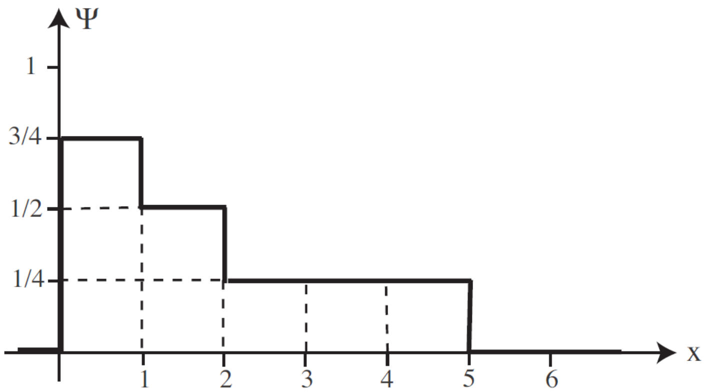
Problemas 5

Introdução à Física Quântica (continuação)

(Os problemas assinalados com *Griffiths* são retirados do livro *Revolutions in Twentieth Century Physics*, David J. Griffiths, Cambridge University Press (2013).

Função de onda e probabilidade

1. (Griffiths, Cap. 1, P11) Considere a função de onda de uma partícula apresentada na figura seguinte (x é uma distância expressa em unidades arbitrárias).



a) Qual é a probabilidade de, numa medida, encontrar a partícula entre x = 1 e x = 2?

b) Qual é a probabilidade de, numa medida, encontrar a partícula entre x = 0 e x = 5 ?

[Sol.: a) 1/4 ; b) 1]

2. Considere um eletrão descrito pela função de onda

$$\begin{cases} \psi(x) = \dfrac{1}{\pi}, & \text{se } x = 0 \\ \psi(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

a) Determine a densidade de probabilidade de encontrar o eletrão no ponto x = 0.

b) Determine a densidade de probabilidade de encontrar o eletrão no ponto x = 5.

[Sol.: a) $1/\pi^2$; b) 0.00372]

3. A função de onda de uma partícula numa caixa rígida (ou um poço de potencial infinito) a uma dimensão, com um tamanho *a* é:

$$\psi(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

em que *A* é uma constante de normalização.

a) Qual é o valor da constante de normalização *A*?

[Note que $\int \sin^2(kx)dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4k}\sin(2kx)$]

b) Qual é a densidade de probabilidade de encontrar a partícula na posição $x = a/2$, para cada *n*?

c) Use a relação de de Broglie e a aproximação clássica para determinar a expressão da energia cinética da partícula.

[Sol.: a) $A = \sqrt{\frac{2}{a}}$; b) $P = \frac{2}{a}\sin^2(\frac{n\pi}{2})$; c) $E_c = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$]

4. Uma partícula de energia *E* incide numa barreira de potencial de valor $U > E$. A probabilidade de a partícula atravessar esta barreira é dada por

$$P = e^{-2\alpha L}$$

em que *L* é a largura da barreira e

$$\alpha = \sqrt{\frac{2m(U-E)}{\hbar^2}}$$

Qual é a probabilidade de um eletrão de 0.5 eV de energia atravessar uma barreira de potencial de 3 eV e 1 nm de espessura?

[Sol.: 8.7×10^{-8}]

Relações de incerteza

5. *(Griffiths, Cap. 3, P12)* Um eletrão (massa de 9×10^{-31} kg) está localizado numa região de 1 mm de largura. Qual é a incerteza (mínima) da sua velocidade?

[Sol.: 0.0579 m/s]

6. *(Griffiths, Cap. 3, P13)* Sabe-se que uma bola de beisebol, de massa 0.5 kg, está no interior de uma caixa de sapatos, fechada, com 30 cm de comprimento.

a) Qual é a incerteza (mínima) do seu momento linear?

b) Qual é a incerteza (mínima) da sua velocidade?

c) A esta velocidade quanto tempo demoraria a bola a ir de uma extremidade à outra da caixa?

d) Tendo em consideração este resultado, discuta qual é a relevância do princípio de incerteza para objetos macroscópicos.

[Sol.: a) 1.76×10^{-34} kg m/s; b) 3.52×10^{-34} m/s; c) 8.53×10^{32} s; d) irrelevante]

7. Para uma partícula livre, o princípio de incerteza pode ser escrito como

$$(\Delta\lambda)(\Delta x) = \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

Se $\Delta\lambda/\lambda = 10^{-7}$ para um fotão, qual o correspondente valor de Δx para:

a) $\lambda = 5.00\times10^{-4}$ Å (raios gama)

b) $\lambda = 5.00$ Å (raios x)

c) $\lambda = 5000$ Å (luz visível)

[Sol.: a) 397.9 Å; b) 3.979×10^{6} Å; c) 3.979×10^{9} Å]

8. Considere um feixe laser com um comprimento de onda de 800 ± 5 nm. Pode-se provar que

$$(\Delta\lambda)(\Delta t) = \frac{\lambda^2}{4\pi c}$$

Determine a duração do pulso laser em fs.

[Sol.: 16.98 fs]

Transições

9. *(Griffiths, Cap. 3, P8)* Um átomo de hidrogénio sofre uma transição eletrónica do estado $n = 4$ para o estado $n = 1$.

a) Qual é a energia inicial do átomo?

b) Qual é a energia final do átomo?

c) Qual é a energia do fotão emitido?

d) Este fotão pertence à região visível do espetro eletromagnético? Se não, qual é a região espectral a que pertence?

[Sol.: a) -0.851 eV; b) -13.61 eV; c) 012.76 eV; d) 3.09×10^{15} Hz; e) não; ultravioleta]

10. *(Griffiths, Cap. 3, P9)* Um eletrão de um átomo de hidrogénio transita do estado $n = 4$ para o estado $n = 2$ emitindo um fotão. Determine, para este fotão:

a) energia; b) a frequência; c) o comprimento de onda.

[Sol.: a) 2.55 eV; b) 6.16×10^{14} Hz; c) 4.87×10^{-7} m]

11. Os níveis energéticos de um poço de potencial infinito são dados por

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

em que a é a largura do poço, e n é um inteiro.

Determine as frequências dos fotões emitidos quando um eletrão transita do estado em que $n = 4$ para os estados $n = 3$ e $n = 2$, assumindo que $a = 1$ nm.

[Sol.: $f_{4\text{-}3} = 6.38\times10^{14}$ Hz; $f_{4\text{-}2} = 1.09\times10^{15}$ Hz]

12. Num oscilador harmónico os níveis de energia obtidos são particularmente simples:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_c, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

em que $\omega_c = \sqrt{\frac{K}{m}}$ (K é uma constante e m é a massa) é igual à frequência de oscilação de um oscilador clássico com as mesmas características.

a) Verifique que a energia mínima do oscilador harmónico (energia do ponto zero) é $\frac{1}{2}\hbar\omega_c$.

b) Verifique que os níveis de energia adjacentes do oscilador harmónico são todos igualmente espaçados de $\Delta E = \hbar\omega_c$.

c) Como se altera ΔE se se duplica a massa da partícula?

[Sol.: c) $\Delta E' = \Delta E/\sqrt{2}$]