UNIVERSIDADE DO MINHO

1^o **Teste** **ALGA—LCC**

Nome N^o Data- 09/11/2017

I

Nas perguntas de escolha múltipla, cada resposta certa vale 1 valor e cada resposta errada vale $-0,2$.

---

1. Se A é uma matriz de ordem n invertível, tal que $A^2 = -I_n$, então
   (a) $A^{-1} = -A(\checkmark)$ (b) $A^{-1} = A^2$ (c) $A^{-1} = A$ (d) $A^{-1} = A^3$

2. Considere o sistema de equações lineares em $\mathbb{R}^3$, dependente dos parâmetros α e β,
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 1 & \beta & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
   Qual dos seguintes é o valor do par (α, β) tal que o sistema anterior tem uma única solução?
   (a) $(2,3)$ (b) $(3,2)$ (c) $(1,4)$ (d) $(2,4)(\checkmark)$

3. Considere o sistema de equações $\left\{\begin{array}{llllll} x_1 & -2x_2 & -x_3 & -5x_4 & & = 3 \\ & & x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = -1 \\ & & & & x_5 & = 0 \end{array}\right.$.
   A solução geral do sistema é:
   (a) $S = \{(2 - 3\beta + \alpha,\ -1 - \beta - \alpha,\ \beta,\ 0,\ \alpha) : \beta, \alpha \in\ R\}$.
   (b) $(\checkmark)$ $S = \{(2 + 2\beta + 3\alpha,\ \beta,\ -1 - 2\alpha,\ \alpha,\ 0) : \beta, \alpha \in\ R\}$.
   (c) $S = \{(2 - 2\beta + 3\alpha,\ -1 - \beta + \alpha,\ \beta,\ 0,\ \alpha) : \beta, \alpha \in\ R\}$.
   (d) $S = \{(2 + 2\beta,\ \beta,\ -1 - \alpha,\ \alpha,\ 0) : \beta, \alpha \in\ R\}$.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & \alpha & \beta \end{bmatrix}$. A caraterística de A é
   (a) 1 (b) 2 (c) $3(\checkmark)$ (d) depende dos valores de α e β.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$ e considere as seguintes afirmações:
   (i) As linhas de A formam um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^3$.
   (ii) As colunas de A formam um conjunto linearmente independente em $\mathbb{R}^3$.
   (iii) A caraterística de A é igual a 3.
   (iv) O sistema de equações lineares $Ax = b$ tem uma única solução, qualquer que seja $b \in \mathbb{R}^3$.
   Qual é lista completa de afirmações verdadeiras?
   (a) (i) e (ii) (b) $(i)(ii)$ e (iii) (c) (iii) (d) todas.$(\checkmark)$

No seguinte grupo de questões, indique, para cada alínea, se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F). Cada resposta certa vale 0.5 *valor e cada resposta errada vale* $-0,1$.

---

1. Seja V um espaço vectorial real, $u, v \in V$ e F um subespaço de V.

   (a) Se $u, v \in F$, então $u - v \in F$. V(✓) F

   (b) Se $u + v \in F$, então $u \in F$ e $v \in F$. V F(✓)

   (c) Se $u + v \in F$ e $u \in F$, então $v \in F$. V(✓) F

   (d) Se existe $\alpha \in \mathbb{R}$, tal que $\alpha u \in F$, então $u \in F$. V F(✓)

2. (a) A soma das duas matrizes invertíveis é invertível. V F(✓)

   (b) Seja A uma matriz ortogonal, então a sua inversa também é ortogonal. V(✓) F

   (c) A soma das duas matrizes simétricas é simétrica. V(✓) F

   (d) A inversa de uma matriz simétrica também é simétrica. V(✓) F

3. (a) Se $dimU = dimW$, então $U = W$. V F(✓)

   (b) $\mathbb{R}^2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$ V F(✓)

   (c) A dimensão do espaço gerado por as colunas de A é igual a dimensão do espaço gerado por as linhas de A. V(✓) F

   (d) O espaço gerado por as colunas de A é igual a o espaço gerado por as linhas de A^T.
   V(✓) F

4. Seja $F = \{(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5 : b - c = 0 \wedge a = b + d\}$

   (a) $F =< (2, 1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, -1, 0) >$ V F(✓)

   (b) $F =< (2, 1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 0, 1) >$. V(✓) F

   (c) $F =< (1, 1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 5) >$. V(✓) F

   (d) $F =< (2, 1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 0, 1) >$. V(✓) F

5. Considere em $\mathbb{R}^3$ os vetores

   $$v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, 4, 2), v_3 = (2, 4, 2), v_4 = (2, 6, 3),$$

   e os eguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

   $$S_1 = \{v_1, v_2, v_3\}, S_2 = \{v_2, v_3, v_4\}, S_3 = \{v_1, v_2, v_4\}.$$

   (a) S_1 e S_2 são linearmente independentes. V F(✓)

   (b) S_1 e S_3 são linearmente independentes. V F(✓)

   (c) S_1 é linearmente independentes e S_3 é linearmente dependentes. V F(✓)

   (d) S_2 e S_3 são linearmente dependentes. V(✓) F

A questão que se segue deverá ser resolvida integralmente e devidamente justificada.

(*5 valores*) Sejam U o subespaço do espaço vectorial real $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores

$$u_1 = (-2, 0, 0, 1),\ u_2 = (0, 1, 0, 0),\ u_3 = (0, 0, 1, 0) \text{ e } u_4 = (-2, 3, 4, 1)$$

e W o subconjunto

$$W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a + b + d = 0\} \text{ de } \mathbb{R}^4.$$

(a) Determine uma base e a dimensão de U.

(b) Determine o subespaço $U + W$.

(c) Justifique se $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$.

(d) Determine o valor de α de modo que o vector $(1, -1, 0, \alpha)$ pertença a U.

(a). (u_1, u_2, u_3, u_4) gere U, ou seja $U =< u_1, u_2, u_3, u_4 >$, vamos verificar se u_1, u_2, u_3, u_4 são linearmente independentes. Faça a combinação linear dos u_1, u_2, u_3, u_4 e igual a 0, tem-se

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 = 0 \qquad (*)$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (**)$$

Use eliminação Gaussiana, reduze a matriz de coeficiente em $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, com $C(A) = 3 < n = 4$, então o sistema $(**)$ é possível e indeterminado, ou seja há $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ não são zeros e $(*)$ vale $\Longrightarrow$ u_1, u_2, u_3, u_4 são linearmente dependentes. Por outra lado, como $C(A) = 3$, o muméro maximo dos vetores que são LI é 3, como os primeiros 3 colunas dá caraterística 3, então os primeiros 3 vetores são LI. Por isso, uma base de U pode ser (u_1, u_2, u_3).

(b). $W = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a + b + d = 0\} = \{(-b - d, b, c, d) \in \mathbb{R}^4,\ b, c, d \in \mathbb{R}\}$
$=< (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) >$.
$U + W =< (-2, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (-1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) >$

(c). Não, nota se que $(0, 0, 1, 0) \in U$ e $(0, 0, 1, 0) \in W \Rightarrow U \cap W \neq \emptyset$.

(d). $(1, -1, 0, \alpha)$ pertença a $U \Rightarrow$, $(1, -1, 0, \alpha)$ pode ser escrito como combinação linear de base de U.
$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = (1, -1, 0, \alpha)$, o sistema é possivel se $\alpha = 1/2$.