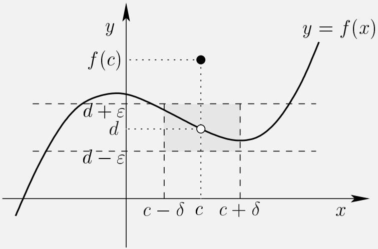
Limites

Definição

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função,* $c \in X'$ e $d \in \mathbb{R}$*. Diz-se que o* **limite de f quando x tende para c** *é* $\boldsymbol{d}$ *se*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X \qquad 0 < |x - c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Escreve-se então $\lim_{x \to c} f(x) = d$.



Nota

- *Note-se que a definição de limite permite calcular* $\lim_{x\to c} f(x)$*, sendo* $c \in X' \setminus X$*, isto é,* c *pode não pertencer ao domínio da função;*
- *Se* $c \in X \cap X'$*, o* $\lim_{x\to c} f(x)$ *não tem de ser* $f(c)$*. Aliás, o valor que a função toma em* c *é irrelevante no cálculo do limite, visto que consideramos os pontos do domínio da função, próximos mas diferentes de* c*;*

Proposição

Sejam $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções,* $c \in X'$, *e suponhamos que existem* $\lim_{x \to c} f(x)$ *e* $\lim_{x \to c} g(x)$. *Então:*

- *existe* $\lim_{x \to c} (f+g)(x)$ *e é igual a* $\lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$;
- *existe* $\lim_{x \to c} (fg)(x)$ *e é igual a* $\lim_{x \to c} f(x) \lim_{x \to c} g(x)$;
- *se* $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$ *então existe* $\lim_{x \to c} \frac{f}{g}(x)$ *e é igual a* $\dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}$.

O conceito de limite pode ser generalizado, permitindo-se que o $\lim_{x \to c} f(x)$ possa ser $+\infty$ ou $-\infty$.

Definição

Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função e* $c \in X'$. *Diz-se que:*

- *o* **limite de f quando** $\boldsymbol{x}$ **tende para** $\boldsymbol{c}$ *é* $+\infty$ *se*

  $$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \setminus \{c\} \qquad |x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$$

  e escreve-se $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$;

- *o* **limite de f quando** $\boldsymbol{x}$ **tende para** $\boldsymbol{c}$ *é* $-\infty$ *se*

  $$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, x \in X \setminus \{c\} \qquad |x - c| < \delta \Longrightarrow f(x) < M$$

  e escreve-se $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$.

Podemos também pensar no que acontece se o domínio X de uma função f for ilimitado, à direita ou à esquerda, e fizermos $x \in X$ tender para $+\infty$ ou $-\infty$.

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função.

Se X é um conjunto não majorado, diz-se que:

- o **limite de f quando x tende para** $+\infty$ é $\boldsymbol{d}$ e escreve-se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = d$ se
$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in\ X \qquad x > N \Longrightarrow |f(x) - d| < \varepsilon;$$
- o **limite de f quando x tende para** $+\infty$ é $+\infty$ e escreve-se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se
$$\forall\, M \in \mathbb{R}\ \exists\, N \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in\ X \qquad x > N \Longrightarrow f(x) > M.$$

Definir **limite de f quando x tende para** $+\infty$ é $-\infty$, escrevendo-se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Se X é um conjunto não minorado, diz-se que

- o **limite de f quando x tende para $-\infty$** é $\boldsymbol{d}$ e escreve-se $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = d$ se

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in\ X \quad x < N \Longrightarrow |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Definir **limite de f quando x tende para $-\infty$** é $+\infty$ ou é $-\infty$, escrevendo-se, respetivamente,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Definição

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função.*

Se $c \in X'_+$, *diz-se que o* **limite de f quando x tende para c por valores superiores a c** *é* $\boldsymbol{d}$ *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 \qquad x \in \,]c, c+\delta[\, \cap X \Longrightarrow |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Escreve-se $\lim_{x \to c^+} f(x) = d$ *e diz-se que o* **limite à direita, de f, em c**, *é* d.

Definição

Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função. Se* $c \in X'_-$*, diz-se que o* **limite de f quando x tende para c por valores inferiores a c** *é* d *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \qquad x \in \,]c - \delta, c[\, \cap X \Longrightarrow |f(x) - d| < \varepsilon.$$

Escreve-se $\lim_{x \to c^-} f(x) = d$ *e diz-se que o* **limite à esquerda, de f, em c**, *é* d.

Nota

De forma inteiramente análoga se definem $\lim_{x \to c^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to c^-} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty$.

Proposição

Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função e* $c \in X'_+ \cap X'_-$. *Então*

$$\lim_{x \to c} f(x) = d \Longleftrightarrow \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = d.$$

Proposição

Sejam $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $c \in X'$ *e suponhamos que*

- $\forall\, x \in X \qquad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$;
- $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to c} h(x)$ *existem e são iguais a* $a \in \mathbb{R}$, $a = +\infty$ *ou* $a = -\infty$.

Então existe $\lim\limits_{x \to c} g(x) = a$.

Continuidade

Definição

Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *diz-se* **contínua em** $\boldsymbol{x_0} \in X$ *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in\; X \qquad |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

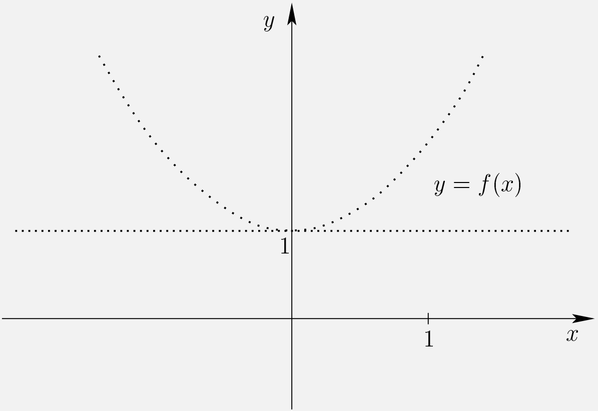
A função f *diz-se* **contínua** *se for contínua em todos os pontos do domínio.*

Proposição

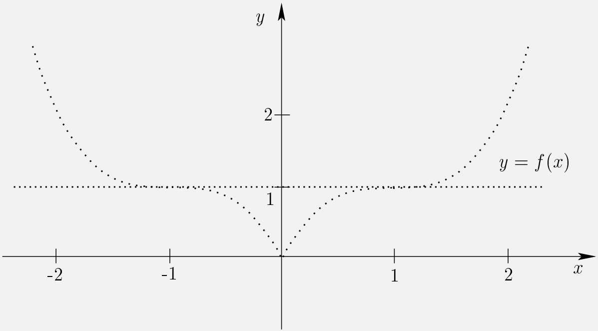
Sejam $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função e* $x_0 \in X$*. A função* f *é contínua em* x_0 *se e só se ocorre uma das situações seguintes:*

- x_0 *é ponto isolado de* X
- x_0 *é ponto de acumulação de* X *e* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

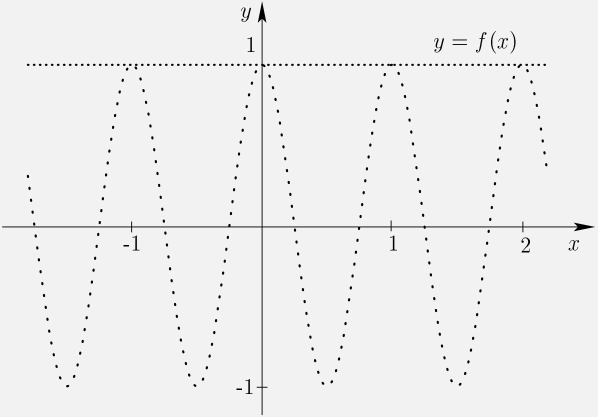
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$



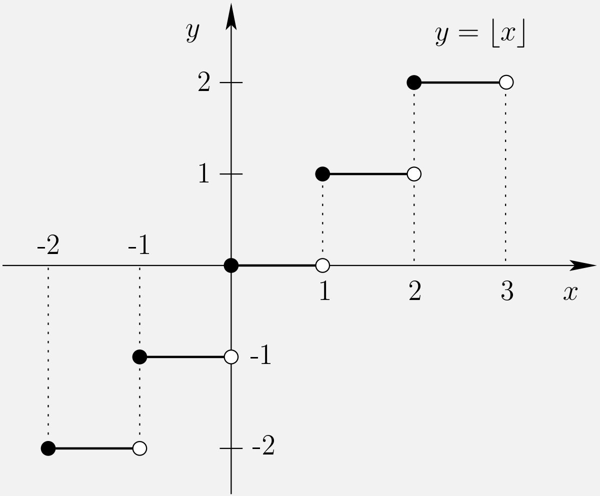
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1+(x-1)^3 & \text{se } x \in \mathbb{Q}_0^+ \\ 1-(x+1)^3 & \text{se } x \in \mathbb{Q}^- \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



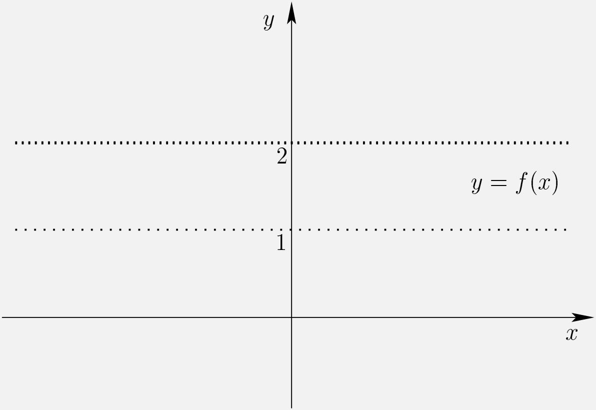
$$
\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & \begin{cases} \cos(2\pi x) & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}
\end{array}
$$



$$\begin{array}{rccc} \lfloor \cdot \rfloor : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$



$$
\begin{array}{rccl}
f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 2 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}
\end{array}
$$



Proposição

Dadas $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções contínuas em* $x_0 \in X$*,*

- $f + g$ *e* fg *são funções contínuas em* x_0*;*
- *se* $g(x_0) \neq 0$ *então* $\dfrac{f}{g}$ *é contínua em* x_0*.*

Proposição

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ *uma função contínua em* $x_0 \in X$*,* $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua em* $f(x_0)$*. Então* $g \circ f$ *é contínua em* x_0*.*

Corolário

Sejam $f : X \longrightarrow Y$ *e* $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ *funções contínuas. Então* $g \circ f$ *é contínua.*

Teoremas sobre continuidade

Apresentamos alguns teoremas que realçam propriedades importantes das funções contínuas, com especial relevo para as que estão definidas em intervalos.

Teorema (de Weierstrass)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então*

$$\exists\, c,\, d \in [a, b]\ \forall\, x \in [a, b] \qquad f(c) \leq f(x) \leq f(d).$$

Teorema (de Bolzano-Cauchy)

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então* $f([a, b])$ *contém o intervalo fechado de extremos* $f(a)$ *e* $f(b)$.

Corolário

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então $f(I)$ é um intervalo.

Corolário

Seja $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e suponhamos que $f(a)f(b) < 0$. Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema

Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e injetiva. Então f é estritamente monótona.

Teorema

Sejam I e J intervalos de $\mathbb{R}$ e $f : I \longrightarrow J$ uma função bijetiva e contínua. Então f^{-1} é contínua.