ÁLGEBRA LINEAR

Exercícios - Determinantes

Lic. Ciências da Computação

1. Calcule cada um dos determinantes apresentados de seguida:

(a) $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$; (d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

   i. Utilizando o Teorema de Laplace.
   ii. Reduzindo o problema ao cálculo do determinante de uma matriz triangular.

2. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c & x \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ d & e & f & y \\ g & h & i & z \end{vmatrix} = 6$, determine:

(a) $\begin{vmatrix} b & c & a \\ e & f & d \\ h & i & g \end{vmatrix}$; (b) $\begin{vmatrix} b & h & e \\ c & i & f \\ a & g & d \end{vmatrix}$; (c) $\begin{vmatrix} 6b & 2c & 2a \\ 3e & f & d \\ 3h & i & g \end{vmatrix}$.

3. Sejam $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$. Prove que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & x_3 \\ 1 & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2)(y_3 - x_3).$$

4. Seja $A = [a_{ij}]_n$ a matriz quadrada, de ordem n, cujos elementos são definidos por

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Prove que $\det A = (-1)^{n-1}(n-1)$.

5. Considere a matriz quadrada, de ordem n, $A = [a_{ij}]_n$ onde

$$a_{ij} = \begin{cases} k + p & \text{se } i = j \\ k & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Prove que $\det A = p^{n-1}(nk + p)$.

6. Considere as seguintes matrizes de elementos reais:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ a & -1 & -1 \\ 2 & 2a & 3 \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

com $\alpha, a \in \mathbb{R}$.

(a) Calcule $|A|, |B|, |C|$ e $|D|$.

(b) Diga, justificando, quais das matrizes indicadas são invertíveis.

(c) Diga, justificando, quais dos seguintes conjuntos de vectores de $\mathbb{R}^3$ são formados por vectores linearmente independentes:

i. $\{(1, a, 1), (a, -1, -1), (2, 2a, 3)\}$;

ii. $\{(1, a, 2), (a, -1, 2a), (1, -1, 3)\}$;

iii. $\{(0, -1, 2), (-1, 2, 0), (1, -3, 2)\}$.

7. Utilizando determinantes, determine, quando possível, a matriz inversa de cada uma das matrizes apresentadas:

(a) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

8. Para cada $x \in \mathbb{R}$, seja

$$A_x = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores de x para os quais A_x é invertível.

(b) Para um dos valores encontrados em (a) e, utilizando determinantes, determine A_x^{-1}.

9. Sejam $n, p, m \in \mathbb{N}$, $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p\times m}(\mathbb{R})$ e $D \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$.

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes:

(a) $|A| = 0$ sse $A = 0$;

(b) $|A| = 1$ sse $A = I_n$;

(c) $|A + B| = |A| + |B|$;

(d) $|-A| = -|A|$;

(e) $|-A| = |A|$;

(f) $|AB| = |BA|$;

(g) $|CD| = |DC|$.

10. Resolva os seguintes sistemas de Cramer:

(a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$;

(c) $$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ x_1 & & & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$