Universidade do Minho | Lic. em Ciências da Computação
Departamento de Matemática e Aplicações

Análise

— Folha de exercícios 5 — 2018'19 —

1. Determine equações da recta normal e do plano tangente a cada uma das superfícies dadas, no ponto indicado:
   (a) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$, $(1, 1, 1)$;
   (b) $xyz^2 = 1$, $(1, 1, 1)$;
   (c) $z = x^2 + 3y^3 + \operatorname{sen}(xy)$, $(1, 0, 1)$;
   (d) $x^2 - 2y^2 + z^2 = 3$, $(-1, 1, 2)$;
   (e) $z = 4x^2$, $(1, 2, 4)$;
   (f) $\mathrm{e}^{\,xyz} = 1$, $(1, 1, 0)$.
2. Determine a equação do plano tangente à superfície $x^2 + y^2 - xyz = 7$ no ponto $(2, 3, 1)$ por dois processos diferentes:
   (a) Considerando a superfície como a superfície de nível de uma função de 3 variáveis, $f(x, y, z)$;
   (b) Considerando a superfície como o gráfico de uma função de 2 variáveis, $g(x, y)$.
3. O potencial eléctrico V em (x, y, z), de um dado objecto 3D, é dado por $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. Determine a taxa de variação de V em $P = (2, -1, 3)$ na direcção e sentido de P para a origem do sistema de coordenadas. Indique ainda a direcção e sentido que produz a taxa máxima de variação de V em P. Qual o valor dessa taxa?
4. A temperatura T num dado ponto (x, y) de uma placa plana é dada por $T(x, y) = x^2\mathrm{e}^{\,-y}$. Partindo do ponto $(2, 1)$, em que direcção e sentido a temperatura diminui mais rapidamente? Qual a taxa de variação instantânea partindo de $(2, 1)$ e seguindo a direcção e sentido obtidos?
5. Considere a superfície de nível $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + xyz = 12\}$.
   (a) Determine equações da recta normal e do plano tangente a $\mathcal{S}$ no ponto $(2, 2, 1)$;
   (b) Verifique se a recta encontrada na alínea anterior intersecta o eixo Oz.
6. Sejam $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x - y^2$ e $A = (-1, 0)$.
   (a) Determine e represente graficamente a curva de nível de f que passa em A;
   (b) Calcule o vector $\nabla f(A)$. Coloque no esboço efectuado na alínea anterior, um representante de $\nabla f(A)$ com origem em A;
   (c) Determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f em $(A, f(A))$.
7. Determine os pontos da curva de equação $x(x^2 + y^2) + 9x^2 + y^2 = 0$ cuja recta tangente é horizontal ou vertical.
8. Determine os pontos da elipse $2x^2 + y^2 = 1$ cuja recta tangente passa pelo ponto $(1, 1)$.
9. Determine os pontos da curva de equação $x^2 + y^2 - 2x + xy = 0$ cuja recta normal é paralela à recta $y = x$.
10. Determine os planos tangentes à esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ que contêm a recta de equação $\begin{cases} x = 5 - z \\ y = -5 + 2z \end{cases}$.
11. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2y^3$. Indique, para o ponto $(-1, 2)$, um vector:
    (a) com a direcção e sentido de maior crescimento de f;
    (b) com a direcção e sentido de maior decrescimento de f;
    (c) com a direcção e sentido em que a variação instantânea de f é nula.