Notas de Álgebra Linear

Carla Mendes

2015/2016

2. Sistemas de Equações Lineares

2.1 Conceitos básicos

São diversos os problemas práticos com que nos deparamos no dia a dia que envolvem a resolução de sistemas de equações lineares. Embora alguns destes sistemas sejam simples de resolver, outros há que, devido às suas dimensões e complexidade, requerem métodos sistemáticos para a sua resolução. Neste capítulo iremos estudar um desses métodos.

Tal como no capítulo anterior, representamos por $\mathbb{K}$ o conjunto $\mathbb{R}$ ou o conjunto $\mathbb{C}$.

Definição 2.1.1. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Dá-se o nome de **sistema de m equações lineares em n incógnitas** $x_1, x_2, ..., x_n$ **e de coeficientes em** $\mathbb{K}$ a um sistema (S) do tipo*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

onde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$, para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Os elementos $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ($i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$) designam-se por ***coeficientes*** do sistema (S) e os elementos b_i ($i \in \{1, 2, ..., m\}$) por ***termos independentes***.

O sistema (S) diz-se ***homogéneo*** se $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, i.e., se os termos independentes de (S) são todos nulos.

Chama-se ***solução de*** (S) a qualquer n-uplo $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de $\mathbb{K}^n$ tal que, para todo $i \in \{1, ..., m\}$, $a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i$.

Representa-se por $\mathrm{Sol}_{(S)}$ o ***conjunto de soluções de*** (S), i.e.,

$$\mathrm{Sol}_{(S)} = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n : a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i, \forall i \in \{1, ..., m\}\}.$$

Se (S) e (S') são sistemas de equações lineares sobre $\mathbb{K}$ com o mesmo conjunto de soluções, diz-se que (S) e (S') são ***equivalentes***.

Um sistema (S) de m equações lineares em n incógnitas e de coeficientes em $\mathbb{K}$ diz-se:

- ***impossível*** se não tem solução i.e., se $\mathrm{Sol}_{(S)} = \emptyset$;
- ***possível*** se tem, pelo menos, uma solução, i.e., se $\mathrm{Sol}_{(S)} \neq \emptyset$;
- ***possível determinado*** se o sistema tem uma única solução;
- ***possível indeterminado*** caso o sistema tenha mais do que uma solução.

Um sistema (S) de m equações lineares em n incógnitas que seja homogéneo é sempre possível, uma vez que $(0, 0, ..., 0) \in \mathbb{K}^n$ é solução de (S); a esta solução dá-se a designação de ***solução trivial***.

Dado um sistema (S) de equações lineares entende-se por:

- ***discutir o sistema***, verificar se (S) é possível e, neste caso, se é determinado ou indeterminado;
- ***resolver o sistema***, determinar o conjunto de soluções do sistema.

Exemplo 2.1.2. *A equação*

$$x_1 \quad + \quad x_2 \quad - \quad 8x_3 \quad = \quad 0$$

é equivalente a

$$x_1 \quad = \quad -x_2 \quad + \quad 8x_3.$$

Uma vez que x_2 e x_3 são arbitrários, este sistema é possível e indeterminado. Para obtermos uma solução diferente da trivial podemos considerar, por exemplo, $x_2 = 1$ e $x_3 = 1$, donde resulta $x_1 = 7$.

Exemplo 2.1.3. *Consideremos o seguinte sistema de 3 equações lineares em 3 incógnitas:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} -x & - & 5y & - & 2z & = & 2 & (i) \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 0 & (ii) \\ 3x & + & 3y & + & 3z & = & -1 & (iii). \end{array}\right.$$

Se adicionarmos (i) e (iii), obtemos obtemos a equação

$$2x - 2y + z = 1,$$

o que não é consistente com a equação (ii), pelo que o sistema não admite nenhuma solução, i.e., é um sistema impossível.

Exemplo 2.1.4. *Dado o sistema de* 3 *equações lineares em* 3 *incógnitas*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrr} 0x_1 & + & 1x_2 & - & 8x_3 & = & -17 & \textit{(i)} \\ 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 10 & \textit{(ii)} \\ 1x_1 & - & 1x_2 & + & 0x_3 & = & 0 & \textit{(iii)} \end{array}\right.$$

vamos calcular a sua solução.

Se trocarmos a linha (i) com a linha (ii), obtemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrr} 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 10 & \textit{(i)} \\ 0x_1 & + & 1x_2 & - & 8x_3 & = & -17 & \textit{(ii)} \\ 1x_1 & - & 1x_2 & + & 0x_3 & = & 0 & \textit{(iii)} \end{array}\right.$$

Agora, se substituirmos a linha (iii) por (iii)-(i) ficamos com

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrr} 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 10 & \textit{(i)} \\ 0x_1 & + & 1x_2 & - & 8x_3 & = & -17 & \textit{(ii)} \\ 0x_1 & - & 1x_2 & - & 1x_3 & = & -10 & \textit{(iii)} \end{array}\right.$$

Substituindo a linha (iii) por (iii)+(ii) tem-se

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrr} 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 10 & \textit{(i)} \\ 0x_1 & + & 1x_2 & - & 8x_3 & = & -17 & \textit{(ii)} \\ 0x_1 & + & 0x_2 & - & 9x_3 & = & -27 & \textit{(iii)} \end{array}\right.$$

Finalmente, se multiplicarmos a equação (iii) por $-1/9$*, obtém-se*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrr} 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 10 & \textit{(i)} \\ 0x_1 & + & 1x_2 & - & 8x_3 & = & -17 & \textit{(ii)} \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 3 & \textit{(iii)} \end{array}\right.$$

Neste momento é fácil determinar a solução do sistema; substituindo x_3 *por* 3 *em (ii) obtém-se* $x_2 = 7$ *e da equação (i), por substituição de* x_3 *e* x_2*, resulta que* $x_1 = 7$*. Assim, uma vez que o sistema admite solução e que esta é única, concluímos que o sistema é possível e determinado.*

Em cada um dos exemplos anteriores, o sistema inicial foi sucessivamente transformado noutros sistemas efectuando apenas as seguintes operações sobre equações:

1) troca da equação i com a equação j;

2) multiplicação da equação i por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;

3) substituição da equação i pela sua soma com a equação j multplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$.

A estas operações damos a designação de ***operações elementares sobre equações***. É simples de verificar que se (S') for um sistema obtido a partir de um sistema (S) efectuando uma operação elementar sobre as equações de (S), então os dois sistemas são equivalentes.

Dado um sistema (S) de equações lineares e de coeficientes em $\mathbb{K}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

este pode ser representado pela equação matricial

$$Ax = b$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

As matrizes A, x e b designam-se, respetivamente, por ***matriz simples de*** (S), ***matriz incógnita de*** (S) e ***matriz dos termos independentes de*** (S). Tendo em conta que as incógnitas têm um papel secundário na resolução de um sistema e que as operações elementares sobre as equações envolvem apenas os coeficientes e os termos independentes, o sistema (S) pode ainda ser representado, de uma forma mais abreviada, pela matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

à qual se dá a designação de ***matriz ampliada de*** (S) e que se representa por $[A \,|\, b]$. De facto, o sistema (S) fica completamente representado por esta matriz, uma vez que cada linha da matriz representa uma equação de (S).

Exemplo 2.1.5. *Se consideramos o sistema* (S) *apresentado no exemplo* 2.1.4*, a matriz simples, a matriz incógnita e a matriz dos termos independentes deste sistema são, respetivamente,*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad e \qquad b = \begin{bmatrix} -17 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz ampliada associada ao sistema é a matriz

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -8 & -17 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Dado um sistema (S) de m equações lineares em n incógnitas e de coeficientes em $\mathbb{K}$, o seu conjunto de soluções pode ser determinado através da resolução da equação matricial $Ax = b$ que lhe está associada. De facto, $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ é solução de (S) se e só se

$$A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = b.$$

Nos exemplos 2.1.2, 2.1.3 e 2.1.4, os sistemas foram resolvidos recorrendo apenas a operações elementares sobre equações. Efectuar uma destas operações sobre as equações de um sistema (S) corresponde, em termos matriciais, a efectuar operações análogas sobre as linhas da matriz ampliada $[A \,|\, b]$ associada ao sistema. De facto:

- trocar a equação i com a equação j no sistema (S) corresponde a trocar a linha i com a linha j da matriz $[A \,|\, b]$;
- multiplicar a equação i do sistema (S) por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ corresponde a multiplicar a linha i da matriz $[A \,|\, b]$ por α;
- substituir a equação i do sistema (S) pela sua soma com a equação j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$ corresponde a substituir a linha i da matriz $[A \,|\, b]$ pela sua soma com a linha j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$.

Definição 2.1.6. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$*. Definem-se como* ***operações elementares sobre linhas*** *da matriz* A *as seguintes operações:*

1) troca da linha i *com a linha* j*;*

2) multiplicação da linha i por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;

3) substituição da linha i pela sua soma com a linha j multplicada por $\beta \in \mathbb{K}$, com $i \neq j$,

Analogamente define-se **transformação elementar sobre as colunas** de uma matriz, bastando substituir "linha" por "coluna" na definição anterior.

Ao longo do texto adotaremos as seguintes notações para as transformações elementares sobre linhas:

- $A \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} B$: para indicar que a matriz B é obtida da matriz A efetuando a troca das suas linhas i e j;
- $A \underset{l_i \to \alpha l_i}{\longrightarrow} B$: para indicar que a matriz B é obtida de A multiplicando a linha i da matriz A por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$;
- $A \underset{l_i \to l_i + \beta l_j}{\longrightarrow} B$: para indicar que a matriz B é obtida de A substituindo a linha i da matriz A pela sua soma com a linha j multiplicada por $\beta \in \mathbb{K}$.

Para representar as transformações elementares por colunas adota-se notação semelhante à anterior, mas escreve-se c_i para indicar a coluna i.

Proposição 2.1.7. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se a matriz $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ pode ser obtida da matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ efetuando uma transformação elementar sobre linhas (respetivamente, colunas), então a matriz A também pode ser obtida de B efetuando uma transformação elementar sobre linhas (respetivamente, colunas).*

Demonstração: No caso das transformações elementares por linhas, basta ter em conta que:

- se $A \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} B$, então $B \underset{l_j \leftrightarrow l_i}{\longrightarrow} A$;
- se $A \underset{l_i \to \alpha l_i}{\longrightarrow} B$, com $\alpha \neq 0$, então $B \underset{l_i \to \frac{1}{\alpha} l_i}{\longrightarrow} A$;
- se $A \underset{l_i \to l_i + \beta l_j}{\longrightarrow} B$, então $B \underset{l_i \to l_i - \beta l_j}{\longrightarrow} A$.

De forma análoga justifica-se o resultado para o caso das transformações elementares por colunas. $\square$

Definição 2.1.8. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Diz-se que A é* ***equivalente por linhas (respetivamente, por colunas)*** *a B se B pode ser obtida a partir de A efetuando um número finito de transformações elementares sobre as linhas (respetivamente, colunas) de A.*

Com base na Proposição 2.1.7 é fácil concluir que se $A \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$ é equivalente por linhas (respetivamente, colunas) a $B \in \mathcal{M}(\mathbb{K})$, então B é equivalente por linhas (respetivamente, colunas) a A e, por isso, podemos dizer apenas que A e B são equivalentes.

O resultado seguinte mostra-nos que podemos efetuar uma transformação elementar sobre as linhas de uma matriz premultiplicando A (ou seja, multiplicando A à esquerda) por uma matriz adequada.

Proposição 2.1.9. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Então:*

1. *Se E é a matriz quadrada de ordem m obtida da matriz identidade I_m trocando as suas linhas i e j, então a matriz EA é obtida da matriz A trocando as suas linhas i e j.*

2. *Se E é a matriz de ordem m obtida da matriz identidade I_m multiplicando a linha i por $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, então EA é a matriz obtida de A multiplicando a linha i por α.*

3. *Se E é a matriz quadrada de ordem m obtida da matriz identidade I_m substituindo a linha na posição i pela sua soma com β vezes a linha na posição j, então EA é a matriz obtida da matriz A substituindo a linha na posição i pela sua soma com β vezes a linha na posição j, $i \neq j$.*

Demonstração: Exercício. □

Analogamente ao que acontece com as transformações elementares por linhas, uma transformação elementar sobre as colunas de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ pode ser obtida posmultiplicando A (ou seja, multiplicando A à direita) por uma matriz obtida da matriz I_n efetuando nas suas colunas a mesma transformação elementar que se pretende efetuar na matriz A.

Definição 2.1.10. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Chamamos* **matriz elementar sobre linhas (respetivamente, colunas)** *de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a toda a matriz que pode ser obtida da matriz identidade I_n por aplicação de uma transformação elementar sobre as suas linhas (respetivamente, colunas).*

Proposição 2.1.11. *Toda a matriz elementar sobre linhas (respetivamente, colunas) é também uma matriz elementar sobre colunas (respetivamente, linhas).*

Demonstração: Facilmente se prova o resultado enunciado. De facto, tem-se:

- $I_n \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} E$ se e só se $I_n \underset{c_i \leftrightarrow c_j}{\longrightarrow} E$;
- $I_n \underset{l_i \rightarrow \alpha l_i}{\longrightarrow} E$ se e só se $I_n \underset{c_i \rightarrow \alpha c_i}{\longrightarrow} E$;

- $I_n \underset{l_i \to l_i + \beta l_j}{\longrightarrow} E$ se e só se $I_n \underset{c_i \to c_i + \beta c_j}{\longrightarrow} E$;

A respeito de matrizes elementares é também conveniente observar que toda a matriz elementar sobre linhas (respetivamente, colunas) é uma matriz invertível.

Proposição 2.1.12. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Toda a matriz elementar $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é invertível e, para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$, tem-se:*

1. *Se $i \neq j$ e $I_n \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} E$, então $I_n \underset{l_i \leftrightarrow l_j}{\longrightarrow} E^{-1}$;*
2. *Se $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $I_n \underset{l_i \to \alpha l_i}{\longrightarrow} E$, então $I_n \underset{l_i \to \frac{1}{\alpha} l_i}{\longrightarrow} E^{-1}$;*
3. *Se $i \neq j$, $\beta \in \mathbb{K}$ e $I_n \underset{l_i \to l_i + \beta l_j}{\longrightarrow} E$, então $I_n \underset{l_i \to l_i + (-\beta) l_j}{\longrightarrow} E^{-1}$*

Demonstração: Exercício. □

Regressando aos sistemas de equações lineares, e tendo em atenção as observações feitas anteriormente, é fácil verificar que, da mesma forma que as operações elementares sobre as equações de um sistema não alteram o seu conjunto de soluções, as operações elementares sobre as linhas da sua matriz ampliada também não alteram a solução da equação matricial associada ao sistema.

Teorema 2.1.13. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $Ax = b$ a equação matricial de um sistema de m equações lineares em n incógnitas e de coeficientes em $\mathbb{K}$. Se a matriz $[A' \,|\, b']$ é obtida de $[A \,|\, b]$ efectuando uma operação elementar sobre as linhas, então $A'x = b'$ e $Ax = b$ têm o mesmo conjunto de soluções.*

Demonstração: Cada operação elementar sobre as linhas da matriz ampliada $[A \,|\, b]$ corresponde a multiplicar (à esquerda) ambos os membros da equação $Ax = b$ por uma matriz elementar Q. Assim, tendo em conta que $A' = QA$, $b' = Qb$ e que as matrizes elementares são invertíveis, o resultado é imediato. De facto, dado $c \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$,

$$Ac = b \Rightarrow QAc = Qb \Rightarrow A'c = b'$$

e

$$A'c = b' \Rightarrow QAc = Qb \Rightarrow Q^{-1}QAc = Q^{-1}Qb \Rightarrow Ac = b.$$ □

Observação: Como já observámos anteriormente toda a matriz que é equivalente por linhas a uma matriz A também lhe é equivalente por colunas, porém o resultado anterior não é válido para todas as operações elementares por colunas. Com efeito, quando se aplicam operações elementares sobre matrizes na resolução de sistemas, a única operação sobre colunas que pode ser usada é a troca de colunas, mas neste caso tem de se proceder a uma troca de incógnitas no sistema final que seja coerente com a troca de colunas efetuada. Sendo assim, na resolução de sistemas optaremos por recorrer apenas a operações elementares sobre linhas.

2.2 Discussão e resolução de sistemas

Nesta secção descrevemos um método que permite sistematizar o processo de resolução e discussão de sistemas: o método de eliminação de Gauss. Com este método o sistema inicial é transformado num outro sistema que lhe é equivalente mas de mais fácil resolução.

No exemplo 2.1.4 o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 0x_1 & + & 1x_2 & - & 8x_3 & = & -17 \\ 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 10 \\ 1x_1 & - & 1x_2 & + & 0x_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

foi sucessivamente transformado, efectuando operações elementares sobre equações, até obtermos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 1x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 10 \\ 0x_1 & + & 1x_2 & - & 8x_3 & = & -17 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 1x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

o qual é de resolução bastante mais simples. Considerando a representação do sistema em termos de matrizes, esta transformação corresponde a efectuar sucessivas operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada do sistema

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 0 & 1 & -8 & -17 \\ 1 & 0 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

até obtermos a matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -8 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esta última matriz tem a particularidade de ter um formato que satisfaz as condições da definição seguinte.

Definição 2.2.1. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ diz-se uma* ***matriz em escada*** *se satisfaz as seguintes condições*

- *se o primeiro elemento não nulo numa linha está na coluna j, então a linha seguinte começa com pelo menos j elementos nulos;*
- *se houver linhas totalmente constituídas por zeros, elas aparecem depois das outras.*

O processo que foi adoptado na resolução do sistema do exemplo 2.1.4, e que permitiu reduzir a matriz ampliada do sistema a uma matriz em escada, é um exemplo de aplicação do método que a seguir descrevemos.

Teorema 2.2.2. *Por meio de transformações elementares nas linhas, toda a matriz pode ser reduzida a uma matriz em escada.*

Demonstração: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então a matriz A pode ser reduzida a uma matriz em escada, efectuando operações elementares sobre as suas linhas, de acordo com o seguinte processo.

Para k de 1 até m:

i) Procurar a primeira coluna com elementos não nulos na linha k ou abaixo desta.

ii) Se não existir a coluna indicada em i), dá-se o processo por terminado.

iii) Caso exista a coluna referida em i) e se j_k é essa coluna, $j_k \in \{1, ..., n\}$, assegura-se que o elemento na linha k desta coluna é não nulo, trocando, se necessário, a linha k com alguma linha que esteja abaixo; representemos por $a^{(k)}_{kj_k}$ esse elemento.

iv) Para cada $i \in \{k+1, ..., m\}$, adiciona-se à linha i a linha k multiplicada por $-\frac{a^{(k)}_{ij_k}}{a^{(k)}_{kj_k}}$.

Terminado o processo a matriz que se obtém é uma matriz em escada. □

Ao processo descrito na demonstração anterior, que permite transformar uma matriz numa matriz em escada, dá-se a designação de ***método de eliminação de Gauss***. Os elementos $a^{(1)}_{1j_1}, a^{(2)}_{2j_2}, ...$ designam-se por ***pivots da eliminação***.

Exemplo 2.2.3. *Consideremos a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss a esta matriz, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -8 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - 4l_2 \\ l_4 \to l_4 + \frac{1}{2}l_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[l_4 \to l_4 - \frac{3}{4}l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A última matriz obtida é uma matriz em forma de escada e equivalente por linhas à matriz A.

Observação: Como já sabemos, pela Proposição 2.1.11, toda a transformação que pode ser feita numa matriz por meio de transformações elementares sobre linhas também pode ser feita por meio de transformações elementares sobre colunas e, por conseguinte, toda a matriz pode igualmente ser transformada numa matriz em escada por meio de transformações elementares sobre colunas. Porém, tal como já observámos anteriormente, a única operação sobre colunas que pode ser usada na resolução de sistemas é a troca de colunas (não esquecendo de efetuar no sistema final a troca de incógnitas coerente com a troca de coluna efetuada).

Embora a matriz em escada obtida a partir de uma matriz A, por aplicação do método de eliminação de Gauss, não seja única, uma vez que que há alguma flexibilidade na escolha das transformações elementares a efetuar sobre a matriz A (nomeadamente, na escolha das linhas que se trocam para colocar um elemento na posição de pivot), prova-se que o número de pivots usados no método de eliminação de Gauss, que é igual ao número de linhas não nulas da matriz em escada obtida de A, é univocamente determinado pelas entradas da matriz A. Com efeito, quaisquer matrizes em escada equivalentes por linhas a uma matriz A têm o mesmo número de linhas não nulas, pelo que faz sentido considerar a definição seguinte.

Definição 2.2.4. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Designa-se por* ***característica*** *da matriz A, e representa-se por car(A), o número de linhas não nulas de qualquer matriz em forma de escada que seja equivalente por linhas a A.*

Exemplo 2.2.5. *Como vimos no exemplo anterior, a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

é equivalente por linhas à seguinte matriz em forma de escada

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, como U tem 3 linhas não nulas, temos $car(A) = 3$.

O método de eliminação de Gauss pode ser utilizado na resolução de sistemas de equações lineares. Um passo elementar deste método, quando aplicado à matriz ampliada de um sistema $Ax = b$, consiste na adição, membro a membro, a uma equação de um múltiplo de outra, de forma que na equação obtida seja nulo o coeficiente de certa incógnita. Diz-se que se eliminou essa incógnita da equação. Os passos elementares são conduzidos de maneira a eliminar a incógnita x_1 de todas as equações a partir da 2ª equação, depois eliminar a incógnita x_2 de todas as equações a partir da 3ª equação, etc. Quando termina o método de eliminação de Gauss, obtemos uma matriz em escada $[U|c]$. O sistema correspondente a esta matriz, $Ux = c$, é de resolução mais simples e há a garantia de ser equivalente ao sistema $Ax = b$, uma vez que $[U|c]$ é obtida de $[A|b]$ efectuando apenas operações elementares sobre linhas. Quando se obtém o sistema correspondente à matriz $[U|c]$, é fácil verificar se o sistema é possível ou impossível: se $U = \mathbf{0}_{m\times n}$ e $c \neq 0$, podemos concluir de imediato que o sistema é impossível. Se o sistema for possível, resolve-se de baixo para cima, escrevendo, se necessário, as ***incógnitas básicas*** (as que estão a multiplicar pelos pivots) em função das ***livres*** (as restantes variáveis).

Exemplo 2.2.6. *Consideremos o seguinte sistema de 4 equações lineares em 4 incógnitas:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right. .$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 2l_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - 3l_2 \\ l_4 \to l_4 + l_2}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[l_4 \to l_4 - \frac{1}{2}l_3]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right].$$

Desta forma obtém-se o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \quad -x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ \quad\quad 2x_3 + 2x_4 = -4 \\ \quad\quad\quad -x_4 = 5 \end{cases}$$

equivalente ao inicial, mas de mais fácil resolução. Da última equação obtém-se $x_4 = -5$*, substituindo* x_4 *na 3ª equação temos* $x_3 = 3$*, donde* $x_2 = 1$ *e* $x_1 = 1$.

Como vimos no exemplo anterior, quando se aplica o método de eliminação de Gauss na resolução de um sistema de equações lineares, a matriz ampliada do sistema é transformada, por meio de operações elementares sobre linhas, numa matriz em forma de escada. Mas, como iremos ver, o processo descrito no método de eliminação de Gauss pode ser complementado com outras operações elementares de forma a que a matriz ampliada do sistema seja transformada até se obter uma matriz em forma de *escada reduzida*.

Definição 2.2.7. *Sejam* $m, n \in \mathbb{K}$ *e* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. *Diz-se que A é uma* ***matriz em escada reduzida*** *ou que está em* ***forma de escada reduzida*** *se satisfaz as seguintes condições:*

- *A é uma matriz em escada;*
- *se uma linha tem elementos não nulos, então o primeiro elemento não nulo da linha é igual a* 1.
- *se o primeiro elemento não nulo de uma linha* i *está na coluna* j*, então todos os elementos da coluna* j*, com excepção do elemento que está na linha* i*, são iguais a zero.*

Exemplo 2.2.8.

1. *As matrizes* $\mathbf{0}_{m\times n}$ *e* I_n *são matrizes em forma de escada reduzida.*
2. *A matriz*
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
está em forma de escada reduzida.
3. *A matriz*
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

embora muito parecida com a matriz anterior, não está em forma de escada reduzida.

4. *A matriz* $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *não está em forma de escada reduzida.*

Teorema 2.2.9. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Toda a matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ pode ser transformada numa matriz em forma de escada reduzida por meio de operações elementares sobre linhas.*

Demonstração: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Se A é a matriz nula, então a matriz já está na forma de escada reduzida. Caso A não seja a matriz nula, então A pode ser transformada numa matriz em escada reduzida, efectuando operações elementares sobre as suas linhas, de acordo com o seguinte processo: aplicando o método descrito no Teorema 2.2.2 à matriz A obtemos uma matriz em escada A' equivalente a A. Uma vez obtida a matriz em escada A', anulam-se todos os elementos não nulos que estejam acima dos pivots ${a_{kj_k}}^{(k)}$ da matriz A'; para tal, adiciona-se a cada linha i da matriz A', para $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, a linha k multiplicada por $-\frac{a_{ij_k}}{{a_{kj_k}}^{(k)}}$. Finalmente, multiplica-se cada linha não nula da matriz pelo inverso do pivot dessa linha. Terminado o processo, obtém-se uma matriz em escada reduzida e equivalente por linhas à matriz A. $\square$

Ao processo de transformar uma dada matriz numa matriz em escada reduzida dá-se a designação de ***condensação*** da matriz.

É conveniente observar que uma matriz A é equivalente por linhas a uma única matriz em forma de escada reduzida - a esta matriz em escada reduzida dá-se a designação de **forma de Hermite** de A.

Exemplo 2.2.10. *Consideremos a matriz a seguir indicada*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando o método descrito anteriormente de forma a transformar a matriz A numa matriz em forma de escada reduzida, obtemos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - l_1 \\ l_3 \to l_3 - 3l_1}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - l_2 \\ l_4 \to l_4 + \frac{1}{2}l_2}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + 12l_4 \\ l_2 \to l_2 + 2l_4 \\ l_1 \to l_1 - 4l_4}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \to$$

$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 + \frac{1}{4}l_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2 \to -\frac{1}{4}l_2 \\ l_4 \to 2l_4}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A última matriz obtida é a forma de Hermite de A.

Observação: Novamente pela Proposição 2.1.11, é fácil perceber que a transformação de uma matriz A numa matriz em forma de escada reduzida também pode ser obtida por meio de operações elementares sobre colunas, porém, voltamos a recordar que nem todas as operações elementares sobre colunas podem ser aplicadas na resolução de um sistema de equações lineares.

O processo descrito no Teorema 2.2.9, por ser uma extensão do método de eliminação de Gauss, é designado por ***método de eliminação de Gauss-Jordan*** e pode também ser aplicado na resolução de sistemas de equações lineares. Neste caso, a matriz ampliada de um dado sistema de equações lineares é transformada até que se obtenha uma matriz equivalente por linhas e em forma de escada reduzida; o sistema de equações correspondente a esta última matriz (equivalente ao sistema inicial) é, em princípio, de resolução mais simples.

Exemplo 2.2.11. *Consideremos de novo o sistema indicado no exemplo 2.2.6.*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array} \right. .$$

Nesse mesmo exemplo vimos que aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada deste sistema é possível obter a matriz em escada

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array} \right]$$

Partindo agora desta última matriz e seguindo o processo descrito no Teorema 1.6.9 temos

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 + 2l_4 \\ l_2 \to l_2 - l_4 \\ l_1 \to l_1 + l_4}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 + \frac{1}{2}l_3 \\ l_1 \to l_1 - \frac{1}{2}l_3}]{}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \to l_1 + 2l_2]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to -l_2 \\ l_3 \to \frac{1}{2}l_3 \\ l_4 \to -l_4}]{}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}\right].$$

A última matriz obtida, em forma de escada reduzida, é equivalente por linhas à matriz $[A\,|\,b]$. Por conseguinte, o sistema inicial (S) é equivalente ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & 1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 3 \\ x_4 & = & -5 \end{array}\right.$$

donde obtemos $Sol_{(S)} = \{(1, 1, 3, -5)\}$.

No texto que se segue debruçamo-nos sobre um outro tipo de problema que também já foi referido no início do capítulo - a discussão de sistemas de equações lineares. Como iremos ver, a discussão de um sistema de equações lineares pode ser feita recorrendo à característica da sua matriz simples e da sua matriz ampliada sem que seja necessário determinar o seu conjunto de soluções. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, $[A\,|\,b]$, podemos determinar a característica dessa matriz e a característica da matriz simples do sistema, A. Sendo $[U|c]$ a matriz em escada obtida a partir de $[A|b]$ por aplicação do método de eliminação de Gauss, então $\mathrm{car}([A|b])$ é o número de linhas não nulas de $[U|c]$ e $\mathrm{car}(A)$ é o número de linhas não nulas de U. Note-se que se tem sempre $\mathrm{car}(A) \leq \mathrm{car}([A|b])$.

Designando por r a característica de A pode-se ter:

- $r = m = n$;
- $r = m < n$;
- $r < m$

No primeiro caso, a matriz $[U\,|\,c]$ tem a forma

$$[U \mid c] = \left[\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} & c_2 \\ 0 & 0 & \dots & u_{3n} & c_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} & c_n \end{array}\right]$$

que corresponde ao sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} u_{11}x_1 & + & u_{12}x_2 & + & \dots & + & u_{1n}x_n & = & c_1 \\ & & u_{22}x_2 & + & \dots & + & u_{2n}x_n & = & c_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & u_{nn}x_n & = & c_n \end{array}\right.$$

em que $u_{ii} \neq 0$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$.
A partir da última equação deste sistema obtemos $x_n = \frac{c_n}{u_{nn}}$ e, por substituição inversa nas equações anteriores, obtemos sucessivamente $x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1$. Neste caso o sistema é determinado.

No segundo caso, em que temos $r = m < n$, a matriz $[U \mid c]$ será da forma

$$[U \mid c] = \left[\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & \dots & u_{1j_1} & \dots & u_{1j_2} & \dots & u_{1j_3} & \dots & u_{1j_m} & \dots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & u_{2j_2} & \dots & u_{2j_3} & \dots & u_{2j_m} & \dots & u_{2n} & c_2 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{3j_3} & \dots & u_{3j_m} & \dots & u_{3n} & c_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{mj_m} & \dots & u_{mn} & c_n \end{array}\right]$$

onde, para todo $k \in \{1, ...m\}$, $u_{kj_k} \neq 0$ e, para todo $j < j_k$, $u_{kj} = 0$.

No sistema correspondente a $[U \mid c]$ são livres as incógnitas x_j, com $j \in \{1, ..., n\} \setminus \{j_1, j_2, ..., j_m\}$, e obtemos as restantes incógnitas em função destas. Desta forma, o sistema é indeterminado.

No caso em que $r < m$, temos

$$[U \mid c] = \left[\begin{array}{ccccccccccc|c} 0 & \dots & u_{1j_1} & \dots & u_{1j_2} & \dots & u_{1j_3} & \dots & u_{1j_m} & \dots & u_{1n} & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & u_{2j_2} & \dots & u_{2j_3} & \dots & u_{2j_m} & \dots & u_{2n} & c_2 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{3j_3} & \dots & u_{3j_m} & \dots & u_{3n} & c_3 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & u_{rj_r} & \dots & u_{rn} & c_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_{r+1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & c_m \end{array}\right]$$

Se $c_i \neq 0$, para algum $i \in \{r+1, ..., m\}$, o sistema é obviamente impossível.

Se $c_{r+1} = \cdots = c_m = 0$, então as últimas $m-r$ equações do sistema correspondente à matriz $[U|c]$ são identidades, e o sistema é equivalente ao das r primeiras equações. Este sistema está num dos casos estudados antes; de facto, se $r = n$, o sistema enquadra-se no primeiro caso, e se $r < n$, temos um sistema do tipo que foi estudado no segundo caso.

Do que foi observado conclui-se o seguinte:

Teorema 2.2.12. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $Ax = b$ um sistema de equações lineares, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então*

- *o sistema é possível se e só se $c(A) = c([A|b])$;*
- *o sistema é possível determinado se e só se $c(A) = c([A|b]) = n$;*
- *o sistema é possível indeterminado se e só se $c(A) = c([A|b]) < n$.* □

Exemplo 2.2.13. *Consideremos o sistema de 4 equações lineares em 4 incógnitas*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada do sistema, temos

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 + l_1]{}$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_3 \to l_3 - l_2 \\ l_4 \to l_4 - l_2}]{} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_4 \to l_4 - l_3]{}.$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

O sistema correspondente à última matriz, e equivalente ao inicial, é o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & & & = & 2 \\ & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & & & & & 0 & = & -1 \end{array}\right.$$

que obviamente é impossível.

Exemplo 2.2.14. *Consideremos o sistema do exemplo 2.2.6. Aplicando o método de eliminação de Gauss à matriz ampliada deste sistema obtemos a matriz*

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right]$$

à qual corresponde o sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & -x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & & & 2x_3 & + & 2x_4 & = & -4 \\ & & & & & - & x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

Uma vez que $c(A) = c(A|b) = 4$, o sistema é possível e determinado. De facto, da última equação resulta que $x_4 = -5$ e substituindo sucessivamente nas equações anteriores, obtemos $x_3 = 3$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$.

Exemplo 2.2.15. *Consideremos o sistema (S) de 3 equações lineares em 3 incógnitas:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & & & + & 4x_3 & = & 8 \\ -x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array}\right. .$$

Como

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \\ -1 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to l_2 - 2l_1 \\ l_3 \to l_3 + l_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - \frac{1}{6}l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

concluímos que $c\,(A) = c\,(A|b) = 2 < 3$, pelo que o sistema é possível indeterminado. O sistema correspondente à última matriz é dado por

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ & & 6x_2 & & & = & 6 \end{array}\right.$$

onde

$$\begin{array}{l} x_3 \text{ é arbitrário,} \\ x_2 = 1, \\ x_1 = 4 - 2x_3. \end{array}$$

Assim, $Sol_{(S)} = \{(4 - 2a, 1, a) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$.

No caso particular dos sistemas homogéneos já havíamos observado que estes sistemas são sempre possíveis. Agora, com base no teorema anterior, sabe-se também que o sistema $Ax = \mathbf{0}$, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, é determinado se e só $c(A) = n$.

Definição 2.2.16. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $Ax = b$, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, um sistema de equações lineares. Dá-se a designação de* ***sistema homogéneo associado a*** *$Ax = b$ ao sistema $Ax = \mathbf{0}$.*

O conjunto de soluções de um sistema e do sistema homogéneo associado estão relacionados, como podemos verificar no teorema seguinte.

Teorema 2.2.17. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, $Ax = b$ um sistema de equações lineares, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, e $y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ uma solução do sistema. Então $w \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é solução de $Ax = b$ se e só se $w = y + z$, onde $z \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é solução de $Ax = \mathbf{0}$.*

Demonstração: Seja $y \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ uma solução de $Ax = b$.
Suponhamos que $z \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ é uma solução do sistema homogéneo $Ax = \mathbf{0}$. Então,

$$A\,(y + z) = Ay + Az = b + \mathbf{0} = b,$$

pelo que $w = y + z$ é solução de $Ax = b$.

Reciprocamente, suponhamos que w é solução de $Ax = b$. Então,

$$A\,(w - y) = Aw - Ay = b - b = \mathbf{0},$$

pelo que $w = y + (w - y)$ onde $w - y$ é solução de $Ax = \mathbf{0}$. □

Deste teorema segue de imediato que:

Teorema 2.2.18. *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ e $Ax = b$ um sistema de equações lineares, com $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Então, se for possível, o sistema $Ax = b$ é determinado se e só se o sistema homogéneo associado é determinado (i.e., admite como única solução $\mathbf{0}_{n\times 1}$).* □

2.3 Inversão de matrizes

O método de eliminação de Gauss-Jordan, para além de nos facultar um algoritmo para a resolução de sistemas, dá-nos também um processo para decidir sobre a existência da inversa de uma matriz e para a calcular. De facto, a matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é invertível se existir uma matriz $X = [x_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AX = I_n = XA$. Por sua vez, determinar uma matriz X tal que $AX = I_n$ é o mesmo que determinar

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad x_n = \begin{bmatrix} x_{n1} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{bmatrix}$$

tais que

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Ax_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad Ax_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (*)$$

Antes de vermos de que forma o método de eliminação de Gauss-Jordan pode ser aplicado no cálculo da inversa de uma matriz, apresentamos uma caracterização de matriz invertível que nos permite decidir sobre a invertibilidade de uma matriz através do cálculo da sua característica.

Teorema 2.3.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Então A é invertível se e só se $c(A) = n$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Suponha-se que A é invertível. Então

$$Ax = \mathbf{0} \Rightarrow A^{-1}(Ax) = \mathbf{0} \Rightarrow (A^{-1}A)x = \mathbf{0} \Rightarrow x = \mathbf{0}$$

Logo, como o sistema $Ax = \mathbf{0}$ é determinado, temos $c(A) = n$.

($\Leftarrow$) Suponha-se que $c(A) = n$. Então cada um dos sistemas indicado em $(*)$ é possível e determinado, o que significa que existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $AX = I_n$. Para podermos concluir que X é a inversa de A falta-nos verificar se $XA = I_n$.
Primeiro, comecemos por mostrar que se $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é uma matriz tal $AB = \mathbf{0}$, então $B = \mathbf{0}$. De facto, se representarmos por b_i a coluna i de B, $i \in \{1, ..., n\}$, então de $AB = \mathbf{0}$ temos que, para todo $i \in \{1, ..., n\}$, $Ab_i = \mathbf{0}$. Ora, como $c(A) = n$, o sistema $Ax = 0$ é determinado e, portanto, $b_i = \mathbf{0}$, para todo $i \in \{1, ..., n\}$. Logo $B = \mathbf{0}$.
Agora, de

$$A(XA - I_n) = A(XA) - A = (AX)A - A = I_nA - A = \mathbf{0}$$

concluímos que $XA - I_n = \mathbf{0}$, i.e., $XA = I_n$. Logo A é invertível. □

Já sabemos que se $A, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ são matrizes tais que A é invertível e $AX = I_n$, então $XA = I_n$. Logo, sendo A uma matriz invertível, para determinarmos a sua inversa basta resolver os sistemas referidos em $(*)$. Uma vez que a matriz simples destes sistemas é a mesma podemos optar pela resolução de todos os sistemas em simultâneo. Tal é conseguido aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan à matriz $[A \,|\, I_n]$ e a matriz obtida é $[I_n \,|A^{-1}]$.

Exemplo 2.3.2. *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & 14 \end{bmatrix}.$$

Então, de

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 14 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 - 5l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to l_3 + 2l_2]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_1 \to l_1 - l_3 \\ l_2 \to l_2 - \frac{2}{3}l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_1 \to l_1 - l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to \frac{1}{2}l_2 \\ l_3 \to \frac{1}{3}l_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{18}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{10}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right],$$

concluímos que A admite inversa e que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{18}{3} & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{10}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{6} \\ -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$