Notas de Álgebra Linear

Carla Mendes

2015/2016

4. Transformações Lineares

4.1 Definições e propriedades

Nesta capítulo estudamos certas aplicações entre espaços vetoriais sobre o mesmo corpo, aplicações essas que têm determinadas relações com a estrutura de espaço vetorial.

Definição 4.1.1. *Sejam V e V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação $f : V \to V'$ diz-se uma **transformação linear** (ou **aplicação linear** ou **homomorfismo**) de V em V' se*

i) $(\forall x, y \in V)\ f(x+y) = f(x) + f(y)$;

ii) $(\forall x \in V)(\forall \lambda \in \mathbb{K})\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

O conjunto de todas as aplicações lineares de V em V' é representado por $\mathcal{L}(V, V')$.

A partir da definição anterior é imediato verificar o resultado seguinte.

Proposição 4.1.2. *Sejam V e V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Então uma aplicação $f : V \to V'$ é uma aplicação linear se e só se*

$$(\forall x, y \in V)(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K})\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Demonstração: Exercício.

Exemplo 4.1.3. *Consideremos os espaços vetoriais reais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f((a,b)) = (2a, a-b, a+3b)$, para todo $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$. De facto, para quaisquer $(a,b), (a',b') \in \mathbb{R}^2$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$\begin{aligned}
f((a,b)+(a',b')) &= f((a+a',b+b')) \\
&= (2(a+a'),(a+a')-(b+b'),(a+a')+3(b+b')) \\
&= (2a+2a',(a-b)+(a'-b'),(a+3b)+(a'+3b')) \\
&= (2a,a-b,a+3b)+(2a',a'-b',a'+3b') \\
&= f((a,b))+f((a',b'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(\lambda(a,b)) &= f((\lambda a,\lambda b)) \\
&= (2(\lambda a),\lambda a-\lambda b,\lambda a+3(\lambda b)) \\
&= (\lambda(2a),\lambda(a-b),\lambda(a+3b)) \\
&= \lambda(2a,a-b,a+3b) \\
&= \lambda f((a,b))
\end{aligned}$$

Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$ e $f : V^n \to V'$ uma aplicação. Para simplificar a escrita, dado $(x_1,\ldots,x_n) \in V^n$, escrevemos $f(x_1,\ldots,x_n)$ em vez de $f((x_1,\ldots,x_n))$.

Exemplo 4.1.4. *A aplicação $g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ definida por $g(a,b) = a+2$, para todo $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, não é uma aplicação linear de $\mathbb{C}^2$ em $\mathbb{C}$ (encarados como espaços vetoriais complexos). Dados, por exemplo, $x = (1,0)$, $y = (-1,1) \in \mathbb{C}^2$ tem-se*

$$g((1,0)+(-1,1)) = g(0,1) = 2 \text{ e } g(1,0)+g(-1,1) = (1+2)+(-1+2) = 4,$$

i.e., existem $x, y \in \mathbb{C}^2$ tais que $g(x+y) \neq g(x)+g(y)$.

Exemplo 4.1.5. *Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$. A aplicação $f_A : \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ definida por $f_A(X) = AX$, para todo $X \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$, é uma aplicação linear.*

Exemplo 4.1.6. *Sejam $\mathbb{R}_n[x]$ e $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ os espaços vetoriais dos polinómios de coeficientes reais de grau n e $n-1$, respectivamente. A aplicação $f : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$ definida por $f(p) = p'$, onde $p \in \mathbb{R}_n[x]$ e p' é a derivada de p em ordem a x, é uma aplicação linear.*

Exemplo 4.1.7. *Sejam V e V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. As aplicações*

$$\begin{array}{rccc} 0_{\mathcal{L}(V,V')} : & V & \to & V' \\ & x & \mapsto & 0_{V'} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rccc} id_V : & V & \to & V \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

*são aplicações lineares designadas, respectivamente, por **aplicação linear nula** de V em V' e **aplicação identidade** em V.*

Exemplo 4.1.8. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e W um subespaço vetorial de V. Então*

$$\begin{array}{rccc} f|_W: & W & \to & V \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

é aplicação linear.

Proposição 4.1.9. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Então*

i) $f(0_V) = 0_{V'}$;

ii) Para todo $x \in V$, $f(-x) = -f(x)$;

iii) Para todo $x_1, \ldots, x_n \in V$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$,

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) = \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

Demonstração: *i)* $f(0_V) = f(0_{\mathbb{K}} 0_V) = 0_{\mathbb{K}} f(0_V) = 0'_V$.
ii) Para todo $x \in V$, tem-se $f(-x) = f((-1_{\mathbb{K}})x) = (-1_{\mathbb{K}})f(x) = -f(x)$.
iii) A prova é feita por indução em n. □

4.2 Álgebra das aplicações lineares

Dados espaços vetoriais V, V' sobre $\mathbb{K}$ é possível dar estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ ao conjunto $\mathcal{L}(V, V')$ de todas aplicações lineares de V em V'.

Definição 4.2.1. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{L}(V, V')$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Designa-se por*

- ***soma de** f **e** g a aplicação $f + g : V \to V'$ definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, para todo $x \in V$.*
- ***produto de** λ **por** f a aplicação $\lambda f : V \to V'$ definida por $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para todo $x \in V$.*

Nas condições da definição anterior, é óbvio que $f + g$ e λf são aplicações.

Proposição 4.2.2. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{L}(V, V')$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então $f + g \in \mathcal{L}(V, V')$ e $\lambda f \in \mathcal{L}(V, V')$.*

Demonstração: É simples verificar que $f+g$ e λf são aplicações lineares. Com efeito, para quaisquer $x, y \in V$ e para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{array}{rcll} (f+g)(\alpha x+\beta y) & = & f(\alpha x+\beta y)+g(\alpha x+\beta y) & \text{(definição de } f+g) \\ & = & (\alpha f(x)+\beta f(y))+(\alpha g(x)+\beta g(y)) & \text{(Proposição 4.3.1)} \\ & = & (\alpha f(x)+\alpha g(x))+(\beta f(y)+\beta g(y)) & \text{(propriedades de } V') \\ & = & \alpha(f(x)+g(x))+\beta(f(y)+g(y)) & \text{(propriedades de } V') \\ & = & \alpha(f+g)(x)+\beta(f+g)(y) & \text{(definição de } f+g) \end{array}$$

o que permite concluir que $f+g$ é aplicação linear de V em V'. Relativamente a λf tem-se o seguinte

$$\begin{array}{rcl} (\lambda f)(\alpha x+\beta y) & = & \lambda(f(\alpha x+\beta y)) \\ & = & \lambda(\alpha f(x)+\beta f(y)) \\ & = & \lambda(\alpha f(x))+\lambda(\beta f(y)) \\ & = & \alpha(\lambda(f(x)))+\beta(\lambda f(y)) \\ & = & \alpha((\lambda f)(x))+\beta((\lambda f)(y)) \end{array}$$

e, portanto, λf é uma aplicação linear. □

Proposição 4.2.3. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. O conjunto $\mathcal{L}(V, V')$, juntamente com as aplicações*

$$\begin{array}{rrcl} +: & \mathcal{L}(V,V')\times\mathcal{L}(V,V') & \to & \mathcal{L}(V,V') \\ & (f,g) & \mapsto & f+g \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rrcl} \cdot: & \mathbb{K}\times\mathcal{L}(V,V') & \to & \mathcal{L}(V,V') \\ & (\lambda,f) & \mapsto & \lambda f \end{array}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Demonstração: Exercício. □

O vetor nulo do espaço vetorial $\mathcal{L}(V, V')$ é a aplicação $0_{\mathcal{L}(V,V')}$.

Definição 4.2.4. *Sejam V, V', V'' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(V, V')$ e $g \in \mathcal{L}(V', V'')$. Designa-se por* ***composta de*** *g* ***com*** *f a aplicação $g \circ f : V \to V''$ definida por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

para todo $x \in V$.

Proposição 4.2.5. *Sejam V, V', V'' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(V, V')$ e $g \in \mathcal{L}(V', V'')$. Então $g \circ f \in \mathcal{L}(V, V'')$.*

Demonstração: Exercício.

Proposição 4.2.6. *Sejam* V, V', V'' *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$, $f, g \in \mathcal{L}(V, V')$, $h, k \in \mathcal{L}(V', V'')$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Então são válidas as seguintes propriedades:*

i) $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$;

ii) $(h + k) \circ f = h \circ f + k \circ f$;

iii) $\lambda(h \circ f) = (\lambda h) \circ f = h \circ (\lambda f)$.

Demonstração: Exercício.

4.3 Núcleo e espaço imagem de uma aplicação linear

O estudo dos conceitos de núcleo e espaço imagem tem interesse na sistematização do estudo dos problemas que envolvem aplicações lineares.

No sentido de definirmos estes conceitos, começamos por recordar algumas noções e notações de teoria de conjuntos. Dados A e B conjuntos, C um subconjunto de A, D um subconjunto de B e f uma aplicação de A em B, designa-se por:

- ***imagem de*** C ***por*** f o conjunto
$$f(C) = \{f(x) : x \in C\} = \{y \in B : (\exists x \in C)\ y = f(x)\};$$
- ***imagem inversa de*** D ***por*** f o conjunto
$$f^{\leftarrow}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}.$$
Se $D = \{y\}$, é usual representar $f^{\leftarrow}(D)$ por $f^{\leftarrow}(y)$.

Proposição 4.3.1. *Sejam* V, V' *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$ *e* $f \in \mathcal{L}(V, V')$. *Tem-se*

i) Se W *é um subespaço vetorial de* V, *então* $f(W)$ *é um subespaço vetorial de* V';

ii) Se W' *é um subespaço vetorial de* V', *então* $f^{\leftarrow}(W')$ *é um subespaço vetorial de* V.

Demonstração: *i)* Exercício.
ii) Se W' é um subespaço vetorial de V', então, por definição de $f^{\leftarrow}(W')$, tem-se $f^{\leftarrow}(W') \subseteq V$. Por outro lado, tem-se $f(0_V) = 0_{V'}$ e $0_{V'} \in W'$, pelo que $0_V \in f^{\leftarrow}(W')$ e, portanto, $f^{\leftarrow}(W') \neq \emptyset$. Se agora considerarmos $x, y \in f^{\leftarrow}(W')$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, então $f(x), f(y) \in W'$ e tem-se

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \in W' \quad \text{e} \quad f(\alpha x) = \alpha f(x) \in W'$$

uma vez que W' é subespaço vetorial de V'. Logo $x + y, \alpha x \in f^{\leftarrow}(W')$. Portanto, $f^{\leftarrow}(W')$ é um subespaço vetorial de V'. $\square$

Proposição 4.3.2. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(V, V')$, W um subespaço de V e $v_1, \ldots v_n \in V$.*
Se $W =< v_1, \ldots, v_n >$, então $f(W) =< f(v_1), \ldots, f(v_n) >$.

Demonstração: Admita-se que $W =< v_1, \ldots, v_n >$. Então $v_1, \ldots, v_n \in W$ e, portanto, $f(v_1), \ldots, f(v_n) \in f(W)$. Logo, como $f(W)$ é um subespaço de V' e $< f(v_1), \ldots, f(v_n) >$ é o menor subespaço de V' que contém $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$, tem-se $< f(v_1), \ldots, f(v_n) >\subseteq f(W)$. Por outro lado,

$$\begin{array}{rcl} y \in f(W) & \Rightarrow & \exists x \in W : y = f(x) \\ & \Rightarrow & \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} : x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \text{ e } y = f(x) \\ & \Rightarrow & \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} : y = f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) \\ & \Rightarrow & \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K} : y = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) \\ & \Rightarrow & y \in < f(v_1), \ldots, f(v_n) >, \end{array}$$

i.e., $f(W) \subseteq < f(v_1), \ldots, f(v_n) >$. Logo $f(W) =< f(v_1), \ldots, f(v_n) >$. $\square$

Definição 4.3.3. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{L}(V, V')$.*

- *Chama-se **núcleo** de f, e representa-se por $\text{Nuc}f$, ao conjunto*

$$\text{Nuc}f = f^{\leftarrow}(0_{V'}) = \{x \in V : f(x) = 0_{V'}\}.$$

- *Chama-se **espaço imagem** de f, e representa-se por $\text{Im}f$ ou $f(V)$, ao conjunto imagem de V por f.*

Exemplo 4.3.4. *Consideremos os espaços vetoriais reais e a aplicação $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(a, b, c) = (a, a + b + c)$, para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Então*

$$\begin{array}{rcl} \text{Nuc}f & = & \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : f(a, b, c) = (0, 0)\} \\ & = & \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, a + b + c) = (0, 0)\} \\ & = & \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0, a + b + c = 0\} \\ & = & \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0, b = -c\} \\ & = & \{(0, -c, c) \in \mathbb{R}^3 : a, c \in \mathbb{R}\} \\ & = & < (0, -1, 1) > \end{array}$$

e $\text{Im}f = \{f(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \{(a, a + b + c) \in \mathbb{R}^3 : a, b, c \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$.

Da proposição 4.3.1 é imediato o seguinte

Proposição 4.3.5. *Sejam* V*,* V' *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$ *e* $f \in \mathcal{L}(V, V')$*. Então*

i) $\mathrm{Nuc}f$ *é um subespaço vetorial de* V*;*

ii) $\mathrm{Im}f$ *é um subespaço vetorial de* V'*.* □

Definição 4.3.6. *Sejam* V*,* V' *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$ *e* $f \in \mathcal{L}(V, V')$*. As dimensões de* $\mathrm{Nuc}f$ *e de* $\mathrm{Im}f$ *são designadas, respectivamente, por* ***nulidade*** *de* f *e* ***característica*** *de* f*. A nulidade de* f *representa-se por* n_f *e a característica de* f *por* c_f*.*

Note-se que se V e V' forem espaços vetoriais de dimensão finita, então $\mathrm{Nuc}f$ e $\mathrm{Im}f$ têm também dimensão finita e tem-se $n_f \leq \dim V$ e $c_f \leq \dim V'$.

Proposição 4.3.7. *Sejam* V*,* V' *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$*,* $f \in \mathcal{L}(V, V')$*,* $x \in V$ *e* $y \in V'$ *tal que* $y = f(x)$*. Então*

$$f^{\leftarrow}(y) = x + \mathrm{Nuc}f.$$

Demonstração: Seja $a \in f^{\leftarrow}(y)$, então, por definição de $f^{\leftarrow}(y)$, tem-se

$$f(a) = y \Leftrightarrow f(a) = f(x) \Leftrightarrow f(a) - f(x) = 0_{V'} \Leftrightarrow f(a - x) = 0_{V'},$$

pelo que $n = a - x \in \mathrm{Nuc}f$ e, portanto,

$$a = x + n \in x + \mathrm{Nuc}f.$$

Reciprocamente, tomando $a \in x + \mathrm{Nuc}f$ temos $a = x + n$, para algum $n \in \mathrm{Nuc}f$. Logo

$$f(a) = f(x + n) = f(x) + f(n) = y + 0_{V'} = y,$$

ou seja $a \in f^{\leftarrow}(y)$.
Provámos, então, que $f^{\leftarrow}(y) = x + \mathrm{Nuc}f$. □

Exemplo 4.3.8. *Consideremos os espaços vetoriais reais* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$ *e a aplicação* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *definida por* $f(a, b, c) = (a, a + b + c)$*, para todo* $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$*. Sabemos que* $f(0, 1, 1) = (0, 2)$*. Vamos determinar* $f^{\leftarrow}(0, 2)$*:*

$$\begin{aligned} f^{\leftarrow}(0,2) &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : f(a,b,c) = (0,2)\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : (a, a+b+c) = (0,2)\} \\ &= \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a = 0, c = 2-b\} \\ &= \{(0,b,2-b) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\} \\ &= (0,1,1) + \{(0, b-1, 1-b) \in \mathbb{R}^3 : b \in \mathbb{R}\} \\ &= (0,1,1) + \{(0,x,-x) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}\} \\ &= (0,1,1) + <(0,1,-1)> \end{aligned}$$

e, tendo em conta o exemplo anterior, temos

$$f^{\leftarrow}(0,2) = (0,1,1) + \mathrm{Nuc}f.$$

4.4 Aplicações lineares especiais

Algumas aplicações lineares tomam designações especiais atendendo às suas propriedades enquanto aplicações.

Definição 4.4.1. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação linear $f : V \to V'$ diz-se*

1. *um* ***monomorfismo*** *se f é injetiva;*
2. *um* ***epimorfismo*** *se f é sobrejetiva;*
3. *um* ***isomorfismo*** *se f é bijetiva;*
4. *um* ***endomorfismo*** *se $V = V'$;*
5. *um* ***automorfismo*** *se f é um endomorfismo e é bijetiva.*

Proposição 4.4.2. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $f : V \to V'$ é um isomorfismo, então f^{-1} é um isomorfismo.*

Demonstração: Seja $f : V \to V'$ um isomorfismo. Em particular, f é bijetiva e, portanto, existe uma e uma só aplicação $f^{-1} : V' \to V$ tal que $f^{-1} \circ f = id_V$ e $f \circ f^{-1} = id_{V'}$. Assim, para cada $a \in V'$, tem-se $a = id_{V'}(a) = (f \circ f^{-1})(a) = f(f^{-1}(a))$. Logo, para quaisquer $x, y \in V'$ e qualquer $\lambda \in \mathbb{K}$, tem-se

$$\begin{aligned} f^{-1}(x+y) &= f^{-1}(f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(y))) \\ &= f^{-1}(f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y))) \\ &= (f^{-1} \circ f)(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) \\ &= id_V(f^{-1}(x) + f^{-1}(y)) \\ &= f^{-1}(x) + f^{-1}(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\lambda x) &= f^{-1}(\lambda f(f^{-1}(x))) \\ &= f^{-1}(f(\lambda f^{-1}(x))) \\ &= (f^{-1} \circ f)(\lambda f^{-1}(x)) \\ &= id_V(\lambda f^{-1}(x)) \\ &= \lambda f^{-1}(x) \end{aligned}$$

Então f^{-1} é aplicação linear e, uma vez que f^{-1} é também bijetiva, segue que $f^{-1} : V \to V'$ é um isomorfismo. $\square$

Definição 4.4.3. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Diz-se que V é* **isomorfo** *a V', e escreve-se $V \cong V'$, se existe um isomorfismo de V em V'.*

Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Se $f : V \to V'$ é um isomorfismo, então $f^{-1} : V' \to V$ é um isomorfismo. Portanto, se $V \cong V'$, também $V' \cong V$. Diz-se, então, que os espaços V e V' são isomorfos. Tem-se $V \cong V$, uma vez que $id_V : V \to V$ é um isomorfismo.

As aplicações lineares sobrejetivas e as aplicações lineares injetivas podem ser caracterizadas através do espaço imagem e do núcleo. Com efeito, uma aplicação linear f é sobrejetiva se e só se $\mathrm{Im}f = V'$ e relativamente a aplicações lineares injetivas estabelece-se o seguinte:

Proposição 4.4.4. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $f : V \to V'$ uma aplicação linear. Então f é injetiva se e só se $\mathrm{Nuc}f = \{0_V\}$.*

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{L}(V, V')$. É claro que $0_V \in \mathrm{Nuc}f$, pois $f(0_V) = 0_{V'}$.
Admitindo que f é injetiva, tem-se

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Nuc}f &\Rightarrow f(x) = 0_{V'} \\ &\Rightarrow f(x) = f(0_V) \\ &\Rightarrow x = 0_V, \end{aligned}$$

i.e., $\mathrm{Nuc}f \subseteq \{0_V\}$. Portanto, $\mathrm{Nuc}f = \{0_V\}$.
Reciprocamente, admitamos que $\mathrm{Nuc}f = \{0_V\}$. Então, para quaisquer $x, y \in V$,

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow f(x) - f(y) = 0_{V'} \\ &\Rightarrow f(x - y) = 0_{V'} \\ &\Rightarrow x - y \in \mathrm{Nuc}f \\ &\Rightarrow x - y = 0_V \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Logo f é injetiva. $\square$

Proposição 4.4.5. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, $f : V \to V'$ uma aplicação linear, $n \in \mathbb{N}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$, então*

i) Se $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ são linearmente independentes, então $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes.

ii) Se f é injetiva e $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes, então $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ são linearmente independentes.

Demonstração: *i)* Suponhamos que $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ são linearmente independentes. Então, para todo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V &\Rightarrow f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = f(0_V) \\ &\Rightarrow \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = 0_{V'} \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Logo $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes.
ii) Suponhamos que f é injetiva e que $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. Então, recorrendo à proposição anterior, prova-se que, dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = 0_{V'} &\Rightarrow f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = f(0_V) \\ &\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}. \end{aligned}$$

Logo $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ são linearmente independentes. □

Proposição 4.4.6. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$. Uma aplicação linear $f : V \to V'$ é injetiva se e só transforma vetores linearmente independentes, em vetores linearmente independentes.*

Demonstração: Suponhamos que f é injetiva, então, pela alínea ii) da proposição anterior, é imediato que f transforma vetores linearmente independentes em vetores linearmente independentes.
Reciprocamente, admitamos que f transforma vetores linearmente independentes em vetores linearmente independentes, então, dado $x \in V$ tal que $f(x) = 0_{V'}$, terá que ser $x = 0_V$, caso contrário f transformaria um vetor linearmente independente num vetor linearmente dependente. Logo $\mathrm{Nuc} f = \{0_V\}$ e, portanto, f é injetiva.

4.5 Aplicações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita

Nas secções anteriores estudámos aplicações lineares entre espaços vetoriais quaisquer. Nesta secção vamos restringir o estudo a aplicações lineares cujo domínio e conjunto de chegada são espaços vetoriais de dimensão finita.

Proposição 4.5.1. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Se V é um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V, então* $\mathrm{Im} f =< f(v_1), \ldots, f(v_n) >$.

Demonstração: Imediato a partir da proposição 4.3.2 □

Proposição 4.5.2. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Se V tem dimensão finita $n \geq 1$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ é uma base de V, então*

i) f é injetiva se e só se $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ são linearmente independentes;

ii) f é sobrejetiva se e só se $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ é um conjunto gerador de V';

iii) f é bijetiva se e só se $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ é uma base de V'.

Demonstração: Seja $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V. Então $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V.

i) Como $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes e f é injetiva, pela Proposição 4.4.5 segue que $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ são linearmente independentes.
Reciprocamente, suponhamos que $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ são linearmente independentes. Para provar que f é injetiva é suficiente mostrar que $\mathrm{Nuc} f = \{0_V\}$. É claro que $\{0_V\} \subseteq \mathrm{Nuc} f$. Falta provar que $\mathrm{Nuc} f \subseteq \{0_V\}$. Seja $x \in \mathrm{Nuc} f$. Tem-se $f(x) = 0_{V'}$ e, como, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V, existem $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que $x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Então $f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = 0_{V'}$ e, uma vez que f é aplicação linear, segue que $\lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = 0_{V'}$. Por conseguinte, como $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ são linearmente independentes, vem $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$; logo $x = 0_{\mathbb{K}} v_1 + \ldots + 0_{\mathbb{K}} v_n = 0_V$ e, portanto, $\mathrm{Nuc} f \subseteq \{0_V\}$.

ii) Uma vez que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto gerador de V, pela proposição anterior sabe-se que $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ é um conjunto gerador de $\mathrm{Im} f$. Então, sendo f sobrejetiva, tem-se $\mathrm{Im} f = V'$, pelo que $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ é um conjunto gerador de V'. A afirmação recíproca é também imediata a partir da proposição anterior. De facto, se $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ é um conjunto gerador de V', tem-se $V' =< f(v_1), \ldots, f(v_n) >= \mathrm{Im} f$ e, portanto, f é sobrejetiva.
iii) Imediato das alíneas anteriores. □

Corolário 4.5.3. *Sejam V, V' espaços vetoriais com a mesma dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Então f é injetiva se e só se f é sobrejetiva.* $\square$

Proposição 4.5.4. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Se V tem dimensão finita, então* $\mathrm{dim}V = \mathrm{dimNuc}f + \mathrm{dimIm}f$.

Demonstração: Se $V = \{0_V\}$ o resultado é imediato.

Caso $V \neq \{0_V\}$ seja $n \geq 1$ a dimensão de V e $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V.

Se $\mathrm{Nuc}f = V$, então $\mathrm{Im}f = \{0_{V'}\}$. Logo $\mathrm{dim}V = \mathrm{dimNuc}f + \mathrm{dimIm}f$.

Se $\mathrm{Nuc}f \neq V$ há dois casos a considerar:

1) $\mathrm{Nuc}f = \{0_V\}$: Pela Proposição 4.4.4, f é injetiva e da Proposição 4.3.2 segue que $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ é uma base de $\mathrm{Im}f$. Logo $\mathrm{dim}V = n = 0+n = \mathrm{dimNuc}f + \mathrm{dimIm}f$.

2) $\{0_V\} \subsetneqq \mathrm{Nuc}f \subsetneqq V$: Suponhamos que $\mathrm{dimNuc}f = k$ (tem-se $1 \leq k < n$). Seja $(u_1, \ldots, u_k)$ uma base de $\mathrm{Nuc}f$. Uma vez que $u_1, \ldots, u_k$ são vetores de V linearmente independentes, existe uma base de V da qual fazem parte os vetores $u_1, \ldots, u_k$, seja $(u_1, \ldots, u_k, w_1, \ldots, w_{n-k})$ essa base. Então, pela Proposição 4.3.2,

$$\{f(u_1), \ldots, f(u_k), f(w_1), \ldots, f(w_{n-k})\} = \{0_{V'}, \ldots, 0_{V'}, f(w_1), \ldots, f(w_{n-k})\}$$

é um conjunto gerador de $\mathrm{Im}f$, i.e., $\{f(w_1), \ldots, f(w_{n-k})\}$ é um conjunto gerador de $\mathrm{Im}f$. Além disso, como $w_1, \ldots, w_{n-k}$ são linearmente independentes, prova-se que os vetores $f(w_1), \ldots, f(w_{n-k})$ são também linearmente independentes. De facto, para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k} \in \mathbb{K}$,

$$\begin{array}{ll} & \alpha_1 f(w_1) + \ldots + \alpha_{n-k} f(w_{n-k}) = 0_{V'} \\ \Rightarrow & f(\alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{n-k} w_{n-k}) = 0_{V'} \\ \Rightarrow & \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{n-k} w_{n-k} \in \mathrm{Nuc}f \\ \Rightarrow & \exists \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K} : \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{n-k} w_{n-k} = \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_k u_k \\ \Rightarrow & \exists \beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{K} : \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_{n-k} w_{n-k} - \beta_1 u_1 - \ldots - \beta_k u_k = 0_V \\ \Rightarrow & \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-k} = \beta_1 = \ldots = \beta_k = 0_{\mathbb{K}}. \end{array}$$

Logo $(f(w_1), \ldots, f(w_{n-k}))$ é uma base de $\mathrm{Im}f$.
Assim $\mathrm{dim}V = n = k + (n-k) = \mathrm{dimNuc}f + \dim \mathrm{Im}f$. $\square$

De acordo com notação introduzida anteriormente e nas condições desta última proposição, tem-se $\mathrm{dim}V = n_f + c_f$.

Teorema 4.5.5 (Teorema da extensão linear)**.** *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ sobre $\mathbb{K}$ e $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V. Sejam V' um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $u_1, \ldots, u_n \in V'$.*
Então existe uma e uma só aplicação linear f de V em V' tal que $f(v_i) = u_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração: Sejam $(v_1, \ldots v_n)$ uma base de V e $u_1, \ldots, u_n \in V'$. Então cada vetor x de V se escreve de modo único único como combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n$, i.e., x pode escrever-se na forma

$$x = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n,$$

sendo os escalares univocamente determinados. Pode, então, definir-se uma correspondência de V em V', associando a cada vetor $x \in V$ o vetor $z = f(x) \in V'$, definido do seguinte modo,

$$z = \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n.$$

Como $z \in V'$ e é bem determinado, a correspondência f assim definida é uma aplicação.
Vamos agora ver que f é uma aplicação linear. Sejam $x, y \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Então, existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$x = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \;\text{ e }\; y = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n.$$

Logo

$$\begin{array}{rcl} f(\alpha x + \beta y) & = & f((\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)v_n) \\ & = & (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)u_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)u_n \\ & = & \alpha(\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n) + \beta(\beta_1 u_1 + \ldots + \beta_n u_n) \\ & = & \alpha f(x) + \beta f(y). \end{array}$$

Logo f é uma aplicação linear.
É simples verificar que $f(v_i) = u_i$, para $i = 1, \ldots, n$. De facto,

$$\begin{array}{rcl} f(v_i) & = & f(0_{\mathbb{K}} v_1 + \ldots + 0_{\mathbb{K}} v_{i-1} + 1_{\mathbb{K}} v_i + 0_{\mathbb{K}} v_{i+1} + \ldots + 0_{\mathbb{K}} v_n) \\ & = & 0_{\mathbb{K}} u_1 + \ldots + 0_{\mathbb{K}} u_{i-1} + 1_{\mathbb{K}} u_i + 0_{\mathbb{K}} u_{i+1} + \ldots + 0_{\mathbb{K}} u_n \\ & = & u_i \end{array}$$

Falta ver que f, assim definida, é a única aplicação linear que satisfaz as condições requeridas. Suponhamos que $g : V \to V'$ é uma aplicação linear tal que $g(v_i) = u_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Então, para quaisquer $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, tem-se

$$\begin{array}{rcl} g(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) & = & \alpha_1 g(v_1) + \ldots + \alpha_n g(v_n) \\ & = & \alpha_1 f(v_1) + \ldots + \alpha_n f(v_n) \\ & = & f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n). \end{array}$$

Logo $g = f$.
Existe, portanto, uma única aplicação linear $f : V \to V'$ tal que $f(v_i) = u_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. $\square$

Nas condições do teorema anterior e conhecidas as imagens de $v_1, \ldots, v_n$ por f, fica completamente determinada a imagem por f de qualquer vetor de V.

Exemplo 4.5.6. *Consideremos os espaços vetoriais reais* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^4$ *e a base* $((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$ *de* $\mathbb{R}^3$*. Seja* f *a aplicação linear de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}^4$ *tal que*

$$f(1,1,1) = (2,1,0,1), f(1,1,0) = (1,1,1,0), f(1,0,0) = (2,1,0,1).$$

Vamos determinar $f(2,0,1)$*. Uma vez que*

$$(2,0,1) = 1.(1,1,1) + (-1).(1,1,0) + 2.(1,0,0)$$

tem-se

$$f(2,0,1) = 1.(2,1,0,1) + (-1).(1,1,1,0) + 2.(2,1,0,1) = (5,2,-1,3).$$

Em geral, dado $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$*, escrevemos* (a,b,c) *como combinação linear dos vetores* $(1,1,1)$*,* $(1,1,0)$*,* $(1,0,0)$ *e determinamos* $f(a,b,c)$*. Dado que*

$$(a,b,c) = c(1,1,1) + (b-c)(1,1,0) + (a-b)(1,0,0),$$

segue que

$$f(a,b,c) = c(2,1,0,1)+(c-b)(1,1,1,0)+(a-b)(2,1,0,1) = (2a-b+c, a, b-c, a-b+c).$$

Proposição 4.5.7. *Sejam* V*,* V' *espaços vetoriais de dimensão finita sobre* $\mathbb{K}$*. Então* $V \cong V'$ *se e só se* $\dim V = \dim V'$*.*

Demonstração: Se $V = \{0_V\}$ ou $V' = \{0_{V'}\}$, o resultado é óbvio.
Consideremos, agora o caso em que $V \neq \{0_V\}$ e $V' \neq \{0_{V'}\}$.
Se V e V' são espaços vetoriais isomorfos, então existe um isomorfismo $f : V \to V'$. Seja $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V. Atendendo à Proposição 4.3.2 segue que $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ é uma base de V'. Logo $\dim V = \dim V'$.
Reciprocamente, suponhamos que $\dim V = n = \dim V'$, $n \in \mathbb{N}$. Sejam $(v_1, \ldots, v_n)$ e $(u_u, \ldots, u_n)$ bases de V e V', respectivamente. Pelo teorema anterior sabemos que existe uma aplicação linear $f : V \to V'$ tal que $f(v_i) = u_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Pela Proposição 4.5.2 podemos afirmar que f é um isomorfismo. □

4.6 Matriz de uma aplicação linear

Dados espaços vetoriais V e V' sobre $\mathbb{K}$, se V tem dimensão finita $n \geq 1$, então, pelo Teorema da extensão linear, uma aplicação linear f de V em V' fica perfeitamente determinada pelas imagens dos vetores de uma base de V, i.e., sendo $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V, uma aplicação linear $f : V \to V'$ fica perfeitamente determinada por $f(v_1), \ldots f(v_n)$. Se V' tem dimensão finita $p \geq 1$ e $({v_1}', \ldots, {v_p}')$ é uma base de V', cada vetor de V' escreve-se, de modo único, como combinação linear de ${v_1}', \ldots, {v_p}'$. Em particular, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, existem escalares bem determinados $a_{1j}, \ldots, a_{pj} \in \mathbb{K}$ tais que $f(v_j) = a_{1j}{v_1}' + \ldots + a_{pj}{v_p}'$, i.e., tem-se

$$\begin{array}{rcl} f(v_1) & = & a_{11}{v_1}' + \ldots + a_{p1}{v_p}' \\ f(v_2) & = & a_{12}{v_1}' + \ldots + a_{p2}{v_p}' \\ \vdots & & \\ f(v_n) & = & a_{1n}{v_1}' + \ldots + a_{pn}{v_p}' \end{array}$$

Assim, fixadas as bases $(v_1, \ldots, v_n)$ de V e $({v_1}', \ldots, {v_p}')$ de V', a aplicação linear f fica completamente caracterizada pelos escalares a_{ij}, $i \in \{1, \ldots, p\}$, $j \in \{1, \ldots n\}$, e podemos associar a f a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

que caracteriza completamente f.

Definição 4.6.1. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita ≥ 1, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V, $\mathcal{B}' = ({v_1}', \ldots, {v_p}')$ uma base de V' e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. Chama-se* ***matriz da aplicação linear*** *f em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ à matriz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{K})$ em que $f(v_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}{v_i}'$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. A matriz A representa-se por $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ ou por $M(f; (v_j), ({v_i}'))$.*

Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$ e $\mathcal{B}$ uma base de V. Se f é endomorfismo de V, à matriz de f em relação a $\mathcal{B}$ e a $\mathcal{B}$ chama-se apenas matriz de f em relação a $\mathcal{B}$.

Nas condições da definição anterior, resulta do Teorema da extensão linear que a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Phi: & \mathcal{L}(V, V') & \rightarrow & \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{K}) \\ & f & \mapsto & M(f; (v_j), ({v_i}')) \end{array}$$

é bijetiva, i.e., cada matriz $A \in \mathcal{M}_{p \times n}(\mathbb{K})$ é matriz em relação às bases $(v_1, \ldots, v_n)$ e $({v_1}', \ldots, {v_p}')$ de uma e uma só aplicação linear $f : V \rightarrow V'$.

Exemplo 4.6.2. *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por*

$$f(x, y) = (x + y, 2x, x - 2y),$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Consideremos as bases $\mathcal{B}_1 = ((1,1),(1,-1))$ *de* $\mathbb{R}^2$ *e* ${\mathcal{B}_1}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ *de* $\mathbb{R}^3$*. Tem-se*

$$\begin{aligned} f(1,1) &= (2,2,-1) = 0(1,0,0) + 3(1,1,0) + (-1)(1,1,1), \\ f(1,-1) &= (0,2,3) = (-2)(1,0,0) + (-1)(1,1,0) + 3(1,1,1). \end{aligned}$$

Portanto $M(f; \mathcal{B}_1, {\mathcal{B}_1}') = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

b) Consideremos as bases $\mathcal{B}_2 = ((1,0),(1,1))$ *de* $\mathbb{R}^2$ *e* ${\mathcal{B}_2}' = ((0,1,0),(1,0,1),(0,1,1))$ *de* $\mathbb{R}^3$*. Tem-se*

$$\begin{aligned} f(1,0) &= (1,2,1) = 2(0,1,0) + 1(1,0,1) + 0(0,1,1), \\ f(1,1) &= (2,2,-1) = 5(0,1,0) + 2(1,0,1) + (-3)(0,1,1). \end{aligned}$$

Portanto $M(f; \mathcal{B}_2, {\mathcal{B}_2}') = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Exemplo 4.6.3. *Sendo* V*,* V' *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita* ≥ 1*,* $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *uma base de* V*,* $\mathcal{B}' = ({v_1}', \ldots, {v_p}')$ *uma base de* V'*, tem-se* $M(0_{\mathcal{L}(V,V')}; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathbf{0}_{p\times n}$.

Exemplo 4.6.4. *Sendo* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita* $n \geq 1$ *e* $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ *uma base de* V*, tem-se* $M(\mathrm{id_V}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathrm{I_n}$.

Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita ≥ 1, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ bases de V e V', respectivamente, e $f \in \mathcal{L}(V, V')$. A matriz de f em relação a $\mathcal{B}$ e a $\mathcal{B}'$ pode ser utilizada para determinar a imagem por f de qualquer vetor $x \in V$.

Definição 4.6.5. *Sejam* V *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita* $n \geq 1$ *e* $(v_1, \ldots, v_n)$ *uma base de* V*. Dado* $x = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n \in V$*, chama-se* ***vetor coluna de*** x *na base* $(v_1, \ldots, v_n)$ *à matriz* $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

Proposição 4.6.6. *Sejam* V*,* V' *espaços vetoriais sobre* $\mathbb{K}$ *de dimensão finita* ≥ 1*,* $(v_1, \ldots, v_n)$ *uma base de* V *e* $({v_1}', \ldots, {v_p}')$ *uma base de* V'*. Sejam* $f \in \mathcal{L}(V, V')$*,* $A = [a_{ij}] = M(f; (v_j), ({v_i}'))$ *e* $x \in V$*.*
Se X *é o vetor coluna de* x *na base* $(v_1, \ldots, v_n)$*, então* AX *é o vetor coluna de* $f(x)$ *na base* $({v_1}', \ldots, {v_p}')$*.*

Demonstração: Sejam $A = [a_{ij}] = M(f; (v_j), (v_i'))$ e $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$. O vetor coluna de x na base $(v_1, \ldots, v_n)$ é

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$$

e tem-se

$$AX = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p\times 1}(\mathbb{K}).$$

O vetor AX é o vetor coluna de $f(x)$ na base $(v_1', \ldots, v_p')$, uma vez que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\textstyle\sum_{j=1}^{n} x_j v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{i=1}^{p} a_{ij} v_i') \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{p} x_j (a_{ij} v_i')) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{p} (x_j a_{ij}) v_i') \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=1}^{n} (x_j a_{ij}) v_i') = \sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}) v_i' \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j) v_i'. \end{aligned}$$

□

Note-se que se $A = M(f; (v_j), (v_i'))$, $x = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n \in V$ e $A \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, então $f(x) = y_1 v_1' + \ldots + y_p v_p'$.

Exemplo 4.6.7. *Consideremos as bases*

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= ((1,1),(1,0)) \text{ de } \mathbb{C}^2, \\ \mathcal{B}' &= ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)) \text{ de } \mathbb{C}^3, \end{aligned}$$

e seja $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^3$ *a aplicação linear tal que* $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.
Vamos determinar $f(0,1)$ *seguindo o processo descrito anteriormente. Para tal, comecemos por escrever* $(0,1)$ *como combinação linear dos vetores da base* $\mathcal{B}$*;* $(0,1) = 1(1,1) + (-1)(1,0)$. *Então o vetor coluna de* $(0,1)$ *na base* $\mathcal{B}$ *é* $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ *e*

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

é o vetor coluna de $f(0,1)$ *na base* $\mathcal{B}'$*. Logo*

$$f(0,1) = 1(1,1,1) + 0(1,1,0) + (-3)(1,0,0) = (-2,1,1).$$

Através da noção de matriz de uma aplicação linear, podemos estabelecer uma relação entre as operações definidas para aplicações lineares e as operações definidas para matrizes.

Proposição 4.6.8. *Sejam V, V', V'' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita ≥ 1, $(v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V, $(v_1{}', \ldots, v_p{}')$ uma base de V' e $(v_1{}'', \ldots, v_m{}'')$ uma base de V''. Então*

i) $\forall f, g \in \mathcal{L}(V, V'),\ \ M(f+g; (v_j), (v_i{}')) = M(f; (v_j), (v_i{}')) + M(g; (v_j), (v_i{}'))$;

ii) $\forall f \in \mathcal{L}(V, V')$, $\forall \alpha \in \mathbb{K},\ \ M(\alpha f; (v_j), (v_i{}')) = \alpha M(f; (v_j), (v_i{}'))$;

iii) $\forall f \in \mathcal{L}(V, V')$, $\forall g \in \mathcal{L}(V', V'')$,

$$M(g \circ f; (v_j), (v_k{}'')) = M(g; (v_i{}'), (v_k{}''))M(f; (v_j), (v_i{}')).$$

Demonstração: *i)* Sejam $A = [a_{ij}] = M(f; (v_j), (v_i{}'))$ e $B = [b_{ij}] = M(g; (v_j), (v_i{}'))$. Então $A, B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ e também $A + B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$. Por outro lado, $f + g \in \mathcal{L}(V, V')$, logo $M(f + g; (v_j), (v_i{}')) \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$. Para cada cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$\begin{aligned} (f+g)(v_j) = f(v_j) + g(v_j) &= \textstyle\sum_{i=1}^p a_{ij} v_i{}' + \sum_{i=1}^p b_{ij} v_i{}' \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^p a_{ij} v_i{}' + b_{ij} v_i{}' \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^p (a_{ij} + b_{ij}) v_i{}'. \end{aligned}$$

Assim, para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$ e cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, a entrada (i, j) de $M(f + g; (v_j), (v_i{}'))$ é $a_{ij} + b_{ij}$ e, portanto, é igual à entrada (i, j) da matriz $A + B$. Logo $M(f + g; (v_j), (v_i{}')) = M(f; (v_j), (v_i{}')) + M(g; (v_j), (v_i{}'))$.

ii) Sejam $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A = [a_{ij}] = M(f; (v_j); (v_i{}'))$. Então $A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ e também $\alpha A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$. Como $\alpha f \in \mathcal{L}(V, V')$, tem-se $M(\alpha f; (v_j), (v_i{}')) \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$. Por outro lado, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$(\alpha f)(v_j) = \alpha f(v_j) = \alpha \sum_{i=1}^p a_{ij} v_i{}' = \sum_{i=1}^p \alpha(a_{ij} v_i{}') = \sum_{i=1}^p (\alpha a_{ij}) v_i{}'.$$

Assim, para cada $i \in \{1, \ldots, p\}$ e para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, a entrada (i, j) de $M(\alpha f; (v_j), (v_i{}'))$ é a_{ij}, i.e., é igual à entrada (i, j) de αA. Logo $M(\alpha f; (v_j), (v_i{}')) = \alpha M(f; (v_j), (v_i{}'))$. □

iii) Dadas $f \in \mathcal{L}(V, V')$, $g \in \mathcal{L}(V', V'')$, tem-se $g \circ f \in \mathcal{L}(V, V'')$. Sendo $B = [b_{ij}] = M(f; (v_j), (v_i{}'))$, $A = [a_{ki}] = M(g; (v_i{}'), (v_k{}''))$ e $C = M(g \circ f; (v_j), (v_k{}''))$, tem-se $B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{K})$ e $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Logo $AB \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Por outro lado, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se

$$\begin{aligned}(g\circ f)(v_j) &= g(f(v_j)) = g(\sum_{i=1}^p b_{ij}v_i{}') = \sum_{i=1}^p b_{ij}g(v_i{}')\\ &= \sum_{i=1}^p b_{ij}(\sum_{k=1}^m a_{ki}v_k{}'') = \sum_{i=1}^p(\sum_{k=1}^m b_{ij}(a_{ki}v_k{}''))\\ &= \sum_{i=1}^p(\sum_{k=1}^m(b_{ij}a_{ki})v_k{}'') = \sum_{k=1}^m(\sum_{i=1}^p(b_{ij}a_{ki})v_k{}'')\\ &= \sum_{k=1}^m(\sum_{i=1}^p b_{ij}a_{ki})v_k{}'' = \sum_{k=1}^m(\sum_{i=1}^p a_{ki}b_{ij})v_k{}'').\end{aligned}$$

Assim, para cada $k \in \{1,\dots,m\}$ e para cada $j \in \{1,\dots,n\}$, a entrada (k,j) de $M(g\circ f;(v_j),(v_k{}''))$ é $\sum_{i=1}^p a_{ki}b_{ij}$, que é igual à entrada (k,j) de AB. Logo $C = M(g\circ f;(v_j),(v_k{}'')) = AB = M(g;(v_i{}'),(v_k{}''))M(f;(v_j),(v_i{}'))$. □

Corolário 4.6.9. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita. Então $\mathcal{L}(V,V')$ tem dimensão finita e* $\dim\mathcal{L}(V,V') = \dim V \times \dim V'$.

Demonstração: Se $V = \{0_V\}$ ou $V' = \{0_{V'}\}$, tem $\mathcal{L}(V,V') = \{0_{\mathcal{L}(V,V')}\}$, e o resultado é imediato.
Caso $V \neq \{0_V\}$ e $V' \neq \{0_{V'}\}$, admitamos que $\dim V = n \geq 1$ e $\dim V' = p \geq 1$, e sejam $(v_1,\dots,v_n)$ e $(v_1{}',\dots,v_p{}')$ bases de V e de V', respectivamente. Já observámos que a aplicação

$$\begin{array}{rccl}\Phi: & \mathcal{L}(V,V') & \to & \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})\\ & f & \mapsto & M(f;(v_j),(v_i{}'))\end{array}$$

é bijetiva. Logo, pelas alíneas a) e b) da proposição anterior, Φ é aplicação linear. Logo Φ é isomorfismo de $\mathcal{L}(V,V')$ em $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$; portanto $\mathcal{L}(V,V') \cong \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$. Como $\dim\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K}) = p\times n$, também $\dim\mathcal{L}(V,V') = p\times n$; logo $\dim\mathcal{L}(V,V') = n\times p = \dim V\times\dim V'$. □

4.7 Matrizes de isomorfismos. Matrizes de mudança de base.

Teorema 4.7.1. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$ uma base de V, $\mathcal{B}' = (v_1{}',\dots,v_n{}')$ uma base de V', $f \in \mathcal{L}(V,V')$ e $A = M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$. Então A é invertível se e só se f é um isomorfismo.*

Demonstração: Sejam $f \in \mathcal{L}(V,V')$ e $A = M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$.
Admitamos que A é invertível. Então existe $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Por hipótese, $f: V \to V'$ é aplicação linear, logo resta mostrar que f é bijetiva, ou seja, que existe uma aplicação $g: V' \to V$ tal que $f\circ g = \mathrm{id}_{V'}$ e $g\circ f = \mathrm{id}_V$.
Seja $g: V' \to V$ a aplicação linear tal que $A^{-1} = M(g;\mathcal{B}',\mathcal{B})$. Atendendo à proposição 4.6.8, vem

$$M(f \circ g; \mathcal{B}', \mathcal{B}') = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')M(g; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = AA^{-1} = I_n = M(\mathrm{id}_{V'}; \mathcal{B}', \mathcal{B}');$$

logo $f \circ g = \mathrm{id}_{V'}$. Tem-se também

$$M(g \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M(g; \mathcal{B}', \mathcal{B})M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = A^{-1}A = \mathrm{I}_n = M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}, \mathcal{B}),$$

e, portanto, $g \circ f = \mathrm{id}_V$.
Assim $f : V \to V'$ é aplicação linear bijetiva; i.e., f é isomorfismo de V em V'.
Reciprocamente, se $f : V \to V'$ é isomorfismo, também $f^{-1} : V' \to V$ é isomorfismo.
Seja $B = M(f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B})$. Atendendo à Proposição 4.6.8, tem-se

$$\begin{aligned} AB &= M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')M(f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = M(f \circ f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B}') = M(\mathrm{id}_{V'}; \mathcal{B}', \mathcal{B}') = \mathrm{I}_n, \\ BA &= M(f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B})M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = M(f^{-1} \circ f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = M(\mathrm{id}_{V'}; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \mathrm{I}_n, \end{aligned}$$

i.e., $AB = \mathrm{I}_n = BA$ e, portanto, A é invertível. □

Corolário 4.7.2. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V, $\mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_n')$ uma base de V' e $f : V \to V'$ um isomorfismo.*
Se $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, tem-se $A^{-1} = M(f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B})$. □

Definição 4.7.3. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$, e $(v_1, \ldots, v_n)$ e $(v_1', \ldots, v_n')$ bases de V. Dá-se o nome de matriz de mudança de base de $(v_1, \ldots, v_n)$ para $(v_1', \ldots, v_n')$ à matriz $M(\mathrm{id}_V; (v_j), (v_i'))$.*

Dado $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \in V$, tem-se $x = \mathrm{id}_V(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i' v_j'$ onde

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix} = M(\mathrm{id}_V; (v_j), (v_i)') \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

i.e., conhecida a expressão de x como combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$, a matriz de mudança de base de $(v_1, \ldots, v_n)$ para $(v_1', \ldots, v_n')$ permite escrever x como combinação linear de $v_1', \ldots, v_n'$.

Qualquer matriz de mudança de base é uma matriz invertível. Vamos agora mostrar que a afirmação recíproca também é verdadeira, i.e., toda a matriz invertível é também uma matriz de mudança de base.

Proposição 4.7.4. *Sejam V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita $n \geq 1$, $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível.*
Então existem bases $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$ tais que $A = M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}', \mathcal{B})$ e $A = M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}, \mathcal{B}'')$.

Demonstração: Sendo $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ uma base de V e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ uma matriz invertível, seja $f : V \to V$ a aplicação linear tal que $A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ e seja $\mathcal{B}' = (f(v_1), \ldots, f(v_n))$.
Como A é invertível, f é um isomorfismo de V em V. Portanto $\mathcal{B}'$ é base de V, e tem-se $M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = A$.
Como A é invertível, também A^{-1} é invertível. Pela primeira parte da demonstração existe uma base $\mathcal{B}''$ de V tal que $A^{-1} = M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}'', \mathcal{B})$.
Logo $A = (A^{-1})^{-1} = M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}, \mathcal{B}'')$. □

Proposição 4.7.5. *Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita ≥ 1, $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de V, ${\mathcal{B}_1}', {\mathcal{B}_2}'$ bases de V' e $f \in \mathcal{L}(V, V')$.*
Então $M(f; \mathcal{B}_2, {\mathcal{B}_2}') = M(\mathrm{id}_V; {\mathcal{B}_1}', {\mathcal{B}_2}') M(f; \mathcal{B}_1, {\mathcal{B}_1}') M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$.

Demonstração: Tem-se $f = \mathrm{id}_{V'} \circ (f \circ \mathrm{id}_V)$. Logo, pela Proposição 4.6.8, vem

$$\begin{aligned} M(f; \mathcal{B}_2, {\mathcal{B}_2}') &= M(\mathrm{id}_{V'} \circ (f \circ \mathrm{id}_V); \mathcal{B}_2, {\mathcal{B}_2}') \\ &= M(\mathrm{id}_{V'}; {\mathcal{B}_1}', {\mathcal{B}_2}') M(f \circ \mathrm{id}_V; \mathcal{B}_2, {\mathcal{B}_1}') \\ &= M(\mathrm{id}_{V'}; {\mathcal{B}_1}', {\mathcal{B}_2}') M(f; \mathcal{B}_1, {\mathcal{B}_1}') M(\mathrm{id}_V; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1). \end{aligned}$$

□

Exemplo 4.7.6. *Sejam V, V' espaços vetoriais reais tais que* $\dim V = 3$ *e* $\dim V' = 2$. *Sejam (v_1, v_2, v_3) e (u_1, u_2, u_3) bases de V, $({v_1}', {v_2}')$ e $({u_1}', {u_2}')$ bases de V', tendo-se*

$$u_1 = v_1 - v_2, u_2 = 2v_1 + v_2 + v_3, u_3 = v_1 + v_2; \quad {u_1}' = {v_1}' + {v_2}', {u_2}' = -{v_1}'.$$

Seja $f : V \to V'$ a aplicação linear definida por

$$f(x_1 v_v + x_2 v_2 + x_3 v_3) = (x_1 + x_2){v_1}' + (x_2 - x_3){v_2}',$$

para todo $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\begin{aligned} f(v_1) &= f(1v_1 + 0v_2 + 0v_3) &= 1{v_1}' + 0{v_2}' \\ f(v_2) &= f(0v_1 + 1v_2 + 0v_3) &= 1{v_1}' + 1{v_2}' \\ f(v_2) &= f(0v_1 + 0v_2 + 1v_3) &= 0{v_1}' + (-1){v_2}' \end{aligned}$$

Logo $M(f; (v_j), ({v_i}')) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = A.$

Vamos determinar $B = M(f; (u_j), ({u_i}'))$. Pela Proposição 4.7.5, tem-se

$$B = M(\mathrm{id}_{V\prime}; ({v_j}'), ({u_i}')) A M(\mathrm{id}_V; (u_j), (v_i)).$$

Determinemos, então, $M(\mathrm{id}_{V'};(v_j{}'),(u_i{}'))$ *e* $M(\mathrm{id}_V;(u_j),(v_i))$*. Tem-se*

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{id}_V(u_1) &=& u_1 &=& 1v_1+(-1)v_2+0v_3 \\ \mathrm{id}_V(u_2) &=& u_2 &=& 2v_1+1v_2+1v_3 \\ \mathrm{id}_V(u_3) &=& u_3 &=& 1v_1+1v_2+0v_3 \end{array}$$

Como $u_1{}'=v_1{}'+v_2{}'$ *e* $u_2{}'=-v_1{}'$*, tem-se* $v_1{}'=-u_2{}'$ *e* $v_2{}'=u_1{}'+u_2{}'$*, i.e.,*

$$\begin{array}{rcccl} \mathrm{id}_{V'}(v_1{}') &=& v_1{}' &=& 0u_1{}'+(-1)u_2{}' \\ \mathrm{id}_{V'}(v_2{}') &=& v_2{}' &=& 1u_1{}'+1u_2{}'. \end{array}$$

Assim, $M(\mathrm{id}_V;(u_j),(v_i))=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $M(\mathrm{id}_{V'};(v_j{}'),(u_i{}'))=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Logo

$$\begin{aligned} B=M(f;(u_j)(u_i{}')) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sejam V, V' espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ de dimensão finita ≥ 1 tais que $\dim V=n$ e $\dim V'=p$. Sejam $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ bases de V e $\mathcal{B}'_1$, $\mathcal{B}'_2$ bases de V'.
Se $f\in\mathcal{L}(V,V')$ e $A=M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1)$ e $B=M(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2)$, então existem matrizes invertíveis $P\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ e $Q\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tais que $B=PAQ$.

Note-se que se $A,B\in\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{K})$ são matrizes equivalentes, então $B=PAQ$ onde $P\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ e $Q\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ são matrizes invertíveis. De facto, prova-se que A e B são equivalentes se e só se existem matrizes invertíveis $P\in\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ e $Q\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tais que $B=PAQ$.

Como caso particular da equivalência de matrizes, surge a definição seguinte.

Definição 4.7.7. *Sejam* $n\in\mathbb{N}$ *e* $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. Diz-se que a matriz* A *é* ***semelhante*** *à matriz* B *se existe uma matriz invertível* $P\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tal que* $B=P^{-1}AP$*.*