ÁLGEBRA LINEAR

Exercícios - Sistemas de equações lineares **LCC**

1. Para cada uma das seguintes matrizes diga se se trata de uma matriz em escada e calcule a sua característica:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 & -5 \\ -3 & 2 & 9 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & 1 \\ -5 & 2 & 7 & 5 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2. Diga, justificando, se cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4 e de coeficientes reais é possível e, em caso afirmativo, indique se é determinado ou indeterminado:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$.

3. Discuta, em função dos parâmetros t e k, cada um dos seguintes sistemas de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3 e de coeficientes em $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - tx_3 = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + kx_3 = 2 \\ x_1 + tx_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = k \\ x_1 + x_2 + kx_3 = k^2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + kx_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = t \end{cases}$.

4. Construa um sistema de equações lineares, de coeficientes reais, de quatro equações a três incógnitas que seja:

   (a) Possível e determinado;

   (b) Possível e indeterminado;

   (c) Impossível.

5. Efectue os seguintes produtos de matrizes

$$\text{(a)}\quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(d)}\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Com base nos resultados obtidos indique um sistema de equações lineares

   (i) com três equações e quatro incógnitas que tenha $(0, 1, 1, 0)$ como solução;

   (ii) com três equações e duas incógnitas que tenha $(-1, 1)$ como solução;

   (iii) com três equações e três incógnitas que seja possível e indeterminado.

6. Determine o conjunto de soluções dos seguintes sistemas homogéneos de equações lineares nas incógnitas x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 e de coeficientes reais:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_2 + x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}; \qquad \text{b)} \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}.$$

7. Determine o conjunto de soluções dos seguintes sistemas de equações lineares:

$$\text{a)} \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}; \qquad \text{b)} \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 = -9 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -9 \end{cases};$$

$$\text{c)} \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 8 \\ 6x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 13 \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 2x_4 = -10 \end{cases}; \qquad \text{d)} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -1 \\ -4x_1 - 6x_2 = -2 \\ 12x_1 - 18x_2 = -6 \end{cases}.$$

8. Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) \ \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

   (a) Resolva o sistema $Ax = 0$.

   (b) Verifique que $(-1, 1, 1, 2)$ é solução do sistema $Ax = b$. Determine o conjunto de soluções do sistema $Ax = b$.

9. Considere o sistema de equações lineares $Ax = b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}),\ b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 1}(\mathbb{R}) \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Resolva o sistema $Ax = 0$ e verifique se $(-2, 3, 1, -1)$ é solução de $Ax = b$.

(b) Determine o conjunto de soluções de $Ax = b$.

10. Para $t, k \in \mathbb{R}$, sejam

$$A_{k,t} = \begin{bmatrix} k & t & 1 \\ 1 & kt & 1 \\ 1 & t & k \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad b_t = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$$

.

(a) Determine, justificando, os valores de t e k para os quais o sistema $A_{k,t}x = b_t$ é:

i) possível e determinado;

ii) impossível.

(b) Resolva os sistemas $A_{0,2}x = b_2$ e $A_{1,1}x = b_1$.

11. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z, w, e de coeficientes reais, onde λ, β são parâmetros reais,

$$\begin{cases} x & +y & +z & +2w & = & 0 \\ & y & +z & +w & = & 1 \\ & \lambda y & +\beta z & +\lambda w & = & 1 \\ x & +2y & +2z & +3w & = & 1 \end{cases}.$$

Diga, justificando, qual das afirmações é verdadeira:

(a) o sistema é possível e indeterminado para $\lambda = \beta$;

(b) o sistema é possível para $\lambda = 1$;

(c) o sistema é possível e determinado para $\lambda \neq \beta$;

(d) o sistema é possível e determinado para $\lambda = \beta = 2$.

12. Usando o algoritmo de Gauss-Jordan calcule, se possível, a inversa de:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

13. Determine os valores de $k \in \mathbb{R}$ para os quais a seguinte matriz é invertível

$$\begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & k \end{bmatrix}.$$