# UNIVERSIDADE DO MINHO

**$2^o$ Teste** **AL—LCC**

---

Nome N$^o$ Data- 09/01/2018

---

Nas perguntas de escolha múltipla e verdadeira ou falsa, cada resposta certa vale 0.5 valor e cada resposta errada vale $-0,1$.

---

1. O vetor $\begin{bmatrix} -\frac{9}{2} \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ é vetor próprio de $\begin{bmatrix} 8 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$, associado ao valor próprio:

   (a) 1 (b) 4(✓) (c) $-4$ (d) 6

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \beta \end{bmatrix}$. $detA =$

   (a) $60 + 20\alpha\beta$ (b) $20\alpha + 15\beta$ (c)(✓) $12\beta + 5\alpha\beta$ (d) $60\alpha - 3\alpha\beta$

3. Seja $T : R^3 \to R^2$ a transformação linear definida por

   $$T(x, y, z) = (x + 2y + z, x + 3y + 2z), (x, y, z) \in R^3$$

   e as sehuintes afirmações

   (i) T é injetiva

   (ii) T não é sobrejetiva

   (iii) T não é injetiva e $(1, -1, 1) \in Nuc(T)$

   (iv) T é sobrejetiva e $(1, -1, 1) \in Nuc(T)$

   Qual é a lista completa de afirmações verdadeiras?

   (a) i (b) i e ii (c) ii e iii (d)(✓) iii e iv.

4. Seja $A$ uma matriz $2 \times 2$, traço$(A) = 6$ e $det(A) = 5$. Quais são valores prórprios de $A$?

   (a) $2, 3$ (b) $-2, -3$ (c)(✓) $1, 5$ (d) $-1, -5$.

5. Seja $A$ uma matriz $3 \times 3$ com 0 o valor próprio de multiplicidade algébrica 3. Qual é o polinómio caraterística de $A$?

   (a) $(\lambda - 1)^3$ (b)(✓) $\lambda^3$ (c) $(\lambda - 3)$ (d) nada pode se concluir.

6. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 2 \end{bmatrix}$. Qual é o valor de $k$ para que 1 seja um valor próprio de $A$?

   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d)(✓) 0.

7. (a) Seja $A$ uma matriz de 3 por 3 com valores próprios $\lambda = 1, 2, 3$, então $A$ é invertivél. V(✓) F

   (b) Seja $A$ uma matriz de 3 por 3 com valores próprios $\lambda = 1, 2, 3$, então $A$ é diagonalizavél. V(✓) F

   (c) Seja $A$ uma matriz de 3 por 3 com valores próprios $\lambda = 1, 2, 2$, então $A$ não é diagonalizavél. V F(✓)

(d) Seja $A$ uma matriz diagonalizavél, então $A^3$ também é diagonalizavél. V(✓) F

8. (a) Seja $Ax = \lambda x$ para alguns $\lambda$, então $x$ é um vetor próprio de $A$.
   V F(✓, x não pode ser vetor nulo)

   (b) O valor próprio de $A$ está no diagonal principal de $A$. V F(✓)

   (c) Sejam $v_1$ e $v_2$ vetores prórios associados aos valores próprios $\lambda_1$ e $\lambda_2$ de uma matriz $A$. Então, se $v_1$ e $v_2$ são linearmente independentes, $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são diferentes.
   V F(✓)

   (d) Se $v_1$ e $v_2$ são 2 vetores prórios de $A$ associados ao 2 valores próprios $\lambda_1$ e $\lambda_2$ diferentes, então $v_1$ e $v_2$ são linearmente independentes.
   V(✓) F

9. (a) Seja $A$ semelhante a $B$. Então $det(A) = det(B)$. V(✓) F

   (b) Seja $A$ semelhante a $B$. Então $A$ e $B$ tem mesmos valores próprios. V(✓) F

   (c) Se $det(A) = 0$, então há duas linhas ou colunas são iguais ou uma linha ou uma coluna é zero.
   V F(✓)

   (d) Seja $A$ semelhante a $B$. Então $tr(A) = tr(B)$. V (✓) F

10. (a) A transformação $f: R^n \to R^m$ é linear se e só se $f(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1f(v_1) + c_2f(v_2)$ para todos $v_1$ e $v_2 \in R^n$ e $c_1$ e $c_2 \in R$.
    V(✓) F

    (b) Se $A$ é uma matriz de $3 \times 2$, então a transformação linear $A$ não pode ser injetiva. V F(✓)

    (c) O núcleo de $A$ é o conjunto de solução de $Ax = 0$. V(✓) F

    (d) Se existir um $b$ tal que $Ax = b$ é impossével, então a transformação linear $A$ não pode ser injetiva.
    V(✓) F

11. Seja $f : U \to V$ uma aplicação linear de $U$ em $V$, e $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$ uma base de $U$. Então

    (a) O conjunto $f(B) = \{f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)\}$ gera $V$. V F(✓)

    (b) O conjunto $f(B) = \{f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)\}$ gera $U$ V F(✓)

    (c) O conjunto $f(B) = \{f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)\}$ é uma base de $V$. V F(✓)

    (d) O conjunto $f(B) = \{f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n)\}$ é linearmente independente. V F(✓)

---

*A questão que se segue deverá ser resolvida integralmente e devidamente justificada.*

1. (2 valores) Seja $A$ uma matriz $n \times n$ e $x$ um vetor próprio de $A$ associado a um valor próprio $\lambda$. Será que $x$ tembém um vetor próprio de $A^2 + 3A$? Se for, qual é o valor próprio de $A^2 + 3A$? Justifique.

Res. $Ax = \lambda x, x \neq 0$, $(A^2 + 3A)x = A^2x + 3Ax = AAx + 3Ax = \lambda Ax + 3\lambda x = (\lambda^2 x + 3\lambda x) = (\lambda^2 + 3\lambda)x$, por definição, $x$ é um vetor próprio de $A^2 + 3A$, e $(\lambda^2 + 3\lambda)$ o valor próprio de $A^2 + 3A$.

2. (5 valores) Sejam $U, V$ espaçoss vectoriais reais, $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ uma base de $U$, $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ uma base de $V$ e $f : U \to V$ a transformação linear tal que

$$M(f; B, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Justifica se $f$ é injectiva e se $f$ é sobrejectiva.
2. Calcule $f(-2v_1 + v_2)$.
3. Determine $Nuc(f)$. Mostre que $\{-2v_1 + v_2, v_3\}$ é uma base de $Nuc(f)$.

Res. (1). $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ é uma base de $U$, então $dimU = 4$, $B_1 = (u_1, u_2, u_3)$ é uma base de $V$, $dimV = 3$.

$f$ é sobrejetiva se $dimImf = dimV = 3$. Como dim Im f=carf, vamos, então, calcular a caraterística de $M(f; B, B_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $carM(f; B, B_1) = 2 \neq 3$, então $f$ não é sobrejetiva.

Como $dimU = dimNuc(f) + dimImf$, ou seja $4 = dimNuc(f) + 2$, então $dimNuc(f) = 2$, logo $f$ não é injetiva.

(2). $f(v_1) = u_1 + u_2, f(v_2) = 2u_1 + 2u_2$. Então $f(-2v_1 + v_2) = -2f(v_1) + f(v_2) = -2(u_1 + u_2) + 2u_1 + 2u_2 = 0_v$.

(3). por (2), o vetor $-2v_1 + v_2 \in Nuc(f)$. como $f(v_3) = 0u_1 + 0u_2 + 0u_3$, então $v_3$ também em $Nuc(f)$.

Como $dimNuc(f) = 2$, então vamos verifivar se conjunto $\{2v_1 + v_2, v_3\}$ é linearmente independente,

$\alpha(2v_1 + v_2) + \beta v_3 = 0_u \Leftrightarrow 2\alpha v_1 + 2\alpha v_2 + \beta v_3 = 0_u$, como $(v_1, v_2, v_3)$ linearmente indepedentes, então $\alpha = 0, \beta = 0$.

como $dimNuc(f) = 2$ e $\{-2v_1 + v_2, v_3\}$ é um conjunto de vectores de Nuc(f) linearmente independente, concluimos que $\{-2v_1 + v_2, v_3\}$ é uma base de $Nuc(f)$ e $Nuc(f) =< -2v_1 + v_2, v_3 >$.

outro método, seja $x$ um vetor qual de $U$, então $x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4$.
$Nuc(f) = \{x \in U : f(x) = 0_v\} = \{x \in U : f(\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4) = 0_v\}$
$= \{x \in U : \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) + \gamma f(v_3) + \delta f(v_4) = 0_v\}$
$= \{x \in U : \alpha(u_1 + u_2) + \beta(2u_1 + 2u_2) + \gamma(0) + \delta(u_1 - u_2 + u_3) = 0_v\}$
$= \{x \in U : (\alpha + 2\beta + \delta)u_1 + (\alpha + 2\beta - \delta)u_2 + \delta u_3 = 0_v\}$
$= \{x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 \in U : \alpha + 2\beta = 0, \delta = 0\}$
$= \{\beta(-2v_1 + v_2) + \gamma v_3, \beta, \delta \in R\}$
$=< -2v_1 + v_2, v_3 >$. Depois prove que $\{-2v_1 + v_2, v_3\}$ é linearmente independente, então forma uma base.

Também pode calcular o Nuc de M. Ou seja resolve $Mx = 0$, tem se $NucM =< (-2, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) >$, relativamente à base B, é $< -2v_1 + v_2, v_3 >$.