ÁLGEBRA LINEAR

Exercícios - Espaços Vectoriais

Lic. Ciências da Computação

1. Verifique que $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \widetilde{+}, \widetilde{\cdot})$ é um espaço vectorial real, onde $\widetilde{+} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ e $\widetilde{\cdot} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ são as aplicações definidas por

$$(x_1, x_2)\widetilde{+}(y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 - 3),$$
$$\alpha\widetilde{\cdot}(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha(x_2 - 3) + 3),$$

para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Prove que $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, algebrizado com as operações usuais de adição de matrizes e multiplicação de um real por uma matriz, é um espaço vectorial real.

3. Verifique se

   (a) $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0\}$ é um subespaço vectorial do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$.

   (b) $W_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ é um subespaço vectorial do espaço vectorial real $\mathbb{R}^2$.

   (c) $W_3 = \{(0, a, b, -1) : a, b \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vectorial do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$.

   (d) $W_4 = \{a + bi \in \mathbb{C} : a = 0\}$ é um subespaço vectorial do espaço vectorial complexo $\mathbb{C}$.

4. Considere os seguintes subespaços vectoriais do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$:

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\},$$
$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\},$$
$$V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0, z = 0\}.$$

   (a) Mostre que
      i. $V_2 = \{(b, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\}$.
      ii. $V_3 = \{(2a, a, 0) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$.

   (b) Diga, justificando, se:
      i. $(7, 1, -2) \in V_3 + V_2$;
      ii. $V_1 \subseteq V_2$, $V_2 \subseteq V_3$, $V_3 \subseteq V_2$;
      iii. $V_1 \cap V_3$, $V_2 + V_3$, $V_1 \cup V_2$, $V_2 \cup V_3$ são subespaços vectoriais do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$;
      iv. $\mathbb{R}^3$ é soma directa de V_1 e V_3;
      v. $\mathbb{R}^3$ é soma directa de V_2 e V_3.

5. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, os vectores

   $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, 1, -2)$, $u_1 = (-1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 0, 0)$, $u_3 = (1, 0, 1)$.

   Verifique se

(a) $(1,-4,5)$ é combinação linear de v_1, v_2.

(b) $(1,2,4)$ é combinação linear de v_1, v_2.

(c) $(3,0,2)$ é combinação linear de u_1, u_2, u_3.

(d) $(0,2,1)$ é combinação linear de u_1, u_2, u_3.

6. Determine os subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$ gerados por

(a) $\{(1,1,1)\}$

(b) $\{(0,0,0)\}$

(c) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

(d) $\{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3),(2,3,4)\}$

(e) $\{(1,2,3),(-2,-4,-6),(4,8,12)\}$

(f) $\{(1,2,3),(-2,-4,-6),(3,6,9\}$

7. Determine dois conjuntos distintos de geradores de cada um dos seguintes subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^4$:

(a) $\mathbb{R}^4$;

(b) $\{(a, c-a, c, 2c) \in \mathbb{R}^4 : a, c \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 : a+c=0, 2b+d+c=0\}$.

8. Considere o espaço vectorial complexo $\mathbb{C}^3$. Mostre que

(a) $\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{C}^3$.

(b) $\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1),(1,1,1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{C}^3$.

(c) $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ não é um conjunto gerador de $\mathbb{C}^3$.

9. Considere o espaço vectorial $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ e os seus vectores

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 8 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Escreva, se possível, C como combinação linear de A e B.

10. Determine o subespaço vectorial do espaço vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ gerado por

$$(a) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad (b) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \qquad (c) \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

11. Diga se são linearmente independentes os vectores que se apresentam a seguir:

    (a) $(0,1,1,0),(-1,0,1,1),(1,1,0,-1)$ no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$.

    (b) x^2+x, x^2+1, x, x^3 no espaço vectorial real $\mathbb{R}_3[x]$.

12. Verifique se os seguintes vectores do espaço vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ são linearmente independentes:

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$

    (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$

13. Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ tal que $\dim V = n$ e $v_1, ..., v_n, v_{n+1}$ elementos de V tais que $V = \langle v_1, v_2, ..., v_n \rangle$. Seja $\alpha \in \mathbb{K}$.

    Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes.

    (a) $(\ v_1, v_2..., v_n)$ é uma base de V.

    (b) Os vectores $v_1, v_2, ..., v_n, v_{n+1}$ são linearmente dependentes.

    (c) Os vectores $v_1, v_2, ..., \alpha v_i, ..., v_n$ são linearmente independentes.

    (d) Os vectores $v_1, v_2, ..., v_{i-1}, v_i + \alpha v_j, v_{i+1}, ..., v_n$ são linearmente independentes.

14. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$, os subespaços

    $$U = \{(a_1,a_2,a_3,a_4) \in \mathbb{R}^4 : a_1 - a_4 = 0, a_4 - a_3 = 0\}$$
    $$W_1 = \{(b_1,b_2,b_3,b_4) \in \mathbb{R}^4 : b_2 + 2b_3 = 0, b_1 + 2b_3 - b_4 = 0\}$$
    $$W_2 =< (1,1,1,0),(-1,1,0,1),(1,3,2,1),(-3,1,-1,2) >.$$

    (a) Diga, justificando, se $((1,1,1,1),(0,1,0,0),(1,0,0,1))$ é uma base de U.

    (b) Determine uma base de i. W_1. ii. W_2.

15. Determine uma base de $W \cap U$ e uma base de $W + U$ onde

    (a) $W =< (0,0,-1),(1,0,2) >$ e $U =< (0,1,1),(-1,3,2) >$ são subespaços do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$.

    (b) $W = \{x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 : x_1 + 2x_4 = 0\}$ e $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{C}^4 : x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$ são subespaços do espaço vectorial complexo $\mathbb{C}^4$.

16. Considere os seguintes vectores do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$:

    $$v_1 = (\alpha, 6, -1),\ v_2 = (1, \alpha, -1),\ v_3 = (2, \alpha, -3).$$

    (a) Determine os valores do parâmetro real α para os quais (v_1, v_2, v_3) é uma base de $\mathbb{R}^3$.

    (b) Para um dos valores de α determinados na alínea anterior, calcule as coordenadas do vector $v = (-1, 1.2)$ em relação à base (v_1, v_2, v_3).

17. Indique, se existir, uma base do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ da qual façam parte os vectores:

    (a) $(1,0,-1,2),(1,0,1,0)$.

    (b) $(0,1,1,-1),(0,1,0,2),(0,2,1,1)$.

    (c) $(1,-1,-1,2),(0,1,2,0),(1,0,1,-2)$.

18. Determine um suplementar de

   (a) $W = < (-1, 2, 1), (1, 1, 1) >$ relativamente a $\mathbb{R}^3$.

   (b) $U = < 3x^4 + x^2, 2x, -3x^4, x^2 + x >$ relativamente a $\mathbb{R}^4[x]$.

   (c) $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4 : 2a + b \text{ e } c = 0\}$ relativamente a $\mathbb{C}^4$.

19. Considere os seguintes subespaços vectoriais do espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$:

   $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$,

   $V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0, y - z = 0\}$,

   $V_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, 2y + z = 0\}$,

   $V_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$.

   (a) Diga, justificando, se é directa cada uma das seguintes somas de subespaços:

      i. $V_1 + V_3$.

      ii. $V_1 + V_2$.

      iii. $V_3 + V_4$.

   (b) Verifique que

      i. $\mathbb{R}^3$ é soma directa de V_2 e V_4.

      ii. $\mathbb{R}^3$ não é soma directa de V_1 e V_2.

20. Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, de dimensão finita e W, U subespaços de V. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações seguintes:

   (a) Se $\dim W \leq \dim U$, então $W \subseteq U$.

   (b) Se $\dim W = \dim U$, então $\dim(W + U) = \dim W + \dim U$.

   (c) Se $\dim U + \dim W = \dim V$, então V é soma directa de U e W.

   (d) Se $\dim(U + W) = \dim V$, então V é soma directa de U e W.

   (e) Se $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$, então V é soma directa de U e W.

   (f) Se V é soma directa de U e W, então $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$.

21. Considere, no espaço vectorial complexo $\mathbb{C}^4$, o subespaço

$$W = < (1, 0, 0, 2), (-1, 0, 1, 2), (0, i, 0, 0) > .$$

   (a) Mostre que, se U é um subespaço de $\mathbb{C}^4$ tal que $\dim U = 2$ e $U \cap W = < (0, 1, 0, 0) >$, então $U + W = \mathbb{C}^4$.

   (b) Dê exemplo de um subespaço U de $\mathbb{C}^4$ tal que $\dim U = 2$ e $U \cap W = < (0, 1, 0, 0) >$. Justifique.