ÁLGEBRA LINEAR

Exercícios - Valores próprios e vectores prórpios

Lic. Ciências da Computação

1. Considere as matrizes seguintes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

   (i). Determine os valores próprios de cada matriz.

   (ii). Determine os vectores próprios associado um dos valores próprios a sua escolha.

2. Seja f o endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por $f(a,b) = (3a+4b, -2a-3b)$, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Mostre que $(-2,1)$ e $(1,-1)$ são vectores próprios de f.

   (b) Indique uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ tal que $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$ seja uma matriz diagonal. Justifique.

   (c) Diga, justificando, se f é automorfismo de $\mathbb{R}^2$.

3. Considere, no espaço vectorial real $\mathbb{R}^3$, a base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ e o endomorfismo φ tal que

$$M(\varphi;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine os valores próprios de φ.

   (b) Determine o subespaço próprio de φ associado ao valor próprio -2.

   (c) Diga, justificando, se i) φ é diagonalizável; φ é automorfismo de $\mathbb{R}^3$.

4. Sejam V um espaço vectorial real e $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ uma base de V. Para $a, b \in \mathbb{R}$, seja $f_{a,b} \in \mathcal{L}(V,V)$ tal que $M(f_{a,b};\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & a+1 & -b \\ 1 & 1 & 1 \\ a & a & a+b+1 \end{bmatrix}$.

   (a) Mostre que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $v_1 - v_3$ é vector próprio de $f_{a,b}$.

   (b) Determine os valores de a e de b para os quais 1 é valor próprio de $f_{a,b}$.

   (c) Determine os valores de a e de b para os quais 0 é valor próprio de $f_{a,b}$ com multiplicidade geométrica 2.

5. Seja φ o endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuja matriz em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Diga, justificando, se φ é diagonalizável.

6. Dê exemplo de um endomorfismo de $\mathbb{C}^3$ que admita -1 como valor próprio com multiplicidade algébrica 2 e seja diagonalizável. Justifique.

7. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \frac{5}{2} \\ -2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Determine uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

8. Sejam V um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(V, V)$ e $n \in \mathbb{N}$.
   Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

   (a) Todo o vector próprio de f é também um vector próprio de $f \circ f$.

   (b) Se $v_1, v_2 \in V$ são vectores próprios de f associados a valores próprios distintos, então $v_1 + v_2$ é vector próprio de f.

   (c) Se $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ admite 0 como valor próprio com multiplicidade algébrica 2, então $\dim \mathrm{Nuc}\, g = 2$.

   (d) Para cada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, as matrizes A e A^T têm os mesmos valores próprios.

   (e) Uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que admite n valores próprios distintos é diagonalizável.

   (f) Se $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ admite os valores próprios 2 e -1, então $\mathrm{tr} A = 1$ e $|A| = -2$.

   (g) Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e A é invertível, então AB e BA têm o mesmo polinómio característico.