

# APPUNTI DI FISICA NUCLEARE E DELLE PARTICELLE

CORSO TENUTO DAL PROF.RE G. ZIINO

*Costanza Argiroffi*

Università degli Studi di Palermo  
A.A 1997/1998



## LICENZA

Questa raccolta di appunti è concessa in licenza a chiunque ne venga in possesso secondo quanto sancito dalla [CC-BY-NC-SA 3.0](#) in modo da renderla accessibile a tutti e consentendone modifiche future.



# PREMESSA

Questa è una raccolta di appunti risalenti al corso di Fisica Nucleare e Subnucleare tenuto dal prof.re G. Ziino dell'Università di Palermo al corso di Scienze Fisiche nel 1997. Tuttavia, nonostante l'età, essi sono l'esatta trascrizione di ciò che il professore dice a lezione. Gli appunti sono datati 1997 e possiamo dire con certezza che il professore usa il 70% delle parole usate negli appunti tutt'ora, 2012, variando forse solo gli avverbi usati.

La trascrizione di questi appunti viene fuori dall'idea di rinnovare se non il contenuto almeno la forma degli appunti, passando dalle fotocopie antiche e a bassa risoluzione di un quaderno ad un file maneggevole e non deperibile. Nel ricopiare gli appunti abbiamo cercato di essere più fedeli possibile all'originale (manco fosse la Bibbia...) essendo quest'ultimo fedele, a sua volta, alle lezioni. Nel fare questo, abbiamo inserito note a piè di pagina che precisano l'uso di certe parole a causa di una pessima pagina fotocopiata nell'originale e le date, riportate a margine, di quando quel particolare blocco di appunti è stato preso.

Teniamo a ricordare che questi appunti non sono visti di buon occhio dal professore, quindi cautela nell'usarli. Buono studio!

MARTINA COFFARO	trascrizione e correzione prima metà
SALVATORE COLOMBO	trascrizione
STEFANO CUSUMANO	trascrizione, prima correzione complessiva, scrittura delle appendici
CLAUDIA DI MAIO	trascrizione
ROSARIA G. LENA	trascrizione
MARCELLO MASSARO	trascrizione, disegni/grafica, correzione finale
S. DAVIDE PORZIO	trascrizione
ALICE SCIORTINO	correzione seconda metà

# INDICE

LICENZA .....	i
PREMESSA .....	ii
I INTRODUZIONE .....	1
Capitolo 1 — CENNI STORICI .....	2
1.1 Planck - Quantizzazione dell'energia .....	2
1.2 Bohr - Quantizzazione del momento angolare .....	3
1.3 De Broglie - L'ipotesi sulle particelle elementari .....	4
Capitolo 2 — APPARATI RILEVATORI .....	5
2.1 Tipi di rivelatori .....	5
2.1.1 Rivelatori visuali .....	6
2.1.2 Rivelatori non visuali .....	7
Capitolo 3 — PROCESSI DINAMICI .....	9
3.1 Processi di diffusione .....	9
3.2 Processi di decadimento .....	13
3.3 Tempo di vita media .....	14
Capitolo 4 — CENNI DI RELATIVITÀ .....	17
4.1 Energia cinetica relativistica .....	17
4.2 Energia di soglia .....	19
4.3 Energia di legame e difetto di massa .....	21
Capitolo 5 — CENNI DI MECCANICA QUANTISTICA .....	22
5.1 Statistiche di Fermi-Dirac e Bose-Einstein .....	22
5.2 Funzione d'onda di una particella che decade .....	26
5.3 Spazio di Hilbert .....	28
5.3.1 Spettro discreto .....	31
5.3.2 Spettro continuo .....	31
5.3.3 Spettro quasi continuo .....	32
5.3.4 Operatore coniugato Hermitiano .....	33
5.4 Rappresentazione di Schrödinger .....	34
5.5 Rappresentazione di Heisenberg .....	35
5.6 Rappresentazione di interazione .....	38
5.7 Momento angolare .....	40

<b>II ELEMENTI DI FISICA NUCLEARE . . . . .</b>	<b>50</b>
<b>Capitolo 6 — ESPERIMENTO DI RUTHERFORD E SCOPERTA DEL NUCLEO ATOMICO . . . . .</b>	<b>51</b>
<b>Capitolo 7 — PROPRIETÀ STATISTICHE DEI NUCLEI ATOMICI . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>Capitolo 8 — FATTORE DI FORMA . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>Capitolo 9 — PROPRIETÀ DEI NUCLEI ATOMICI . . . . .</b>	<b>60</b>
9.1 Distribuzione di carica del nucleo . . . . .	60
9.1.1 Formula di Saxon . . . . .	60
9.2 Momenti magnetici dell'atomo e struttura iperfine . . . . .	62
9.2.1 Hamiltoniana dell'elettrone . . . . .	62
9.2.2 Livelli di struttura iperfine e regola degli intervalli . . . . .	64
9.2.3 Rapporto giromagnetico nucleare . . . . .	65
9.3 Momenti elettrici dell'atomo e tensore $\mathcal{Q}$ . . . . .	67
9.3.1 Sviluppo in serie del potenziale del nucleo . . . . .	67
9.3.2 Momento di quadrupolo elettrico del nucleo . . . . .	71
9.3.3 Espressione quantistica del momento di quadrupolo elettrico . . . . .	72
9.3.4 Relazione tra $\mathcal{Q}$ e forma del nucleo . . . . .	74
<b>Capitolo 10 — MODELLI NUCLEARI . . . . .</b>	<b>77</b>
10.1 Modello a goccia di liquido . . . . .	77
10.1.1 Energia di legame di volume . . . . .	77
10.1.2 Energia di superficie . . . . .	78
10.1.3 Energia coulombiana del nucleo . . . . .	79
10.1.4 Termine energetico di simmetria . . . . .	80
10.1.5 Termini correttivi sperimentali e formula di Weizsäcker . . . . .	81
10.1.6 Energia di fissione . . . . .	82
10.1.7 Energia di attivazione . . . . .	84
10.2 Modello a strati . . . . .	85
10.2.1 Numeri magici . . . . .	85
10.2.2 Hamiltoniana del nucleo e spin-orbita . . . . .	86
10.2.3 Interazione di appaiamento . . . . .	87
10.3 Modello collettivo . . . . .	89
10.3.1 Asimmetria del nucleo . . . . .	89
<b>Capitolo 11 — DECADIMENTI NUCLEARI . . . . .</b>	<b>90</b>
11.1 Decadimento . . . . .	90
11.2 Decadimento Duale . . . . .	91
11.3 Decadimento $\alpha$ . . . . .	92
11.4 Decadimento $\beta$ . . . . .	96
11.4.1 Elicità . . . . .	97
11.4.2 Elicità del neutrino . . . . .	98
11.4.3 Violazione della simmetria speculare . . . . .	101
<b>Capitolo 12 — TEORIA DI FERMI . . . . .</b>	<b>106</b>
<b>Capitolo 13 — FORZE NUCLEARI . . . . .</b>	<b>118</b>

---

<b>Capitolo 14 — CONSERVAZIONE DELLO SPIN ISOTOPICO . . . . .</b>	<b>124</b>
<b>III ELEMENTI DI FISICA SUBNUCLEARE . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>Capitolo 15 — TEORIA DI YUKAWA DEL MESONE <math>\Pi</math> . . . . .</b>	<b>128</b>
15.1 Diagrammi di Feynman . . . . .	133
15.2 Scoperta del pion e sue proprietà . . . . .	136
<b>Capitolo 16 — CLASSIFICAZIONE DELLE PARTICELLE ELEMENTARI . . . . .</b>	<b>139</b>
<b>Capitolo 17 — RISONANZA . . . . .</b>	<b>141</b>
<b>Capitolo 18 — ANTIPARTICELLE . . . . .</b>	<b>144</b>
<b>Capitolo 19 — CONIUGAZIONE DI CARICA . . . . .</b>	<b>146</b>
<b>Capitolo 20 — OPERATORE PARITÀ . . . . .</b>	<b>149</b>
20.1 Parità intrinseca . . . . .	151
<b>Capitolo 21 — NUMERI, QUARKS E LEPTONI . . . . .</b>	<b>155</b>
21.1 Numero Fermionico Barionico o Numero Barionico . . . . .	155
21.2 Numero quantico di stranezza . . . . .	156
21.3 Numero quantico di incanto . . . . .	159
21.4 Gruppo delle matrici unitarie speciali . . . . .	161
21.5 Teoria dei Quarks . . . . .	166
21.6 Numero quantico di colore . . . . .	171
21.7 Leptoni . . . . .	174
21.8 Legge di conservazione del numero letonico . . . . .	176
<b>IV APPENDICI . . . . .</b>	<b>178</b>
<b>Capitolo A — APPENDICI MANOSCRITTE . . . . .</b>	<b>179</b>
A.1 Legame fra la mancanza dell'autovalore $m_z = 0$ di spin fotonico e la proprietà di trasversalità dell'onda elettromagnetica . . . . .	179
A.2 Decadimento del caone + . . . . .	180
A.3 Decadimento del caone zero . . . . .	182
<b>Capitolo B — ALLEGATI PRESENTI NEGLI ORIGINALI . . . . .</b>	<b>188</b>
B.1 Allegato 1 . . . . .	189
B.2 Allegato 2 . . . . .	190
B.3 Allegato 3 . . . . .	191
B.4 Allegato 4(1) . . . . .	192
B.5 Allegato 4(2) . . . . .	193
B.6 Allegato 5 . . . . .	194
B.7 Allegato 6 . . . . .	195
<b>Capitolo C — RIFERIMENTI - FORMULE E COSTANTI NUMERICHE . . . . .</b>	<b>196</b>
C.1 Masse . . . . .	196
C.2 Energie . . . . .	197
C.3 Miscellanea . . . . .	197
C.4 Formule . . . . .	198
C.5 Reazioni nucleari . . . . .	200



Parte I

# INTRODUZIONE

# 1

## CENNI STORICI

### 1.1 PLANCK - QUANTIZZAZIONE DELL'ENERGIA

**12-11-1997** Sia  $S$  una sorgente radioattiva, cioè capace di emettere radiazioni. Queste radiazioni vengono classificate in base alla deviazione subita per effetto di un campo magnetico. Le radiazioni si chiamano, quindi:

$\alpha$  nuclei di elio-4  ${}^4He^{2+}$ ;

$\beta$  elettroni  $e^-$ ;

$\gamma$  fotoni.

Secondo l'ipotesi di Planck, l'energia emessa da un corpo nero può assumere per ogni frequenza solo i valori *discreti*

$$W = nh\nu \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \quad \nu = \text{frequenza radiazione} \\ h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J s} \quad \text{costante di Planck.} \quad [1.1]$$

Un atomo si dice *idrogenoide* quando ha un solo elettrone, quindi sono atomi ionizzati.. Einstein avanzò un'ipotesi capace di spiegare completamente l'effetto fotoelettrico: questa era che l'onda elettromagnetica può trasferire agli elettroni solo quanti di energia (fotoni) secondo la formula

$$E = h\nu = cp \quad [1.2]$$

in cui

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

## 1.2 BOHR - QUANTIZZAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Bohr ipotizzò la quantizzazione del momento angolare nell'atomo di idrogeno e negli atomi idrogenoidi secondo la formula

$$|\vec{L}| = n \frac{\hbar}{2\pi} = n\hbar \quad [1.3]$$

Da questa ipotesi e applicando le leggi dell'elettrostatica al moto dell'elettrone, che si suppone circolare e descritto da leggi classiche, si deduce la *quantizzazione delle orbite*. Cioè si ha

$$r = n^2 \frac{a}{Z}, \quad a = \frac{\hbar^2}{m_e e^2}, \quad e = 1.6 \times 10^{-19} C \quad [1.4]$$

L'energia associata a ciascuna di queste orbite è

$$W = -\frac{Z^2 e^2}{2a} \frac{1}{n^2} \quad [1.5]$$

Bohr infine suppose che un atomo non irradisse energia quando si trova in un determinato stato quantistico. Secondo la sua ipotesi, l'emissione di energia poteva avvenire solo con un passaggio dell'elettrone da uno stato all'altro, supponendo quindi che l'elettrone passi da un'orbita  $i$  a una  $f$ . La sua variazione di energia è

$$W_f - W_i = -h\nu_{if} \quad [1.6]$$

cioè la corrispondente variazione di energia viene convertita in un fotone con frequenza opportuna (se l'elettrone aumentasse la propria energia invece di emettere un fotone ne assorbirebbe uno). Dalla relazione di sopra su può ottenere un'espressione per le lunghezze d'onda che si possono avere. Si ha

$$\frac{Z^2 e^2}{2a} \frac{1}{n_f^2} - \frac{Z^2 e^2}{2a} \frac{1}{n_i^2} = h \frac{c}{\lambda_{if}} \quad n_f < n_i$$

$$\frac{1}{\lambda_{if}} = \frac{Z^2 e^2}{2abc} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad [1.7]$$

Da questa espressione si ricava che

$$\lim_{n_i \rightarrow \infty} \frac{Z^2 e^2}{2abc} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) = \frac{Z^2 e^2}{2abc} \frac{1}{n_f^2}$$

Questa spiega il risultato sperimentale dell'addensamento delle righe spettrali negli spettri di emissione degli atomi di idrogeno o idrogenoidi. Questi risultati<sup>1</sup> sono tutti plasmati sui risultati sperimentali e non sono il risultato di una formulazione teorica. Quindi sono soggette a modifiche dovute ai miglioramenti degli esperimenti.

<sup>1</sup>Penso che una parola migliore sarebbe formule, in quanto dovrebbe riferirsi a queste ultime.

### 1.3 DE BROGLIE - L'IPOTESI SULLE PARTICELLE ELEMENTARI

De Broglie pensò di estendere il modello di onda-corpuscolo della luce anche alle particelle elementari. Estese quindi la validità delle relazioni [1.2] anche alle particelle. Per le onde elettromagnetiche si partiva dall'assodato modello ondulatorio per arrivare al modello corpuscolare. Per le particelle avvenne invece un processo inverso: dalla natura corpuscolare si arriva a quella ondulatoria., cioè ad una particella di cui siano noti  $E$  e  $p$  si associa un onda con  $\nu$  e  $\lambda$  ricavate dalle due relazioni di sopra. Per evidenziare la natura ondulatoria dell'elettrone è necessario farlo interagire con oggetti le cui dimensioni siano dell'ordine di grandezza della lunghezza d'onda dell'elettrone. Si usano per questo scopo i reticolì cristallini.

Osserviamo ora come dalle ipotesi di De Broglie si possa arrivare alla quantizzazione di Bohr. Infatti consideriamo un elettrone in un atomo: affinché la sua orbita sia stabile è necessario che questa sia costituita da un numero intero di lunghezze d'onda dell'elettrone. Cioè, se  $r$  è il raggio dell'orbita deve valere  $2\pi r = n\lambda$ . Da questa, con semplici sostituzioni, si ritrova la legge  $L = pr = nh/2\pi$ .

Le prime particelle elementari studiate sono state l'elettrone, il neutrone, il fotone (anche se è una particella sui generis) e in un secondo tempo il positrone (protone)<sup>2</sup>. Oggi si contano circa un centinaio di particelle ed antiparticelle. Ad ognuna di esse si associa uno spin (momento angolare intrinseco): questo può assumere come valori soltanto *multipli interi o seminteri di  $\hbar$* .

Oggi si ritiene che i componenti ultimi della materia siano *quarks e leptoni*.

---

<sup>2</sup>È molto probabile che questo sia un errore. Non è infatti vero che positrone e protone sono la stessa cosa. Più probabile è che l'unica delle due sensata sia protone. [NdT]

# 2

## APPARATI RILEVATORI

Per studiare proprietà e comportamenti di nuclei e particelle è necessario rivelarli. Per tale motivo si usano apparati rivelatori che segnano il passaggio delle particelle.

12-11-1997

Un apparato deve essere *sensibile agli effetti generati dalle particelle* e inoltre deve ingannare tali effetti per portarli dalla scala microscopica alla scala macroscopica.

Le particelle cariche si rivelano tramite gli effetti prodotti per interazione elettromagnetica con la materia circostante. Questa interazione si estrinseca nella *ionizzazione* della materia circostante, con una conseguente perdita di energia da parte della particella carica in esame. Questa progressiva perdita di energia causerà il rallentamento e infine l'arresto della particella carica. Il cammino percorso da questa particella sarà caratterizzato da un notevole numero di particelle ionizzate. I rivelatori quindi mettono in risalto le particelle ionizzate.

### 2.1 TIPI DI RIVELATORI

Esistono due tipi di rivelatori: *visuali* e *non visuali*. Nei primi le cariche della materia ionizzata vengono usate per produrre effetti visibili che permettono anche di eseguire delle fotografie della traiettoria della particella. Nei secondi invece le cariche generate vengono usate per ottenere *impulsi elettrici*. Questi vengono poi opportunamente analizzati mediante apparecchiature elettroniche. L'elemento comune dei due tipi di rivelatori è la formazione di cariche di ionizzazione.

Al primo tipo di rivelatori appartengono le emulsioni fotografiche, la camera di Wilson (a nebbia) e la camera a bolle. Al secondo tipo appartengono la camera d'ionizzazione, il contatore proporzionale, il contatore Geiger-Müller e il contatore a scintillazione.

Il metodo di rivelazione di tali apparati non può più essere efficace qualora la particella da studiare sia *neutra*. In questo secondo caso *le interazioni* con la materia circostante non sono di tipo elettromagnetico e *non sono sufficientemente intense e continue*. Quindi gli unici metodi per rivelare particelle neutre sono indiretti e non si potrà avere alcuna informazione sulla traiettoria della particella stessa. Si potranno avere foto della traiettoria solo nel caso in cui *la particella neutra decada*, producendo per disintegrazione particelle cariche. Per esempio

in una camera a nebbia si potrebbero osservare le traiettorie delle due particelle ottenute per disintegrazione<sup>1</sup>.

Gli apparati rivelatori sono usati insieme a degli acceleratori di particelle che generano fasci di particelle. In genere tali fasci vengono fatti collidere con la materia (sostanza bersaglio) o con altri fasci. I rivelatori osservano quindi il risultato di queste collisioni. Esistono due principali motivi per cui *sono necessarie alte energie*:

1. dalla meccanica quantistica sappiamo che per indagare su scale molto piccole bisogna lavorare con lunghezze d'onda molto piccole e per ottenere lunghezze d'onda molto piccole, dalla relazione di De Broglie  $\lambda = h/p$ , *sono necessarie quantità di moto molto elevate*;
2. dalla teoria della relatività, più precisamente dal principio di equivalenza massa-energia, segue che *particelle con grande massa devono avere molta energia*, quindi occorre *molta energia per perturbarle significativamente*<sup>2</sup>.

Analizziamo ora più in dettaglio i rivelatori a cui si era accennato.

### 2.1.1 RIVELATORI VISUALI

#### *Lastre ad emulsione*

Questo è uno dei più importanti rivelatori visuali. Queste sono *lastre i cui elementi sensibili sono granuli d'argento*.

Quando una particella carica attraversa una lastra ad emulsione si ha l'annerimento dell'emulsione (questo metodo è servito per i raggi comici)<sup>3</sup>.

#### *Camera di Wilson (o a nebbia)*

Anche questo è un rivelatore visuale. Questa consiste sostanzialmente di un recipiente pieno di gas e vapore acqueo che può essere espanso rapidamente tramite un pistone in maniera adiabatica. Questa espansione adiabatica provoca un raffreddamento ed in più il vapore risulterà soprasaturo. Se nel frattempo la camera è attraversata da una singola particella carica si formerà lungo il suo percorso una catena di atomi ionizzati che agiranno sul vapore come delle impurità ovvero dei veri e propri nuclei di condensazione<sup>4</sup>. Attorno agli atomi ionizzati si formano quindi goccioline di acqua che danno una traccia visibile del percorso della particella.

Il meccanismo di espansione può essere azionato a intervalli regolari o in sincronia con l'uscita di fasci di particelle dell'acceleratore. Ovviamente la camera a nebbia (= di Wilson) funziona solo durante la fase di espansione.

È possibile comunque costruire camere a nebbia che funzionino in modo continuo, cioè senza un meccanismo di espansione. Consideriamo ad esempio un recipiente con del vapore

<sup>1</sup>O dalla sua rara interazione con la materia. [appunti sugli appunti. Ah, l'ironia. NdT]

<sup>2</sup>Particelle pesanti tipo Bosone di Higgs [altro appunto sugli appunti. NdT]

<sup>3</sup>Si rivelarono nel 1896-1898 i raggi  $\alpha$  e i raggi  $\beta$  con questo metodo.

<sup>4</sup>Come nelle nuvole con le goccioline attorno al pulviscolo.

acque e gas, con un gradiente di temperatura: in basso freddo e in alto caldo. Si genera così anche uno strato in cui il vapore è sempre soprasaturo e in grado di generare delle tracce.

### *Camera a bolle*

Questo è un rivelatore visuale ed è un po l'*inverso*<sup>5</sup> della camera a nebbia. Esso è costituito da un recipiente pieno di un liquido a temperatura leggermente inferiore a quella di ebollizione. Se la pressione viene improvvisamente diminuita il punto di ebollizione si abbassa. In queste condizioni si ha la formazione di bollicine soprattutto attorno agli atomi ionizzati. Queste bollicine possono essere rese visibili tramite una *intensa illuminazione*, quindi diventa possibile individuare la traiettoria della particella carica. Si consideri inoltre che si ha anche un processo di *amplificazione* in quanto col passare del tempo le bollicine aumentano di volume.

## 2.1.2 RIVELATORI NON VISUALI

Analizziamo ora alcuni rivelatori non visuali.

### *Camera di ionizzazione*

Questo è il più antico rivelatore. È costituito da un recipiente pieno di gas con due elettrodi a una data differenza di potenziale. Supponiamo che una sola particella carica attraversi la camera d'ionizzazione producendo un certo numero di ioni positivi e negativi. Il campo elettrico indirizzerà verso il catodo gli ioni positivi e verso l'anodo quelli negativi. Misurando la corrente d'ionizzazione è possibile risalire all'energia iniziale della particella ionizzante. D'altra parte poiché gli elettroni prodotti nella ionizzazione saranno molto più veloci degli atomi ionizzati si può supporre che nell'intervallo di tempo che impiegano gli elettroni a raggiungere il catodo gli atomi ionizzati si siano appena mossi. Durante questo brevissimo intervallo di tempo il potenziale agli elettrodi subirà una variazione  $\Delta V = \Delta Q/C$ , dove  $C$  è la capacità degli elettrodi e  $\Delta Q$  è la carica depositata. L'impulso elettrico  $\Delta V$  così ottenuto darebbe un segnale del passaggio della particella ionizzante. Di fatto però in una camera di ionizzazione pura e semplice questo impulso è molto piccolo e non consente di rivelare a una a una le particelle ionizzanti.

### *Contatori proporzionali e di Geiger-Müller*

Questi rivelatori si basano sullo stesso principio su cui si basano le camere d'ionizzazione. In più però questi posseggono un dispositivo di moltiplicazione degli elettroni liberi. Questo amplifica il segnale elettrico e rende quindi possibile *contare una alla volta* le particelle ionizzanti.

---

<sup>5</sup>Meccanismo speculare.

### *Contatori a scintillazione*

Il principio di base su cui si fondano questi contatori è la *emissione di quanti di luce* da parte di una molecola o di un reticolo cristallino stimolati dal passaggio di una particella ionizzante<sup>6</sup>. Si adoperano sostanze *fluorescenti* in modo tale da evitare che la luce emessa sia immediatamente assorbita.

I primi contatori a scintillazione erano schermi ricoperti da solfuro di zinco ed erano adoperati come contatori visuali. Infatti la scintillazione generata sullo schermo si poteva osservare tramite un microscopio. Oggi invece tali contatori vengono utilizzati in un modo non visuale: il segnale sullo schermo viene amplificato tramite fotomoltiplicatori. Questi sono dispositivi che sfruttando l'effetto fotoelettrico trasformano poche decine di fotoni entranti in una valanga di fotoni uscenti.

Una caratteristica fondamentale di tali contatori è la loro *prontezza*, che permette di *individuare l'istante in cui passa la particella*<sup>7</sup>. In questo senso tali contatori possono considerarsi l'opposto delle emulsioni fotografiche che non danno informazioni sull'istante in cui è passata la particella carica ma danno un segnale permanente.

---

<sup>6</sup>Carica

<sup>7</sup>Elevato potere risolutivo temporale.

# 3

## PROCESSI DINAMICI

In fisica nucleare e subnucleare esistono sostanzialmente due tipi di processi dinamici: i processi di diffusione (o di *scattering*) e i processi di decadimento.

14-11-1997

### 3.1 PROCESSI DI DIFFUSIONE

Un tipico processo di diffusione si ha quando un fascio di particelle incidenti con velocità  $v$  attraversa uno strato sottile in cui sono presenti delle particelle bersaglio in quiete. Al seguito dell'interazione il fascio viene diffuso in diverse direzioni.

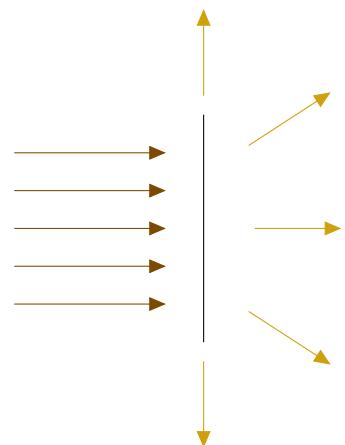
Le particelle bersaglio sono tutte identiche fra loro e così anche le particelle incidenti.

FIGURA 3.1: Bombardamento di lamina bersaglio e diffusione successiva.

Quando la singola particella incidente e la singola particella bersaglio dopo l'urto non hanno subito alcuna variazione interna si parla di *diffusione elastica*. Quando invece avvengono delle variazioni interne si parla di *diffusione anelastica*<sup>1</sup>.

Le grandezze importanti sono la *frequenza di diffusione* (o anche di transizione) e la *sezione d'urto*. Si chiama *evento* la diffusione di una singola particella incidente per effetto di una singola particella bersaglio. Si suppone che *sia le particelle incidenti che quelle bersaglio siano insiemi statistici* e che le particelle incidenti *arrivino perpendicolarmente al piano*.

Si dice *frequenza di diffusione* il numero di eventi per unità di tempo per unità di superficie. Essendo il processo casuale si avrà che  $n \propto (n_i, n_b)$  dove  $n_i$  è il numero di particelle incidenti che attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo e  $n_b$  il numero di particelle bersaglio per unità di



<sup>1</sup>Processo di reazione.

superficie. Se  $W$  è la frequenza di diffusione, si ha che<sup>2</sup>

$$W = n = \sigma n_i n_b \quad [3.1]$$

Definiamo anche la grandezza

$$I = n_i \quad [3.2]$$

Questa si dice *intensità del fascio incidente*. Questa è anche il modulo dell'intensità di corrente delle particelle incidenti. Si può scrivere anche

$$I = \rho_i v_i$$

Con queste definizioni si ha

$$W = \sigma I n_b \Rightarrow \frac{W}{I} = \frac{n}{n_i} = \sigma n_b \quad [3.3]$$

Questa quantità  $W/I$  è adimensionale<sup>3</sup> e rappresenta *la probabilità che la singola particella incidente subisca la diffusione quando sono presenti  $n_b$  particelle bersaglio per  $\text{cm}^2$* . Il coefficiente  $\sigma$  deve avere le dimensioni di una superficie. L'area  $\sigma$  si dice *sezione d'urto*

$$\sigma = \frac{W/I}{n_b}$$

[3.4]

Questa da la probabilità che una particella incidente subisca diffusione quando si ha una singola particella bersaglio per  $\text{cm}^2$ .

Consideriamo una superficie di  $1\text{cm} \times 1\text{cm}$  dove sia presente una sola particella bersaglio.  $\sigma$  rappresenta la probabilità che una singola particella incidente venga diffusa. Se il cerchietto in figura ha un'area  $\sigma$ , la probabilità che una particella incidente cada dentro il cerchietto è pari alla probabilità che questa particella venga diffusa. Quindi si può immaginare che una particella incidente subirà diffusione se cadrà dentro il cerchietto. La sezione d'urto viene anche detta *efficacia di diffusione*. Nel caso limite di urto classico,  $\sigma$  coincide con le dimensioni della particella bersaglio. Questo in realtà non si può mai verificare perché le particelle possono interagire senza venire a contatto.

Nella diffusione si possono avere sia diffusioni elastiche che anelastiche contemporaneamente (cioè alcune particelle subiscono diffusione elastica e altre anelastica). In questo caso si

<sup>2</sup>Le formule che seguono non corrispondono al 100% a quelle che si trovano sugli appunti originali. Su questi ultimi infatti sono presenti unità di misura fuori posto e/o ridondanti in misura tale che le formule risultavano di difficile lettura e comprensione. Qui sono riportate le formule riarrangiate con criterio. Potrete corroborare questa scelta andando a rileggere gli appunti manoscritti.

<sup>3</sup>Questa frase è ciò che fa presupporre le unità di misura ridondanti e fuorvianti. Sono lasciate a puro scopo storico. [NdT]

dice che la diffusione avviene secondo due canali. In questo caso  $W$  è la somma sia di quella elastica che quella anelastica, cioè

$$W = W_{\text{el}} + W_{\text{anel}} \quad [3.5]$$

dove  $W_{\text{el}}$  e  $W_{\text{anel}}$  sono definite analogamente a  $W$ . Ovviamente si ha

$$W_{\text{el}} = \sigma_{\text{el}} I n_b; \quad W_{\text{anel}} = \sigma_{\text{anel}} I n_b$$

$\sigma_{\text{el}}$  = sezione d'urto elastica

$\sigma_{\text{anel}}$  = sezione d'urto anelastica

Essendo

$$W = \sigma I n_b \Rightarrow$$

$$\boxed{\sigma = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{anel}}} \quad [3.6]$$

Un altro modo di definire la sezione d'urto è

$N$  = numero di particelle diffuse nell'unità di tempo

$A_b$  = area della superficie bersaglio

$$N = W A_b$$

Quindi si può scrivere

$$N = \sigma I n_b A_b \Rightarrow N = \sigma I N_b$$

dove  $N_b$  è il numero totale di particelle bersaglio. Questo modo di definire  $\sigma$  è comodo quando  $N_b = 1$ , infatti si avrà

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{I}} \quad [3.7]$$

Questa è *la probabilità che una singola particella incidente venga diffusa dal bersaglio.*

La frequenza di diffusione  $W$  può anche interpretarsi come *attenuazione d'intensità del fascio incidente*. Infatti  $n = -\delta n_i$  che è il numero di particelle che il fascio incidente perde per unità di tempo per unità di superficie. Quindi

$$n = -\delta n_i \Rightarrow \delta I = \delta n_i \Rightarrow$$

$$\boxed{W = -\delta I} \quad [3.8]$$

---

§

Consideriamo ora<sup>4</sup> un fascio incidente che attraversa uno strato di materia. Sia  $\Delta x = x - x_0$  lo spessore di questo strato e  $\rho_b$  la densità di volume delle particelle bersaglio. Sia

17-11-1997

<sup>4</sup>Qui manca una frase che essenzialmente ripeteva quanto detto un rigo sopra, in quanto cambiando il giorno la lezione si riallaccia a quella precedente. È stata rimossa per migliorare la scorrevolezza. [NdT]

$I(x_0) = I(0)$  l'intensità iniziale del fascio incidente. Per calcolare  $I(x)$  basta suddividere lo strato di spessore  $\Delta x$  in strati infinitesimi di spessore  $dx$ . Il numero di particelle bersaglio per unità di area è  $\rho_b dx$ . La variazione di intensità dovuta al singolo strato è

$$dI = -dW = -\sigma I \rho_b dx$$

Si suppone che  $\sigma$  non dipenda da  $x$ , cioè tutti gli strati hanno la stessa sezione d'urto. Integrando l'equazione si ha che

$$\int_{I(0)}^{I(x)} \frac{dI}{I} = - \int_0^x \sigma \rho_b dx \Rightarrow \ln[I(x)] - \ln[I(0)] = -\sigma \rho_b x \Rightarrow I(x) = I(0) e^{-\sigma \rho_b x}$$

Si può anche scrivere nella forma

$$I(x) = I(0) e^{-\mu x}; \quad \mu = \sigma \rho_b \quad [3.9]$$

$\mu$  si dice *coefficiente di assorbimento* e ha le dimensioni di un inverso di una lunghezza. Da questa legge si determina che se  $x \gg 1/\mu$ ,  $I(x)$  diventa trascurabile. Ad esempio i raggi cosmici non riescono a penetrare la crosta terrestre. Invece per i neutrini il coefficiente  $\mu$  è molto piccolo e quindi un fascio di neutrini può attraversare tutta la terra senza subire grossa attenuazione. La sezione d'urto di solito si misura in *barn* con la definizione

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad [3.10]$$

Si è detto che la sezione d'urto totale si definisce come  $\sigma = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{anel}}$ . Analizziamo ora la probabilità che la diffusione avvenga in una particolare direzione. Consideriamo la direzione  $(\theta, \phi)$  e l'angolo solido  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  e consideriamo il numero di particelle<sup>5</sup>  $dn$  che vengono diffuse<sup>6</sup> nella direzione dell'angolo solido  $d\Omega$ .  $dn$  sarà sempre proporzionale all'intensità del fascio incidente e alla densità di particelle bersaglio. Si può definire la frequenza

$$dW = dn(\theta, \phi) = d\sigma(\theta, \phi) I n_b = dW(\theta, \phi)$$

moltiplicando e dividendo per  $d\Omega$  si può scrivere<sup>7</sup>

$$dW = \frac{d\sigma}{d\Omega} I n_b d\Omega \quad [3.11]$$

Ovviamente deve esistere il legame con la sezione d'urto totale<sup>8</sup>

$$\sigma = \int_0^{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad [3.12]$$

<sup>5</sup>Per coerenza con quanto detto prima, il numero di particelle si intende *per unità di superficie e tempo*.

<sup>6</sup>Sia elasticamente che anelasticamente.

<sup>7</sup> $d\sigma(\theta, \phi)$  è la sezione d'urto differenziale.

<sup>8</sup>Integrando sull'angolo solido.

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$  si può valutare<sup>9</sup> sperimentalmente<sup>10</sup>. Si può sempre scrivere

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} + \frac{d\sigma_{\text{anel}}}{d\Omega}$$

Consideriamo il caso in cui si abbia solo una particella bersaglio<sup>11</sup>. Anche in questo caso si può definire la sezione d'urto differenziale

$$d\sigma = \frac{dN}{I}, \quad N_b = 1$$

dove  $dN$  è il numero di particelle incidenti che vengono diffuse nell'unità di tempo in un dato angolo solido  $d\Omega$ . Questa formula si può applicare al caso di una diffusione dovuta al potenziale elettrostatico<sup>12</sup> generato da una carica fissa<sup>13</sup>.

L'importanza della diffusione è dovuta a due motivi: uno è che le interazioni della fisica nucleare e subnucleare sono sempre a corto raggio e le sezioni d'urto possono fornire informazioni sulla struttura del bersaglio<sup>14</sup>; il secondo motivo è che lo studio dettagliato di una interazione a corto raggio è molto più problematico rispetto a interazioni a raggio infinito. La trattazione è *sempre quantistica e non esiste un corrispondente classico*, quindi l'analisi della sezione d'urto<sup>15</sup> è uno dei pochi strumenti che si hanno per studiare queste interazioni<sup>16</sup>.

## 3.2 PROCESSI DI DECADIMENTO

Supponiamo che in un certo volume siano presenti delle particelle che hanno una certa probabilità di decadere. Supponiamo che queste particelle siano *un insieme statistico*. Sia  $N(t)$  il numero di particelle non ancora decadute al tempo  $t$  e supponiamo che questo  $N(t)$  sia sufficientemente grande in modo che si possa trattare come una grandezza continua (cioè  $|\delta N| = 1 \ll N(t)$ ). All'istante  $t + dt$  si avranno  $N(t + dt)$  particelle non ancora decadute. Il numero di decadimenti nell'intervallo di tempo  $dt$  è

$$-dN(t) = N(t) - N(t + dt)$$

La frequenza di decadimento si definisce come

$$F(t) = -\frac{dN(t)}{dt}$$

[3.13]

<sup>9</sup>Come la  $\sigma$  si distribuisca al variare dell'angolo solido.

<sup>10</sup>Con contatori di particelle diffuse da spostare ai vari angoli.

<sup>11</sup>In generale, se  $N_b$  è il numero totale di particelle bersaglio  $d\sigma = dN/(IN_b)$ .

<sup>12</sup>Modello di Rutherford.

<sup>13</sup> $I$  è un flusso di particelle che si estende all'infinito.

<sup>14</sup>Informazioni date gli urti.

<sup>15</sup>Lo studio è abbastanza difficile.

<sup>16</sup>Natura e meccanismo delle interazioni in gioco.

questa rappresenta il numero di decadimenti nell'unità di tempo. Determiniamo ora la funzione  $F(t)$  trattando i decadimenti come eventi casuali. Quindi il numero di decadimenti è proporzionale ad  $N(t)$  con un coefficiente di proporzionalità che<sup>17</sup> non può dipendere dal tempo. Quindi si può porre

$$F(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

$\lambda$  si dice *costante di disintegrazione*<sup>18</sup> (è l'analogo della sezione d'urto nei processi di diffusione). Ha le dimensioni di  $t^{-1}$ . Questa rappresenta la probabilità di decadimento nell'unità di tempo, cioè

$$\lambda = -\frac{dN/dt}{N} = \text{cost.}$$

Tutto questo vale perché abbiamo fatto l'ipotesi di casualità dei decadimenti. Integrando l'equazione differenziale trovata per  $N$  si ottiene che:

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \quad [3.14]$$

Da questa si ha

$$F(t) = \lambda N(0)e^{-\lambda t} \quad [3.15]$$

Questa legge esponenziale sembra essere valida per tutti i decadimenti<sup>19</sup>

### 3.3 TEMPO DI VITA MEDIA

*19-11-1997* Consideriamo<sup>20</sup> sempre un volume in cui sono presenti delle particelle identiche che hanno una certa probabilità di decadere ( $\lambda$ ). Si definisce il *tempo di vita media* di una particella

$$\tau = \frac{1}{\lambda} \quad [3.16]$$

Verifichiamo che effettivamente la vita media di una particella sia  $1/\lambda$ . Consideriamo delle particelle che vivono da 0 a  $t$ . Queste sono le particelle che decadono nell'intervallo di tempo che va da  $t$  a  $t + dt$ . Quindi si ha che

$$dN'(t) = -dN(t) = \lambda N(t) dt = \lambda N(0)e^{-\lambda t} dt$$

<sup>17</sup>Per l'omogeneità del tempo.

<sup>18</sup>La probabilità di decadimento nell'unità di tempo.

<sup>19</sup>Quindi  $F(t)$  non è una costante e ha un massimo per  $t = 0$ .

<sup>20</sup>Per la prima volta viene identificato il periodo storico del secondo Discente Ignoto, artefice degli Appunti negli Appunti. Infatti, accanto la data del '97 ne viene riportata una seconda: 19/03/2007.

Questo è il numero di particelle che hanno vita pari a  $t$ . Per definizione la vita media di una particella è

$$\bar{t} = \frac{1}{N(0)} \int_0^{+\infty} t dN'(t) = \frac{1}{N(0)} \int_0^{+\infty} t \lambda N(t) dt = \int_0^{+\infty} t \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} = \tau \quad [3.17]$$

Si può verificare che se la frequenza di decadimento fosse costante ed uguale al valore iniziale (cioè  $F = \lambda N(0) = \text{cost.}$ ) in questo caso  $\tau$  rappresenterebbe il tempo in cui tutte le particelle sarebbero decadute. Infatti

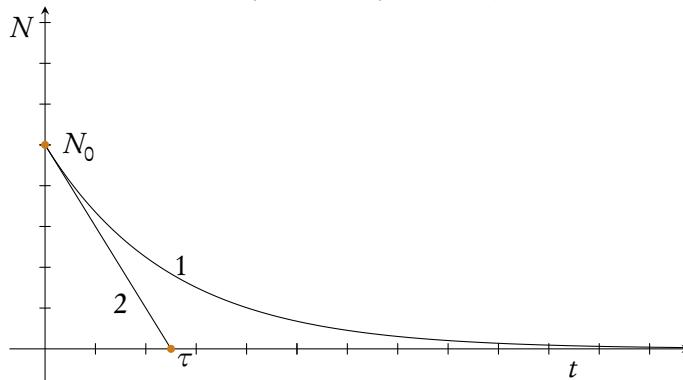
$$\int_{N(0)}^{N(t)} dN = -\lambda N(0)t \Rightarrow N(t) = N(0)(1 - \lambda t)$$

Quindi si avrebbe  $N(t) > 0$  per  $t < \tau$  e  $N(t) = 0$  per  $t = \tau$ .

Consideriamo il grafico della funzione  $N(t)$  (Figura 3.2):

1. questa curva rappresenta  $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$ ;
2. questa curva rappresenta  $N(t) = N(0)(1 - \lambda t)$

**FIGURA 3.2.:** Grafico delle due funzioni  $N(t)$  considerate.



Quindi graficamente è possibile determinare  $\tau$  considerando l'intersezione con l'asse delle  $x$  della retta tangente a  $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$  nel punto  $t = 0$ . Definiamo ora il *tempo di dimezzamento*, cioè il tempo in cui il numero di particelle non decadute è uguale alla metà del numero iniziale di particelle. Se indichiamo con  $T$  il tempo di dimezzamento si deve avere

$$N(T) = \frac{1}{2}N(0) = N(0)e^{-T/\tau} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-T/\tau} \Rightarrow T = \ln(2)\tau \approx 0.69\tau \quad [3.18]$$

Tutte queste considerazioni teoriche sono una buona approssimazione della realtà se la velocità delle particelle sono piccole rispetto a  $c$ , cioè se si è fuori da ambiti relativistici<sup>21</sup>.

*Tempo di dimezzamento*

<sup>21</sup>Oppure particelle ferme.

Vediamo ora come si definiscono questi parametri nel caso in cui le particelle hanno una velocità  $v$  non trascurabile rispetto a  $c$ . Quindi per  $t$  e  $T$  si ha<sup>22</sup>

$$\tau(v) = \frac{\tau(0)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad [3.19]$$

$$T(v) = \frac{T(0)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad [3.20]$$

$\tau(v)$  è la vita media nel sistema in cui le particelle sono a velocità  $v$ ,  $\tau(0)$  è la vita media nel sistema di riferimento in cui le particelle sono ferme. Lo stesso vale per  $T(v)$  e  $T(0)$  e per  $\lambda(v)$  e  $\lambda(0)$ . Per  $\lambda$  si ha

$$\lambda(v) = \lambda(0) \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad [3.21]$$

Quindi se una particella<sup>23</sup> ha una vita media piccola, se questa particella si trova a velocità  $v \approx c$  la sua vita media può aumentare notevolmente<sup>24</sup>.

---

<sup>22</sup>Dipendono dal tipo di decadimento (interazione) e dalla velocità.

<sup>23</sup>Ad esempio i *muoni*.

<sup>24</sup> $\tau$  è minimo nel SR solidale alle particelle.

# 4

## CENNI DI RELATIVITÀ

### 4.1 ENERGIA CINETICA RELATIVISTICA

I processi dinamici nucleari e subnucleari sono governati dalla legge  $E_0 = mc^2$  dove  $m$  è la massa a riposo. Se l'oggetto è in moto questa legge diventa

$$E(v) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma mc^2$$

dove si è definito  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Ovviamente  $E(v=0) = E_0$ . L'espressione  $E(v)$  contiene l'energia totale dell'oggetto. Quindi  $E(v)$  è la somma dell'energia cinetica e dell'energia a riposo, quindi si può scrivere

$$T = E(v) - E_0 = mc^2(\gamma(v) - 1) \quad [4.1]$$

Se  $v \ll c$  si trova  $T \approx \frac{1}{2}mc^2$ . Questo risultato si ottiene sviluppando  $\gamma(v)$  in serie di potenze di  $v/c$ , cioè arrestandosi al secondo ordine

$$\gamma(v) \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

Quest'espressione di  $T(v)$  si può trovare equivalentemente dal teorema dell'energia cinetica<sup>1</sup>. In fisica nucleare e subnucleare l'energia si esprime di solito in MeV<sup>2</sup> (1 eV =  $1.6 \times 10^{-19}$  J =  $1.6 \times 10^{-12}$  erg). Valutiamo ad esempio l'energia a riposo dell'elettrone, del protone e del neutrone in Tabella 4.1.

La definizione relativistica di quantità di moto è

$$\vec{P} = \gamma(v)m\vec{v} \quad [4.2]$$

<sup>1</sup>  $T$  = lavoro di una forza esterna per portare un corpo da  $v=0$  a  $v=v_0$ .

<sup>2</sup> Un elettronvolt è l'energia cinetica di un elettrone accelerato da una differenza di potenziale pari a un volt.  
[NdT]

**TABELLA 4.1:** Energie a riposo di elettrone, protone e neutrone.

Particella	Energia (MeV)
$m_e c^2$	0.5
$m_p c^2$	938.2
$m_n c^2$	939.5

e di solito si indica  $\gamma m$  *massa effettiva* o massa relativistica. L'energia e la quantità di moto sono le componenti di un quadriavettore nello spazio di Minkowski<sup>3</sup>. Il modulo quadro di questo vettore è

$$P^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2; \quad \vec{P} \equiv \left( \frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad [\text{Quadrimpulso della particella}]$$

dove si è adottata la metrica  $ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ . Sappiamo che i *moduli di quadriavettori sono invarianti*<sup>4</sup>, quindi  $P^2 = \text{cost.}$  al variare del SR. Nel sistema in cui la particella è ferma si ha che  $P^2 = E^2/c^2 = m^2 c^2$ . Quindi si ha *sempre*

$$P^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \quad [4.3]$$

Il fattore adimensionale  $\gamma(v)$  rappresenta un utile parametro per valutare se è necessario o meno usare una trattazione relativistica. Il caso classico si ha per  $\gamma = 1$ , quindi se consideriamo il parametro  $\gamma - 1$  questo ci dà una stima dell'errore relativo che si ha usando una trattazione non relativistica. Infatti

$$\gamma - 1 = \frac{\gamma m - m}{m}$$

che è un errore relativo sulla massa.

---

### §

21-11-1997

Dalla definizione relativistica dell'energia cinetica segue che il parametro  $\gamma - 1$  si può anche scrivere come

$$\gamma - 1 = \frac{T}{E_0} = \frac{\text{energia cinetica}}{\text{energia a riposo}} \quad [4.4]$$

Ad esempio in fisica nucleare per l'elettrone si ha

$$T_e : [1\text{MeV}, 10\text{MeV}]$$

quindi per l'elettrone si deve usare una trattazione relativistica. Infatti si ha

$$0.2 \leq \gamma - 1 \leq 20$$

<sup>3</sup>Lo spazio con la metrica descritta da  $ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ .

<sup>4</sup>Restano invarianti per rotazioni, ovvero per cambiamento del SR.

Per il protone ed il neutrone energie cinetiche fino a 10MeV consentono una trattazione classica, infatti si ha

$$\gamma - 1 \lesssim 0.01 = 1\%$$

## 4.2 ENERGIA DI SOGLIA

Passiamo ora al concetto di *energia di soglia*. Consideriamo un processo dinamico in cui particelle più leggere si uniscono per dare origine a particelle più pesanti. Vediamo in questo caso l'importanza del principio di equivalenza fra massa ed energia. Consideriamo una particella  $M$  bersaglio e una particella  $m$  che collide con  $M$  ( $m < M$  sono masse a riposo). Sia  $M'$  la massa del sistema che si genera dall'unione di  $m$  e  $M$ . Questo sistema può essere costituito da una sola particella o da  $n$  particelle  $m'_1, m'_2, \dots, m'_n$ . In questo caso la massa  $M'$  si definisce come

$$M' = \frac{E_{CM}}{c^2}; \quad E_{CM} = \text{energia nel sistema del centro di massa} \quad [4.5]$$

In generale, così definito  $M'$ , si ha che

$$M' \geq M'_1 + \dots + M'_n > m + M \quad [4.6]$$

L'eguaglianza si ha solo se le  $M'_i$  sono tutte a riposo. Infatti in generale si ha

$$M' = E_{CM}/c^2 = \gamma(v'_{1,CM})M'_1 + \dots + \gamma(v'_{n,CM})M'_n; \quad \gamma(v_{i,CM}) \geq 1 \quad [4.7]$$

Dato quindi un processo di reazione di questo tipo si dice energia di soglia del processo l'energia minima  $E_s$  che la particella incidente di massa  $m$  deve avere affinché avvenga questo determinato processo. L'energia di soglia ovviamente deve essere tale che  $M'$  assuma il suo valore minimo, cioè deve essere

$$M' = M'_1 + \dots + M'_n$$

Questa è la definizione di  $E_s$ . Vediamo adesso come si calcola.

Consideriamo il quadrimpulso delle particelle iniziali. Il suo modulo è

$$P_{tot}^2 = \frac{(E + Mc^2)^2}{c^2} - p^2 = \frac{E^2}{c^2} + M^2c^2 + 2EM - p^2 = m^2c^2 + M^2c^2 + 2EM \quad [4.8]$$

dove

$p$  è il momento di  $m$ ;

$E$  è l'energia di  $m$ ;

$Mc^2$  è l'energia di  $M$ .

Da questo si vede che  $P_{tot}^2$  è funzione solo di  $E$ . Consideriamo ora il modulo quadro del quadrimpulso finale

$$P'_{tot}^2 = M'^2c^2$$

Per la conservazione del modulo quadro del quadrimpulso si deve avere che

$$P_{\text{tot}}^2(E) = P'_{\text{tot}}^2 = M'^2 c^2$$

Il valore di  $E_s$  è quello tale che

$$P_{\text{tot}}^2(E) = M'_{\min}^2 c^2 = (M'_1 + \dots + M'_n)^2 c^2$$

e in forma esplicita, confrontata con [4.8], questa equazione da

$$E_s = \frac{M'_{\min}^2 - M^2 - m^2}{2M} c^2$$

[4.9]

Nel caso particolare in cui il sistema finale sia costituito da una sola particella di massa  $M'$  si ha

$$E_s = \frac{M'^2 - M^2 - m^2}{2M} c^2$$

Applichiamo il concetto di energia di soglia al processo di formazione di una coppia elettrone-positrone. Ad esempio consideriamo la reazione



dove  $N$  è un nucleo. La presenza di  $N$  è necessaria per garantire la conservazione della quantità di moto. Infatti, se  $N$  non fosse presente, si avrebbe

$$\vec{P}_{\text{in}} = \vec{P}_\gamma \neq 0; \quad \vec{P}_{\text{fin}} = \vec{P}_{e^-} + \vec{P}_{e^+} = 0$$

$\vec{P}_{\text{fin}}$  è nullo perché ci siamo posti nel sistema del centro di massa della coppia elettrone-positrone.

Calcoliamo ora l'energia di soglia relativa a questo processo. Sia  $M_N$  la massa del nucleo,  $m_e$  la massa del positrone e dell'elettrone. Nella [4.9] si devono fare le seguenti sostituzioni

$$M = M_N; \quad M'_{\min} = M_N + 2m_e; \quad m = m_\gamma = 0$$

Da queste si ottiene

$$E_s = \frac{(M_N + 2m_e)^2 - M_N^2}{2M_N} c^2 = 2m_e c^2 \left[ 1 + \frac{m_e}{M_N} \right] \quad [4.11]$$

Questa è l'energia minima che un fotone deve avere affinché da un urto con un nucleo si generi una coppia elettrone-positrone. Dall'espressione si deduce che  $E_s > 2m_e c^2$  che è l'energia a riposo della coppia  $e^+ - e^-$ . Questo è dovuto al fatto che dopo l'urto si avrà una energia cinetica sia del nucleo che di  $e^+$  ed  $e^-$ . Però dal momento che  $M_N \gg m_e$  si ha praticamente  $E_s \approx 2m_e c^2$ . Quindi le particelle  $e^+$  ed  $e^-$  sono strettamente a riposo rispetto al nucleo. Al limite si può assumere che la massa del nucleo sia infinita in modo che il nucleo non acquisti energia cinetica ed  $E_s = 2m_e c^2$ . In questa approssimazione la coppia  $e^+ - e^-$  è ferma. Se l'energia  $E$  iniziale è maggiore di  $E_s$  si ha un'energia cinetica della coppia  $e^+ - e^-$ . Se  $E$  continua ad aumentare si arriverà all'energia di soglia per il processo di creazione di due coppie elettrone-positrone.

24-11-1997

### 4.3 ENERGIA DI LEGAME E DIFETTO DI MASSA

Un'altra conseguenza del principio di equivalenza fra massa ed energia è il legame tra difetto di massa ed energia di legame. Sia  $M$  la massa di una particella. Supponiamo che  $M$  decada spontaneamente in due particelle di massa  $m_1$  e  $m_2$ . Per quanto detto prima si deve avere

$$\begin{aligned} M &> m_1 + m_2 \\ Mc^2 &= \gamma(v_1)m_1c^2 + \gamma(v_2)m_2c^2 \end{aligned}$$

Questo nel caso in cui  $M$  decada spontaneamente. Supponiamo ora che  $M$  sia stabile e cioè non decada spontaneamente. Si definisce *energia di legame* l'energia minima che si deve fornire affinché  $M$  si scinda in  $m_1$  e  $m_2$ . Definiamo le energie a riposo

$$E_0 = Mc^2; \quad E_{01} = m_1c^2; \quad E_{02} = m_2c^2 \quad [4.12]$$

Se  $\Delta E_0$  è l'energia di legame si deve avere per definizione

$$\Delta E_0 + E_0 = E_{01} + E_{02} \Rightarrow \Delta E_0 = (E_{01} + E_{02}) - E_0 \quad [4.13]$$

Per ipotesi deve essere  $E_0 > 0$ , quindi  $E_0 < E_{01} + E_{02}$ . A questo punto applichiamo l'equivalenza fra massa ed energia e si può dedurre che  $M < m_1 + m_2$ .

Quindi la *particella M stabile* ha massa inferiore alla somme delle masse delle particelle che la compongono. Si definisce *difetto di massa*

$$\Delta M = (m_1 + m_2) - M = \text{Difetto di massa} \quad [4.14]$$

e ovviamente

$$\Delta M = \frac{\Delta E_0}{c^2} \quad [4.15]$$

Questo risultato trova applicazione nei nuclei stabili. *La massa di un nucleo stabile è minore delle masse di protoni e neutroni che lo compongono.* Consideriamo ad esempio il nucleo d'elio

$$2m_p + 2m_n \approx 3755 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

mentre il valore sperimentale della massa del nucleo d'elio è

$$\begin{aligned} M_{\text{He}} &\approx 3727 \text{ MeV}/c^2 \\ \Delta M &\approx 28 \text{ MeV}/c^2 \Rightarrow \Delta E_0 \approx 28 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Quindi misurando la massa di un nucleo si può dedurre  $\Delta E_0$  e quindi le forze che tengono uniti i nucleoni.

# 5

## CENNI DI MECCANICA QUANTISTICA

### 5.1 STATISTICHE DI FERMI-DIRAC E BOSE-EINSTEIN

Se  $\psi(\vec{r}, t)$  è la funzione d'onda di una particella, allora  $|\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3 r$  è la probabilità che all'istante  $t$  la particella si trovi nel volumetto  $d^3 r$  centrato nel punto  $\vec{r}$ . Questa funzione  $\psi(\vec{r}, t)$  è soluzione dell'equazione di Schrödinger

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = H \psi(\vec{r}, t) \quad [5.1]$$

Consideriamo due particelle, 1 e 2, e sia  $\psi(1, 2, t)$  la funzione d'onda. Se non consideriamo lo spin questa si può scrivere come  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$ . Se le due particelle non sono interagenti si ha

$$H(1, 2) = H(1) + H(2)$$

ovvero l'hamiltoniana del sistema è uguale alla somma delle hamiltoniane delle due particelle. Per quanto detto si avrà che

$$\psi(1, 2, t) = \psi_a(1, t) \cdot \psi_b(2, t)$$

dove  $\psi_a$  e  $\psi_b$  sono soluzioni dell'equazione di Schrödinger con  $H(1)$  e  $H(2)$ . La funzione  $\psi_a$  rappresenta lo stato quantistico della particella 1 e  $\psi_b$  lo stato della particella 2. In generale  $\psi_a \neq \psi_b$ . Per quanto definito si avrà per la probabilità

$$|\psi(1, 2, t)|^2 \cdot d^3 r_1 \cdot d^3 r_2 = |\psi(1, t)|^2 d^3 r_1 \cdot |\psi(2, t)|^2 d^3 r_2$$

Questa è la probabilità di trovare simultaneamente la particella 1 in  $\vec{r}_1$  e la particella 2 in  $\vec{r}_2$ . Quanto fatto ha senso se le due particelle sono distinguibili l'una dall'altra. Solo in questo caso infatti si può porre una corrispondenza biunivoca  $1 \leftrightarrow \psi_a$  e  $2 \leftrightarrow \psi_b$ . Questa corrispondenza perde di significato quando le particelle sono identiche in quanto *dal punto di vista quantistico sono indistinguibili, a meno che le loro funzioni d'onda non siano definite in domini spaziotemporali con intersezione nulla*. Quando questo non avviene le particelle sono indistinguibili.

Analizziamo le conseguenze di questa indistinguibilità mantenendo però valida l'ipotesi di due particelle non interagenti. Sia  $\psi(1,2,t)$  la loro funzione d'onda. Deve essere che

$$\psi(1,2,t) \neq \psi_a(1,t)\psi_b(2,t)$$

perché non si può stabilire quale particella si trovi nello stato  $\psi_a$  e quale nello stato  $\psi_b$ . Cioè la funzione d'onda deve contenere contemporaneamente i termini  $\psi_a(1,t)\psi_b(2,t)$  e  $\psi_a(2,t)\psi_b(1,t)$ . Introduciamo l'*operatore di scambio*  $P_{1,2}$  il cui unico effetto è quello di scambiare le due particelle (cioè le loro coordinate), cioè si definisce

$$\left. \begin{array}{l} P_{1,2}\psi(1,2,t) = \psi(2,1,t) \\ P_{1,2}\psi_i(1,t) = \psi_i(2,t) \\ P_{1,2}\psi_i(2,t) = \psi_i(1,t) \end{array} \right\} \text{con } i=a,b \quad [5.2]$$

Se applichiamo questo operatore, questo *non potrà provocare alcun cambiamento osservabile*. Quindi deve essere

$$|\psi(1,2,t)|^2 = |\psi(2,1,t)|^2$$

Questa ugualanza implica che

$$P_{1,2}\psi(1,2,t) \equiv \psi(2,1,t) = \eta\psi(1,2,t) \quad \text{con } |\eta|^2 = 1$$

Poiché l'assegnazione dei numeri 1 e 2 è puramente convenzionale deve essere verificata la relazione

$$P_{1,2}\psi(2,1,t) \equiv \psi(1,2,t) = \eta\psi(2,1,t)$$

Da queste due si deduce che  $\eta^2 = 1 \Rightarrow \eta = \pm 1$ . Per la funzione d'onda  $\psi$  si può porre in definitiva che

$$\psi(1,2,t) \propto [\psi_a(1,t)\psi_b(2,t) + \eta\psi_a(2,t)\psi_b(1,t)] \quad [5.3]$$

### §

Nel caso in cui le particelle identiche siano interagenti non sarà più possibile scrivere le loro funzioni d'onda in forma fattorizzata, questo perché l'Hamiltoniana in questo caso è del tipo

$$H(1,2) = H(1) + H(2) + V(1,2)$$

Continua però a sussistere l'indistinguibilità, quindi deve essere sempre verificato che

$$P_{1,2}\psi(1,2,t) \equiv \psi(2,1,t) = \eta\psi(1,2,t) \quad \text{con } \eta = \pm 1$$

Si può concludere in modo generale che *la funzione d'onda di due particelle identiche è simmetrica o antisimmetrica rispetto allo scambio delle coordinate*. Questa è infatti una proprietà intrinseca, rimane cioè invariata nel tempo. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \psi(1,2,t+dt) &= \psi(1,2,t) + \frac{\partial}{\partial t}\psi(1,2,t)dt \\ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(1,2,t) &= H\psi(1,2,t) \end{aligned}$$

26-11-1997

e  $H$  è ovviamente invariante per lo scambio delle due particelle, cioè  $H(1,2) = H(2,1)$ . Tenuto conto di questa proprietà segue dall'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(2,1,t) = H\psi(2,1,t) = \eta H\psi(1,2,t) = \eta i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(1,2,t) \quad [5.4]$$

Quindi  $\frac{\partial}{\partial t} \psi(2,1,t) = \eta \frac{\partial}{\partial t} \psi(1,2,t)$ . Da queste considerazioni si deriva che  $\eta$  non può essere funzione del tempo. Quando  $\eta = 1$  si dice che le due particelle identiche obbediscono alla statistica di Bose-Einstein; quando  $\eta = -1$  le due particelle identiche obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac.

$$\psi(1,2,t) = \psi(2,1,t) \quad \text{statistica di Bose-Einstein} \quad [5.5]$$

$$\psi(1,2,t) = -\psi(2,1,t) \quad \text{statistica di Fermi-Dirac} \quad [5.6]$$

### Bosoni e fermioni

Le particelle del primo tipo si chiamano *bosoni*. Le particelle del secondo si chiamano *fermioni*. Le particelle del secondo tipo sono soggette al principio di esclusione di Pauli. Infatti se due fermioni identici non interagenti<sup>1</sup> avessero lo stesso stato quantico allora la loro funzione d'onda complessiva sarebbe

$$\psi(1,2) \propto [\psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1)] \equiv 0$$

Empiricamente sappiamo che si comportano come bosoni tutte le particelle che hanno spin pari a un multiplo intero di  $\hbar$ . Quando lo spin è un multiplo semi-intero di  $\hbar$  le particelle si comportano come fermioni.

Consideriamo adesso un insieme di  $N$  particelle identiche non interagenti. Il generico stato in cui una particella può trovarsi sia  $\psi_{k_i}$  ( $i = 1, \dots, N$ ). Se le particelle fossero distinguibili si potrebbe assegnare a ciascuna di esse un ben determinato stato e la funzione complessiva sarebbe

$$\psi(1, \dots, N) = \psi_{k_1}(1)\psi_{k_2}(2) \cdots \psi_{k_N}(N)$$

Se invece le particelle sono indistinguibili, uno o più scambi di particelle non possono portare a cambiamenti del sistema. In questo caso deve essere verificato che

$$P_{ij} \psi_{k_s}(i)\psi_{k_t}(j) = \psi_{k_t}(j)\psi_{k_s}(i) \quad [5.7]$$

Se si tratta di fermioni, la funzione complessiva sarà antisimmetrica per un numero dispari di scambi e simmetrica per un numero pari di scambi. Se si tratta invece di bosoni, la funzione d'onda complessiva sarà sempre simmetrica per un numero qualsiasi di scambi effettuati.

Consideriamo l'insieme di indici  $(1, 2, \dots, N)$  e una generica permutazione  $P \equiv (P_1, P_2, \dots, P_N)$ . Il numero delle possibili permutazioni è  $N!$ . Ciascuna permutazione  $P$  si ottiene dalla successione iniziale per mezzo di un numero di scambi  $n_P$ . Quindi un sistema di  $N$  particelle

<sup>1</sup>Se due particelle fossero invece interagenti, non avrebbe senso parlare di principio di Pauli in quanto non si potrebbe parlare di stato di una singola particella.

identiche non interagenti, che siano dei fermioni, si può descrivere con una funzione d'onda complessiva del tipo<sup>2</sup>

$$\psi_{FD} \propto \sum_P (-1)^{n_p} \psi_{k_1}(P_1) \psi_{k_2}(P_2) \cdots \psi_{k_N}(P_N) \quad [5.8]$$

Nel caso di bosoni invece si ha

$$\psi_{BE} \propto \sum_P \psi_{k_1}(P_1) \psi_{k_2}(P_2) \cdots \psi_{k_N}(P_N) \quad [5.9]$$

Queste funzioni sono definite a meno di un fattore moltiplicativo. Per trovare tale fattore basta considerare l'interpretazione probabilistica della funzione d'onda. Assumiamo che le singole funzioni d'onda siano già normalizzate, cioè

$$\int_V |\psi_{k_i}(P_i)|^2 d^3 r_{P_i} = \int_V |\psi_{k_i}(i)|^2 d^3 r_i = 1$$

Un'analogia condizione di normalizzazione deve valere per la funzione d'onda complessiva, cioè deve essere verificato che

$$\int_V |\psi_{FD}|^2 d^3 r_1 d^3 r_2 \cdots d^3 r_N = \int_V |\psi_{BE}|^2 d^3 r_1 d^3 r_2 \cdots d^3 r_N = 1$$

Facciamo l'ipotesi che sia  $\psi_{k_i} \neq \psi_{k_j}$  per  $i \neq j$ , cioè che gli stati siano tutti diversi. Questa ipotesi è obbligatoria se si considerano fermioni identici. Comunque assumiamo questo vero anche se le particelle sono bosoni. Sotto queste ipotesi vale anche una condizione di ortonormalità fra gli stati, cioè

$$\int_V \psi_{k_i}^*(P_i) \psi_{k_j}(P_i) d^3 r_{P_i} = \int_V \psi_{k_i}^*(i) \psi_{k_j}(i) d^3 r_i = \delta_{ij}$$

Tenuto conto di queste considerazioni, la condizione di normalizzazione della funzione d'onda complessiva risulta verificata se si pone

$$\psi_{FD} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P (-1)^{n_p} \psi_{k_1}(P_1) \psi_{k_2}(P_2) \cdots \psi_{k_N}(P_N) \quad [5.10]$$

$$\psi_{BE} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_P \psi_{k_1}(P_1) \psi_{k_2}(P_2) \cdots \psi_{k_N}(P_N) \quad [5.11]$$

Nel caso in cui  $N = 2$ , cioè se si hanno solo due particelle identiche, si ha che

$$\psi_{FD} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{k_1}(1) \psi_{k_2}(2) - \psi_{k_1}(2) \psi_{k_2}(1)] \quad [5.12]$$

$$\psi_{BE} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{k_1}(1) \psi_{k_2}(2) + \psi_{k_1}(2) \psi_{k_2}(1)] \quad [5.13]$$

ricordando che questi fattori di normalizzazione ( $1/\sqrt{N!}$ ) valgono sotto l'ipotesi di stati tutti differenti.

---

<sup>2</sup>I pedici *FD* e *BE* stanno per Fermi-Dirac e Bose-Einstein rispettivamente. [NdT]

## 5.2 FUNZIONE D'ONDA DI UNA PARTICELLA CHE DECADE

**28-11-1997** In meccanica quantistica lo stato di una particella libera con quantità di moto ed energia ben definite si dice *stato stazionario* e la funzione d'onda che lo descrive è

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r})\psi(t) \quad \text{dove } \phi(\vec{r}) \propto e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p} \cdot \vec{r}} \quad \text{e} \quad \psi(t) = \psi(0)e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad [5.14]$$

Se la particella è a riposo  $E = E_0 = mc^2$ , con  $m$  massa della particella. Ovviamente si ha che

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 = \text{costante}$$

Supponiamo di normalizzare la funzione d'onda  $\phi(\vec{r}, t)$  in modo tale che

$$\int_V |\phi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = \int_V |\phi(\vec{r})|^2 d^3r = 1 \quad \text{dove si è posto } |\psi(0)|^2 = 1$$

$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 = 1$  si interpreta come la probabilità che la particella esista nel volume  $V$  all'istante  $t$ . Essendo questa uguale a 1, la particella risulta stabile.

Se invece la particella non fosse stabile non potrebbe essere  $|\psi(t)| = 1$  verificata ad ogni  $t$ , quindi lo stato della particella non potrà essere uno stato stazionario. Per il principio di indeterminazione tra tempo ed energia deve essere

$$\Delta E = \hbar/\tau$$

dove  $\tau$  è la vita media della particella. Questo è in accordo col fatto che la particella non è in uno stato stazionario.

Si ha però che lo stato di una particella che decade si può in genere approssimare ad uno *stato quasi stazionario*. Cioè si può assumere che l'andamento temporale della funzione d'onda sia

$$\psi(t) = \psi(0)e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \quad [5.15]$$

dove però  $E$  è una quantità complessa. In particolare si ha

$$E = \bar{E} - i\frac{\Gamma}{2}$$

[5.16]

dove  $\bar{E}$  e  $\Gamma$  sono numeri positivi. Con queste considerazioni la funzione d'onda si può scrivere

$$\psi(t) = \psi(0) \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \bar{E}t - \frac{1}{2\hbar} \Gamma t \right] \quad [5.17]$$

In questo caso si vede che la  $\psi(t)$  è sostanzialmente diversa da quella dello stato stazionario. Si vede che quanto più  $\Gamma$  è piccolo, tanto più lo stato si avvicina ad uno stato stazionario. Dal momento che

$$E \longrightarrow \bar{E} \quad \text{per } \Gamma \longrightarrow 0$$

si può interpretare  $\bar{E}$  come il valore medio dell'energia, cioè l'energia può assumere valori nell'intervallo

$$\left[ \bar{E} - \frac{\Delta E}{2}; \bar{E} + \frac{\Delta E}{2} \right] \quad [5.18]$$

dove  $\Delta E$  è l'incertezza data dal principio d'indeterminazione. In particolare se la particella è a riposo  $\bar{E}$  ci da il valore medio della massa della particella. Quindi una particella instabile non ha una massa ben definita.

Consideriamo adesso la quantità  $\Gamma$ . Il modulo quadro di  $\psi(t)$  è

$$|\psi(t)|^2 = |\psi(0)|^2 e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t} = e^{-\frac{\Gamma}{\hbar}t} \quad [5.19]$$

dove si è posto  $|\psi(0)|^2 = 1$ .  $|\psi(t)|^2$  ci deve sempre dare la probabilità che la particella esista al tempo  $t$  nel volume  $V$ .

Per un insieme statistico di particelle identiche instabili sappiamo che il numero di particelle non ancora decadute all'istante  $t$  è

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t} \quad [5.20]$$

quindi si può porre, per il significato probabilistico di  $|\psi(t)|^2$

$$|\psi(t)|^2 = N(t)/N(0) \quad [5.21]$$

Da questa segue che

$$e^{-\Gamma t/\hbar} = e^{-\lambda t}$$

ovvero

$$\Gamma = \hbar\lambda = \hbar/\tau = \Delta E \quad [5.22]$$

Tenendo conto del principio di indeterminazione si interpreta  $\Gamma$  come l'indeterminazione minima dell'energia di una particella che decade.  $\Gamma$  viene detta larghezza del livello energetico di una particella. È logico aspettarsi che l'approssimazione di stato quasi stazionario sia buona quando  $\Gamma \ll \bar{E}$ , cioè quando è possibile assegnare un valore di energia abbastanza preciso.

Questa condizione può essere vista anche sotto un altro aspetto, infatti possiamo scrivere

$$\tau = \hbar/\Gamma \gg \hbar/\bar{E} = \bar{T} \quad [5.23]$$

dove  $\bar{T}2\pi$  è il periodo medio caratteristico di oscillazione della funzione d'onda della particella. Di conseguenza si può parlare di stato quasi stazionario quando la vita media della particella è molto più grande del periodo di oscillazione della funzione d'onda.

Il decadimento di una particella può avvenire teoricamente o in un unico modo oppure in modi diversi. Ad esempio un atomo che si trova ad un livello energetico eccitato può avere un unico modo di decadere se esiste un solo livello più basso, mentre se esistono più livelli inferiori il decadimento può avvenire in modi diversi, con diversi stati finali.

Consideriamo il caso generale in cui siano  $n$  il numero di possibili modi di decadere, ciascuno di questi caratterizzato dalla costante  $\lambda_i (i = 1, \dots, n)$ . Si dice che in questo caso la

particella ha  $n$  canali di decadimento e  $\lambda_i$  la probabilità di decadere nell'unità di tempo per il canale  $i$ -esimo. In questo caso si ha

$$\lambda = \sum_i \lambda_i \quad [5.24]$$

Per ciascun canale si può definire una larghezza parziale

$$\Gamma_i = \hbar \lambda = \sum_i \Gamma_i \quad [5.25]$$

Consideriamo un insieme statistico di particelle identiche con  $n$  canali di decadimento. Si ha che

$$\frac{\Gamma_i}{\Gamma} = \frac{\lambda_i}{\lambda} \quad [5.26]$$

è la percentuale di decadimenti nell' $i$ -esimo canale. Questo si dice *rappporto di diramazione* (= “branching ratio”). Si definiscono pure i tempi parziali di vita media

$$\tau_i = 1/\lambda_i \quad [5.27]$$

Questi però possono contribuire all'effettivo tempo di vita media secondo la relazione

$$\tau = 1/\lambda \Rightarrow \frac{1}{\tau} = \sum_i \frac{1}{\tau_i} \Rightarrow \tau < \tau_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad [5.28]$$

### 5.3 SPAZIO DI HILBERT

1-12-1997

Supponiamo di avere un sistema quantistico costituito da una particella puntiforme e descritto da una funzione d'onda scalare. Sia essa  $\phi(\vec{r}, t)$ . Il sistema risulta definito all'istante  $t$  da questa funzione. Poniamo:  $\phi(\vec{r}, t) = \phi_p(t)$  dove  $p$  è il punto individuato da  $\vec{r}$ . Quindi l'insieme dei valori  $\phi(t)$  descrive ed individua il nostro sistema.

Lo stato all'istante  $t$  si può geometricamente rappresentare come un *vettore appartenente ad uno spazio di dimensione infinita* le cui componenti siano le  $\phi_p(t)$ . Questo spazio si dice *Spazio di Hilbert* o spazio degli stati ed i corrispondenti vettori si dicono vettori dello stato.

Un generico vettore di questo spazio si indica con:

$$|t\rangle \quad \text{KET} \quad [5.29]$$

questo descrive lo stato del sistema all'istante  $t$ . Supponiamo ora che all'istante  $t$  il sistema sia localizzato in un certo punto  $p'$  (cioè la funzione d'onda è nulla in tutti i punti diversi da  $p'$ ), quindi si ha:

$$\phi_p(t) = 0 \quad \text{per } p \neq p'$$

Il ket che individua questo stato si indica con  $|\vec{r}', t\rangle$

Consideriamo ora l'insieme di tutti questi ket al variare di  $(\vec{r}')$ , questa è una buona base o un insieme completo, dello spazio di Hilbert. Questa base è ortogonale.

Per quanto detto un generico ket  $|t\rangle$  si può esprimere in funzione della base ortogonale  $|\vec{r}', t\rangle$ , quindi le componenti  $\phi_p(t)$  sono ortogonali e si ha che:

$$\int \psi_p^*(t) \psi_p(t) d^3 \vec{r} = \int \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) d^3 \vec{r} \quad [5.30]$$

cioè il modulo quadro del vettore  $|t\rangle$  è la somma (integrale) dei moduli quadri delle componenti.

Si definisce anche il prodotto scalare fra due stati partendo dal fatto che il modulo quadro di  $|t\rangle$  si può interpretare come il prodotto scalare con se stesso. Questo si indica con:

$$\langle t|t\rangle \quad \text{dove } \langle t| \text{ si dice BRA} \quad [5.31]$$

Quindi ad ogni vettore  $|t\rangle$  si associa il suo duale  $\langle t|$  e si ha la corrispondenza biunivoca<sup>3</sup>:

$$|t\rangle \equiv \{\psi_p(t)\} \longrightarrow \langle t| \equiv \{\psi_p^*(t)\} \quad [5.32]$$

Quindi il prodotto scalare fra il vettore  $|t,a\rangle$  e  $|t,b\rangle$  si definisce come:

$$\langle t,b|t,a\rangle = \int \psi_p^{*(b)}(t) \psi_p^{(a)}(t) d^3 \vec{r} \quad [5.33]$$

Per quanto definito si ha che:

$$\langle t,a|t,b\rangle = \langle t,b|t,a\rangle^* \quad [5.34]$$

Due vettori si dicono ortogonali quando il loro prodotto scalare è nullo. Ovviamente la condizione di ortogonalità dovrà valere per i vettori di base. Questi vettori di base possono essere definiti in modo che la base risulti ortonormale, questo, per definizione, significa che:

$$\psi_p(t) \equiv \langle \vec{r}, t | t \rangle \quad [5.35]$$

cioè quando per una base succede questo la base si dice ortonormale.

Se  $|t\rangle$  è lo stato che descrive il nostro sistema e se questo stato è normalizzato, cioè  $\langle t|t\rangle = 1$ , allora si ha che:

$$|\langle \vec{r}, t | t \rangle|^2 = \psi^*(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) \quad [5.36]$$

Questa è la densità di probabilità trovare la particella nel punto  $\vec{r}$  all'istante  $t$ . Il generico  $|t\rangle$  si può esprimere in funzione della base, secondo la formula:

$$|t\rangle = \int \psi_p(\vec{r}, t) d^3 \vec{r} = \int \langle \vec{r}, t | t \rangle |\vec{r}, t\rangle d^3 \vec{r} \quad [5.37]$$

---

<sup>3</sup>Sotto certe condizioni.

Determiniamo quale condizione devono soddisfare i vettori di base affinché effettivamente la base risulti ortonormale. Deve essere verificato che:

$$\langle \vec{r}, t | t \rangle = \int \psi_p(t) \langle \vec{r}', t | \vec{r}, t \rangle d^3 \vec{r} = \psi_{p'}(t) \quad [5.38]$$

da questa segue:

$$\boxed{\langle \vec{r}, t | \vec{r}, t \rangle = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')} \quad [5.39]$$

Con questa posizione i vettori di base risultano automaticamente ortogonali, la  $\delta^3$  si può esprimere nella forma fattorizzata:

$$\delta^3(\vec{r} - \vec{r}') = \delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z') \quad [5.40]$$

---

### §

3-12-1997

Tutte le grandezze osservabili sono rappresentate da operatori *hermitiani* che agiscono sui Ket. A questi operatori si associano matrici (anch'esse hermitiane) di dimensione infinita.

Si ha che:

$$A |t, 1\rangle = |t, 2\rangle \quad [5.41]$$

dove  $A$  è l'operatore hermitiano e  $|t, 1\rangle$  e  $|t, 2\rangle$  sono due Ket le cui componenti sono:

$$|t, 1\rangle = \int \psi_p^{(1)}(t) |\vec{r}, t\rangle d^3 \vec{r} \quad [5.42]$$

$$|t, 2\rangle = \int (\psi_p^{(2)}(t) |\vec{r}, t\rangle d^3 \vec{r}) \quad [5.43]$$

Per definizione si ha:

$$\psi_{p'}(t) = \langle \vec{r}, t | t, 2 \rangle = \langle \vec{r}', t | A | t, 1 \rangle = \int \psi_p^{(1)}(t) \langle \vec{r}', t | A | \vec{r}, t \rangle d^3 \vec{r} = \int \psi_p^{(1)}(t) A_{p'p} d^3 \vec{r} \quad [5.44]$$

dove si è posto:

$$A_{p'p} = \langle \vec{r}', t | A | \vec{r}, t \rangle \quad \text{Elementi di matrice di } A \quad [5.45]$$

Così definiti gli elementi di matrice sono relativi alla base. Quando si cambia base questi in genere cambiano. Se si prende come base quella degli autovalori di  $A$  allora l'espressione matriciale assume forma diagonale, con gli elementi reali. In generale lo spettro degli autovalori di un operatore può essere sia discreto, sia continuo.

### 5.3.1 SPETTRO DISCRETO

$a_k$  sia l'autovalore,  $|a_k, t\rangle$  sia il corrispondente autostato (per semplicità si assume che non vi sia degenerazione).

Quindi, per definizione, si ha:

$$A|a_k, t\rangle = a_k |a_k, t\rangle \quad [5.46]$$

Un generico stato  $|t\rangle$  si potrà scrivere come:

$$|t\rangle = \sum_k c_k(t) |a_k, t\rangle \quad [5.47]$$

e con la normalizzazione  $\langle a_k, t | a_{k'}, t \rangle = \delta_{kk'}$  si ha che :

$$c_k(t) = \langle a_k, t | t \rangle \quad [5.48]$$

La quantità:

$$|\langle a_k, t | t \rangle|^2 = |c_k(t)|^2 \quad [5.49]$$

fornisce la probabilità che una misura della grandezza A fornisca il valore  $a_k$  quando il sistema si trova nello stato  $|t\rangle$ .

La quantità:

$$\langle t | A | t \rangle \quad \text{Valore medio o valore di aspettazione} \quad [5.50]$$

si dice valore medio di A rispetto allo stato  $|t\rangle$ . Si verifica facilmente che:

$$\langle t | A | t \rangle = \sum_k |\langle a_k, t | t \rangle|^2 a_k = \sum_k |c_k(t)|^2 a_k \quad [5.51]$$

### 5.3.2 SPETTRO CONTINUO

Sia  $\alpha$  l'autovalore e  $|\alpha, t\rangle$  il corrispondente autovettore. Un generico ket  $|t\rangle$  si potrà scrivere come:

$$|t\rangle = \int \langle \alpha, t | t \rangle |\alpha, t\rangle d\alpha \quad [5.52]$$

$$\langle \alpha, t | \alpha', t \rangle = \delta(\alpha - \alpha') \quad [5.53]$$

$$|\langle \alpha, t | t \rangle|^2 = P(\alpha) \quad [5.54]$$

L'ultima quantità scritta rappresenta la densità di probabilità della distribuzione degli autovalori relativa allo stato  $|t\rangle$ . Cioè la probabilità di ottenere con una misura un valore compreso tra  $a$  e  $a + da$  è data da  $|\langle a, t|t\rangle|^2$ .

### 5.3.3 SPETTRO QUASI CONTINUO

Definiamo ora la situazione di spettro quasi continuo. Consideriamo un sistema che sia confinato in un volume grande ma finito e tale che una funzione d'onda assuma valori uguali sulla frontiera di questo insieme. Sotto queste ipotesi si può passare dal caso continuo al caso discreto:

$$a \longleftrightarrow a_k \quad [5.55]$$

$$\int |\langle a, t|t\rangle|^2 da \longleftrightarrow \sum_k |\langle a_k, t|t\rangle|^2 \quad [5.56]$$

cioè si ha il passaggio da una densità di probabilità ad una probabilità. La distanza fra gli autovalori  $a_k$  si può rendere piccola aumentando il volume  $V$  che racchiude il sistema. Per un  $V$  fissato si può definire la densità di autostato:

$$\rho(a_k) = \frac{\Delta n}{\Delta a_k} \quad [5.57]$$

dove  $\Delta n$  è il numero di autostati relativo all'intervallo  $\Delta a_k$ . Con una opportuna scelta del volume  $V$  gli autovalori possono essere trattati come quantità continue, in quanto, la loro distanza risulta molto piccola. In questo caso la densità di autostati diventa:

$$\rho(a_k) = \frac{\delta n}{\delta a_k} \quad \text{con } \delta a_k \ll a_k \quad [5.58]$$

Approssimando la quantità  $\delta a_k$  ad un infinitesimo si dovrà parlare quindi di probabilità di trovare un autovalore nell'intervallo di estremi  $a_k$  e  $a_k + da_k$ . Questa probabilità è:

$$|\langle a_k, t|t\rangle|^2 \delta n \quad [5.59]$$

dove  $\delta n = \rho(a_k) \delta a_k$  è il numero di autostati i cui autovalori sono compresi nell'intervallo  $[a_k, a_k + \delta a_k]$ . Con questa approssimazione si ha:

$$\sum_k |\langle a_k, t|t\rangle|^2 \quad [5.60]$$

da cui:

$$\int |\langle a_k, t|t\rangle|^2 \rho(a_k) \delta a_k \quad [5.61]$$

Questa quindi è la riduzione di uno spettro continuo ad uno quasi continuo. In pratica quello che si fa è l'approssimazione:

$$|\langle a, t|t \rangle|^2 \simeq |\langle a_k, t|t \rangle|^2 \rho(a_k) \delta a_k \quad [5.62]$$

Ovviamente se si fa tendere  $V$  ad infinito si deve avere:

$$\lim_{V \rightarrow \infty} |\langle a_k, t|t \rangle|^2 \rho(a_k) \delta a_k = |\langle a, t|t \rangle|^2 da \quad [5.63]$$

L'utilità di questa approssimazione risulterà chiara quando si affronterà la teoria di Fermi.

#### 5.3.4 OPERATORE CONIUGATO HERMITIANO

Sia  $G$  un operatore lineare che agisce nello spazio di Hilbert. Si definisce  $G^\dagger$ , *operatore coniugato Hermitiano*, come:

$$\langle t, 2|G^\dagger|t, 1\rangle = (\langle t, 1|G|t, 2\rangle)^* \quad [5.64]$$

$$|t, 3\rangle = G|t, 2\rangle \quad [5.65]$$

$$\langle t, 2|G^\dagger|t, 1\rangle = (\langle t, 1|G|t, 2\rangle)^* = (\langle t, 1|t, 3\rangle)^* = \langle t, 3|t, 1\rangle \quad [5.66]$$

Quindi per  $G^\dagger$  e  $G$  vale la proprietà:

$$|t, 3\rangle = G|t, 2\rangle \implies \langle t, 3| = \langle t, 2|G^\dagger \quad [5.67]$$

Un operatore  $G$  si dice *Hermitiano* quando  $G = G^\dagger$ . In questo caso se  $|g\rangle$  è un autostato normalizzato di  $G$  con autovalore  $g$  si ha che:

$$\langle g|G|g\rangle = g \quad [5.68]$$

$$\langle g|G^\dagger|g\rangle = g^* \rightarrow g = g^* \quad [5.69]$$

quindi gli autovalori di un operatore hermitiano sono tutti reali.

Un operatore  $G$  si dice *unitario* quando  $G = G^\dagger$ <sup>4</sup>. Un operatore unitario conserva i moduli dei ket. Infatti:

$$\langle t|G^\dagger G|t\rangle = \langle t|t\rangle \quad [5.70]$$

---

<sup>4</sup>Il testo riporta così:  $G = G^{-1}$

Nel caso in cui lo spazio di Hilbert sia relativo ad un sistema di  $N$  particelle i ket si scrivono come:

$$|t\rangle = \int \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, t) |\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, t\rangle d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \dots d^3\vec{r}_n \quad [5.71]$$

dove si è posto  $|\vec{r}_2, \vec{r}_3, \dots, \vec{r}_N, t\rangle = |\vec{r}_1, t\rangle |\vec{r}_2, t\rangle \dots |\vec{r}_N, t\rangle$ . Il prodotto scalare si definisce come:

$$\langle t|t\rangle = \int \psi^N(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) d^3\vec{r}_1 \dots d^3\vec{r}_N \quad [5.72]$$

## 5.4 RAPPRESENTAZIONE DI SCHRÖDINGER

Consideriamo un sistema quantistico descritto dalla funzione d'onda  $\psi(\vec{r}, t) = \psi_p(t)$ . Questa funzione soddisfa l'equazione di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_p(t) = H \psi_p(t) \quad [5.73]$$

Questa è equivalente all'equazione vettoriale:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |t\rangle = H |t\rangle \quad [5.74]$$

con  $|t\rangle = \int \psi_p(t) \cdot |\vec{r}, t\rangle d^3\vec{r}$ . In realtà si è assunto che i vettori di base  $|\vec{r}, t\rangle$  non varino al variare di  $t$ , cioè:

$$\frac{\partial}{\partial t} |\vec{r}, t\rangle = 0 \quad [5.75]$$

se  $|\vec{r}, t\rangle = |\vec{r}\rangle$

La formulazione della meccanica quantistica basata sull'equazione [5.74] si dice *rappresentazione di Schrödinger*.

Esistono comunque altre rappresentazioni ed in particolare ne esistono un numero infinito, tutte equivalenti. Questo perché non si possono misurare né le funzioni d'onda, né gli operatori. Quello che si può misurare sono gli autovalori e le probabilità associate. Quindi ogni altra rappresentazione che lasci invariate queste due grandezze andrà bene. Se applichiamo una trasformazione unitaria a tutti gli elementi dello spazio di Hilbert si ottiene ad esempio una rappresentazione equivalente. Questa trasformazione unitaria si definisce come:

$$U|t\rangle = |\vec{t}\rangle \text{ e } \langle \vec{t}| U^\dagger = \langle \vec{t}| \quad \text{con } UU^\dagger = U^\dagger U = 1 \quad [5.76]$$

Questa è una generica trasformazione unitaria. Definiamo:

$$U(A|t\rangle) = \overrightarrow{A|t\rangle} = \vec{A}|\vec{t}\rangle \quad [5.77]$$

dove  $\vec{A}$  è l'operatore trasformato. Di questo si può dare una rappresentazione esplicita:

$$\vec{A}|\vec{t}\rangle = UA|t\rangle = UAU^\dagger U|t\rangle = UAU^\dagger|\vec{t}\rangle \quad [5.78]$$

quindi:

$$\vec{A} = UAU^\dagger \quad [5.79]$$

Se  $A$  rappresenta una grandezza fisica e se  $|a_k, t\rangle$  è un suo autostato con autovalore  $a_k$  allora si ha che:

$$\vec{A}|a_k \vec{t}\rangle = U(A|a_k t\rangle) = a_k |\vec{a}_k \vec{t}\rangle \quad [5.80]$$

Quindi la trasformazione  $U$  lascia invariati gli autovalori, e l'autostato di  $\vec{A}$  è il trasformato dell'autostato di  $A$ . Dal momento che:

$$\langle \vec{a}_k \vec{t} | \vec{t} \rangle = \langle a_k t | t \rangle \quad [5.81]$$

rimane invariata la probabilità di trovare in una misura l'autovalore  $a_k$ . Abbiamo dunque dimostrato che questa è una rappresentazione equivalente.

Le rappresentazioni più comunemente usate sono quella di Heisenberg e quella di interazione.

## 5.5 RAPPRESENTAZIONE DI HEISENBERG

Per introdurre questa rappresentazione partiamo dalla rappresentazione di Schrödinger. Consideriamo lo stato all'istante  $t$ . Si può porre

$$|t\rangle = T(t, t_0)|t_0\rangle \quad [5.82]$$

dove  $T$  è l'operatore di sviluppo temporale e ovviamente  $T(t_0, t_0) = 1$ . Utilizzando l'equazione di Schrödinger si verifica che:

$$i\hbar \frac{d}{dt} T = HT \quad [5.83]$$

$T$  si può formalmente scrivere come:

$$T(t, t_0) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} H(t - t_0) \right\} \quad [5.84]$$

se  $H$  è hermitiano allora  $T$  risulta unitario. In queste ipotesi si conserva la probabilità, infatti:

$$\langle t | t \rangle = \langle t_0 | T^\dagger(t, t_0) T(t, t_0) | t_0 \rangle = \langle t_0 | t_0 \rangle \quad [5.85]$$

nel caso quasi stazionario di un sistema che decade  $H$  non è hermitiano, in quanto ha autovalori complessi. In questo caso  $T$  non è più unitario e non è garantita la conservazione della probabilità. In ogni caso comunque  $T$  commuta con  $H$ , cioè:

$$[T, H] = TH - HT = 0 \quad [5.86]$$

Quindi la rappresentazione di Heisenberg si ottiene considerando la trasformazione unitaria:

$$U = T^\dagger(t, t_0) = \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} H(t - t_0) \right\} \quad [5.87]$$

cioè si deve applicare questa trasformazione alla rappresentazione di Schrödinger. Questo ovviamente si può fare solo se  $H$  è hermitiana. L'operatore  $T^\dagger$  verifica l'equazione:

$$-i\hbar \frac{d}{dt} T^\dagger = T^\dagger H = HT^\dagger \quad [5.88]$$

Il nuovo stato del sistema sarà:

$$|\vec{t}\rangle = T^\dagger |t\rangle = |t\rangle_H = T^\dagger T |t_0\rangle \quad [5.89]$$

Inoltre si ha che:

$$|t\rangle_H = |t_0\rangle_H = |t_0\rangle \quad [5.90]$$

da cui:

$$\frac{d}{dt} |t\rangle_H = 0 \quad [5.91]$$

Quindi in questa rappresentazione lo stato rimane costante nel tempo, mentre invece variano gli operatori. Supponiamo che l'operatore  $A$  associato ad una grandezza fisica non dipenda esplicitamente dal tempo. Dimostriamo che:

$$\frac{d}{dt} A = \frac{\partial}{\partial t} A = 0 \quad [5.92]$$

Per ipotesi  $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ . Poniamo (rappresentazione di Schrödinger):

$$|t\rangle = \int \psi_p(t) |\vec{r}\rangle d^3\vec{r} \quad [5.93]$$

$$A|t\rangle = \int \psi_p^I(t) |\vec{r}\rangle d^3\vec{r}$$

dove:

$$\psi_p^I(t) = \int A_{pp'} \psi_{p'}(t) d^3\vec{r} \quad [5.94]$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|t\rangle &= \int \frac{\partial}{\partial t} \psi_p(t) |\vec{r}\rangle d^3\vec{r} \\ \frac{d}{dt}[A|t\rangle] &= \int \frac{\partial}{\partial t} \psi_p^I(t) |\vec{r}\rangle d^3\vec{r}\end{aligned}\quad [5.95]$$

dove si ha che:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi_p^I(t) = \int A_{pp^I} \frac{\partial}{\partial t} \psi_{p^I}(t) d^3\vec{r} \quad [5.96]$$

Da tutto questo segue che:

$$\frac{d}{dt}[A|t\rangle] = A \frac{d}{dt}|t\rangle \rightarrow \frac{d}{dt}A = 0 \quad [5.97]$$

Tutto questo è stato valutato nella rappresentazione di Schrödinger. Vediamo ora cosa succede nella rappresentazione di Heisenberg:

$$\vec{A} = A_{\mathcal{H}} = T^\dagger A T \quad [5.98]$$

Valutiamo ora la derivata totale rispetto al tempo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}A_{\mathcal{H}} &= \left( \frac{d}{dt}T^\dagger \right) AT + T^\dagger A \left( \frac{d}{dt}T \right) \\ &= \frac{i}{\hbar} HT^\dagger AT - \frac{i}{\hbar} T^\dagger ATH \\ &= -\frac{i}{\hbar} (A_{\mathcal{H}} H - H A_{\mathcal{H}}) \\ &= -\frac{i}{\hbar} [A_{\mathcal{H}}, H]\end{aligned}\quad [5.99]$$

Quindi l'operatore  $A_{\mathcal{H}}$  verifica l'equazione:

$$i\hbar \frac{d}{dt}A_{\mathcal{H}} = [A_{\mathcal{H}}, H] \quad [5.100]$$

Questa vale nell'ipotesi che  $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$ . Se  $A = H$  si ottiene che:

$$A_{\mathcal{H}} = H_{\mathcal{H}} = T^\dagger HT = T^\dagger TH = H \rightarrow H_{\mathcal{H}} = H \quad [5.101]$$

Quindi anche nel sistema di Heisenberg:

$$\frac{d}{dt}H_{\mathcal{H}} = 0 \quad [5.102]$$

se  $\frac{\partial}{\partial t}H_{\mathcal{H}} = 0$ .

Il fatto che in questa rappresentazione lo stato di un sistema rimane costante implica che sono i vettori di base a variare nel tempo:

$$\begin{aligned} |\vec{r}, t\rangle_{\mathcal{H}} &= T^\dagger(t, t_0)|\vec{r}\rangle \rightarrow \frac{d}{dt}|\vec{r}, t\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \frac{d}{dt}T^\dagger|r\rangle = \frac{i}{\hbar}H|\vec{r}, t\rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned} \quad [5.103]$$

Quindi i vettori  $|\vec{r}, t\rangle_{\mathcal{H}}$  variano nel tempo in modo esattamente opposto a come variano nel tempo i vettori nella rappresentazione di Schrödinger.

*In una qualsiasi rappresentazione vale sempre che  $\frac{\partial A}{\partial t} = 0 \leftrightarrow \frac{d}{dt}A = 0$ . Nel caso della rappresentazione di Heisenberg si valuta  $\frac{d}{dt}A_{\mathcal{H}}$  con l'ipotesi che sia  $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$  e non  $\frac{\partial A_{\mathcal{H}}}{\partial t} = 0$ .*

## 5.6 RAPPRESENTAZIONE DI INTERAZIONE

Questa rappresentazione è molto usata nella fisica delle particelle elementari. Consideriamo un generico sistema la cui Hamiltoniana viene posta nella forma:

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \quad [5.104]$$

dove  $H_0$  è il termine non perturbato e  $H_{\text{int}}$  il termine di interazione. La rappresentazione di interazione si ricava da quella di Schrödinger considerando la trasformazione unitaria:

$$U = T_0^\dagger(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_0)}$$

[5.105]

Lo stato del sistema in questa rappresentazione diventa:

$$|t\rangle_I = T_0^\dagger(t, t_0)|t\rangle \quad [5.106]$$

mentre un generico operatore si può scrivere come:

$$A_I = T_0^\dagger(t, t_0) A T_0(t, t_0) \quad [5.107]$$

Da questa definizione si nota subito che la rappresentazione di interazione è una via di mezzo fra quella di Schrödinger e quella di Heisenberg. In particolare questa *coincide con quella di Schrödinger se  $H_0 = 0$ , mentre coincide con quella di Heisenberg se  $H_{int} = 0$* .

Partendo dall'equazione di Schrödinger e sostituendo  $|t\rangle = T_0|t\rangle_I$  si ha:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle &= H|t\rangle \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (T_0|t\rangle_I) &= HT_0|t\rangle_I \\ HT_0|t\rangle_I + i\hbar T_0 \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle_I &= (H_0 + H_{int})T_0|t\rangle_I \\ i\hbar T_0 \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle_I &= H_{int}T_0|t\rangle_I \end{aligned} \quad [5.108]$$

e infine:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |t\rangle_I = (H_{int})_I |t\rangle_I \quad [5.109]$$

Questo significa che nella rappresentazione di interazione *lo stato del sistema varia nel tempo solo per effetto dell'Hamiltoniana di interazione*.

L'utilità di questa rappresentazione è evidente nello studio dei processi di *scattering*. Infatti con l'uso della rappresentazione di interazione è possibile isolare la semplice evoluzione dinamica dallo stato iniziale allo stato finale dopo lo scattering:

$$|i\rangle_I \rightarrow |f\rangle_I \quad [5.110]$$

Questo discorso conserva la sua validità anche se il sistema è un sistema di particelle. Consideriamo ora un generico operatore  $A$  che, nella rappresentazione di Schrödinger non dipende esplicitamente dal tempo, nella rappresentazione di interazione invece varierà nel tempo solo per effetto di  $H_0$ :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A_I &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left( e^{\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_0)} A e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_0)} \right) = \\ &= i\hbar \left( \frac{i}{\hbar} H_0 T_0^\dagger A T_0 - T_0^\dagger A \frac{i}{\hbar} H_0 T_0 \right) = \\ &= -H_0 A_I + A_I H_0 = \\ &= [A_I, H_0] \end{aligned} \quad [5.111]$$

Se consideriamo il caso in cui  $A \equiv H_0$  si vede dall'espressione di  $T_0$  che  $H_{0_I} \equiv H_0$ . Quindi  $H_0$  è la stessa per la rappresentazione di Schrödinger e di interazione. Lo stesso non vale in generale per  $H_{\text{int}}$  in quanto:

$$\begin{aligned}[H_{\text{int}}, H_0] &\neq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow H_{\text{int}_I} \neq H_{\text{int}} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} H_{\text{int}_I} \neq 0\end{aligned}\quad [5.112]$$

Tutto questo è evidente nei processi di scattering. Nella rappresentazione di interazione lo stato iniziale  $|i\rangle_I$  e quello finale  $|f\rangle_I$  sono indipendenti dal tempo in quanto si possono considerare imperturbati, cioè sono autostati di  $H_0$ . Lo stato del sistema risulterà dipendente dal tempo solo nell'intervallo di tempo in cui avverrà la transizione da  $|i\rangle_I$  a  $|f\rangle_I$ , ma questa transizione avviene ad opera di  $H_{\text{int}}$ , dunque soltanto nel breve periodo della transizione  $H_{\text{int}_I}$  può risultare diversa da zero.

## 5.7 MOMENTO ANGOLARE

Il momento angolare in meccanica quantistica è un operatore vettoriale  $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$  le cui componenti verificano le seguenti regole di commutazione:

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z \quad [5.113]$$

$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x \quad [5.114]$$

$$[J_z, J_x] = i\hbar J_y \quad [5.115]$$

Da queste regole di commutazione segue immediatamente che non può esistere un autostato comune a  $J_x, J_y$  e  $J_z$  con autovalori non nulli. In particolare non può esistere un autostato comune a due sole componenti con autovalori non nulli. Infatti se esistesse uno stato che è autostato di  $J_x$  e  $J_y$  allora dalla prima regola di commutazione si vede che questo deve essere autostato di  $J_z$  con autovalore nullo, ma dalle altre due regole di commutazione si deduce che anche gli autovalori di  $J_x$  e  $J_y$  devono essere nulli.<sup>5</sup>

Si definisce l'operatore:

$$\vec{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \quad [5.116]$$

che rappresenta il modulo quadro di  $\vec{J}$ . Si possono facilmente verificare le seguenti regole di commutazione:

---

<sup>5</sup>l'unico caso in cui l'autostato è autostato di  $J_x, J_y, J_z$  è quello in cui  $J = 0$

$$[\vec{J}^2, J_x] = 0 \quad [5.117]$$

$$[\vec{J}^2, J_y] = 0 \quad [5.118]$$

$$[\vec{J}^2, J_z] = 0 \quad [5.119]$$

$$[5.120]$$

Risulta quindi che  $\vec{J}^2$  commuta con ciascuna componente. L'insieme di tutte queste regole di commutazione implica che lo stato del sistema può essere contemporaneamente autostato di  $\vec{J}^2$  e di una sola delle componenti di  $\vec{J}$ . L'asse individuato da tale componente si dice asse di quantizzazione.<sup>6</sup>

Si può dimostrare che gli autovalori dell'operatore  $\vec{J}^2$  sono:

$$j(j+1)\hbar^2 \quad [5.121]$$

dove:  $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$ . Fissato un sottospazio  $j$  di  $\vec{J}^2$  si ha che in questo sottospazio gli autovalori di  $J_z$  sono:

$$m_j \hbar \quad [5.122]$$

con  $m_j = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ . Quindi il valore massimo che può avere  $J_z$  è  $j\hbar$  e si vede che il modulo quadro di  $\vec{J}$  è più grande del quadrato di  $J_Z = j^2\hbar^2 < j(j+1)\hbar^2$ . Questo è conseguenza del fatto che non può esistere uno stato del sistema in cui una delle componenti assume valore massimo mentre le altre due assumono valore nullo.

Quindi supponendo che lo stato sia un autostato di  $J_z$  quello con valore massimo  $j\hbar$

$$\langle J_z \rangle = j\hbar \quad [5.123]$$

$$\langle J \rangle = \langle J_x \rangle \vec{i} + \langle J_y \rangle \vec{j} + \langle J_z \rangle \vec{k} \quad [5.124]$$

deve corrispondere al vettore classico:

$$\langle J \rangle = (0, 0, j\hbar) \quad [5.125]$$

Il modulo del vettore  $\vec{J}$  è quindi pari a  $j^2\hbar^2$ . Se fosse  $\langle J \rangle \cdot \langle J \rangle = \langle J^2 \rangle$  avremmo:

$$\langle J^2 \rangle = \langle J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 \rangle = \langle J_z \rangle = j^2\hbar^2 \quad [5.126]$$

Ma quindi  $\langle J_x^2 \rangle = \langle J_y^2 \rangle = 0$  e lo stato sarebbe anche autostato di  $J_x$  e di  $J_y$  con autovalore nullo.



<sup>6</sup>Tipo asse z

17/12/1997

Sia  $|m_j\rangle$  il generico autostato di  $J_z$  e  $J^2$ , quindi deve essere che:

$$J_z |m_j\rangle = m_j \hbar |m_j\rangle \quad [5.127]$$

con

$$m_j = -j, -j+1, \dots, j \quad [5.128]$$

Quindi fissato  $j$  il numero di autovalori corrispondenti di  $J_z$  è  $2j + 1$  (questo sia per  $j$  intero che semi-intero), ovviamente  $2j + 1$  è anche il numero degli autostati  $|m_j\rangle$ . Questi costituiscono una base degli stati con momento angolare  $J$  fissato.

Apartire da  $J_x$  e  $J_y$  si definiscono gli operatori:

$$J_+ = J_x + iJ_y \quad [5.129]$$

$$J_- = J_x - iJ_y \quad [5.130]$$

$J_+$  e  $J_-$  sono uno il complesso coniugato dell'altro. Si verifica facilmente che:

$$[J_z, J_+] = \hbar J_+ \quad [5.131]$$

$$[J_z, J_-] = -\hbar J_- \quad [5.132]$$

Da queste regole di commutazione si può risalire al significato fisico dei due operatori  $J_+$  e  $J_-$ . Infatti si ha che:

$$\begin{aligned} J_z(J_+ |m_j\rangle) &= (\hbar J_+ + J_z) |m_j\rangle = \\ &= \hbar J_+ |m_j\rangle + \hbar m_j J_+ |m_j\rangle = \\ &= \hbar(1 + m_j)(J_+ |m_j\rangle) \end{aligned} \quad [5.133]$$

Quindi lo stato  $J_+ |m_j\rangle$  è uno autostato di  $J_z$  con autovalore  $\hbar(m_j + 1)$ . Analogamente si dimostra che lo stato  $J_- |m_j\rangle$  è un autostato di  $J_z$  con autovalore  $\hbar(m_j - 1)$ . Quindi si può scrivere che:

$$J_+ |m_j\rangle = \alpha |m_j + 1\rangle \quad [5.134]$$

$$J_- |m_j\rangle = \beta |m_j - 1\rangle \quad [5.135]$$

con  $-j < m_j < j$

Se consideriamo il caso in cui il nostro sistema è costituito da una singola particella a riposo allora il momento angolare  $\vec{J}$  si riduce all'operatore  $\vec{S}$ , il momento angolare di spin<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup>Momento angolare intrinseco.

In questo caso si pone:

$$j = s \quad [5.136]$$

$$m_j = m_s = s, s-1, \dots, -s \quad [5.137]$$

dove  $s$  è il numero quantico di spin. Se la particella non è a riposo allora  $\vec{J}$  è la somma vettoriale del momento angolare orbitale e del momento di spin. Cioè si ha che:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad [5.138]$$

Se la particella non ha spin ( $s=0$ ),  $\vec{J}$  coincide con  $\vec{L}$  e, quindi,  $j$  può assumere solo valori interi. Al posto di  $j$  di solito si usa  $l$ , che si dice numero quantico orbitale. *Lo spin, invece, è caratterizzato sia da valori interi che seminteri.*

Consideriamo ora il caso in cui si hanno due distinti momenti angolari,  $\vec{J}_1$  e  $\vec{J}_2$ , associati rispettivamente al sistema 1 e 2. Supponiamo che sia:

$$[\vec{J}_1, \vec{J}_2] = 0 \quad [5.139]$$

cioè ogni componente di  $\vec{J}_1$  commuta con ogni componente di  $\vec{J}_2$ . Ogni autostato del sistema 1 sarà caratterizzato dai valori medi:

$$\langle \vec{J}_1 \rangle = (\langle J_{1x} \rangle, \langle J_{1y} \rangle, \langle J_{1z} \rangle) \quad [5.140]$$

e, ovviamente, anche per il sistema 2 si definisce:

$$\langle \vec{J}_2 \rangle = (\langle J_{2x} \rangle, \langle J_{2y} \rangle, \langle J_{2z} \rangle) \quad [5.141]$$

Si pone:

$$\langle \vec{J}_1 \rangle \cdot \langle \vec{J}_1 \rangle = j_1^2 \hbar^2 \quad \langle \vec{J}_1^2 \rangle = j_1(j_1+1) \hbar^2 \quad [5.142]$$

$$\langle \vec{J}_2 \rangle \cdot \langle \vec{J}_2 \rangle = j_2^2 \hbar^2 \quad \langle \vec{J}_2^2 \rangle = j_2(j_2+1) \hbar^2 \quad [5.143]$$

$$[5.144]$$

Definiamo l'operatore

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \quad [5.145]$$

che è ancora un momento angolare: si possono verificare le regole di commutazione per le sue componenti.

Si avrà che

$$\langle \vec{J} \rangle \langle \vec{J} \rangle = j^2 \hbar^2 \quad \langle \vec{J}^2 \rangle = j(j+1) \hbar \quad [5.146]$$

Si dimostra che fissati  $j_1$  e  $j_2$ ,  $j$  può assumere solo dei valori ben determinati, in quanto deve essere verificata la relazione

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \quad [5.147]$$

Questa si dice anche *condizione tringolare*. Questa stessa condizione si può riscrivere nella forma:

$$|j_1 - j_2| \leq j = (m_j)_{\text{MAX}} \leq j_1 + j_2 \quad [5.148]$$

Ma si ha che il generico autovalore  $m_j$  è dato da

$$m_j = m_{j_1} + m_{j_2} \quad [5.149]$$

Quindi, essendo nota la variabilità di  $m_{j_1}$  e  $m_{j_2}$ , si deduce che

$$j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2| \quad [5.150]$$

Se  $j_1 < j_2$ , sono  $2j_1 + 1$  valori. Se  $j_1 > j_2$ , sono  $2j_2 + 1$  valori.

In meccanica classica si aveva già la condizione triangolare, la proprietà nuova è che  $j$  non può assumere tutti i valori fra il minimo ed il massimo.

*La degenerazione del sottospazio che si ottiene con  $j_1$  e  $j_2$  fissati è  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ .*

Consideriamo gli stati  $|m_j\rangle$ , autostati di  $\vec{J}^2$  e  $J_z$ . Si ha sempre che, fissato  $j$ , si hanno  $2j + 1$  autostati. Questa molteplicità si dice *peso statistico* della stato con momento angolare  $J$ .

Fissati  $j_1$  e  $j_2$ , il numero totale di stati è

$$N = \sum_j (2j + 1) \quad [5.151]$$

con  $j = |j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2$ . Se, ad esempio,  $j_1 < j_2$  la sommatoria è data da  $2j_1 + 1$  termini

$$N = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \quad [5.152]$$

Questo numero coincide con il numero di stati

$$|\mathbf{m}_j\rangle = |\mathbf{m}_{j_1}\rangle |\mathbf{m}_{j_2}\rangle \quad [5.153]$$

con  $j_1$  e  $j_2$  fissati. Effettivamente questi due insieme di vettori ( $|\mathbf{m}_{j_1}\rangle |\mathbf{m}_{j_2}\rangle$  e  $|\mathbf{m}_j\rangle$  con  $j_1$  e  $j_2$  fissati) sono due basi che generano lo stesso sottospazio ma non coincidono.

19-12-1997

Abbiamo detto che gli insiemi di stati  $|\mathbf{m}_{j_1} m_{j_2}\rangle$  e  $|\mathbf{m}_j\rangle$  sono due basi di un sottospazio di dimensione  $N = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ . Questi due insiemi di stati non possono coincidere in quanto l'operatore  $\vec{J}^2$  non commuta con gli operatori  $J_{1z}$  e  $J_{2z}$ . Quello che si può fare è esprimere gli stati  $|\mathbf{m}_j\rangle$  in funzioni degli stati  $|\mathbf{m}_{j_1} m_{j_2}\rangle$ . Supponendo che tutti questi stati siano normalizzati si può scrivere che:

$$|\mathbf{m}_j\rangle = \sum_{m_{j_1}} \langle \mathbf{m}_{j_1} m_{j_2} | \mathbf{m}_j \rangle |\mathbf{m}_{j_1} m_{j_2}\rangle \quad [5.154]$$

I coefficienti  $\langle m_{j_1} m_{j_2} | m_j \rangle$  si dicono *coefficienti di Clebsh-Gordan*.

Sappiamo che deve valere la condizione  $m_j = m_{j_1} + m_{j_2}$ , quindi, si ha

$$\langle m_{j_1} m_{j_2} | m_j \rangle = 0 \quad \text{se } m_{j_1} + m_{j_2} \neq m_j \quad [5.155]$$

Vediamo ora come si calcolano gli altri coefficienti di Clebsh-Gordan<sup>8</sup>

$$J_+ | m_j \rangle = c_+ | m_j + 1 \rangle \quad \text{dove } c_+ = \langle m_j + 1 | J_+ | m_j \rangle \quad [5.156]$$

$$J_- | m_j + 1 \rangle = c_- | m_j \rangle \quad \text{dove } c_- = \langle m_j | J_- | m_j + 1 \rangle \quad [5.157]$$

Dato che  $J_-$  è il coniugato hermitiano di  $J_+$  si ha che:

$$\langle m_j | J_- | m_j + 1 \rangle = (\langle m_j + 1 | J_+ | m_j \rangle)^* \Rightarrow c_- = c_+^* \quad [5.158]$$

Imponendo che  $c_-$  e  $c_+$  siano reali (c'è sempre una arbitrarietà nella scelta della fase)<sup>9</sup> si ha che  $c_- = c_+ = c$ . Da questo si può dedurre che

$$J_- J_+ | m_j + 1 \rangle = c^2 | m_j + 1 \rangle \quad [5.159]$$

Ma si può scrivere che

$$J_+ J_- = (J_x + iJ_y)(J_x - iJ_y) = J_x^2 + J_y^2 - i(J_x J_y - J_y J_x) = J_x^2 + J_y^2 + \hbar J_z = \vec{J}^2 - J_z^2 + \hbar J_z \quad [5.160]$$

Da questa espressione di  $J_+ J_-$  si può ricavare il valore di  $c^2$ . Infatti:

$$J_+ J_- | m_j + 1 \rangle = \hbar^2 \left[ j(j+1) - (m_j + 1)^2 + (m_j + 1) \right] | m_j + 1 \rangle = c^2 | m_j + 1 \rangle \quad [5.161]$$

$$\begin{aligned} c^2 &= \hbar^2 \left[ j(j+1) - (m_j + 1)^2 + (m_j + 1) \right] \\ &= \hbar^2 \left[ j(j+1) - m_j^2 - m_j \right] \\ &= \hbar^2 \left[ j(j+1) - m_j(m_j + 1) \right] \end{aligned} \quad [5.162]$$

Quindi abbiamo determinato l'azione di  $J_+$  e  $J_-$ . Infatti

$$J_+ | m_j \rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j + 1)} | m_j + 1 \rangle \quad [5.163]$$

$$J_- | m_j \rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j - 1)} | m_j - 1 \rangle \quad [5.164]$$

Questi coefficienti si annullano se  $m_j = j$  per il primo e se  $m_j = -j$  per il secondo, quindi:

$$J_+ | j \rangle = 0 \quad [5.165]$$

$$J_- | -j \rangle = 0 \quad [5.166]$$

<sup>8</sup>Per la [5.156]: Si tratta di moltiplicare a sinistra per il BRA  $\langle m_j + 1 |$  [NdT]

<sup>9</sup>Si può fare questa scelta (entrambi reali) perché sono complessi coniugati [NdT].

Ritorniamo al problema del calcolo dei coefficienti di Clabsh-Gordan.

Sfruttando l'azione di  $J_+$  e  $J_-$  sullo stato  $|m_j\rangle$  e sulla sua scomposizione in temini degli stati  $|m_{j_1} m_{j_2}\rangle$  si determinano due relazioni di ricorrenza per i coefficienti di Clabsh-Gordan. Tramite queste regole e partendo da uno stato  $|m_j\rangle$  noto, si determinano le forme esplicite degli altri stati.

Come esempio determiniamo i coefficienti di Clabsh-Gordan nel caso in cui si debbano sommare due spin con  $J = 1/2$ . Quindi si ha che:

$$\begin{aligned} \vec{J}_1 &= \vec{S}_1 & \vec{J}_1 &= \vec{S}_1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{J} &= \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 & \text{e} & \vec{J}^2 = \vec{S}^2 = \vec{S}_1^2 + \vec{S}_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \end{aligned} \quad [5.167]$$

$\vec{S}$  si dice *operatore di spin totale*. Consideriamo il caso in cui i due sistemi (1 e 2) siano costituiti ciascuno da una particella di spin  $1/2$ . Quindi si ha:

$$\begin{aligned} j_1 &= j_2 = s_1 = s_2 = \frac{1}{2} \\ j &= s = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \quad j = j_1 + j_2, \dots, |j_1 - j_2| \end{aligned} \quad [5.168]$$

dove  $j = s_1 + s_2$ .

Quindi lo spettro di  $S$  è costituito solo dai due valori 1 e 0. La dimensione totale dello spazio è  $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1) = 2 \cdot 2 = 4$ . I valori di  $m_j = m_s$  sono:

$$m_j = m_s = \begin{cases} 1, 0, -1 & \text{per } s = 1 \text{ dimensione 3} \\ 0 & \text{per } S = 0 \text{ dimensione 1} \end{cases}$$

$m_s = 1, 0, -1$ , per  $s = 1$ , si dice stato di *tripletto*, con peso statistico 3.  $m_s = 0$ , per  $s = 0$  si dice stato di *singuletto*, con peso statistico 1.

Indichiamo per semplicità:

$$\alpha(1) \equiv |m_{s_1} = +1/2\rangle \quad \beta(1) \equiv |m_{s_1} = -1/2\rangle \quad [5.169]$$

$$\alpha(2) \equiv |m_{s_2} = +1/2\rangle \quad \beta(2) \equiv |m_{s_2} = -1/2\rangle \quad [5.170]$$

Quindi gli stati della base disaccoppiata sono:

$$\alpha(1)\alpha(2), \alpha(1)\beta(2), \beta(1)\alpha(2), \beta(1)\beta(2) \quad [5.171]$$

Gli stati di tripletti e di singuletto si possono scrivere come combinazione lineare di questi 4 stati di base.

Indichiamo gli stati della base accoppiato con

$$\chi_s^{(\text{tripletto})}(1,2) = \begin{cases} \alpha(1)\alpha(2) & m_s = +1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) + \beta(1)\alpha(2)] & m_s = 0 \\ \beta(1)\beta(2) & m_s = -1 \end{cases}$$

$$\chi_s^{(\text{singololetto})}(1,2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(1)\beta(2) - \beta(1)\alpha(2)] \quad [5.172]$$

Per ricavare questi coefficienti conviene ritornare al formalismo con i ket.

$$|m_j = +1\rangle = \sum_{m_{j_1} m_{j_2}} \langle m_{j_1} m_{j_2} | m_j = 1 \rangle |m_{j_1} m_{j_2}\rangle \quad \text{con } j = 1, j_1 = 1/2, j_2 = 1/2 \quad [5.173]$$

In questa sommatoria sono nulli tutti i termini tranne uno, quello per cui  $m_{j_1} + m_{j_2} = 1 \Rightarrow m_{j_1} = 1/2; m_{j_2} = 1/2$ . Quindi si può porre:

$$|m_j = 1\rangle \propto |m_{j_1} = \frac{1}{2}, m_{j_2} = \frac{1}{2}\rangle \quad [5.174]$$

Si può scegliere questa costante uguale a 1 (questa scelta renderà i coefficienti di Clabsh-Gordan reali), cioè:

$$|m_j = 1\rangle = |m_{j_1} = \frac{1}{2}, m_{j_2} = \frac{1}{2}\rangle \quad [5.175]$$

Stesso discorso si può fare per  $m_j = -1$  e si ottiene:

$$|m_j = -1\rangle = |m_{j_1} = -\frac{1}{2}, m_{j_2} = -\frac{1}{2}\rangle \quad [5.176]$$

Rimane da determinare i due stati con  $m_j = 0$ . Per fare ciò conviene usare i due operatori  $J_+$  e  $J_-$ :

$$J_+ = J_x + iJ_y = J_{1+} + J_{2+} \quad [5.177]$$

$$J_- = J_x - iJ_y = J_{1-} + J_{2-} \quad [5.178]$$

Applichiamo  $J_-$  allo stato  $m_j = +1$ . Si ottiene che:

$$\begin{aligned} J_- |m_j = +1\rangle &= (J_{1-} + J_{2-}) |m_{j_1} = \frac{1}{2}, m_{j_2} = \frac{1}{2}\rangle = \\ &= J_{1-} |m_{j_1} = \frac{1}{2}, m_{j_2} = \frac{1}{2}\rangle + J_{2-} |m_{j_1} = \frac{1}{2}, m_{j_2} = \frac{1}{2}\rangle = \\ &= \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)} |m_{j_1} = -\frac{1}{2}, m_{j_2} = \frac{1}{2}\rangle + \hbar \sqrt{\frac{1}{2} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)} |m_{j_1} = \frac{1}{2}, m_{j_2} = -\frac{1}{2}\rangle = \\ &= \hbar \left[ |m_{j_1} = -\frac{1}{2}, m_{j_2} = \frac{1}{2}\rangle + |m_{j_1} = \frac{1}{2}, m_{j_2} = -\frac{1}{2}\rangle \right] \end{aligned} \quad [5.179]$$

Ma questo deve essere uguale a:

$$J_- |m_j = +1\rangle = \hbar \sqrt{2} |m_j = 0\rangle \quad [5.180]$$

Quindi abbiamo trovato che:

$$|m_j=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |m_{j_1}=-\frac{1}{2}, m_{j_2}=\frac{1}{2}\rangle + |m_{j_1}=\frac{1}{2}, m_{j_2}=-\frac{1}{2}\rangle \right] \quad [5.181]$$

con  $j=1$ .

## §

12-1-1998

Rimane da ricavare i coefficienti di Clebsh-Gordan per lo stato di singoletto

$$|m_j=j=0\rangle = a |m_{j_1}=\frac{1}{2}, m_{j_2}=-\frac{1}{2}\rangle + b |m_{j_1}=-\frac{1}{2}, m_{j_2}=\frac{1}{2}\rangle \quad [5.182]$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad \text{condizione di normalizzazione} \quad [5.183]$$

Per ricavare  $a$  e  $b$  basta applicare l'operatore  $J_- = J_{1-} + J_{2-}$ :

$$\begin{aligned} J_- |m_j=j=0\rangle &= 0 = a \left( J_{1-} |m_{j_1}=\frac{1}{2}\rangle \right) |m_{j_2}=-\frac{1}{2}\rangle + b \left( J_{2-} |m_{j_1}=-\frac{1}{2}\rangle \right) |m_{j_2}=\frac{1}{2}\rangle = \\ &= \hbar \left[ a |m_{j_1}=-\frac{1}{2}, m_{j_2}=-\frac{1}{2}\rangle + b |m_{j_1}=-\frac{1}{2}, m_{j_2}=\frac{1}{2}\rangle \right] \end{aligned} \quad [5.184]$$

Quindi si può scegliere, ricordando anche la condizione di normalizzazione,

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad [5.185]$$

a meno di un fattore di fase.

Se consideriamo la funzione d'onda di tripletto con le due particelle scambiate, si ha che:

$$\chi_s^{(\text{tripletto})}(2,1) = \begin{cases} \alpha(2)\alpha(1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(2)\beta(1) + \beta(2)\alpha(1)] \\ \beta(2)\beta(1) \end{cases} = \chi_s^{(\text{tripletto})}(1,2)$$

Quindi,  $\chi_s^{(\text{tripletto})}$  è simmetrica rispetto allo scambio di 1 e 2.

Per le funzioni di singoletto si ha che:

$$\chi_s^{(\text{singoletto})}(2,1) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha(2)\beta(1) - \beta(2)\alpha(1)] = -\chi_s^{(\text{singoletto})}(1,2) \quad [5.186]$$

quindi  $\chi_s^{(\text{singoletto})}$  è antisimmetrica rispetto allo scambio di 1 e 2.

Se i due fermioni, con spin 1/2, 1 e 2 sono identici, cioè devono obbedire alla statistica di Fermi-Dirach, supponendo che questi siano in uno stato stazionario, si ha che

$$\Psi_{\text{TOT}}(1,2) = \chi_s(1,2) \phi(\vec{r}_{1,2}) \quad [5.187]$$

$\phi(\vec{r}_{1,2})$  = funzione d'onda spaziale associata alla massa ridotta del sistema (si sta lavorando nel sistema di riferimento del centro di massa)

Deve però essere verificato che:

$$\Psi_{\text{TOT}}(2,1) = -\Psi_{\text{TOT}}(1,2) \quad [5.188]$$

in quanto le due particelle sono due fermioni identici. Dimostreremo in seguito che

$$\phi(\vec{r}_{2,1}) = \phi(-\vec{r}_{1,2}) = (-1)^l \phi(\vec{r}_{1,2}) \quad [5.189]$$

dove  $l$  è il numero quantico orbitale del sistema dei due fermioni. Quindi tenendo conto di questo ulteriore risultato si arriva alla seguente *regola di selezione*:

- se i due fermioni si trovano nello stato di tripletto,  $l$  deve essere dispari;
- se i due fermioni si trovano nello stato di singoletto,  $l$  deve essere pari.

In maniera più compatta di può scrivere:

$s = 1$	$\longleftrightarrow$	l dispari
$s = 0$	$\longleftrightarrow$	l pari

La verifica sperimentale della regola di selezione porta ad una verifica della validità della statistica di Fermi-Dirac, dato che deve essere:

$$\Psi_{\text{TOT}}(1,2) = -\Psi_{\text{TOT}}(2,1) \quad [5.190]$$

$$\chi_s^{(\text{tripletto})}(1,2) = \chi_s(2,1) \quad [5.191]$$

$$\chi_s^{(\text{singoletto})}(1,2) = \chi_s^{(\text{singoletto})}(2,1) \quad [5.192]$$

$$\phi(\vec{r}_{2,1}) = \phi(-\vec{r}_{1,2}) = (-1)^l \phi(\vec{r}_{1,2}) \quad [5.193]$$

Parte II

## ELEMENTI DI FISICA NUCLEARE

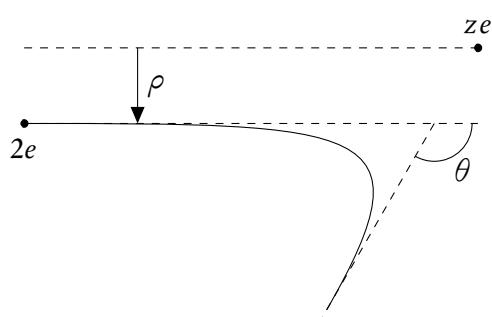
# 6

## ESPERIMENTO DI RUTHERFORD E SCOPERTA DEL NUCLEO ATOMICO

Il nucleo atomico fu scoperto nel 1911 da Rutherford. Egli mandò un fascio di particella  $\alpha$  contro un sottile strato metallico. Prima di questo esperimento si pensava che l'atomo seguisse il modello a “panettone”. Si sapeva, però, che la quasi totalità della massa atomica era dovuta alle cariche positive. Secondo questo modello *una particella  $\alpha$  con alta energia e grande massa avrebbe dovuto subire una deflessione molto piccola* nell'attraversare lo strato e, inoltre, questa deflessione non poteva certo essere dovuta ad altre forze, oltre a quelle elettrostatiche. Rutherford osservò, invece, *grandi angoli di deflessione* che erano in buon accordo con la sezione d’urto differenziale:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left[ \frac{ze(2e)}{m_\alpha v^2} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad [6.1]$$

dove  $d\Omega = 2\pi \sin \theta \, d\theta$ .



**FIGURA 6.1.:** Diffusione di particelle di carica  $2e$  da un centro diffusore di carica  $ze$ .

Questa è nota come *formula di Rutherford* e si può ricavare teoricamente in termini classici considerando un fascio uniforme di estensione infinita, di particelle di carica  $2e$ , che viene diffuso da un centro fisso e puntiforme di carica  $ze$  (la formula vale anche se la carica  $ze$  fosse negativa).

Assumere che *il centro di diffusione sia fisso equivale ad assumere una massa infinita*. Il parametro  $p$  rappresenta la distanza minima che la particella raggiungerebbe dal centro nel caso in cui non si avesse diffusione.  $p$  si dice *parametro d’urto*. Ovviamente l’unica cosa che si può misurare è il numero di particelle deflesse in una particolare direzione nell’unità di tempo.

La forza è

$$F \propto \frac{2ze^2}{r^2} \quad [6.2]$$

Quindi per  $p$  piccoli, si avranno  $\theta$  grandi e viceversa. Si può affermare che verranno deflesse nell'angolo compreso tra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  tutte e sole le particelle che hanno un parametro d'urto  $p$  compreso tra  $p$  e  $p + dp$ . Questo perché  $p(\theta)$  è monotona e, quindi, iniettiva. Si avrà che il numero di particelle che nell'unità di tempo viene deflesso nell'angolo tra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  si può scrivere come:

$$\frac{dN}{dt} = I 2\pi p(\theta) \cdot dp = \frac{dN}{sec} \quad [6.3]$$

Per definizione si ha che:

$$d\sigma = \frac{dN/sec}{I} \quad [6.4]$$

Quindi si ottiene che:

$$2\pi p(\theta) \cdot dp(\theta) = d\sigma \quad [6.5]$$

Confrontando questa con la formula di Rutherford si deduce che:

$$2\pi p(\theta) \cdot \frac{dp(\theta)}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left[ \frac{ze(2e)}{m_\alpha v^2} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad [6.6]$$

Da questa equazione differenziale si può trovare la funzione  $p(\theta)$ .

Quindi, da  $\theta$  si può risalire a  $p$ . Supponiamo che la sezione d'urto sperimentale sia in accordo con quella di Rutherford per  $\theta$  compreso tra  $\theta_{min}$  e  $\theta_{max}$ . Da questo intervallo si può risalire all'intervallo  $[p_{min}(\theta_{max}), p_{max}(\theta_{min})]$ . Nell'esperimento compiuto da Rutherford si aveva che:

$$p_{max}(\theta_{min}) \sim 10^{-8} \text{ cm} \quad [6.7]$$

$$p_{min}(\theta_{max}) \sim 10^{-13} \text{ cm} \quad [6.8]$$

All'interno di questo intervallo l'accordo era ottimo. Per  $p > p_{max}$  si osservava un rapido decrescere della sezione d'urto sperimentale, in contraddizione con la formula di Rutherford. Questi risultati portavano alla conclusione che la carica positiva dell'atomo doveva essere concentrata in un volume dell'ordine di  $10^{-13} \text{ cm}$  mentre nel modello a panettone si parlava di  $10^{-8} \text{ cm}$ . Il fatto che per  $p$  grandi la sezione d'urto andava a zero, si spiega dicendo che la carica efficace che provoca la deflessione andava a zero in quanto si sovrapponeva alla carica del nucleo l'effetto di schermo degli elettroni.

# 7

## PROPRIETÀ STATISTICHE DEI NUCLEI ATOMICI

Il numero atomico  $Z$  è uguale al numero di elettroni ed è uguale anche al numero di cariche positive del nucleo. Quindi *la carica nucleare ze è una proprietà intrinseca di un elemento. La massa di un atomo influenza le proprietà chimiche di un elemento molto meno di quanto non faccia la carica.* Infatti esistono gli isotopi. Questi sono caratterizzati dallo stesso numero atomico  $Z$  e da un diverso numero di massa  $A$ . Per misurare le masse nucleari si usa *lo spettrografo di massa*. Questo strumento misura la massa di particelle cariche la cui carica sia nota. Sia  $q$  la carica delle particelle di cui si vuole trovare la massa. Si deve, prima, selezionare un fascio di queste particelle in modo che abbiano tutte una ben determinata velocità: per far questo si sfrutta la carica della particella. La forza su questa particella è:

$$\vec{F} = q \left[ \vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{H} \right] \quad [7.1]$$

Si regolano  $E$  ed  $H$  in modo che il moto sia rettilineo ed uniforme, cioè deve essere:

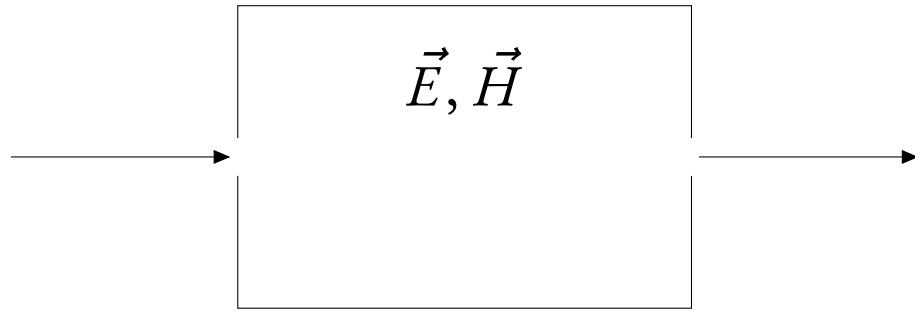
$$|\vec{E}| = \frac{1}{c} |\vec{v} \wedge \vec{H}| \quad [7.2]$$

Se  $\vec{H}$  è perpendicolare a  $\vec{v}$ , si può scrivere:

$$\frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} = \frac{v}{c} \quad [7.3]$$

A questo punto se si utilizza il filtro così costituito, le particelle che escono saranno tutte e solo quelle che hanno velocità pari a

$$v = \frac{|\vec{E}|}{|\vec{H}|} c \quad [7.4]$$

**FIGURA 7.1.: Filtro**

Se questo fascio viene poi immerso in un campo magnetico uniforme  $\vec{H}$ , perpendicolare a  $v$ , allora le particelle descriveranno orbite circolari il cui raggio è

$$r = \frac{v}{\omega_s} = \gamma(v) \frac{mcv}{q|\vec{H}|} \quad [7.5]$$

$$\text{dove } \omega_s(s) = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{q|\vec{H}|}{mc}.$$

Da queste si determina la massa  $m$ , misurando il raggio  $r$ . Quando si vuole misurare la massa di particelle neutre si usa lo spettrografo, utilizzando, però, anche informazioni fornite da reazioni nucleari. Ad esempio per trovare la massa del neutrone si utilizza la reazione



dove  $d$  è il nucleo nell'atomo di deuterio.  $p$  e  $d$  hanno masse che si possono misurare, in quanto sono particelle dotate di carica. Per la conservazione dell'energia deve essere

$$m_n + m_p = m_d + \frac{T_d}{c^2} + \frac{\hbar\omega}{c^2} \quad [7.7]$$

dove si è supposto che  $n$  e  $p$  fossero a riposo prima della reazione. Per la conservazione della quantità di moto deve essere anche che la quantità di moto del deuterio deve essere uguale a quella del fotone. Quindi si può scrivere per le energie cinetiche

$$T_d = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m_d} = \frac{1}{2} \frac{\hbar^2 \omega^2}{m_d c^2} \quad [7.8]$$

Quindi per la massa del neutrone si ha:

$$m_n = m_d - m_p + \frac{\hbar\omega}{c^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\hbar\omega}{m_d c^2} \right] \quad [7.9]$$

---

Ritornando alle proprietà dei nuclei si osservò che la massa  $A$  è sempre maggiore di  $Z$ . La prima ipotesi che di fece fu che nel nucleo vi fossero  $A$  protoni e  $A - Z$  elettroni. Questo modello però non era in accordo con le misure di massa dei nuclei.

Oggi si sa che, invece, *nel nucleo ci sono  $Z$  protoni ed  $A - Z$  neutroni*. Atomi con lo stesso numero di neutroni di dicono *isotoni*. Atomi con lo stesso numero di massa vengono detti *isobari*. Atomi con uguali  $Z$  si dicono isotopi.

Riassumendo:

**ISOTONI**

atomi con lo stesso numero di neutroni  $N$ ;

**ISOBARI**

atomi con lo stesso numero di massa  $A$ ;

**ISOTOPI**

atomi con lo stesso numero atomico  $Z$ ;

*L'unità di massa nucleare* è la dodicesima parte della massa effettiva del  $^{12}\text{C}$ . Quindi si ha:

$$1 \text{ UM} \simeq 1.66 \times 10^{-24} \text{ g} \simeq 931.5016 \text{ MeV}/c^2 \quad [7.10]$$

Da ciò segue che la massa del protone e del neutrone sono:

$$m_p \simeq 1.0073 \text{ UM} \quad [7.11]$$

$$m_n \simeq 1.0087 \text{ UM} \quad [7.12]$$

Indichiamo con  $M$  la massa effettiva di un atomo. Sia  $\Delta M$ , invece, il difetto di massa. Si ha che

$$\Delta E = \Delta M c^2 = (z m_p + N m_n + z m_e - M) c^2 \quad [7.13]$$

Questa è l'energia di legame atomica. Si può anche scrivere

$$\Delta E = \Delta E_a + \Delta E_{\text{nucl}} \quad [7.14]$$

dove  $\Delta E_a$  è l'energia di legame degli elettroni (energia di legame atomica) e  $\Delta E_{\text{nucl}}$  è l'energia di legame del nucleo. Se  $M_{\text{nucl}}$  è la massa effettiva del nucleo, si ha:

$$\Delta E_a = (z m_e + M_{\text{nucl}} - M) c^2 \quad [7.15]$$

$$\Delta E_{\text{nucl}} = (z m_p + N m_n - M_{\text{nucl}}) c^2 \quad [7.16]$$

Sperimentalmente si verifica che:

$$\Delta E_a \ll z m_e c^2 \ll M c^2 \quad [7.17]$$

Tenuto conto di ciò, è lecito scrivere:

$$M_{\text{nucl}} = M - z m_e + \frac{\Delta E_a}{c^2} \simeq M - z m_e \simeq M \quad [7.18]$$

Con queste approssimazioni si può scrivere per  $\Delta E_{\text{nucl}}$ :

$$\Delta E_{\text{nucl}} = (Z m_p + N m_n - M) \quad [7.19]$$

Sia  $M(A, Z)$  la massa di un nucleo. Si definisce la quantità:

$$f = \frac{M(A, Z) - A \text{ UM}}{A \text{ UM}} \quad [7.20]$$

*frazione di impacchettamento*, che dà una misura di quanto sia il difetto di massa. ( $A \text{ UM}$  è la massa che il nucleo avrebbe se ogni particella pesasse 1  $\text{UM}$ )

Il *raggio del nucleo* si può definire in diversi modi e dipende dal metodo sperimentale usato. Di solito, però, si intende per raggio del nucleo *la distanza minimi oltre la quale il potenziale del nucleo si discosta apprezzabilmente da quello coulombiano*. Rutherford per primo effettuò una misura in questo senso e trovò:

$$R = r_0 A^{1/3} \quad [7.21]$$

dove  $r_0 \simeq 1,2 \times 10^{-13} \text{ cm}$ ;  $R$  è il parametro d'urto minimo;  $A$  è il numero di massa della sostanza bersaglio.

Si osservò che quando  $p$  è minore di  $R$  si hanno interazioni più intense di quelle coulombiane, il che fece pensare ad un contatto con il nucleo. Esperimenti successivi, eseguiti con protoni e neutroni come particelle incidenti (invece delle particelle  $\alpha$ ), fornirono lo stesso risultato.

Questo stesso valore è stato ottenuto osservando la diffusione di un fascio di neutroni (quindi non si fa più uso del potenziale coulombiano) a causa dell'interazione forte. Quindi è lecito scrivere:

$$V(A) = \frac{4}{3} \pi r_0^3 A = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad [7.22]$$

cioè il volume nucleare risulta proporzionale al numero di massa. Dal momento che  $M(A) = A \text{ UM}$ , si trova che *la densità è pressoché costante per tutti i nuclei*:

$$p_m = \frac{M(A)}{V(A)} = \frac{A \text{ UM}}{\frac{4}{3} \pi r_0^3} = \frac{3}{4\pi} \frac{1 \text{ UM}}{r_0^3} \simeq 10^{14} \text{ g/cm}^3 \quad [7.23]$$

Da questa densità si può immaginare il nucleo costituito da un fluido incomprimibile (in quanto  $p$  non dipende da  $Z$ ).

# 8

## FATTORE DI FORMA

In fisica nucleare le misure sulla diffusione di elettroni ad alta energia forniscono anche informazioni sulla distribuzione della carica del nucleo. L'energia minima che gli elettroni devono avere è 1 *GeV*. Consideriamo un elettrone libero che si trova in uno stato stazionario, quindi la funzione d'onda è

16-1-1998

$$\phi_e(\vec{r}) \propto e^{(i\vec{k} \cdot \vec{r})} \quad [8.1]$$

$$\vec{P}_e = \hbar \vec{k} \Rightarrow \lambda_e = \frac{2\pi}{K} = \text{lunghezza d'onda di De Broglie} \quad [8.2]$$

Se il nucleo fosse puntiforme, la funzione d'onda dell'elettrone avrebbe nel nucleo valore  $\phi_e(0)$ . Se, invece, il nucleo non fosse puntiforme, allora

$$\phi_e(\vec{R}) \neq \phi_e(0) \quad R = \text{raggio del nucleo} \quad [8.3]$$

$$\phi_e(\vec{R}) \simeq \phi_e(0) \quad \text{per } KR \ll 1 \quad [8.4]$$

Dunque in questo secondo caso l'elettrone vede sempre un nucleo puntiforme. Questo non è più vero quando  $\lambda_e$  diventa più piccola. Quindi si ha:

$$\boxed{\chi = \frac{\lambda_e}{2\pi} = \frac{1}{K} \gg R \simeq 10^{-13} \text{ cm} \Rightarrow \text{nucleo puntiforme}} \quad [8.5]$$

Per cominciare a risolvere la distribuzione di carica nel nucleo  $\chi$  deve essere almeno di un ordine di grandezza più piccola di  $R$ . Infatti *l'energia di 1 GeV corrisponde a*  $\chi = 1,95 \times 10^{-14} \text{ cm}$ . Supponendo che la diffusione sia elastica, vediamo cosa accadrebbe se il nucleo fosse puntiforme e fisso. In questo caso, dovrebbe valere in termini non quantistici la formula di Rutherford:

$$\frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_R = \left( \frac{ze^2}{2p_e v_e} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad [8.6]$$

dove  $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$ . Questa formula è anche relativisticamente corretta per piccoli valori di  $\theta$ , cioè quando si può approssimare

$$\sin^4 \frac{\theta}{2} \simeq \left(\frac{\theta}{2}\right)^4 \quad [8.7]$$

Passiamo, ora, ad una trattazione quantistica. L'hamiltoniana totale in questo caso ideale si può scrivere come

$$H = H_0 + V_0(r) \quad [8.8]$$

dove  $H_0$  è l'hamiltoniana imperturbata e  $V_0(r)$  è il potenziale del nucleo puntiforme fisso.

Sia  $\phi(\vec{r})$  un'autofunzione di  $H$  con autovalori  $E$ . Si può dimostrare che  $\phi(\vec{r})$  per  $r$  molto grandi assume la forma asintotica

$$\phi(\vec{r}) \propto \left[ e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + f_0(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \quad [8.9]$$

per  $r \rightarrow \infty$ .

Il primo termine è un autostato di  $H_0$ . Il secondo termine è un'onda sferica uscente dall'origine la cui ampiezza dipende da  $\theta$ .  $f_0(\theta)$  ha le dimensioni di una lunghezza e si dice *ampiezza di scattering*. Infatti  $|f_0(\theta)|^2 d\Omega$  è probabilità che l'elettrone venga diffuso sull'elemento di angolo solido  $\Omega$ .

Quindi, si ha:

$$d\sigma_0 = |f_0(\theta)|^2 d\Omega \Rightarrow \frac{d\sigma_0}{d\Omega} = |f_0(\theta)|^2 \quad [8.10]$$

Questa coincide con quello di Rutherford se si fa l'approssimazione di Bohr per potenziali deboli. Questa approssimazione è abbastanza cottetta se le particelle incidenti hanno un'alta energia.

Nella realtà, il nucleo non è puntiforme e, per distanze inferiori ad  $R$ , il potenziale non è più coulombiano. Indichiamo con

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad [8.11]$$

*la sezione d'urto nell'ipotesi di nucleo fisso ma non puntiforme.* Rimaniamo sempre nell'approssimazione di Born per potenziali deboli. Dal punto di vista formale di può scrivere

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \frac{|f(\theta)|^2}{|f_0(\theta)|^2} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} |F|^2 \quad [8.12]$$

dove si è posto  $|F|^2 = \frac{|f(\theta)|^2}{|f_0(\theta)|^2}$ .  $F$  è il fattore di forma elastico del nucleo.

In generale si dice fattore di forma il rapporto fra l'ampiezza di scattering con cariche estese e l'ampiezza di scattering nel caso in cui le stesse cariche siano concentrate in un punto. Ovviamente

---

il fattore di forma dipensa da come le cariche sono distribuite. Vediamo di ricordare, quindi, la dipendenza di  $F$  dalla distribuzione.

Indiachiamo con

$$\vec{P}_e = \hbar \vec{k} \quad \text{quantità di moto iniziale} \quad [8.13]$$

$$\vec{P}'_e = \hbar \vec{k}' \quad \text{quantità di moto finale} \quad [8.14]$$

Per l'ipotesi di nucleo fisso, deve essere  $|\vec{P}_e| = |\vec{P}'_e|$  (per la conservazione dell'energia). Deve essere che

$$|\vec{P}'_e - \vec{P}_e| = 2P_e \sin(\theta/2) \quad [8.15]$$

Il modulo di questo vettore coincide con il modulo dell'impulso trasferito al nucleo. Introduciamo la quantità

$$\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k} \Rightarrow |\vec{q}| = \frac{2P_e \sin(\theta/2)}{\hbar} \quad [8.16]$$

Definiamo la densità di carica

$$\rho_c(\vec{r}) \equiv ze\rho(\vec{r}) \quad [8.17]$$

dove la funzione  $\rho(\vec{r})$  è tale che

$$\int \rho(\vec{r}) d^3r = 1 \quad [8.18]$$

Trascurando gli effetti magnetici, si può dimostrare che

$$\frac{f(\theta)}{f_0(\theta)} = F = F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} d^3r$$

[8.19]

cioè  $F$  è la transformata di Fourier di  $\rho(\vec{r})$ . Da questa formula si vede il legame tra  $F$  e  $\rho$ .

Se si considera il nucleo non fisso, si può dimostrare che rimane valida l'espressione per  $F$  appena riportata.

Si ha, ovviamente, che

$$F(0) = 1 \quad [8.20]$$

Questo significa che se l'impulso trasferito al nucleo fosse nullo, risulterebbe:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} |F(0)|^2 = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} = \text{sezione d'urto di Rutherford} \quad [8.21]$$

$$\lim_{\vec{P}_e \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \quad [8.22]$$

Quindi, se la quantità di moto dell'elettrone non è sufficientemente grande l'elettrone vedrà il nucleo puntiforme. Questa è, dunque, una buona prova rigorosa di quanto detto in precedenza.

Il rapporto tra  $|f(\theta)|^2$  e  $|f_0(\theta)|^2$  è sperimentalmente misurabile e, quindi, dalla determinazione di  $|F|^2$  si può risalire alla funzione  $\rho(\vec{r})$ .

# 9

## PROPRIETÀ DEI NUCLEI ATOMICI

### 9.1 DISTRIBUZIONE DI CARICA DEL NUCLEO

#### 9.1.1 FORMULA DI SAXON

**19-01-1998** Supponiamo che la distribuzione  $\rho(\vec{r})$  sia diversa da 0 solo nei punti in cui è verificata la relazione:

$$\vec{q} \cdot \vec{r} \ll 1 \quad [9.1]$$

in questo caso si può espandere la funzione  $e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}$  in serie di potenze. L'integrale, da  $F(\vec{q})$ , diventa quindi:

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) \left[ 1 + i\vec{q} \cdot \vec{r} - \frac{1}{2!}(\vec{q} \cdot \vec{r})^2 + \dots \right] d^3 r \quad [9.2]$$

Se ci si ferma fino al termine del secondo ordine si ha:

$$F(\vec{q}) = 1 + i \int \rho(\vec{r})(\vec{q} \cdot \vec{r}) d^3 r - \frac{1}{2} \int \rho(\vec{r})(\vec{q} \cdot \vec{r})^2 d^3 r \quad [9.3]$$

e nell'ipotesi che la distribuzione  $\rho$  abbia la proprietà:

$$\rho(\vec{r}) = \rho(-\vec{r}) \quad [9.4]$$

che è verificata ad esempio se  $\rho$  ha simmetria sferica, allora il primo integrale si annulla. Indichiamo con  $r_q$  la componente di  $\vec{r}$  nella direzione di  $\vec{q}$ , cioè  $r_q q = \vec{r} \cdot \vec{q}$ . Si ha:

$$\int \rho(\vec{r})(\vec{q} \cdot \vec{r})^2 d^3 r = q^2 \int \rho(r) r_q^2 d^3 r = \frac{1}{3} q^2 \int \rho(r) \vec{r}^2 d^3 r \quad [9.5]$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che, data la simmetria sferica, si ha:

$$\int \rho(r) r_i^2 d^3 r = \int \rho(r) r_q^2 d^3 r \quad [r_i(i = x, y, z)] \quad [9.6]$$

$$\int \rho(r) \vec{r}^2 d^3 \vec{r} = \sum_{i=1}^3 \int \rho(r) r_i^2 d^3 \vec{r} = 3 \int \rho(r) r_q^2 d^3 \vec{r} \quad [9.7]$$

Quindi, sotto l'ipotesi di una  $\rho(\vec{r})$  con simmetria sferica si ha:

$$F(q) = 1 - \frac{1}{6} q^2 \int \vec{r}^2 \rho(r) d^3 \vec{r} + \dots = 1 - \frac{1}{6} q^2 \langle \vec{r}^2 \rangle + \dots \quad [9.8]$$

Da questa si vede che da  $F(q)$  si può risalire ad una stima di  $\langle \vec{r}^2 \rangle$ . In realtà non è così semplice determinare la forma della funzione  $F(q)$ . Per determinare poi  $\rho$  si procede per tentativi, cioè si ipotizza una particolare  $\rho(r)$  e si confrontano poi i fattori di forma teorico e sperimentale. Con questo metodo si è trovata una distribuzione che risulta in accordo con i dati sperimentali. Questa è chiamata *Formula di Saxon*:

$$\boxed{\rho(r) = \frac{\rho_1}{e^{(r-c)/Z_1} + 1}} \quad [9.9]$$

dove si ha:

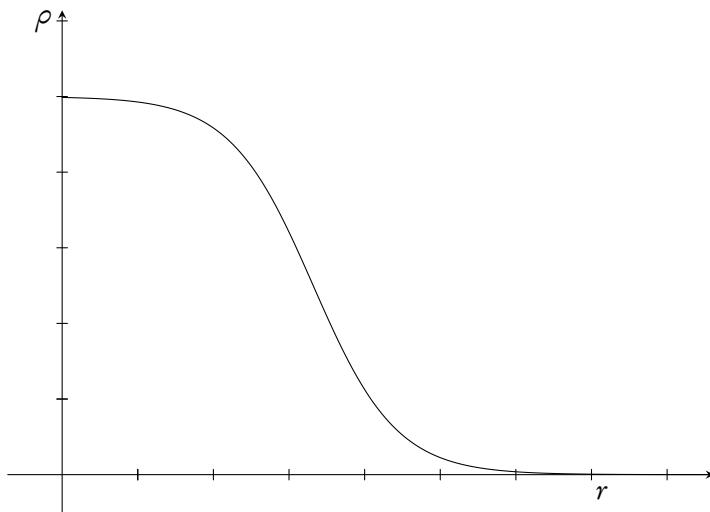
$$c = 1.07 \times A^{\frac{1}{3}} \times 10^{-13} \text{ cm};$$

$$Z_1 = 0.545 \times 10^{-13} \text{ cm};$$

$\rho_1$  = costante di normalizzazione;

Questa  $\rho(r)$  risulta valida per tutti i nuclei con  $A > 30$  con piccole variazioni del parametro  $c$ . La distribuzione di carica ha quindi un andamento del tipo (Figura 9.1): Il massimo di  $\rho$

**FIGURA 9.1.: Formula di Saxon.**



si ha per  $r = 0$ , cioè al centro del nucleo.

## 9.2 MOMENTI MAGNETICI DELL'ATOMO E STRUTTURA IPERFINE

### 9.2.1 HAMILTONIANA DELL'ELETTRONE

Un gran numero di esperimenti hanno messo in evidenza che i nuclei atomici hanno un momento angolare intrinseco al quale è associato un momento magnetico. Dal momento che i nuclei sono costituiti da particelle (protoni e neutroni) di spin  $\frac{1}{2}$  si hanno:

$$\begin{aligned} \text{Bosoni} &\Rightarrow \text{Numero di massa pari} & (\text{Spin} = n\hbar); \\ \text{Fermioni} &\Rightarrow \text{Numero di massa dispari} & (\text{Spin} = \frac{2n+1}{2}\hbar); \end{aligned} \quad [9.10]$$

L'interazione elettromagnetica dovuta allo spin del nucleo genera nell'atomo la struttura iperfine. Si ha che:

$$\vec{\mu}_I = \frac{g_I \mu_N \vec{I}}{\hbar} \quad [9.11]$$

dove:

$g_I$  = Fattore g nucleare;

$\mu_N$  = Magnetone (?) nucleare =  $\frac{e\hbar}{2m_p c} \simeq 0.5050823 \times 10^{-23}$  erg/gauss;

$\vec{I}$  = Spin del nucleo;

Si usa anche la scrittura:

$$\vec{\mu}_I = \gamma_I \vec{I} \quad \text{con } \gamma_I = \frac{g_I \mu_N}{\hbar} \text{ (Rapporto giromagnetico nucleare)} \quad [9.12]$$

ovviamente  $g_I$  e  $\gamma_I$  sono grandezze equivalenti.

Analizziamo ora il meccanismo dinamico che genera la struttura iperfine dell'atomo. La presenza di  $\mu_I$  implica che se c'è un campo magnetico esterno  $H$ , si ha un'energia potenziale:

$$W_m = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{H} \quad \Rightarrow \quad \langle W_m \rangle = -\langle \vec{\mu}_I \cdot \vec{H} \rangle \quad [9.13]$$

Supponiamo che si abbia un nucleo in un atomo con un singolo elettrone di valenza. Quindi  $H$  è solo il campo generato da questo elettrone di valenza in quanto gli altri elettroni per il principio di Pauli hanno un momento magnetico totale nullo. Sia  $\vec{J}$  il momento angolare totale dell'elettrone di valenza, cioè:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad [9.14]$$

$\vec{H}(0)$  (il campo generato dall'elettrone nel punto dove si trova il nucleo) sarà ovviamente nella stessa direzione di  $\vec{J}$ , ma verso opposto (in quanto l'elettrone ha carica negativa). Possiamo scrivere:

$$\vec{H}(0) = H(0) \frac{\vec{J}}{j\hbar} \quad \text{con } H(0) < 0 \quad [9.15]$$

Si avrà quindi uno splitting di energia pari a:

$$\Delta W = \langle W_m \rangle = - \left\langle \vec{\mu}_I \vec{H}(0) \right\rangle = -\gamma_I \frac{H(0)}{j \hbar} \langle \vec{I} \cdot \vec{J} \rangle \quad [9.16]$$

L'Hamiltoniana totale  $\mathcal{H}$  commuta con  $W_m$ , ed anche  $I^2$  e  $J^2$  commutano con  $W_m$ , cioè:

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}, W_m] &= 0 \\ [I^2, W_m] &= 0 \\ [J^2, W_m] &= 0 \end{aligned} \quad [9.17]$$

(Se consideriamo un atomo idrogenoide nell'Hamiltoniana totale ci sono i termini  $P^2/2m^1$ ,  $L^2$ ,  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  dove  $L$  e  $S$  sono relativi all'elettrone. Si può verificare che ciascuno di questi termini commuta con  $\vec{I} \cdot \vec{J}$ ,  $I^2$  e  $J^2$ ).

Mentre invece:

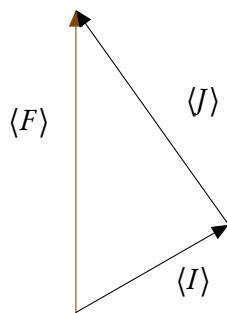
$$\begin{aligned} [I_Z, W_m] &\neq 0 \\ [J_Z, W_m] &\neq 0 \end{aligned} \quad [9.18]$$

Quindi invece lo spin del nucleo e il momento angolare totale dell'elettrone si conserveranno in modulo ma non in direzione. Invece si conserverà il momento angolare totale dell'atomo:

$$\vec{F} = \vec{I} + \vec{J} \quad [9.19]$$

Si possono quindi immaginare questi tre vettori come in Figura 9.2: dove  $\langle F \rangle$  rimane fisso

**FIGURA 9.2:** Precessione dei momenti.



mentre  $\langle J \rangle$  e  $\langle I \rangle$  hanno lo stesso moto di precessione attorno alla direzione di  $\langle F \rangle$

---

<sup>1</sup>È indecifrabile questa parte

## 9.2.2 LIVELLI DI STRUTTURA IPERFINE E REGOLA DEGLI INTERVALLI

**21-01-1998** Abbiamo visto che lo spostamento di energia in presenza di un campo magnetico è:

$$\Delta W = \langle W_m \rangle = - \left\langle \vec{\mu}_I \cdot \vec{H}(0) \right\rangle = -\gamma_I \frac{H(0)}{j \hbar} \langle \vec{I} \cdot \vec{J} \rangle \quad [9.20]$$

Calcoliamo quindi questo valore medio:

$$W_m = -\gamma_I \frac{H(0)}{j \hbar} \langle \vec{I} \cdot \vec{J} \rangle \quad [9.21]$$

Viste le regole di commutazione di  $W_m$  gli stati stazionari del sistema saranno autostati anche di  $\vec{I} \cdot \vec{J}$  e quindi di  $F^2$ . Si può dunque scrivere:

$$\begin{aligned} \langle F^2 \rangle &= f(f+1)\hbar \\ \vec{I}\vec{J} &= \frac{1}{2} [F^2 - I^2 - J^2] \\ \langle \vec{I}\vec{J} \rangle &= \frac{1}{2} [\langle F^2 \rangle - \langle I^2 \rangle - \langle J^2 \rangle] = \frac{\hbar^2}{2} [f(f+1) - i(i+1) - j(j+1)] \\ \Delta W &= -\frac{1}{2} \gamma_I \hbar \frac{H(0)}{j} [f(f+1) - i(i+1) - j(j+1)] \end{aligned} \quad [9.22]$$

e per ogni valore di  $f$  si avrà un diverso valore di  $\Delta W$ . Quindi se all'interazione eletrostatica si aggiunge l'interazione magnetica si avrà un numero di sottolivelli determinati dal valore di  $f$ . Il numero di questi sottolivelli è:

$$\begin{cases} 2i+1 & \text{se } i < j \\ 2j+1 & \text{se } i > j \end{cases} \quad [9.23]$$

Questi livelli sono quelli che generano la *struttura iperfine* che si osserva sperimentalmente. Se si conoscono  $j$  e  $f$  si può risalire al valore del numero quantico di spin nucleare  $i$ . Per esempio, se si osservano un numero di righe spettrali  $N < 2j+1$  allora deve essere  $i < j$  e  $N = 2i+1$ . Quindi dalla semplice conoscenza di  $N$  si ricava  $i = \frac{1}{2}(N-1)$ . Quando invece risulta  $N = 2j+1$  le cose risultano un pò più complicate. In questo caso si può avere per  $i$ :  $i \geq j$ . Il valore di  $i$  si può ricavare utilizzando la regola degli intervalli:

$$f : \begin{cases} f_1 = i + j & \rightarrow W_1 = W + \Delta W_1 \\ f_2 = i + j - 1 & \rightarrow W_2 = W + \Delta W_2 \\ f_3 = i + j - 2 & \rightarrow W_3 = W + \Delta W_3 \\ \dots \end{cases} \quad [9.24]$$

Si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{W_1 - W_2}{W_2 - W_3} &= \frac{\Delta W_1 - \Delta W_2}{\Delta W_2 - \Delta W_3} = \frac{f_1(f_1+1) - f_2(f_2+1)}{f_2(f_2+1) - f_3(f_3+1)} = \\ &= \frac{f_1(f_1+1) - f_2 f_1}{f_2(f_2+1) - f_3 f_2} = \frac{f_1[f_1+1-f_2]}{f_2[f_2+1-f_3]} = \frac{f_1}{f_2} \end{aligned} \quad [9.25]$$

Questo risultato può essere generalizzato scrivendo per esteso la *Regola degli intervalli*:

$$\boxed{\frac{W_\alpha - W_{\alpha+1}}{W_{\alpha+1} - W_{\alpha+2}} = \frac{f_\alpha}{f_{\alpha+1}}} \quad [9.26]$$

Questo rapporto può essere valutato sperimentalmente, dalla conoscenza di  $\frac{f_\alpha}{f_{\alpha+1}}$  e  $j$  si può arrivare alla determinazione di  $i$ . La regola degli intervalli è utile anche per determinare l'aderenza del modello teorico con la realtà. La deviazione di piccoli scarti dalla regola degli intervalli portò alla scoperta del momento di quadrupolo del nucleo.

Quanto detto fin'ora può essere generalizzato ad atomi con più elettroni di valenza, basta porre  $\vec{J}$  uguale al momento totale degli elettroni e considerare in  $\vec{H}$  anche il contributo degli altri elettroni. Le misure di  $i$  non portano ad una determinazione univoca di  $\vec{\mu}_I$  in quanto resta da misurare il rapporto giromagnetico nucleare  $\gamma_I = g_I \frac{\mu_N}{\hbar}$ .

### 9.2.3 RAPPORTO GIROMAGNETICO NUCLEARE

Il metodo più semplice per determinare  $g_I$  è quello di considerare un campo magnetico esterno uniforme che sia tanto grande da poter trascurare l'interazione con gli elettroni. Se  $\vec{H}$  è diretto lungo l'asse  $\hat{z}$ , l'Hamiltoniana di interazione è:

$$\mathcal{H}_{int} = -\vec{\mu}_I \vec{H}_{est} = -\gamma_I I_z H_z \quad [9.27]$$

e l'Hamiltoniana totale del nucleo, si può scrivere dunque come:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} \quad [9.28]$$

Ovviamente si avrà che:

$$[\mathcal{H}_0, \vec{I}] = 0; \quad [\mathcal{H}, I_z] = 0 \quad [9.29]$$

Il nucleo, in questa situazione subirà l'*effetto Zeeman*, cioè:

$$\Delta W_{nucl} = -\gamma_I m_I H_{est} \hbar \quad \text{con } m_I = i, i-1, \dots, -i \quad [9.30]$$

Si formeranno  $2i + 1$  sottolivelli di energia del nucleo e l'energia di ciascun sottolivello sarà caratterizzata solo da  $m_I$ .

Se si fa passare il nucleo da un sottolivello ad un altro adiacente si può misurare  $\gamma_I$ . Infatti nella transazione il nucleo emetterà (o assorbirà) un quanto di energia pari a:

$$\begin{aligned} h\nu &= |-\gamma_I(m_I + 1)H_{\text{est}}\hbar + \gamma_I m_I H_{\text{est}}\hbar| = \gamma_I H_{\text{est}}\hbar \\ v &= \frac{1}{2\pi} |\gamma_I| H_{\text{est}} \end{aligned} \quad [9.31]$$

Dalla frequenza  $v$  della radiazione emessa (o assorbita) e da  $H_{\text{est}}$  si può quindi ricavare  $|\gamma_I|$ . La frequenza  $v$  coincide con la *frequenza di Larmor* con cui precessa  $\langle \vec{I} \rangle$  attorno alla direzione di  $\vec{H}_{\text{est}}$ . Per ricavare questo risultato basta usare un modello classico.

Supponiamo di avere un campo magnetico  $H_{\text{est}}$  in cui è presente un giroscopio caratterizzato da:

$$\vec{I}^{cl} = \langle \vec{I} \rangle; \quad \vec{\mu}_I^{cl} = \langle \vec{\mu}_I \rangle = \gamma_I \vec{I}^{cl} \quad [9.32]$$

Questo giroscopio sarà soggetto ad un momento meccanico:

$$\vec{\tau} = \frac{d}{dt} \vec{I}^{cl} = \vec{\mu}_I^{cl} \wedge \vec{H}_{\text{est}} = \gamma_I \vec{I}^{cl} \wedge \vec{H}_{\text{est}} \quad [9.33]$$

si avrà quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{I}^{cl})^2 &= 2\vec{I}^{cl} \cdot \frac{d}{dt} \vec{I}^{cl} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{I}^{cl})^2 = \text{costante} \\ \frac{d}{dt}(\vec{H}_{\text{est}} \cdot \vec{I}^{cl}) &= \vec{H}_{\text{est}} \cdot \frac{d}{dt} \vec{I}^{cl} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{I}^{cl} \cdot \vec{H}_{\text{est}} = \text{costante} \quad \Rightarrow \quad I_z^{cl} = \text{costante} \end{aligned} \quad [9.34]$$

Quindi il vettore  $\vec{I}^{cl}$  sarà soggetto ad un moto di precessione attorno all'asse  $\hat{z}$ . Se  $\gamma_I$  è positivo la rotazione sarà in senso orario. Quindi:

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \vec{I}^{cl} \right| &= -\gamma_I I^{cl} H_{\text{est}} \sin \theta \\ \left| d\vec{I}^{cl} \right| &= I^{cl} \sin \theta d\varphi \end{aligned} \quad [9.35]$$

Da queste si può dedurre la velocità angolare di precessione:

$$\omega_L = \frac{d\varphi}{dt} = -\gamma_I H_{\text{est}} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2\pi} |\omega_L| = \frac{1}{2\pi} |\gamma_I| H_{\text{est}} \quad [9.36]$$

**23-01-1998** A questo punto si può applicare il principio di corrispondenza e si può concludere che  $\langle \vec{I} \rangle$  sarà soggetto a questo stesso moto di precessione con la stessa frequenza. Il moto di  $\langle \vec{I} \rangle$  si può equivalentemente dedurre dal fatto che:

$$[I^2, \mathcal{H}] = [I_z, \mathcal{H}] = 0 \quad \text{e} \quad [I_x, \mathcal{H}] \neq 0; \quad [I_y, \mathcal{H}] \neq 0 \quad [9.37]$$

Vediamo come si può sfruttare questa proprietà per far passare il nucleo da uno stato a quello adiacente in modo da misurare  $\gamma_I$ . A due livelli di energia adiacenti saranno associati due diversi valori di  $\theta$ . Per stimolare la transizione si può usare un campo magnetico  $H'$  ortogonale ad  $H_{\text{est}}$  e molto più piccolo in modulo. Questo campo  $H'$  deve essere fatto ruotare attorno all'asse  $\hat{z}$  con una velocità angolare risonante  $\omega_r = \omega_L$ . Se ci si pone nel sistema di riferimento solidale a  $\langle \vec{I} \rangle$  il campo  $H'$  sarà visto come un campo costante, il suo effetto sarà quindi quello di far variare l'angolo  $\theta$ . Il fatto che  $H' \ll H_{\text{est}}$  garantisce che i livelli energetici non saranno modificati. La transizione voluta si avrà solo quando la frequenza di  $H'$  sarà uguale a  $\omega_r$ .

Il rapporto giromagnetico nucleare si può quindi determinare dal valore sperimentale di  $\omega_r$ :

$$\gamma_I = \frac{\omega_r}{H_{\text{est}}} \quad \Leftrightarrow \quad g_I = -\frac{\hbar}{\mu_N} \frac{\omega_r}{H_{\text{est}}} \quad [9.38]$$

Nella pratica invece di usare un campo magnetico  $H'$  ruotante si usa un campo magnetico alternato, ad esempio, nella direzione  $\hat{y}$ . Questo campo può essere pensato come la sovrapposizione di due campi uguali e ruotanti con frequenze opposte, cioè:

$$\vec{H}' = H' \cos(\omega t) \hat{y} = \frac{1}{2} H' (\cos(\omega t) \hat{y} + \sin(\omega t) \hat{x}) + \frac{1}{2} H' (\cos(\omega t) \hat{y} - \sin(\omega t) \hat{x}) \quad [9.39]$$

di questi due campi sarà efficace solo quello che ruota nel verso giusto. In realtà ciò che si misura è la potenza assorbita dai nuclei in funzione di  $\omega$ . Questa potenza avrà un massimo quando  $\omega = \omega_r$ . Per molti nuclei il valore di  $g_I$  è attorno all'unità e può essere sia positivo che negativo. Il fatto che possa anche essere negativo si spiega con il fatto che i neutroni anche se hanno carica nulla hanno un momento magnetico diverso da zero con un fattore  $g$  negativo. Per  $H_{\text{est}}$  si usano valori dell'ordine di 1000 gauss. In questo caso, per la frequenza di risonanza si ha  $\omega_r \approx 10^6$  cicli/sec.

## 9.3 MOMENTI ELETTRICI DELL'ATOMO E TENSORE $\mathcal{Q}$

### 9.3.1 SVILUPPO IN SERIE DEL POTENZIALE DEL NUCLEO

In un atomo il campo generato dagli elettroni si può considerare simmetrico attorno alla direzione di  $\langle \vec{J} \rangle$ , questa assunzione è buona viste le velocità con cui ruotano gli elettroni. Analogamente la carica nucleare può essere assunta simmetrica attorno alla direzione di  $\langle \vec{I} \rangle$ .

Introduciamo due sistemi di riferimento con la stessa origine posta nel centro del nucleo. Il sistema di riferimento atomico sia preso con l'asse  $\hat{z}$  parallelo a  $\langle \vec{J} \rangle$ . Il sistema di riferimento nucleare con l'asse  $\hat{z}'$  parallelo a  $\langle \vec{I} \rangle$ . L'energia elettrostatica del nucleo dovuta alla carica degli elettroni sarà data in termini classici da:

$$W_E = \int \rho_c^N(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) d\tau \quad [9.40]$$

dove  $\varphi(\vec{r})$  è il potenziale dovuto agli elettroni. Si ha che:

$$\int \rho_c^N(\vec{r}) dv = Ze \quad Z = \text{numero atomico} \quad [9.41]$$

Dal momento che le dimensioni del nucleo sono molto piccole rispetto a quelle atomiche di può sviluppare  $\varphi$  in serie di Taylor. Lavoriamo nel sistema atomico ponendo:

$$\vec{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) \quad [9.42]$$

Quindi si ha che:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \varphi(0) + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{r} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} x_\alpha x_\beta + \dots \\ W_E &= \int \rho_c^N(\vec{r}) \left[ \varphi(0) + \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{r} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} x_\alpha x_\beta + \dots \right] dv \end{aligned} \quad [9.43]$$

dove le derivate sono calcolate nell'origine. Se trascuriamo tutti i termini della serie tranne il primo si ottiene in questa approssimazione:

$$W_E = \int \rho_c^N(\vec{r}) \varphi(0) dv = \varphi(0) ze \quad [9.44]$$

e questo equivale ad assumere un nucleo puntiforme, caso in cui il nucleo tende ovviamente a comportarsi come un semplice monopolo elettrico. Si avrà dunque sempre la stessa energia indipendentemente dall'orientazione relativa di  $\langle \vec{I} \rangle$  e  $\langle \vec{J} \rangle$ .

Se consideriamo l'approssimazione successiva si ottiene il termine aggiuntivo:

$$\int \rho_c^N(\vec{r}) \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{r} dv = \vec{\nabla} \varphi \int \rho_c^N(\vec{r}) \vec{r} dv \quad [9.45]$$

questo termine è non nullo solo se il nucleo ha un momento di dipolo nucleare definito come:

$$\vec{d}_N = \int \rho_c^N(\vec{r}) \vec{r} dv \quad [9.46]$$

per simmetria  $\vec{d}_N$  deve essere orientato come  $\langle \vec{I} \rangle$ .

La presenza di questo momento implicherebbe che l'energia sia funzione dell'orientazione tra  $\langle \vec{I} \rangle$  e  $\langle \vec{J} \rangle$ . Tuttavia non si è mai osservata alcuna dipendenza dell'energia da tali parametri, quindi è lecito porre:

$$\vec{d}_N = 0 \quad [9.47]$$

questo risultato può essere anche giustificato teoricamente mediante l'uso della meccanica quantistica.

Consideriamo l'espressione quantistica della densità di carica nucleare:

$$\rho_c(x, y, z)^N = \sum_{i=1}^A e_i P_i(x, y, z) \quad [9.48]$$

dove  $e_i$  è la carica del nucleone  $i$ -esimo e  $P_i$  è la densità di probabilità di trovare il nucleone nel punto  $\vec{r} = (x, y, z)$ . Dimostreremo in seguito che l'interazione che tiene uniti i nucleoni è invariante rispetto all'inversione degli assi, questo implica che:

$$P_i(-x, -y, -z) = P_i(x, y, z) \quad \Rightarrow \quad \rho_c(-x, -y, -z)^N = \rho_c(x, y, z)^N \quad [9.49]$$

Questa proprietà spiega la mancanza di un momento di dipolo elettrico. Infatti ogni contributo al momento di dipolo  $\vec{r} \rho_c^N dv$  viene annullato dal corrispondente contributo speculare  $-\vec{r} \rho_c^N dv$ .

Consideriamo ora il contributo del secondo ordine nello sviluppo di  $\varphi$  (potenziale elettrico generato dagli elettroni). I termini associati alle derivate seconde  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$  con  $\alpha \neq \beta$  non danno alcun contributo all'energia in quanto risultano nulli per la simmetria assiale di  $\varphi$  (le derivate sono calcolate nell'origine).

Dimostriamo questa affermazione considerando prima le derivate rispetto a  $x$  e  $y$  (l'asse di simmetria in questo caso è l'asse  $\hat{z}$ )

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad [9.50]$$

la prima uguaglianza vale sempre mentre la seconda soltanto nell'origine. Quindi sempre nell'origine si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial r_\perp} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad [9.51]$$

dove  $\frac{\partial}{\partial r_\perp}$  è l'operatore derivata nella direzione ortogonale a quella di  $r$ . Consideriamo ora le derivate miste che comprendono  $z$ . Per dimostrare che anche queste sono nulle basta considerare il fatto che  $\varphi$  è simmetrico rispetto all'inversione dell'asse  $\hat{z}$  e quindi nell'origine si ha  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ . Anche le funzioni  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  sono simmetriche per inversione dell'asse  $\hat{z}$  e quindi è dimostrato che:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial y} = 0 \quad [9.52]$$

Possiamo quindi concludere che l'energia del nucleo nel campo elettrostatico elettronico (cioè, dell'elettrone) si può scrivere come:

$$\begin{aligned} W_E &= Ze\varphi(0) + \Delta W_{\mathcal{Q}} \\ \Delta W_{\mathcal{Q}} &= \frac{1}{2} \int \rho_c^N \sum_{\alpha=1}^3 \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha^2} \right| (x=y=z=0) x_\alpha^2 dv = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha^2} \right| (0) \int \rho_c^N x_\alpha^2 dv \end{aligned} \quad [9.53]$$

Possiamo dunque a questo punto sfruttare il fatto che nell'origine  $\varphi$  deve soddisfare l'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad [9.54]$$

dove l'ultima implicazione sfrutta le proprietà di simmetria di  $\varphi$ .

Quindi per  $\Delta W_{\mathcal{Q}}$  si può scrivere:

$$\begin{aligned} \Delta W_{\mathcal{Q}} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \int \rho_c^N \left[ z^2 - \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right] dv \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \int \rho_c^N \left[ 2z^2 - (x^2 + y^2) \right] dv = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \int \rho_c^N (3z^2 - r^2) dv \end{aligned} \quad [9.55]$$

dove si è posto  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ . Tutti questi conti sono stati svolti nel sistema di riferimento atomico, cioè sul sistema con l'asse  $\hat{z}$  parallelo a  $\langle \vec{J} \rangle$ . Per evidenziare il significato fisico del termine  $\Delta W_{\mathcal{Q}}$  conviene ora passare al sistema di riferimento nucleare, in cui l'asse  $\hat{z}$  è parallelo a  $\langle \vec{I} \rangle$ . Poniamo per semplicità:

$$x'_1 = x' \quad x'_2 = y' \quad x'_3 = z' \quad [9.56]$$

e introduciamo il tensore<sup>2</sup>:

$$\boxed{\mathcal{Q}_{\alpha\beta} = \int \rho_c^N (3x'_\alpha x'_\beta - \delta_{\alpha\beta} r^2) dv \quad \alpha, \beta = \{1, 2, 3\}} \quad [9.57]$$

dove  $\delta_{\alpha\beta}$  indica la delta di Kronecker. Questo tensore definisce il momento di quadrupolo elettrico nucleare, dal momento che l'asse  $\hat{z}'$  coincide con l'asse di rotazione medio nucleare possiamo assumere che questo sia l'asse di simmetria per la distribuzione di carica  $\rho_c^N$ . Quindi per  $\rho_c^N$  vale che:

$$\rho_c(x', y', z')^N = \rho_c(-x', y', z')^N = \rho_c(x', -y', z')^N \quad [9.58]$$

da questa proprietà segue che:

$$\text{per } \alpha \neq \beta \quad \mathcal{Q}_{\alpha\beta} = \int \rho_c^N 3x'_\alpha x'_\beta dv = 0 \quad [9.59]$$

Un'altra proprietà del tensore  $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$  è quella di avere traccia nulla, infatti:

$$\mathcal{Q}_{x'x'} = \mathcal{Q}_{y'y'} = -\frac{1}{2} \mathcal{Q}_{z'z'} \quad [9.60]$$

<sup>1</sup>Il carattere in questione è una Q calligrafica [NdT].

<sup>2</sup>Q è una Q calligrafica. [NdT]

(dalla definizione di  $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$  si ricava che  $\mathcal{Q}_{x'x'} = \mathcal{Q}_{y'y'}$  e  $\mathcal{Q}_{x'x'} + \mathcal{Q}_{y'y'} + \mathcal{Q}_{z'z'} = 0$ . Da queste due si ricava l'equazione sopra).

Possiamo dunque concludere che il tensore  $\mathcal{Q}_{\alpha\beta}$  è un tensore diagonale con una sola componente indipendente, che possiamo identificare con  $\mathcal{Q}_{z'z'}$ . Poniamo quindi:

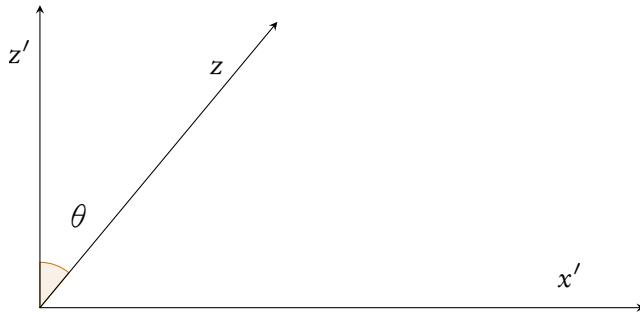
$$\boxed{\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{z'z'} = \int \rho_c^N (3z^2 - r^2) dv} \quad [9.61]$$

Abitualmente, è proprio questa quantità che viene intesa come *momento di quadrupolo elettrico del nucleo*.

### 9.3.2 MOMENTO DI QUADRUPOLI ELETTRICO DEL NUCLEO

Vediamo ora di esprimere  $\Delta W_{\mathcal{Q}}$  in funzione di  $\mathcal{Q}$ . Vista la simmetria assiale della distribuzione di carica nucleare gli assi  $\hat{x}'$  e  $\hat{y}'$  possono essere scelti arbitrariamente, possiamo quindi sceglierli in maniera tale che l'asse  $\hat{z}$  cada sul piano  $\hat{x}'\hat{z}'$ . Si può dunque scrivere:

**FIGURA 9.3.:** Sistema di riferimento.



$$z = z' \cos \theta + x' \sin \theta \quad [9.62]$$

dove  $\theta$  è l'angolo formato dagli assi  $\hat{z}$  e  $\hat{z}'$ , quindi coincide con l'angolo formato dai vettori  $\langle \vec{J} \rangle$  e  $\langle \vec{I} \rangle$ . In base a questa scelta si ha che:

$$z^2 = z'^2 \cos^2 \theta + x'^2 \sin^2 \theta + 2x'z' \sin \theta \cos \theta \quad [9.63]$$

Sostituendo queste espressioni in  $\Delta W_{\mathcal{Q}}$  si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \Delta W_{\mathcal{Q}} &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \int \rho_c^N (3z^2 - r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta) dv = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \left[ \int \rho_c^N (3z'^2 - r^2) \cos^2 \theta dv + \int \rho_c^N (3x'^2 - r^2) \sin^2 \theta dv + \int \rho_c^N 6x'z' \sin \theta \cos \theta dv \right] = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \left[ \int \rho_c^N (3z'^2 - r^2) \cos^2 \theta dv + \int \rho_c^N (3x'^2 - r^2) \sin^2 \theta dv \right] = \\
 &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} [\mathcal{Q}_{z'z'} \cos^2 \theta + \mathcal{Q}_{x'x'} \sin^2 \theta] = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \left[ \mathcal{Q} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \mathcal{Q} (1 - \cos^2 \theta) \right] \\
 \Delta W_{\mathcal{Q}} &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \mathcal{Q} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned} \tag{9.64}$$

(nella seconda equazione, l'integrale  $\int \rho_c^N 6x'z' \sin \theta \cos \theta dv$  si annulla per la simmetria di  $\rho_c^N$ )<sup>3</sup>.

### 9.3.3 ESPRESSIONE QUANTISTICA DEL MOMENTO DI QUADRUPOLI ELETTRICO

**28-01-1998** Abbiamo visto che il contributo di energia elettrostatica dovuto al quadrupolo elettrico nucleare è dato dalle equazioni:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Q} &= \mathcal{Q}_{z'z'} = \int \rho_c^N (3z^2 - r^2) dv \\
 \Delta W_{\mathcal{Q}} &= \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \mathcal{Q} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

[9.65]

Queste sono state ricavate da considerazioni classiche. In termini quantistici si ha:

$$\Delta W_{\mathcal{Q}} = \left\langle \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \mathcal{Q} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \right\rangle = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \mathcal{Q} \left( \frac{3}{2} \langle \cos^2 \theta \rangle - \frac{1}{2} \right) \tag{9.66}$$

dove  $\cos \theta$  è un operatore definito in maniera tale che:

$$\begin{aligned}
 \langle \cos \theta \rangle &= \frac{1}{\hbar^2 i j} \langle \vec{I} \cdot \vec{J} \rangle \\
 \langle \vec{I} \rangle &= (\langle I_x \rangle, \langle I_y \rangle, \langle I_z \rangle) = (0, 0, \hbar i) \quad \rightarrow \quad \text{S.R. nucleare} \\
 \langle \vec{J} \rangle &= (\langle J_x \rangle, \langle J_y \rangle, \langle J_z \rangle) = (0, 0, \hbar j) \quad \rightarrow \quad \text{S.R. atomico}
 \end{aligned} \tag{9.67}$$

<sup>3</sup>Negli appunti originali, o almeno la copia che la copisteria ha, manca una pagina in questo punto. Si passa da pagina 73 a pagina 75. [NdT]

L'operatore  $\vec{I} \cdot \vec{J}$  si può scrivere come:

$$\vec{I} \cdot \vec{J} = \frac{1}{2} [\vec{F}^2 - \vec{I}^2 - \vec{J}^2] \quad (\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}) \quad [9.68]$$

quindi il suo valore di aspettazione è:

$$\langle \vec{I} \cdot \vec{J} \rangle = \frac{\hbar}{2} K_f \quad K_f = f(f+1) - i(i+1) - j(j+1) \quad [9.69]$$

Per il valore di aspettazione di  $\cos \theta$  si ottiene dunque:

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{K_f}{2ij} \quad [9.70]$$

questo risultato però non ci consente di valutare in modo rigoroso la quantità  $\langle \cos^2 \theta \rangle$  in quanto:

$$\langle (\vec{I} \cdot \vec{J})^2 \rangle \neq (\langle \vec{I} \cdot \vec{J} \rangle)^2 \quad \Rightarrow \quad \langle \cos^2 \theta \rangle \neq (\langle \cos \theta \rangle)^2 \quad [9.71]$$

questo è analogo al fatto che  $\langle \vec{J}^2 \rangle \neq (\langle \vec{J} \rangle)^2$ . Però si sa<sup>4</sup> che:

$$\langle \vec{J}^2 \rangle \simeq (\langle \vec{J} \rangle)^2 \quad \text{quando } j \gg 1 \quad [9.72]$$

analogamente avviene che:

$$\langle \cos^2 \theta \rangle \simeq (\langle \cos \theta \rangle)^2 = \frac{K_f^2}{4(ij)^2} \quad [9.73]$$

Questa approssimazione ci consente di scrivere la seguente formula semi-classica:

$$\boxed{\Delta W_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \mathcal{Q} \left( \frac{3}{2} K_f^2 - 2i^2 j^2 \right) \frac{1}{4i^2 j^2}} \quad [9.74]$$

La corrispondente espressione quantistica che non verrà però dimostrata è:

$$\boxed{\Delta W_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \mathcal{Q} \left( \frac{3}{2} K_f (K_f + 1) - 2i(i+1)j(j+1) \right) \frac{1}{i(2i-1)j(2j-1)}} \quad [9.75]$$

si vede subito che questa tende a quella semi-classica nei limiti suddetti. In entrambe le formule compare il numero quantico  $f$  che può assumere valori:

$$f = i + j, i + j - 1, i + j - 2, \dots, |i - j| \quad [9.76]$$

---

<sup>4</sup>Si sa? Tu lo sai? E chi lo sa? [cit.]

e a diversi valori di  $f$  corrispondono diversi valori di  $\Delta W_{\mathcal{Q}}$ :

$$\Delta W_{\mathcal{Q}} = (\Delta W_{\mathcal{Q}})_f \quad [9.77]$$

Quando il nucleo possiede un  $\mathcal{Q} \neq 0$  ciascun livello della struttura iperfine risulterà spostato della quantità  $(\Delta W_{\mathcal{Q}})_f$ . Cioè:

$$W_f \rightarrow W_f + (\Delta W_{\mathcal{Q}})_f \quad [9.78]$$

Questo provoca una piccola deviazione dalla regola degli intervalli. La misura di questa deviazione permette di determinare il valore di  $\mathcal{Q}$  una volta che è noto il valore di  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$  nell'origine.

### 9.3.4 RELAZIONE TRA $\mathcal{Q}$ E FORMA DEL NUCLEO

L'esistenza di  $\mathcal{Q}$  ha una stretta connessione con la forma del nucleo. In termini classici si può scrivere:

$$\begin{aligned} \rho_c(\vec{r})^N &= Ze\rho(\vec{r})^N \\ \mathcal{Q} &= Ze \int \rho(\vec{r})^N (3z'^2 - r^2) dv = Ze(3 \langle z'^2 \rangle - \langle r^2 \rangle) \end{aligned} \quad [9.79]$$

dove si ha:

$$\langle r^2 \rangle = \langle x'^2 \rangle + \langle y'^2 \rangle + \langle z'^2 \rangle \quad \text{e} \quad \langle x'^2 \rangle = \langle y'^2 \rangle \quad [9.80]$$

La stessa connessione tra  $\mathcal{Q}$  e la forma del nucleo può essere ricavata in termini quantistici:

$$\rho_c(\vec{r})^N = \sum_{k=1}^A e_k P_k(\vec{r}) \quad [9.81]$$

dove  $P_k(\vec{r})$  è la densità di probabilità di trovare il nucleone k-esimo nel punto  $\vec{r}$ .

Indichiamo con  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)$  la funzione che descrive lo stato quantico del nucleo. Questo stato è caratterizzato dal fatto che  $I_z$  è massima ( $= i \hbar$ ). Si avrà quindi che:

$$P_k(\vec{r}) = P_k(\vec{r}_k) = \int |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)|^2 d^3 \vec{r}_1, \dots, d^3 \vec{r}_{k-1}, d^3 \vec{r}_{k+1}, \dots, d^3 \vec{r}_A \quad [9.82]$$

Se utilizziamo questa equazione per scrivere  $\rho_c$ , per  $\mathcal{Q}$  si avrà:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \int \rho_c^N (3z'^2 - r^2) dv \\ &= \sum_{k=1}^A e_k \int P_k(\vec{r}) (3z'^2 - r^2) dv \\ &= e \sum_{k=1}^Z \int P_k(\vec{r}) (3z_k'^2 - r_k^2) d^3 \vec{r}_k \\ &= e \sum_{k=1}^Z \int |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)|^2 (3z_k'^2 - r_k^2) d^3 \vec{r}_1, \dots, d^3 \vec{r}_A \end{aligned} \quad [9.83]$$

questi contributi sono tutti uguali in quanto trattandosi di particelle identiche, il modulo quadro di  $\psi$  non cambia per lo scambio di due indici, dunque si può scrivere:

$$\mathcal{Q} = Ze \int |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_A)|^2 (3z_k'^2 - r_k^2) d^3\vec{r}_1, \dots, d^3\vec{r}_A \quad [9.84]$$

il momento di quadrupolo  $\mathcal{Q}$  sarà nullo per nuclei con spin zero, in quanto la  $\rho$  avrà simmetria sferica. Esiste una regola empirica secondo cui hanno spin nullo (e dunque nulli sia il momento di dipolo magnetico che il momento di quadrupolo elettrico) tutti i nuclei con un numero pari di protoni e di neutroni.

Si può dimostrare che  $\mathcal{Q} = 0$  anche per tutti i nuclei che hanno spin  $\frac{1}{2}$ . Per dimostrarlo basta porre:

$$\begin{aligned} z'^2 &= r^2 \cos^2 \theta = r^2 \frac{I_r^2}{\vec{I}^2} \\ I_r &= \vec{r} \cdot \vec{I} = Ir \cos \theta \end{aligned} \quad [9.85]$$

dove si è preso  $\vec{I}$  lungo l'asse  $\hat{z}'$ . Nel caso di spin  $\frac{1}{2}$  si ha:

$$\begin{aligned} \langle \vec{I}^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \hbar^2 = \frac{3}{4} \hbar^2 \\ \langle I_r^2 \rangle &= \frac{1}{4} \hbar P_+ + \frac{1}{4} \hbar P_- = \frac{1}{4} \hbar^2 \end{aligned} \quad [9.86]$$

dove  $P_+$  e  $P_-$  sono le probabilità di avere spin  $\frac{1}{2}$  e  $-\frac{1}{2}$  lungo la direzione  $\vec{r}$ . Calcoliamo adesso  $\langle \hat{z}'^2 \rangle$ :

$$\langle \hat{z}'^2 \rangle = \frac{4}{3} \langle r^2 \rangle \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle = \langle r^2 \rangle \frac{\langle I_r^2 \rangle}{\langle \vec{I}^2 \rangle} \quad [9.87]$$

Il nucleo di spin  $\frac{1}{2}$  si può immaginare come un nucleo di spin zero più un nucleone. Se si ha un nucleo con  $\mathcal{Q} \neq 0$  allora certamente non si ha simmetria sferica. Si possono allora distinguere due casi:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} > 0 &\Rightarrow \langle \hat{z}'^2 \rangle > \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle \\ \mathcal{Q} < 0 &\Rightarrow \langle \hat{z}'^2 \rangle < \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle \end{aligned} \quad [9.88]$$

Nel primo caso la forma del nucleo è uno sferoide allungato nella direzione di  $\hat{z}'$ . Nel secondo caso si ha uno sferoide schiacciato nella direzione di  $\hat{z}'$ .  $\mathcal{Q}$  si misura in unità di carica protonica e ha le dimensioni di un'area. L'ordine di grandezza che si trova è:

$$|\mathcal{Q}| \sim 10^{-24} \text{ cm}^2 \quad [9.89]$$

30-01-1998

Si può dimostrare che valori di questo tipo sono associati a rapporti fra semiasse maggiore e minore del tipo:

$$\frac{d_{\max}}{d_{\min}} \sim 1 + 0.1 \quad [9.90]$$

quindi in realtà si ha una distorsione della simmetria sferica estremamente piccola.

# 10

## MODELLI NUCLEARI

### 10.1 MODELLO A GOCCIA DI LIQUIDO

#### 10.1.1 ENERGIA DI LEGAME DI VOLUME

Lo studio teorico di nuclei con  $A > 2$  è molto complicato per due motivi: Il primo è dovuto al fatto che non si hanno sufficienti conoscenze sulle forze che i nucleoni esercitano tra loro, il secondo è dovuto al fatto che dal punto di vista matematico non si è in grado di risolvere l'equazione di Schrödinger neppure ricorrendo ad approssimazioni.

L'unica strada percorribile è quindi quella di introdurre due modelli semi-empirici, in più si considereranno diversi modelli a seconda del numero di massa e delle proprietà che si vogliono evidenziare. Questi diversi modelli non sono indipendenti l'uno dall'altro.

Considereremo adesso il *modello a goccia di liquido*. Questo si basa su aspetti prettamente classici e si applica a nuclei con un valore di  $A$  sufficientemente grande in modo da poter trascurare l'identità di ogni singolo nucleone. L'ipotesi fondamentale di questo modello è l'incompressibilità del nucleo. Questa ipotesi è suggerita dal fatto che la densità non dipende da  $A$ .

Un nucleo complesso si può immaginare come un insieme di sferette rigide tenute insieme da una forza di contatto, che si esercita solo a distanze estremamente piccole. All'interno del nucleo, per ragioni prettamente geometriche, ogni nucleone è a contatto con altri 12 nucleoni. Se si vuole esprimere la massa  $M$  del nucleo in funzione di  $A$  e di  $Z$  si utilizza la seguente considerazione geometrica.

Al primo livello di approssimazione:

$$M_0(A, Z) = Z m_p + (A - Z) m_n \quad [10.1]$$

A questo termine bisogna sottrarre la quantità di massa equivalente all'energia di legame dei nucleoni. Sia  $U$  l'energia di legame fra due nucleoni, il difetto di massa di un nucleone dovuto

ad un solo legame è:

$$\delta m_i(j) = \delta m_j(i) = \frac{1}{c^2} \frac{U}{2} \quad i, j = \text{nucleoni} \quad [10.2]$$

quindi ogni nucleone avrà un difetto di massa totale pari a:

$$\delta m_i = \sum_{j=1}^{12} \delta m_i(j) = \frac{12}{c^2} \frac{U}{2} = 6 \frac{U}{c^2} \quad [10.3]$$

questo è il difetto di massa di un nucleone circondato da 12 nucleoni. Se si trascura il fatto che non tutti i nucleoni sono interni si può sottrarre a  $M_0$  il termine:

$$M_1 = \sum_{i=1}^A \delta m_i = A \frac{6U}{c^2} \quad [10.4]$$

e a questo grado di approssimazione si ha:

$$M(A, Z) = M_0(A, Z) - M_1(A) \quad [10.5]$$

La quantità  $M_1 c^2$  è chiamata *energia di legame di volume*.

$$E_{\text{vol}} = M_1 c^2 = 6UA \quad [10.6]$$

Vedere 189<sup>1</sup>.

### 10.1.2 ENERGIA DI SUPERFICIE

Per migliorare le approssimazioni si possono considerare i nucleoni superficiali, il cui difetto di massa deve essere ridotto di:

$$\delta m_{\text{sup}} = \frac{3}{c^2} \frac{U}{2} \quad [10.7]$$

(poichè i nucleoni di superficie sono a contatto con 9 nucleoni invece di 12).

Per calcolare il numero di nucleoni superficiali si deve considerare la densità di nucleoni. Si ha dunque che:

$$\frac{A}{V_N} = \frac{3A}{4\pi R^3} = \frac{A}{\frac{4}{3}\pi r_0^3 A} \quad R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad [10.8]$$

Consideriamo uno strato superficiale di spessore  $d$ , dove  $d$  è il diametro di un nucleone. Il volume di questo strato è:

$$\delta V \simeq 4\pi R^2 d \quad [10.9]$$

<sup>1</sup>Questi allegati erano presenti negli appunti originali nello stesso ordine in cui sono presenti qui. Venivano dati direttamente dal professore durante le lezioni.

quindi il numero di nucleoni superficiali è:

$$\delta A = \frac{A}{V_N} \delta V = \frac{A}{V_N} 4\pi R^2 d = \frac{3dA}{R} = \frac{3dA^{\frac{2}{3}}}{r_0} \quad [10.10]$$

L'incremento di massa dovuto ai nucleoni superficiali dunque è:

$$M_2 = \frac{3}{c^2} \frac{U}{2} \delta A = \frac{9}{2} \frac{U d A^{\frac{2}{3}}}{c^2 r_0} \quad [10.11]$$

La quantità  $M_2 c^2$  è chiamata *energia di superficie*:

$$E_{\text{sup}} = M_2 c^2 = \frac{9}{2} \frac{U d A^{\frac{2}{3}}}{r_0}$$

[10.12]

La massa  $M(A, Z)$  risulta quindi:

$$M(A, Z) = M_0(A, Z) - M_1(A) + M_2(A) \quad [10.13]$$

La corrispondente energia di legame del nucleo è:

$$E_L = E_{\text{vol}} - E_{\text{sup}} \quad [10.14]$$

### 10.1.3 ENERGIA COULOMBIANA DEL NUCLEO

$E_L$  è in realtà più piccola a causa della forza repulsiva che esercitano tra loro i  $Z$  protoni. Supponiamo che il nucleo abbia forma sferica con raggio  $R$  e che i protoni siano distribuiti in maniera uniforme. Sotto queste ipotesi si ha:

$$\rho_c = Ze \frac{3}{4\pi R^3} \quad R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad [10.15]$$

Consideriamo una sfera concentrica al nucleo ma con raggio  $r < R$ . La carica contenuta in questa sfera è:

$$Q(r) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c \quad [10.16]$$

con il teorema di Gauss è possibile calcolare il campo elettrico ed il potenziale presenti sulla superficie della sfera di raggio  $r$ . Se aggiungiamo alla sfera di raggio  $r$  uno strato di spessore  $dr$  si ha un incremento di energia pari a:

$$dE_c(r) = Q(r) \frac{dQ}{r} = \frac{16}{3} \pi^2 \rho_c^2 r^4 dr \quad [10.17]$$

02-02-1998

ed integrando tra 0 e  $R$  si ottiene l'*energia totale coulombiana*:

$$E_c = \int_0^R dE_c(r) = \frac{16}{15} \pi^2 \rho_c^2 R^5 = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{r_0 A^{\frac{1}{3}}} \quad [10.18]$$

A questo termine di energia corrisponde un incremento di massa:

$$M_3 = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2}{c^2 r_0 A^{\frac{1}{3}}} \quad [10.19]$$

e a questo successivo livello di approssimazione la massa del nucleo diventa:

$$M(A, Z) = M_0(A, Z) - M_1(A) + M_2(A) + M_3(A, Z) \quad [10.20]$$

e l'energia di legame si può scrivere come:

$$E_L = E_{\text{vol}} - E_{\text{sup}} - E_c \quad [10.21]$$

#### 10.1.4 TERMINE ENERGETICO DI SIMMETRIA

$E_c$  diminuisce rapidamente al diminuire di  $Z$ . Dal punto di vista sperimentale si nota che i nuclei stabili contengono un numero di neutroni  $N$  maggiore di  $Z$ . Al diminuire di  $Z$  si osserva che  $N$  tende a  $Z$ . Più precisamente<sup>2</sup>:

$$A < 36 \Rightarrow N \approx Z \quad A > 36 \Rightarrow N > Z \quad [10.22]$$

Questa tendenza dei nuclei stabili porta a dover fare due considerazioni:

L'eccesso di neutroni nei nuclei con  $A > 36$  si può ricollegare alla repulsione elettrostatica. L'aumento del numero di neutroni riduce infatti il valore di  $E_L$  a parità di  $A$ . La maggiore stabilità di un nucleo implica un minimo di energia, motivo per cui i nuclei tendono ad aumentare il numero di neutroni al crescere di  $A$ .

In assenza di repulsione elettrostatica, l'energia di un nucleo risulterebbe minima per  $N = Z = \frac{A}{2}$ . Questo spiega il motivo per cui l'eccesso di neutroni nei nuclei stabili è soggetto a saturazione. Se in un nucleo stabile con un eccesso di neutroni si sostituissero alcuni protoni con ulteriori neutroni (mantenendo  $A$  fisso) l'energia non diminuirebbe ma tenderebbe piuttosto ad aumentare (al crescere di  $N$ ,  $E_c$  diminuisce ma  $E_L$  aumenta). Si può dimostrare che se si ha uno stato legato con due tipi di fermioni, l'energia è minima quando viene minimizzato il numero complessivo di coppie di fermioni identici. Questo perchè i fermioni identici interagiscono tramite forze di scambio che tendono ad aumentarne l'energia.

Per tenere conto di questa ulteriore diminuzione di  $E_L$ , a seconda della quantità di neutroni presenti bisogna considerare il *termine di simmetria* aggiuntivo:

$$E_{\text{simm}} = \alpha_{\text{simm}} A \left[ \frac{\left( \frac{A}{2} \right) - Z}{A} \right]^2 c^2 \quad [10.23]$$

<sup>2</sup>Eh... più preciso di così si muore. [NdT]

è questa l'energia che aumenta più di quanto diminuisca  $E_c$  (al crescere di  $N$ ). Il termine raccolto entro le parentesi rappresenta la percentuale di neutroni in eccesso. Questo termine può essere considerato classicamente (a parità di percentuale deve essere proporzionale ad  $A$ , mentre a parità di  $A$  deve aumentare con il crescere della percentuale di neutroni in eccesso). La proporzionalità ad  $A$  di questo termine è legata all'incomprimibilità del nucleo in quanto la densità di energia  $\frac{E_{\text{simm}}}{V}$  deve risultare costante. Il corrispondente incremento di massa è:

$$M_4(A, Z) = \alpha_{\text{simm}} A \left[ \frac{\left(\frac{A}{2}\right) - Z}{A} \right]^2 = \alpha_{\text{simm}} \frac{\left[\left(\frac{A}{2} - Z\right)\right]^2}{A} \quad [10.24]$$

e le correzioni:

$$\begin{aligned} M(A, Z) &= M_0(A, Z) - M_1(A) + M_2(A) + M_3(A, Z) + M_4(A, Z) \\ E_L &= E_{\text{vol}} - E_{\text{sup}} - E_c - E_{\text{simm}} \end{aligned} \quad [10.25]$$

### 10.1.5 TERMINI CORRETTIVI Sperimentali e formula di Weizsäcker

Vi è un'ultima correzione da fare legata alla verifica sperimentale che vi è una maggiore abbondanza di nuclei stabili con un numero di protoni e neutroni entrambi pari piuttosto che quando sono entrambi dispari (per valori di  $A$  fissati). Questa condizione riguarda soltanto i nuclei con valori di  $A$  pari.

Il termine di massa correttivo si ricava sperimentalmente, ed esso è pari a:

$$M_S = \begin{cases} \frac{\delta}{\sqrt{A}} = -\frac{K}{\sqrt{A}} & A \text{ pari, } Z \text{ pari} \\ \frac{\delta}{\sqrt{A}} = 0 & A \text{ pari, } Z \text{ dispari} \\ \frac{\delta}{\sqrt{A}} = +\frac{K}{\sqrt{A}} & A \text{ dispari, } Z \text{ dispari} \end{cases} \quad [10.26]$$

Mettendo insieme tutti i risultati ottenuti si conclude che nel modello a goccia di liquido la massa può essere calcolata tramite la formula semi-empirica, chiamata *formula di Weizsäcker*:

$$\begin{aligned} M(A, Z) &= M_0(A, Z) - M_1(A) + M_2(A) + M_3(A, Z) + M_4(A, Z) + M_5(A) = \\ &= [m_p Z + m_N(A - Z)] - \alpha_{\text{vol}} A + \alpha_{\text{sup}} A^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{5} \alpha_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \alpha_{\text{simm}} \frac{\left[\left(\frac{A}{2} - Z\right)\right]^2}{A} + \frac{\delta}{A^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad [10.27]$$

I coefficienti  $\alpha$  non possono essere ricavati da alcuna teoria generale che mostri accordo con i valori sperimentali (!). Dei valori frequentemente usati sono, ad esempio:

$$\alpha_{\text{vol}} = 15.67 \quad \alpha_{\text{sup}} = 17.23 \quad \frac{3}{5} \alpha_c = 0.70 \quad \alpha_{\text{simm}} = 93.15 \quad \delta = 1.2 \quad [10.28]$$

Con questi valori si ottiene in genere una precisione media di  $2 \text{ MeV}/C^2$  che è un ottimo risultato. Il limite di questo modello è quello di ottenere però soltanto risultati medi. I primi tre termini  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  hanno un analogo per la formula di una goccia di liquido.

Si può ricavare il valore di  $Z$  per cui si ha il minimo della massa per una serie di isobari con un dato  $A$ , utilizzando la condizione  $\frac{\partial M}{\partial Z} = 0$ . Si arriva alla formula:

$$\frac{6}{5} \alpha_c \frac{Z}{A^{\frac{1}{3}}} - 2 \frac{\alpha_{\text{simm}}}{A} \left( \frac{A}{2} - Z \right) - (m_N - m_P) = 0 \quad [10.29]$$

Questa equazione riproduce la cosiddetta *curva di Segre* che restituisce la funzione  $Z - N$ . (vedere 190)

### 10.1.6 ENERGIA DI FISSIONE

04-02-1998

Un'altra applicazione della formula delle masse nucleari è il calcolo dell'energia in un processo di fissione. In un processo del genere i frammenti di nucleo che si producono sono altamente instabili e quindi non se ne può misurare direttamente la massa. Possiamo schematizzare il processo di fissione considerando un nucleo a riposo di massa  $M(A, Z)$  che si scinde in due frammenti uguali di massa  $M(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2})$ , cioè:

$$M(A, Z) \rightarrow M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) + M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) \quad [10.30]$$

l'energia associata a questo processo è definita *energia di fissione* e si può scrivere come:

$$E_F = \left[ M(A, Z) - 2M\left(\frac{A}{2}, \frac{Z}{2}\right) \right] c^2$$

[10.31]

Dall'espressione di  $M(A, Z)$  si trova che  $E_F$  risulta positiva per  $A \geq 90$ . Questo implica che nuclei con  $A > 90$  non dovrebbero risultare stabili. Consideriamo infatti un nucleo di Urano  $^{236}U$ , l'energia di fissione è  $E_F \simeq 184 \text{ MeV}$ .

Il modello a goccia di liquido riesce a spiegare anche perché molti di questi nuclei pesanti non subiscono una fissione spontanea ma sono sensibili soltanto a fissione indotta (bombardamento). Secondo questo modello infatti, un nucleo che subisce una fissione equivale ad una goccia di liquido che viene forzata a scindersi dal resto delle molecole di liquido. Questa analogia si spiega considerando un nucleo soggetto ad una piccola deformazione, tale che la forma non sia più sferica ma si abbia un  $R'(\theta) = Rf(\theta)$  dove  $R$  rappresenta il raggio iniziale. Espandendo la funzione  $f(\theta)$  in serie di polinomi di Legendre:

$$f(\theta) = 1 + \alpha_1 P_1(\cos \theta) + \alpha_2 P_2(\cos \theta) + \alpha_3 P_3(\cos \theta) + \dots \quad [10.32]$$

dove si ha:

$$\begin{aligned} P_1(\cos \theta) &= \cos \theta \\ P_2(\cos \theta) &= \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ P_3(\cos \theta) &= \frac{1}{2} (5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \\ &\dots \end{aligned} \quad [10.33]$$

e supponiamo che la deformazione mantenga la simmetria per inversione spaziale, cioè deve valere:

$$f(\pi - \theta) = f(\theta) \quad [10.34]$$

Sotto queste ipotesi si ha che  $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_{2n+1} = 0$  e la deformazione più semplice con queste caratteristiche è:

$$f(\theta) = 1 + \alpha_2 P_2(\cos \theta) \quad [10.35]$$

La condizione di incompressibilità richiede che il volume nucleare debba rimanere invariato. Quindi questa deformazione può cambiare soltanto l'energia di superficie ed il termine coulombiano, in quanto non può influenzare l'energia di volume e quella di simmetria i cui valori dipendono soltanto dal volume complessivo. Se si trascurano i termini di ordine superiore a  $\alpha_2^2$  si ottiene che:

$$\boxed{\delta E = \delta E_{\text{sup}} + \delta E_c = (2E_{\text{sup}} - E_c) \frac{\alpha_2^2}{5}} \quad [10.36]$$

dove  $E_{\text{sup}}$  e  $E_c$  sono i valori di energia in assenza di distorsione. Questo termine  $\delta E$  si può interpretare come un'energia potenziale di distorsione. In particolare si ha che:

$$\begin{array}{ll} \delta E > 0 & \text{se } 2E_{\text{sup}} > E_c \\ \delta E < 0 & \text{se } 2E_{\text{sup}} < E_c \end{array} \quad [10.37]$$

Nel primo caso il nucleo risulterà stabile per piccole deformazioni, nel secondo caso il nucleo sarà completamente instabile ed esso continuerà a deformarsi sempre di più fino a frammentarsi. La situazione di confine tra questi due casi si ha quando  $2E_{\text{sup}} = E_c$ , questa condizione implica che:

$$2a_{\text{sup}} A^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{5} a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \quad [10.38]$$

e questa condizione si verifica quando:

$$\frac{Z^2}{A} = \left( \frac{Z^2}{A} \right)_{\text{limite}} = \frac{2a_{\text{sup}}}{\frac{3}{5} a_c} \simeq 49 \quad [10.39]$$

quindi se  $\frac{Z^2}{A} < 49$  il nucleo risulterà stabile per piccole deformazioni e quindi non potrà subire processi di fissione spontanea. Si può verificare che la dipendenza di  $\delta E$  dal fattore  $2E_{\text{sup}} - E_c$

non dipende dalla particolare deformazione considerata:

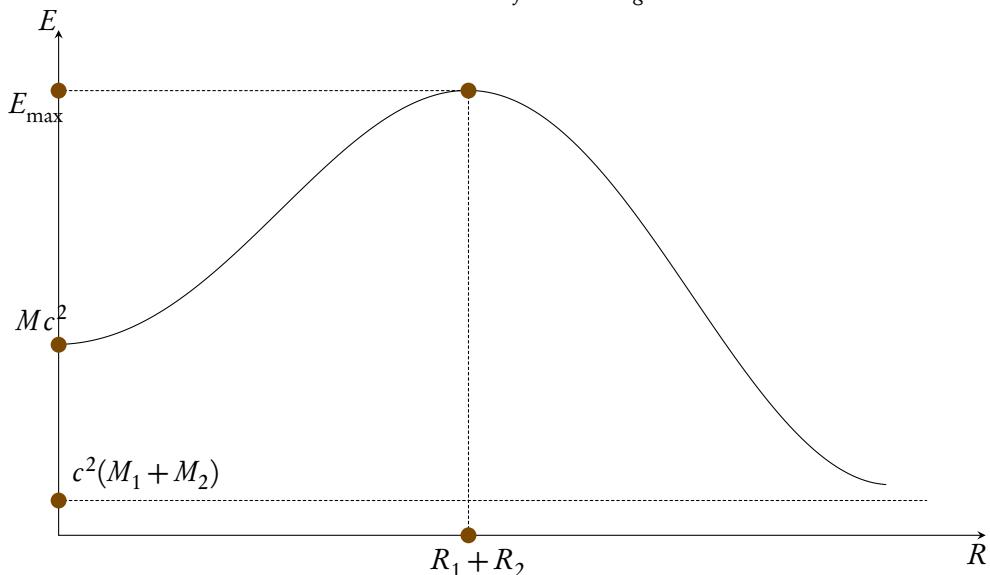
$$\eta = \frac{\frac{Z^2}{A}}{\left(\frac{Z^2}{A}\right)_{\text{limite}}} \Rightarrow \begin{cases} \eta < 1 & \text{Non soggetto a fissione spontanea} \\ \eta > 1 & \text{Soggetto a fissione spontanea} \end{cases} \quad [10.40]$$

Si vede che quasi tutti i nuclei fissi non superano il valore  $\eta = 1$ . Ad esempio, per il nucleo di  $^{236}U$  si ha:

$$\frac{Z^2}{A} \simeq 36 \quad \eta \simeq 0.73 \quad [10.41]$$

Nel caso generale di fissione non spontanea possiamo considerare i due frammenti e fare un grafico dell'energia dei due frammenti (a riposo) in funzione della distanza dai loro centri. Si ottiene il seguente andamento:  $M$  è la massa del nucleo fissile,  $M_1, M_2, R_1$  e  $R_2$  sono le masse

**FIGURA 10.1:** Grafico dell'energia.



e i raggi finali dei due frammenti. L'andamento per  $r > R_1 + R_2$  è una iperbole che è dovuta soltanto all'energia potenziale coulombiana tra i due frammenti. (vedere 191, 192 e 193)

### 10.1.7 ENERGIA DI ATTIVAZIONE

Introduciamo l'*energia di attivazione* definita come:

$$\Delta E = E_{\max} - Mc^2 \quad [10.42]$$

questa è l'energia di soglia che è necessario fornire dall'esterno affinchè avvenga la fissione. Per calcolare  $\Delta E$  il modello a goccia di liquido risulta ancora utile. (vedere 194)

## 10.2 MODELLO A STRATI

### 10.2.1 NUMERI MAGICI

Il modello a goccia di liquido non va bene per nuclei con  $A \leq 10$ . Questo perché il modello ha una impostazione di carattere statistico. In più, per certi valori di  $A$  e di  $Z$  si osservano sperimentalmente grosse discontinuità mentre il modello studiato ha un andamento pressoché continuo. Queste discontinuità si riscontrano quando  $Z$  e  $A - Z$  hanno valori vicini ai numeri:

$$2, 8, 20, 28, 50, 82, 126 \quad [10.43]$$

Questi vengono detti *numeri magici* e i nuclei che hanno un numero di protoni o neutroni pari a uno di questi numeri si dicono *nuclei magici* (doppiamente magici quelli con  $Z$  e  $A - Z$  entrambi magici).

Nei nuclei immediatamente successivi a quelli magici l' $n + 1$ -esimo nucleone è molto poco legato al nucleo. Supponiamo che sia  $E_L(N, Z)$  l'energia di legame di un nucleo. Se vi è un ulteriore neutrone o protone si osserva che l'energia con cui essi sono legati è:

$$\begin{aligned} U_N &= E_L(N+1, Z) - E_L(N, Z) \\ U_Z &= E_L(N, Z+1) - E_L(N, Z) \end{aligned} \quad [10.44]$$

nei nuclei magici questa energia è notevolmente minore rispetto agli altri nuclei. L'energia media di legame tra due nucleoni è:

$$U = \frac{15.67}{6} \text{ MeV} \simeq 2.6 \text{ MeV} \quad [10.45]$$

mentre nei nuclei magici si osserva una diminuzione di circa 2 MeV. Il più grande esempio di discontinuità è il nucleo doppiamente magico di  $He$ , infatti si ha:

$$\begin{aligned} U_N &= E_L(2, 2) - E_L(1, 2) \simeq 20 \text{ MeV} \\ U_Z &= E_L(3, 2) - E_L(2, 2) \simeq 7 \text{ MeV} \end{aligned} \quad [10.46]$$

Quanto più grande è il numero magico, tanto minore è la discontinuità. Ovviamente queste considerazioni rimangono valide anche per la massa dei nuclei.

Un caso di notevole interesse si osserva per il numero magico di 126 neutroni. Indichiamo il nucleo con  $\mathcal{N}(126, Z)$  e ne consideriamo il decadimento, cioè:

$$\mathcal{N}(126, Z) \rightarrow \mathcal{N}(124, Z - 2) + \alpha \quad [10.47]$$

e facciamo un confronto con il decadimento  $\alpha$  del nucleo  $\mathcal{N}(128, Z')$

$$\mathcal{N}(128, Z') \rightarrow \mathcal{N}(128, Z' - 2) + \alpha \quad [10.48]$$

Si trova sperimentalmente che i due neutroni espulsi nel secondo decadimento hanno una energia cinetica molto più grande di quelli espulsi nel primo decadimento. Quindi il  $127^\circ$  e il

$128^\circ$  neutrone hanno un'energia di legame molto più bassa. Da tutto questo si deduce che i nuclei magici sono molto più stabili, fatto riscontrato sperimentalmente.

Una conferma della loro stabilità è dato dalla sezione d'urto di cattura dei neutroni. La sezione d'urto è infatti molto più piccola rispetto a quella dei nuclei non magici. Tutte queste proprietà ricordano quelle degli atomi dei gas nobili, in cui si usa un modello a strati per spiegarne le proprietà.

Si formula quindi un analogo *modello a strati* per i nuclei. La validità di un tale modello è confermata dal fatto che anche i nuclei possono trovarsi in stati eccitati dai quali decadono emettendo radiazione  $\gamma$ . Il modello a strati si differenzia notevolmente da quello a goccia di liquido, ogni nucleone occupa infatti un ben preciso orbitale diverso da quello degli altri. Si riscontrano però delle serie difficoltà nel calcolo del campo centrale, infatti nei nuclei non si ha alcun campo centrale. Per superare questa difficoltà si ipotizza che tutti i nucleoni generino una buca di potenziale media entro cui ciascun nucleone, in prima approssimazione, si muova indipendentemente dagli altri (il modello si dice anche *Modello a particelle indipendenti*).

### 10.2.2 HAMILTONIANA DEL NUCLEO E SPIN-ORBITA

Scriviamo l'Hamiltoniana del nucleo come:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^A T_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^A \sum_{i \neq k} \varphi_{ik}(\vec{r}_{ik}) \quad [10.49]$$

Sia  $\vec{r}_i$  il vettore posizione dell'i-esimo nucleone rispetto al centro del nucleo, allora si può formalmente porre:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^A \sum_{i \neq k} \varphi_{ik}(\vec{r}_{ik}) = \sum_{i=1}^A \varphi_0(\vec{r}_i) + \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^A \sum_{i \neq k} \varphi_{ik}(\vec{r}_{ik}) - \sum_{i=1}^A \varphi_0(\vec{r}_i) \right] \quad [10.50]$$

Per trattare il nucleo quindi come un insieme di particelle indipendenti che si muovono in un campo centrale si deve trovare il potenziale  $\varphi_0$  in modo che l'ultimo addendo nella formula di sopra sia trascurabile.  $\varphi_0$  è chiamato *potenziale fittizio*. In più  $\varphi_0$  deve essere tale da riprodurre la distribuzione di massa che è poi quella che genera  $\varphi_0$ .

Dal momento che le interazioni sono a corto raggio si può prevedere che l'andamento di  $\varphi_0$  in funzione di  $r$  deve essere analogo alla dipendenza di  $r$  dalla densità di massa nucleare. Seguendo questo criterio e assumendo che la densità di massa abbia simmetria sferica si può porre:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^A \mathcal{H}_i = \sum_{i=1}^A [T_i + \varphi_0(r_i)] \quad [10.51]$$

dove  $\varphi_0(r)$  è adesso un potenziale centrale. Si troveranno così dei livelli di energia con autovalori  $E(n, l)$  con una certa degenerazione. Opportune scelte di  $\varphi_0$  consentono di spiegare alcuni numeri magici. Ad esempio, per  $n = 0$  si ha un livello che può contenere al massimo

due nucleoni identici, per  $n = 1$  e  $n = 2$  si possono avere al massimo 6 o 12 nucleoni identici. Così si spiegano i numeri magici 2, 8 e 20.

Questo risultato tuttavia va bene soltanto per i primi nuclei magici, e si ha che per come è stata definita  $\mathcal{H}$  non si può più riprodurre tutta la serie dei numeri magici. Si deve introdurre nell'Hamiltoniana di ogni nucleone il termine:

$$\varphi_S(r) \vec{l} \cdot \vec{s} \quad \text{con } \varphi_S(r) = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2}{r} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \quad [10.52]$$

dove  $\lambda$  è una costante con le dimensioni di una lunghezza.

Questo termine è chiamato anche *termine di interazione spin-orbita* in quanto è analogo a quello per l'elettrone. Con l'aggiunta di questo termine l'Hamiltoniana totale diventa:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^A \mathcal{H}_i = \sum_{i=1}^A \left[ T_i + \varphi_0(r_i) + \varphi_S(r) \vec{l}_i \cdot \vec{s}_i \right] \quad [10.53]$$

il modello rimane a particelle indipendenti (vedere 195).

### 10.2.3 INTERAZIONE DI APPAIAMENTO

Per definizione si ha:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad [10.54]$$

e l'energia del singolo nucleone dipenderà adesso anche da  $J$ , cioè:

$$E = E(n, l, j) \quad [10.55]$$

il singolo sottolivello si scinde in due, cioè:

$$E(n, l) \begin{cases} E(n, l, j = l + \frac{1}{2}) \\ E(n, l, j = l - \frac{1}{2}) \end{cases} \quad [10.56]$$

ciascuno di questi due sottolivelli può contenere al massimo  $2j+1$  nucleoni identici. Valutiamo le variazioni di energia  $\Delta E$ :

$$\Delta E = E(n, l, j) - E(n, l) \quad [10.57]$$

in base alla formula di Landè si può scrivere:

$$\begin{aligned} \Delta E &\propto \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \frac{1}{2} \hbar^2 = \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \left[ j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] \end{aligned} \quad [10.58]$$

Da questa espressione si può dedurre che:

$$\Delta E \propto \begin{cases} -(l-1) & (j = l - \frac{1}{2}) \\ l & (j = l + \frac{1}{2}) \end{cases} \quad [10.59]$$

e dalle costanti si ha:

$$\begin{aligned} \Delta E > 0 & \quad \text{per } j = l - \frac{1}{2} \\ \Delta E < 0 & \quad \text{per } j = l + \frac{1}{2} \end{aligned} \quad [10.60]$$

quindi si ha un'energia maggiore quando  $j$  è più piccolo.

Gli strati più influenzati sono quelli con  $n \geq 3$ . Ogni strato si scinde in due, quello più basso va a cadere nello strato inferiore mentre quello più alto rimane nel suo strato. Le energie che caratterizzano i vari strati variano al variare del nucleo. In più differiscono anche all'interno di uno stesso nucleo a seconda che si parli di protoni o di neutroni (l'energia dei protoni risulterà un po' più alta per via della repulsione elettrostatica). Dal modello a strati si possono trarre informazioni sullo spin. In un sottolivello completo, per il principio di Pauli si ha un momento totale di spin nullo. Quindi lo spin totale del nucleo è dato solo dai nucleoni esterni. Questo spiega perché i nuclei con un numero pari di protoni e neutroni hanno spin nullo, in quanto  $2j + 1$  è pari, e quindi se il livello è completo il numero di nucleoni di quel sottolivello è sicuramente pari.

Vediamo adesso perchè anche se il livello non è completo, ma con un numero pari di protoni o neutroni, lo spin totale è nullo. A questo proposito si deve considerare nell'Hamiltoniana il termine di interazione:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^A \sum_{i \neq k} \varphi_{ik}(\vec{r}_{ik}) = \sum_{i=1}^A \varphi_0(\vec{r}_i) + \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^A \sum_{i \neq k} \varphi_{ik}(\vec{r}_{ik}) - \sum_{i=1}^A \varphi_0(\vec{r}_i) \right] \quad [10.61]$$

fino ad ora abbiamo trascurato il termine tra parentesi:

$$\mathcal{H}_{\text{res}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^A \sum_{i \neq k} \varphi_{ik}(\vec{r}_{ik}) - \sum_{i=1}^A \varphi_0(\vec{r}_i) \quad [10.62]$$

di questa, il contributo principale è dato dall'interazione a due a due dei momenti angolari totali, cioè dai termini dell'*interazione di appaiamento*:

$$\alpha_j J_1 J_2 \quad [10.63]$$

questo termine implica che i nucleoni non sono più particelle indipendenti, quindi  $J_i$  non si conserva più. Ciascuna coppia di nucleoni interagenti si trova in un autostato del momento angolare totale con autovalore  $0 \leq J_{\text{tot}} \leq 2J$ . La configurazione a più bassa energia è quella per  $j = 0$  con  $\alpha_j > 0$ . Si ha che:

$$\langle \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{J}_{\text{tot}}^2 - \vec{J}_1^2 - \vec{J}_2^2 \rangle = \frac{1}{2} \hbar^2 [j_{\text{tot}}(j_{\text{tot}} + 1) - 2j(j + 1)] \quad [10.64]$$

Da questa si vede che per  $\alpha_j > 0$  il minimo di  $E$  si ha per  $J_{\text{tot}} = 0$ .

I nuclei con un numero pari di protoni e neutroni hanno quindi una massa (e dunque un'energia) leggermente inferiore rispetto ai corrispondenti nuclei isobari dispari-dispari. Questo spiega l'origine del termine empirico  $M_S$ . Una conseguenza dell'interazione di appaiamento è che se in un sottolivello si ha un numero dispari di nucleoni, il momento angolare totale di spin coincide con quello di un nucleone. Quindi se un nucleo ha massa dispari, il suo spin è uguale a quello del nucleone spaiato. Questa previsione è confermata sperimentalmente ad eccezione di due casi. Da questa regola si traggono informazioni sul momento magnetico nucleare, ossia riguardo al fatto che nei nuclei con massa dispari il momento magnetico coincide con quello del nucleone spaiato.

## 10.3 MODELLO COLLETTIVO

### 10.3.1 ASIMMETRIA DEL NUCLEO

Il modello a strati funziona bene per nuclei con strati completi o con solo 1 o 2 nucleoni addizionali. Quando gli strati sono completi, lo spin è zero e si ha simmetria centrale, quindi pieno accordo con l'ipotesi di campo centrale. L'aggiunta di qualche nucleone provoca piccole deviazioni dal campo centrale. Quando però un livello è riempito a metà si hanno deviazioni grandi rispetto all'ipotesi di campo centrale. Un modello che tiene conto di questa asimmetria è il *modello collettivo*. Questo ragionamento evidenzia come il modello a strati sia efficace fintanto che si abbia una certa simmetria sferica.

# 11

## DECADIMENTI NUCLEARI

### 11.1 DECADIMENTO

Molti elementi in natura sono caratterizzati da atomi non stabili.

Di solito una sostanza radioattiva decade in un'altra, anch'essa radioattiva. In questo caso si dice che le due sostanze sono in *relazione genetica* (sostanza madre e sostanza figlia). Quando si hanno catene di sostanze radioattive si parla di *famiglie*.

Consideriamo una miscela di due sostanze in relazione genetica (1=madre, 2=figlia). Siano  $N_1(0)$  e  $N_2(0)$  i numeri di atomi a  $t = 0$ . Ci si chiede quali siano i valori  $N_1(t)$  e  $N_2(t)$ .

Sappiamo che per la sostanza 1 vale la legge

$$dN_1 = -N_1(t)\lambda_1 dt. \quad [11.1]$$

Ciascun atomo che decade si trasforma nella sostanza 2. Quindi le variazioni della sostanza 2 sono dovute a due effetti opposti:

$$dN_2 = \lambda_1 N_1(t)dt - \lambda_2 N_2(t)dt. \quad [11.2]$$

Supponiamo che sia  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Per trovare le funzioni  $N_1(t)$  e  $N_2(t)$  procediamo per tentativi considerando le due funzioni

$$N_1(t) = A_{11}e^{-\lambda_1 t} \quad N_2(t) = A_{21}e^{-\lambda_1 t} + A_{22}e^{-\lambda_2 t} \quad [11.3]$$

Per le condizioni iniziali deve essere:

$$N_1(0) = A_{11} \quad N_2(0) = A_{21} + A_{22}$$

Per determinare  $A_{21}$  e  $A_{22}$  sostituiamo le due funzioni [11.3] nell'equazione differenziale per  $N_2$  ([11.2]). Si ottiene che:

$$\begin{aligned} dN_2 &= \lambda_1 A_{11}e^{-\lambda_1 t}dt - \lambda_2[A_{21}e^{-\lambda_1 t} + A_{22}e^{-\lambda_2 t}]dt = \\ &= [(\lambda_1 A_{11} - \lambda_2 A_{21})e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 A_{22}e^{-\lambda_2 t}]dt \end{aligned}$$

Questo deve essere egualato all'espressione:

$$dN_2 = [-\lambda_1 A_{21} e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 A_{22} e^{-\lambda_2 t}] dt$$

$N_2$  è soluzione se e solo se:

$$-\lambda_1 A_{21} = \lambda_1 A_{11} - \lambda_2 A_{21} \Rightarrow A_{21} = A_{11} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Quindi le due espressioni per  $N_1$  e  $N_2$  in questo caso sono: 11-2-1998

$$N_1(t) = N_1(0) e^{-\lambda_1 t} \quad [11.4]$$

$$N_2(t) = N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + [N_2(0) - N_1(0) \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}] e^{-\lambda_2 t} \quad [11.5]$$

## 11.2 DECADIMENTO DUALE

Consideriamo ora il caso in cui una sostanza madre ha più sostanze figlie. In questo caso si ha cioè più di un canale di decadimento e ciascun canale sarà caratterizzato da un particolare meccanismo dinamico, che per lo più si identifica con l'emissione  $\alpha$  o  $\beta$ .

In questo caso si parla di *decadimento duale* o *diramazione*. Consideriamo per esempio un atomo caratterizzato da un decadimento duale con emissioni  $\alpha$  e  $\beta$ ; siano  $\lambda_\alpha$  e  $\lambda_\beta$  le corrispondenti costanti di disintegrazione. Le equazioni che regolano questi due processi sono:

$$-dN_\alpha(t) = N(t) \lambda_\alpha dt^1 \quad [11.6]$$

$$-dN_\beta(t) = N(t) \lambda_\beta dt^2 \quad [11.7]$$

Il numero totale di atomi che si disintegrano risulta dunque:

$$-dN(t) = -dN_\alpha(t) - dN_\beta(t) = N(t) [\lambda_\alpha + \lambda_\beta] dt \quad [11.8]$$

Quindi  $\lambda_\alpha + \lambda_\beta$  è la costante di disintegrazione totale. Si definiscono i *rapporti di diramazione*:

$$R_\alpha = \frac{dN_\alpha(t)}{dN(t)} = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} \quad [11.9]$$

$$R_\beta = \frac{dN_\beta(t)}{dN(t)} = \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta} \quad [11.10]$$

$R_\alpha$  dà la percentuale di decadimento  $\alpha$ ,  $R_\beta$  la probabilità di decadimento  $\beta$ .

Se escludiamo la fissione spontanea, che comunque è un processo abbastanza raro, i decadimenti radioattivi naturali sono essenzialmente tre:  $\alpha, \beta, \gamma$ . Questi tre tipi di decadimento si identificano in realtà con ben determinate trasformazioni spontanee dei nuclei atomici.

<sup>1</sup>Numero di atomi che si disintegrano nell'intervallo di tempo  $dt$  per emissione  $\alpha$

<sup>2</sup>Numero di atomi che si disintegrano nell'intervallo di tempo  $dt$  per emissione  $\beta$

### 11.3 DECADIMENTO $\alpha$

Quando un atomo emette una particella  $\alpha$  il nucleo subisce la trasformazione:

$$\mathcal{N}(A, Z) \rightarrow \mathcal{N}(A - 4, Z - 2) + \alpha. \quad [11.11]$$

La condizione che dev'essere verificata affinché questo decadimento possa avvenire spontaneamente è che la massa iniziale del nucleo deve risultare maggiore della somma delle masse delle particelle finali. Questa condizione corrisponde ad una diminuzione dell'energia del sistema, infatti se ci si pone in un sistema di riferimento in cui il nucleo iniziale è a riposo, il decadimento può avvenire solo se viene liberata una certa energia cinetica, cioè:

$$E_d = M(A, Z)c^2 - [M(A - 4, Z - 2) + m_\alpha]c^2 > 0; \quad [11.12]$$

questa quantità si dice *energia di decadimento*. Se si utilizza la formula semiempirica delle masse nucleari, considerato che la massa della particella  $\alpha$  è  $m_\alpha \simeq \frac{3728}{c^2} \text{ MeV}$ , si trova che l'energia di decadimento  $E_d$  risulta positiva solo se  $A < 150$ . Questa previsione risulta in perfetto accordo con i dati sperimentali. Si deve anche notare che la relativa facilità con cui un decadimento  $\alpha$  avviene è dovuta al fatto che la particella  $\alpha$  ha un difetto di massa piuttosto grande ( $\simeq 28,3/c^2 \text{ MeV}$ ); questo fatto favorisce il decadimento  $\alpha$  da un punto di vista energetico.

Sperimentalmente si trova che l'energia cinetica  $T_\alpha$  con cui viene emessa la particella  $\alpha$  assume valori all'interno dell'intervallo  $4 \text{ MeV} \lesssim T_\alpha \lesssim 9 \text{ MeV}$ .

Questo implica che:

$$\frac{T_\alpha}{m_\alpha c^2} < \frac{1}{800} = 1,25\%$$

e quindi è una buona approssimazione considerare il moto della particella  $\alpha$  nel limite non relativistico:

$$T_\alpha = \frac{p^2}{2m_\alpha}$$

$$E_d = \frac{p^2}{2m_\alpha} + \frac{p^2}{2M(A - 4, Z - 2)} = \quad [11.13]$$

$$\frac{p^2}{2} \frac{m_\alpha + M(A - 4, Z - 2)}{m_\alpha M(A - 4, Z - 2)} = T_\alpha \frac{m_\alpha + M(A - 4, Z - 2)}{M(A - 4, Z - 2)} \quad [11.14]$$

Per nuclei sufficientemente pesanti si può trascurare l'energia cinetica del nucleo prodotto dal decadimento.

In contrasto con la modesta variabilità di  $T_\alpha$  si riscontra sperimentalmente una grande varietà di tempi di vita media. Questi tempi infatti variano da un ordine di grandezza minimo di  $10^{-7} \text{ s}$  ( $Po^{212}$ , polonio), fino a un ordine di grandezza massimo di  $10^{10}$  anni ( $Th^{232}$ , torio). Il primo caso corrisponde al valore massimo di  $T_\alpha \simeq 9 \text{ MeV}$ , mentre il secondo corrisponde

al valore minimo,  $T_\alpha \simeq 4 \text{ MeV}$ . Nella maggioranza dei casi il tempo di vita media risulta comunque di qualche secondo.

---

§

Abbiamo visto che i due casi estremi per il tempo di vita media e per l'energia della particella  $\alpha$  sono:

$$\begin{array}{lll} Po^{212} & \tau_\alpha \simeq 10^{-7} \text{ s} & T_\alpha \simeq 9 \text{ MeV} \\ Th^{232} & \tau_\alpha \simeq 10^{10} \text{ anni} & T_\alpha \simeq 4 \text{ MeV} \end{array}$$

25-2-1998

Nella maggior parte dei casi si ha  $\tau_\alpha \simeq 1 \text{ s}$ . Se si cerca di trattare il decadimento  $\alpha$  in termini classici si giunge ad un paradosso. Consideriamo il nucleo  $\mathcal{N}(A, Z)$  come se fosse virtualmente composto da un altro nucleo e da una particella  $\alpha$ , cioè:

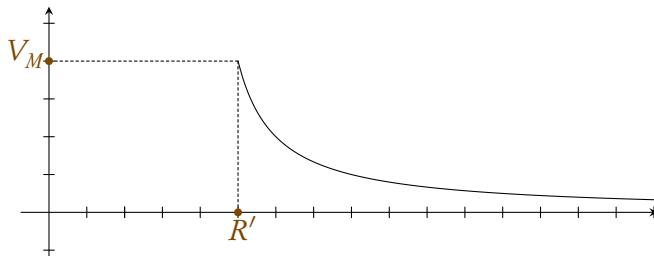
$$\mathcal{N}(A, Z) = \mathcal{N}(A', Z') + \alpha \quad A' = A - 4, Z' = Z - 2$$

Consideriamo l'andamento dell'energia potenziale  $V(r)$  della particella  $\alpha$ , dove  $r$  è la distanza dal nucleo. Se  $R'$  è il raggio del nucleo virtuale si ha che:

$$V(r) = \frac{2Z'e^2}{r} \quad r > R'$$

Per  $r < R'$  si sentono pure le forze nucleari. Per descrivere questo caso possiamo considerare una buca rettangolare di profondità fissata. In questa ipotesi l'andamento di  $V(r)$  è (Figura 11.1):

**FIGURA 11.1:** Potenziale nucleare.



Possiamo supporre nota l'energia totale della particella  $\alpha$  (a grandi distanze l'energia totale si ridurrà a quella cinetica che può essere misurata). Possiamo quindi porre:

$$E = T_\alpha = \frac{1}{2}mv_\alpha^2$$

Per la particella  $\alpha$  è lecito trascurare l'energia a riposo. In termini classici si trova che il tempo di permanenza della particella  $\alpha$  nel nucleo o è molti più breve di quello che è, oppure è infinito, questo a seconda se può essere superata o meno la barriera di potenziale. Se la barriera è sufficientemente bassa, l'emissione dovrebbe avvenire in un tempo:

$$\tau^l < \tau_0 = \frac{2R'}{v_\alpha} = 2R' \sqrt{\frac{m_\alpha}{2T_\alpha}} < 10^{-21} \text{ s} \quad [11.15]$$

questo perchè  $v_\alpha$  è minore della velocità della particella all'interno della buca. Quando l'energia non è tale da poter superare la barriera, allora classicamente l'emissione non può mai avvenire, cioè  $\tau^l = \infty$ . Questo paradosso può essere risolto con l'uso della meccanica quantistica ed in particolare grazie all'effetto tunnel. Cioè se la particella ha una energia  $E = T_\alpha < V_{max}$  vi è una probabilità non nulla che la particella superi la barriera. Sia  $\Delta t$  l'intervallo di tempo che la particella  $\alpha$  impiegherebbe mediamente a superare la barriera. Per il principio di Heisenberg deve essere:

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t} \Rightarrow E = T_\alpha \pm \frac{\Delta E}{2}$$

anche se vale sempre  $\langle E \rangle = T_\alpha$ . Quindi l'attraversamento è possibile se  $\frac{\Delta E}{2} \gtrsim V_{max} - T_\alpha$

$$\frac{\Delta E}{2} \gtrsim V_{max} - T_\alpha$$

Il processo che porta la particella  $\alpha$  al di là della barriera di potenziale viola il principio di conservazione dell'energia. Questo però è un processo virtuale, e non misurabile o osservabile. La grandezza che caratterizza questo processo è il *coefficiente di trasmissione* ( $C_T$ ). Questo dà la possibilità che un singolo urto contro la barriera faccia uscire la particella  $\alpha$ . Affinché il decadimento possa avvenire la particella  $\alpha$  deve urtare in media  $\frac{1}{C_T}$  volte. Quindi l'effettivo tempo di vita media è:

$$\tau = \frac{1}{C_T} \tau_0 \quad C_T \ll 1;$$

da questo si deduce che  $C_T$  deve essere la causa del fatto che sperimentalmente  $\tau \gg \tau_0$ . Affrontiamo il problema in modo più rigoroso: se lo spin del nucleo iniziale è nullo si trova che:

$$C_T = e^{-2G}$$

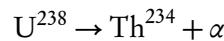
dove

$$G = G(T_\alpha, Z', R') \simeq \frac{2e^2 Z'}{\hbar} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{T_\alpha}} = \frac{4}{\hbar} \sqrt{m_\alpha Z' R'} \quad [11.16]$$

in questo caso si deduce che

$$\tau = \tau_0 e^{2G}$$

La quantità  $e^{2G}$  si dice *fattore di Gamow* (questa è la teoria di Gamow per il decadimento  $\alpha$ ). La dipendenza logaritmica di  $\tau$  da  $T_\alpha$  riproduce abbastanza bene i risultati sperimentali. Per esempio possiamo considerare uno dei casi estremi, cioè il decadimento di  $U^{238}$  nel  $Th^{234}$ , cioè



$T_\alpha \simeq 4,2 \text{ MeV}$ ,  $Z' = 90$ ,  $R' = 1,2 \cdot 234^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ cm} \simeq 7,4 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ . Sostituendo questi dati si trova il risultato

$$2G \simeq 173 - 83 = 90 \Rightarrow C_T = e^{-90} \simeq 10^{-39}$$

Se immaginiamo il nucleo di  $U^{238}$  virtualmente composto dal nucleo di  $Tb^{234}$  e dalla particella  $\alpha$ , si ha che la probabilità che la particella  $\alpha$  quando urta sulla barriera del nucleo del  $Tb^{234}$  la superi, è pari a  $10^{-39}$ . Da questi si deduce che il tempo di vita media è:

$$\tau_0 = C_T \tau \simeq 2 \cdot 10^{-22} \text{ s}$$

dove  $\tau \simeq 2 \cdot 10^{17} \text{ s}$ . Quindi il modello risulta coerente.

Il decadimento  $\alpha$  avviene in generale fra stati fondamentali dei nuclei. Esistono però casi in cui il nucleo finale possa trovarsi in uno o più stati finali. A questi casi corrisponde uno spettro a righe per la particella  $\alpha$ . Supponiamo che il nucleo finale possa trovarsi o nello stato fondamentale  $E_0$ , o negli stati eccitati  $E_1$  e  $E_2$ . In questo caso i valori per l'energia cinetica  $T_\alpha^{(i)}$  sono:

$$\begin{aligned} T_\alpha^{(0)} &= T_\alpha \\ T_\alpha^{(1)} &= T_\alpha - (E_1 - E_0) \\ T_\alpha^{(2)} &= T_\alpha - (E_2 - E_0) \end{aligned}$$

Decadimenti  $\alpha$  di questo tipo hanno una stretta connessione con le radioattività naturali di raggi  $\gamma$ , in quanto un nucleo in uno stato eccitato decade subito nello stato fondamentale con l'emissione di uno o più fotoni  $\gamma$  (decadimento a cascata). L'energia dei fotoni  $\gamma$  è<sup>3</sup>:

$$E_\gamma = c p_\gamma \simeq 10^{-1} \text{ MeV}$$

La corrispondente energia cinetica di rinculo del nucleo è:

$$T_R = \frac{1}{2} \frac{p_R}{M} = \frac{1}{2} \frac{p_\gamma}{M} = \frac{1}{2} \frac{E_\gamma}{Mc^2} \simeq 0,5 \frac{10^{-2}}{10^5} \text{ MeV} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ MeV}$$

dove  $M$  è la massa del nucleo finale,  $p_R$  la quantità di moto del nucleo,  $p_\gamma$  la quantità di moto del fotone. Per il conto si è posto  $M \simeq 100$ <sup>4</sup>. Quindi un nucleo che emette un fotone  $\gamma$  emetterà un'energia di decadimento:

$$E_d = E_\gamma + T_R \simeq E_\gamma$$

quindi l'intera energia di decadimento viene trasportata dal fotone, si ha che:

$$E_\gamma \simeq E_i - E_f$$

dove  $E_i$  e  $E_f$  sono l'energia iniziale e finale del nucleo.

<sup>3</sup>Su questo valore non si è sicuri, nel testo originale è incomprensibile, pag. 100

<sup>4</sup>Si suppone siano 100 UM anche se nel testo originale non c'è scritto.

## 11.4 DECADIMENTO $\beta$

**27-2-1998** Esistono due tipi di emissioni spontanee di tipo  $\beta$ , queste si dicono  $\beta^-$  e  $\beta^+$ . Nel primo caso si ha che:

$$\begin{aligned}\beta^- \quad \mathcal{N}(A, Z) &\rightarrow \mathcal{N}(A, Z+1) + e^- + \bar{\nu} \quad n \rightarrow p^+ \\ \beta^+ \quad \mathcal{N}(A, Z) &\rightarrow \mathcal{N}(A, Z-1) + e^+ + \nu \quad p^+ \rightarrow n\end{aligned}$$

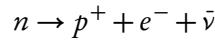
transizioni di questo genere possono avvenire solo fra nuclei isobari. Dal punto di vista energetico questi decadimenti risultano possibili solo se sono soddisfatte le condizioni:

$$E_d^{\beta^\pm} = M(A, Z)c^2 - [M(A, Z \pm 1) + m_e + m_\nu]c^2 > 0$$

dove si considera a riposo il nucleo iniziale. Normalmente si assume  $m_\nu = 0$ , in quanto sperimentalmente si è trovato che:

$$m_\nu < \frac{60}{c^2} \text{ eV} \ll m_e = \frac{0,5}{c^2} \text{ MeV}$$

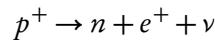
Il decadimento  $\beta^+$  equivale alla trasformazione di un protone in un neutrone, il decadimento  $\beta^-$  alla trasformazione inversa. Il processo:



avviene spontaneamente anche per un neutrone libero in quanto:

$$m_n - m_p \simeq 1,29 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

Il processo inverso



può verificarsi spontaneamente solo all'interno di un nucleo in quanto  $m_p < m_n$ , e non in un protone libero. A questo riguardo ci si può chiedere come mai esistano nuclei isobari per cui:

$$M(A, Z) > M(A, Z-1)$$

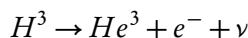
La risposta a questo viene dalla formula per le masse nucleari ed il fatto è che la presenza di un neutrone può fare diminuire l'energia elettrostatica di più di quanto cambierebbe l'energia a riposo se invece si avesse un protone. L'elettrone e il positrone emessi in questi decadimenti mostrano uno spettro continuo di energia, al contrario di quanto avviene nei decadimenti  $\alpha$  e  $\gamma$ . Se si ha un insieme statistico si trova che le energie variano in maniera continua fra un valore minimo ed uno massimo. Questo fu uno dei fatti che portò all'introduzione del neutrino. La natura continua di questi spettri presenta una difficoltà di principio in quanto questi decadimenti corrispondono al passaggio fra due stati ben definiti del nucleo, si ha che l'elettrone e il positrone hanno un'energia che non corrisponde a quella del passaggio di stato

del nucleo tranne quando l'elettrone e il positrone hanno energia massima. Quindi apparentemente manca una parte di energia. L'introduzione del neutrino serve quindi a mantenere valido il principio di conservazione dell'energia. Un altro fatto che suggeriva la presenza del neutrino era pure l'apparente violazione della conservazione del momento angolare.

Per vedere questo consideriamo ad esempio il decadimento del trizio, la cui reazione è:

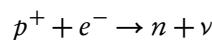


Lo spin iniziale è  $\frac{1}{2}$  mentre lo spin finale è o 0 o 1. Il momento angolare totale iniziale è semintero, mentre quello finale è sicuramente intero. Se si vuole mantenere il principio di conservazione del momento angolare si deve introdurre una particella che deve per forza avere spin 1/2. Quindi il decadimento è:



Quindi si introducono due nuove particelle, neutrino e antineutrino, queste erano considerate differenti per assunzione, ma per simmetria si ipotizzò che fossero una particella e un antiparticella.

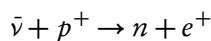
Un'altra emissione spontanea di un neutrino si ha nel *processo di cattura K* in cui un nucleo riesce a catturare l'elettrone che si trova nello stato fondamentale.



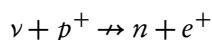
questo processo ovviamente è strettamente legato al decadimento  $\beta$  (nella reazione abbiamo messo un neutrino invece di un antineutrino, col senso di poi). Questa reazione è molto importante in astrofisica nel processo di collasso gravitazionale di una stella, il cui prodotto finale è una stella di neutroni.

#### 11.4.1 ELICITÀ

Il neutrino e l'antineutrino sono fermioni di spin 1/2, elettricamente neutri e con massa nulla. Apparentemente quindi potrebbero essere uguali. Gli esperimenti mostrano però che questi sono diversi. In più viene messa in crisi la simmetria speculare. Questo perché l'antineutrino del decadimento  $\beta^-$  può dar luogo alla reazione:



mentre lo stesso non si può dire per il neutrino, in quanto non è mai stata osservata la reazione:



questo ci garantisce che le due particelle sono distinte. Questo fatto però non rivela in cosa si differenziano. Per scoprire la proprietà che li distingue si deve vedere come i loro spin sono orientati rispetto ai loro impulsi. Quello che si deve misurare è la loro *elicità*, e cioè l'operatore

$$\mathcal{H} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{S}}{|\vec{P}| |\vec{S}|} = \text{elicità}$$

$\vec{p}$  è un vettore polare, mentre  $\vec{S}$  è un vettore assiale. Quindi  $\mathcal{H}$  è una quantità pseudoscalare, cioè cambia segno quando si effettua una inversione spaziale. Quando un insieme statistico di particelle identiche con  $S \neq 0$  si trova in una configurazione che è simmetrica per inversione spaziale si deve avere

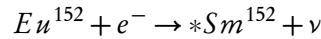
$$\langle \mathcal{H} \rangle = 0$$

per esempio possiamo considerare un insieme statistico di particelle identiche con spin  $1/2$ , quindi i possibili valori per l'elicità sono  $\mathcal{H} = \pm 1$ .

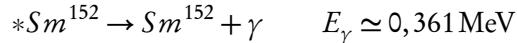
Quello che si trova per il neutrino e l'antineutrino è che non può esistere un sistema simmetrico per inversione spaziale, in quanto il neutrino sembra esistere solo con spin antiparallelo a  $\vec{p}$ , mentre l'antineutrino con spin parallelo a  $\vec{p}$ . Cioè per il neutrino si ha sempre elicità  $-1$ , per l'antineutrino si ha sempre elicità  $+1$ . Sia al neutrino che all'antineutrino si può associare un verso analogo a quello di una vite, se la direzione di  $\vec{p}$  è quella di avvitamento il neutrino corrisponde a una vite sinistrorsa (avvitamento in senso antiorario), l'antineutrino corrisponde a una vite destrorsa (avvitamento in senso orario).

#### 11.4.2 ELICITÀ DEL NEUTRINO

**2-3-1998** L'esperimento che ha messo in evidenza l'elicità del neutrino fu effettuato nel 1958. Questo si basa sul processo di cattura K. La reazione è:



dove Eu=Europio(Z=63), Sm=Semerio(Z=62). Il nucleo  $Sm^{152}$  viene prodotto nello stato eccitato (per questo si mette l'asterisco), questo poi decade nello stato fondamentale emettendo un fotone  $\gamma$



Sia il nucleo di Eu sia quello di Sm (nello stato fondamentale) hanno spin nullo. Per la conservazione di  $\vec{L}$  il neutrino non può avere momento angolare rispetto al nucleo di Sm (l'ellettrone ha  $l=0$ ). Se sceglieremo l'asse z coincidente con la direzione del fotone  $\gamma$ , possiamo considerare i valori  $m_s$  delle particelle. Per la conservazione del momento angolare deve essere:

$$m_s(e^-) = m_s(\gamma) + m_s(\nu)$$

dove i possibili autovalori sono

$$m_s(e^-) = \pm \frac{1}{2} \quad m_s(\gamma) = \pm 1 \quad m_s(\nu) = \pm \frac{1}{2}$$

si noti che manca il valore  $m_s(\gamma) = 0$  (si veda sezione A.1), questo perché il fotone è una particella particolare che si muove a velocità  $c$ . Il fatto che non possa essere  $m_s(\gamma) = 0$  è associato al fatto che il fotone è un'onda trasversale, e si può dimostrare che i due valori  $m_s(\gamma) \pm 1$  corrispondono alle due polarizzazioni circolari su un piano perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda. Sono possibili dunque solo due casi:

$$\begin{aligned} m_s(e^-) &= +1/2 \Rightarrow m_s(\gamma) = +1; \quad m_s(\nu) = -1/2 \\ m_s(e^-) &= -1/2 \Rightarrow m_s(\gamma) = -1; \quad m_s(\nu) = +1/2 \end{aligned}$$

Quindi l'orientazione dello spin del neutrino è sempre opposta a quella dello spin del fotone  $\gamma$ . Per ricavare l'elicità si deve pure valutare la direzione di  $p_\nu$  rispetto a  $p_\gamma$ . per fare questo si sfrutta il fenomeno della risonanza nucleare. Questo è analogo a quello della risonanza atomica. Consideriamo due nuclei identici

$$N_a(1) \quad N_b(0)$$

dove il primo è nello stato eccitato 1 ed il secondo è nello stato fondamentale. Si avrà risonanza quando il fotone  $\gamma$  emesso nel decadimento del primo nucleo viene assorbito dal secondo. Quindi si ha:

$$\begin{aligned} N_a(1) &\rightarrow N_a(0) + \gamma \\ \gamma + N_b(0) &\rightarrow N_b(1) \rightarrow N_b(0) + \gamma \end{aligned}$$

il  $\gamma$  finale avrà una direzione diversa dal  $\gamma$  iniziale, infatti si parla di *diffusione*. Affinché possa avvenire la risonanza,  $\gamma$  deve avere un ben preciso valore di energia. Se il nucleo  $N_b(0)$  è a riposo si può avere risonanza solo se  $N_a(0)$  sia pure a riposo. Questo perché la radiazione e.m. è invariante per inversione temporale e quindi vi è una simmetria fra emissione e assorbimento<sup>5</sup>.  $N_b(1)$  dopo l'assorbimento avrà la stessa energia cinetica di  $N_a(1)$  prima dell'emissione. Graficamente si ha:

$$\begin{array}{c} N_a^{\vec{p}} \rightarrow (1) \quad N_b(0) \\ N_a(0) \rightsquigarrow_{\gamma}^{\vec{p}} N_b(0) \\ N_a(0) \quad N_b^{\vec{p}} \rightarrow (1) \end{array}$$

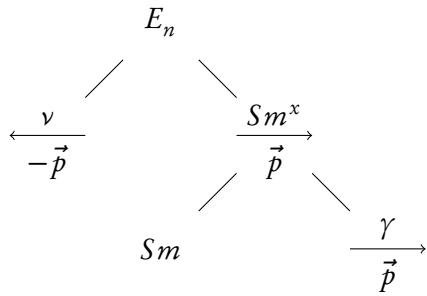
Ritornando all'esperimento supponiamo di porre vicino alla sorgente di Eu un assorbitore di fotoni  $\gamma$  contenente nuclei di Sm nello stato fondamentale e a riposo; questi possono considerarsi come i nuclei  $N_b(0)$  a riposo, mentre i nuclei eccitati di Sm corrispondono ai nuclei  $N_a(1)$  (questi sono quelli prodotti nella cattura K). Si potrà verificare la diffusione di risonanza solo quando il fotone  $\gamma$  catturato dall'assorbitore è stato emesso da un nucleo che poi si trova a riposo.

Questo può verificarsi solo quando la direzione d'emissione del fotone  $\gamma$  è opposta alla direzione d'emissione del neutrino, in questo modo i due effetti di rinculo si possono bilanciare. Da questo si arriva alla conclusione che il fotone  $\gamma$  che subisce diffusione di risonanza avrà la stessa elicità del neutrino emesso.

Infatti viene misurata l'elicità del fotone  $\gamma$ . Sperimentalmente per questi fotoni si trova sempre elicità  $-1$ . Per misurare l'elicità del fotone  $\gamma$  si interpone fra la sorgente di Europio e l'assorbitore del ferro magnetizzato, questo fa passare solo fotoni con una certa elicità; infatti gli elettroni possono assorbire fotoni  $\gamma$  con spin opposto al loro. Fatta questa selezione si vede se i fotoni con la elicità fissata provocano la diffusione di risonanza. Un analogo esperimento

<sup>5</sup>Se vi fosse una velocità relativa tra i due nuclei mentre il fotone è in viaggio, allora questi vedrebbero il fotone con frequenza diversa e quindi non potrebbe avversi il processo di emissione-assorbimento.[AnA]

FIGURA 11.2.



fatto per l'antineutrino ha dimostrato che questo ha elicità +1 (per ulteriori dettagli si può consultare il libro Perkins).

Analizziamo ora questo risultato da un punto di vista teorico. Se effettivamente assumiamo che il neutrino e l'antineutrino abbiano elicità fissa allora la loro velocità deve essere  $c$  e la loro massa deve essere nulla. Se così non fosse, se ci si mette in due S.R., uno con velocità maggiore di quella del neutrino e l'altro con velocità minore, in questi due sistemi  $p_\nu$  ha segno opposto e lo spin è lo stesso, quindi l'elicità nei due S.R. è diversa. Se  $|\nu\rangle$  è lo stato del neutrino si ha:

$$\langle \mathcal{H} \rangle_\nu = \langle \nu | \mathcal{H} | \nu \rangle = -1$$

$$\langle \mathcal{H} \rangle_{\bar{\nu}} = \langle \bar{\nu} | \mathcal{H} | \bar{\nu} \rangle = +1$$

Quind il neutrino e l'antineutrino sembrano violare la simmetria per inversione spaziale, ed in più la violazione è massima ( $\langle \mathcal{H} \rangle = \pm 1$ ). Questo fatto (la violazione massima) implica per un  $\nu$  e  $\bar{\nu}$  privi di massa la totale inesistenza di un neutrino speculare con elicità +1 e di un antineutrino con elicità -1. Consideriamo lo stato per un neutrino ( $|\nu_s\rangle$  = stato sinistrorso,  $|\nu_d\rangle$  = stato destrorso):

$$|\nu\rangle = c_s |\nu_s\rangle + c_d |\nu_d\rangle$$

$$|c_s|^2 + |c_d|^2 = 1$$

dove  $|c_s|^2$  è la probabilità che il neutrino abbia elicità -1,  $|c_d|^2$  che abbia elicità +1.

Il porre  $|c_s|^2 = 1$  implica  $|c_d|^2 = 0$ . Un'analogia conclusione si trova per l'antineutrino. Quindi deve essere

$$|\nu\rangle = |\nu_s\rangle \quad |\bar{\nu}\rangle = |\bar{\nu}_d\rangle$$

Consideriamo  $e^+$  ed  $e^-$  emessi nei decadimenti  $\beta$ . Anche questi violano la simmetria per inversione spaziale, nonostante il nucleo iniziale sia simmetrico per inversione spaziale.

A questo punto conviene introdurre il vettore di polarizzazione per particelle con spin 1/2:

$$\vec{P} = \frac{2}{\hbar} \langle \vec{S} \rangle$$

$\vec{P}$  è unitario e la sua direzione è quella in cui lo spin della particella ha probabilità 1 di assumere l'autovalore  $\frac{\hbar}{2}$ . Infatti lungo una direzione  $\vec{r}$  arbitraria si può scrivere:

$$P_r = \frac{2}{\hbar} \langle S_r \rangle = |c_+|^2 - |c_-|^2 \quad (|c_+|^2 + |c_-|^2 = 1)$$

dove  $c_+$  e  $c_-$  sono le ampiezze di probabilità di trovare  $+\frac{\hbar}{2}$  e  $-\frac{\hbar}{2}$  nella direzione  $r$ . Se  $r$  è la direzione in cui punta  $\vec{P}$  si ha che:

$$P_r = |\vec{P}| = 1 \Rightarrow |c_+|^2 = 1 \quad |c_-|^2 = 0$$

Se  $\vec{P}$  è parallelo o antiparallelo a  $\vec{p}$  si dirà che la particella ha una polarizzazione longitudinale. Se  $\vec{P}$  è perpendicolare a  $\vec{p}$  si dirà polarizzazione trasversale. Se si ha polarizzazione longitudinale la particella si troverà in un ben definito stato di elicità.

### 11.4.3 VIOLAZIONE DELLA SIMMETRIA SPECULARE

La violazione della simmetria speculare può essere osservata per elettroni e positroni vincolati a una polarizzazione longitudinale. Nel decadimento  $\beta^-$  un elettrone emesso con polarizzazione longitudinale si troverà in un autostato dell'elicità. Considerando un insieme statistico di nuclei identici che subiscono un decadimento  $\beta^-$  si possono definire le due probabilità

$$\begin{aligned} |c_s|^2 &\rightarrow \text{elettrone nello stato sinistrorso } (-1) \\ |c_d|^2 &\rightarrow \text{elettrone nello stato destrorso } (+1) \end{aligned}$$

Questo si può descrivere costruendo lo stato complessivo

$$|e_\beta^-\rangle = c_s |e_s^-\rangle + c_d |e_d^-\rangle$$

dove  $|e_s^-\rangle$  e  $|e_d^-\rangle$  sono i due autostati dell'elicità, ed in più deve essere:

$$|c_s|^2 + |c_d|^2 = 1$$

La fase relativa di  $c_s$  e  $c_d$  non è definita, quindi in realtà questo non è uno stato, ma una mistura. Si può assumere che i due stati  $|e_s^-\rangle$  e  $|e_d^-\rangle$  siano tali che:

$$\langle e_s^- | e_s^- \rangle = \langle e_d^- | e_d^- \rangle = 1 \quad \langle e_s^- | e_d^- \rangle = 0$$

Allora risulterà che:

$$\mathcal{H} |e_s^-\rangle = (-1) |e_s^-\rangle \quad \mathcal{H} |e_d^-\rangle = (+1) |e_d^-\rangle$$

Per il valore di aspettazione si può scrivere:

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \langle e_\beta^- | \mathcal{H} | e_\beta^- \rangle = -|c_s|^2 + |c_d|^2$$

4-3-1998

In una situazione di simmetria per inversione spaziale si deve avere:

$$|c_s|^2 = |c_d|^2 = 1/2 \Rightarrow \langle \mathcal{H} \rangle_{e_\beta^-} = 0$$

Sperimentalmente si trova invece, per un elettrone emesso con polarizzazione longitudinale:

$$\langle \mathcal{H} \rangle_{e_\beta^-} = -\frac{v}{c}$$

dove  $v$  è la velocità dell'elettrone emesso.

Dal sistema di equazioni nelle incognite  $|c_s|$  e  $|c_d|$ :

$$\begin{cases} -|c_s|^2 + |c_d|^2 = -\frac{v}{c} \\ |c_s|^2 + |c_d|^2 = 1 \end{cases}$$

Da questo sistema si ricavano i valori:

$$|c_s|^2 = \frac{1}{2}(1 + \frac{v}{c}) \quad |c_d|^2 = \frac{1}{2}(1 - \frac{v}{c})$$

Quindi in effetti vi è una probabilità:

$$\begin{aligned} P_- &= 50(1 + \frac{v}{c})\% \rightarrow \text{elettrone con elicità -1} \\ P_+ &= 50(1 - \frac{v}{c})\% \rightarrow \text{elettrone con elicità +1} \end{aligned}$$

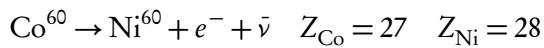
Se facciamo il limite per  $v \rightarrow c$  si ottengono i seguenti risultati:

$$\lim_{v \rightarrow c} |c_s|^2 = 1 \quad \lim_{v \rightarrow c} |c_d|^2 = 0$$

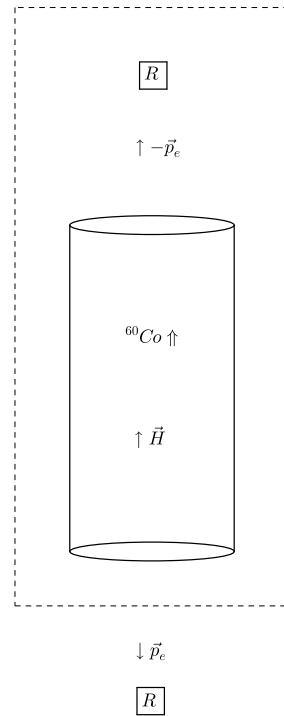
quindi se l'elettrone avesse velocità  $c$  si comporterebbe esattamente come un neutrino. Quindi l'elettrone si comporta come un neutrino, con l'unica differenza ch l'elettrone ha una massa non nulla. Quindi il fatto che l'elicità è definita per il neutrino può essere vista come una conseguenza della sua massa nulla.

L'esperimento che ha evidenziato che  $\langle \mathcal{H} \rangle \neq 0$  fu realizzato nel 1957 e fu il primo esperimento che mostrò la violazione della simmetria per inversione spaziale nei decadimenti  $\beta$ .

Per l'esperimento si utilizzò una sorgente di  $\text{Co}^{60}$  che decade secondo la reazione



Si immerge la sorgente in un campo magnetico uniforme  $H$  all'interno di un solenoide. Si porta la sorgente ad una temperatura di 0,01K per portare al minimo la depolarizzazione per agitazione termica. In queste condizioni tutti i momenti magnetici dei nuclei di  $\text{Co}^{60}$  sono allineati come  $H$ . Anche gli spin saranno paralleli ad  $H$  ( $\gamma$  fattore g.m.>0). Se poniamo un

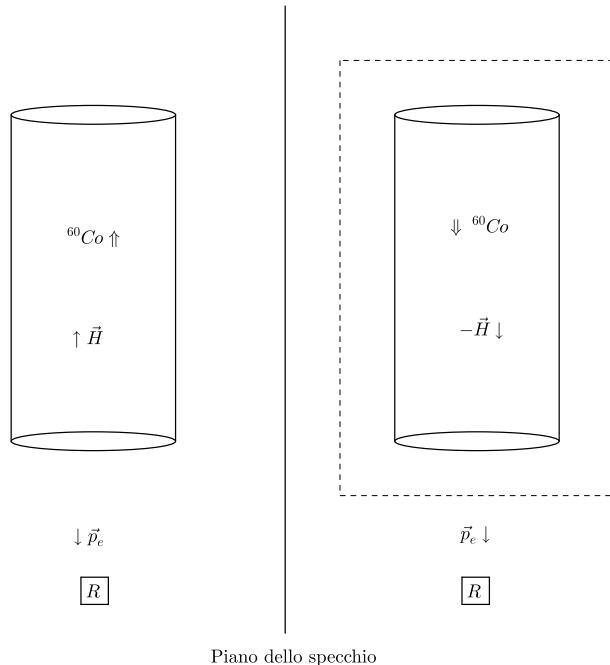
**FIGURA 11.3.:** Disegni presenti nel testo originale.

rivelatore a distanza molto grande dal solenoide e posto sotto, arriveranno solo elettroni emessi in direzione opposta ad  $H$ . Se il rivelatore viene posto sopra arriveranno solo gli elettroni emessi parallelamente ad  $H$  (vedi Figura 11.3). Gli eventi osservati dall'osservatore di sopra saranno quelli spazialmente riflessi dagli eventi osservati dall'osservatore di sotto. Questo perché  $p$  cambia segno, mentre  $H$  e lo spin no. In questo ragionamento abbiamo assunto che i nuclei di Co<sup>60</sup> sono a riposo in modo da essere invarianti per inversione spaziale. Quindi se nel processo fosse rispettata la simmetria per inversione spaziale i due rivelatori dovrebbero contare lo stesso numero di elettroni  $\beta$  per unità di tempo.

Conteggi differenti implicherebbero una violazione della simmetria per inversione spaziale. Per effettuare le misure si utilizzò un solo rivelatore invertendo il senso della corrente nel solenoide (vedi Figura 11.3). L'esperimento rivelò che gli elettroni venivano emessi in numero maggiore nella direzione opposta allo spin nucleare. Si trovò che il fascio di elettroni emessi aveva una distribuzione angolare del tipo:

$$I(\theta) = I_0 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)$$

dove  $\theta$  è l'angolo fra la direzione di emissione e lo spin nucleare. Se fosse stata mantenuta la simmetria per inversione spaziale la dipendenza doveva essere del tipo  $\cos^{2n} \theta$ , in modo da avere simmetria attorno al piano azimutale (vedi Figura 11.4). L'importanza di questo esperimento è proprio la scoperta della violazione del principio di invarianza per inversione spaziale. Prima

**FIGURA 11.4.: Seconda figura del testo originale.**

si credeva che il risultato di un esperimento dovesse essere lo stesso se si usa un sistema o quello speculare.

**6-3-1998** Analizziamo ora più in dettaglio questo esperimento e come è stato ricavato il risultato  $\langle \mathcal{H} \rangle_{e^-} = -\frac{v}{c}$ . Nella reazione



lo spin nucleare diminuisce di un'unità pur rimanendo parallelo ad  $\mathcal{H}$ . La coppia elettrone-antineutrino ha momento angolare nullo rispetto al nucleo. Per la conservazione del momento angolare totale l'elettrone e l'antineutrino devono avere spin 1/2, orientato sempre nella stessa direzione:

$$\uparrow\uparrow_{\text{Co}^{60}} \quad \uparrow\uparrow_{\text{Ni}^{60}} \quad \uparrow\uparrow_{1/2} \quad \uparrow\uparrow_{1/2}$$

Quindi un elettrone emesso longitudinalmente alla direzione dello spin avrà una polarizzazione longitudinale, quindi sarà in un autostato dell'elicità. Per un angolo di emissione  $\theta = 0$  l'autovalore dell'elicità è +1, per  $\theta = \pi$  l'autovalore dell'elicità è -1. Indichiamo con  $I_+$  e  $I_-$  le intensità dei fasci di elettroni con  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ . Il valore medio dell'elicità per un singolo elettrone sarà:

$$\frac{(+1)I_+ + (-1)I_-}{I_+ + I_-}$$

Abbiamo già detto che il risultato sperimentale per l'intensità è:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= I_0 \left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right) \\ I_+ &= I(0) = I_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \\ I_- &= I(\pi) = I_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \end{aligned}$$

Quindi il valore medio di elicità risulta essere:

$$\frac{(+1)I_+(-1)I_-}{I_+ + I_-} = -\frac{v}{c}$$

- Inversione spaziale = inversione di tutti e tre gli assi.
- Inversione speculare = inversione di un solo asse.

Queste due operazioni differiscono solo per una rotazione di  $\pi^6$ .

Il sistema risulta simmetrico per inversione spaziale solo perché i nuclei di cobalto sono fermi, se così non fosse non si avrebbe questa simmetria iniziale e quindi non ci si stupirebbe di riscontrare una asimmetria nei risultati.

---

<sup>6</sup>È presente nel testo una riga, purtroppo tagliata nella fotocopia, che risulta illeggibile. (Ovviamente il professore vi chiederà quella)

# 12

## TEORIA DI FERMI

Nel 1934 Fermi formulò una teoria fenomenologica del decadimento  $\beta$  in accordo con i risultati sperimentali. Questo lavoro inaugurò la fisica delle particelle nucleari. Questa teoria non prevedeva la violazione della simmetria speculare, ma lo schema di questa teoria rimane valido ancora oggi. Uno dei risultati di questa teoria è la spiegazione degli spettri  $\beta$ . Sia  $N_e$  il numero di elettroni emessi in un certo intervallo di tempo con un'energia cinetica compresa fra  $[0, T_{e,\max}]$ , la distribuzione di energia è data dalla funzione

$$f(T_e) = \frac{dN_e}{dT_e} = \text{funzione di distribuzione}$$

dove  $dN_e$  è il numero di elettroni emessi con energia cinetica compresa nell'intervallo  $[T_e, T_e + dT_e]$ . Ovviamente deve essere:

$$N_e = \int_0^{T_{e,\max}} \frac{dN_e}{dT_e} dT_e$$

Un altro importante risultato è la relazione fra  $T_{e,\max}$  e la vita media del nucleo che decade. Sulla base di questa teoria si possono enunciare alcune regole di selezione che permettono una classificazione dei diversi decadimenti  $\beta$  e la spiegazione del perché alcuni decadimenti sono meno favoriti di altri.

Il punto di partenza della teoria è la constatazione che l'interazione che determina il decadimento  $\beta$  deve essere molto più piccola di quella elettromagnetica.

Consideriamo un nucleo a riposo di massa  $M$  che decade in un nucleo di massa  $M'$ . Si ha che:

$$Mc^2 = M'c^2 + Q$$

$$Q = Mc^2 - M'c^2 = \text{Energia disponibile per la transizione}$$

Questo parametro caratterizza la transizione e rappresenta tutta l'energia interna che il nucleo iniziale perde. L'energia di decadimento  $E_d$  è la sola energia cinetica che si genera nella transizione, infatti per definizione si ha:

$$E_d = Mc^2 - M'c^2 - \sum_i m_i c^2$$

---

quindi questa non caratterizza il decadimento come  $Q$  perché dipende anche dalle masse delle altre particelle prodotte. Sperimentalmente si ha che a parità di  $Q$  un nucleo che decade per emissione  $\beta$  ha vita media molto più lunga di quella di un nucleo che decade per emissione  $\gamma$  ( $Q \simeq 1\text{MeV}$ ,  $\tau_\gamma \simeq 10^{-15}\text{s}$ ,  $\tau_\beta \simeq 10\text{min}$ ). Questo fatto significa che  $\lambda_\beta \ll \lambda_\gamma$ , quindi la probabilità di decadimento è più piccola per un decadimento  $\beta$  rispetto a quello  $\gamma$ . Un altro fatto sperimentale è che:

$$\tau_\gamma \gg T \equiv \frac{\hbar}{E} \simeq 10^{-27}\text{s} \quad (E \simeq 100\text{GeV})$$

dove  $T \cdot 2\pi$  è il periodo caratteristico di oscillazione della funzione d'onda nucleare ( $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ ). Quindi nell'emissione  $\gamma$  prima di decadere il nucleo si trova in uno stato imperturbato il cui livello energetico coincide con il livello di energia  $E$  a meno del parametro  $\Gamma = \frac{\hbar}{\tau_\gamma} \ll E$ .

Quindi l'intensità dell'interazione  $\beta$  è molto più piccola di quella  $\gamma$ . Da questo nasce il nome di *interazione debole* per l'interazione responsabile del decadimento  $\beta$ . L'hamiltoniana corrispondente risulterà molto più piccola di quella nucleare. Quindi possiamo usare la teoria delle perturbazioni fermandoci al primo ordine. Sia  $\mathcal{H}$  l'hamiltoniana totale del nucleo che decade. Si può scrivere nella rappresentazione di Schrödinger:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}$$

$\mathcal{H}_{\text{int}}$  non dipende dal tempo in quanto il sistema in esame è un sistema chiuso. Se passiamo dalla rappresentazione di interazione invece si ha:

$$\mathcal{H}_I(t) = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}(t)$$

Lavoreremo sempre in questa rappresentazione, quindi in seguito sarà omesso il pedice  $I$ .

Possiamo assumere che il nucleo si trovi inizialmente nello stato  $|i\rangle$ , che sia autostato di  $\mathcal{H}_0$  con autovalore  $E_i$ . Questa assunzione è esatta solo se l'istante iniziale è  $t = -\infty$ , nella realtà non è così, ma dato che il nucleo ha una vita estremamente lunga questa è una buona approssimazione. Indichiamo con  $|t\rangle$  lo stato del sistema all'istante  $t$ . Si può scrivere:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |t\rangle = \mathcal{H}_{\text{int}}(t) |t\rangle$$

con la condizione iniziale

$$|t=0\rangle = |i\rangle$$

Supponiamo che i possibili stati finali abbiano uno spettro discreto. Questi stati finali sono autostati di  $\mathcal{H}_0$ . Si può scrivere:

$$|t\rangle = \sum_f c_f(t) |f\rangle = \sum_{f \neq i} c_f(t) |f\rangle + c_{f=i} |f=i\rangle$$

dove i coefficienti  $c_f(t)$  sono definiti come:

$$c_f(t) = \langle f | t \rangle$$

9.3-1998

Il modulo quadro di  $c_f(t)$  dà la probabilità che all'istante  $t$  il sistema si trovi nello stato  $f$ . Per la condizione iniziale deve essere:

$$|c_{f \neq i}(0)|^2 = 0 \quad |c_{f=i}|^2 = 1$$

Per questo motivo le quantità  $|c_f|^2 (f \neq i)$  si dicono *probabilità di transizione*. Lo stato finale può non avere energia uguale a quella iniziale. Questo perché l'energia del sistema fra  $t = 0$  e  $t$  è soggetta alla relazione:

$$\Delta E_i = \frac{\hbar}{t}$$

Quindi le transizioni possono avvenire fra stati la cui energia è compresa nell'intervallo  $[E_i - \frac{\Delta E_i}{2}, E_i + \frac{\Delta E_i}{2}]$ . Deve però essere sempre verificato che:

$$\langle \mathcal{H} \rangle = \langle t | \mathcal{H}(t) | t \rangle = E_i$$

La quantità  $\frac{\Delta E_i}{2}$  non può superare il valore di  $E_i$ , quindi:

$$\Delta E_i \leq 2E_i$$

Le probabilità di transizione risulteranno molto minori di 1, quando la perturbazione  $\mathcal{H}_{\text{int}}(t)$  è molto piccola, anche per  $t$  molto grandi, cioè:

$$|C_{f \neq i}|^2 \ll 1 \quad (t \gg \frac{\hbar}{E_i})$$

Ma in queste condizioni (essendo  $t = \frac{\hbar}{\Delta E_i}$ ) deve essere  $\Delta E_i \ll E_i$ . Avvengono quindi transizioni a stati finali la cui energia è  $E_f \simeq E_i$ . La condizione  $E_f = E_i$  è esatta se  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  è un infinitesimo. Infatti in questo caso una transizione ad uno stato può avvenire solo per  $t$  tendente ad infinito:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Delta E_i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\hbar}{t} = 0$$

Possiamo assumere per l'hamiltoniana di interazione  $\beta$  che questa sia un infinitesimo rispetto ad  $\mathcal{H}_0$ , e quindi la transizione può avvenire solo a  $t \rightarrow +\infty$ . In queste ipotesi si hanno transizioni fra stati che hanno energia finale uguale a quella iniziale.

Passiamo ora ad una trattazione più rigorosa considerando tutti i possibili stati finali. Per un lungo intervallo a partire da  $t = 0$  si ha:

$$|c_{f \neq i}(t)|^2 \simeq |c_{f \neq i}(0)|^2 = 0$$

Se ci si ferma al primo ordine nella teoria delle perturbazioni si può scrivere:

$$|c_{f \neq i}(t)|^2 = 2|\mathcal{H}_{\text{if}}|^2 \frac{1 - \cos(\omega_{\text{if}} t)}{(E_f - E_i)^2}$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned}\omega_{\text{if}} &= \frac{E_f - E_i}{\hbar} \\ |\mathcal{H}_{\text{if}}|^2 &\equiv \langle f | \mathcal{H}_{\text{int}} | i \rangle \propto e^{i\omega_{\text{if}} t} \quad (|f\rangle \neq |i\rangle) \\ |\mathcal{H}_{\text{if}}|^2 &= \text{costante}\end{aligned}$$

(questo si può dedurre considerando che i prodotti scalari non dipendono dalla rappresentazione).

$$\frac{d}{dt} |c_{f \neq i}(t)|^2 = \frac{2}{\hbar} |\mathcal{H}_{\text{if}}|^2 \frac{\sin(\omega_{\text{if}} t)}{E_f - E_i}$$

Attenzione!<sup>1</sup>

Se approssimiamo  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  ad un infinitesimo,  $\mathcal{H}_{\text{if}}$  lo sarà pure. In questo caso dobbiamo considerare il limite:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \frac{d}{dt} |c_{f \neq i}(t)|^2 \right] &= \frac{2}{\hbar} |\mathcal{H}_{\text{if}}|^2 \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\omega_{\text{if}} t)}{E_f - E_i} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\omega_{\text{if}} t)}{E_f - E_i} &= \frac{\pi}{\hbar} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\omega_{\text{if}} t)}{\pi \omega_{\text{if}}} = \frac{\pi}{\hbar} \delta(\omega_{\text{if}}) \\ \delta(\omega_{\text{if}}) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\omega_{\text{if}} t)}{\pi \omega_{\text{if}}} = \hbar \lim_{\frac{t}{\hbar} \rightarrow +\infty} \frac{\sin[(E_f - E_i)t/\hbar]}{\pi(E_f - E_i)} = \hbar \delta(E_f - E_i)\end{aligned}$$

L'uguaglianza fra la funzione  $\delta$  ed il limite è un'uguaglianza fra funzionali e non fra funzioni. Quindi nel limiti di un'hamiltoniana di interazione infinitesima saranno accessibili solo stati finali con  $E_f = E_i$ .

11-3-1998

$$W_{\text{if}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \frac{d}{dt} |c_{f \neq i}(t)|^2 \right] = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{H}_{\text{if}}|^2 \delta(E_f - E_i) = \text{costante}$$

Questa è la probabilità di transizione da  $i$  ad  $f$  nell'unità di tempo. Si può definire la probabilità totale di transizione nell'unità di tempo come:

$$W = \sum_{f \neq i} W_{\text{if}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{f \neq i} |\mathcal{H}_{\text{if}}|^2 \delta(E_f - E_i) = \text{Probabilità totale di transizione nell'unità di tempo.}$$

Di fatto si ha che  $W_{\text{if}} = 0$  se  $E_f \neq E_i$ , quindi gli unici contributi provengono da stati  $f$  con  $E_f = E_i$ .

---

<sup>1</sup>Nel testo è presente, scritta minuscola, la formula  $\frac{d}{dt} |c_{f \neq i}|^2 = 2|\mathcal{H}_{\text{if}}|^2 \frac{\sin(\omega_{\text{if}} t)}{(E_f - E_i)^2} \omega_{\text{if}}$ . Questa è la stessa formula a meno delle semplificazioni.

Tutti i risultati sono stati trovati lavorando al primo ordine. Se consideriamo anche ordini successivi di approssimazione allora il procedimento al limite porta sempre ad una  $W$  costante. Quindi si può scrivere la probabilità totale mediante la formula:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{f \neq i} |T_{if}|^2 \delta(E_f - E_i)$$

dove  $T_{if}$  ha le dimensioni di energia. Questi coefficienti si dicono elementi di matrice relativi alla transizione dallo stato  $i$  allo stato  $f$ .

Fino ad ora abbiamo lavorato sull'ipotesi di spettro discreto. Di solito si hanno spettri continui, sappiamo che questi però possono essere approssimati con spettri quasi continui. Per fare questa approssimazione si deve introdurre la densità di stati finali come:

$$\rho_f(E_f) = \frac{dN}{dE_f}|_{E_f} \quad dN = \text{numero di stati finali con energia compresa nell'intervallo } [E_f, E_f + dE_f].$$

E si deve fare la sostituzione:

$$\sum_f \rightarrow \int N = \int \rho_f(E_f) dE_f$$

Quindi la probabilità totale nell'unità di tempo  $W$  diventa:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \int |\mathcal{H}_{if}|^2 \delta(E_i - E_f) \rho_f(E_f) dE_f = \frac{2\pi}{\hbar} |T_{if}|^2 \rho_f(E_i)$$

dove in prima approssimazione si può scrivere:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{H}_{if}|^2 \rho_f(E_i) \quad \text{REGOLA D'ORO DI FERMI}$$

Secondo questa formula  $W$  è data dal prodotto di due fattori: uno di natura dinamica ( $|\mathcal{H}_{if}|^2$ ), mentre l'altro è non dinamico ed è la densità di stati finali con  $E_f = E_i$ :  $\rho_f(E_i) = \frac{dN}{dE_f}|_{E_f=E_i}$ .

Se si vuole passare al caso continuo dal caso quasi continuo si deve fare il limite per  $V \rightarrow +\infty$  dove  $V$  è il volume della scatola.

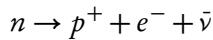
Se vogliamo applicare la regola d'oro al decadimento  $\beta^-$  si deve specificare l'elemento di matrice  $T_{if}$ , che al primo ordine è  $\mathcal{H}_{if}$ . L'hamiltoniana di interazione rappresenta una perturbazione piccola in confronto all'hamiltoniana nucleare, quindi:

$$\tau_\beta \gg \tau_\gamma \gg T = \frac{\hbar}{E}$$

Si può quindi assumere  $\tau_{beta} = \infty$ . Nell'intervallo di tempo fra 0 e  $\tau_\beta$  la funzione d'onda quasi stazionaria si può scrivere come:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} e^{-\frac{t}{2\tau_\beta}} = \psi(0) e^{-i \frac{t}{T} - \frac{t}{2\tau_\beta}} \simeq \\ &\simeq \psi(0) e^{-i \frac{t}{T}} = \psi(0) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} \quad (0 \leq t < \tau_\beta) \quad (\text{Questo è uno stato stazionario.}) \end{aligned}$$

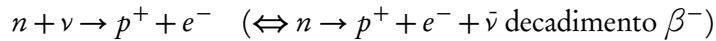
Quindi in questa approssimazione il nucleo si trova in uno stato non perturbato per tutto il tempo di vita media. Per questo il decadimento  $\beta$  si può considerare come un processo dinamico di durata istantanea. Secondo la teoria della relatività tutte le interazioni hanno una velocità di propagazione finita. Quindi il decadimento  $\beta$  può avvenire solo in una regione puntiforme del nucleo (la sua durata è istantanea). Per questo il decadimento  $\beta$  coinvolge un solo nucleone ed è lecito scrivere:



Quindi  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  di un nucleo soggetto ad un decadimento  $\beta^-$  è identica a quella di un neutrone che decade in un protone.

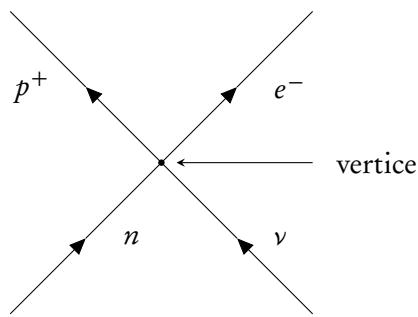
### §

In base alla teoria di Dirac un fermione con quadriimpulso  $p^\mu$  che viene creato in un punto spaziotemporale è equivalente alla distruzione di un fermione con quadriimpulso opposto nello stesso punto spaziotemporale. Quindi se a  $\bar{\nu}$  che viene creato sostituiamo un  $\nu$  distrutto possiamo considerare il processo di diffusione:



che è caratterizzato dalla stessa  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  del processo di sopra. Il decadimento  $\beta^-$  di un neutrone equivale dal punto di vista dinamico al processo rappresentato nel diagramma in Figura 12.1.

**FIGURA 12.1.**



In questo processo sono coinvolte quattro particelle (due entranti e due uscenti). Queste interagiscono solo nel punto di incontro che si dice *vertice del diagramma*. Un'interazione caratterizzata da un solo vertice si dice *interazione di contatto* oppure *processo del primo ordine*.

In un processo di diffusione di due particelle il potenziale di interazione dipenderà solo da  $|\vec{M}_1 - \vec{M}_2|$ . Supponiamo che le due particelle siano descritte da funzioni d'onda scalari, siano queste  $\psi_1(\vec{r}_1), \psi_2(\vec{r}_2)$ . Per definizione si ha:

$$\mathcal{H}_{\text{if}} = \langle f | \mathcal{H}_{\text{int}} | i \rangle = \int \psi_{1f}^*(\vec{r}) \psi_{2f}^*(\vec{r}) V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \psi_{1i}(\vec{r}) \psi_{2i}(\vec{r}) d^3 r_1 d^3 r_2$$

Questa formula vale anche per una diffusione anelastica, cioè anche se le particelle subiscono trasformazioni interne. Nel caso che stiamo considerando si ha un *potenziale di contatto*, quindi il potenziale si può scrivere come:

$$V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = g \delta^3(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

dove  $g$  è una costante da determinare sperimentalmente. Con questa scelta per  $V$  possiamo calcolare l'elemento di matrice:

$$\mathcal{H}_{\text{if}} = g \int \psi_{1f}^*(\vec{r}) \psi_{2f}^*(\vec{r}) \psi_{1i}(\vec{r}) \psi_{2i}(\vec{r}) d^3 \vec{r}$$

13-3-1998

Questa in realtà non è esatta in quanto le particelle hanno uno spin 1/2 e quindi le funzioni d'onda non sono scalari ma spinori. Per il momento comunque trascureremo questo fatto. Poniamo:

$$\psi_{1i} = \psi_n; \quad \psi_{2i} = \psi_\nu; \quad \psi_{1f} = \psi_p; \quad \psi_{2f} = \psi_e$$

Si ottiene dunque ( $V$  = volume nucleare):

$$\mathcal{H}_{\text{if}}^{(\beta)} = g \int_V \psi_p^*(\vec{r}) \psi_e^*(\vec{r}) \psi_n(\vec{r}) \psi_\nu(\vec{r}) d^3 r$$

questo integrale è esteso al volume nucleare e  $\vec{r}$  rappresenta la posizione del neutrone rispetto al centro del nucleo. La costante  $g$  si dice *costante di accoppiamento di Fermi*. Questa ha le dimensioni di energia per volume. Le due funzioni d'onda  $\psi_e^*$  e  $\psi_\nu$  si possono scrivere nella forma stazionaria:

$$\begin{aligned}\psi_e^*(\vec{r}) &= \frac{1}{\Omega^{1/2}} e^{-i\vec{k}_e \cdot \vec{r}} \\ \psi_\nu(\vec{r}) &= \frac{1}{\Omega^{1/2}} e^{i\vec{k}_\nu \cdot \vec{r}}\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}\vec{k}_e &= \frac{1}{\hbar} \vec{p} \\ \vec{k}_\nu &= -\vec{k}_e\end{aligned}$$

$\Omega$  è il volume dove è racchiuso il sistema<sup>2</sup>. Con questa scelta si trascurano le interazioni tra il neutrino o l'elettrone con il nucleo<sup>3</sup>. Di solito gli impulsi di  $e^-$  e  $\nu$  sono di un ordine di grandezza tale che:

$$\lambda = \frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k} = \frac{\hbar}{p} \gtrsim 2 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$$

Quindi  $\lambda$  è molto grande in confronto alle dimensioni nucleari. Se poniamo:

$$\begin{aligned}e^{-i\vec{k}_e \cdot \vec{r}} &= 1 - i\vec{k}_e \cdot \vec{r} + \dots \\ e^{i\vec{k}_\nu \cdot \vec{r}} &= 1 + i\vec{k}_\nu \cdot \vec{r} + \dots\end{aligned}$$

si avrà che per ogni punto  $\vec{r}$  interno al nucleo:

$$\vec{k}_e \cdot \vec{r} \ll 1; \quad \vec{k}_\nu \cdot \vec{r} \ll 1$$

Ci si può dunque fermare ai termini di ordine zero nello sviluppo in serie:

$$\psi_e^*(\vec{r}) \psi_\nu(\vec{r}) \simeq \psi_e^*(0) \psi_\nu(0) = \frac{1}{\Omega}$$

<sup>2</sup>Quello relativo all'approssimazione al caso quasi continuo..

<sup>3</sup>Ad esempio si trascurano le forze elettromagnetiche.

---

questa approssimazione è possibile a patto che l'elemento di matrice che si ottiene non risulti nullo. Ogni volta che questo è verificato si può scrivere:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{if}}^{(\beta)} &\simeq g \int \psi_p^*(\vec{r}) \psi_n(\vec{r}) \psi_e^*(0) \psi_\nu(0) d^3 \vec{r} \neq 0 \\ \mathcal{H}_{\text{if}}^{(\beta)} &\simeq \mathcal{H}_{\text{if}}^{(0)} \equiv g \frac{M_{\text{if}}}{\Omega} \text{ dove } M_{\text{if}} = \int \psi_p^*(\vec{r}) \psi_n(\vec{r}) d^3 \vec{r}\end{aligned}$$

dove  $M_{\text{if}}$  è un numero puro. Questa approssimazione corrisponde all'approssimazione di monopolio, e il nucleo non è altro che un punto rispetto a  $\lambda_e$  e  $\lambda_\nu$ . Quindi l'elettrone e l'antineutrino non possono avere un  $L$  rispetto al nucleo in quanto sono stati emessi da una sorgente puntiforme. Quindi il sistema  $e + \bar{\nu}$  ha due possibilità per il momento angolare totale: 0 (singuletto), 1 (triplett). Nel primo caso si parla di *transizione di Fermi*, nel secondo caso si dice *transizione di Gamow Teller*. Nel primo caso vale la regola di selezione di Fermi secondo cui le transizioni permesse sono solo quelle per cui:

$$\Delta i = i_f - i_i = 0 \quad \text{REGOLA DI FERMI}$$

Nel secondo caso vale la regola di selezione gi Gamow-Teller secondo cui è proibita ogni transizione con  $\#\#\#^4$ , mentre sono permesse solo transizioni per cui:

$$i_{\text{fin}} - 1 \leq i_{\text{in}} \leq i_{\text{fin}} + 1$$

che implica

$$\begin{cases} \Delta i = \pm 1 \\ \Delta i = 0 (i \neq 0) \end{cases} \quad \text{REGOLA DI SELEZIONE DI GAMOW-TELLER}$$

In particolare la transizione  $\beta$  del Co<sup>60</sup> è una transizione di Gamow-Teller “permessa”. Queste regole di selezione valgono solo nelle approssimazioni considerate perché sono state dedotte dall'ipotesi che fosse nullo il momento orbitale del sistema  $e + \bar{\nu}$ . Nella risoluzione esatta del problema si trovano delle transizioni  $\beta$  che non rientrano fra le regole di selezione enunciate, queste transizioni però sono meno favorite in quanto i corrispondenti elementi di matrice sono di ordine più piccolo rispetto agli elementi di matrice della transizione permessa.

Abbiamo visto che sotto certe ipotesi si ha:  $\mathcal{H}_{\text{if}} = g \frac{M_{\text{if}}}{\Omega}$ . Abbiamo anche ricavato le regole di selezione e commentato la loro validità. Se consideriamo solo le transizioni permesse, la regola d'oro di Fermi assume la forma:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{H}_{\text{if}}(0)|^2 \rho_f(E_i) = \frac{2\pi}{\hbar \Omega^2} g^2 |M_{\text{if}}|^2 \rho_f(E_i)$$

L'elemento di matrice  $\mathcal{H}_{\text{if}}$  che compare in  $W$  non dipende dai momenti delle particelle interagenti, quindi questa può essere interpretata come probabilità di transizione complessiva

16-3-1998

---

<sup>4</sup>Cosa stranissima: lo spazio è bianco anche nel testo, ed è presente una freccina con un punto interrogativo? Era finito l'inchiostro? Sbabinatura non chiara? Prossimamente a Voyager! NdT.

nell'unità di tempo per tutti i possibili valori dei momenti. Questa interpretazione è corretta se  $\rho_g(E_i)$  è la densità complessiva di stati finali con energia  $E_i$ . Quindi  $W$  è la probabilità di decadimento  $\beta$  nell'unità di tempo, dunque deve essere:

$$W = \lambda_\beta$$

Se poniamo per l'energia finale  $E_f$ :

$$E_f = M'c^2 + Q$$

dove  $M'$  è la massa del nucleo prodotto e  $Q$  l'energia disponibile. Si avrà:

$$dE_f = dQ \Rightarrow \rho_f = \frac{dN}{dE_f} \Big|_{E_f=E_i} = \frac{dN}{dQ} \Big|_{Q=E_i-M'c^2}$$

dove  $dN$  è il numero totale di stati finali con energia compresa fra  $E_i$  e  $E_i + dQ$ . Per l'energia  $Q$  si avrà:

$$Q = E_e + E_{\bar{\nu}} + T_R$$

dove  $E_e$  è l'energia totale dell'elettrone,  $E_{\bar{\nu}}$  l'energia totale dell'antineutrino,  $T_R$  l'energia di rinculo del nucleo. Ma dal momento che  $T_R \ll E_e, E_{\bar{\nu}}$  si ha:

$$Q = E_e + E_{\bar{\nu}} = (m_e^2 c^4 + c^2 p_e^2)^{1/2} + c p_{\bar{\nu}}$$

La forma dello spettro<sup>5</sup>  $\beta$  si può ricavare direttamente dalla conoscenza della funzione:

$$\frac{dW}{dE_e} = \frac{dW}{dT_e}$$

Il numero  $M_{if}$  non dipende da  $T_e$ , allora la forma dello spettro  $\beta$  è determinata solo dalla conoscenza della funzione  $\rho_f(E_i)$ . Dobbiamo calcolare la funzione:

$$\frac{d\rho_f}{dT_e} = \frac{d^2N}{dT_e dQ}$$

in quanto:

$$\frac{dW}{dT_e} \propto \frac{d\rho_f}{dT_e}$$

Possiamo equivalentemente calcolare la funzione :

$$\frac{d\rho_f}{dp_e} = \frac{d^2N}{dp_e dQ} \quad \text{in quanto} \quad \frac{dW}{dp_e} \propto \frac{d\rho_f}{dp_e}$$

---

<sup>5</sup>Spettro  $\beta$  = numero di elettroni con una certa energia

---

Facciamo l'ipotesi che la scatola immaginaria in cui si suppone racchiuso il sistema sia un cubo di lato  $L$  con gli spigoli paralleli agli assi  $x, y, z$ . Si potrebbe assumere che le funzioni d'onda di  $e$  e  $\bar{\nu}$  si annullino sulle pareti della scatola, ma questo non può essere verificato in quanto sono funzioni complesse. La condizione meno restrittiva che si può imporre è che le funzioni d'onda siano invarianti per traslazioni:

$$x \rightarrow x + L \quad y \rightarrow y + L \quad z \rightarrow z + L$$

quindi i vettori d'onda devono verificare la condizione:

$$k_\alpha L = 2\pi n_\alpha \quad (\alpha = x, y, z \quad n_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

Lo spettro continuo di  $p_e$  e  $p_{\bar{\nu}}$  si riduce in questo caso ad uno spettro discreto, dove i possibili valori per le componenti sono:

$$p_\alpha = \hbar k_\alpha = \frac{2\pi\hbar}{L} n_\alpha \quad (\alpha = x, y, z)$$

Quindi per un dato intervallo  $\Delta p_\alpha = p_\alpha'' - p_\alpha' > 0$  il numero di valori che  $p_\alpha$  può assumere in questo intervallo è:

$$\Delta n_\alpha = n_\alpha'' - n_\alpha' \Rightarrow \frac{\Delta n_\alpha}{\Delta p_\alpha} = \frac{L}{2\pi\hbar} = \text{costante}$$

Questo rapporto coincide con il numero di autostati di  $p_\alpha$  per intervallo unitario di  $p_\alpha$ . Per ciascuna particella emessa nel decadimento la densità di stati è data dalla quantità:

$$\frac{\Delta n_x}{\Delta p_x} \frac{\Delta n_y}{\Delta p_y} \frac{\Delta n_z}{\Delta p_z} = \frac{L^3}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3} = \text{densità degli stati}$$

Nell'approssimazione quasi continua il numero di stati di una particella in un volumetto  $d p_x d p_y d p_z$  è:

$$\frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3} d p_x d p_y d p_z = \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3} p^2 \sin\theta d p d\theta d\phi \quad (\text{in coordinate polari nello spazio dei momenti})$$

Il corrispondente numero di stati nell'intervallo  $[p, p + dp]$  si ottiene integrando su  $\theta$  e  $\phi$ . Per l'elettrone si ottiene:

$$dN_e = \frac{4\pi\Omega}{(2\pi\hbar)^3} p_e^2 d p_e$$

Per l'antineutrino si ottiene:

$$dN_{\bar{\nu}} = \frac{4\pi\Omega}{(2\pi\hbar)^3} p_{\bar{\nu}}^2 d p_{\bar{\nu}}$$

Trattandosi di una disintegrazione a tre corpi  $p_e$  e  $p_{\bar{\nu}}$  possono considerarsi indipendenti una dall'altra. Quindi il numero totale di stati finali in cui l'elettrone ha la quantità di moto compresa nell'intervallo  $[p_e, p_e + dp_e]$  e l'antineutrino nell'intervallo  $[p_{\bar{\nu}}, p_{\bar{\nu}} + dp_{\bar{\nu}}]$  è:

$$d^2 N = dN_e dN_{\bar{\nu}} = \frac{16\pi^2\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6} p_e^2 d p_e p_{\bar{\nu}}^2 d p_{\bar{\nu}}$$

Considerato che:

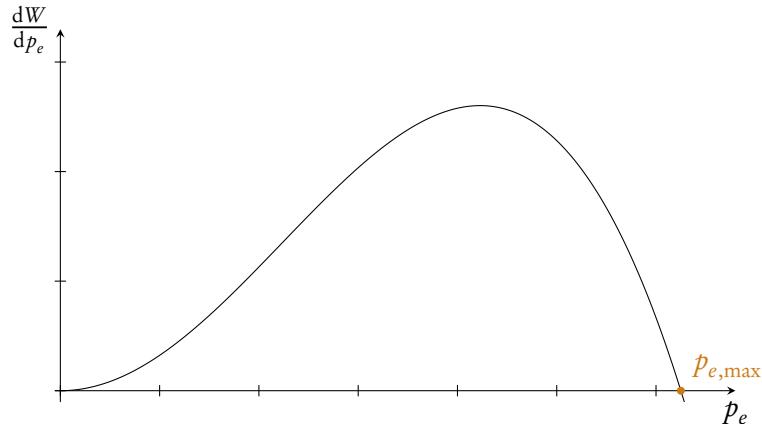
$$p_{\bar{v}} = \frac{Q - E_e}{c} \Rightarrow dp_{\bar{v}} = \frac{dQ}{c}$$

In quanto per calcolare  $dp_{\bar{v}}$  si deve tenere fisso  $dp_e$ . Sostituendo quest'espressione in quella per  $dN^2$  si ottiene:

$$\begin{aligned} d^2N &= \frac{16\pi^2\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6 c^3} (Q - E_e)^2 p_e^2 dp_e dQ \\ \frac{d\rho_f}{dp_e} &= \frac{d^2N}{dp_e dQ} = \frac{16\pi^2\Omega^2}{(2\pi\hbar)^6 c^3} (Q - E_e)^2 p_e^2 \\ \frac{dW}{dp_e} &= \frac{2\pi}{\hbar} g^2 |M_{if}|^2 \frac{16\pi^2}{(2\pi\hbar)^6 c^3} (Q - E_e)^2 p_e^2 \end{aligned}$$

Come ci si doveva aspettare, in questa espressione non compare più il volume  $\Omega$ . Lo spettro  $\beta$  così ottenuto rimane valido anche quando  $\Omega$  è variabile e quindi anche per  $\Omega \rightarrow \infty$ . La forma dello spettro  $\beta$  che si ottiene è rappresentata in ???. Dalla conoscenza della funzione  $\frac{dW}{dp_e}$  si può

**FIGURA 12.2.: Spettro  $\beta$ .**



ricavare il parametro  $\lambda_\beta$ , infatti:

$$\lambda_\beta = W = \int_0^{p_{e,\max}} \frac{dW}{dp_e} dp_e$$

dove

$$p_{e,\max} = \frac{1}{c} \sqrt{E_{e,\max}^2 - m_e^2 c^4} \quad \text{con } E_{e,\max} = Q$$

quindi per  $\lambda_\beta$  si ottiene:

$$\lambda_\beta = \lambda_\beta(p_{e,\max}) = \frac{g^2 |M_{if}|^2}{2\pi^3 c^3 \hbar^7} \int_0^{p_{e,\max}} [Q - (m_e^2 c^4 + c^2 p_e^2)^{1/2}]^2 p_e^2 dp_e$$

---

Questa espressione ci dà il legame fra  $\lambda_\beta$  e  $p_{e,\max}$ , o l'energia massima che l'elettrone può avere. Queste formule, con opportune correzioni di tipo elettromagnetico, forniscono valori teorici molto vicini a quelli sperimentali per molte transizioni  $\beta$  permesse, se però si pone:

$$g = 1,4 \cdot 10^{-49} \text{ erg} \cdot \text{cm}^3 \quad g \equiv \text{costante di accoppiamento di Fermi.}$$

# 13

## FORZE NUCLEARI

*18-03-1998* Un *nucleo atomico* è un aggregato di protoni e neutroni.

L'esistenza di nuclei stabili implica l'esistenza di forze attrattive, che sono conseguenza dell'energia di legame e del difetto di massa. Queste forze devono vincere la repulsione elettrica; il raggio caratteristico di questa fase è  $10^{-13} \text{ cm}$ , che si ricava dagli esperimenti sulla diffusione. Il modello a goccia di liquido assume che la forza attrattiva sia indipendente dalla natura del nucleone (sia questo un protone o un neutrone). Questa assunzione implicita è confermata dal successo della formula per la massa che si ricava da questa ipotesi, ma anche altri fatti sperimentali ne confermano la validità. Uno di questi fatti si basa sui nuclei isobari speculari (si ottengono scambiando i numeri di protoni e neutroni). La massa di questi nuclei è la stessa a meno del termine relativo all'energia coulombiana.

Consideriamo ad esempio due nuclei

$$(z_1 = z ; \quad N_1 = z + 1) \qquad (z_2 = z + 1 ; \quad N_2 = z)$$

una coppia di questo tipo presenta una differenza di massa

$$\Delta M = \Delta M_c$$

dove  $\Delta M_c$  è la differenza dovuta all'energia coulombiana.

$$\begin{aligned} \Delta M_c &= \frac{3}{5} \frac{e^2(z_2)^2}{c^2(r_0)^2 A^{1/3}} - \frac{3}{5} \frac{e^2(z_1)^2}{c^2(r_0)^2 A^{1/3}} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{c^2(r_0)^2 A^{1/3}} [(z+1)^2 - z^2] \\ &= \frac{3}{5} \frac{e^2}{c^2(r_0)^2 A^{1/3}} (2z+1) \end{aligned} \quad [13.1]$$

Un altro fatto sperimentale è la strettissima somiglianza di processi di diffusione  $n - p^+$  e  $p^+ - p^+$ , prescindendo dagli effetti di natura elettrostatica. Un altro fatto è l'apparente dilemma sperimentale dovuto alla non esistenza di stati legati  $n - n$  o  $p - p$ . Per capire questo

---

consideriamo due *fermioni* identici con spin  $1/2$ , secondo il *principio di Pauli* questi non possono trovarsi in uno stato legato di tripletto. Può essere comunque che i due fermioni si trovino in uno stato legato di singoletto. Non si capisce quindi perché non esistano stati legati fra due protoni o due neutroni. Il deutone esiste però solo nel suo stato fondamentale di tripletto, cioè la forza fra  $n - p$  è tale da non consentire uno stato legato di singoletto; quindi se si assume che la forza che agisce fra due protoni o neutroni è la stessa si spiega il dilemma. Sulla base di questi fatti *Heisenberg* formulò quindi una teoria secondo cui la forza fra i nucleoni non dipendeva dalla carica. Il concetto di indipendenza dalla carica si può esprimere dicendo che la forza nucleare non distingue fra nucleoni carichi o no. Quindi, se non si considerano effetti elettromagnetici, neutrone e protone rappresentano una stessa particella (il nucleone). La differenza di massa fra  $n$  e  $p$  ha proprio origine elettromagnetica e non ci sarebbe se le due particelle avessero la stessa carica. Il fatto che gli effetti elettromagnetici siano presenti implica che l'indipendenza dalla carica è una approssimazione, in quanto solo la forza nucleare non dipende dalla carica.

Neutrone e protone possono essere considerati in questo modello come due differenti stati di carica di una stessa particella. A questo proposito Heisenberg introdusse il formalismo dello *spin isotopico*. Quindi una particella ha un ulteriore grado di libertà oltre quelli spaziali e di spin. Questo grado di libertà è espresso da una variabile interna che può assumere solo due valori, quindi è una variabile dicotomica (come lo spin con  $s = 1/2$ ). Per lo spin si può usare l'espressione  $\frac{\sigma}{2}$  con  $\sigma = \pm 1$ . Per lo stato di carica si usa l'espressione:  $\tau$  con  $\tau = \pm 1$  dove  $\tau = +1 \rightarrow$  protone, e  $\tau = -1 \rightarrow$  neutrone.  $\tau$  si dice *variabile di spin isotopico o isospin*.

Al protone si può associare una funzione d'onda di isospin  $\pi(\tau)$  dove  $\pi(+1) = 1$  e  $\pi(-1) = 0$ . Al neutrone si associa, analogamente, la funzione d'onda di isospin  $\nu(\tau)$  dove  $\nu(+1) = 0$  e  $\nu(-1) = 1$ .

Queste due funzioni sono una base dello spazio delle funzioni d'onda relative allo spin isotopico; queste funzioni sono di funzioni di  $\tau$ . Le funzioni d'onda  $\pi$  e  $\nu$  si possono rappresentare come due vettori colonna:

$$\pi(\tau) = \begin{pmatrix} \pi(+1) \\ \pi(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \nu(\tau) = \begin{pmatrix} \nu(+1) \\ \nu(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questi due vettori sono una base ortonormale di uno spazio vettoriale a due dimensioni, purché i due bra siano definiti dai vettori riga.

---

§

Lo spin ordinario è rappresentato, in unità di  $\hbar$ , dall'operatore

*18-03-1998*

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \quad [13.2]$$

e si trasforma come un vettore per rotazioni del sistema fisico. Le componenti sono:

$$s_x = \frac{\sigma_x}{2}, \quad s_y = \frac{\sigma_y}{2}, \quad s_z = \frac{\sigma_z}{2}$$

dove  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  sono le *matrici di Pauli*.

Queste matrici agiscono nello spazio a due dimensioni relativo allo spin 1/2. La rappresentazione di queste matrici è fatta rispetto alla base costituita dai due autostati relativi alla direzione z.

Si possono, quindi, definire per matrici formalmente identiche a quelle di Pauli

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

queste agiscono nello spazio a due dimensioni relativo agli stati di isospin.

La matrice  $\tau_3$  rappresenta la variabile di isospin  $\tau$  sottoforma di operatore. Infatti si ha:

$$\tau_3 |p^+\rangle = |p^+\rangle \quad \tau_3 |n\rangle = -|n\rangle$$

Possiamo considerare  $\tau_1, \tau_2$  e  $\tau_3$  come componenti ortogonali di un unico operatore vettoriale, relativo ad uno spazio euclideo astratto. In questo spazio è lecito, quindi, definire l'operatore:

*Spazio dello spin isotopico*

$$\boxed{\vec{T} = \frac{\vec{\tau}}{2}} \quad [13.3]$$

Questo spazio tridimensionale così introdotto si dice *spazio dello spin isotopico*. Questo non è lo spazio degli stati di spin isotopico (che ha dimensione 2). Ovviamente per le componenti di  $T$  e  $\tau$  valgono le note regole di commutazione. Partendo dai due operatori  $T_1$  e  $T_2$  si possono definire i due operatori

$$T_+ \equiv (T_1 + iT_2) \quad T_- \equiv (T_1 - iT_2) \quad [13.4]$$

$$T_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad [13.5]$$

Si verifica facilmente che valgono le seguenti relazioni

$$T_+ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad T_+ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad T_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Equivalentemente queste relazioni si possono scrivere sotto la forma:

$$T_+ |n\rangle = |p^+\rangle ; \quad T_+ |p^+\rangle = 0 ; \quad T_- |p^+\rangle = |n\rangle ; \quad T_- |n\rangle = 0$$

$$T_3 |p^+\rangle = \frac{1}{2} |p^+\rangle ; \quad T_3 |n\rangle = -\frac{1}{2} |n\rangle$$

---

Ovviamente  $|p^+\rangle$  e  $|n\rangle$  sono autostati di  $T_3$  con autovalori  $+\frac{1}{2}$  e  $-\frac{1}{2}$ . Per il significato noto degli stati  $|p^+\rangle$  e  $|n\rangle$ , si intuisce che deve esistere una relazione fra l'operatore  $T_3$  e l'operatore di carica. L'*operatore di carica*  $Q$  si può definire dalla relazione:

$$Q|p^+\rangle = (+1)|p^+\rangle \quad Q|n\rangle = 0 \quad [13.6]$$

(in unità di carica protonica). Da queste si deduce che

*Operatore di carica*

$$Q = T_3 + \frac{B}{2} \quad [13.7]$$

dove  $B|p^+\rangle = |p^+\rangle$  e  $B|n\rangle = |n\rangle$  ( $B$  = *operatore unità*).  $B$  si dice *operatore di numero barionico*.  $B$  coincide con l'operatore identità solo perché stiamo analizzando solo lo spazio relativo ai nucleoni, se si estende questo spazio  $B$  ha anche autovalori  $-1$ . Se si ha un sistema di nucleoni l'operatore totale di spin isotopico è:

$$\vec{T} = \vec{T}_{(1)} + \vec{T}_{(2)} \quad \text{come } L \quad [13.8]$$

dove  $T_{(1)}$  e  $T_{(2)}$  sono operatori che agiscono su spazi differenti. Si ha che:

$$\vec{T}_{(1)}^2 |1\rangle = t_{(1)}(t_{(1)}+1) |1\rangle \quad \vec{T}_{(2)}^2 |2\rangle = t_{(2)}(t_{(2)}+1) |2\rangle \quad \text{come } L^2$$

dove  $t_{(1)} = t_{(2)} = 1/2$ . Possiamo definire l'operatore  $\vec{T}^2$

$$\vec{T}^2 = \vec{T}_{(1)}^2 + \vec{T}_{(2)}^2 + 2 \vec{T}_{(1)} \vec{T}_{(2)}. \quad [13.9]$$

Un generico autovalore di  $\vec{T}^2$  si può scrivere sotto la forma  $t(t+1)$ . Deve essere sempre verificata la diseguaglianza triangolare:

$$|t_1 - t_2| \leq t \leq t_1 + t_2$$

e dal momento che  $t$  può variare solo per salti unitari si ha:

$$t = t_1 + t_2, t_1 + t_2 - 1, \dots, |t_1 - t_2|$$

Nel caso in cui  $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$  si hanno solo i due valori  $t = 1$  e  $t = 0$ .

Se  $t = 1$  il sistema dei due nucleoni si trova in uno stato di isospin di tripletto, se  $t = 0$  di singoletto. Diciamo che il singolo nucleone si trova in uno stato di isospin di doppietto, cioè che gli stati di neutroni e di protoni costituiscono un doppietto di isospin. Quindi un doppietto di isospin è dato dalla base di autofunzioni  $\pi(\tau)$  e  $\nu(\tau)$ . Due doppietti identici di isospin sono costituiti dalle basi:

$$\{\pi(\tau_{(1)}), \nu(\tau_{(1)})\} ; \quad \{\pi(\tau_{(2)}), \nu(\tau_{(2)})\}$$

Per semplicità poniamo  $\tau_{-(1)} = 1$  e  $\tau_{(2)} = 2$ . Le basi quindi sono:

$$\{\pi(1), \nu(1)\} ; \quad \{\pi(2), \nu(2)\}$$

La base dello spazio relativo agli stati di spin di singoletto o di tripletto è:  $\pi(1)\pi(2), \nu(1)\nu(2)$ ,  $\pi(1)\nu(2), \nu(1)\pi(2)$ .

Le autofunzioni di singoletto e di tripletto sono:

$$\left. \begin{array}{lll} \pi(1)\pi(2) & (t_3 = +1) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[\pi(1)\nu(2) + \nu(1)\pi(2)] & (t_3 = 0) \\ \nu(1)\nu(2) & (t_3 = -1) \end{array} \right\} \quad t = 1 \quad \text{tripletto}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[\pi(1)\nu(2) - \nu(1)\pi(2)] \quad (t_3 = 0) \quad t = 0 \quad \text{singoletto}$$

Per indicare simbolicamente la composizione di due doppietti di isospin si usa la seguente rotazione:

$$2 \equiv \{\pi(\tau), \nu(\tau)\}$$

$$2 \times 2 = 3 + 1$$

---

### §

23-03-1998

Abbiamo visto che due nucleoni si comportano come fermioni per quanto riguarda le forze nucleari, quindi questi devono sottostare al *principio di esclusione di Pauli*. La loro funzione d'onda deve essere antisimmetrica, sia nella parte radiale che in quella di isospin, che in quella di spin (deve essere antisimmetrico tutto il prodotto di questi termini).

$$\psi = \psi_r \psi_\sigma \psi_\tau$$

Nel caso in cui si hanno due protoni o due neutroni la parte di isospin risulta simmetrica:

$$\begin{aligned} \psi_\tau &= \pi(1) \pi(2) = \pi(2) \pi(1) \\ \psi_\tau &= \nu(1) \nu(2) = \nu(2) \nu(1) \end{aligned}$$

quindi la rimanente parte  $\psi_r, \psi_\sigma$  deve risultare antisimmetrica, in accordo con la teoria già formulata.

Consideriamo la parte della funzione  $\psi_r, \psi_\sigma$ ; si ha che per lo scambio degli indici:

---


$$\psi_r \psi_\sigma \xrightarrow[1 \leftrightarrow 2]{} (-1)^l (-1)^{s+1} \psi_r \psi_\sigma$$

abbiamo detto che questa deve essere antisimmetrica, quindi:

$$(-1)^l (-1)^{s+1} = -1 \implies l + s + 1 = \text{dispari}$$

da questa condizione si estraggono due sottocasi:

$$l + s + 1 = \begin{cases} s = 1, \implies l = \text{dispari}, \\ s = 0, \implies l = \text{pari}. \end{cases}$$

Nel caso generico in cui i due nucleoni possono anche essere un protone e un neutrone dobbiamo considerare tutta la funzione d'onda. Per lo scambio degli indici si ha la seguente trasformazione:

$$\psi_r \psi_\sigma \psi_\tau \xrightarrow[1 \leftrightarrow 2]{} (-1)^l (-1)^{s+1} (-1)^{t+1} \psi_r \psi_\sigma \psi_\tau$$

quindi deve essere verificata la condizione:

$$(-1)^l (-1)^{s+1} (-1)^{t+1} = -1$$

La regola di selezione generalizzata è:

$$l + s + t = \text{dispari}$$

[13.10]

Questa regola si applica al deutone (=stato legato di un protone e di un neutrone). Questo sistema è caratterizzato dai numeri quantici  $l = 0$  e  $s = 1$ . Applicando la regola di selezione si deduce che  $t$  deve essere pari, ma dal momento che  $t$  può assumere solo valori 0 e 1 si deduce che deve essere  $t = 0$  per il deutone.

# 14

## CONSERVAZIONE DELLO SPIN ISOTOPICO

Abbiamo visto che per un nucleone esiste una ben determinata relazione fra la carica elettrica e la terza componente dello spin isotopico. Questa relazione in termini di operatori è:

$$Q = T_3 + \frac{B}{2}$$

Viste le proprietà dell'operatore  $\vec{T}$  si può porre la analogia:

$$T_3 \longleftrightarrow J_z \quad \vec{T}^2 \longleftrightarrow \vec{J}^2$$

Se si opera una rotazione dello spazio di isospin deve quindi essere:

$$\delta \langle T_3 \rangle \neq 0 \quad \delta \langle \vec{T}^2 \rangle = 0$$

questa trasformazione trasforma lo stato iniziale del nucleone  $|N\rangle$  in uno stato  $|N'\rangle$ , che si può scrivere come:

$$|N\rangle \Rightarrow |N'\rangle = C'_1 |p^+\rangle + C'_2 |n\rangle \quad \text{con } |C'_1|^2 + |C'_2|^2 = 1$$

Gli stati  $|p^+\rangle$  e  $|n\rangle$  hanno lo stesso numero barionico ( $B=1$ ), quindi per lo stato  $|N'\rangle$  si avrà sempre lo stesso numero barionico:

$$\delta \langle B \rangle = 0$$

cioè il numero barionico si comporta come uno scalare nello spazio di isospin. Quindi si può scrivere la relazione:

---


$$\delta \langle Q \rangle = \delta \langle T_3 \rangle$$

In base a quanto detto le trasformazioni

$$n \longleftrightarrow p^+ \quad p^+ \longleftrightarrow n$$

possono considerarsi come particolari rotazioni nello spazio di isospin.

L'indipendenza della carica dalle forze nucleari si può esprimere matematicamente come invarianza per rotazioni nello spazio di isospin.

Se chiamiamo interazione forte quella responsabile del legame nucleone e se  $H_F$  è l'Hamiltoniana di interazione si può, quindi, dimostrare che  $H_F$  non cambia per rotazioni nello spazio di isospin.

Se indichiamo con  $R_\tau$  la trasformazione indotta dalla rotazione nello spazio degli stati si avrà che:

$$|N'\rangle = R_\tau |N\rangle$$

quindi deve risultare:

$$R_\tau H_F = H_F R_\tau \implies [R_\tau, H_F] = 0$$

Se assumiamo che il  $n$  e il  $p^+$  abbiano la stessa massa si può scrivere più in generale:

$$[R_\tau, H] = 0 \quad \text{dove } H = H_0 + H_F$$

L'invarianza per rotazioni nello spazio di isospin implicherà la conservazione dello spin isotopico (in analogia con  $J$ ). Si può scrivere:

$$R_\tau = e^{-i\theta \hat{n} \vec{T}}$$

e per una rotazione infinitesima:

$$R_\tau = 1 - i d\theta \hat{n} \vec{T}$$

Da questo segue che:

$$[R_\tau, H] = 0 \iff [\vec{T}, H] = 0 \iff \vec{T} \text{ si conserva}$$

Quindi il principio di indipendenza della carica è equivalente alla condizione  $[\vec{T}, H] = 0$ . Si deve notare che questo principio di conservazione dello spin isotopico non ha validità generale, ma solo quando si considerano solamente le interazioni forti. Non appena si considerano interazioni elettromagnetiche questa conservazione non vale più.

Sperimentalmente per i processi che coinvolgono solo interazioni forti non si verifica mai che:

$$\langle \vec{T}^2 \rangle_{\text{fin}} \neq \langle \vec{T}^2 \rangle_{\text{in}} \quad \langle \vec{T}_3 \rangle_{\text{fin}} \neq \langle \vec{T}_3 \rangle_{\text{in}}$$

questo fatto sperimentale è una conferma dell'indipendenza dalla carica delle interazioni forti.

Parte III

## ELEMENTI DI FISICA SUBNUCLEARE

# 15

## TEORIA DI YUKAWA DEL MESONE $\Pi$

Il primo tentativo di una interpretazione dinamica dell'interazione forte fu fatta da Yukawa. Il suo intento era quello di fornire una interpretazione autoconsistente dell'interazione forte sul modello della interpretazione quantistica dei processi elettromagnetici. Il presupposto fondamentale della teoria di Yukawa è il concetto relativistico del *campo*.

Secondo la teoria della relatività una interazione non può propagarsi istantaneamente, questo significa che non è più concepibile un'interazione a distanza tra due sistemi con un trasferimento istantaneo d'energia. Quindi deve esistere una terza entità fisica che abbia la funzione di trasmettere l'energia emessa e di mediare l'interazione; questa terza entità si identifica con il campo.

In realtà quello che succede è che ciascuno dei due sistemi interagisce localmente con il campo generato dall'altro sistema. Se questo concetto viene trasferito nell'abito della meccanica quantistica si arriva ad un modello quantizzato del campo, quindi si devono attribuire al campo proprietà sia corpuscolari che ondulatorie.

Secondo la visione quantistica, l'interazione non locale tra due sistemi sarebbe mediata da singoli quanti che vengono localmente emessi ed assorbiti da ciascuno dei due sistemi. Tutto questo si applica, in particolare, al campo elettromagnetico il cui quanto fondamentale è il *fotone*. L'interazione fra due cariche viene interpretata in termini di fotoni emessi ed assorbiti dalle due cariche.

Yukawa intuì che un modello analogo dovesse in qualche modo valere anche per l'interazione forte fra due nucleoni. Apparentemente, infatti, tale interazione cominciava a farsi sentire ad una distanza di  $10^{-13} \text{ cm}$ , e quindi dato che non si poteva propagare da un nucleone all'altro doveva essere mediata da un quanto analogo al fotone. A questo ipotetico quanto Yukawa diede il nome di *mesone  $\pi$* . Esiste, comunque, una proprietà fondamentale che distingue le due interazioni e cioè che l'interazione forte è a corto raggio (a differenza di quella elettromagnetica). Questa differenza ha profondi implicazioni di natura fisica. Per capire quali esse siano conviene partire dall'equazione classica di propagazione del potenziale elettromagnetico

nel vuoto:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0 \quad [15.1]$$

Questa ha un'unica soluzione statica del tipo  $V \propto 1/r$ , questa soluzione implica che l'interazione elettromagnetica ha raggio infinito. Ovviamente per un potenziale a corto raggio, non può valere la stessa equazione. Si possono interpretare in maniera quantistica gli operatori che compaiono nella 15.1:

$$\begin{aligned}\nabla^2 &\equiv -\frac{1}{\hbar^2} (-i\hbar\vec{\nabla})(-i\hbar\vec{\nabla}) \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &\equiv -\frac{1}{\hbar^2} \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

dove  $-i\hbar\vec{\nabla}$  è l'operatore quantità di moto

Consideriamo ora la soluzione del tipo:

$$\begin{aligned}V &\propto e^{i(kx-\omega t)} \\ \nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V &= \left( -K^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) V = \frac{1}{\hbar^2} \left( \frac{E^2}{c^2} - p^2 \right) V = 0\end{aligned}$$

dove si è posto  $E = \hbar\omega$  e  $p = \hbar K$ . Deve, quindi, essere:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = 0$$

$E$  e  $p$  sono l'energia e la quantità di moto del singolo fotone di massa nulla associato all'onda piana. Per una particella con massa  $m$  non nulla si deve avere:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2$$

Sostituendo queste espressione si può generalizzare l'equazione d'onda nella forma:

$$\nabla^2 V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} V = \mu^2 V \quad \mu^2 = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \Rightarrow \boxed{\mu = \frac{mc}{\hbar}}$$

Si può dimostrare che esiste la soluzione statica del tipo:

$$\boxed{V \propto \frac{1}{r} e^{-\mu r}}$$

Questo potenziale esprime l'interazione entro un raggio caratteristico  $r_0 = 1/\mu$ , per distanze maggiori di  $r_0$  l'interazione diviene molto piccola. Quindi il campo di interazione forte non può essere associato ad un quanto di massa nulla, ma dovrà essere associata ad un quanto con massa tale da soddisfare la condizione:

$$r_0 = \frac{\hbar}{mc} \sim 10^{-13} \text{ cm}$$

Secondo questo modello ogni nucleone genera un potenziale statico:

$$V_F(r) = -g_F \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

con  $g_F$  = costante di accoppiamento di Yukawa. Il segno meno implica un potenziale attrattivo. Il valore di  $g_F$  è determinato empiricamente ed il suo ruolo è analogo a quello della carica elettrica.

L'energia associata all'interazione di due cariche elementari è data da:

$$eV(r) = \frac{e^2}{r}$$

mentre l'intensità dell'interazione è determinata dalla costante di struttura fine:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \implies eV(r) = \alpha \left( \frac{\hbar c}{r} \right)$$

Nel caso di due cariche forti, l'energia analoga a quella elettrostatica è:

$$g_F V_F(r) = -g_F^2 \frac{e^{-\mu r}}{r}$$

Se si prescinde dal fattore esponenziale, l'intensità dell'interazione forte può essere espressa in termini della costante dimensionale:

$$\frac{g_F^2}{\hbar c} \approx 14.5$$

Quindi, l'intensità forte è quasi 2000 volte più intensa di quella elettromagnetica. Sperimentalmente si ricava per il parametro  $\mu$  il valore:

$$\mu = \frac{1}{r_0} \approx 0.7 \times 10^{13} \text{ cm}$$

Quindi la massa del mesone  $\Pi$  dovrebbe essere:

$$m_\Pi = \frac{\hbar \mu}{c} \approx \frac{(6.58 \times 10^{-22} \text{ MeV sec})(0.7 \times 10^{13} \text{ cm}^{-1})(3 \times 10^{10} \text{ cm/sec})}{c^2}$$

$$\Rightarrow m_\pi \approx 138 \text{ MeV}/c^2$$

---



---

### §

Abbiamo visto che, in base alla teoria di Yukawa, il mesone  $\pi$  ha una massa pari a circa:

*27-3-1998*

$$m_\pi \simeq 138 \text{ MeV}/c^2$$

Supponiamo che il singolo nucleone emetta o assorba un mesone  $\pi$  dando luogo ad uno dei processi di Yukawa:



Analizziamo ad esempio l'emissione. Questo processo non può essere compatibile con la conservazione dell'energia, infatti l'energia disponibile,  $Q$ , deve essere tale che<sup>1</sup>:

$$m_N c^2 = m_{N'} c^2 + Q \quad Q_{\max} \simeq 1 \text{ MeV}$$

Se un mesone  $\pi$  viene prima emesso da un nucleone e poi assorbito da un altro nucleone, l'energia del sistema dei due nucleoni si conserva. L'energia in più creata nell'emissione viene poi distrutta nell'assorbimento del mesone  $\pi$ . Si conclude, quindi, che il processo di scambio di un mesone  $\pi$  fra due nucleoni è un processo virtuale e quindi non osservabile; cioè questo processo avviene solo all'interno dell'indeterminazione dell'energia dei nucleoni conseguente al principio d'indeterminazione di Heisenberg.

Consideriamo l'equazione classica del potenziale a corto raggio:

$$V(r) \propto \frac{1}{r} e^{-r/r_0}$$

dove  $r_0$  = è la *distanza efficace*.

Nel caso dell'interazione forte si ha:

$$r_0 = r_{0_F} = \frac{\hbar}{m_\pi c}$$

La natura virtuale di questo processo di scambio chiarisce ancora meglio questa relazione. Sia  $\Delta t$  l'intervallo di tempo che in media intercorre fra emissione e assorbimento. In questo intervallo, l'energia dei nucleoni ha una indeterminazione:

$$\Delta E = \frac{\hbar}{\Delta t}$$

---

<sup>1</sup>la differenza di massa fra un neutrone e un protone è  $\simeq 1 \text{ MeV}/c^2$

Affinché avvenga questo processo di scambio deve essere:

$$\Delta E > m_\Pi c^2 \implies \Delta t = \frac{\hbar}{\Delta E} < \frac{\hbar}{m_\pi c^2}$$

In questo intervallo il mesone può percorrere al massimo la distanza media:

$$\bar{d}(v_{\max}) = v_{\max} \Delta t = c \Delta t < \frac{\hbar}{m_\pi c}$$

quindi lo scambio di un mesone  $\pi$  fra due nucleoni può risultare virtuale solo se la distanza media fra i due nucleoni è tale che:

$$\bar{d} < \frac{\hbar}{m_\pi c} = r_{0_F}$$

Nel modello di Yukawa gioca un ruolo essenziale il *principio di indipendenza della carica*. In base a questo principio, il mesone  $\pi$  può trasportare o una carica nulla, o una carica  $e$ . Se all'inizio abbiamo un protone e un neutrone possono avvenire due processi:

$$\begin{aligned} p^+ + n &\implies p^+ + \pi^0 + n \implies p^+ + n \\ p^+ + n &\implies n + \pi^+ + n \implies n + p^+ \end{aligned} \quad \text{mesone } \pi \text{ emesso dal protone}$$

Se invece è il neutrone ad emettere può avvenire anche il processo:

$$n + p^+ \implies p^+ + \pi^- + p^+ \implies p^+ + n$$

Quindi il mesone  $\pi$  può esistere con tre varietà di carica. Questi sono un tripletto di isospin cioè  $t^{(\pi)} = 1 = \text{numero quantico di isospin del mesone } \pi$ .

Per verificare questa basta applicare il principio di conservazione dello spin isotopico ad uno qualsiasi dei processi di sopra. Per quanto riguarda la terza componente dello spin isotopico si ha che:

$$t_3^{(\pi^+)} = +1 \quad t_3^{(\pi^0)} = 0 \quad t_3^{(\pi^-)} = -1$$

Questi autovalori coincidono con quelli dell'operatore  $Q$ . Quindi ricaviamo le seguenti relazioni

$$Q|\pi\rangle = \left( T_3 + \frac{B}{2} \right) |\pi\rangle = T_3 |\pi\rangle \implies B |\pi\rangle = 0$$

il numero barionico del mesone  $\pi$  è zero.

Il processo di scambio del mesone  $\pi$  si può studiare con la *teoria delle perturbazioni* come un processo del secondo ordine, cioè un processo con uno stato intermedio fra lo stato iniziale e quello finale. Consideriamo ad esempio il processo:

$$p^+ + p^+ \implies p^+ + \pi^0 + p^+ \implies p^+ + p^+$$

Gli stati da considerare sono:

$$|i\rangle = |p^+, p^+\rangle \} \quad \text{stato iniziale}$$

e

$$\left. \begin{array}{l} |m\rangle = |p^+, \pi^0, p^+\rangle \\ |f\rangle = |p^+, p^+\rangle \end{array} \right\} \quad \text{stato intermedio}$$

L'intero processo presenterà due vertici che sono i punti spazio-temporali che corrispondono all'emissione e all'assorbimento del mesone  $\pi$ . Vale in questo caso la *regola d'oro di Fermi*, dove si ha:

$$T_{if} = H_{if} = \sum_m \frac{H_{im} H_{mf}}{E_i - E_m}$$

dove la somma è estesa agli stati intermedi con energia  $E_m$ .

$H_{im}$  e  $H_{mf}$  si riferiscono all'emissione e all'assorbimento di un mesone con una data carica, e nella somma si considerano i diversi stati di carica. Il valore  $E_m$  si ricava applicando la conservazione della quantità di moto, che si assume valida nei processi di Yukawa. In particolare si ha che:

$$E_\pi = \sqrt{\vec{p}_\pi^2 c^2 + m_\pi^2 c^4} \quad \vec{p}_\pi = \vec{p}_{N^0} - \vec{p}_{N'}$$

## 15.1 DIAGRAMMI DI FEYNMAN

La dinamica di questo processo può essere studiata tramite i diagrammi di Feynman. Consideriamo ad esempio i processi:

$$\begin{aligned} p^+ + p^+ &\Rightarrow p^+ + \pi^0 + p^+ \Rightarrow p^+ + p^+ \\ n + n &\Rightarrow n + \pi^0 + n \Rightarrow n + n \end{aligned}$$

e questi sono caratterizzati dallo stesso stato intermedio

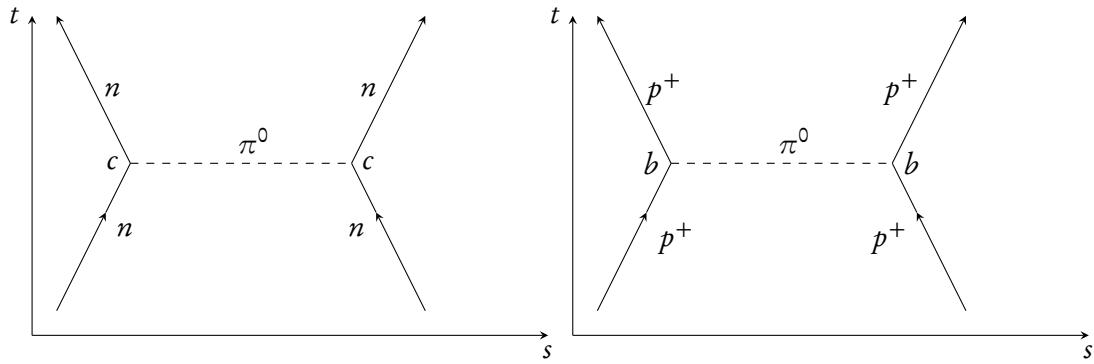
$$H_{if} = \frac{H_{im} H_{mf}}{E_i - E_m}$$

In questo caso i diagrammi sono quelli di Figura 15.1.  $c$  e  $b$  indicano le costanti di accoppiamento degli elementi di matrice  $H_{mi}$  e  $H_{mf}$ . Nel primo caso la costante complessiva di accoppiamento è  $c^2$ , nel secondo caso è  $b^2$ . Per il *principio di indipendenza della carica elettrica* deve essere:

$$c^2 = b^2$$

---

§

**FIGURA 15.1:** Diagrammi di Feynman.

30-3-1998

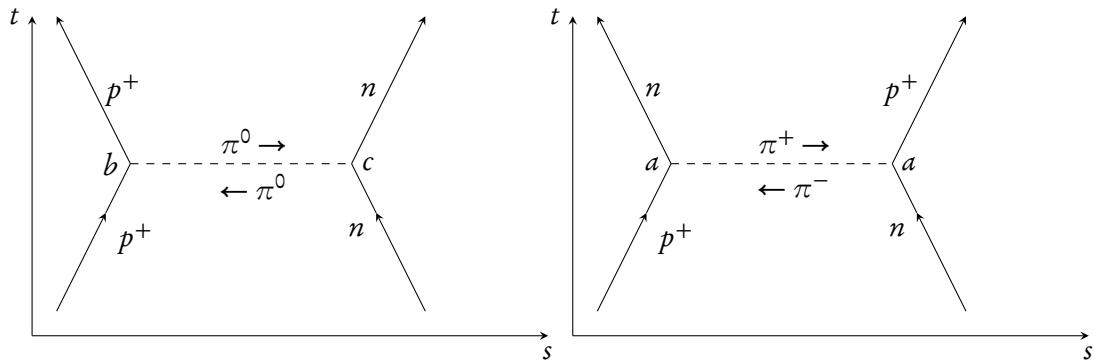
Nella trattazione fatta si è assunta una trasmissione istantanea del mesone  $\pi$  da un nucleone all’altro.

Consideriamo ora l’interazione fra due nucleoni diversi. Esistono due possibili stati intermedi a seconda che il processo avvenga con, o senza, scambio di carica.

La sommatoria che dà  $H_{if}$  sarà, quindi, composta solo da due termini:

$$H_{if} = \frac{H_{im}^{(1)} H_{mf}^{(1)}}{E_i - E_m^{(1)}} + \frac{H_{im}^{(2)} H_{mf}^{(2)}}{E_i - E_m^{(2)}} \quad [15.2]$$

Se si trascurano gli effetti elettromagnetici si ha  $E_m^{(1)} = E_m^{(2)}$ . La [15.2] può essere rappresentata dalla somma dei seguenti diagrammi:

**FIGURA 15.2:** Diagrammi di Feynman per il mesone  $\pi$ 

Per lo stato  $2^2$  il mesone  $\pi$  può avere carica positiva o negativa a seconda di quale nucleone lo ha emesso. Il primo diagramma ha una costante di accoppiamento complessiva  $bc$ , mentre

<sup>2</sup>vedi grafico 15.2 a destra

il secondo  $\alpha^2$ . I due termini (1 e 2) possono differire solo per queste costanti di accoppiamento, quindi la costante di accoppiamento dell'interno processo è:

$$bc + \alpha^2$$

Per l'indipendenza della carica deve essere:

$$bc + \alpha^2 = b^2 = c^2$$

La prima uguaglianza è compatibile con la seconda solo se  $b = -c$ , perché altrimenti risulterebbe  $\alpha = 0$ . Quindi si trova che:

$$\alpha^2 = 2b^2$$

Possiamo porre  $b^2 = -g_F^2$  dove  $g_F$  è la costante di accoppiamento di Yukawa. Si può, dunque, scrivere in definitiva:

$$b = ig_F \quad c = -ig_F \quad \alpha = i\sqrt{2}g_F$$

(Si poteva anche scegliere  $\alpha = -i\sqrt{2}g_F$ , la scelta è arbitraria e convenzionalmente si fa la scelta di cui sopra).

Tutti i quattro diagrammi presentano due vertici, questo esprime il fatto che si tratta di processi del secondo ordine. Mentre per l'interazione debole il processo fondamentale è di primo ordine, per come abbiamo visto. In realtà vedremo che anche l'interazione debole è un processo del secondo ordine, dove però la massa del mesone intermedio è estremamente grande, quindi il range di interazione è estremamente piccolo (questo spiega perché in prima approssimazione si può trattare come un processo del primo ordine).

Un'altra previsione del modello di Yukawa riguarda lo spin del mesone  $\pi$ . In teoria il mesone  $\pi$  può avere soltanto uno spin di valore 0 o 1, questo perché i due nucleoni hanno spin 1/2. Tenendo presente che il deutone ha spin 1 si ricava subito che l'unico valore consentito è:

$$S^{(\pi)} = 0$$

infatti comunque scelta la direzione  $z$  si ha che nel deutone:

$$\langle S_z \rangle_n = \langle S_z \rangle_{p^+} \implies \langle S_z \rangle_\pi = 0$$

Quindi il mesone  $\pi$  è un bosone con spin 0. La teoria di Yukawa può spiegare anche perché il neutrone pur avendo carica nulla ha un momento di dipolo magnetico non nullo, con rapporto giromagnetico negativo. Si può giustificare qualitativamente questo fatto supponendo che anche per un neutrone libero si possa avere la dissociazione:

$$n \rightarrow p^+ + \pi^-$$

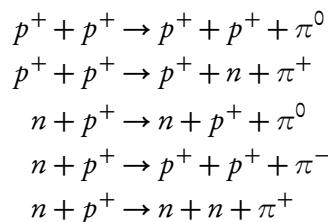
Il mesone  $\pi^-$  ha un momento di dipolo magnetico con  $g_s$  negativo in quanto ruoterà attorno al protone.

## 15.2 SCOPERTA DEL PIONE E SUE PROPRIETÀ

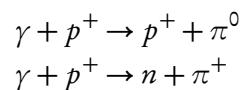
La prima conferma sperimentale dell'esistenza del mesone  $\pi$  avvenne nel 1947. Venne scoperta nei raggi cosmici una particella di massa  $m \simeq 139.6 \text{ MeV}/c^2$  con spin 0. Nell'anno successivo fu prodotta in laboratorio una particella identica con carica opposta. Due anni dopo fu scoperta una particella con spin 0 e massa  $m \simeq 135 \text{ MeV}/c^2$ . Queste particelle furono chiamate *pioni*. Dalla loro somiglianza con i mesoni  $\pi$  fu dedotto che queste dovevano essere proprio i mesoni  $\pi$ . La differenza di massa fra i diversi stati di carica si può giustificare in base ad effetti elettromagnetici. In realtà i pioni possono essere prodotti mediante urti nucleone-nucleone. Il caso più semplice è:



processi di questo tipo sono ad esempio:



In queste reazioni il pione reale prodotto non va confuso con quello virtuale che viene scambiato fra i nucleoni. Un altro modo di creare pioni in laboratorio è:



1-4-1998

Due tipici processi forti che danno luogo ad un pione positivo e ad uno neutro sono caratterizzati dalle seguenti reazioni:

$$\left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = |1,1\rangle \implies |0,0\rangle + |1,1\rangle = |1,1\rangle$$

$$p^+ + p^+ \implies d + \pi^+ \quad (|t, t_3\rangle = |1,1\rangle)$$

$$\left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = |1,0\rangle \implies |0,0\rangle + |1,0\rangle = |1,0\rangle$$

$$p^+ + n \implies d + \pi^0 \quad (|t, t_3\rangle = |1,0\rangle)$$

in queste reazioni i nucleoni finali appaiono legati in un deutone. Quest'ultimo ha isospin 0 mentre  $\pi$  ha isospin 1, quindi entrambi gli stati finali hanno isospin 1. In particolare  $d$  e  $\pi^+$  caratterizzano l'autostato di isospin  $|t, t_3\rangle = |1,1\rangle$ , mentre  $d$  e  $\pi^0$  formeranno l'autostato  $|t, t_3\rangle = |1,0\rangle$ . Dalle regole di composizione del momento angolare sappiamo che:

$$|1,1\rangle = |p^+\rangle |p^+\rangle$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |p^+\rangle |n\rangle + |n\rangle |p^+\rangle ]$$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |p^+\rangle |n\rangle - |n\rangle |p^+\rangle ]$$

Nella prima reazione si ha all'inizio lo stato  $|1,1\rangle$  così come alla fine. Nella seconda invece si ha:

$${}^3|p^+\rangle |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|1,0\rangle + |0,0\rangle]$$

come stato iniziale. Alla fine si ha un autostato  $|1,0\rangle$ . Riepilogando possiamo porre per la prima reazione e per la seconda:

$$1) \quad |1,1\rangle \implies |1,1\rangle \quad \sigma^+$$

$$2) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} [|1,0\rangle + |0,0\rangle] \implies |1,0\rangle \quad \sigma^0$$

$\sigma^+$  e  $\sigma^0$  sono le sezioni d'urto delle due reazioni. La prima conserva l'isospin quindi  $\sigma^+ \neq 0$ . Per la seconda l'unico contributo alla sezione d'urto dovrebbe venire dal canale che conserva l'isospin, cioè

$$|1,0\rangle \implies |1,0\rangle$$

---

<sup>3</sup>gli stati  $|p^+\rangle$  e  $|n\rangle$  corrispondono rispettivamente a  $|1/2, 1/2\rangle$  e a  $|1/2, -1/2\rangle$ . Combinando linearmente questi due stati si possono ottenere due autostati di  $T_{TOT}$ :  $|1,0\rangle, |0,0\rangle$ .

Indichiamo con  $\sigma_{(1)}^0$  la sezione d'urto relativa a questo canale. Si può concludere che deve essere:

$$\sigma^0 = \frac{1}{2} \sigma_{(1)}^0$$

in quanto il sistema ha probabilità  $1/2$  di trovarsi nello stato iniziale  $|1,0\rangle$  ( $\sigma$  si interpreta come probabilità che avvenga la diffusione).

Supponendo che i due nucleoni iniziali si trovino nello stesso stato cinematico e di spin dei due nucleoni iniziali della prima reazione, deve essere:

$$\sigma_{(1)}^0 = \sigma^+$$

tralasciando le differenze di massa fra  $p^+$  e  $n$  e fra  $\pi^+$  e  $\pi^0$ . Per la conservazione dell'isospin deve dunque essere:

$$\frac{\sigma^0}{\sigma^+} = \frac{1}{2}$$

Questa previsione teorica è in ottimo accordo con i risultati sperimentali. Esistono altre previsioni teoriche di questa teoria che si accordano pienamente con i dati sperimentali, quella presentata era una delle più semplici come trattazione.

# 16

## CLASSIFICAZIONE DELLE PARTICELLE ELEMENTARI

Tenendo conto della loro dinamica tutte le particelle elementari si possono raggruppare in quattro famiglie di massa crescente.

### FOTONE

bosone di spin 1;

### LEPTONI

fermioni di spin 1/2 tutti più leggeri del protone tranne il leptone pesante  $\tau^-$ . I leptoni non sono soggetti all'interazione forte ma solo a quella elettromagnetica e a quella debole di Fermi;

### MESONI

particelle di spin intero e massa diversa da zero; il più leggero mesone è il  $\pi^0$ ;

### BARIONI

questi comprendono i nucleoni e gli iperoni, cioè i fermioni più pesanti del neutrone eccetto il  $\tau^-$ . Questi come i mesoni sono soggetti a tutte le interazioni, per questo mesoni e barioni si dicono *Adroni*.

Tutte queste particelle sono soggette alla forza gravitazionale che però è perfettamente trascurabile rispetto alle altre interazioni. Possiamo confrontare la forza gravitazionale considerando una costante dimensionale analoga a quella di struttura fine ( $e^2/\hbar c \simeq 1/137$ ). Questa costante è

$$\frac{K m_p^2}{\hbar c} \simeq 5.88 \times 10^{-39} \quad (K = G \simeq 6.67 \times 10^{-8} \text{dina} \times \text{cm}^2 \times \text{g}^{-2}; m_p = \text{massa protone})$$

Tutte le interazioni conosciute rispettano l'invarianza per inversione temporale a livello microscopico. Quindi quanto più alta è la probabilità di produrre una particella instabile, tanto più alta è la probabilità che questo decada, e tanto più breve sarà il tempo di vita media.

Le particelle che subiscono decadimenti di tipo forte hanno un tempo caratteristico di vita media:

$$\tau_F \sim \frac{r_{0F}}{c} = \frac{\hbar}{m_\pi c^2} \sim 10^{-23} \text{ sec} \quad (\text{tempo caratteristico di un processo forte})$$

Per i decadimenti di natura elettromagnetica o debole si ha invece:

$$10^{-20} \text{ sec} \leq \tau_E \leq 10^{-15} \text{ sec}$$
$$\tau_D \geq 10^{-10} \text{ sec}$$

$\tau$  si allunga al diminuire dell'intensità dell'interazione. Molte particelle vivono un tempo così breve da non lasciare tracce osservabili che permettano una loro rivelazione. Queste particelle si manifestano come risonanza. Per *risonanza* si intende uno stato legato fra particelle che collidono, individuato da un picco nel grafico della sezione d'urto in funzione dell'energia di collisione. Una particella si manifesta come risonanza quando il suo  $\tau$  è inferiore a  $10^{-12}$  sec.

# 17

## RISONANZA

Supponiamo di avere due fasci di particelle identiche, uno di tipo  $a$  e uno di tipo  $b$ , che si muovono in direzioni opposte e collidono. Consideriamo una particella di tipo  $a$  e una di tipo  $b$  e assumiamo che abbiamo spin zero ( $S_a = S_b = 0$ ). Sia  $\hbar K$  il modulo della quantità di moto delle particelle nel sistema del loro centro di massa. Sia  $E$  la loro energia totale. L'effetto di risonanza si può avere solo per un ben definito valore di  $l$  (*momento orbitale*). Infatti  $l$  sarà poi il valore dello spin nello stato legato che si genera (cioè  $l$  sarà lo spin della particella risonante). In prossimità della risonanza la sezione d'urto ha un particolare andamento in funzione di  $E$  (con  $l$  ben definito):

$$^1 \sigma^{(l)}(E) = \sigma_{\text{el}}^{(l)}(E) = \frac{4\pi}{K_R^2} (2l+1) \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

$E_R$  = energia di risonanza, cioè per  $E = E_R$   $\sigma^{(l)}$  è max.  $K_R$  = corrispondente valore di risonanza di  $K$ .

Questa formula vale per:

$$|E - E_R| \leq \Gamma \ll E_R$$

Questa formula è la cosiddetta *sezione d'urto di produzione della risonanza* (Figura 17.1).  $\Gamma$  = larghezza della curva di risonanza. In realtà  $\Gamma$  ha un significato fisico molto più profondo.

$$\sigma \left( E_K - \frac{\Gamma}{2} \right) = \sigma \left( E_K + \frac{\Gamma}{2} \right) = \frac{1}{2} \sigma_{\max} {}^2.$$

---

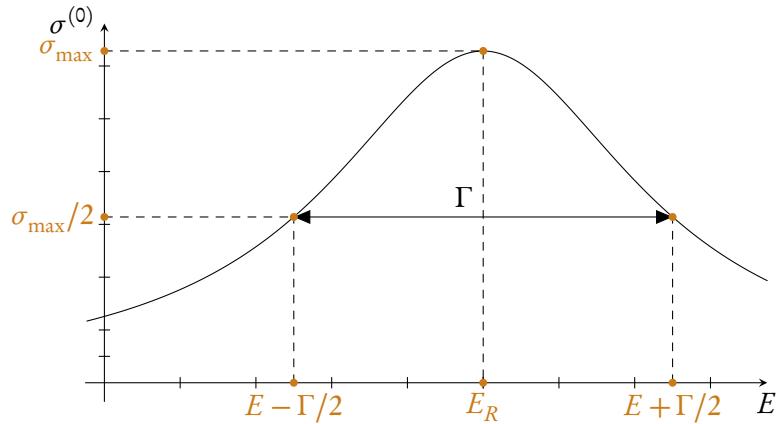
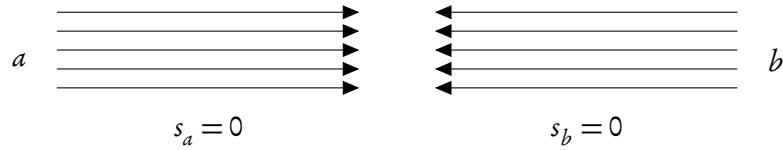
§

Consideriamo due fasci di particelle ( $a$  e  $b$ ) che si scontrano. Se associamo allo stato

*3-4-1998*

<sup>1</sup>  $\sigma_{\text{el}}$  = si assume che la diffusione sia di tipo elastico, cioè dopo la risonanza si hanno sempre due particelle  $a$  e  $b$

<sup>2</sup>  $\sigma_{\max} = \frac{4\pi}{K_R^2} (2l+1)$  di risonanza ( $E = E_R$ )

**FIGURA 17.1.:** Funzione  $\sigma^{(0)}(E)$ **FIGURA 17.2.:** Fasci in collisione di spin 0

risonante una funzione d'onda quasi stazionaria con un andamento temporale del tipo:

$$\Psi(t) = \Psi(0) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_R - i\Gamma_R/2)t}$$

Si può dimostrare che questa  $\Gamma_R$  è proprio il parametro di larghezza della curva di risonanza ( $\Gamma$ ):  $\Gamma_R \equiv \Gamma$

Sappiamo pure che:

$$|\Psi(t)|^2 = \exp \left[ -\frac{\Gamma_R}{\hbar} t \right]^3$$

quindi il tempo di vita media dello stato risonante è:

$$\tau_R = \frac{\hbar}{\Gamma_R} = \frac{\hbar}{\Gamma}$$

$\tau_R$  si può ricavare sperimentalmente dalla larghezza della curva di risonanza. Si usa questa tecnica per ricavare i tempi di vita media delle particelle che decadono in modo forte.

<sup>3</sup>Questa è la probabilità che la particella esista quindi si può considerare che sia stato fatto un integrale sullo spazio.

---

Abbiamo assunto che le particelle  $a$  e  $b$  sono prive di spin, quindi:

$$2l + 1 = 2J_R + 1 \quad J_R = \text{valore di spin della risonanza}$$

quindi la formula della sezione d'urto si può interpretare come somma di  $2J_R + 1$  termini, che sono sezioni d'urto identiche.

$2J_R + 1$  è il *peso statistico della risonanza*, cioè il numero di autostati. Il momento angolare orbitale di due particelle  $a$  e  $b$  può avere un qualsiasi valore in un piano perpendicolare alla loro velocità relativa. Di conseguenza scegliendo l'asse  $z$ , su questo piano la risonanza può essere indifferentemente prodotta in  $2J_R + 1$  autostati diversi. Quindi la sezione d'urto considerata è quella complessiva, ottenuta sommando su questi possibili autostati differenti. Questo è il significato fisico del fattore  $(2l + 1)$ .

Consideriamo ora il caso in cui lo spin delle particelle  $a$  e  $b$  è non nullo,  $S_a \neq 0$  e  $S_b \neq 0$ ; supponiamo di avere due fasci non polarizzati, cioè lo spin delle particelle può essere orientato in una qualsiasi direzione. Calcoliamo ora la probabilità che due particelle con un  $l$  fissato abbiano una giusta orientazione di spin per produrre una risonanza con un dato  $J_R$ . Questa probabilità è:

$$\frac{N_R}{N}$$

$N_R$  numero di autostati dello spin della risonanza.

$N$  numero di possibili autostati del momento angolare totale delle due particelle.

$$N_R = 2J_R + 1 \quad N = (2S_a + 1)(2S_b + 1)(2l + 1)$$

Quindi la probabilità che cerchiamo è:

$$g_R = \frac{N_R}{N} = \frac{(2J_R + 1)}{(2S_a + 1)(2S_b + 1)(2l + 1)}$$

adesso  $J_R$  non è più uguale a  $l$  appunto perché  $S_a \neq 0$  e  $S_b \neq 0$ . L'effettiva sezione d'urto della risonanza in questo caso è:

$$\sigma^{(J_R)}(E) = g_R \sigma^{(l)}(E) = \frac{4\pi}{K_R^2} \frac{(2J_R + 1)}{(2S_a + 1)(2S_b + 1)} \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}$$

Se poniamo  $S_a = S_b = 0$  si ha che  $J_R = l$  e si riottiene la formula nota. Anche questa sezione d'urto vale solo nell'intorno di  $E_R$ . La sezione d'urto totale mostra solitamente diversi picchi.

# 18

## ANTIPARTICELLE

L'esperienza mostra che ogni particella ha una antiparticella. Dal punti di vista teorico si può prevedere l'esistenza delle antiparticelle già nella relatività ristretta, dove l'energia non è più definita positiva:

$$E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2 \implies E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$$

$E$  è la componente temporale del quadrimpulso della particella

$$p^i = (E/c, \vec{p})$$

le due radici di  $E^2$  corrispondono ad un moto avanti o indietro nel tempo, così come le due radici di  $p^2$  corrispondono a due moti avanti e indietro nello spazio. In effetti un moto con  $E < 0$  sembra a prima vista inaccettabile in quanto apparentemente viola il principio di causalità.

Consideriamo una particella che viene emessa nel punto  $(ct_a, \vec{r}_a)$  e venga assorbita nel punto  $(ct_b, \vec{r}_b)$  con  $t_b > t_a$ , cioè questa particella si muove in avanti nello spazio tempo. Se la particella si muovesse nella direzione spazio-temporale opposta verrebbe emessa in  $(ct_b, \vec{r}_b)$  e assorbita in  $(ct_a, \vec{r}_a)$ , dove è sempre  $t_a < t_b$ . In questo caso la particella si muoverebbe indietro nel tempo e la sua morte precederebbe la sua nascita. Questa è un'apparente violazione del principio causa-effetto. Per superare questo dilemma basta considerare che l'emissione o l'assorbimento di un quadrimpulso.

$$-p^i = (-E/c, -\vec{p})$$

equivale all'assorbimento o emissione di un quadrimpulso opposto

$$p^i = (E/c, \vec{p})$$

Quindi si può rappresentare questa situazione di equivalenza nel seguente modo:

$$(ct_a, \vec{r}_a) \xrightarrow[(E/c, \vec{p}) \rightarrow]{} (ct_b, \vec{r}_b)$$

---

Questo è un discorso analogo alla corrente elettrica. Quindi l'assorbimento e la successiva emissione di una particella con  $E < 0$  si può interpretare come emissione e successivo assorbimento di una particella con  $E$  e  $\vec{p}$  opposti. Se la particella con  $E < 0$  possiede una carica elettrica  $-e$  l'altra particella deve possedere una carica  $+e$ . In realtà questo ragionamento si può estendere ad un qualsiasi numero quantico additivo che caratterizza internamente la particella.

Un moto indietro nel tempo di una particella con  $E < 0$  è equivalente ad un moto avanti nel tempo della corrispondente antiparticella. Con questa rappresentazione non viene più violato il principio di causa ed effetto. Si può dunque attribuire un significato fisico alla radice negativa dell'energia solo se si considera l'antimateria. Questo procedimento fu introdotto per la prima volta da Feynman. Secondo questa definizione relativistica, l'antiparticella ha un spin uguale e momento magnetico opposto rispetto alla particella.

Se la particella è caratterizzata dai numeri quantici  $(t, t_3)$  di isospin l'antiparticella avrà numeri quantici di isospin  $(t, -t_3)$ . Ad esempio  $\bar{p}$  e  $\bar{n}$  sono sempre un doppietto di isospin però:

$$T_3 |\bar{p}\rangle = -\frac{1}{2} |\bar{p}\rangle \quad T_3 |\bar{n}\rangle = \frac{1}{2} |\bar{n}\rangle$$

# 19

## CONIUGAZIONE DI CARICA

6-4-1998

Siano  $|a\rangle$  e  $|\bar{a}\rangle$  gli stati di particella e antiparticella. Consideriamo l'operatore unitario  $C$  tale che:

$$C|a\rangle = |\bar{a}\rangle \quad \text{e} \quad C^+|\bar{a}\rangle = |a\rangle \quad (\Rightarrow C^+ = C^{-1})$$

ma deve ovviamente essere:

$$C^2 = I = \text{operatore identità} \quad (\Rightarrow C^+ = C)$$

con questa scelta risulta pure hermitiano.

I suoi autovalori sono quindi reali e il loro quadrato deve sempre essere 1, quindi gli autovalori sono solamente +1 e -1. Il numero quantico associato a  $C$  non è additivo ma moltiplicativo, cioè l'autovalore di un sistema complessivo è dato dal prodotto degli autovalori dei sistemi costituenti. L'effetto dell'operatore  $C$  è quello di cambiare il segno di tutte le cariche delle particelle o antiparticelle. Ad esempio:

$$C|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle \quad C|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle$$

quindi una particella assolutamente neutra rappresenta un autostato dell'operatore  $C$ . Quindi questa particella è l'antiparticella di se stessa. Questo è il caso, ad esempio, del fotone  $\gamma$  e del pione neutro, infatti:

$$C|\gamma\rangle = -|\gamma\rangle \quad C|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle$$

l'autovalore -1 attribuito a  $|\gamma\rangle$  si ricava dal fatto che il potenziale vettore elettromagnetico, che rappresenta la funzione d'onda del fotone, cambia segno se cambiano segno le cariche che lo generano. L'autovalore +1 per  $\pi^0$  si può ricavare dalla reazione:

$$\begin{aligned} \pi^0 &\rightarrow \gamma + \gamma \\ C|2\gamma\rangle &= (-1)(-1)|2\gamma\rangle = |2\gamma\rangle \end{aligned}$$

---

In realtà si è implicitamente ammesso, in questa deduzione, che l'operatore  $C$  rappresenta una grandezza che si conserva durante il processo di decadimento. Questa proprietà di conservazione in realtà è collegata col fatto sperimentale che la coniugazione di carica è una operazione di simmetria nei processi elettromagnetici. Infatti grandezze come le sezioni d'urto, le probabilità, le costanti di disintegrazione, ecc., rimangono invariate. In un sistema isolato se si applica  $C$  al sistema, allora  $C$  sarà una operazione di simmetria se non cambia *l'equazione di Schrödinger*. Poniamo:

$$\Psi^{(c)} \equiv C\Psi = \text{funzione d'onda coniugata di carica}$$

allora  $C$  è una operazione di simmetria se e solo se:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^{(c)} = H\Psi^{(c)} \implies i\hbar \frac{\partial}{\partial t} C\Psi = HC\Psi$$

$C$  non dipende dal tempo, si può dunque scrivere:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} C\Psi = C i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = CH\Psi \implies CH\Psi = HC\Psi \implies [C, H] = 0$$

Se  $C$  è una operazione di simmetria allora è una costante del moto ed il suo numero quantico si conserva. Tutto questo discorso convalida la scelta come autovalore di  $|\Psi^0\rangle$  del numero +1. Vedremo che non è verificato che  $C$  è una operazione di simmetria nei processi deboli, mentre lo è nei processi forti ed in quelli elettromagnetici. Consideriamo il neutrino, che può comparire solo nei processi deboli, e con l'ipotesi di massa nulla può esistere solo nel suo stato sinistrorso, cioè con elicità -1:

$$|\nu\rangle = |\nu_s\rangle \\ C|\nu_s\rangle = |\bar{\nu}_s\rangle$$

$C$  per definizione lascia invariata l'elicità in quanto non cambia né lo spin né la quantità di moto. Quindi se si avesse simmetria rispetto a  $C$  dovrebbe esistere lo stato  $|\bar{\nu}_s\rangle$ , mentre sappiamo che l'antineutrino esiste solo nello stato destrorso, cioè  $|\bar{\nu}_D\rangle$ .

Consideriamo un elettrone  $\beta$  emesso longitudinalmente rispetto alla direzione del suo spin, il suo stato si può scrivere come una mistura:

$$|e_\beta^-\rangle = C_s |e_s^-\rangle + C_D |e_D^-\rangle$$

$C_s$  e  $C_D$  sono definiti a meno di una costante di fase,  $|C_s|^2$  e  $|C_D|^2$  ci danno la probabilità dei due stati di elicità. Si ha che:

$$\langle H \rangle_{e_\beta} = -|C_s|^2 + |C_D|^2 = -\frac{V}{C} \quad (\text{risultato sperimentale})$$

la semplice applicazione di  $C$  a questo stato comporta

$$C |e_\beta^- \rangle = C_s C |e_s^- \rangle + C_D C |e_D^- \rangle = C_s |e_s^+ \rangle + C_D |e_D^+ \rangle$$

dunque se il processo debole rispettasse la simmetria rispetto a  $C$  dovrebbe esistere un processo simmetrico che produce un positrone con lo stesso valore di aspettazione per  $H$ . Questo invece non succede, in quanto nell'antiprocesso  $\beta$  il valore di aspettazione di  $H$  di un positrone emesso con polarizzazione longitudinale è opposto a quello dell'elettrone  $\beta$ . Lo stato del positrone  $\beta$  si può scrivere come

$$|e_\beta^+ \rangle = \bar{C}_s |e_s^+ \rangle + \bar{C}_D |e_D^+ \rangle$$

dove  $\bar{C}_s$  e  $\bar{C}_D$  sono tali che:  $|\bar{C}_s|^2 = |C_D|^2$  e  $|\bar{C}_D|^2 = |C_s|^2$ .

Quindi l'interazione debole oltre a violare la simmetria per inversione spaziale viola pure la simmetria per coniugazione di carica.

Esiste comunque una simmetria fra il processo debole e l'antiprocesso e questa si ottiene applicando insieme la coniugazione di carica e l'inversione spaziale.

L'esistenza di questa simmetria è suggerita dal fatto che grandezze come le sezioni d'urto complessive e le costanti di disintegrazione sono identiche fra processo e antiprocesso debole.

# 20

## OPERATORE PARITÀ

Definiamo l'operatore parità  $P$  come l'operatore che agisce nello spazio degli stati e che rappresenta la trasformazione associata all'inversione spaziale ordinaria. Per definizione quindi  $P$  trasforma un sistema quantistico nella sua immagine speculare. A meno di una costante di fase si può dunque scrivere:

$$|P|\vec{r}\rangle = |-\vec{r}\rangle \quad P|\vec{p}\rangle = |-\vec{p}\rangle \quad P|jm_j\rangle = |jm_j\rangle$$

Consideriamo adesso l'applicazione successiva dei due operatori  $P$  e  $C$  allo stato del neutrino sinistrorso:

$$CP|\nu_s\rangle = C|\nu_D\rangle = |\bar{\nu}_D\rangle$$

Analogamente si ha per lo stato  $|e_\beta^-\rangle = C_s|e_s^-\rangle + C_D|e_D^-\rangle$ :

$$\begin{aligned} CP|e_\beta^-\rangle &= C_s CP|e_s^-\rangle + C_D CP|e_D^-\rangle = \\ &= C_s C|e_D^-\rangle + C_D C|e_s^-\rangle = C_s|e_D^+\rangle + C_D|e_s^+\rangle \end{aligned}$$

Quindi a meno di una costante di fase si ha:

$$CP|e_\beta^-\rangle = |e_\beta^+\rangle$$

Nei processi deboli conosciuti, tranne una sola eccezione, l'operazione  $CP$  sembra lasciare invariate tutte le probabilità di transizione. I processi deboli, quindi, non obbediscono alla simmetria per le operazioni rappresentate da  $C$  e da  $P$ , ma obbediscono a quella relativa all'intera operazione rappresentata da  $CP$ . Questo consente di formulare una più ampia simmetria speculare secondo cui la vera immagine speculare di un processo debole si ottiene applicando una inversione spaziale e contemporaneamente cambiando di segno tutte le cariche.

Definiamo ora l'operatore  $T$  come quell'operatore che inverte velocità e impulso lasciando invariata l'energia.

Sussiste il *teorema CPT* secondo cui tutti i processi dinamici realizzabili in natura devono essere simmetrici rispetto all'operazione  $CPT$ . L'enunciato del teorema può essere dimostrato sotto ipotesi ben poco restrittive:

- 1) invariata rispetto alle trasformazioni di Lorentz;
- 2) la validità della relazione tra spin e statistica.

Una delle più importanti conseguenze del teorema è l'identità di massa fra particella e antiparticella. L'operatore  $CPT$  trasforma la particella nell'antiparticella con identico impulso ed identica energia e quindi eguale massa. Inoltre rimane invariata la larghezza del livello energetico della particella e quindi corrisponderà un tempo di vita media  $\tau = \hbar/\Gamma$  uguali per la particella e la sua antiparticella.

L'operatore parità  $P$  è un operatore hermitiano e unitario:

$$P^{-1} = P^+ = P \quad P^2 = 1$$

quindi i possibili autovalori di  $P$  sono solo  $+1$  e  $-1$ ; così come avviene per l'operatore di carica, il numero quantico associato a  $P$  è moltiplicativo. Sia nei processi forti che in quelli elettromagnetici l'inversione spaziale è un processo di simmetria; questo significa che se un sistema isolato evolve dinamicamente attraverso un canale forte o elettromagnetico, la sua *equazione di Schrödinger* ammetterà sia una soluzione  $\Psi(\vec{r}, t)$ , sia quella spazialmente riflessa:  $\Psi^{(P)}(\vec{r}, t) \equiv P\Psi(\vec{r}, t)$ . Se  $H$  è l'hamiltoniana del sistema, allora si dovrà avere che:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} P\Psi = PH\Psi = HP\Psi \implies [P, H] = 0$$

quindi sarà possibile parlare di parità. Consideriamo in particolare una particella priva di spin immersa in un campo esterno radiale. Se la funzione d'onda della particella è un'autofunzione dell'energia del tipo:

$$\Psi(\vec{r}) = \Psi(r, \theta, \varphi) = \chi(r)\Psi_l^m(\theta, \varphi)$$

allora essa sarà anche un'autofunzione della parità.

Verifichiamo questo enunciato. Dato che il campo è a simmetria sferica, l'*equazione di Schrödinger* avrà anche come soluzione la funzione:

$$\Psi(-\vec{r}) = \Psi(r, \pi - \theta, \pi + \varphi) = \chi(r)\Psi_l^m(\pi - \theta, \pi + \varphi)$$

Si può quindi porre, a meno di una costante di fase:

$$\Psi(P)(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r})$$

considerando che per le armoniche sferiche risulta:

$$\Psi_l^m(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l \Psi_l^m(\theta, \varphi)$$

dove  $l$  è il numero quantico orbitale della particella rispetto al centro del campo. In definitiva si ha:

$$P\Psi(\vec{r}) = \Psi(-\vec{r}) = \chi(r)\Psi_l^m(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l \Psi(\vec{r})$$

dunque la particella si trova in un autostato della parità con autovalore  $(-1)^l$ . Quando detto si applica anche al caso di un sistema isolato di due particelle interagenti in quanto il loro moto relativo equivarrà a quello della corrispondente massa ridotta in un campo radiale esterno. In generale, la conservazione della parità implica che un sistema isolato con una data parità iniziale, abbia alla fine ancora la stessa parità. Ciò risulta banale nel caso di una particella priva di spin immerso in un campo centrale in quanto questo sistema è caratterizzato da un momento angolare orbitale che si conserva. Per un sistema qualunque può succedere tuttavia che il numero di particelle che lo compongono, vari nel tempo (a causa di creazioni o di distruzioni), in questo caso per ottenere un'effettiva conservazione della parità non sempre basta considerare la parità legata al numero quantico orbitale del sistema, infatti molto spesso accade che il solo momento angolare orbitale non viene conservato nel processo. Quando si verifica ciò, la conservazione della parità può essere ottenuta solo se alla particella si attribuisce una parità intrinseca.

## 20.1 PARITÀ INTRINSECA

Vediamo cosa si intende per *parità intrinseca* di una particella. Consideriamo una particella libera che si trova nell'autostato  $|\vec{p}\rangle$  dell'operatore quantità di moto. Sappiamo che:

$$P^2 |\vec{p}\rangle = |\vec{p}\rangle \Rightarrow P |\vec{p}\rangle = |-\vec{p}\rangle \vee P |\vec{p}\rangle = -|-\vec{p}\rangle \quad [20.1]$$

Quindi in generale si può scrivere:

$$P |\vec{p}\rangle = \eta |-\vec{p}\rangle \quad \text{con} \quad \eta = +1 \quad \text{o} \quad \eta = -1 \quad [20.2]$$

Questo vale anche nel caso in cui  $\vec{p} = 0$ ; in questo caso si ha:

$$P |\vec{p} = 0\rangle = \eta |\vec{p} = 0\rangle \quad (\eta = \pm 1) \quad [20.3]$$

Questa è un'equazione agli autovalori, quindi  $\eta$  si può interpretare come autovalore della parità intrinseca della particella. Lo stesso discorso si può fare per l'autostato di una particella senza spin in un campo centrale:

$$\Psi(\vec{r}) = \chi(\vec{r})\Psi_e^m(\theta, \varphi) \quad [20.4]$$

In questo caso si ha che:

$$P\Psi(\vec{r}) = \Psi^{(P)}(\vec{r}) = \eta\Psi(-\vec{r}) \quad (\eta = \pm 1) \quad [20.5]$$

Questa è l'espressione più generale. Se si ha  $\eta = +1$  la  $\Psi(\vec{r})$  si trasforma come uno scalare; se  $\eta = -1$ ,  $\Psi(\vec{r})$  si trasforma come uno pseudoscalare rispetto alla trasformazione di parità. Dunque si può scrivere:

$$P\Psi(\vec{r}) = \eta(-1)^l\Psi(\vec{r}) \quad [20.6]$$

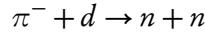
dove  $\eta(-1)^l$  è il complessivo autovalore di parità della particella.

Se una particella è presente sia prima che dopo il processo, la sua parità non può influire sulla conservazione o meno della parità dell'intero sistema. In questo caso non cambia nulla se si assegna a questa particella un valore  $+1$  o  $-1$  alla parità. Si può determinare l'effettiva parità intrinseca di una particella solo se questa viene creata o distrutta nel processo, o più precisamente quando la sua parità risulta essenziale per la conservazione della parità del sistema nel processo.

Le uniche particelle a cui è possibile assegnare una parità effettiva sono i bosoni, in quanto sono le uniche particelle che possono essere create o distrutte singolarmente. I fermioni possono essere creati o distrutti sempre in coppia con un altro antifermione. In questo caso si può misurare solo la loro parità intrinseca relativa (= prodotto della parità).

La teoria di Dirac sul fermione relativistico prevede che per le coppie fermione-antifermione, la parità relativa debba essere  $-1$ ; questa previsione è confermata dall'esperienza. Per convenzione viene assegnata ai nucleoni e all'elettrone la stessa parità intrinseca.

Vediamo come si può misurare ad esempio la parità intrinseca del pion negativo. Consideriamo la seguente reazione:



Il pion negativo viene catturato dall'atomo di deuterio e si trova in uno stato con momento angolare nullo all'interno dell'atomo di deuterio.  $d$  ha spin 1, quindi il momento angolare totale del sistema  $\pi^- + d$  è 1. Lo stesso è il momento angolare totale dei due neutroni finali.

Indichiamo con  $l$  ed  $s$  i valori del momento angolare orbitale e di spin della coppia di neutroni finali. Si possono avere le seguenti combinazioni:

$$(s = 0; l = 1), \quad (s = 1; l = 0), \quad (s = 1; l = 1), \quad (s = 1; l = 2)$$

Lo stato finale deve però essere antisimmetrico, quindi:

$$(-1)^{l+s+1} = -1$$

Questo equivale a scrivere  $l + s = \text{pari}$ .

L'unica possibile combinazione risulta:  $s = 1$  e  $l = 1$ . Quindi all'inizio si ha  $l = 0$  e alla fine  $l = 1$ . La parità orbitale iniziale è 1, mentre quella finale è  $(-1)^1 = -1$ . Quindi la parità orbitale non consente la conservazione della parità nel processo, si deve allora tenere conto della parità intrinseca.

In base alla conservazione della parità si può scrivere

$$\begin{aligned}\eta_\pi \eta_d (-1)^0 &= (-1)^1 \quad (\eta_n \eta_n = 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \eta_\pi &= -\eta_d\end{aligned}$$

Dato che il deutone è composto da due neucloni si ha che  $\eta_d = 1$ , quindi  $\eta_{\pi^-} = -1$  è la parità intrinseca del piona negativo. Anche gli altri due pioni hanno parità  $-1$ . La funzione d'onda di  $\pi^-$  si trasforma come uno pseudoscalare sotto l'operazione  $P$ :

$$\Phi_\pi(\vec{r}, t) \xrightarrow{P} \Phi_\pi^{(P)}(\vec{r}, t) = \eta_\pi \Phi_\pi(-\vec{r}, t) = -\Phi_\pi(-\vec{r}, t)$$

In modo analogo si assegna una parità intrinseca al fotone considerando come si trasforma la sua funzione d'onda  $\vec{A}$  per effetto dell'inversione spaziale. Si sfrutta l'invarianza dell'Hamiltoniana di interazione elettromagnetica per l'operazione  $P$ , cioè rimane invariato il termine  $\vec{J} \cdot \vec{A}$ ;  $\vec{J}$  è un vettore polare, cioè

$$\vec{J}(\vec{r}, t) \xrightarrow{P} -\vec{J}(-\vec{r}, t)$$

quindi anche per il potenziale vettore deve essere:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \xrightarrow{P} \eta_\gamma \vec{A}(-\vec{r}, t) = -\vec{A}(-\vec{r}, t)$$

Si assegna quindi al fotone una parità intrinseca  $\eta_\gamma = -1$ . Il fotone però non risulta mai a riposo, quindi l'autovalore di parità del fotone non si riduce mai alla parità intrinseca.

Abbiamo detto che i fermioni si possono creare o distruggere solo in coppia con un antifermione. Una spiegazione di questo si può trovare nella conservazione del momento angolare totale. Ad esempio se si ha un sistema in cui non ci sono fermioni <sup>1</sup> e si crea un fermione, si passerebbe da un valore intero ad uno semintero per il momento angolare totale. Sperimentalmente si vede che le coppie sono sempre fermione antifermione. Quindi si ha che in un sistema isolato la differenza fra il numero di fermioni e di antifermioni è costante nel tempo.

$N_f$  = numero iniziale di fermioni;  $N'_f$  = numero finale di fermioni

$N_{\bar{f}}$  = numero iniziale di antifermioni;  $N'_{\bar{f}}$  = numero finale di antifermioni.

$$N'_f - N'_{\bar{f}} = N_f - N_{\bar{f}}$$

Questa condizione si può scrivere nella forma:

$$(+1)N'_f + (-1)N'_{\bar{f}} = (+1)N_f + (-1)N_{\bar{f}}$$

Si può attribuire ad un fermione o antifermione una carica caratteristica detta *numero fermionario*.

---

<sup>1</sup>Le tre parole precedenti si leggono difficilmente. [NdT]

Questa è  $+1$  per i fermioni,  $-1$  per gli antifermioni o per i bosoni.

La somma algebrica di questa carica in un sistema isolato rimane costante nel tempo:

$$(+1)N_f(t) + (-1)N_{\bar{f}}(t) = \text{costante}$$

La legge sperimentale che dice che si possono creare o distruggere solo coppie fermione-antifermione può essere interpretata come conseguenza della conservazione del numero fermionico.

# 21

## NUMERI, QUARKS E LEPTONI

### 21.1 NUMERO FERMIONICO BARIONICO O NUMERO BARIONICO

In un sistema isolato la differenza fra il numero di barioni ( $N_b$ ) e il numero di antubarioni ( $N_{b^-}$ ) è costante nel tempo:

$$N_b(t) - N_{b^-}(t) = \text{costante}$$

Questo è un risultato sperimentale. Si può definire un *numero fermionico barionario* (+1 per il barione, -1 per l'antibarione, 0 per le altre particelle) che si conserva:

$$(+1)N_b(t) + (-1)N_{b^-}(t) = \text{costante} \quad [21.1]$$

Se consideriamo fra i barioni il protone e il neutrone si vede che il numero fermionico barionario si può identificare con il numero barionario  $B$ . Infatti  $B$  (introdotto nella formula  $Q = T_3 + \frac{1}{2}B$ ) è additivo e si ha che:

$$B|p^+\rangle = (+1)|p^+\rangle \quad B|n\rangle = (+1)|n\rangle \quad [21.2]$$

$$B|p^-\rangle = (-1)|p^-\rangle \quad B|\bar{n}\rangle = (-1)|\bar{n}\rangle \quad [21.3]$$

$$B|\pi\rangle = 0 \quad [21.4]$$

La legge di conservazione del numero fermionico barionario (o semplicemente numero barionario) assicura la stabilità del protone (che è il barione più leggero).

Infatti se non si avesse questa legge di conservazione si potrebbero avere i decadimenti:

$$p^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ \quad p^+ \rightarrow \pi^+ + \nu$$

Questi sono favorevoli energeticamente e conservano tutte le grandezze che si devono conservare, quindi non avvengono solo per la conservazione del numero barionario. Questa legge di conservazione è empirica e si applica ad una carica che non ha la stessa valenza fisica della carica elettrica (che è responsabile di una interazione). Cioè se questa legge di conservazione non fosse vera non si avrebbero notevoli conseguenze.

## 21.2 NUMERO QUANTICO DI STRANEZZA

Nel 1947 due fisici, studiando i raggi cosmici, osservarono in una camera a nebbia le tracce di due processi di decadimento di due nuove particelle. Queste tracce avevano la configurazione di una V, per questo le particelle si chiamarono *particelle V*. Una di queste oggi si chiama *iperone*  $\Lambda^0$ , decade secondo il processo:

$$\Lambda^0 \rightarrow p^+ + \pi^- \quad \text{è un barione}$$

mentre l'altra, che si chiama *mesone K<sup>0</sup>*:

$$K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad \text{è un mesone}$$

Dalle misure di quantità di moto si stimò la massa di queste particelle:

$$m_\Lambda \simeq 1115,6 \text{ MeV}/c^2 \quad m_K \simeq 497,7 \text{ MeV}/c^2$$

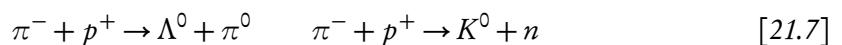
Si scoprì però che queste particelle avevano un comportamento anomalo. Queste potevano essere prodotte facilmente con l'urto di un  $\pi^-$  e un  $p^+$ . D'altra parte avevano un tempo di vita media enormemente più lungo di quello che ci si poteva aspettare dalle sezioni d'urto di produzione<sup>1</sup>. Questo sembra contraddirsi il principio del bilancio dettagliato: se si inverte il tempo deve essere:

$$|T_{if}|^2 = |T_{fi}|^2 \quad (T_{fi} = \text{elemento di matrice della reazione inversa.})$$

Sperimentalmente le reazioni di produzione sembrano essere:



Cioè nella reazione veniva prodotta una ulteriore particella neutra di cui però non si conosceva la natura. Si fece prima l'ipotesi che le due reazioni fossero le seguenti:



I dati relativi alla sezione d'urto di produzione di  $\Lambda^-$  e  $K^-$  fornivano i seguenti valori:

$$\sigma_{\Lambda^0} \simeq \frac{1}{10} \sigma_{\text{el}}(\pi^- - p^+) \quad [21.8]$$

$$\sigma_{K^0} \simeq \frac{1}{10} \sigma_{\text{el}}(\pi^- - p^+) \quad [21.9]$$

dove  $\sigma_{\text{el}}(\pi^- - p^+)$  è la sezione d'urto del processo di diffusione elastica forte. Da questi valori ci si aspettava una vita media di:

$$\tau_{\text{teor}} = 10^{-22} \text{ s}$$

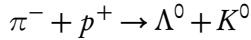
---

<sup>1</sup>Si ha che tanto è più facile produrre una particella tanto minore sarà il suo tempo di vita media.

Sperimentalmente si trovava un tempo di vita media:

$$\tau_{\text{sper}} = 10^{-10} \text{ s}$$

Questo tempo andava bene per un decadimento di tipo debole, però in base alle reazioni ipotizzate non vi era motivo di pensare che i processi di decadimento  $\Lambda^0$  e  $K^0$  avessero natura diversa dei processi di produzione. Tutto questo portava alla contraddizione del principio del bilancio dettagliato. Si ipotizzò, e poi verificò, che  $\Lambda^0$  e  $K^0$  venivano prodotte solo in coppia tramite la reazione:



Questa si dice *produzione associata*, e sembrava analoga a quella barione-antibarione. Questa regola per la produzione portò all'introduzione di una nuova carica: *numero quantico di stranezza*<sup>2</sup>. L'interazione forte mostrava quindi di obbedire alla legge d conservazione del numero quantico di stranezza. Lo stesso però non vale per i processi di decadimento<sup>3</sup>.



Quindi questi processi non potevano ritenersi di natura forte. Quindi gli elementi di matrice del decadimento non avevano niente a che fare con gli elementi di matrice del processo di produzione, non si poneva più la questione del bilancio dettagliato.

Alla luce dei valori sperimentalni del tempo di vita media si ipotizzò che i processi di decadimento fossero di natura debole. Questo implica che l'interazione debole non verifica la conservazione del numero quantico di stranezza, e se non vi fosse questa violazione  $\Lambda^0$  e  $K^0$  risulterebbero stabili. Supponiamo di assegnare a  $\Lambda^0$  stranezza  $s = -1$ . Per definire un operatore di stranezza  $S = S(Q, T_3, B)$  tale che

$$S|\Lambda^0\rangle = (-1)|\Lambda^0\rangle$$

basta considerare che  $\Lambda^0$  si presenta in un solo stato di carica elettrica, e quindi rappresenta un singoletto di isospin. Quindi<sup>4</sup>

$$Q|\Lambda^0\rangle = 0 \quad B|\Lambda^0\rangle = (+1)|\Lambda^0\rangle \quad T_3|\Lambda^0\rangle = 0$$

La relazione  $Q = T_3 + \frac{B}{2}$  non è valida in questo caso. La relazione esatta è:

$$Q = T_3 + \frac{B + S}{2}$$

Trovata questa formula si può dedurre il numero quantico di stranezza e quindi anche gli altri numero quantici anche per  $K^0$ .

24-4-1998

<sup>2</sup> $\Lambda^0$  e  $K^0$  devono avere valori opposti di questo numero quantico.

<sup>3</sup> $\pi^-$  e  $p^+$  devono avere valore nullo per questo numero quantico.

<sup>4</sup> $B = +1$  si deduce dal processo di decadimento.

La quantità  $B + S$  deve essere uno scalare nello spazio di isospin, in questo modo anche  $S$  sarà uno scalare in questo spazio. Dalle ipotesi fatte il mesone  $K^0$  deve avere un numero quantico di stranezza  $S = +1$  (in quanto per  $\Lambda^0$  si ha  $S = -1$ ). Tenendo presente che  $B|K^0\rangle = 0$  si ha:

$$Q|K^0\rangle = 0 \quad T_3|K^0\rangle = -\frac{1}{2}|K^0\rangle \quad [21.10]$$

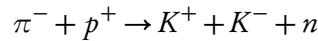
Quindi  $K^0$  non può essere uno stato di singoletto di isospin. Dal momento che  $S$  è uno scalare il suo autovalore rimane invariato per una qualsiasi rotazione in questo spazio. Una qualsiasi rotazione è rappresentata dall'operatore:

$$R_\tau = e^{i\theta\hat{u}\cdot\vec{T}} \quad [21.11]$$

$$R_\tau S = SR_\tau \Rightarrow [S, T_-] = 0 \quad [21.12]$$

dove si era definito  $T_+ = T_1 + iT_2$  e  $T_- = T_1 - iT_2$ .

Se applichiamo  $T_+$  allo stato  $|K^0\rangle$  si vede che il mesone  $K^0$  deve presentarsi con la stessa stranezza ma con carica diversa. La carica elettrica di questo nuovo stato sarà  $+1$ . Il mesone  $K^+$  con massa circa uguale a quella del  $K^0$  esiste, e viene prodotto dalla reazione forte:



In questa reazione compare il  $K^-$ , che è l'antiparticella di  $K^+$ . Quindi si ha il doppietto di isospin con  $S = +1$  ( $K^+ = +1/2, K^0 = -1/2$ ). Esiste anche l'antidoppietto ( $K^- = -1/2, \bar{K}^0 = +1/2$ ) con  $S = -1$ . Il  $\bar{K}^0$  si distingue da  $K^0$  in quanto ha numero quantico di stranezza opposto. La reazione forte che produce il  $\bar{K}^0$  è ad esempio:



In definitiva esistono un mesone  $K$  e un mesone  $\bar{K}$ , ciascuno dei quali è rappresentato da un doppietto di isospin. Sia  $K$  che  $\bar{K}$  hanno parità intrinseca  $-1$ , cioè:

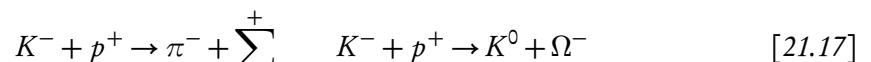
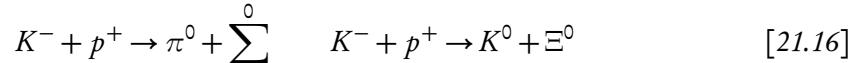
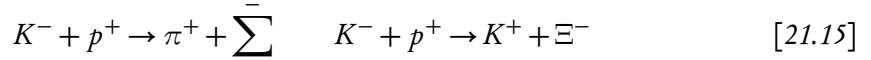
$$\eta_K = \eta_{\bar{K}} = -1 \quad [21.14]$$

Questo è un esempio in cui dalla teoria si può prevedere l'esistenza di una particella (il  $K^+$ ).

Oltre a  $\Lambda^0$  e a  $K^0$  sono stati trovati altri adroni strani, cioè con stranezza diversa da 0. In ordine di massa crescente esistono:

- Iperone  $\Sigma \equiv (\Sigma^-, \Sigma^0, \Sigma^+) S = -1$ .  $\Sigma$  ha spin  $1/2 \Rightarrow$  è un barione.
- Iperone  $\Xi \equiv (\Xi^-, \Xi^0) S = -2$ .  $\Xi$  ha spin  $1/2 \Rightarrow$  è un barione.
- Iperone  $\Omega^- S = -3$ .

Questi iperoni possono essere prodotti in reazioni del tipo:



Tutte queste particelle strane subiscono decadimenti deboli che non conservano la stranezza. Questi decadimenti verificano la regola di selezione empirica  $|\Delta S| = 1$ . Secondo questa regola non possono avvenire decadimenti con variazione di stranezza maggiore di 1. Ad esempio non possono avvenire i decadimenti:

$$\Xi^0 \not\rightarrow p^+ + \pi^- \mid \Xi^- \not\rightarrow n + \pi^- \mid \Omega^- \not\rightarrow \pi^- + \Lambda^0 \quad [21.18]$$

Un'altra regola di selezione verificata dai decadimenti degli adroni strani è:  $\Delta q = \Delta S$  con  $\Delta q \neq 0$  dove  $\Delta q$  è la variazione di carica degli adroni. Questa regola non vale nei decadimenti non leptonici, dove cioè non vengono prodotti leptoni, in quanto si ha  $\Delta q = 0$ . Questa regola vale per decadimenti leptonici (vengono prodotti solo leptoni) e semileptonici (vengono prodotti leptoni più adroni). Ad esempio non avviene il decadimento:

$$\sum^+ \not\rightarrow n + e^+ + \nu \quad \Delta q = -1 \quad \Delta S = +1 \quad [21.19]$$

mentre è consentito il decadimento:

$$\sum^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu} \quad \Delta q = \Delta S = +1 \quad [21.20]$$

Una spiegazione di queste due regole di selezione è fornito dal modello a quark, cioè gli adroni non sono particelle semplici, ma composte di quarks.

### 21.3 NUMERO QUANTICO DI INCANTO

Un altro numero quantico è il numero quantico di incanto. Esistono adroni incantati prodotti in processi forti soltanto in coppia, questi poi decadono con processi deboli senza che si conservi l'incanto. L'operatore di incanto  $I$  è definito dalla formula generalizzata (vedere sezione A.2):

$$Q = T_3 + \frac{B + S + I}{2} \quad [21.21]$$

Per gli adroni esistono altri due numeri quantici il cui significato fisico, come per la stranezza e l'incanto, è oscuro.

I processi di decadimento (non leptonici) del mesone  $K^+$  sono:

29-4-1998

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad (R = 21\%) \quad [21.22]$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^- \quad (R = 5,6\%) \quad [21.23]$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0 \quad (R = 1,7\%) \quad [21.24]$$

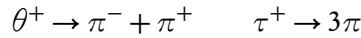
Si ha che la vita media del mesone  $K^+$  è:

$$\tau_{K^+} = 1,23 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Il mesone  $K^-$  invece non fa in tempo a decadere in quanto viene assorbito da un nucleone circostante secondo la reazione:

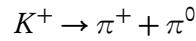


Il mesone  $K^+$ , avendo stranezza +1, non può invece convertire un nucleone in iperone. Il  $K^+$  subisce in genere processi di scattering elastico da parte dei nuclei. I processi di decadimento del  $K^+$  con due o più pioni non conservano la parità. Storicamente questa non conservazione non fu compresa subito, infatti si ipotizzò che vi fossero due tipi di particelle  $K^+$  con parità intrinseca opposta. Questi si indicavano con  $\theta^+$  e  $\tau^+$ . I processi ipotizzati erano:



Questa interpretazione si rivelò contraddittoria, in quanto i dati sulla produzione forte indicavano un'unica parità intrinseca. I fisici cinesi Lee e Yang suggerirono una verifica diretta della simmetria per inversione spaziale per i processi deboli (1956). Nel 1957 fu fatto l'esperimento della radiazione  $\beta$  del Cobalto 60.

Analizziamo ora il decadimento del  $K^+$  in due pioni:



Supponiamo che il mesone  $K^+$  sia a riposo. Tutte le particelle hanno spin zero. Quindi il numero quantico orbitale dei due pioni finali è  $l = 0$ . Applicando l'operatore parità  $P$  si ha:

$$P|\pi^+, \pi^0\rangle = \eta_\pi^2 (-1)^l |\pi^+, \pi^0\rangle = (+1) |\pi^+, \pi^0\rangle \quad [21.27]$$

Per il decadimento del  $K^+$  in tre pioni si ha che il momento angolare totale dei tre pioni si può scrivere come:

$$\vec{J} = \vec{L}_{12} + \vec{L}_3 \quad [21.28]$$

dove  $\vec{L}_{12}$  è il momento orbitale dei primi due pioni rispetto al loro centro di massa (momento orbitale relativo).  $\vec{L}_3$  è il momento orbitale dell'intero sistema dei primi due pioni<sup>5</sup> più il terzo pino tutto relativamente al centro di massa dei tre pioni.

Se ipotizziamo sempre che  $K^+$  sia inizialmente a riposo allora lo stato finale deve essere un autostato di  $\vec{J}$  con autovalore  $j = 0$ , cioè:

$$j = j_{\min} = |l_{12} - l_3| = 0 \Rightarrow l_{12} = l_3$$

Ricordando che la parità intrinseca di ogni pino è  $-1$  si ha che:

$$P|3\pi\rangle = \eta_\pi^3 (-1)^{l_{12}} (-1)^{l_3} |3\pi\rangle = (-1) |3\pi\rangle$$

---

<sup>5</sup>Come se fossero nel loro C.M.

Quindi uno stesso  $K^+$  pur avendo parità intrinseca definita può decadere in stati con parità opposta. L'interazione responsabile del decadimento<sup>6</sup> dunque non conserva la parità. Il mesone  $K^+$  decade anche attraverso canali leptonici e semileptonici, ad esempio:

$$K^+ \rightarrow \bar{e} + \nu \quad (\bar{e} = \mu^+, e^+) \quad (R \simeq 63\%) \quad [21.29]$$

$$K^+ \rightarrow \pi^0 + \bar{e} + \nu \quad (R \simeq 8\%) \quad [21.30]$$

Gli stati finali non hanno una parità definita. Considerando i decadimenti simmetrici si ha:

$$K^+ \rightarrow e + \bar{\nu} \quad (e = \mu^-, e^-) \quad [21.31]$$

$$K^+ \rightarrow \pi^0 + e + \bar{\nu} \quad [21.32]$$

A meno di un fattore di fase:

$$|e, \bar{\nu}\rangle = CP|\bar{e}, \nu\rangle \quad [21.33]$$

$$|\pi^0, e, \bar{\nu}\rangle = CP|\pi^0, \bar{e}, \nu\rangle \quad (\mu = \text{muone} = \text{elettrone pesante}) \quad [21.34]$$

## 21.4 GRUPPO DELLE MATRICI UNITARIE SPECIALI

Consideriamo un nucleone e indichiamo il suo generico stato di isospin con la funzione d'onda:

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dove  $c_1$  e  $c_2$  sono coefficienti complessi. Questa funzione d'onda si dice *spinore*. Una generica trasformazione lineare in questo spazio sarà rappresentata da una matrice complessa. Sia  $U'$  la matrice tale che:

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ c'_2 \end{pmatrix} = U' \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Se imponiamo che venga conservata la norma  $U'$  deve essere una matrice unitaria, cioè  $U'^\dagger U' = I$ . Per il determinante si ha che:

$$\det(U'^\dagger U') = \det(U'^\dagger) \det(U') = \det(U')^* \det(U') = |\det(U')|^2 = 1$$

In generale si può dunque scrivere:

$$\det(U') = e^{i\theta} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

La matrice unitaria  $U'$  si può scomporre nella forma:

$$U' = e^{i\theta/2} U \Rightarrow U = e^{-i\theta/2} U' \quad [21.35]$$

---

<sup>6</sup>L'interazione debole.

dove  $U$  è una matrice unitaria con determinante +1. Una matrice con questa proprietà si dice *matrice unitaria speciale*. La matrice  $U$  è quella che dà luogo al rimescolamento fra i due stati ( $p$  e  $n$ ), in quanto il fattore di fase lascia inalterato il rapporto  $c_1/c_2$ .

L'insieme delle matrici unitarie speciali comprende  $I$  e l'inversa di ogni matrice unitaria speciale. Se  $U_1$  e  $U_2$  sono unitarie speciali lo è anche  $U_3 = U_1 U_2$ . Si può concludere che l'insieme delle matrici unitarie speciali costituisce un gruppo rispetto all'operazione di moltiplicazione fra matrici. Le proprietà di un gruppo  $\mathcal{G}$  sono:

1.  $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{G} \quad g_1 g_2 = g_3 \in \mathcal{G}$
2.  $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3) = g_1 g_2 g_3 \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{G}$
3.  $\exists ! e \in \mathcal{G} : \forall g \in \mathcal{G} \quad e g = g e = g$
4.  $\forall g \in \mathcal{G} \exists ! g^{-1} \in \mathcal{G} : \quad g g^{-1} = g^{-1} g = e$

Il gruppo di matrici unitarie speciali  $2 \times 2$  si indica col simbolo  $SU(2)$ . Questo gruppo è non abeliano, cioè non vale la proprietà commutativa.

**4-5-1998**

Il gruppo delle matrici unitarie speciali contiene la matrice idntità. Vediamo come deve essere fatta una matrice infinitamente vicina a  $I_2$  e tale da essere ancora unitaria speciale. Poniamo:

$$I + i\xi$$

dove  $\xi$  è una matrice  $2 \times 2$  ad elementi complessi infinitesimi. Quindi si può scrivere:

$$I + i\xi = \begin{pmatrix} 1 + i\xi_{11} & i\xi_{12} \\ i\xi_{21} & 1 + i\xi_{22} \end{pmatrix}$$

Trascuriamo gli infinitesimi del secondo ordine. La condizione di unitarietà è:

$$(I + i\xi)(I - i\xi^\dagger) = I \Rightarrow I + i\xi - i\xi^\dagger = I \Rightarrow \xi = \xi^\dagger \quad [21.36]$$

La condizione che il determinante di  $I + i\xi$  sia 1 si può scrivere come:

$$\det(I + i\xi) = 1 \Rightarrow (1 + i\xi_{11})(1 + i\xi_{22}) = 1 \Rightarrow \xi_{11} + \xi_{22} = 0 \quad [21.37]$$

Quind la matrice  $I + i\xi$  è unitaria speciale se e solo se  $\xi$  è hermitiana con traccia nulla. La matrice  $U = I + i\xi$  è univocamente determinata una volta che sono dati i tre parametri  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ :

$$U = U(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = I + i\xi(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$$

Dove

$$\begin{aligned} \xi(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_3 & \epsilon_1 - i\epsilon_2 \\ \epsilon_1 + i\epsilon_2 & -\epsilon_3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\epsilon_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\epsilon_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \epsilon_1 \frac{\tau_1}{2} + \epsilon_2 \frac{\tau_2}{2} + \epsilon_3 \frac{\tau_3}{2} = \vec{\epsilon} \cdot \vec{T} \end{aligned}$$

Dunque

$$U = U(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = I + i\vec{\epsilon} \cdot \vec{T} \quad [21.38]$$

Quindi abbiamo introdotto uno spazio tridimensionale astratto (= spazio di isospin) dove  $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$  e  $\vec{T}$  è il vettore di isospin. Riassumendo:

$$U(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = I + i\vec{\epsilon} \cdot \vec{T} \quad [21.39]$$

Questa trasformazione unitaria speciale agisce nello spazio di isospin e può considerarsi associata alla rotazione infinitesima nello spazio tridimensionale di isospin attorno alla direzione individuata da  $\vec{\epsilon}$ . Questa corrispondenza è biunivoca. Se consideriamo una rotazione finita attorno all'asse  $\vec{\epsilon}$  si avranno tre angoli  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  tali che:

$$\epsilon_k = d\theta_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\theta_k}{N} \quad (K = 1, 2, 3 \ N = \text{intero positivo})$$

A questa rotazione corrisponde la matrice unitaria speciale:

$$U(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \lim_{N \rightarrow \infty} (I + i \sum_{k=1}^3 \frac{\theta_k}{N} T_k)^N = e^{i\epsilon_k \theta_k T_k} = e^{i\theta \vec{n} \cdot \vec{T}} \quad [21.40]$$

Le matrici  $T_1, T_2, T_3$  si possono operativamente scrivere come:

$$T_k = -i \frac{\partial}{\partial \theta_k} U(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \Big|_{\theta_1=\theta_2=\theta_3=0} \quad [21.41]$$

$T_k$  si dicono i generatori del gruppo considerato (matrici unitarie speciali). Si può pure scrivere:

$$I = U(0, 0, 0)$$

Dal momento che una qualsiasi matrice unitaria speciale si può vedere come il limite del prodotto di matrici unitarie speciali infinitesime, studieremo solo le proprietà di queste ultime. Il gruppo delle matrici speciali di ordine 2 viene identificato come un gruppo di Lie di dimensione 3, cioè:

$$SU(2) = \text{gruppo di Lie di dimensione 3} \quad [21.42]$$

Per gruppo di Lie si intende un gruppo continuo i cui elementi  $g$  costituiscono una funzione analitica di un numero finito di parametri indipendenti  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , che possono variare in modo continuo. Cioè  $g(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Il numero di parametri indipendenti determina la dimensione del gruppo di Lie. Nel caso di  $SU(2)$  è evidente perché la dimensione è  $3^7$ . Tutti gli elementi di un gruppo di Lie di dimensione  $n$  possono ricavarsi dagli elementi  $g(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)$  che sono infinitamente vicini a  $g(0, 0, \dots, 0)$  che è l'elemento identità. Basterà dunque conoscere i generatori del gruppo:

$$I_k = \frac{\partial}{\partial a_k} g(a_1, a_2, \dots, a_n) \Big|_{a_1=a_2=\dots=a_n=0} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad [21.43]$$

---

<sup>7</sup>  $g(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$

Le proprietà del gruppo di Lie dipendono dalle proprietà dei generatori. Nel caso del gruppo  $SU(2)$  i tre generatori  $T_1, T_2, T_3$  obbediscono alle regole di commutazione  $[T_i, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ).

Queste regole costituiscono l'algebra del gruppo di Lie nel gruppo  $SU(2)$ . I numeri  $\epsilon_{ijk}$  si dicono *costanti di struttura del gruppo*. Esiste una corrispondenza biunivoca fra le matrici delle rotazioni dello spazio di isospin e le matrici  $U(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ , e anche le matrici delle rotazioni sono un gruppo di Lie.

Sia dato un gruppo  $\mathcal{G}$  con elementi  $g$  e sia dato uno spazio vettoriale lineare  $L$  dove è definito l'insieme degli operatori  $T(g)$ . Questo insieme di operatori è una rappresentazione del gruppo  $\mathcal{G}$  nello spazio lineare  $L$  se vale la relazione:

$$T(gg') = T(g)T(g') \quad \forall g, g' \in \mathcal{G}$$

La dimensione di  $L$  determina la dimensione di tale rappresentazione. Nel nostro caso abbiamo che:

$$g = g(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \text{matrice della rotazione nello spazio di isospin} \quad [21.44]$$

$$T(g) = U(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \text{rotazione nello spazio degli stati di isospin } 1/2 \quad [21.45]$$

$$L = \text{spazio degli stati di isospin } 1/2 \quad [21.46]$$

Un gruppo può avere più di una rappresentazione. Il gruppo delle rotazioni dello spazio di isospin ha un numero infinito di rappresentazioni di dimensione  $2t + 1$ .

La rappresentazione che permette di costruire tutte le altre rappresentazioni si dice *rappresentazione fondamentale*, e la base su cui tale rappresentazione agisce si dice *multipletto fondamentale*.

Nel nostro caso la rappresentazione fondamentale delle rotazioni è costituita dalle matrici speciali  $2 \times 2$ . I due stati  $|p\rangle$  e  $|n\rangle$  sono il multipletto fondamentale. Le matrici unitarie speciali  $SU(2)$  costituiscono anche una rappresentazione di se stesse. Le matrici unitarie speciali  $2 \times 2$  sono la rappresentazione fondamentale di se stesse.

6-5-1998

Per qualunque rappresentazione di un gruppo di Lie si ha la stessa algebra. Consideriamo i tre generatori della rappresentazione fondamentale  $T_k = (T_k)^{1/2}$  con  $k = 1, 2, 3$  del gruppo  $SU(2)$ . Indichiamo con

$$\psi^{1/2} = \begin{pmatrix} \psi_p \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

la funzione d'onda di isospin. Una rotazione dello spazio di isospin individua una trasformazione nello spazio degli stati:

$$\psi'^{1/2} = e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{T}}\psi^{1/2} \quad [21.47]$$

Questa si può generalizzare nel caso in cui si ha un generico  $t$ . La dimensione dello spazio degli stati è  $2t + 1$  e si ha:

$$\psi'(t) = e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{T}(t)}\psi(t)$$

Mentre il numero di generatori è sempre tre, questi generatori sono  $T_1^{(t)}, T_2^{(t)}, T_3^{(t)}$  che sono relativi alla rappresentazione considerata, infatti sono matrici di ordine  $2t+1$ . Questi generatori seguono la stessa algebra di quelli nel caso  $t = 1/2$ , quindi si può scrivere:

$$[T_i^{(t)}, T_j^{(t)}] = i\epsilon_{ijk} T_k^{(t)} \quad [21.48]$$

Il multipletto fondamentale di isospin è  $(|p\rangle, |n\rangle)$ . Questo si può riscrivere in modo compatto con il simbolo  $\textcircled{2} \equiv (|p\rangle, |n\rangle)$ .

Sappiamo che il prodotto diretto di due distinti doppietti di isospin dà una base di quattro stati, un tripletto e un singoletto, e si scrive:

$$\textcircled{2} \times \textcircled{2} = \textcircled{3} + \textcircled{1}$$

Consideriamo lo spazio definito dalla base  $\textcircled{2}_a \times \textcircled{2}_b$  e analizziamo la rappresentazione di ordine 4. La matrice identità è:

$$I = I_a \times I_b \quad (I_a \text{ e } I_b \text{ trasformazioni identità nelle basi } \textcircled{2}_a \text{ e } \textcircled{2}_b)$$

Consideriamo una matrice unitaria speciale infinitamente vicina a  $I$ :

$$\begin{aligned} U(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) &= (I_a + i\vec{\epsilon} \cdot \vec{T})(I_b + i\vec{\epsilon} \cdot \vec{T}_b) = \\ &= I + i\vec{\epsilon} \cdot (\vec{T}_a \times I_b + I_a \times \vec{T}_b) \end{aligned} \quad [21.49]$$

I generatori di questa rappresentazione sono  $\vec{T} = \vec{T}_a \times I_b + I_a \times \vec{T}_b$ .

La generica trasformazione che appartiene alla rappresentazione si può scrivere nella forma:

$$e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{T}} = e^{i\theta\vec{n}\cdot(\vec{T}_a \times I_b + I_a \times \vec{T}_b)}$$

Vale anche la proprietà:

$$[\vec{T}^2, e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{T}}] = 0$$

Questo garantisce che gli elementi della trasformazione lasciano invariato il numero quantico  $t$ , quindi non si può avere un passaggio dal sottospazio di singoletto a quello di tripletto (e viceversa) tramite queste trasformazioni. Lo spazio su cui agisce la rappresentazione è quindi scomponibile in due sottospazi invarianti,  $t = 1$  e  $t = 0$ . Si tratta dunque di una rappresentazione riducibile, cioè scomponibile in due rappresentazioni, una agente nello spazio di tripletto e l'altra in quello di singoletto. Se sceglieremo come base quella costituita dai componenti del tripletto e del singoletto la rappresentazione assumerà la forma diagonale a blocchi:

$$e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{T}} = \begin{pmatrix} e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{T}^{(1)}} & 0 \\ 0 & e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{T}^{(0)}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\theta\vec{n}\cdot\vec{T}^{(1)}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una rappresentazione che agisce in uno spazio vettoriale  $L$  si dice riducibile se esiste almeno un sottospazio di  $L$  in cui rimane invariante, in caso contrario si dice irriducibile.

Tutto quanto detto si può generalizzare nel caso di un gruppo  $SU(n)$ . La dimensione di queste matrici è  $n$ . Una matrice unitaria speciale infinitamente vicina a  $I$  si può scrivere come

$$U = I + i\xi$$

dove  $\xi$  è una matrice  $n \times n$  a elementi complessi, hermitiana e a traccia nulla. Questa sarà individuata da  $n - 1$  elementi indipendenti reali sulla diagonale, e da  $\frac{n^2-n}{2}$  elementi indipendenti complessi non diagonali. Quindi il numero totale di parametri indipendenti è:

$$(n-1) + 2\left(\frac{n^2-n}{2}\right) = n-1 + n^2 - n = n^2 - 1$$

Indichiamo questi  $N^2 - 1$  elementi con  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n^2-1}$ . La matrice  $\xi$  si può dunque scrivere nella forma:

$$\xi = \sum_{k=1}^{n^2-1} \epsilon_k T_k \quad [21.50]$$

dove i  $T_k$  sono gli  $n^2 - 1$  generatori. La trasformazione generica appartenente alla rappresentazione di  $SU(n)$  è:

$$U(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n^2-1}) = \exp[i \sum_{k=1}^{n^2-1} \theta_k T_k] \quad [21.51]$$

Il gruppo  $SU(n)$  è un gruppo di Lie di dimensione  $n^2 - 1$ , la cui rappresentazione fondamentale ha dimensione  $n$ . Il numero di generatori del gruppo e di tutte le sue rappresentazioni è  $n^2 - 1$ .

## 21.5 TEORIA DEI QUARKS

*8-5-1998*

Uno dei principali obiettivi della fisica di oggi è quello di trovare un ordinamento fra le particelle. Una scuola di pensiero considera le particelle tutte con la stessa elementarità, mentre una seconda che si ispira alla tavola periodica degli elementi non le considera tutte egualmente elementari.

Nel 1956 Sakata ipotizzò che tutti gli adroni conosciuti fossero combinazioni di tre particelle:  $n, p^+, \Lambda^0$  (e le corrispondenti antiparticelle).

$$n = \text{portatore di numero barionico.} \quad [21.52]$$

$$p^+ = \text{portatore di carica elettrica elementare.} \quad [21.53]$$

$$\Lambda^0 = \text{portatore del numero quantico di stranezza.} \quad [21.54]$$

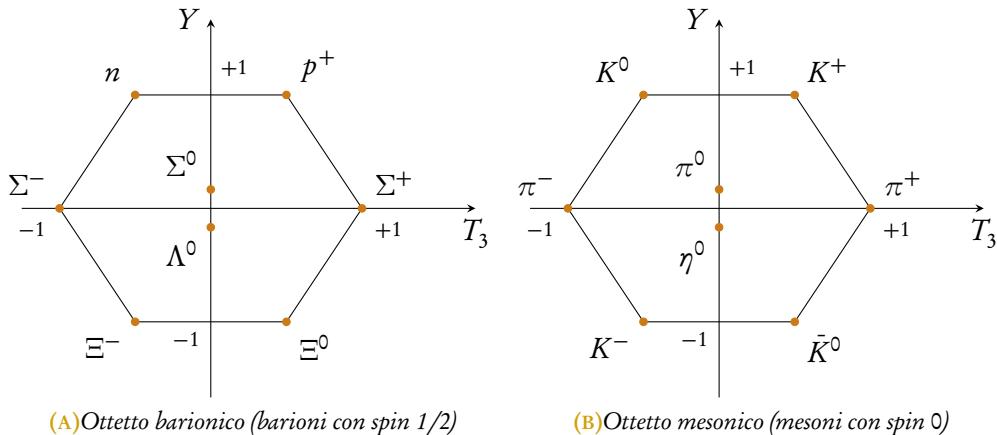
Presto si vide che questo modello era in disaccordo con l'esperienza in quanto prevedeva l'esistenza di particelle mai evidenziate sperimentalmente. Ad esempio consideriamo l'esistenza di iperoni con stranezza positiva:  $p^+ n \bar{\Lambda}^0$ , questi in realtà non esistono.

Subito dopo fu messo in luce che tutti gli adroni conosciuti potevano essere raggruppati secondo lo spin e la parità intrinseca in famiglie da 1, 8, 10 componenti.

$$Y = B + S \quad \text{ipercarica} \quad S = \text{stranezza}, B = \text{num. barionico}$$

Per i barioni con spin 1/2 e i mesoni di spin 0 rientrano tutti in un ottetto (schemi in Figura 21.1).

**FIGURA 21.1.: Ottetti.**



(A) Ottetto barionario (barioni con spin 1/2)

(B) Ottetto mesonico (mesoni con spin 0)

$\eta^0$  è un mesone di massa  $m \simeq 549 \text{ MeV}/c^2$ , viene prodotto nella reazione:

$$K^- + p^+ \rightarrow \eta^0 + \Lambda^0$$

Effettivamente gli adroni potevano quindi raggrupparsi in multipletti composti da 1, 8, 10 componenti. Quelli di sopra sono due esempi. Questa classificazione è più generale di quella dello spin isotopico. Questa classificazione si dice *ottuplice via*. Questa presupponeva per l'interazione forte una simmetria più ampia di quella di isospin. Nell'ambito di questa simmetria lo spazio a 2 dimensioni degli stati di isospin deve essere sostituito con uno spazio a 3 dimensioni, in quanto si deve considerare l'ulteriore grado di libertà associato alla stranezza -1.

I tre autostati di isospin e stranezza, pur avendo le stesse prerogative degli stati  $|p^+\rangle$ ,  $|n\rangle$ ,  $|\Lambda^0\rangle$ , non potevano coincidere con questi in quanto questi ultimi appartenevano ad un ottetto. Si passa così dal gruppo  $SU(2)$  caratterizzato da 3 generatori e da un multipletto fondamentale a 2 dimensioni, al gruppo  $SU(3)$  con 8 generatori ed un multipletto fondamentale a 3 dimensioni (indichiamo questo con  $\textcircled{3}$ ). Si può scrivere:

$$\textcircled{3} \times \textcircled{3} \times \textcircled{3} = \textcircled{10} + \textcircled{8} + \textcircled{8} + \textcircled{1} \quad [21.55]$$

A destra sono indicati i supermultipletti in cui l'insieme delle combinazioni viene a scindersi.

I supermultipletti generano sottospazi invarianti per trasformazioni del gruppo  $SU(3)$ . Indicando con  $\textcircled{\bar{3}}$  l'antimultipletto, i multipletti mesonici si possono ricavare dalle combinazioni:

$$\textcircled{3} \times \textcircled{\bar{3}} = \textcircled{8} + \textcircled{1}$$

Non sembravano esserci particelle corrispondenti ai tre stati dei multipletti, quindi si pensava che fossero delle strutture fittizie e matematiche degli stati che non erano occupati da alcuna particella. Secondo quest'idea gli adroni non erano composti da altre particelle più elementari e quindi la fisica degli adroni non doveva essere il risultato di una fisica più elementare.

I due fisici Gell-Mann e Zweig nel '64 avanzarono l'ipotesi che agli stati costituenti il multipletto fondamentale di  $SU(3)$  corrispondessero effettivamente tre entità fisiche con determinati numeri quantici. Solo con questa ulteriore ipotesi secondo loro si spiegava in maniera completa la fisica degli adroni. Questi costituenti furono chiamati *quark*:

- quark  $u$ (up) I primi due formano un doppietto di isospin con stranezza 0.
- quark  $d$ (down) [21.56]
- quark  $s$ (strange) singoletto di isospin con stranezza -1.

Quindi si deve avere:

$$T_3|u\rangle = +\frac{1}{2}|u\rangle \quad [21.57]$$

$$T_3|d\rangle = -\frac{1}{2}|d\rangle \quad [21.58]$$

$$S|u\rangle = S|d\rangle = 0 \quad [21.59]$$

$$\vec{T}|s\rangle = T_3|s\rangle = 0 \quad [21.60]$$

$$S|s\rangle = -1|s\rangle \quad [21.61]$$

Attribuendo ai quark spin 1/2 si ricava subito che i barioni di spin 1/2 dovevano essere costituiti da combinazioni di 3 quarks di cui due in uno stato di spin di singoletto. Si deve escludere che uno dei tre quarks possa essere un antiquark, in quanto non verrebbero riprodotti gli ottupletti esistenti e in più dovrebbero esistere barioni con stranezza positiva. Ponendo i tre quarks sullo stesso piano si deve attribuire loro un numero barionico pari a 1/3:

$$B|u\rangle = +\frac{1}{3}|u\rangle \quad B|d\rangle = +\frac{1}{3}|d\rangle \quad B|s\rangle = +\frac{1}{3}|s\rangle \quad [21.62]$$

Conseguenza di questo è l'attribuzione di una carica elettrica frazionaria, e cioè +2/3 per il quark  $u$ , e -1/3 per i quarks  $d$  e  $s$ .

$$Q|u\rangle = +\frac{2}{3}|u\rangle \quad Q|d\rangle = -\frac{1}{3}|d\rangle \quad Q|s\rangle = -\frac{1}{3}|s\rangle \quad [21.63]$$

Questo si evince dalla formula  $Q = T_3 + \frac{1}{2}(B + S)$ .

Secondo questo modello i barioni sarebbero la combinazione di tre quarks:

$$\textcircled{3} \times \textcircled{3} \times \textcircled{3} = \textcircled{10} + \textcircled{8} + \textcircled{8} + \textcircled{1}$$

e questa ora non è più un'uguaglianza solo matematica, ma anche fisica.

11-5-1998

Riassumendo quanto detto per barioni e mesoni si ha:

$$\text{barioni } \textcircled{3} \times \textcircled{3} \times \textcircled{3} = \textcircled{10} + \textcircled{8} + \textcircled{8} + \textcircled{1} \quad [21.64]$$

$$\text{mesoni } \textcircled{3} \times \textcircled{3} = \textcircled{8} + \textcircled{1} \quad [21.65]$$

$$\textcircled{3} \equiv (|u\rangle, |d\rangle, |s\rangle) \quad \textcircled{3} \equiv (|\bar{u}\rangle, |\bar{d}\rangle, |\bar{s}\rangle) \quad [21.66]$$

Vediamo ora quali sono le combinazioni di quarks che formano  $p^+, n, \Lambda^0$ :

$$p^+ \equiv uud \quad n \equiv ddu \quad \Lambda^0 \equiv uds \quad [21.67]$$

Per i mesoni invece si ha:

$$\begin{aligned} \pi^- &\equiv d\bar{u} & \pi^0 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d}) & \pi^+ &\equiv u\bar{d} & (s = -1) \\ K^0 &\equiv d\bar{s} & K^+ &\equiv u\bar{s} & \bar{K}^0 &\equiv s\bar{d} & K^- &\equiv s\bar{u} \end{aligned} \quad [21.68]$$

La combinazione quark-antiquark per i mesoni è in accordo col fatto che tutti i mesoni con spin 0 hanno parità intrinseca negativa.

Questo è il modello a quark proposto nel 1964 da Gell-Mann e Zweig, questo si basa sul gruppo di simmetria  $SU(3)$ . Un modello a quark più aggiornato è quello che considera anche un quarto quark, il quark  $c$  ("charm"=incanto), che ha sempre numero barionico  $1/3$ , numero quantico di incanto  $+1$ , carica elettrica  $+2/3$ , isospin 0 e stranezza 0. Cioè questo quark ha la prerogativa di portare il numero quantico di incanto. In questo modo il tripletto fondamentale va sostituito con un quadrupletto fondamentale  $(u, d, s, c)$ .

Si passa così sulla dimmetria  $SU(3)$  a  $SU(4)$ . I barioni derivano da combinazioni  $\textcircled{4} \times \textcircled{4} \times \textcircled{4}$ , mentre i mesoni da  $\textcircled{4} \times \textcircled{4}$ . Oggi si sa che esistono altri due quarks:  $t$  ("truth"=verità) e  $b$  ("beauty"=bellezza). Quindi il gruppo di simmetria dell'interazione forte è  $SU(6)$ .

In realtà non si è mai osservato un quark in modo diretto. L'ipotesi dei quarks è però indirettamente convalidata da numerosi fatti sperimentali che non si potrebbero spiegare altrimenti. Uno di questi fatti è la mancanza di barioni con stranezza positiva: questo si spiega con l'esistenza solo di un quark con stranezza  $-1$ . Un altro fatto è la non esistenza di multipletti adronici con numero quantico di isospin maggiore di  $3/2$ . I quarks  $u$  e  $d$  hanno isospin  $1/2$ , mentre tutti gli altri hanno zero, quindi combinando tre quarks, al più si può ottenere un  $t = 3/2$ .

Un ulteriore esempio è l'assenza di brioni con stranezza  $-1$  e carica  $+2$ , questo è dovuto al fatto che  $s$  ha carica  $-1/3$  e i quarks con carica positiva hanno carica  $+2/3$ . Dunque combinando un quark  $s$  con altri due quarks la carica maggiore che si può ottenere è  $+2/3 + 2/3 - 1/3 = 1$ . L'esistenza del quark  $s$  consente di spiegare le due regole empiriche:

$$|\Delta S| = 1 \quad \Delta S = \Delta q \quad (\Delta q \neq 0)$$

che seguono i decadimenti deboli. Nel modello di G-Z qualsiasi processo di decadimento con variazione di stranezza deve corrispondere ad una della quattro transizioni:

$$s \rightarrow u \ (\Delta S = 1, \Delta q = 1) \quad [21.69]$$

$$s \rightarrow \bar{u} \ (\Delta S = -1, \Delta q = -1) \quad [21.70]$$

$$s \rightarrow d \ (\Delta S = 1, \Delta q = 0) \quad [21.71]$$

$$s \rightarrow \bar{d} \ (\Delta S = -1, \Delta q = 0) \quad [21.72]$$

Si deve sottolineare però che il modello a quarks prevede sezioni d'urto dei processi d scattering leptone-adrone in perfetto accordo coi dati sperimentali. Per verificare questo si usano come particelle incidenti elettroni e neutrini con energia maggiore di 1GeV, che corrisponde ad una lunghezza d'onda di De Broglie  $\lambda \gtrsim 10^{-14}$ cm. Questi sono prevalentemente processi anelastici, i dati sperimentali mostrano che elettroni e neutrini vengono diffusi da oggetti puntiformi all'interno degli adroni.

Questi dati sono spiegati abbastanza bene dal *modello a partoni* di Feynman. Secondo questo modello ogni adrone è composto apparentemente da un numero infinito di particelle puntiformi con spin 1/2 (i *partoni*). Queste particelle comprendono i tre quarks reali e una nube d infinite coppie virtuali quark-antiquark, che vestono i quarks reali (questi si dicono quarks vestiti).

L'indiretta conferma sperimentale dei quarks pone in primo piano la questione della loro inosservabilità; questo si può spiegare con il confinamento dei quarks all'interno degli adroni dovuto ad un potenziale che cresce molto rapidamente all'aumentare della distanza fra i quarks (come un potenziale di tipo elastico). Si può pensare che i quarks siano legati fra loro da molle perfette, in modo che la forza fra i quarks è nulla per distanze molto piccole, questo consente ai quarks confinati negli adroni di comportarsi come particelle quasi libere ciascuna con la sua individualità. Questa proprietà si dice *libertà asintotica*. Questo porta all'assegnazione di una massa ai quarks:

$$m_u = m_d = 336 \text{ MeV}/c^2 \quad [21.73]$$

$$m_s = 538 \text{ MeV}/c^2 \quad [21.74]$$

$$m_c = 1650 \text{ MeV}/c^2 \quad [21.75]$$

La considerevole differenza di massa fra i quarks rispecchia quella esistente fra gli adroni di uno stesso supermultipletto; questa differenza è 100 volte superiore a quella attribuibile all'interazione elettromagnetica. Se denominiamo con interazione forte quella che rispetta la simmetria all'interno di un multipletto allora esisterà un'altra interazione intermedia fra forte ed elettromagnetica responsabile della differenza di massa fra le particelle di un supermultipletto. Questa si dice *interazione medio-forte*; questa continua a rispettare la simmetria di isospin in quanto le differenze di massa in un multipletto sono dell'ordine di grandezza elettromagnetico.

## 21.6 NUMERO QUANTICO DI COLORE

Si notò presto che l'ipotesi dei quarks in alcuni casi contraddiceva il principio d'esclusione di Pauli. Infatti alcuni barioni risultavano costituiti da tre quarks identici nello stesso stato quantico. Ad esempio consideriamo l'iperone  $\Omega^-$  che ha stranezza  $-3$  e appartiene al decupletto barionico di spin  $3/2$ . L'esistenza di  $\Omega^-$  come membro di tale decupletto era stata già prevista dal modello dell'ottuplice via (per tale previsione Gell-Mann prese il Nobel). Nel modello a quarks  $\Omega^-$  dovrebbe risultare dalla composizione di tre quarks  $s$  con spin paralleli e momento angolare orbitale nullo. Un altro modello era quello della risonanza barionica  $\Delta^{++}$  con spin  $3/2$ , stranezza  $0$  e terza componente di isospin  $3/2$ . Questa risonanza sembrava dover provenire dalla combinazione di tre quarks  $u$  con spin paralleli e momento angolare orbitale nullo.

Chiamiamo *sapore* (flavuor) il numero quantico elementare che distingue un quark da un altro all'interno del multipletto fondamentale. Con questo numero quantico si intende in generale un numero quantico di isospin, di stranezza o di incanto.

Cioè ogni quark nel multipletto fondamentale ha un certo sapore. Si può assumere che la funzione d'onda complessiva di uno stato di tre quarks sia data dal prodotto di tre fattori:

$$\psi = \psi_l \psi_s \psi_f \quad [21.76]$$

dove

- $\psi_l$  è la parte spaziale;
- $\psi_s$  è la parte dipendente dalle coordinate di spin dei quarks;
- $\psi_f$  è la parte dipendente dalle coordinate di sapore dei quarks.

Per l'iperone  $\Omega^-$  e  $\Delta^{++}$  tutti e tre i fattori risulterebbero simmetrici per lo scambio di due quarks, così anche  $\psi$  risulta simmetrica, invece che antisimmetrica come richiesto dalla statistica di Fermi-Dirac. Quindi  $\Omega^-$  e  $\Delta^{++}$  violano la statistica di F-D. Per ovviare a questa contraddizione nel '64 Gruenberg introdusse un nuovo numero quantico additivo, il *colore*. Secondo il suo modello i tre quarks che formano  $\Omega^-$  e  $\Delta^{++}$  sarebbero caratterizzati da diversi numeri quantici di colore. Cioè pur avendo lo stesso sapore questi avrebbero diverso colore, e quindi i loro stati quantici non risulterebbero identici. La funzione d'onda totale di un sistema di tre quarks assume la forma generalizzata:

$$\psi = \psi_l \psi_s \psi_f \psi_c \quad [21.77]$$

dove  $\psi_c$  è un fattore che dipende dalle coordinate di colore dei quarks.

Se tre quarks differiscono solo per il colore non risulta più violato il principio di Pauli. Si può pensare ai tre quarks come a tre particelle non proprio identiche, ma distinguibili per il colore. Alternativamente si possono immaginare i tre quarks come particelle identiche, cioè che il numero quantico di colore si può pure scambiare, in questo caso deve valere la statistica di Fermi-Dirac e quindi il fattore  $\psi_c$  deve risultare antisimmetrico per lo scambio di due colori.

Qualunque barione nel suo complesso però non appare colorato, cioè non è possibile attribuirgli un numero quantico diverso da zero, in quanto questo numero quantico non ha

alcuna manifestazione fino ad ora. Quindi assumiamo che ogni barione abbia colore zero e che quindi si trovi in uno stato di singoletto. Per non contraddirre il principio di Pauli ciascun quark deve poter esistere in tre varietà di colore (di solito si chiamano rosso, verde e blu). Le funzioni d'onda di questi autostati si indicano con  $q_r, q_v, q_b$ .

$$\psi_c = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_P (-1)^{n_p} q_r(P_1) q_v(P_2) q_b(P_3) \quad [21.78]$$

Dove P=permutazioni dell'insieme  $(1,2,3) \rightarrow (P_1, P_2, P_3)$ ;  $n_p$  = parità della permutazione.

Questa  $\psi_c$  rappresenta il fattore di colore per tutti i barioni, cioè è lo stato di singoletto con colore zero, cioè si suppone che rosso+verde+blu= zero. ogni quark ha la stessa probabilità di avere colore r, v o b, ma il barione è sempre neutro per il colore.

Estendendo l'ipotesi di singoletto di colore anche per i mesoni si trova che la funzione d'onda di colore è:

$$\psi_c = \frac{1}{\sqrt{3}} (q_r \bar{q}_{\bar{r}} + q_v \bar{q}_{\bar{v}} + q_b \bar{q}_{\bar{b}}) \quad [21.79]$$

dove  $\bar{r}, \bar{v}, \bar{b}$  sono gli anticolori, che annullano i colori:  $r + \bar{r} = 0$ .

L'ipotesi del colore triplica il numero di quarks in quanto ogni quark con un dato sapore può esistere con tre diversi colori. L'idea del colore però non implica una variazione di massa in corrispondenza di una variazione di colore. Appare quindi naturale introdurre una nuova simmetria interna, che è esatta; questa simmetria è caratterizzata da trasformazioni unitarie con  $\det = +1$  nello spazio elementare degli stati di colore, spazio definito dal multipletto fondamentale  $|r\rangle, |v\rangle, |b\rangle$ .

Questa simmetria esprime l'indipendenza di tutte le interazioni dal colore.

15-5-1998

Se indichiamo con  $R_c$  una qualsiasi trasformazione unitaria con  $\det = +1$  agente nello spazio degli stati di colore, l'hamiltoniana del sistema non cambia per effetto di questa trasformazione, cioè:

$$[R_c, H_{\text{TOT}}] = 0$$

Questo equivale ad affermare l'indipendenza di tutte le interazioni rispetto al colore.

Formalmente questa simmetria è analoga a quella di G-Z rispetto alle trasformazioni  $SU(3)_f$  agenti nello spazio individuato dal multipletto di sapore ( $|u\rangle, |d\rangle, |s\rangle$ ). Quindi si può considerare il multipletto ( $|r\rangle, |v\rangle, |b\rangle$ ) e la simmetria  $SU(3)_c$ . La simmetria  $SU(3)_f$  non è però esatta, in quanto è rispettata solo dall'interazione forte. Se  $R_f$  è una trasformazione di  $SU(3)_f$  si ha:

$$[R_f, H_{\text{TOT}}] \neq 0 \quad [R_f, H_{\text{FORTE}}] = 0 \quad [21.80]$$

L'identità formale fra simmetria di colore e di sapore suggerirebbe l'esistenza di diversi supermultipletti di colore in analogia con quelli di sapore. Sia  $\mathbb{3}_c$  la base di colore:  $\mathbb{3}_c = (|r\rangle, |v\rangle, |b\rangle)$ . Risulta quindi:

$$\mathbb{3}_c \times \mathbb{3}_c \times \mathbb{3}_c = \mathbb{10}_c + \mathbb{8}_c + \mathbb{8}_c + \mathbb{1}_c \quad [21.81]$$

Si ritiene tuttavia che la totalità degli adroni osservabili deve occupare il solo stato di singoletto di colore  $\textcircled{1}_c$ . Questa ipotesi fà sì che il colore sia un numero quantico nascosto in quanto viene esclusa la possibilità che esistano adroni colorati.

Nonostante questo fatto l'esistenza del colore non sembra basarsi su ragioni puramente teoriche. Infatti l'introduzione del colore elimina alcune incongruenze fra dati sperimentali e previsioni basate sul modello a quark senza colore. Consideriamo ad esempio il decadimento del pion  $\pi^0$  in due fotoni  $\gamma$ :

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

Consideriamo prima la trattazione senza colore. Nell'ambito della teoria delle perturbazioni questo decadimento si può trattare in prima approssimazione come un processo al secondo ordine:

$$\pi^0 \rightarrow q + \bar{q} \rightarrow \gamma + \gamma \quad [21.82]$$

$q$  e  $\bar{q}$  sono un quark e il suo antiquark con un dato sapore e antisapore. Per la regola d'oro di Fermi la costante di disintegrazione in prima approssimazione si può scrivere come:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} |H'_{if}|^2 \rho_f \quad H'_{if} = \sum_m \frac{H_{im} H_{mf}}{E_i - E_m} \quad [21.83]$$

dove la somma su  $m$  è estesa a tutti i possibili stadi intermedi, quindi nel nostro caso a tutti i sapori che il quark può avere. Quindi:

$$H'_{if} = \sum_q H'^{(q)}_{if}$$

$H'^{(q)}_{if}$  è l'elemento di matrice per un singolo sapore e antisapore, cioè:

$$H'^{(q)}_{if} = \frac{H^{(q)}_{im} H^{(q)}_{mf}}{E_i - E_m^{(q)}}$$

La costante di disintegrazione così calcolata risulta circa  $1/q$  di quella sperimentale, cioè:  $\lambda = \frac{1}{q} \lambda_{\text{sper}}$ . Consideriamo ora pure il colore. Ciascun quark  $q$  può esistere in tre varietà di colore, così il numero di stati intermedi si triplica. In questo caso si deve fare la sostituzione:

$$H'^{(q)}_{if} \rightarrow 3H'^{(q)}_{if} \Rightarrow |\sum_q H'^{(q)}_{if}|^2 \rightarrow q |\sum_q H'^{(q)}_{if}|$$

E dunque per la costante di disintegrazione si ottiene:

$$\lambda_c = q \lambda \simeq \lambda_{\text{sper}}$$

Quindi stati virtuali non osservabili direttamente producono effetti osservabili.

L'ipotesi di neutralità degli adroni reali rispetto al colore, insieme con l'ipotesi di confinamento dei quark colorati nell'adrone, costituisce un punto di partenza per una descrizione dinamica dell'interazione forte come un'interazione a raggio infinito<sup>8</sup>.

Secondo questa descrizione il colore è la carica che genera l'interazione forte e causa il confinamento dei quarks. La neutralità degli adroni spiegherebbe perché l'interazione forte si manifesta come un'interazione a corto raggio. Ci si trova in una situazione analoga a quella che si avrebbe se elettroni e protoni fossero sempre confinati all'interno di atomi neutri. In questo senso si può paragonare l'interazione forte fra adroni alle forze di Van der Waals fra atomi neutri. Il colore genererebbe quindi un'interazione attrattiva a raggio infinito che dovrebbe quindi essere propagata da un quanto di massa nulla (come il fotone). L'interazione fra due cariche si potrebbe così descrivere quantisticamente come un continuo scambio di questi quanti. Questo quanto si dice *gluone*.

In questi ultimi anni si è sviluppata una teoria analoga all'elettrodinamica quantistica e si dice *cromodinamica quantistica*. Anche se l'analogia è stretta esistono differenze. Una di queste è che in base alla simmetria di colore l'interazione forte sarebbe indipendente dalla carica di colore dei quarks. Questo implica che i gluoni, a differenza dei fotoni, possono loro stessi trasportare una carica di colore (cioè essere colorati) dando luogo ad uno scambio di colore fra quarks interagenti. Lo scambio di gluoni colorati spiega perché i quarks in un adrone possono scambiare i loro colori pur rimanendo uno di colore differente dall'altro.

In stretta connessione con l'esistenza di gluoni colorati si può notare un'altra differenza con l'elettrodinamica. Infatti gli stessi gluoni colorati trasportando il colore interagiscono fra di loro. Questo rende la cromodinamica quantistica molto più complicata rispetto all'elettrodinamica quantistica.

## 21.7 LEPTONI

18-5-1998

I *leptoni* sono sei, tutti con spin 1/2, e con carica elettrica nulla o uguale a  $-e$ . Questi sono:

$$e^- \quad (m_e \simeq 0,511 \text{ MeV}/c^2) \quad \text{elettrone} \quad [21.84]$$

$$\mu^- \quad (m_\mu \simeq 106 \text{ MeV}/c^2) \quad \text{muone} \quad [21.85]$$

$$\tau^- \quad (m_\tau \simeq 1782 \text{ MeV}/c^2) \quad \text{tauone} \quad [21.86]$$

$$\nu_e \quad \text{neutrino associato all'elettrone} \quad [21.87]$$

$$\nu_\mu \quad \text{neutrino associato al muone} \quad [21.88]$$

$$\nu_\tau \quad \text{neutrino associato al tauone} \quad [21.89]$$

I processi di interazione in cui sono coinvolti i leptoni sono solo di natura debole o elettromagnetica. Quindi questa famiglia si distingue in quanto non interagisce in modo forte. Il

<sup>8</sup>Seguono due fogli (fotocopie di un vecchio libro) in cui si trova la dimostrazione di come tre quarks di colori diversi non interagiscono con un quarto quark. Dato che le fotocopie sono segnate come "facoltative" si è scelto di non includerle. [NdT]

muone fu scoperto nel '47 nei raggi cosmici e fu inizialmente confuso con il  $\pi^-$ . Ci si accorse presto che questo non poteva essere, in quanto il muone non interagisce in modo forte. Uno dei canali naturali di produzione del muone è dato dal decadimento debole del  $\pi^-$ :

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

L'antineutrino associato al muone non coincide con l'antineutrino  $\bar{\nu}_e$  associato al decadimento  $\beta$ :

$$n \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

Questo si vede che  $\bar{\nu}_\mu$  non induce la reazione:

$$\bar{\nu}_\mu + p^+ \not\rightarrow e^+ + n$$

mentre invece dà luogo alla reazione:

$$\bar{\nu}_\mu + p^+ \rightarrow \mu^+ + n$$

Per  $\bar{\nu}_e$  avviene esattamente il contrario, infatti si ha:

$$\bar{\nu}_e + p^+ \rightarrow e^+ + n \quad \bar{\nu}_e + p^+ \not\rightarrow \mu^+ + n$$

Si è fissato sperimentalmente un limite superiore per la massa di  $\nu_\mu$  e si ha:

$$m_{\nu_\mu} < 0,8 \text{ MeV}/c^2$$

Dal momento che  $m_{\nu_\mu} \ll m_\mu$  si può benissimo assumere che sia:

$$m_{\nu_\mu} = m_{\nu_e} = 0$$

(il neutrino è sempre associato a un muone). I neutrini essendo elettricamente neutri possono avere solo interazione di tipo debole. Questo è confermato dal fatto che un fascio di neutrini può attraversare enormi strati di materia senza subire apprezzabili variazioni. La sezione d'urto dei neutrini con un nucleone risulta:

$$\sigma(\nu - \mathcal{N}) \sim 10^{-44} \left( \frac{E_\nu^2}{\text{GeV}^2} \right) \text{cm}^2$$

questo nel caso in cui  $E_\nu \ll 1 \text{ GeV}$ . Invece si ha:

$$\sigma(\nu - \mathcal{N}) \sim 10^{-38} \left( \frac{E_\nu}{\text{GeV}} \right) \text{cm}^2$$

per  $E_\nu > 1 \text{ GeV}$ . Questo brusco aumento di  $\sigma$  coincide col passaggio dall'interazione del neutrino con l'intero nucleone all'interazione del neutrino con i singoli partoni. Il muone ha un tempo di vita media:

$$\tau_\mu \simeq 2,2 \cdot 10^{-6} \text{s}$$

Il muone subisce il decadimento debole:

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

Il leptone pesante  $\tau$  scoperto nel '75 sembra avere caratteristiche simili al muone. Il suo decadimento avviene secondo i due canali:

$$\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \quad [21.90]$$

$$\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \quad [21.91]$$

## 21.8 LEGGE DI CONSERVAZIONE DEL NUMERO LEPTONICO

Su basi sperimentali è possibile formulare una legge di conservazione del numero fermionico leptonico.

Indichiamo con  $N_e(t)$  e  $N_{\bar{e}}(t)$  il numero di leptoni e antileptoni all'istante  $t$ , si ha:

$$N_e(t) - N_{\bar{e}}(t) = \text{costanti}$$

Si può associare un numero leptonico  $+1$  ai leptoni,  $-1$  agli antileptoni e  $0$  a tutte le altre particelle.

Si vede che esistono tre sottotipi di numero leptonico separatamente conservati: numero leptonico elettronico ( $e^-, e^+, \nu_e, \bar{\nu}_e$ ), numero leptonico muonico ( $\mu^-, \mu^+, \nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$ ), numero leptonico tauonico ( $\tau^-, \tau^+, \nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$ ). A ciascuno di questi si associa un operatore:  $L_e, L_\mu, L_\tau$ . Il numero leptonico si definisce come:

$$L = L_e + L_\mu + L_\tau$$

La conservazione di  $L_\tau$  si ricava dalle singole conservazioni di  $L, L_e, L_\mu$  e implica l'esistenza di un neutrino  $\nu_\tau$  nei prodotti di decadimento di  $\tau$ . Questo neutrino però non è stato ancora direttamente osservato. Ad esempio consideriamo il decadimento:

$$\tau^- \rightarrow \mu^- + \nu_\mu + \nu_\tau$$

La presenza di una terza particella è richiesta anche dalla conservazione del momento angolare, per la conservazione di  $L$  questa particella deve essere un leitone, e per la conservazione di  $L_e$  e  $L_\mu$  questa terza particella non può coincidere con  $\nu_e$  o  $\nu_\mu$ . Per la conservazione separata di  $L, L_e, L_\mu$  il principale fatto che ne dà una conferma sperimentale è l'assenza di reazioni del tipo:

$$\mu^\pm \not\rightarrow e^\pm + \gamma \quad \mu^\pm + e^- \not\rightarrow \gamma + \gamma$$

pur essendo transizioni elettromagnetiche permesse.

Il decadimento debole del muone è analogo a quello  $\beta$  del neutrone ed è anch'esso caratterizzato dalla costante di accoppiamento di Fermi. In prima approssimazione si può porre l'elemento di matrice uguale alla costante di contatto.

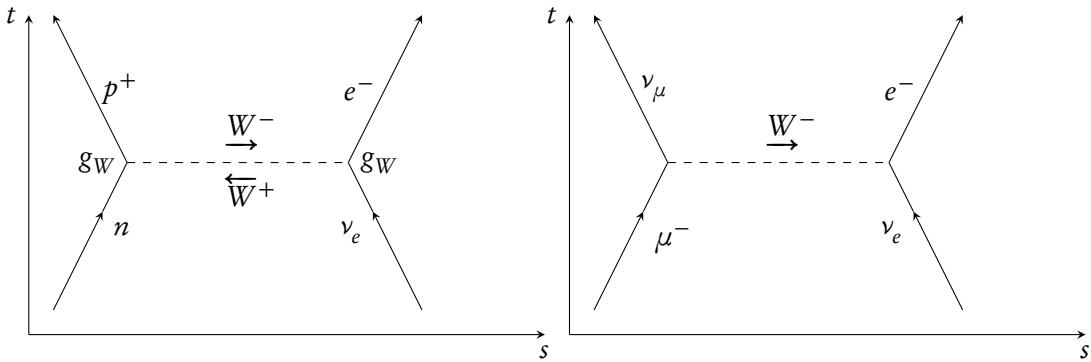
Oggi sappiamo che lo schema di contatto è solo un'approssimazione di un processo del secondo ordine in cui vi è un bosone intermedio con massa di alcune decine di  $\text{GeV}/c^2$ , quindi anche se questa interazione non è di contatto, il raggio dell'interazione debole è molto piccolo. Il modello del bosone intermedio corregge una previsione della teoria di Fermi in disaccordo con i dati sperimentali.

Per alte energie in un processo di scattering elastico  $\nu_e, e^- \rightarrow \nu_e, e^-$  si ottiene secondo Fermi una sezione d'urto proporzionale a  $E_\nu$ :

$$\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^- \quad \sigma_{\text{el}}(\nu_e - e) \propto E_\nu$$

La teoria del bosone intermedio corregge questa previsione. Il bosone intermedio ha spin 1 e tre varietà di carica  $W^+, W^-, Z^0$ . Quindi si hanno i diagrammi in Figura 21.2.

**FIGURA 21.2.: Diagrammi di Feynman del bosone intermedio.**



Questi diagrammi tendono a quelli al primo ordine se si fa tendere a infinito la massa del bosone intermedio. La costante di accoppiamento complessiva è tale che:

$$g_W^2 \sim \alpha \quad \text{costante di struttura fine}$$

Quindi la vera intensità dell'interazione debole sarebbe dell'ordine di quella elettromagnetica. Questo fatto è alla base dell'interpretazione di queste due interazioni come dei casi particolari dell'interazione elettrodebole. Ci si chiede perché allora l'interazione debole è molto minore di quella elettromagnetica. Si ha che:

$$g \propto \frac{g_W^2}{M_W^2} \quad g = \text{costante di Fermi}$$

Quindi il valore piccolo di  $g$  è dovuto al grande valore di  $M_W$  e questo spiega la diversa intensità.

Il bosone intermedio  $Z^0$  è previsto dalla teoria elettrodebole ed è presente in interazioni senza scambio di cariche elettriche.

Parte IV

## APPENDICI



---

## APPENDICI MANOSCRITTE

### A.1 LEGAME FRA LA MANCANZA DELL'AUTOVALORE $m_z = 0$ DI SPIN FOTONICO E LA PROPRIETÀ DI TRASVERSALITÀ DELL'ONDA ELETTROMAGNETICA

La “gauge” di Coulomb del potenziale elettromagnetico  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$  vincola l’onda elettromagnetica ad avere una polarizzazione trasversale. Consideriamo ad esempio un’onda piana che si propaga lungo l’asse  $z$  e sia del tipo

$$\vec{A} = \Re \{ A_0 \vec{e} \exp [i(kz - \omega t)] \} \quad [A.1]$$

dove  $\vec{e}$  è il vettore unitario di componenti reali ( $e_x, e_y, e_z$ ) di polarizzazione. Si avrà allora:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A}{\partial z} = 0 \Rightarrow e_z = 0 \Rightarrow \vec{e} \cdot \vec{k} = 0$$

dove  $\vec{e} \cdot \vec{k} = 0$  esprime proprio la condizione di trasversalità dell’onda.

Per una direzione di propagazione lungo  $z$ , la soluzione più generale di onda piana sarà del tipo

$$\Re \left\{ \hat{x} A_{0x} \exp [i(kz - \omega t)] + \hat{y} A_{0y} \exp [i(kz - \omega t + \delta)] \right\} \quad [A.2]$$

dove  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  sono i versori degli assi  $x$  e  $y$  e dove  $\delta$  indica lo sfasamento relativo delle due componenti  $A_x$  e  $A_y$  di  $\vec{A}$ . Nel caso in cui  $\delta = 0$  si torna ad una polarizzazione lineare, mentre nel caso in cui  $\delta = \pm\pi/2$  e  $A_{0x} = A_{0y} = A_0$  si ottiene una polarizzazione circolare (levogira o destrogiro). In quest’ultimo caso si avrà corrispondentemente:

$$\vec{A} = \hat{x} A_0 \cos(kz - \omega t) \pm \hat{y} A_0 \sin(kz - \omega t) \quad [A.3]$$

e  $\vec{A}$  potrà anche scriversi nella forma

$$\Re \{ \hat{x} A_0 \exp [i(kz - \omega t)] \pm \hat{y} A_0 \exp [i(kz - \omega t + \delta)] \}$$

Potremo in particolare avere

$$\vec{A} = \Re \left\{ \sqrt{2} A_0 \vec{e}_L \exp [i(kz - \omega t)] \right\}$$

se la polarizzazione è levogira, oppure

$$\vec{A} = \Re \left\{ \sqrt{2} A_0 \vec{e}_L \exp [i(kz + \omega t)] \right\}$$

se la polarizzazione è destrogira, dove

$$\vec{e}_L \equiv \frac{\hat{x} + i\hat{y}}{\sqrt{2}} \quad \vec{e}_R \equiv \frac{\hat{x} - i\hat{y}}{\sqrt{2}}$$

I due versori di polarizzazione circolare  $\hat{e}_L$  e  $\hat{e}_R$  sono tali che una rotazione attorno all'asse z

$$\hat{x}' = \hat{x} \cos(\varphi) + \hat{y} \sin(\varphi), \quad \hat{y}' = -\hat{x} \sin(\varphi) + \hat{y} \cos(\varphi)$$

provocherà le rispettive trasformazioni

$$\begin{cases} \vec{e}'_L &= \vec{e}_L \exp(-i\varphi) \\ \vec{e}'_R &= \vec{e}_R \exp(+i\varphi) \\ \vec{e}'_z &= \vec{e}_z = 0 \end{cases} \quad [A.4]$$

Ciò va confrontato col fatto che  $\vec{A}$  rappresenta anche la funzione d'onda quantistica del fotone e che una rotazione attorno all'asse z sarà corrispondentemente rappresentata dall'operatore  $\exp(iJ_z\varphi/\hbar)$  dove  $J_z$  è la componente z del momento angolare totale del fotone. In teoria i possibili autovalori di  $J_z$  sono  $-1, 0, +1$  dove  $\pm 1$  sono semplicemente autovalori di spin del fotone (in quanto il momento angolare orbitale del fotone non può avere una componente longitudinale alla sua quantità di moto). È immediato allora vedere che le due polarizzazioni  $\vec{e}_L$  e  $\vec{e}_R$  corrispondono ai due stati di spin del fotone con autovalori  $\pm 1$  lungo z, mentre la mancanza di una polarizzazione longitudinale dell'onda corrisponde alla mancanza di uno stato di spin fotonico con autovalore 0 lungo z (infatti possiamo scrivere  $\vec{e}'_z = \vec{e}_z \exp(i0)$ ).

## A.2 DECADIMENTO DEL MESONE $K^+$

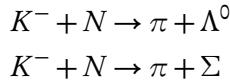
Il mesone  $K^+$ , detto caone +, ha tempo di vita media  $\tau_k \simeq 1,23 \times 10^{-8}$  sec e può decadere debolmente in 2 o 3 pioni.

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad (R \simeq 21\%) \quad [A.5]$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^0 \quad (R \simeq 5,6\%) \quad [A.6]$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0 \quad (R \simeq 1,7\%) \quad [A.7]$$

Un discorso simmetrico varrebbe per il caone  $K^-$ , solo che avendo stranezza  $s = -1$  non fa in tempo a decadere perch viene assorbito da un nucleo secondo la reazione:



cioè trasforma un nucleone in un iperione.  $K^+$  invece avendo  $s = +1$  subisce uno scattering elastico con i nuclei circostanti.

La presenza di canali con 2 e 3 pioni finali implica che non viene conservata la parità. Questo non fu compreso subito, si pensava vi fossero due tipi di  $K^+$ , denominati  $\theta^+$  e  $\tau^+$ , con parità intrinseche opposte:  $\theta^+$  doveva decadere in due pioni,  $\tau^+$  in tre pioni.

Ci si accorse però che i dati non erano compatibili con l'assegnazione di due diversi valori di parità intrinseca. Ciò diede lo spunto nel 1965 ai fisici cinesi Lie e Yang di suggerire una verifica diretta della simmetria per inversione spaziale nei processi devoli. Tale verifica venne effettuata l'anno dopo per i processi  $\beta$  con il decadimento del Co<sup>60</sup>.

Consideriamo il decadimento [A.5]. Supponendo  $K^+$  a riposo e sapendo che tutti gli elementi hanno spin nullo, si ha che  $l = 0$ . Se applichiamo l'operatore parità otterremo:

$$P |\pi^+, \pi^0\rangle = \eta_\pi^2 (-1)^2 |\pi^+, \pi^0\rangle = (+1) |\pi^+, \pi^0\rangle \quad [A.8]$$

quindi lo stato finale ha parità +1.

Se invece consideriamo i decadimenti di  $K^+$  in 3 pioni, con  $K^+$  a riposo, il momento angolare totale dei tre pioni si può scrivere come

$$\vec{J} = \vec{L}_{12} + \vec{L}_3$$

dove  $\vec{L}_{12}$  è il momento angolare dei primi due pioni rispetto al centro di massa ed  $\vec{L}_3$  è il momento angolare del terzo pione rispetto ai primi due.

Dato che il momento angolare iniziale è zero, lo stato finale sarà autostato di  $\vec{J}$  con autovalore  $j = 0$ . Allora dovrà risultare  $j = j_{\min} = |l_{12} - l_3| = 0 \Rightarrow l_{12} = l_3$ .

Ricordando che la parità intrinseca del pione è -1 avremo:

$$P |3\pi\rangle = \eta_\pi^3 (-1)^{l_{12}} (-1)^{l_3} |3\pi\rangle = \eta_\pi^3 (-1)^{2l_3} |3\pi\rangle = \eta_\pi^3 |3\pi\rangle = (-1) |3\pi\rangle$$

Visto che lo stesso  $K^+$  può decadere in due stati con parità opposte *il decadimento non conserva la parità*.

Il caone  $K^+$  decade anche in canali leptonici e semileptonici, per esempio

$$\left. \begin{aligned} K^+ &\rightarrow e^+ + \nu \\ K^+ &\rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu \end{aligned} \right\} \text{gli stati finali non hanno parità definita} \quad [A.9]$$

e analogamente

$$\left. \begin{aligned} K^+ &\rightarrow e^+ + \bar{\nu} \\ K^+ &\rightarrow \pi + e^+ + \bar{\nu} \end{aligned} \right\} \quad [A.10]$$

$$|e^-, \bar{\nu}\rangle = CP |e^+, \nu\rangle$$

Per il canale leptonico  $|\pi^0, e^-, \bar{\nu}\rangle = CP |\pi^0, e^+, \nu\rangle$ .

### A.3 DECADIMENTO DEL MESONE $K^0$

Il caone  $K^0$  ha stranezza  $s = +1$ , mentre  $\bar{K}^0$  ha  $s = -1$ , quindi  $K^0$ , pur essendo elettricamente neutro, è diverso da  $\bar{K}^0$ .

Se applichiamo l'operatore coniugazione di carica  $C$ , a meno di una costante di fase arbitraria, otterremo:

$$C |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \neq |K^0\rangle \quad [A.11]$$

ovvero  $CP |K^0\rangle \neq |K^0\rangle$ .

Storicamente questo risultato incontrò una seria difficoltà di principio.  $K^0$  e  $\bar{K}^0$  perdendo stranezza possono decadere in uno stesso stato non leptonico che risulta autostato dell'operatore  $CP$ , come avviene in

$$\begin{aligned} K^0 &\rightarrow \pi^+ + \pi^- \\ \bar{K}^0 &\rightarrow \pi^+ + \pi^- \end{aligned}$$

Ma se ciò è vero, come è possibile parlare di simmetria rispetto a  $CP$  e di conservazione del numero quantico associato a  $CP$ , dato che né  $K^0$  né  $\bar{K}^0$  vengono prodotti come autostati di  $CP$ ?

Nel 1955 Gell-Mann e Pais suggerirono un modo di risolvere tale difficoltà:  $K^0$  e  $\bar{K}^0$  non erano le vere particelle che subivano decadimento.

Consideriamo  $K^0$  e  $\bar{K}^0$  a riposo e indichiamo con  $|K^0\rangle$  e  $|\bar{K}^0\rangle$  i loro stati iniziali. Poiché hanno parità intrinseca  $(-1)$  potremo scrivere

$$P |K^0\rangle = (-1) |K^0\rangle \quad P |\bar{K}^0\rangle = (-1) |\bar{K}^0\rangle$$

Definiamo  $C$  in modo tale che  $C |K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$ , così che  $CP |K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle$ . Dato che i due stati iniziali differiscono per l'operatore di stranezza, definiamo uno spazio interno di Hilbert a due dimensioni, in cui i due stati  $|K^0\rangle$  e  $|\bar{K}^0\rangle$  costituiscono una base ortonormale. In questo spazio si può introdurre un'altra base costituita dai vettori

$$|K_1^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad [A.12]$$

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad [A.13]$$

I nuovi vettori di base hanno la proprietà di essere autostati di  $C$ :

$$\begin{aligned} C \left| K_1^0 \right\rangle &= - \left| K_1^0 \right\rangle \\ C \left| K_2^0 \right\rangle &= + \left| K_2^0 \right\rangle \end{aligned}$$

Inoltre avendo entrambi parità  $p = -1$  saranno entrambi autostati di  $CP$

$$\begin{aligned} CP \left| K_1^0 \right\rangle &= \left| K_1^0 \right\rangle \\ CP \left| K_2^0 \right\rangle &= - \left| K_2^0 \right\rangle \end{aligned}$$

D'altra parte nessuno dei due è autostato della stranezza, quindi questi due vettori non coincidono con gli stati iniziali di produzione di  $K^0$  e  $\bar{K}^0$ .  $K_1^0$  e  $K_2^0$  hanno un ruolo fondamentale nell'interazione responsabile del decadimento devole.

---

§

Consideriamo l'hamiltoniana  $\mathcal{H}$  nello spazio definito dai due stati  $|K^0\rangle$  e  $|\bar{K}^0\rangle$  e scriviamola nella sua forma completa

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_d$$

dove l'hamiltoniana debole  $\mathcal{H}_d$  è un termine non hermitiano responsabile del decadimento.

Poiché  $\mathcal{H}_d$  non conserva la stranezza  $[S, \mathcal{H}] = [S, \mathcal{H}_d] \neq 0$  e quindi gli autostati di  $\mathcal{H}$  non potranno più essere autostati della stranezza. Quindi  $|K^0\rangle$  e  $|\bar{K}^0\rangle$  non potranno più risultare autostati di  $\mathcal{H}$  (anche se sono inizialmente autostati di  $\mathcal{H}_0$ ).

Assumendo che  $\mathcal{H}_d$  sia invariante rispetto a  $CP$  potremo costruire autostati simultanei di  $\mathcal{H}$  e  $CP$  che sono  $|K_1^0\rangle$  e  $|K_2^0\rangle$ , infatti non ci sono altri autostati di  $CP$  nello spazio considerato.

È chiaro che questo autostati non saranno degeneri, cioè non avranno lo stesso autovalore di energia, perché altrimenti risulterebbe che anche  $|K^0\rangle$  e  $|\bar{K}^0\rangle$  sono autostati di  $\mathcal{H}$ . Da ciò traiamo che  $|K_1^0\rangle$  e  $|K_2^0\rangle$  sono gli unici autostati di  $\mathcal{H}$ .

Sremmo arrivati allo stesso risultato se, come Gell-Mann e Pais, avessimo supposto  $\mathcal{H}_d$  invariante rispetto a  $C$  piuttosto che, come abbiamo invece fatto noi, rispetto a  $CP$ .

Riepilogando potremmo dunque porre:

$$H \left| K_1^0 \right\rangle = \left( m_1 c^2 - i \frac{\Gamma_1}{2} \right) \left| K_1^0 \right\rangle \quad [A.14]$$

$$H \left| K_2^0 \right\rangle = \left( m_2 c^2 - i \frac{\Gamma_2}{2} \right) \left| K_2^0 \right\rangle \quad [A.15]$$

dove  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  sono le larghezze del livello energetico rispettivamente di  $K_1^0$  e  $K_2^0$  e dove, poiché gli autovalori dell'energia devono essere diversi deve risultare

$$m_1 c^2 - i \frac{\Gamma_1}{2} \neq m_2 c^2 - i \frac{\Gamma_2}{2}$$

Le particelle rappresentate da  $|K_1^0\rangle$  e  $|K_2^0\rangle$  sono quindi le vere particelle a massa complessa definita e vita media definita che subiscono il decadimento (dove per massa complessa si intende l'autovalore complesso di energia diviso  $c^2$ ).

Gli stati finali in cui queste particelle decadono saranno effettivamente distinguibile perché dovranno risultare autostati di  $CP$  con autovalori differenti (perché  $CP$  si conserva).

Per esempio, se  $|f_1\rangle$  e  $|f_2\rangle$  sono due stati finali associati a  $K_1^0$  e  $K_2^0$  si avrà:

$$\left. \begin{array}{l} CP|f_1\rangle = f_1 \\ CP|f_2\rangle = -f_2 \end{array} \right\} \Rightarrow f_1 \neq f_2$$

Considerando in particolare i canali di decadimento non leptonici si vede che  $|f_1\rangle$  può contenere due soli pioni, mentre  $|f_2\rangle$  deve contenere come minimo tre pioni, in altri termini

$$\begin{array}{ll} K_1^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- & K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- \\ K_1^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 & K_2^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 \end{array}$$

infatti, per la casistica di Bose-Einstein,  $CP|\pi^+, \pi^-\rangle = |\pi^+, \pi^-\rangle$  è autostato dei  $CP$  con autovalore +1 in quanto  $\pi^+$  e  $\pi^-$  possono considerarsi due bosoni identici in un diverso stato di carica e applicare loro  $CP$  significa scambiare tutte le coordinate dei due bosoni, compresa la coordinata di carica elettrica. Rilsuterà invece

$$\begin{array}{l} K_1^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \\ K_2^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \\ K_2^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \end{array}$$

infatti ricordando che tre pioni con momento angolare nulla hanno parità  $-1$  e considerando che  $C|\pi^0\rangle = (+1)|\pi^0\rangle$  otteniamo che

$$CP|3\pi\rangle = -C|3\pi\rangle = -|3\pi\rangle$$

Un analogo risultato si può ottenere anche per lo stato finale  $\pi^+ + \pi^- + \pi^0$  nella sua configurazione più probabile, che è quella con<sup>1</sup>  $l_{12} = l_3 = 0$ . Questa configurazione comporta che si abbia

$$\begin{array}{l} P|\pi^+, \pi^-\rangle = |\pi^+, \pi^-\rangle \\ C|\pi^+, \pi^-\rangle = CP|\pi^+, \pi^-\rangle = |\pi^+, \pi^-\rangle \end{array}$$

e da ciò segue che

$$CP|\pi^+, \pi^-, \pi^0\rangle = P|\pi^+, \pi^-, \pi^0\rangle = -|\pi^+, \pi^-, \pi^0\rangle \quad [A.16]$$

---

<sup>1</sup>Qui gli appunti sono poco leggibili e non si è sicuri dell'uguaglianza fra i due autovalori. Pagina 101 dell'appendice con calligrafia differente. [NdT]

Questo modo diverso di decadere di  $K_1^0$  e  $K_2^0$  ha anche una ripercussione sulle loro costanti di disintegrazione  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Se si applica la regola d'oro di Fermi e si calcola la densità di stati finali, questa sarà maggiore per lo stato finale costituito da due pioni rispetto a quello costituito da tre pioni, infatti partendo da una stessa energia iniziale, l'impulso dei pioni nello stato costituito da due pioni è ovviamente maggiore di quello nello stato costituito da tre pioni e<sup>2</sup>

$$\frac{dN}{d\rho} = \text{densità di stati finali} = \rho^2$$

di conseguenza  $\lambda_1 \gg \lambda_2$  e quindi  $\tau_1 \ll \tau_2$ .

Supponiamo che all'istante  $t = 0$  venga prodotto un fascio di mesoni  $K^0$  con una data velocità. Nel sistema di riferimento solidale col fascio potremmo scrivere lo stato iniziale di ogni  $K^0$  come

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1^0\rangle + |K_2^0\rangle)$$

Al generico istante  $t$  questo  $K^0$  si sarà evoluto nello stato

$$|K^0(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K_1^0\rangle e^{-im_1 c^2 t / \hbar} e^{-t/2\tau_1} + |K_2^0\rangle e^{-im_2 c^2 t / \hbar} e^{-t/2\tau_2})$$

Di conseguenza, se  $t$  soddisfa la condizione che  $\tau_1 \ll t \ll \tau_2$  allora la componente  $K_1^0$  avrà avuto il tempo di decadere e l'intensità del fascio si sarà dimezzata riducendosi a quella di un puro fascio di particelle  $K_2^0$ . Avremo allora

$$|K^0(t)\rangle \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} |K_2^0\rangle e^{-im_2 c^2 t / \hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |K^0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\bar{K}^0\rangle \right) e^{-im_2 c^2 t / \hbar}$$

quindi dopo un tempo pari a  $t$  circa un quarto dei caoni iniziali si saranno trasformati in anticaoni con stranezza  $-1$ , di conseguenza partendo da un fascio non in grado di produrre iperoni otterremo dopo un certo tempo un fascio in grado di produrre iperoni.

Questo effetto di conversione di  $K^0$  in  $\bar{K}^0$  è stato confermato dell'esperienza. Si è potuto constatare che solo metà dei caoni iniziali presentava una vita media molto breve  $\tau_1 \simeq 0,9 \cdot 10^{-10}$  sec decadendo prevalentemente in due pioni vicino al punto di produzione mentre l'altra metà del fascio viveva per  $\tau_2 \simeq 5,2 \cdot 10^{-8}$  sec, decadendo in altri modi, tra cui quello in tre pioni, a notevole distanza dalla sorgente.

Facendo passare il fascio residuo a vita lunga attraverso un gas si è misurata la frequenza di produzione degli iperoni e da questa si è risaliti all'intensità di  $\bar{K}^0$  nel fascio residuo.

Inoltre studiando l'andamento generale dell'intensità dei  $\bar{K}^0$  in funzione del tempo si è determinato  $|\delta| = |m_2 - m_1|$ .

---

<sup>2</sup>Anche qui gli appunti si leggono male, ma suppongo che il simbolo corretto sia proprio  $\rho$  o al limite una sua variante spesso usata  $\varrho$ .

Per capire come sia possibile ricavare  $|\delta|$  indichiamo con  $I_0$  l'intensità iniziale del fascio di caoni e con  $I(t)$  e  $\bar{I}(t)$  le intensità rispettivamente dei  $K^0$  e dei  $\bar{K}^0$  all'istante  $t$ , misurate nel sistema di riferimento solidale col fascio. Avremo

$$\bar{I}(t) = I_0 \left| \langle \bar{K}^0 | K^0(t) \rangle \right|^2$$

dove  $\left| \langle \bar{K}^0 | K^0(t) \rangle \right|^2$  e  $\left| \langle K^0 | K^0(t) \rangle \right|^2$  sono le probabilità che una singola particella del fascio si manifesti all'istante  $t$  rispettivamente come  $\bar{K}^0$  o  $K^0$  e si ha

$$\begin{aligned} \left| \langle K^0 | K^0(t) \rangle \right|^2 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \langle K_1^0 | K^0(t) \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle K_2^0 | K^0(t) \rangle \right|^2 = \\ &= \left| \frac{1}{2} e^{im_1 c^2 t / \hbar} e^{-\lambda_1 t / 2} + \frac{1}{2} e^{im_2 c^2 t / \hbar} e^{-\lambda_2 t / 2} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left[ e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} + 2 \exp \left( \frac{-\lambda_1 t - \lambda_2 t}{2} \right) \cos \left( \frac{c^2 |\delta m| t}{\hbar} \right) \right] \end{aligned}$$

analogamente

$$\left| \langle \bar{K}^0 | K^0(t) \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \left[ e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} + 2 \exp \left( \frac{-\lambda_1 t - \lambda_2 t}{2} \right) \cos \left( \frac{c^2 |\delta m| t}{\hbar} \right) \right]$$

In queste formule  $|\delta m|$  gioca un ruolo essenziale, infatti se risultasse  $c^2 |\delta m| / \hbar > \lambda_1$  si avrebbe una rapida oscillazione tra  $K^0$  e  $\bar{K}^0$  di frequenza  $\omega = c^2 |\delta m| / \hbar$  e la presenza dei  $\bar{K}^0$  dovrebbe essere osservata già prima del decadimento del fascio a vita breve. Ciò non ha invece alcun riscontro sperimentale e i dati suggeriscono invece  $|\delta m| c^2 \simeq 3,5 \cdot 10^{-6}$  eV che è dello stesso ordine di grandezza di  $\Gamma_1$ .

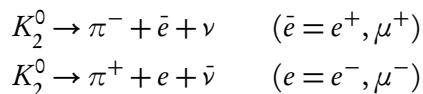
Si noti quanto questa differenza di massa è piccola rispetto alla massa dei caoni, infatti<sup>3</sup>

$$\frac{|\delta m|}{m} = \frac{3,5 \cdot 10^{-12} \text{ MeV}}{5 \cdot 10^2 \text{ MeV}} \simeq 7 \cdot 10^{-15}$$

---

### §

Ci sono due tipi di caoni, uno a vita breve  $K_1^0$  e uno a lunga vita  $K_2^0$ , che può decadere in canali semileptonici



con  $\Delta q = \Delta s$ .

---

<sup>3</sup>Questi dati sono presi direttamente dagli appunti, tuttavia non hanno molto senso rispetto a quanto detto qualche rigo sopra. [NdT]

Il primo decadimento è attribuibile solo a  $K^0$  mentre il secondo solo a  $\bar{K}^0$ .

Indichiamo con  $\Gamma(\pi^-, \bar{e}, \nu)$  e con  $\Gamma(\pi^+, e, \bar{\nu})$  le larghezze parziali relative a questi decadimenti semileptonici

$$|K_2^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle)$$

La simmetria rispetto a  $CP$  richiede che si abbia

$$\frac{\Gamma(\pi^-, \bar{e}, \nu)}{\Gamma(\pi^+, e, \bar{\nu})} = 1 \quad [A.17]$$

Fino ad ora abbiamo supposto che tale simmetria sia rispettata nei decadimenti dei caoni neutri, tuttavia nel 1964 si è scoperto che tale simmetria viene violata anche se in misura piccolissima.

Per tenere conto di questa variazione indichiamo con  $K_L^0$  il caone a lunga vita e con  $K_S^0$  il caone a vita breve.

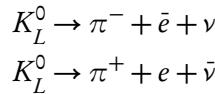
Anche  $K_L^0$  può decadere in due pioni, sebbene con un rapporto di diramazione

$$R(K_L^0 \rightarrow 2\pi) \simeq 0,3\%$$

con una larghezza parziale tale che

$$\frac{\Gamma(K_L^0 \rightarrow 2\pi)}{\Gamma(K_S^0 \rightarrow 2\pi)} \simeq 2,3 \cdot 10^{-3}$$

Analagomante si trovò che i due modi di decadimento del tipo



non presentavano larghezze parziali identiche come si sarebbe dovuto avere dalla [A.17].



ALLEGATI PRESENTI NEGLI  
ORIGINALI

3. This work and the related work described in Chap. 8 were carried out by the author with the aid of many students. The surveys and calculations of Bert A. Clanton, Julius Salacz-Dohnanyi, David F. Edwards, Nicholas A. Engler, Richard Gentry, Anna Hendren, Kiuck Lee, Nina J. Marucci, Robert B. Minogue, John S. Nader, Rosalind Oppenheim, Richard Oswald, and Kenneth L. Zankel were particularly helpful.
4. Green, A. E. S.: *Phys. Rev.*, **83**, 1248 (1951); **86**, 654 (1952).
5. Green, A. E. S., and N. A. Engler: *Phys. Rev.*, **91**, 40 (1953).
6. Green, A. E. S., and D. F. Edwards: *Phys. Rev.*, **91**, 46 (1953).
7. Flower, B. H.: *Progr. Nuclear Phys.*, **2**, 235 (1952).
8. Coryell, C. D., and H. E. Suess: *Phys. Rev.*, **26**, 600 (1952).
9. Glueckauf, E.: *Proc. Phys. Soc. (London)*, **61**, 21 (1948).
10. Suess, H. E.: *Phys. Rev.*, **81**, 1071 (1951).
11. Coryell, C. D.: *Ann. Rev. Nuclear Sci.*, **2**, 305 (1953).
12. Kohman, T. P.: *Phys. Rev.*, **85**, 530 (1952).
13. Fermi, E.: unpublished.
14. Glastone, S.: "Sourcebook on Atomic Energy," D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1950.
15. Mayer, M. G.: *Phys. Rev.*, **78**, 22 (1950).
16. Kohman, T. P.: private communication.
17. Condon, E. U., and G. H. Shortley: "The Theory of Atomic Spectra," Cambridge University Press, New York, 1935.
18. "Nuclear Data," *Natl. Bur. Standards (U.S.) NBS Circular* 499 (1950).
19. Mitchell, A. C. G.: *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 36 (1950).
20. Alburger, D. E., and E. M. Hafnor: *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 272 (1950).
21. Ajzenberg, F., and T. Lauritsen: *Rev. Mod. Phys.*, **24**, 321 (1952).
22. Goldhaber, M., and R. D. Hill: *Rev. Mod. Phys.*, **24**, 179 (1952).
23. Wigner, E.: *Am. J. Phys.*, **17**, 99 (1940).
24. Hornyak, W. F., and T. Lauritsen: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 101 (1948).
25. Devons, S.: "Excited States of Nuclei," p. 134, Cambridge University Press, New York, 1949.
26. Pollard, E. C.: *Nucleonics*, **2**(4), 1 (1948).
27. Scharff-Goldhaber, G.: *Phys. Rev.*, **87**, 218 (1952).
28. Pieper, G. F.: *Phys. Rev.*, **86**, 1299 (1952).

80B

## CHAPTER 9

## LIQUID-DROP MODEL AND FISSION

In the preceding chapter we attempted to systematize the experimental data for ground states of nuclei by using an empirical mass surface which embodies the main regularities of nuclear masses. In the present chapter we shall discuss a theory which leads to a mass surface closely resembling our empirical mass surface. This so-called liquid-drop model has been investigated principally by Weiszäcker,<sup>(1)</sup> Bethe and Bacher<sup>(2)</sup> Bohr and Wheeler,<sup>(3)</sup> and Feenberg.<sup>(4)</sup> It has been exploited widely in nuclear physics as a basis for the prediction and interpretation of nuclear phenomena.

The basic premise of the liquid-drop model of complex nuclei is that the number of nucleons in a typical nucleus is sufficiently large that the individuality of nucleons may be disregarded. While the treatment of such a system is most rigorously given by using the methods of quantum statistical mechanics, it is possible to arrive at three components of the expression for the energy of a complex nucleus by simple classical considerations. These components are the volume binding energy, the surface energy, and the coulomb energy. A fourth component known as the symmetry energy cannot be accounted for on classical grounds.

**9-1. Volume Binding Energy.** The fact that nuclear matter is almost incompressible, as is indicated by the equation  $R = bA^{1/3}$ , suggests that we treat a complex nucleus as a collection of a large number of rigid spheres held by charge-independent nuclear forces in a spherical closest packing arrangement. In view of the short-range character of the nuclear forces, we may assume that every interior nucleon has 12 bonds, one for each neighbor in contact with it (see Fig. 9-1). If each bonding energy is  $-U$ , then an energy of  $-6U$  is identified with each interior nuclear particle (each bond energy belongs to two particles). Neglect-

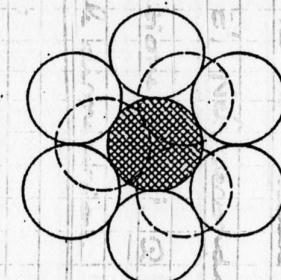


FIG. 9-1. Diagram indicating the 12 neighbors of a sphere (shaded) in closest packing arrangement. Three (dotted) are in contact above, and three (not shown) are in contact below.

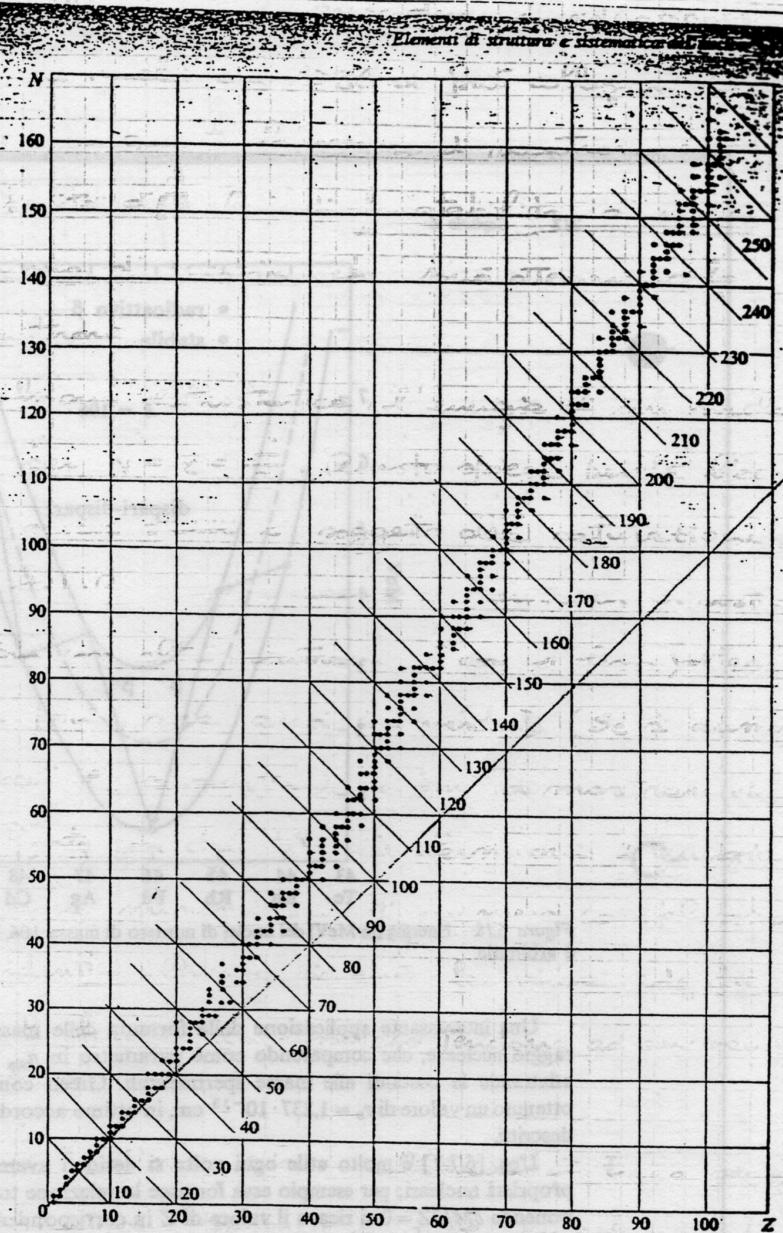


Figura 6.15. Diagramma  $Z-N$  di tutti i nuclei stabili rispetto alla disintegrazione beta.

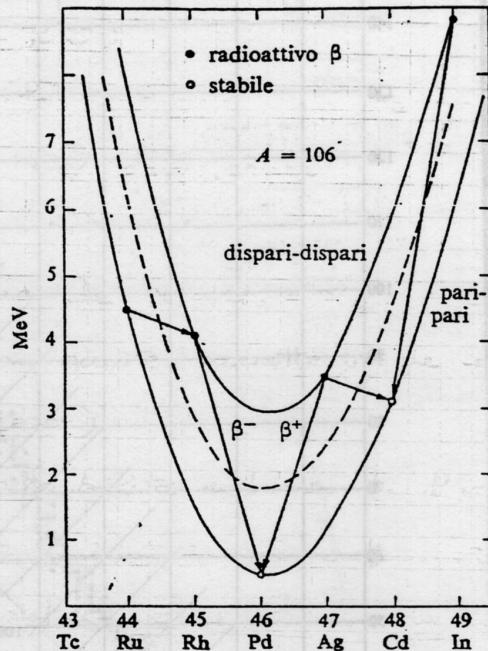


Figura 6.18. Energia (in MeV) dei nuclei di numero di massa 106. Lo zero nella scala dell'energia è arbitrario.

Una interessante applicazione della formula delle masse è la determinazione del raggio nucleare, che comparendo come parametro in  $a_{\text{sup}}$  e  $a_{\text{vol}}$  può essere calcolato adattando le costanti alle masse sperimentali. Green con sole misure di massa ha ottenuto un valore di  $r_0 = 1,237 \cdot 10^{-13}$  cm, in ottimo accordo con gli altri metodi prima descritti.

L'eq. [6.7.7] è molto utile ogni volta si desideri avere un quadro generale delle proprietà nucleari; per esempio essa fornisce la relazione tra  $A$  e  $Z$  per i nuclei stabili ponendo  $\partial M / \partial Z = 0$  si ricava il valore di  $Z$  in corrispondenza al quale si ha il minimo della massa in una serie di isobari. Dall'eq. [6.7.7] si ottiene

$$-0,7825 - \frac{2a_{\text{sup}}}{A} \left( \frac{A}{2} - Z \right) + \frac{3}{5} \frac{2Ze^2}{R_c} = 0 \quad [6.7.8]$$

che possiamo interpretare come l'equazione della «curva» di figura 6.15, ricordando che  $A = Z + N$ . Altre interessanti applicazioni dell'eq. [6.7.7] riguardano i calcoli dell'energia sviluppata nella fissione dei nuclei pesanti e i calcoli dei limiti (fig. 7.7) di stabilità alfa (cap. 7); invece, per molti scopi di interesse pratico, tipo studi di fissione, l'eq. [6.7.7] viene ulteriormente perfezionata.

Swiatecki, Myers ed altri hanno analizzato attentamente la formula delle masse cercando una sua dimostrazione più rigorosa basata sullo sviluppo dell'hamiltoniana nucleare in serie di potenze di  $A^{1/3}$ . Essi hanno tenuto presente anche alcuni effetti aggiuntivi, come la compressibilità della materia nucleare, il cambiamento della tensione

The parabolic component of the fission reaction energy, again using our empirical surface, is approximately

$$Q_{sf} = -2J \left(\frac{A^*}{2}\right) \theta'^2 = -\frac{100}{A^*} \left(\frac{100D^*}{A^* + 400}\right)^2 = -\frac{1}{A^*} \left(\frac{D^*}{A^* + 4}\right)^2 \quad (9-35)$$

For  $U^{234}$  this is  $-28.2$  mMU, or  $-26.4$  Mev.

Since the parabolic energy of the initial nuclide is negligible, one-half the magnitude of the above parabolic component can be identified with each of the nuclides formed in symmetrical fission. This is quite a substantial amount of energy, and in consequence we might conjecture that decay by neutron emission is also a possibility for the products of fission. This possibility may be readily investigated by calculating the neutron binding energy for a typical fission product, using the empirical equations developed in the preceding chapter. According to these equations the binding energy of the last neutron in a nucleus with coordinates  $A'$  and  $D'$  is given approximately by

$$B_n(A', D') = (10.072 - 2A') - (b' - b'')(A')^{-1} - (\theta'^2 - \theta''^2)(4A')^{-1} + B_{ns} \quad \text{mMU} \quad (9-36)$$

where  $\theta' = D' - D_m(A')$  and  $\theta''$  and  $b''$  refer to the nuclide which is formed when a neutron is pulled out of the  $(A', D')$  nuclide. When consideration is given to the slope of the line of beta stability, we find that, for a medium-weight nuclide,  $\theta'' \approx \theta' - 0.75$ . Consequently, when  $\theta'$  is large, we can let

$$\theta''^2 \approx \theta'^2 - 2 \times 0.75\theta'$$

or

$$-(\theta'^2 - \theta''^2)(4A')^{-1} \approx 1.5\theta'(4A')^{-1} \quad (9-37)$$

For the symmetrical products of  $U^{234}$  ( $A' = 118$ ) this parabolic energy is equal to  $(1.5 \times 8.2)/(4 \times 1.18) = 2.5$  mMU =  $2.3$  Mev. Considering the first and third terms in Eq. (9-36) but ignoring the pairing and shell energies, we find that the binding energy of the last neutron in a typical fission product is of the order of  $6.0$  mMU, or  $5.6$  Mev. Accordingly the medium-weight substances formed in fission cannot spontaneously emit neutrons unless they have an excitation energy greater than about  $6$  mMU. Since the nuclear fragments actually carry away an appreciable fraction of the fission energy as internal excitation energy, these fragments are actually energetically capable of emitting neutrons. These so-called "prompt" neutrons are emitted almost instantaneously ( $\sim 10^{-12}$  sec) after the fission process. Experiment indicates that there are about two or three instantaneous neutrons emitted per fission.

The beta decay energies of fission products are large because in a  $\beta^-$  decay process the change in  $\theta$  is  $-2$ , and hence the corresponding differ-

ences in the parabolic energies are large. Should a fission product decay by beta emission to a highly excited state of the daughter nucleus, the excitation energy of the daughter may be greater than its neutron binding energy, and a neutron may be ejected. The delayed neutrons which have been observed emanating from fission products are thought to arise in this manner.

**9-10. Activation Energy.** Although all nuclei having  $A > 90$  are energetically unstable relative to decay by fission, nevertheless the probability for the spontaneous fission of naturally occurring heavy nuclei in their ground states is very small. For example, the half-life of  $U^{238}$  rela-

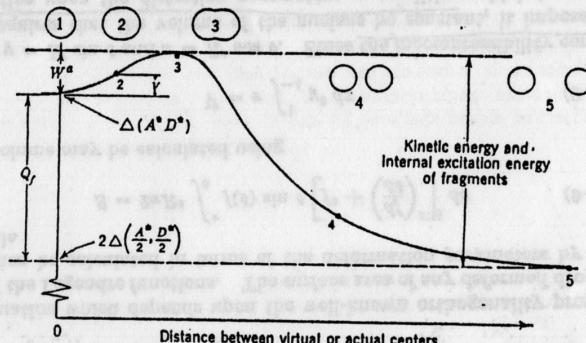


FIG. 9-6. Schematic diagram of the potential energy between two equal fission fragments.

tive to spontaneous fission is about  $10^{11}$  years. Apparently there exists a highly effective barrier against fission which holds any naturally occurring nucleus in a metastable state of equilibrium. The probability of penetrating this barrier is relatively small unless the nucleus has an excitation energy ( $W^*$ ) which is almost equal to or greater than an activation energy ( $W^*$ ), which represents the difference between the height of the barrier and the ground-state energy of the nucleus. In Fig. 9-6 we indicate the hypothetical potential energy of a nucleus as a function of the distance between the centers of two virtual or actual fission fragments. This figure indicates the physical significance of the statement that the original nucleus is in a metastable state of equilibrium.

The activation energy  $W^*$  by definition is the classical energy required to bring the nucleus to the condition of unstable equilibrium from which it will spontaneously dissociate into two parts. For very heavy naturally occurring nuclei ( $A \sim 230$ ), activation energies are of the order of  $4$  to  $6$  Mev, that is, of the same order as the excitation energies acquired

by a compound nucleus in the capture of slow or moderately fast neutrons. For medium-weight nuclei, activation energies are of the order of 50 Mev, which is very large compared to the excitation energy of the compound nucleus due to the capture of any light nuclear projectile. Thus from the practical standpoint the fission process is primarily of interest as a mode of decay accessible to very heavy nuclei.

We shall now present the essence of the calculation of the activation energy made by Bohr and Wheeler.<sup>(12)</sup> This calculation is based upon the assumption that a heavy nucleus may be treated as a classical liquid-droplet held together by a nuclear surface tension. According to this

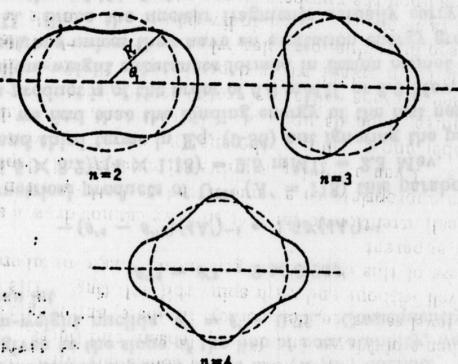


FIG. 9-7. Small deformations of a liquid drop of the type  $R' = R + \alpha_n P_n \cos \theta$  for  $n = 2, 3$ , and  $4$ . The figure corresponding to  $n = 1$  is simply a circle displaced to the right a distance  $\alpha_1$ . (From Hill and Wheeler, Ref. 14.)

model, if a nucleus acquires the excitation energy  $W^*$ , it will undergo vibratory distortions. When the excitation energy exceeds  $W^*$ , the critical activation energy, then the nucleus in its vibratory motion may reach a critical deformation for fission before it loses part or all of its excitation energy by some other process, such as radiation or neutron emission. In this event it will spontaneously subdivide, releasing the very large fission energy. To calculate  $W^*$ , we must solve the equilibrium problem of a liquidlike droplet in various conditions of distortion, a problem which is one of the very difficult problems arising in classical physics. Nevertheless, by making certain simplifying assumptions and approximations, Bohr and Wheeler obtained a solution which provides a reasonable interpretation of the results for distortions arising in the cases which are of interest.

The only terms in the semiempirical nuclear energy formula which are changed appreciably by nuclear deformations are  $E$ , and  $E_s$ . To treat

the energy changes connected with distortions, let us assume that, instead of a perfect sphere, the figure of the nucleus is described by a surface of revolution for which  $R' = Rf(\theta)$ . Since one may express an arbitrary continuous function of a periodic variable as an expansion in the Legendre polynomials, let us write

$$f(\theta) = 1 + \alpha_1 P_1(\cos \theta) + \alpha_2 P_2(\cos \theta) + \dots + \alpha_n P_n(\cos \theta) + \dots \quad (9-38)$$

where (see Fig. 9-7)

$$P_1 = \cos \theta \quad (9-39)$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \quad (9-40)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) \quad (9-41)$$

$$P_4 = \frac{1}{2}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3) \quad (9-42)$$

and the  $\alpha$ 's are a set of constants which characterize the distortion. For any given  $f(\theta)$  the deformation parameters (the  $\alpha$ 's) can be found by use of

$$\alpha_n = \frac{\int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi P_n^2(\cos \theta) \sin \theta d\theta} \quad (9-43)$$

an equation which depends upon the well-known orthogonality properties of the Legendre functions. The surface area of any deformed droplet can then be calculated in terms of the deformation parameters by the formula

$$S = 2\pi R^2 \int_0^\pi f(\theta) \sin \theta \left[ r^2 + \left( \frac{df}{d\theta} \right)^2 \right]^{1/2} d\theta \quad (9-44)$$

The volume may be calculated using

$$V = \pi \int_{-1}^1 y^2 dx \quad (9-45)$$

where  $y = R' \sin \theta$  and  $x = R' \cos \theta$ . Since the incompressibility condition requires that the volume of the nucleus be constant, it imposes a restriction upon the distortion parameters, a condition which becomes important when these parameters are large. Most studies of the fission problem have been confined to the symmetrical case, for which the odd distortion parameters, that is,  $\alpha_1, \alpha_3, \dots$ , may be set to zero.

The total surface and coulomb energy can now in principle be calculated, the former rather simply since it is just the area multiplied by the surface tension. To obtain the coulomb energy, one must solve a rather complicated problem in electrostatics. Bohr and Wheeler in doing this

tial which may have the counterpart of the atomic role of the coulomb potential set up by the nucleus. Nevertheless, investigations were carried out based upon the assumption that each nucleon is effectively bound by an average central field created by the remaining nucleus. The shape of this central field determines the order of the quantum states and the corresponding degeneracy numbers. The earliest efforts based upon the one-particle model sought to find a well shape, which had a reasonable theoretical basis, which would give rise to the observed magic numbers. An excellent review of this early work is contained in a paper by Feenberg.<sup>(11)</sup>

In light nuclei a bell-shaped central field (see Fig. 11-5) serves nicely to produce the magic numbers 2, 8, and 20. However, in heavy nuclei the observed closed shells at 50 and 82 seem to require a "wine-bottle"

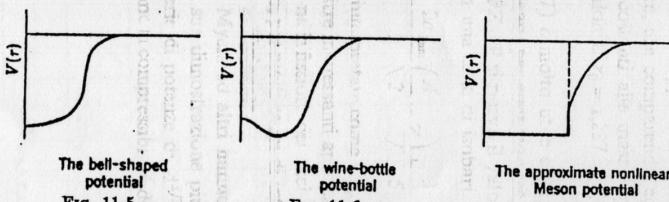


Fig. 11-7. The approximate nonlinear meson potential. (From Malenka, Ref. 17.)

potential" (see Fig. 11-6). Some justification for an effective potential with this shape has been given on the basis of the decreased central density of nucleons caused by the repulsion between protons. However, Swiatecki<sup>(12)</sup> has shown that this explanation is not adequate to produce a nucleus with a sufficiently hollow core to give rise to the magic numbers 50 and 82.

**11-5. Spin-orbit Coupling Model.** A promising proposal for generating the observed magic numbers has been made by Maria Mayer<sup>(13)</sup> and by Haxel, Jensen, and Suess,<sup>(14)</sup> who suggest that each nucleon possesses a strong spin-orbit energy of the type

$$W_{so} = -\beta \frac{l \cdot s}{h^2} \quad (11-40)$$

where  $\beta$  is a positive constant. Letting  $i = l + \frac{1}{2}$  denote the total angular momentum of an individual nucleon, it follows that  $i = l \pm \frac{1}{2}$ . Inserting these into the Landé formula, we find

$$\begin{aligned} \Delta W_{so}(i = l - \frac{1}{2}) &= \frac{1}{2}\beta(l+1) \\ \Delta W_{so}(i = l + \frac{1}{2}) &= -\frac{1}{2}\beta l \end{aligned} \quad (11-41)$$

These doublets are called inverted doublets, since the state of highest total angular momentum is the most stable, whereas in the well-known alkali-metal doublets the state of lowest total angular momentum is the most stable. By applying this spin-orbit splitting to the energy levels which go with the square well with rounded corners or the clipped oscillator potential and by using a reasonable value for  $\beta$ , it is possible to generate a level sequence which gives the magic numbers 2, 8, 20, 28, 50, 82, and 126 immediately.

Malenka<sup>(15)</sup> has carried out a quantitative calculation based upon the well (see Fig. 11-7)

$$\begin{aligned} V &= -V_0 & r < R \\ &= -\frac{4}{3}V_0 \exp[-\kappa(r - R)] & r > R \end{aligned} \quad (11-42)$$

with the well constants  $V_0 = 34.1$  Mev,  $R = 8.77 \times 10^{-11}$  cm, and  $\kappa = 1.31 \times 10^{12}$  cm<sup>-1</sup> and with the spin-orbit energy constant  $\beta = 0.54$  Mev. This well, which has a possible theoretical basis in nonlinear meson theory, is quite similar to the square well with rounded corners so that the results obtained with it are consistent with those obtained from the scheme of Mayer and Haxel, Jensen, and Suess. In Fig. 11-8 we give the level sequence, degeneracy numbers, and magic numbers for Malenka's well without and with spin-orbit splitting. The success and reasonableness of this scheme for generating magic numbers should be immediately apparent.

We must call attention to the fact that we cannot draw a single set of energy levels appropriate to all nuclei and to both neutron states and proton states. Even assuming a universal nuclear well-depth constant  $V_0$ , the number and spacing of the energy levels vary with the radius, which, of course, depends upon  $A$ . Furthermore, the coulomb interaction between protons shifts the proton levels upward relative to the neutron levels to an extent which depends upon  $Z$ . In addition, interactions between individual particles, whose effects we shall discuss in the next section, raise or depress the individual-particle levels to an extent which depends upon the numbers of occupants of the levels. Nevertheless, it is possible to represent schematically the approximate energy levels of nuclei by a filling-order diagram which indicates the information which is most useful to the physicist. Figure 11-9 is such a diagram. The neutron orbitals shown are based upon the assignments of Klinkenberg,<sup>(16)</sup> which have been arrived at on the basis of the shell model with the aid of spin and magnetic-moment data. The proton orbitals have been positioned in relation to the neutron orbitals with consideration given to the effects of the coulomb interactions as well as the experimental spin and magnetic-moment data. Competing orbitals are grouped together. In nuclear physics this diagram may be used for all nuclei as

## NUCLEAR PHYSICS

a guide in assigning the ground-state configuration and possible low-lying excited-state configurations just as Fig. 1-6 may be used in atomic physics. The spacings of the levels on this diagram should not be regarded

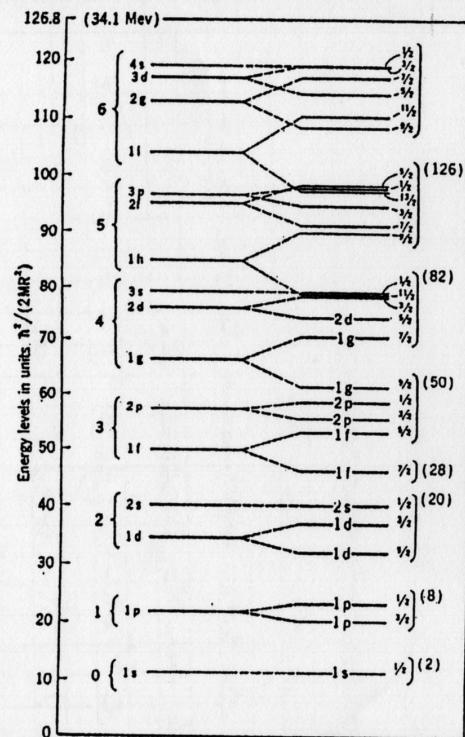


Fig. 11-8 The splitting of the energy levels of the approximate well of Eq. (11-42) because of the phenomenological spin-orbit coupling [Eq. (11-41)]. The brackets at the left indicate the levels that are degenerate in the oscillator potential. The numbers at the right are the magic numbers which correspond to the number of neutrons and protons that completely fill all the preceding levels. (From Malenka, Ref. 17.)

very literally, nor, in view of the effects discussed in the next section, should the specific order of competing orbitals be regarded as significant.

11-6. Nuclear Angular Momenta. If an extreme one-particle model is successful, we may expect that only the nucleons in a given nucleus which are outside closed shells will contribute to the total nuclear angular

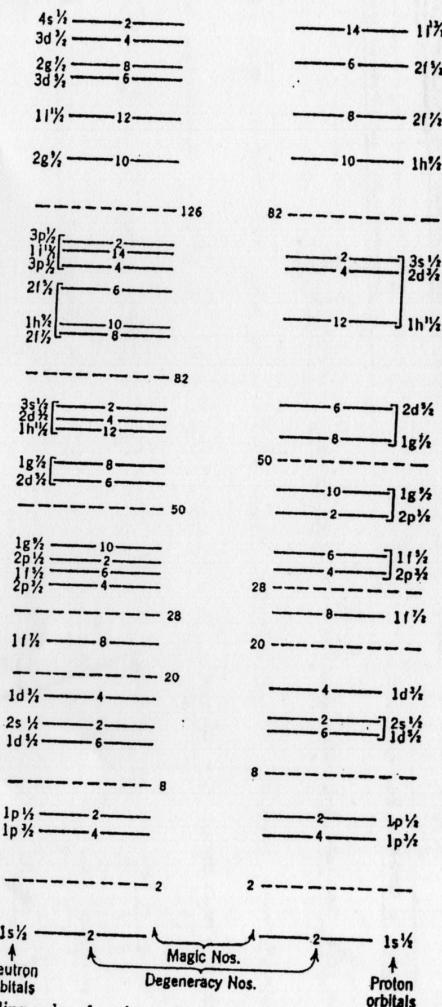


Fig. 11-9 The filling order of nuclear orbitals, the degeneracy numbers, and the magic numbers of the nuclear periodic table. The neutron orbitals follow approximately the level assignments of Klinkenberg (see Ref. 20). The proton orbitals are positioned in relation to the neutron orbitals so as to include schematically the effects of the coulomb interactions.

# C

## RIFERIMENTI - FORMULE E COSTANTI NUMERICHE

### C.1 MASSE

**TABELLA C.1:** Dati relativi alle masse.

$\gamma - 1$ ELETTRONE	$2 \div 20$
$\gamma - 1$ PROTONE/NEUTRONE	< 1%
DIFETTO DI MASSA ${}^4\text{He}$	$\simeq 28$ MeV
U.M.A.	$\simeq 931,5 \text{Mev}/c^2 = 11,66 \cdot 10^{-24} \text{g}$
DENSITÀ NUCLEARE	$10^{14} \text{g}/\text{cm}^3$

**TABELLA C.2:** Massa particelle (in  $\text{MeV}/c^2$ , eccetto il neutrino)

ELETTRONE ( $e$ )	0,5
PROTONE ( $p$ )	938 ovvero 1,0073 UM
NEUTRONE ( $n$ )	939 ovvero 1,0087 UM

(A)

NEUTRINO $\nu$	< 60 eV	MESONE $K^0$	497,7
MUONE ( $\mu$ )	105	QUARK STRANGE ( $s$ )	538
MUONE ( $\mu^-$ )	106	ETA ( $\eta^\circ$ )	549
PIONE ( $\pi$ )	138	IPERONE $\Lambda$	1115,6
QUARK UP ( $u$ )	336	QUARK CHARM ( $c$ )	1650
QUARK DOWN ( $d$ )	336	TAUONE ( $\tau$ )	1782

(B)

(C)

## C.2 ENERGIE

$b = 6,626 \cdot 10^{-34} Js = 4,135 \cdot 10^{-15} eVs$
$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} Js = 6,582 \cdot 10^{-16} eVs$
$1eV = 1,6 \cdot 10^{-19} J = 1,6 \cdot 10^{-12} erg$
$e^- = 1,6 \cdot 10^{-19} C$

**TABELLA C.3:** Energie di soglia di creazione

ELETTRONE-POSITRONE	$\simeq 1,022 \text{ MeV}$
PROTONE-ANTIPROTON	$\simeq 1,9 \text{ GeV}$

**TABELLA C.4:** Energia dei fotoni

MICROONDE	$\sim 1 \text{ meV}$
IR	$\sim 1 \text{ eV}$
VISIBILE	$\sim 10 \text{ eV}$
UV	$\sim 1 \text{ keV}$
SOFT-X	$\sim 10 \text{ keV}$
HARD-X	$\sim 1-100 \text{ MeV}$
$\gamma$	$\sim >100 \text{ MeV}$

## C.3 MISCELLANEA

SEZIONE D'URTO TIPICA

centibarn - barn ( $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ m}^2$ )

PARAMETRO D'URTO ESPERIMENTO DI RUTHERFORD

 $p(\theta)_{\min} = 10^{-13} \text{ cm}$  e  $p(\theta)_{\max} = 10^{-8} \text{ cm}$  $R$  PARAMETRO D'URTO MINIMO $R = r_0 A^{1/3}$  dove  $A$  è il numero atomico e  $r_0 \simeq 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ 

LUNGHEZZA D'ONDA ELETTRONICA

 $E = 1 \text{ GeV} \rightarrow \lambda \simeq 1,95 \cdot 10^{-14} \text{ cm}$ 

MAGNETONE NUCLEARE

$$\mu_N = \frac{e \hbar}{2m_p c} \simeq 0,505 \cdot 10^{-23} \text{ erg/gauss}$$

## C.4 FOMRULE

ENERGIA DI SOGLIA

$$E_s = \frac{M_{\min}^2 - M^2 - m^2}{2M} c^2 \quad [C.1]$$

ENERGIA DI LEGAME

$$\Delta E_0 = (E_{01} + E_{02}) - E_0 = \Delta M c^2 \quad [C.2]$$

SEZIONE D'URTO DI RUTHERFORD

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left[ \frac{Ze(2e)^2}{m_\alpha v^2} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \quad [C.3]$$

FRAZIONE DI IMPACCHETTAMENTO

$$f = \frac{M(A, Z) - A UM}{A UM} \quad [C.4]$$

FATTORE DI FORMA

$$|F|^2 = \frac{|f(\theta)|^2}{|f_0(\theta)|^2} \quad [C.5]$$

$$F = F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} d^3 r \quad [C.6]$$

FORMULA DI SAXON

$$c = 1,07 A^{1/3} \cdot 10^{-13} \text{ cm}, Z_1 = 0,545 \cdot 10^{-13} \text{ cm}, \rho_1 = \text{costante di normalizzazione}$$

$$\rho(r) = \frac{\rho_1}{e^{(r-c)/Z_1} + 1} \quad [C.7]$$

MOMENTO MAGNETICO NUCLEARE

$$\vec{\mu}_I = \frac{g_I \mu_N \vec{I}}{\hbar} = \gamma \vec{I} \quad [C.8]$$

REGOLA DEGLI INTERVALLI

$$\frac{W_\alpha - W_{\alpha+1}}{W_{\alpha+1} - W_{\alpha+2}} = f_\alpha / f_{\alpha+1} \quad [C.9]$$

MOMENTO DI QUADRUPOLI ELETTRICO DEL NUCLEO

$$Q = \int \rho_c^N (3Z'^2 - r^2) dV \quad [C.10]$$

ENERGIA ELETTROSTATICA DOVUTA AL QUADRUPOLI

$$\Delta W = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} Q \left( \frac{3}{2} \cos^2(\theta) - \frac{1}{2} \right) \quad [C.11]$$

ENERGIA DI QUADRUPOLI ELETTRICO SEMICLASSICA

$$\Delta W_Q = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} Q \left( \frac{3}{2} K_f^2 - 2i^2 j^2 \right) \frac{1}{4i^2 j^2} \quad [C.12]$$

ENERGIA DI QUADRUPOLI ELETTRICO QUANTISTICA

$$\Delta W_Q = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} Q \left( \frac{3}{2} K_f (K_f + 1) - 2i(i+1)j(j+1) \right) \frac{1}{i(2i-1)j(2j-1)} \quad [C.13]$$

FORMULA DI WEIZSÄCKER

$$\alpha_{\text{vol}} = 15,67 \quad \alpha_{\text{sup}} = 17,23 \quad 3\alpha_c/5 = 0,7 \quad \alpha_{\text{simm}} = 93,15 \quad \delta = 1,2$$

$$\begin{aligned} M(A, Z) = & \left[ m_p Z + m_N (A - Z) \right] - \alpha_{\text{vol}} A + \alpha_{\text{sup}} A^{2/3} + \\ & + \frac{3}{5} \alpha_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \alpha_{\text{simm}} \frac{(A/2 - Z)^2}{A} + \frac{\delta}{\alpha^{1/2}} \end{aligned} \quad [C.14]$$

FATTORE DI GAMOW

$$G(T_\alpha, Z', R') = \frac{2e^2 Z'}{\hbar} \sqrt{\frac{2m_\alpha}{T_\alpha}} = \frac{4}{\hbar} \sqrt{m_\alpha Z' R'} \quad [C.15]$$

REGOLA D'ORO DI FERMI

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} \left| H_{if} \right|^2 \rho_f(E_i) \quad \rho_f(E_i) = \frac{dN}{dE_f} \Big|_{E_f=E_i} \quad [C.16]$$

SEZIONE D'URTO DI PRODUZIONE DELLA RISONANZA (NO SPIN)

$$G^{(\ell)} = \frac{4\pi}{K_R^2} (2\ell + 1) \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \quad [C.17]$$

SEZIONE D'URTO DI PRODUZIONE DELLA RISONANZA (CON SPIN)

$$G^{(\ell)} = \frac{4\pi}{K_R^2} \frac{(2J_R + 1)}{(2S_a + 1)(2S_b + 1)} \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4} \quad [C.18]$$

## C.5 REAZIONI NUCLEARI

TABELLA C.5.: Alcune reazioni basilari.

$\gamma + N \rightarrow e^+ + e^- + N$	Creazione coppia elettrone - positrone
$n + p \rightarrow d + \gamma$	Reazione usata per misurare la massa di $n$ ( $d$ è il deutone)
$U^{238} \rightarrow Th^{234} + \alpha$	$T_\alpha \simeq 4,2$ MeV
$N(A, Z) \rightarrow N(A, Z+1) + e^- + \bar{\nu}$ ( $n \rightarrow p^+$ )	Decadimento $\beta^-$
$N(A, Z) \rightarrow N(A, Z-1) + e^+ + \nu$ ( $p^+ \rightarrow n$ )	Decadimento $\beta^+$
$p^+ + e^- \rightarrow n + \nu$	Processo di cattura $K$
$\pi^- + p^+ \rightarrow \Lambda^0 + K^0$	Processo di produzione (associata) di $\Lambda^0$ e $K^0$
$\Lambda^0 \rightarrow p^+ + \pi^-$ , $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$	Decadimenti deboli di $\Lambda^0$ e $K^0$
$\pi^- + p^+ \rightarrow K^+ + K^- + n$	Processo di produzione di $K^+$
$K^- + p^+ \rightarrow \bar{K}^0 + n$	Produzione di $\bar{K}^0$
$K^- + N \rightarrow \pi + \Lambda^0$ , $K^- + N \rightarrow \pi + \Sigma$	Assorbimento del mesone $K^-$
$K^- + p^+ \rightarrow \eta^0 + \Lambda^0$	Produzione del mesone $\eta^0$
$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$	Produzione del muone
$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$	Decadimento debole del muone

TABELLA C.6.: Processi di produzione mesone  $\pi$ 

$p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + \pi^0$	$n + p^+ \rightarrow n + p^+ + \pi^0$	$p^+ + n \rightarrow d + \pi^0$
$p^+ + p^+ \rightarrow p^+ + n + \pi^+$	$n + p^+ \rightarrow p^+ + p^+ + \pi^-$	$\gamma + p^+ \rightarrow p^+ + \pi^0$
$p^+ + p^+ \rightarrow d + \pi^+$	$n + p^+ \rightarrow n + n + \pi^+$	$\gamma + p^+ \rightarrow n + \pi^+$

TABELLA C.7.: Processi di produzione degli iperoni

$K^- + p^+ \rightarrow \pi^+ + \Sigma^-$	$K^- + p^+ \rightarrow \pi^0 + \Sigma^0$	$K^- + p^+ \rightarrow \pi^0 + \Sigma^+$
$K^- + p^+ \rightarrow K^+ + \Xi^-$	$K^- + p^+ \rightarrow K^0 + \Xi^0$	$K^- + p^+ \rightarrow K^0 + \Omega^- + K^+$

TABELLA C.8.: Processi di decadimento (non leptonici) del mesone  $K^+$ 

$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$	$ $	$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-$	$ $	$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 + \pi^0$
---------------------------------	-----	---	-----	---