligned}\dim(W+U) &= p + (k-p) + (t-p) \\ &= k + t - p \\ &= \dim W + \dim U - \dim(W \cap U).\end{aligned}$$

□

3.6 Mais sobre a característica de uma matriz

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, podemos identificar, sem perda de rigor, cada linha i de A com o elemento $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ de $\mathbb{K}^n$ e a coluna j de A com o elemento $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ de $\mathbb{K}^m$. Ao subespaço vetorial de $\mathbb{K}^n$ gerado pelas linhas de A damos a designação de ***espaço das linhas*** de A e representamo-lo por $\mathcal{L}(A)$. O subespaço vetorial de $\mathbb{K}^m$ gerado pelas colunas de A é designado por ***espaço das colunas*** de A e é representado por $\mathcal{C}(A)$. Às dimensões dos subespaços $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{C}(A)$ damos a designação de ***característica linha*** de A e ***característica coluna*** de A, e representamo-las por $car_l(A)$ e $car_c(A)$, respetivamente.

Pelo Teorema 3.5.18 é simples perceber que a característica linha de uma matriz A é igual ao número máximo de linhas de A que são linearmente independentes e, analogamente, a característica coluna de A é igual ao número máximo de colunas de A que são linearmente independentes.

Exemplo 3.6.1. *Se*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\mathcal{L}(A) =< (2,0,0), (0,0,1), (0,0,0) >, \quad \mathcal{L}(B) =< (2,0,0), (0,1,0), (0,0,0) >$$

e

$$\mathcal{C}(A) =< (2,0,0),(0,0,0),(0,1,0) >, \quad \mathcal{C}(B) =< (2,0,0),(0,1,0),(0,0,0) > .$$

A respeito destes espaços vetoriais facilmente se verifica que $\mathcal{L}(A) \neq \mathcal{L}(B)$, $\mathcal{C}(A) = \mathcal{C}(B)$, $car_l(A) = car_c(A)$ *e* $car_l(B) = car_c(B)$.

Observação: Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, tem-se $\mathcal{C}(A) = \mathcal{L}(A^T)$.

Proposição 3.6.2. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Se* B *é uma matriz obtida de* A *por meio de uma transformação elementar sobre linhas, então* $car_l(A) = car_l(B)$.

Demonstração: Se B é uma matriz obtida de A por meio de uma transformação elementar sobre linhas, então do Teorema 3.3.17 segue que $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$. Logo $car_l(A) = car_l(B)$. □

Proposição 3.6.3. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Se* B *é uma matriz obtida de* A *por meio de uma transformação elementar sobre linhas, então* $car_c(A) = car_c(B)$.

Demonstração: Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ tais que B é obtida de A por meio de uma transformação elementar sobre linhas.
Pretendemos mostrar que $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(B)$, ou seja, que o número máximo de colunas de A linearmente independentes é igual ao número máximo de colunas de B linearmente independentes. Para tal, basta mostrar que, para qualquer $k \in \{1, \ldots, n\}$, qualquer sequência (A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_k}) com k colunas de A e quaisquer $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 A_{j_1} + \alpha_2 A_{j_2} + \ldots \alpha_k A_{j_k} = \mathbf{0}$$

se e só se

$$\alpha_1 B_{j_1} + \alpha_2 B_{j_2} + \ldots \alpha_k B_{j_k} = \mathbf{0},$$

onde A_{j_i} e B_{j_i} representam a coluna j_i de A e de B, respetivamente. Ora, como $B = EA$ para alguma matriz elementar E, tem-se

$$[B_{j_1} B_{j_2} \ldots B_{j_k}] = E[A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_k}],$$

onde $[A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_k}]$ representa a matriz cuja coluna i é a coluna A_{j_i} de A e $[B_{j_1} B_{j_2} \ldots B_{j_k}]$ é a matriz construída de modo análogo a partir da matriz B. Por conseguinte, e tendo em conta que E é invertível, segue que

$$\alpha_1 A_{j_1} + \alpha_2 A_{j_2} + \ldots \alpha_k A_{j_k} = 0$$

se e só se

$$[A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_k}] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

se e só se

$$E[A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_k}] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

se e só se

$$[B_{j_1} B_{j_2} \ldots B_{j_k}] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

se e só se

$$\alpha_1 B_{j_1} + \alpha_2 B_{j_2} + \ldots \alpha_k B_{j_k} = 0.$$

Do que acabámos de provar segue então que o número máximo de colunas de A linearmente independentes é igual ao número máximo de colunas de B linearmente independentes e, por conseguinte, $car_c(A) = car_c(B)$. □

Exemplo 3.6.4. *Sejam*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz B é equivalente por linhas à matriz A, uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2 \to L_2 - 2L_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

e tem-se $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$, $car_l(A) = car_l(B)$ e, embora $\mathcal{C}(A) \neq \mathcal{C}(B)$ (pois $(1,2) \in \mathcal{C}(A)$, mas $(1,2) \notin \mathcal{C}(B)$), também temos $car_c(A) = car_c(B)$.

Como vamos verificar nos resultados seguintes, a noção de caracteristica linha e de caracaterística coluna estão relacionadas com a noção de característica de uma matriz.

Proposição 3.6.5. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Se $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ é uma matriz em forma de escada, então a sua característica linha e a sua característica coluna são iguais e coincidem com a característica de A, isto é,*

$$car_l(A) = car_c(A) = car(A).$$

Demonstração: Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ uma matriz em escada. Então temos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & a_{1j_1} & \dots & a_{1j_2} & \dots & a_{1j_3} & \dots & a_{1j_m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{2j_2} & \dots & a_{2j_3} & \dots & a_{2j_m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{3j_3} & \dots & a_{3j_m} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{rj_r} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

onde:

- para todo $i \in \{1, \dots, r\}$, $a_{ij_i} \neq 0$,
- para todo $r < i \leq n$, a linha i é nula,
- para todo $j \in \{1, \dots, n\} \setminus (\{j_1, j_2, \dots, j_r\} \cup \{j_{r_{r+1}}, \dots, n\})$, a coluna j é nula.

Pretendemos mostrar que $car(A) = car_l(A) = car_c(A)$. Para tal, começamos por observar que $car(A) = r$, uma vez que A é uma matriz em escada com r linhas não nulas.

Como vamos verificar de seguida, também temos $car_l(A) = r$. De facto, se representarmos por l_i o vetor de $\mathbb{K}^n$ que representa a linha i de A, temos

$$\mathcal{L}(A) =< l_1, l_2, \dots, l_r, \dots, l_m >=< l_1, l_2, l_3, \dots, l_r >,$$

uma vez que que, que para todo $i > r$, $l_i = 0_{\mathbb{K}^n}$. Por outro lado, é simples verificar que os vetores l_1, l_2, l_3, ..., l_r são linearmente independentes, pois, para todo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$,

$$\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 + \alpha_3 l_3 \dots + \alpha_r l_r = 0_{\mathbb{K}^n}$$

se e só se

$$\begin{array}{rlllllll} & \alpha_1(0, & \dots, & a_{1j_1}, & \dots, & a_{1j_2}, & \dots, & a_{1j_3}, & \dots, & a_{1j_m}, & \dots, & a_{1n}) \\ + & \alpha_2(0, & \dots, & 0, & \dots, & a_{2j_2}, & \dots, & a_{2j_3}, & \dots, & a_{2j_m}, & \dots, & a_{2n}) \\ + & \alpha_3(0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & a_{3j_3}, & \dots, & a_{3j_m}, & \dots, & a_{3n}) \\ + & \quad\dots \\ + & \alpha_r(0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & a_{rj_r}, & \dots, & a_{rn}) \\ = & \quad(0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0) \end{array}$$

se e só se

$$\begin{array}{rl} & (0,\ldots,\alpha_1 a_{1j_1},\ldots,\sum_{i=1}^{2}\alpha_i a_{ij_2},\ldots,\sum_{i=1}^{3}\alpha_i a_{ij_3},\ldots,\sum_{i=1}^{r}\alpha_i a_{ij_r},\ldots,\sum_{i=1}^{r}\alpha_i a_{ij_n}) \\ = & (0,\ldots,0,\ldots,0,\ldots,0,\ldots,0,\ldots,0) \end{array}$$

se e só se

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_r = 0.$$

Logo $(l_1, l_2, l_3, \ldots, l_r)$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$ e, por conseguinte, $dim\,\mathcal{L}(A) = r$, isto é, $car_l(A) = r$. Assim, $car_l(A) = car(A)$.

Facilmente também provamos que $car_c(A) = r$. Com efeito, se representarmos por c_j o vetor de $\mathbb{K}^m$ que representa a coluna j da matriz A, é imediato que

$$\mathcal{C}(A) =< c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n >=< c_{j_1}, c_{j_2}, c_{j_3}, \ldots, c_{j_r}, c_{j_{r+1}}, \ldots, c_n >,$$

uma vez que, para todo $j \in \{1,\ldots,n\} \setminus (\{j_1, j_2, j_3, \ldots, j_r\} \cup \{j_{r_{r+1}}, \ldots, n\})$, $c_j = 0_{\mathbb{K}^m}$. Além disso, verifica-se que, para todo $k \geq r+1$, c_k é combinação linear de $c_{j_1}, c_{j_2}, c_{j_3}, \ldots, c_{j_r}$, ou seja, existem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_r \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 c_{j_1} + \alpha_2 c_{j_2} + \alpha_3 c_{j_3} + \ldots + \alpha_r c_{j_r} = c_k.$$

De facto, se representarmos por A' a matriz que tem as colunas $j_1, j_2, j_3, \ldots, j_r$ de A e por A_k a matriz coluna com a coluna k de A, i.e.,

$$A' = \begin{bmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & a_{1j_3} & a_{1j_r} \\ 0 & a_{2j_2} & a_{2j_3} & a_{2j_r} \\ 0 & 0 & a_{3j_3} & a_{3j_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{rj_r} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad A_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ a_{3k} \\ \vdots \\ a_{rk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

c_k é combinação linear de $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_r}$ se e só se o sistema

$$A' \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} = A_k$$

é possivel. Ora, para todo $i \in \{1,\ldots,r\}$, $a_{ij_i} \neq 0$, pelo que $car(A') = r = car([A'|A_k])$ e, portanto, o sistema anterior é possivel.
Então como, para todo $k \geq r+1$, c_k é combinação linear de $c_{j_1}, c_{j_2}, c_{j_3}, \ldots, c_{j_r}$, temos

$$\mathcal{C}(A) =< c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_r}, c_{j_{r+1}}, \ldots, c_n >=< c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_r} > .$$

Por último, e de forma semelhante ao que foi feito no caso das linhas, prova-se que os vetores $c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_r}$ são linearmente independentes. Logo $(c_{j_1}, c_{j_2}, \ldots, c_{j_r})$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$, pelo que $dim\, \mathcal{C}(A) = r$. Assim, $car_c(A) = car(A)$. □

O resultado anterior pode ser generalizado para qualquer matriz.

Proposição 3.6.6. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, a sua característica linha e a sua característica coluna são iguais e coincidem com a característica de A, isto é,*

$$car_l(A) = car_c(A) = car(A).$$

Demoñstração: Por definição de característica de uma matriz, tem-se $car(A) = car(U)$ onde U é uma matriz em escada obtida de A por meio de transformações elementares sobre linhas. Por outro lado, pela Proposição 3.6.5, tem-se $car(U) = car_l(U)$. Finalmente, da Proposição 3.6.2 segue que $car_l(A) = car_l(U)$. Logo $car(A) = car_l(A)$.
De forma simples também provamos que $car_c(A) = car(A)$. Com efeito, pela Proposição 3.6.5 sabemos que $car_c(U) = car(U)$ e pela Proposição 3.6.3 tem-se $car_c(A) = car_c(U)$. Logo, como $car(A) = car(U)$, temos $car_c(A) = car(A)$. □

Proposição 3.6.7. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Para qualquer matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, tem-se*

$$car(A) = car(A^T).$$

Demonstração: O resultado segue de imediato, uma vez que

$$car(A) = car_l(A) = car_c(A) = car_l(A^T) = car(A^T).\square$$