UNIVERSIDADE DO MINHO

1^o **Teste** **ALGA—LCC** Teste A

Nome N^o Data- 25/11/2016

Nas perguntas de escolha múltipla e verdadeira ou falsa, cada resposta certa vale 0.5 valor e cada resposta errada vale $-0,1$.

1. Se $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, então $(A+B)^T$ é igual a:
   (a) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -\frac{5}{3} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ \frac{5}{3} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -3 & -\frac{5}{3} \\ 2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$(✓) (d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & \frac{7}{5} \end{bmatrix}$

2. Qual é a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores
   $(1,1,2,1)$, $(1,-1,2,1)$, $(3,1,6,1)$, $(7,-1,14,-1)$
   (a) 1 (b) 2 (c) 3(✓) (d) 4

3. Considere matrizes $n \times n$, A e B, em que A é simétrica e invertível. Então
   $$\left[\left(A^{-1}\right)^T \left(AB + A^T + O_{n\times n}\right) A\right] - A =$$
   (a) B (b) BA(✓) (c) A (d) AB

4. Se $A = [a_{ij}]_{2\times 4}$ é definida por $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j+1}(2i-j), & \text{se } i=1 \\ 1, & \text{se } i=2 \end{cases}$, $j = 1,2,3,4$, então:
   (a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$(✓) (b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$
   (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

5. Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) A entrada $(3,3)$ de $(-A)(2B)$ é
   (a) 7 (b) 4 (c) -11 (d) 6(✓).
   (b) A é uma matriz:
   (a) diagonal (b) triangular superior (c) triangular inferior(✓) (d) escalar.
   (c) A inversa de B é
   (a) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$(✓) (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -1 & \frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{8}{3} & 3 \\ \frac{2}{3} & -1 & -3 \end{bmatrix}$.

6. Qual dos seguintes conjuntos é um subespaco vectorial?
   (a) $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1-x\}$.
   (b) $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x+y+1\}$.
   (c) $S_3 = \{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : d = 2a \wedge b - c = 0\}$(✓)
   (d) $S_4 = \{a + bx \in P_2[x] : b = 2a+3\}$.

7. Considere o sistema de equações $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$.

(a) A matriz ampliada do sistema é:

$(a)\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$ $\quad$ $(b)\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right]$

$(c)\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$ $\quad$ $(d)\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right]$ (✓)

(b) A solução geral do sistema é:

(i) $S = \{(\alpha,\ -1-\alpha,\ \beta,\ 0) : \beta, \alpha \in\ R\}$ (ii) $S = \{(\beta-\alpha, 2-\beta,\ \beta,\ \alpha) : \beta, \alpha \in\ R\}$ (✓)

(iii) $S = \{(2-3\alpha,\ -1-\alpha,\ \alpha,\ \alpha,) : \alpha \in\ R\}$ (iv) $S = \{(2,\ -1-\alpha,\ \alpha,\ 0) : \alpha \in\ R\}$

8. Sejam W_1 e W_2 subespaços do espaço vetorial V de dimensão finita, e $dimW_1 = 9$, $dimW_2 = 5$ e $dim(W_1 + W_2) = 13$. Então,

(a) $W_1 \cap W_2$ não é necessariamente um subspaço de V. V F(✓)

(b) Existe um vetor não nulo v tal que $W_1 \cap W_2$ é gerado por v. V(✓) F

(c) Existem dois vetores u_1 e $u_2 \in W_1 \cap W_2$ tais que u_1 e u_2 fomam uma base de $W_1 \cap W_2$. V F(✓)

(d) $5 \leq dim(W_1 \cap W_2) \leq 7$. V F(✓)

9. Em $\mathbb{R}^3$, considere o seguinte conjunto:

$$S = \{(0,1,4), (3,5,1), (1,2,1)\}.$$

(a) S gera $\mathbb{R}^3$. V(✓) F

(b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4y - 7x\}$. V F(✓)

(c) O terceiro vector de S é combinação linear dos restantes. V F(✓)

(d) $(2,4,3) \in < S >$ V(✓) F

10. Considere um sistema de equações lineares $Ax = b$ de coeficientes reais e nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4.

(a) Se $Ax = b$ é impossível, o sistema $Ax = 0$ também é impossível. V F(✓)

(b) Se $Ax = b$ tem solução única, também o sistema $Ax = 0$ tem solução única.

V(✓) F

(c) Se A uma matriz do tipo 2×4, o sistema $Ax = b$ é indeterminado. V F(✓)

(d) Se $\alpha \in \mathbb{R}^4$ é solução de $Ax = b$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então $\lambda\alpha$ é solução de $Ax = \lambda b$.

V(✓) F

11. Sejam $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0\}$ e $T = \{(2a, b, a-3b) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

(a) $(7,-1,13) \in T$ V F(✓)

(b) Se $u, v \in S$ então $u + 4v \in S$. V(✓) F

(c) S é um subespaço do espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. V F(✓)

(d) Qualquer elemento de T é combinação linear dos vectores $(-4,0,-2)$ e $(0,1,-3)$.

V(✓) F

12. Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ tal que $\dim V = n$ e $v_1, ..., v_n, v_{n+1}$ elementos de V tais que $V = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$. Seja $\alpha \in \mathbb{K}$.

(a) $(v_1, v_2..., v_n)$ é uma base de V. V(✓) F

(b) Os vectores $v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}$ são linearmente dependentes. V(✓) F

(c) Qualquer conjunto de vetores de V que contenha o vetor nulo é linearmente independentes.

V F(✓)

(d) V contém dois subespaços disjuntos.

V F(✓)

A questão que se segue deverá ser resolvida integralmente e devidamente justificada.

(*5 valores*) Sejam U o subespaço do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores

$$u_1 = (0,0,1,1),\ u_2 = (0,1,1,1),\ u_3 = (1,1,1,2) \text{ e } u_4 = (-1,0,1,0)$$

e V o subconjunto

$$V = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\ :\ a-b = b-c = 2a-d = 0\} \text{ de } \mathbb{R}^4.$$

(a) Determine uma base e a dimensão de U.

(b) Verifique que $V =< (1,1,1,2) >$.

(c) Justifique se $U + V$ é soma direta.

(d) Determine o valor de α de modo que o vector $(1,-1,0,\alpha)$ pertença a U.