

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

Кафедра микроэлектроники и общей физики

УДК 532.59; 533.9.01

Сдано на кафедру

«___» _____ 2019 г.

Заведующий кафедрой

доктор физ.-мат. наук, профессор

степень, звание

_____ И.А.Кузнецова

личная подпись

Выпускная квалификационная работа бакалавра

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ЗАРЯЖЕННОЙ
ЖИДКОЙ ПЛЁНКИ И СЛОЯ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТНОМ
ПОЛЕ

Направление подготовки 11.03.04 «Электроника и наноэлектроника»

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор

_____ Д. Ф. Белоножко

«___» _____ 2019 г.

Студент группы ЭН-41БО

_____ Д. Д. Кондакова

«___» _____ 2019 г.

Ярославль 2019 г.

РЕФЕРАТ

Объём 82 с., 3 разд., 11 рис., 5 табл., 16 источников.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ, НЕУСТОЙЧИВОСТЬ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ, НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТНО-ЗАРЯЖЕННОЙ ЖИДКОСТИ, КОНУСЫ ТЕЙЛОРА, СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ НЕУСТОЙЧИВОСТИ.

В работе выполнен сравнительный анализ аналитического асимптотического описания двух фундаментально важных для практического применения явлений: неустойчивости слоя заряженной проводящей жидкости по отношению к избытку электрического заряда и неустойчивости магнитной жидкости во внешнем магнитном поле. Выявлены общие черты исследованных явлений. Указаны физические причины, благодаря которым экспериментальная реализация явлений оказывается различной.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 Движение гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости	6
1.1 Постановка задачи	6
1.2 Математическая формулировка задачи	7
1.3 Приближение безвихревого движения жидкости	11
1.4 Линеаризация математической формулировки задачи	18
1.5 Решение задачи и получение дисперсионного уравнения	22
1.6 Выводы из решения задачи	25
2 Исследование неустойчивости заряженной поверхности проводящей несжимаемой жидкости	26
2.1 Постановка задачи	27
2.2 Давление электрического поля на заряженную поверхность проводящей жидкости	28
2.3 Поверхностное давление жидкости	32
2.4 Математическая формулировка задачи	34
2.5 Решение задачи и вывод дисперсионного уравнения	41
2.6 Исследование неустойчивости заряженной поверхности проводящей жидкости	43
2.7 Выводы из решения задачи и исследования неустойчивости поверхности	50
3 Исследование неустойчивости поверхности магнитной жидкости во внешнем однородном ортогональном магнитном поле	52
3.1 Постановка задачи	53
3.2 Давление магнитного поля на поверхность магнитной жидкости	54

3.3 Математическая формулировка задачи.....	57
3.4 Решение задачи и вывод дисперсионного уравнения	68
3.5 Исследование неустойчивости поверхности магнитной жидкости во внешнем однородном ортогональном магнитном поле	72
3.6 Выводы из решения задачи и исследования неустойчивости поверхности	78
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	80
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	81

ВВЕДЕНИЕ

В науке, технике, и технологии широко применяются электрические заряженные жидкие пленки и магнитные жидкости во внешнем магнитном поле. В обоих случаях достаточно сильное поле (в первом случае – электрическое, индуцированное поверхностным зарядом, во втором случае – магнитное) может приводить к неустойчивости поверхности жидкости. В случае горизонтального жидкого слоя в обоих случаях удастся аналитически рассчитать критические условия реализации неустойчивости. Однако, в научной литературе сложилась несколько необычная ситуация: авторы, работающие с неустойчивостью заряженной поверхности, не переносят свои результаты на магнитные жидкости, и наоборот, магнитогидродинамики почему-то не работают с электрогидродинамическими моделями. Если сравнивать работы тех и других, то кажется, что математический аппарат совпадает с точностью до обозначений. Однако, даже процесс развития неустойчивостей происходит по-разному. Неустойчивость заряженной поверхности реализуется в формировании конусов Тейлора с которых происходит диспергирование заряженных капель. Неустойчивость магнитной жидкости сводится к формированию устойчивых конусообразных образований.

Представляется весьма интересным провести сравнительный анализ походов, посредством которых осуществляется расчет условий дестабилизации поверхностей данных жидкостей. Это будет крайне полезно для работников инженерных специальностей, конструирующих различные приборы, а также при проведении различных научных исследований.

Целью данного исследования является выявление сходств различий в теоретических расчётах критериев неустойчивости поверхности проводящей поверхностно-заряженной жидкости и поверхности магнитной жидкости во внешнем однородном ортогональном магнитном поле. Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

1. Получить дисперсионные уравнения для волн на заряженной поверхности проводящей жидкости и на поверхности магнитной жидкости, находящейся во внешнем однородном ортогональном магнитном поле.
2. Получить критерии неустойчивости поверхностей рассматриваемых жидкостей на основе полученных дисперсионных соотношений.
3. Провести сравнительный анализ условий дестабилизации поверхностей рассматриваемых жидкостей.
4. Проанализировать методы практической реализации неустойчивостей.

1 Движение гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости

На поверхности любой жидкости, даже при отсутствии внешних воздействий на неё, всегда имеются некоторые волновые возмущения малой амплитуды, обусловленные тепловым движением молекул жидкости. В общем случае эти возмущения имеют сложную конфигурацию и могут быть представлены суперпозицией простейших периодических волн, каждая из которых характеризуется определённой амплитудой и длиной.

В исследованиях неустойчивости поверхности жидкостей ключевую роль играют дисперсионные уравнения – соотношения, связывающие частоту волнового колебания с его волновым числом.

В данном разделе будет рассмотрена задача на получение дисперсионного уравнения для гравитационных волн малой амплитуды, распространяющихся на поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Методику решения этой задачи и некоторые её соотношения, которые возникнут в ходе дальнейших рассуждений, планируется использовать в последующих разделах для исследования условий возникновения неустойчивости заряженной поверхности проводящей жидкости, а также поверхности магнитной жидкости, помещённой во внешнее магнитное поле.

1.1 Постановка задачи

Пусть на поверхности идеальной несжимаемой бесконечно глубокой жидкости с массовой плотностью ρ распространяется плоская периодическая гравитационная волна (жидкость находится в поле силы тяжести) с амплитудой a и длиной волны λ . Поверхность этой жидкости граничит с внешней средой – атмосферой (рисунок 1.1).

Пусть также рассматриваемые волновые возмущения малы. С математической точки зрения это условие означает, что амплитуда волны много меньше её длины: $a \ll \lambda$.

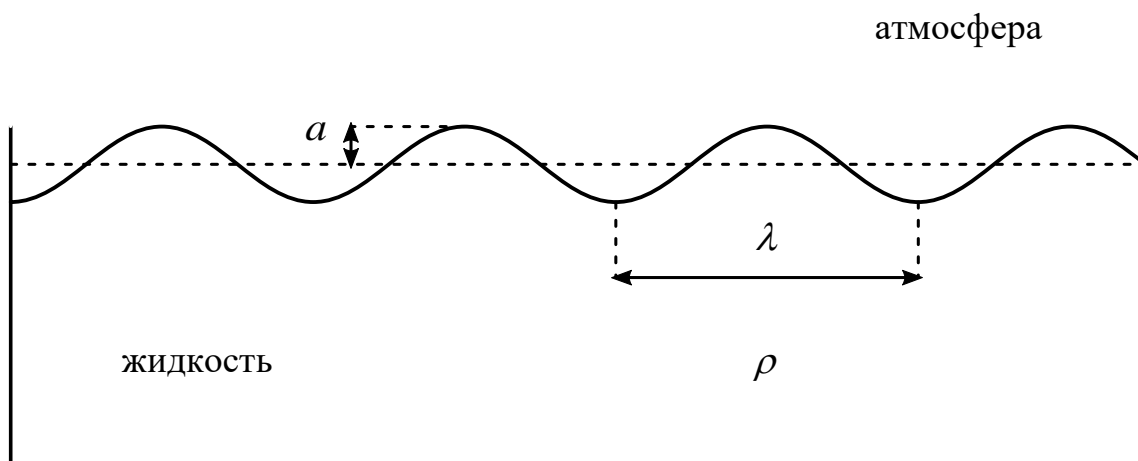


Рисунок 1.1. Условное изображение гравитационной волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости

Требуется получить дисперсионное уравнение для волн на поверхности этой жидкости, а также закон изменения её свободной поверхности.

1.2 Математическая формулировка задачи

Для простоты рассмотрим периодическую волну, распространяющуюся только в одном направлении. В этом случае удобно ввести двухмерную систему координат, где ось x направлена вдоль горизонтальной невозмущённой поверхности жидкости, а ось z — перпендикулярно этой поверхности. Вектор ускорения свободного падения \vec{g} , учитывающий действие силы тяжести на жидкость, направим обратно по отношению к направлению оси z (рисунок 1.2).

Введём следующую функцию, описывающую вертикальное смещение поверхности жидкости при волновых возмущениях (рисунок 1.2) [1]:

$$z = \xi(t, x), \quad (1.1)$$

где $\xi(t, x)$ – функция времени t и координаты x .

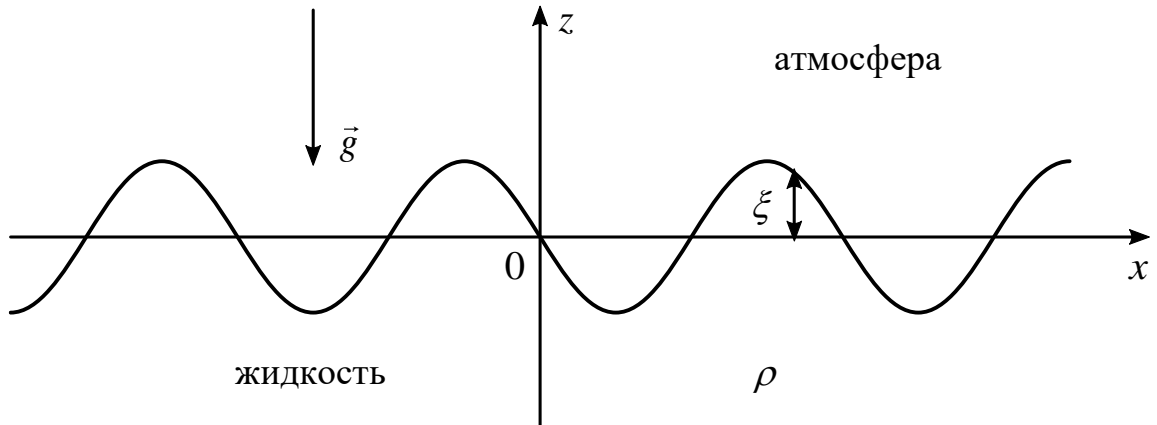


Рисунок 1.2. Направление осей и векторов в задаче

С учётом введённой системы координат, зададим уравнения и граничные условия, которые будут составлять математическую формулировку задачи.

Уравнение несжимаемости.

По условию данной задачи рассматриваемая жидкость является несжимаемой. Это означает, что её плотность сохраняется в каждой точке объёма в любой момент времени, то есть $\rho = const$.

Тогда из уравнения непрерывности, выражающего закон сохранения массы вещества в объёме [1]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{U}) = 0, \quad (1.2)$$

где $\vec{U} = \vec{U}(t, x, z)$ – вектор скорости в определённой точке жидкости, следует первое уравнение математической формулировки задачи, известное как уравнение несжимаемости идеальной жидкости [1]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0. \quad (1.3)$$

Уравнение Эйлера.

Очевидно, что в качестве следующего уравнения задачи следует принять основное уравнение гидродинамики идеальной жидкости (известное также как уравнение Эйлера), которое имеет следующий вид [1]:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g}, \quad (1.4)$$

где $p = p(t, x, z)$ – давление жидкости в определённой её точке.

В уравнении (1.4) учтено действие гравитационных сил на жидкость путём добавления вектора ускорения свободного падения \vec{g} к правой части этого уравнения.

Кинематическое граничное условие.

Частица жидкости, находящаяся на поверхности $z = \xi$ движется вместе с этой поверхностью при волновых возмущениях и не уходит вглубь жидкости. Поэтому для координаты z частицы на поверхности будет выполняться следующее условие [2]:

$$z - \xi(x, t) = 0. \quad (1.5)$$

Дифференцируя соотношение (1.5) по времени, получим первое граничное условие, которое называется кинематическим [2]:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + U_x \frac{\partial \xi}{\partial x} - U_z = 0, \quad z = \xi, \quad (1.6)$$

где $U_x = \partial x / \partial t$ и $U_z = \partial z / \partial t$ – компоненты вектора скорости \vec{U} вдоль соответствующих осей координат.

Условие для компонент скорости жидкости на бесконечности.

По условию данной задачи, рассматриваемые волновые возмущения являются малыми. Это означает, что скорость движения жидкости быстро замедляется с ростом глубины. Таким образом, можно выписать второе граничное условие:

$$U_x \rightarrow 0, \quad U_z \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (1.7)$$

Граничные условия на боковых краях жидкости задавать не будем, так как поверхность жидкости считаем неограниченной в плоскости, перпендикулярной оси z .

Условие баланса давлений на поверхности жидкости.

На границе жидкость – атмосфера, задаваемой уравнением $z = \xi$, должно выполняться требование непрерывности давления. Следовательно, третье граничное условие будет иметь вид [2]:

$$p - p_0 = 0, \quad z = \xi, \quad (1.8)$$

где p_0 – атмосферное давление.

Математическая формулировка задачи.

Уравнения (1.3) и (1.4) с граничными условиями (1.6) – (1.8) составляют математическую формулировку задачи о движении гравитационной волны на поверхности идеальной несжимаемой бесконечно глубокой жидкости.

Перепишем эти соотношения в таблицу 1 для более удобного и наглядного представления.

Таблица 1

Математическая формулировка задачи

Формула	Область определения	Номер формулы в тексте
Уравнения		
$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0$	$z < \xi$	1.3
$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g}$	$z < \xi$	1.4
Граничные условия		
$\frac{\partial \xi}{\partial t} + U_x \frac{\partial \xi}{\partial x} - U_z = 0$	$z = \xi$	1.6
$p - p_0 = 0$		1.8
$U_x \rightarrow 0, \quad U_z \rightarrow 0$	$z \rightarrow -\infty$	1.7

1.3 Приближение безвихревого движения жидкости

Решить систему уравнений (1.3) – (1.4) с граничными условиями (1.6) – (1.8) аналитически невозможно ввиду её сложности. Поэтому применим следующее упрощение – будем считать, что жидкость течёт равномерно, без завихрений. Такое упрощение называется приближением безвихревого движения.

Математически безвихревое (или потенциальное) движение означает, что в каждой точке объёма жидкости ротор скорости равен нулю [1]:

$$[\vec{\nabla} \times \vec{U}] = 0. \quad (1.9)$$

Несложно показать, что соотношение (1.9) будет также справедливо, если представить вектор скорости безвихревого движения жидкости в виде градиента некоторой скалярной величины Φ , называемой гидродинамическим потенциалом (потенциалом скорости) [1]:

$$\vec{U} = \vec{\nabla} \Phi, \quad (1.10)$$

где $\Phi = \Phi(t, x, z)$ – функция времени и координат.

Применим полученные соотношения к выражениям математической формулировки текущей задачи, представленным в таблице 1.

Уравнение несжимаемости.

Перейдём в уравнении (1.3) от векторной переменной \vec{U} к скалярной переменной Φ . Для этого произведём подстановку в данное уравнение соотношения (1.10). В результате получим:

$$\Delta \Phi = 0, \quad (1.11)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Уравнение (1.11) – это уравнение несжимаемости идеальной жидкости, полученное в результате приближения безвихревого движения жидкости.

Условие баланса давлений на поверхности жидкости.

Получим новый вид условия непрерывности давления на поверхности жидкости (1.8), используя уравнение Эйлера (1.4), предварительно преобразовав его в рамках приближения безвихревого движения жидкости.

Для проведения этого преобразования воспользуемся формулой, известной из векторного анализа [3]:

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} U^2 = \left[\vec{U} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{U} \right] \right] + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}. \quad (1.12)$$

Данная формула может быть упрощена путём исключения из неё слагаемого с векторным произведением согласно соотношению (1.9):

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} U^2 = (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U}. \quad (1.13)$$

Заметим также, что вектор ускорения свободного падения можно выразить через градиент следующим образом:

$$\vec{g} = -g \vec{e}_z = -\vec{\nabla} (gz). \quad (1.14)$$

Тогда уравнение (1.4) при замене соответствующих слагаемых на выражения (1.13) и (1.14) и переходе к гидродинамическому потенциалу через соотношение (1.10) преобразуется к новому виду:

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{(\vec{\nabla} \Phi)^2}{2} + gz \right) = 0. \quad (1.15)$$

Согласно теореме о градиенте из векторного анализа, криволинейный интеграл вдоль любой кривой L от градиента скалярного поля F равен разности значений поля в граничных точках A и B кривой L (рисунок 1.3) [3]:

$$\int_L \vec{\nabla} F d\vec{l} = F(B) - F(A) \quad (1.16)$$

С учётом этого интегрирование уравнения (1.15) по произвольной кривой (рисунок 1.3), находящейся внутри жидкости в любой момент времени, даёт следующее соотношение:

$$\left(\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} + \frac{p_B}{\rho} + \frac{(\vec{\nabla} \Phi_B)^2}{2} + gz_B \right) - \left(\frac{\partial \Phi_A}{\partial t} + \frac{p_A}{\rho} + \frac{(\vec{\nabla} \Phi_A)^2}{2} + gz_A \right) = 0, \quad (1.17)$$

где индексы A и B обозначают значения величин в соответствующих точках жидкости.

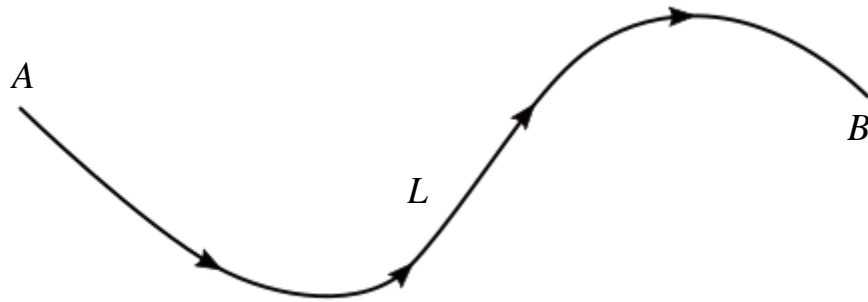


Рисунок 1.3. Изображение произвольной кривой линии

Так как точки A и B – произвольные, то из соотношения (1.17) следует, что выражение в скобках не зависит от координат и является постоянной величиной для всех точек объёма жидкости в фиксированный момент времени. Но эта величина может иметь различные значения в различные моменты времени. Следовательно, справедливо следующее соотношение [4]:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{(\vec{\nabla} \Phi)^2}{2} + gz \right) = C(t), \quad (1.18)$$

где $C(t)$ – произвольная функция времени, которое представляет собой известный интеграл Коши-Лагранжа – интеграл движения идеальной жидкости в случае потенциальных течений. Выразим из него давление жидкости:

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{(\vec{\nabla} \Phi)^2}{2} - \rho gz + C(t). \quad (1.19)$$

Из данного выражения следует, что величина $C(t)$ имеет размерность давления.

Если предположить, что на поверхности жидкости отсутствует волновое движение, то есть: $\partial \Phi / \partial t = 0$, $\vec{\nabla} \Phi = 0$, $z = \xi = 0$, то выражение (1.19) примет следующий вид:

$$p = C(t). \quad (1.20)$$

Сравнивая полученное соотношение с условием о непрерывности давления (1.8), получаем следующее значение для величины функции времени:

$$C(t) = p_0. \quad (1.21)$$

Подстановка выражения для давления (1.19) в граничное условие (1.8) с учётом (1.21) приведёт к искомому граничному условию задачи:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} \Phi)^2}{2} + g\xi = 0, \quad z = \xi. \quad (1.22)$$

Кинематическое граничное условие.

Как следует из соотношения (1.10), компоненты вектора градиента будут представлять собой проекции скоростей жидкости на соответствующие направления:

$$U_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad U_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (1.23)$$

Тогда, исключая переменные U_x и U_z из кинематического граничного условия (1.6) при помощи данных соотношений, получим:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = \xi. \quad (1.24)$$

Условие для гидродинамического потенциала на бесконечности.

Согласно соотношениям (1.23) условие замедления скорости движения жидкости с глубиной (1.7) переписывается через гидродинамический потенциал следующим образом:

$$\vec{\nabla} \Phi \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (1.25)$$

Математическая формулировка задачи.

Уравнение (1.11) и граничные условия (1.22), (1.24), (1.25) образуют математическую формулировку задачи в приближении безвихревого движения жидкости (таблица 2).

Таблица 2

Математическая формулировка задачи в безвихревом приближении

Формула	Область определения	Номер формулы в тексте
Уравнения		
$\Delta\Phi = 0$	$z < \xi$	1.11
Граничные условия		
$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla}\Phi)^2}{2} + g\xi = 0$	$z = \xi$	1.22
$\frac{\partial\xi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\xi}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$		1.24
$\vec{\nabla}\Phi \rightarrow 0$	$z \rightarrow -\infty$	1.25

Необходимо отметить, что в результате применения приближения безвихревого движения жидкости, путём введения гидродинамического потенциала Φ соотношением (1.10), математическая формулировка задачи (таблица 1), была значительно упрощена.

Во-первых, уменьшилось число неизвестных переменных: вместо четырёх неизвестных ξ , p , U_x , U_z остались только две – ξ и Φ .

Во-вторых, все выражения теперь содержат только скалярные величины (исчезла векторная величина скорости \vec{U}).

1.4 Линеаризация математической формулировки задачи

Несмотря на существенное упрощение математической формулировки задачи (таблица 2) вследствие применения приближения безвихревого движения жидкости, данная задача по-прежнему остаётся аналитически неразрешимой.

Такая ситуация связана со следующими трудностями. Во-первых, это нелинейный вид граничных условий задачи. Проблема состоит в том, что на данный момент в теории дифференциальных уравнений нет универсального метода решения нелинейных систем. Во-вторых, рассматриваемые граничные условия заданы на поверхности жидкости сложной формы, изменяющейся с течением времени. Эта проблема аналогична предыдущей и заключается в том, что в методах математической физики отсутствуют способы решения задач с границей сложного вида. В таком случае следует применить ещё один математический приём, который называется линеаризацией.

Линеаризация – это метод преобразования нелинейных соотношений, в результате применения которого данные соотношения будут содержать только слагаемые в первой степени. Проведём процедуру линеаризации в два следующих этапа:

1. Исключение нелинейных слагаемых из выражений математической формулировки задачи.

2. Снесение граничных условий на невозмущённую поверхность жидкости.

Исключение нелинейных слагаемых из математической формулировки задачи.

В текущей задаче процедуру линеаризации уравнений и граничных условий следует проводить по малому параметру, представляющему собой

отношение амплитуды волнового движения жидкости к длине волны: a/λ . Тогда неизвестные величины, связанные с волновым движением на поверхности, могут быть представлены в виде следующих разложений [5]:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \dots, \quad (1.26)$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots, \quad (1.27)$$

где ξ_1 и Φ_1 – соответствующие величины первого порядка малости, пропорциональные амплитуде волновых возмущений на поверхности жидкости, ξ_2 и Φ_2 – соответствующие величины второго порядка малости, пропорциональные квадрату амплитуды волновых возмущений на поверхности жидкости, и т.д.

Заметим, что произведение малых величин даст величину с порядком малости, равным сумме порядков каждого из множителей. С учётом этого, запишем математическую формулировку задачи из таблицы 2 с точностью до первого порядка малости включительно, предварительно заменив неизвестные функции соответствующими разложениями (1.26) и (1.27):

$$\Delta\Phi_1 = 0, \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + g\xi_1 = 0, \quad z = \xi, \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial t} - \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} = 0, \quad z = \xi, \quad (1.30)$$

$$\vec{\nabla}\Phi_1 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (1.31)$$

Снесение граничных условий на невозмущённую поверхность жидкости.

Следующим этапом линеаризации является снесение граничных условий на невозмущённую поверхность жидкости. Это означает, что граничные условия, которые были заданы для сложной поверхности $z = \xi$, будут с некоторой степенью точности переформулированы для поверхности $z = 0$, представляющей собой обычную плоскость.

Для снесения граничных условий (1.29) и (1.30) на невозмущённую поверхность жидкости необходимо разложить в ряд Маклорена входящие в них неизвестные величины, являющиеся функциями z [1]:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{z=\xi} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{z=0} + \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t \partial z} \right)_{z=0} \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial t \partial z^2} \right)_{z=0} \xi^2 + \dots, \quad (1.32)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)_{z=\xi} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)_{z=0} + \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} \right)_{z=0} \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial z^3} \right)_{z=0} \xi^2 + \dots. \quad (1.33)$$

Исключение нелинейных слагаемых в данных рядах приведёт к следующему результату:

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{z=\xi} \approx \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{z=0}, \quad (1.34)$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)_{z=\xi} \approx \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)_{z=0}. \quad (1.35)$$

С учётом полученных приближений, условие баланса давления на поверхности жидкости (1.29) и кинематическое граничное условие (1.30) окажутся заданными на плоскости $z = 0$:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + g \xi_1 = 0, \quad z = 0, \quad (1.36)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} = 0, \quad z = 0. \quad (1.37)$$

Математическая формулировка задачи.

Уравнение (1.28) и граничные условия (1.36), (1.37) и (1.31) составляют линеаризованную математическую формулировку задачи о движении плоской периодической гравитационной волны на поверхности идеальной несжимаемой бесконечно глубокой жидкости. Представим её итоговый вид в таблице 3, убрав для удобства индекс у неизвестных функций.

Таблица 3

Линеаризованная математическая формулировка задачи

Формула	Область определения	Номер формулы в тексте
Уравнения		
$\Delta \Phi = 0$	$z < 0$	1.28
Граничные условия		
$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g \xi = 0$	$z = 0$	1.36
$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$		1.37
$\vec{\nabla} \Phi \rightarrow 0$	$z \rightarrow -\infty$	1.31

1.5 Решение задачи и получение дисперсионного уравнения

Линеаризованная задача (таблица 3) может быть решена аналитически путём задания определённого вида для неизвестных функций.

Так как по условию задачи на поверхности рассматриваемой жидкости распространяется периодическая плоская волна, то функцию ξ следует определить в виде бегущей волны [1]:

$$\xi(t, x) = a \exp[i(\omega t - kx)], \quad (1.38)$$

где a – амплитуда волны, заданная в условии задачи, ω – циклическая частота волнового движения, $k = 2\pi/\lambda$ – модуль волнового вектора.

Гидродинамический потенциал, связанный со скоростью движения жидкости, также будет периодической функцией [1]:

$$\Phi(t, x, z) = f(z) \exp[i(\omega t - kx)], \quad (1.39)$$

где $f(z)$ – некая функция, учитывающая зависимость Φ от координаты z .

На самом деле, закон изменения поверхности жидкости при волновых возмущениях, и, следовательно, гидродинамический потенциал описываются действительной частью от функций (1.38) и (1.39) соответственно. Однако мы будем использовать запись в виде показательной функции комплексной переменной, так как это более удобно для выполнения математических операций.

Подстановка функции вида (1.39) в уравнение несжимаемости (1.28) приведёт к уравнению для функции $f(z)$, решение которого будет следующей линейной комбинацией экспонент:

$$f(z) = A_1 \exp(kz) + B_1 \exp(-kz), \quad (1.40)$$

где A_1 и B_1 – произвольные постоянные.

Следовательно, гидродинамический потенциал (1.39) переписывается следующим образом:

$$\Phi(t, x, z) = [A_1 \exp(kz) + B_1 \exp(-kz)] \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (1.41)$$

В соответствии с условием для гидродинамического потенциала на бесконечности (1.31), функция Φ должна обращаться в нуль на бесконечно большой глубине. Для выполнения данного условия необходимо приравнять нулю коэффициент B_1 . Таким образом, (1.41) примет более простой вид:

$$\Phi(t, x, z) = A_1 \exp(kz) \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (1.42)$$

Произведём подстановку неизвестных переменных вида (1.38) и (1.42) в граничные условия (1.36) и (1.37). С учётом того, что данные граничные условия заданы для плоскости $z = 0$, получим следующую систему уравнений после несложных преобразований:

$$\begin{cases} i\omega A_1 + ga = 0, \\ kA_1 - i\omega a = 0. \end{cases} \quad (1.43)$$

Из линейной алгебры известно, что система, состоящая из однородных линейных уравнений, имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю [3]. Так как система (1.43) однородна, то критерием существования ненулевых решений будет следующее соотношение:

$$\begin{vmatrix} i\omega & g \\ k & -i\omega \end{vmatrix} = 0. \quad (1.44)$$

Раскрытие этого определителя даёт искомое соотношение, связывающее циклическую частоту волны ω с волновым числом k – дисперсионное уравнение для волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости [1]:

$$\omega^2 = gk. \quad (1.45)$$

Перепишем закон изменения поверхности (1.38) с учётом полученного дисперсионного уравнения (1.45), оставив только действительную часть:

$$\xi(t, x) = a \cos(\pm\sqrt{gk}t - kx). \quad (1.46)$$

Чтобы аналогично преобразовать гидродинамический потенциал (1.42), необходимо для начала найти константу A_1 . Для этого выразим циклическую частоту ω из дисперсионного соотношения и подставим её в одно из уравнений системы (1.43). В итоге получим:

$$A_1 = \pm ia\sqrt{\frac{g}{k}}. \quad (1.47)$$

Тогда искомая величина примет окончательный вид:

$$\Phi(t, x, z) = \mp a\sqrt{\frac{g}{k}} \exp(kz) \sin(\pm\sqrt{gk}t - kx). \quad (1.48)$$

Дифференцирование функции (1.48) по координатам x и z даёт проекции вектора скорости точек жидкости на соответствующие направления U_x и U_z согласно формулам (1.23):

$$U_x(t, x, z) = \pm a \sqrt{gk} \exp(kz) \cos(\pm \sqrt{gk}t - kx), \quad (1.49)$$

$$U_z(t, x, z) = \mp a \sqrt{gk} \exp(kz) \sin(\pm \sqrt{gk}t - kx). \quad (1.50)$$

Выражения (1.46), (1.49) и (1.50) являются приближённым решением задачи о движении плоской периодической гравитационной волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости.

1.6 Выводы из решения задачи

В данном разделе была подробно разобрана методика получения дисперсионного соотношения для волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, которая пригодится для дальнейшего исследования неустойчивости поверхности проводящей и магнитной жидкостей.

Для обеспечения возможности аналитического решения текущей задачи мы были вынуждены применить следующие упрощения – приближение безвихревого движения жидкости, а также процедуру линеаризации уравнений и граничных условий задачи.

Заметим, что рассмотрение одной единственной плоской периодической волны позволяет получить решение для волнового движения сложной конфигурации на поверхности жидкости. Как уже говорилось выше, это следует из того, что эти возмущения могут быть представлены суперпозицией простейших периодических волн с бесконечным спектром волновых чисел.

2 Исследование неустойчивости заряженной поверхности проводящей несжимаемой жидкости

Неустойчивость поверхности жидкости – это явление нарушения равновесного состояния поверхности жидкости, проявляющееся в резком увеличении амплитуды распространяющихся по ней волновых возмущений, вызванное воздействием внешних сил на неё. В качестве таких сил может выступать, например, электрическое поле, магнитное поле и др.

В данном разделе объектом исследования будет выступать проводящая поверхностно-заряженная жидкость. Неустойчивость такой жидкости проявляется в возникновении на её поверхности сфероидальных или конических выступов – конусов Тейлора – при преодолении некоторого критического значения напряжённости электрического поля, индуцируемого зарядами на заряженной поверхности. Дальнейшее непрерывное увеличение поверхностного заряда приводит к быстрому росту на конусе Тейлора пика с уменьшающимся радиусом кривизны. В конце концов, радиус уменьшается настолько, что происходит отрыв капли жидкого проводника. Данное явление наблюдалось в эксперименте Дж. И. Тейлора [6].

Л. А. Тонкс и Я. И. Френкель провели теоретический расчёт условий возникновения неустойчивости гравитационно-капиллярных волн на поверхности жидкого металла. Они получили числовое значение критерия неустойчивости – величины, выражающей минимальное значение напряжённости электрического поля, необходимого для дестабилизации поверхности.

В текущем разделе будет рассмотрена задача о получении дисперсионного уравнения для малых гравитационно-капиллярных возмущений на заряженной поверхности проводящей несжимаемой жидкости, вызванных тепловым движением молекул. Затем на основе полученного дисперсионного уравнения будет рассчитан и проанализирован критерий неустойчивости поверхности рассматриваемой жидкости.

2.1 Постановка задачи

Пусть на поверхности идеальной несжимаемой бесконечно глубокой проводящей жидкости с массовой плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения γ и поверхностной плотностью заряда σ распространяется плоская периодическая гравитационно-капиллярная волна с амплитудой a и длиной волны λ . Поверхность жидкости граничит с внешней электрически нейтральной средой – атмосферой, характеризуемой диэлектрической проницаемостью ε (рисунок 2.1).

Пусть также рассматриваемые волновые возмущения малы, то есть $a \ll \lambda$.

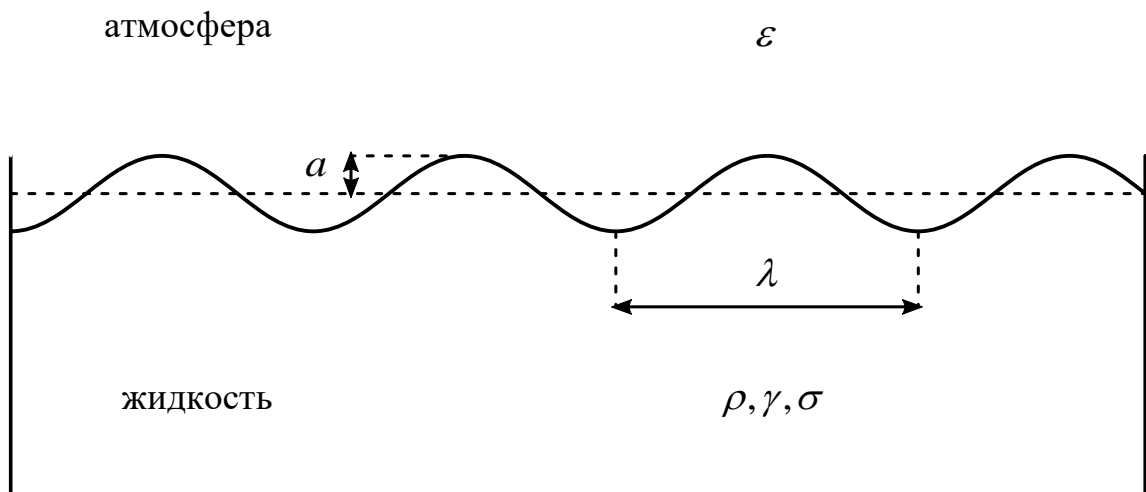


Рисунок 2.1. Условное изображение гравитационно-капиллярной волны на заряженной поверхности идеальной несжимаемой жидкости

Требуется получить дисперсионное уравнение и критерий неустойчивости для волн на поверхности этой жидкости.

Следует также отметить, что существует альтернативная постановка данной задачи, отличающаяся экспериментальной реализацией, но эквивалентная с точки зрения физики. Она заключается в том, что проводящая жидкость с изначально электрически нейтральной поверхностью помещается во

внешнее однородное электрическое поле (например, между обкладками конденсатора под напряжением), в результате чего образующиеся на поверхности заряды индуцируют вблизи неё электрическое поле напряжённости \vec{E} (рисунок 2.2).

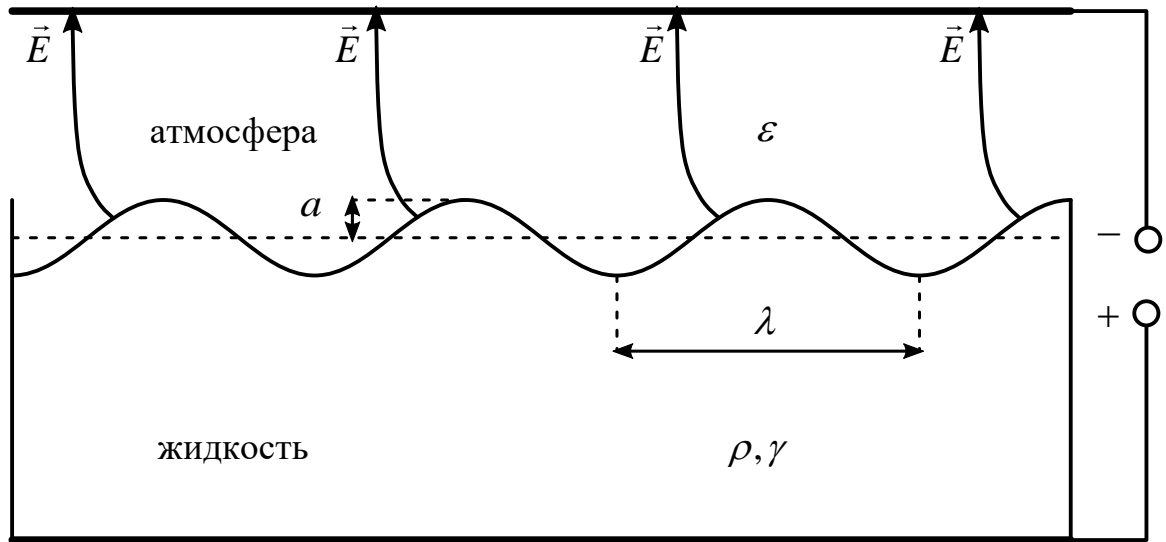


Рисунок 2.2. Условное изображение гравитационно-капиллярной волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, помещённой во внешнее однородное электрическое поле

2.2 Давление электрического поля на заряженную поверхность проводящей жидкости

Пусть электрическое поле \vec{E} , создаваемое зарядами на поверхности проводящей жидкости, характеризуется потенциалом φ и определяется соотношением [7]:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi, \quad (2.1)$$

где $\varphi = \varphi(t, x, z)$ – функция времени и координат.

Распространение волн на заряженной поверхности жидкости вносит изменения в распределение потенциала электрического поля над этой поверхностью, причём это изменение уменьшается с увеличением расстояния от поверхности. Так как по условию задачи рассматриваются малые волновые возмущения, то искажения потенциала также будут незначительными. Следовательно, к данной задаче применимы методы теории возмущений.

Согласно теории возмущений [8], потенциал электрического поля φ можно представить следующим образом:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad (2.2)$$

где φ_0 – потенциал поля над невозмущённой поверхностью жидкости, φ_1 – малая поправка к потенциалу, учитывающая изменение потенциала поля над возмущённой поверхностью жидкости.

Согласно (2.1) выражение (2.2) можно переписать и для напряжённости электрического поля:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1, \quad (2.3)$$

где \vec{E}_0 – напряжённость поля над невозмущенной поверхностью жидкости, \vec{E}_1 – малая поправка к напряжённости, учитывающая изменение напряжённости поля над возмущённой поверхностью.

Рассмотрим невозмущённую поверхность жидкости, которая представляет собой заряженную плоскость, задаваемую уравнением $z = 0$. Известно, что вектор напряжённости электрического поля \vec{E}_0 бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ направлен перпендикулярно этой плоскости и по модулю равен [9]:

$$E_0 = 4\pi\sigma. \quad (2.4)$$

Соответственно, для потенциала φ_0 , согласно формуле (2.1), можно записать следующее:

$$\varphi_0 = -4\pi\sigma z. \quad (2.5)$$

Теперь можно перейти к рассмотрению давления, действующего со стороны электрического поля на заряженную поверхность проводящей жидкости.

Из электростатики известно, что на поверхность проводника, помещённого во внешнее электрическое поле напряжённости \vec{E} , действуют силы «отрицательного» давления, направленного по внешней нормали к поверхности и по величине равного плотности энергии поля (рисунок 2.3) [7]:

$$\vec{F}_E = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \vec{n}, \quad (2.6)$$

где \vec{F}_E – сила, действующая со стороны электрического поля на единицу поверхности проводника, \vec{n} – единичный вектор нормали к данной поверхности.

Модуль силы \vec{F}_E будет представлять собой давление электрического поля на заряженную поверхность жидкости, являющуюся жидким проводником. Обозначим это давление через величину p_E :

$$p_E = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \quad (2.7)$$

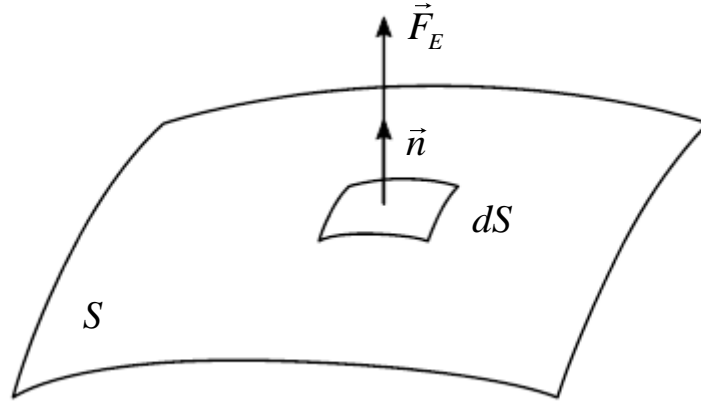


Рисунок 2.3. Действие электрического поля на поверхность проводника. Здесь S – поверхность проводника, dS – элемент поверхности проводника

Учитывая то, что напряжённость электрического поля \vec{E} может быть записана в виде (2.3), выражение для давления (2.7) аналогично можно представить следующим образом:

$$P_E = P_{E0} + P_{E1}, \quad (2.8)$$

где P_{E0} – давление электрического поля на невозмущённую поверхность жидкости, P_{E1} – малая поправка к давлению, учитывающая искажение давления электрического поля на возмущённую поверхность.

Вид величин P_{E0} и P_{E1} может быть получен путём подстановки суперпозиции (2.3) в формулу (2.7) с учётом соотношения (2.1):

$$P_{E0} = \frac{\varepsilon E_0^2}{8\pi}, \quad P_{E1} = -\frac{\varepsilon E_0}{4\pi} \frac{\partial \phi_1}{\partial z}. \quad (2.9)$$

В выражениях (2.9) принято, что ось z направлена перпендикулярно невозмущённой поверхности жидкости, то есть вдоль направления поля \vec{E}_0 .

2.3 Поверхностное давление жидкости

Если поверхность раздела двух сред искривлена, то вблизи неё давления в обеих средах различны. Разность этих давлений называется поверхностным давлением.

Поверхностное давление p_γ для жидкости может быть вычислено по известной в гидродинамике формуле Лапласа [10]:

$$p_\gamma = p - p_0 = \gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (2.10)$$

где p – давление жидкости, p_0 – атмосферное давление, R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны в данной точке поверхности жидкости в направлениях осей x и y соответственно.

В формулу (2.10) входит выражение для средней кривизны поверхности, которую обозначим через H [11]:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (2.11)$$

Тогда поверхностное давление (2.10) перепишется с учётом (2.11) следующим образом:

$$p_\gamma = 2\gamma H. \quad (2.12)$$

Заметим, что существует альтернативное выражение для средней кривизны поверхности, которое в отличие от (2.12) более удобно для использования в данной задаче [11]:

$$H = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{n}}{2}, \quad (2.13)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности жидкости.

Предположим, что уравнение возмущённой поверхности жидкости задаётся функцией $\xi(t, x)$, введенной в разделе 1 соотношением (1.1):

$$z = \xi(t, x). \quad (2.14)$$

В соответствии с этим, вектор нормали может быть вычислен по следующей формуле [11]:

$$\vec{n} = \frac{\vec{\nabla}(z - \xi(t, x))}{|\vec{\nabla}(z - \xi(t, x))|} = \frac{-(\partial \xi / \partial x) \vec{e}_x + \vec{e}_z}{\sqrt{1 + (\partial \xi / \partial x)^2}}, \quad (2.15)$$

где \vec{e}_x и \vec{e}_z – орты осей x и z соответственно.

Подстановка формулы (2.15) в определение (2.13) с последующей линеаризацией уточнит вид средней кривизны поверхности:

$$H = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (2.16)$$

и, следовательно, поверхностного давления (формула (2.12)):

$$p_\gamma = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (2.17)$$

2.4 Математическая формулировка задачи

Введём двумерную систему координат, аналогичную той, которая была введена в разделе 1 (рисунок 1.2). Направление вектора ускорения свободного падения \vec{g} оставим неизменным.

Закон изменения поверхности жидкости при волновых возмущениях по-прежнему будем описывать функцией $\xi = \xi(t, x)$, заданной соотношением (1.1).

Опираясь на результаты решения задачи о движении гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости из раздела 1, составим математическую формулировку рассматриваемой задачи, которая будет состоять из линеаризованных уравнений и граничных условий.

Уравнение для гидродинамического потенциала.

Так как рассматриваемая жидкость несжимаемая, то для неё будет справедливо уравнение несжимаемости идеальной жидкости (1.3), которое останется в данной задаче без изменений:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0. \quad (2.18)$$

Данное уравнение в рамках приближения безвихревого движения жидкости будет идентично уравнению (1.28):

$$\Delta \Phi = 0, \quad z < 0. \quad (2.19)$$

Уравнение для потенциала электрического поля.

Из теории электричества известно, что напряжённость электрического поля внутри проводника равна нулю. Следовательно, задавать уравнение для

электрического поля внутри проводящей жидкости не имеет смысла. Найдём уравнение, описывающее электрическое поле над поверхностью жидкости.

Запишем закон Гаусса (одно из уравнений Максвелла) для электрически нейтральной атмосферы [12]:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad z > \xi, \quad (2.20)$$

где \vec{E} – напряжённость электрического поля, создаваемого зарядами на поверхности жидкости.

Для перехода от векторной величины \vec{E} к скалярной функции φ в уравнении (2.20) воспользуемся соотношением (2.1). В итоге получим уравнение для потенциала электрического поля над заряженной поверхностью жидкости:

$$\Delta \varphi_1 = 0, \quad z > 0. \quad (2.21)$$

Для удобства уравнение (2.21) задано относительно невозмущённой поверхности жидкости $z = 0$.

Условие баланса давлений на поверхности жидкости.

Основное уравнение гидродинамики идеальной жидкости (уравнение Эйлера) (1.4) для данной задачи также остается без изменений:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla}) \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g}. \quad (2.22)$$

Следовательно, уравнение (1.19), полученное из (1.4) в приближении безвихревого движения, тоже будет прежним:

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{(\vec{\nabla} \Phi)^2}{2} - \rho g z + C(t). \quad (2.23)$$

Условие непрерывности давления на границе раздела жидкость – атмосфера будет определяться следующим соотношением, отличным от граничного условия (1.8):

$$p - p_0 - p_\gamma + p_E = 0, \quad z = \xi, \quad (2.24)$$

где p_γ – поверхностное давление, p_E – давление электрического поля.

Воспользуемся полученным граничным условием (2.24), выполнив в него подстановку выражения для давления (2.23):

$$-\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{(\vec{\nabla} \Phi)^2}{2} - \rho g \xi + C(t) - p_0 - p_\gamma + p_E = 0, \quad z = \xi. \quad (2.25)$$

Неизвестную величину $C(t)$ можно найти, рассмотрев поверхность жидкости в отсутствие волновых возмущений (поверхность представляет собой плоскость $z = 0$). В этом случае: $\partial \Phi / \partial t = 0$, $\vec{\nabla} \Phi = 0$, $z = \xi = 0$, $p_\gamma = 0$, $p_E = p_{E0}$. Тогда из (2.25) следует:

$$C(t) = p_0 - p_{E0}. \quad (2.26)$$

Выполним подстановку (2.26) в соотношение (2.25), при этом воспользовавшись формулами для давления электрического поля (2.9) и поверхностного давления (2.17). В результате получим новое граничное условие следующего вида:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} \Phi)^2}{2} + g\xi - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon E_0}{4\pi\rho} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0, \quad z = \xi. \quad (2.27)$$

Данное выражение содержит неизвестные величины только первого порядка малости.

Линеаризация граничного условия (2.27) со снесением его на поверхность $z = 0$ по правилам, рассмотренным в разделе 1 (подраздел 1.4), приведёт к окончательному выражению, которое войдёт в математическую формулировку задачи:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\xi - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon E_0}{4\pi\rho} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0, \quad z = 0. \quad (2.28)$$

Кинематическое граничное условие.

Требование движения частиц жидкости совместно с поверхностью $z = \xi$ при её волновых возмущениях выражается рассмотренным в разделе 1 кинематическим граничным условием (1.6):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + U_x \frac{\partial \xi}{\partial x} - U_z = 0, \quad z = \xi, \quad (2.29)$$

которое в безвихревом приближении соответствует линеаризованному выражению (1.37):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0. \quad (2.30)$$

Граничное условие для потенциала электрического поля.

Зададим граничное условие для потенциала электрического поля на поверхности жидкости. Поскольку функция φ может быть определена с точностью до произвольной константы, необходимо выбрать наиболее удобное начало отсчёта этой величины. Очевидно, что отсчёт потенциала от поверхности колеблющейся жидкости $z = \xi$ является самым удобным:

$$\varphi = 0, \quad z = \xi. \quad (2.31)$$

Учитывая тот факт, что электрическое поле невозмущённой заряженной поверхности жидкости \vec{E}_0 направлено вдоль оси z , для потенциала φ_0 можно записать следующее выражение, удовлетворяющее соотношению (2.1):

$$\varphi_0 = -E_0 z + C, \quad (2.32)$$

где C – произвольная постоянная.

Для невозмущённой поверхности отсчёт потенциала начинается от уровня $z = 0$:

$$\varphi_0 = 0, \quad z = 0. \quad (2.33)$$

Тогда с учётом этого постоянную величину C в выражении (2.32) следует положить равной нулю:

$$\varphi_0 = -E_0 z. \quad (2.34)$$

Итоговое граничное условие для потенциала электрического поля, которое будет включено в математическую формулировку задачи, получим

путём подстановки выражения для потенциала (2.34) в граничное условие (2.31):

$$\varphi_1 - E_0 \xi = 0, \quad z = 0. \quad (2.35)$$

Данное выражение записано с учётом линеаризации и снесения его на невозмущённую поверхность жидкости по правилам, описанным в разделе 1 (подраздел 1.4).

Условие для гидродинамического потенциала на бесконечности.

Условие затухания скорости жидкости с увеличением глубины будет тождественно условию (1.31):

$$\vec{\nabla} \Phi \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (2.36)$$

Условие для потенциала электрического поля на бесконечности.

Выше было отмечено, что поправка к напряжённости электрического поля \vec{E}_1 , связанная с волновыми возмущениями поверхности, должна обращаться в нуль при удалении на бесконечно большое расстояние от поверхности жидкости:

$$\vec{E}_1 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow +\infty. \quad (2.37)$$

Воспользовавшись соотношением (2.1), перейдём от переменной \vec{E}_1 к переменной φ_1 :

$$\vec{\nabla} \varphi_1 \rightarrow 0, \quad z \rightarrow +\infty. \quad (2.38)$$

Математическая формулировка задачи.

Все полученные выше соотношения, которые задают математическую формулировку текущей задачи, представим в таблице 4.

Таблица 4

Математическая формулировка задачи

Формула	Область определения	Номер формулы в тексте
Уравнения		
$\Delta\Phi = 0$	$z < 0$	2.19
$\Delta\varphi_1 = 0$	$z > 0$	2.21
Граничные условия		
$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g\xi - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon E_0}{4\pi\rho} \frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = 0$	$z = 0$	2.28
$\frac{\partial\xi}{\partial t} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0$		2.30
$\varphi_1 - E_0\xi = 0$		2.35
$\vec{\nabla}\Phi \rightarrow 0$	$z \rightarrow -\infty$	2.36
$\vec{\nabla}\varphi_1 \rightarrow 0$	$z \rightarrow +\infty$	2.38

2.5 Решение задачи и вывод дисперсионного уравнения

Для получения дисперсионного уравнения для волн на заряженной поверхности проводящей жидкости воспользуемся методикой решения задачи, использованной в разделе 1.

Зададим вид неизвестных переменных ξ и Φ в уравнениях математической формулировки задачи (таблица 4) в виде простейших периодических функций, как это было сделано в формулах (1.38) и (1.39):

$$\xi(t, x) = a \exp[i(\omega t - kx)], \quad (2.39)$$

$$\Phi(t, x, z) = F(z) \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (2.40)$$

где $F(z)$ – некая функция, учитывающая зависимость Φ от координаты z .

Выше было сказано, что волновые возмущения заряженной поверхности жидкости вносят изменения в распределение потенциала электрического поля над этой поверхностью. Следовательно, неизвестную переменную φ_1 в уравнениях задачи, учитывающую искажение потенциала электрического поля над возмущённой поверхностью жидкости, необходимо также задать в виде бегущей волны [7]:

$$\varphi_1(t, x, z) = f(z) \exp[i(\omega t - kx)], \quad (2.41)$$

где $f(z)$ – некая функция, учитывающая зависимость φ_1 от координаты z .

Уточним вид неизвестных функций (2.40) и (2.41) путём подстановки их в уравнения задачи (2.19) и (2.21) с учётом граничных условий (2.36) и (2.38):

$$\Phi(t, x, z) = A_1 \exp(kz) \exp[i(\omega t - kx)], \quad (2.42)$$

$$\varphi_1(t, x, z) = A_2 \exp(-kz) \exp[i(\omega t - kx)], \quad (2.43)$$

где A_1 и A_2 – произвольные постоянные.

Подстановка соотношений (2.39), (2.42) и (2.43) в граничные условия (2.28), (2.30) и (2.35) приведёт к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} kA_1 - i\omega a = 0, \\ i\omega A_1 - \frac{\varepsilon E_0}{4\pi\rho} kA_2 + \left(g + \frac{\gamma}{\rho} k^2\right) a = 0, \\ A_2 - E_0 a = 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Согласно теореме линейной алгебры [3], критерием существования ненулевых решений системы однородных линейных уравнений является равенство нулю определителя этой системы. В соответствии с этим, для системы (2.44) можно записать следующее:

$$\begin{vmatrix} k & 0 & -i\omega \\ i\omega & -\frac{\varepsilon E_0}{4\pi\rho} k & g + \frac{\gamma}{\rho} k^2 \\ 0 & 1 & -E_0 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.45)$$

Раскрытие определителя приводит к искомому дисперсионному уравнению для волн на заряженной поверхности проводящей несжимаемой жидкости:

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 - \frac{\varepsilon E_0^2}{4\pi\rho} k^2. \quad (2.46)$$

В полученном соотношении первое слагаемое совпадает с дисперсионным уравнением для гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости (1.45). Второе слагаемое учитывает поверхностное давление, обусловленное поверхностным натяжением жидкости. Третье слагаемое отвечает за давление электрического поля на заряженную поверхность проводящей жидкости.

2.6 Исследование неустойчивости заряженной поверхности проводящей жидкости

Воспользуемся полученным ранее дисперсионным уравнением для нахождения критерия неустойчивости заряженной поверхности проводящей жидкости, представляющего собой минимальное значение модуля напряжённости электрического поля, при котором возникает нарушение равновесного состояния поверхности.

Для удобства дальнейшего анализа, представим дисперсионное соотношение (2.46) через безразмерные параметры следующим образом:

$$\omega^2 = gk(1 + K^2 - KW), \quad (2.47)$$

где K – безразмерное волновое число, W – безразмерный параметр Тонкса-Френкеля, представляющий собой величину, пропорциональную отношению давления электрического поля к поверхностному давлению на заряженную поверхность жидкости [13]:

$$K = k \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} = kA, \quad (2.48)$$

$$W = \frac{\varepsilon E_0^2}{4\pi \sqrt{\rho g \gamma}}. \quad (2.49)$$

Величина A , входящая в безразмерное волновое число (2.48), имеет размерность длины и называется капиллярной постоянной [1]:

$$A = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}. \quad (2.50)$$

В зависимости знака правой части соотношения (2.47), что в свою очередь зависит от величины параметра Тонкса-Френкеля, циклическая частота может быть как действительной, так и мнимой. Ниже будет показано, что оба эти варианта соответственно определяют область устойчивости и область неустойчивости заряженной поверхности жидкости.

Область устойчивости.

Предположим, что ω — действительная величина. Тогда функция (2.39) по-прежнему будет описывать периодическую плоскую волну на поверхности рассматриваемой жидкости. Запишем её следующим образом:

$$\xi^{st}(t, x) = a \exp[i(\pm \omega t - kx)]. \quad (2.51)$$

В этом выражении заключены две одинаковые бегущие волны, распространяющиеся во встречном направлении: знак «+» соответствует волне,

распространяющейся вдоль оси x , а знак « $-$ » – противоположно направленной волне.

Поскольку функция (2.51) является периодической, это означает, что случай действительной циклической частоты соответствует области устойчивости заряженной поверхности жидкости, которая определяется неравенством, вытекающим непосредственно из дисперсионного уравнения (2.47):

$$W < \frac{1 + K^2}{K}. \quad (2.52)$$

Из определения параметра Тонкса-Френкеля (2.49) и неравенства (2.52) следует, что с физической точки зрения устойчивое состояние поверхности соответствует ситуации, когда величина поверхностного давления несколько превышает величину давления электрического поля на эту поверхность (свой вклад в стабилизацию вносит еще и поле тяжести).

Область неустойчивости.

Пусть теперь ω – мнимая величина. В этом случае закон изменения поверхности (2.39) примет вид:

$$\xi^{inst}(t, x) = a \exp(\pm \omega t) \exp(-ikx). \quad (2.53)$$

Функция (2.53) описывает две одинаковые волны: амплитуда одной из них экспоненциально возрастает со временем (инкремент возрастания « $+\omega$ »), а другой – экспоненциально убывает (декремент затухания « $-\omega$ »). Следует также отметить, что убывающая волна через некоторое время полностью затухнет и останется только нарастающее возмущение на поверхности жидкости.

Такая ситуация соответствует явлению неустойчивости поверхности. В случае мнимой циклической частоты область неустойчивости выражается неравенством следующего вида:

$$W > \frac{1 + K^2}{K}. \quad (2.54)$$

Следовательно, неустойчивость заряженной поверхности проводящей жидкости возникает тогда, когда поверхностное давление вместе с влиянием поля силы тяжести уже не может уравновесить давление электрического поля.

Критерий неустойчивости.

Рассмотрим границу, разделяющую область устойчивости и область неустойчивости заряженной поверхности проводящей жидкости. Как следует из неравенств (2.52) и (2.54), она задаётся уравнением:

$$W = \frac{1 + K^2}{K}. \quad (2.55)$$

Из графического построения данной функции на плоскости безразмерных параметров $K-W$ (рисунок 2.4) несложно определить числовое значение её точки минимума K^* и минимального значения W^* :

$$K^* = 1, \quad W^* = 2.$$

Таким образом, искомый критерий неустойчивости определяется параметром Тонкса-Френкеля и математически может быть записан следующим образом [13]:

$$W > W^* = 2, \quad (2.56)$$

который в пересчёте на модуль напряжённости внешнего электрического поля, согласно выражению (2.49), имеет вид:

$$E_0 > E_0^* = \sqrt{\frac{8\pi\sqrt{\rho g \gamma}}{\varepsilon}}, \quad (2.57)$$

где E_0^* – критическое значение напряженности электрического поля.

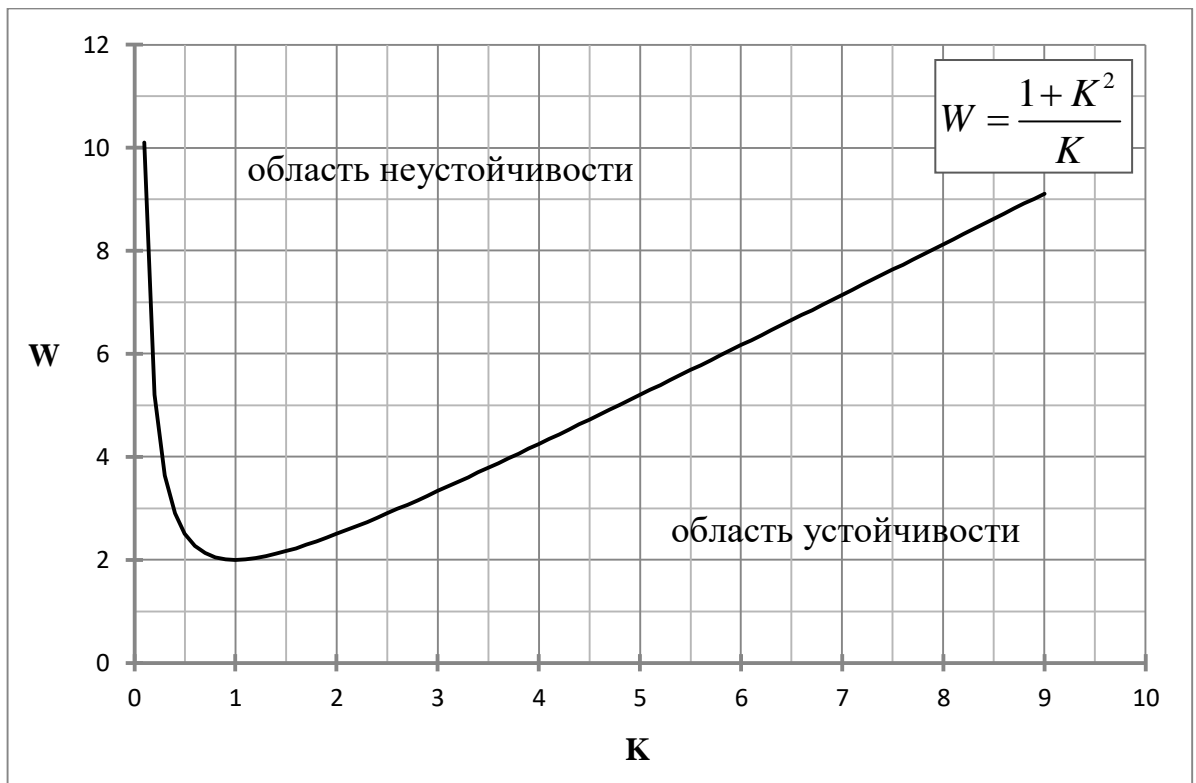


Рисунок 2.4. Графическая зависимость параметра Тонкса-Френкеля от безразмерного волнового числа

Как следует из рассмотрения графика на рисунке 2.4, при малейшем превышении критического значения напряжённости поля возникает неустойчивость поверхности жидкости. Она обусловлена дестабилизацией

моды (волны), длина которой соответствует величине K^* и определяется, согласно (2.48), выражением:

$$\lambda^* = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}. \quad (2.58)$$

При дальнейшем непрерывном увеличении напряжённости электрического поля происходит расширение спектра неустойчивых мод (рисунок 2.4).

Для заряженной поверхности любой проводящей жидкости можно указать значение модуля напряжённости электрического поля (пусть даже чрезвычайно большое), при превышении которого система становится неустойчивой. Это наглядно представлено в графическом построении параболической зависимости параметра Тонкса-Френкеля от модуля напряжённости электрического поля (рисунок 2.5).

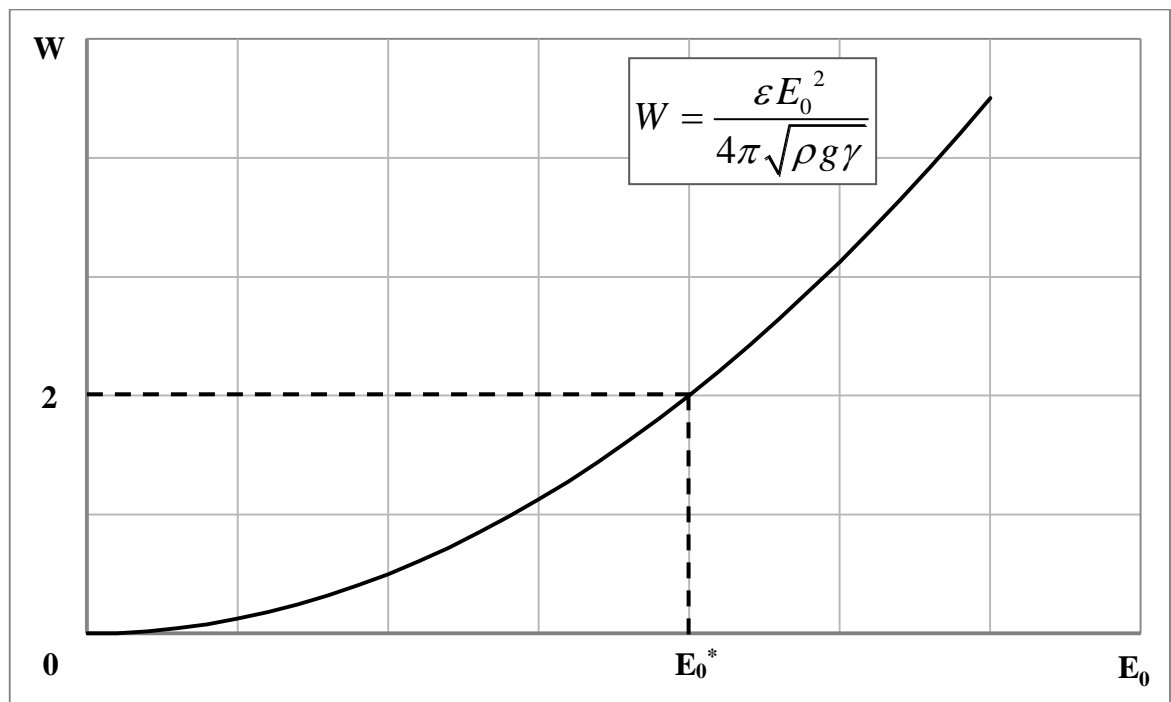


Рисунок 2.5. Схематический график зависимости параметра Тонкса-Френкеля от напряжённости внешнего электрического поля

Пример расчёта критерия неустойчивости поверхности воды.

Рассмотрим пример расчёта критерия неустойчивости поверхности для конкретной проводящей жидкости – недистиллированной воды, поверхность которой граничит с воздухом. Допустим, что сосуд с водой помещён между обкладками конденсатора и находится в однородном ортогональном электрическом поле.

При нормальных условиях (20°C, 1 атм.) физические свойства рассматриваемых сред имеют следующие табличные значения [14, 15]:

$$\rho = 1,00 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \quad \gamma = 72,69 \frac{\text{дин}}{\text{см}}, \quad \varepsilon = 1,00.$$

Теоретически рассчитанное числовое значение критической напряжённости электрического поля, необходимой для дестабилизации заряженной поверхности воды, граничащей с воздухом, будет составлять (см. соотношение (2.57)):

$$E_0^* = 24,58 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}.$$

При данной напряжённости поля произойдёт дестабилизация моды с длиной волны, равной (см. выражение (2.58)):

$$\lambda^* = 1,71 \text{ см}.$$

2.7 Выводы из решения задачи и исследования неустойчивости поверхности

В результате проведённого исследования были выяснены условия возникновения неустойчивости заряженной поверхности проводящей жидкости.

С точки зрения эксперимента, неустойчивость поверхности наступает при достижении некоторого критического значения напряжённости электрического поля, вызывающего дестабилизацию моды с определённой амплитудой и длиной волны. Критическое значение поля определяется критерием неустойчивости, в качестве которого выступает безразмерный параметр Тонкса-Френкеля, и может быть достигнуто путём непрерывного увеличения напряжения на обкладках конденсатора, между которыми располагается ёмкость с проводящей жидкостью.

С физической точки зрения, заряженная поверхность переходит в неустойчивое состояние в том случае, когда сила, действующая со стороны электрического поля на поверхностные заряды, превышает силу тяжести и поверхностное натяжение, действующие на рассматриваемый поверхностный слой. Это также следует из определения параметра Тонкса-Френкеля.

Ещё одним важным выводом из текущего исследования является то, что неустойчивость заряженной поверхности любой проводящей жидкости обязательно достигается, какой бы большой ни была поверхностная плотность зарядов на её поверхности. Это свойство будет ключевым в последующем сравнении неустойчивостей поверхностно-заряженной проводящей жидкости и магнитной жидкости во внешнем магнитном поле.

Необходимо также разъяснить ещё одно противоречие между полученными выше теоретическими расчётами и экспериментальным наблюдением неустойчивости. Как уже говорилось ранее, неустойчивость поверхностного слоя рассматриваемой в данном разделе жидкости заключается в возникновении конусов Тейлора конечной высоты и последующим отрывом

капелек жидкого проводника с его вершины при непрерывном увеличении поверхностной плотности заряда. Однако выше были получены решения для волн с экспоненциально возрастающей со временем амплитудой в области неустойчивости, что означает неограниченность пиков по высоте. Это объясняется тем, что данная задача рассматривалась в линейном приближении с исключением нелинейных слагаемых из уравнений задачи и граничных условий, учёт которых позволил бы получить полную картину развития неустойчивости. Но решение нелинейной задачи выходит за рамки данного исследования.

3 Исследование неустойчивости поверхности магнитной жидкости во внешнем однородном ортогональном магнитном поле

Магнитная жидкость представляет собой коллоидный раствор, получаемый диспергированием в определённой жидкой среде (вода и другие органические растворители) магнитных частиц ультрамикроскопического размера, покрытых поверхностно-активным веществом (ПАВ) с целью стабилизации дисперсной системы.

Под магнитными частицами подразумеваются однодоменные частицы ферромагнетика размером от 1 до 100 нм, в качестве которого чаще всего выступают следующие материалы – магнетит ($\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$), кобальт (Co) и никель (Ni).

Магнитный коллоид должен быть стабилен во времени, что означает отсутствие выпадения частиц в осадок. Во-первых, в нанометровом диапазоне размеров ферромагнитные частицы подвергаются броуновскому движению в жидкой основе, которое препятствует их оседанию в гравитационном поле. Именно поэтому и возникает необходимость использования частиц такого малого размера. Во-вторых, магнитные частицы на очень близких расстояниях друг от друга начинают испытывать притяжение за счёт сил ван-дер-ваальса и взаимодействия магнитных моментов. В результате слипания частиц образуется более крупный и массивный агрегат, который под действием силы тяготения осядет на дно. Поэтому в процессе приготовления магнитной жидкости применяются ПАВ, длинные молекулы которых покрывают поверхность каждой частицы, образуя защитный адсорбционный слой, препятствующий их сближению на близкое расстояние. В качестве ПАВ при производстве магнитных жидкостей наиболее часто применяется олеиновая кислота, а также полиизобутиленовый эфир янтарной кислоты и другие.

С физической точки зрения, ферромагнитная жидкость ведёт себя аналогично молекулам парамагнитного газа. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные частицы, каждая из которых имеет определённо

направленный магнитный момент, ориентированы хаотично, поэтому весь объём магнитной жидкости имеет нулевую намагниченность. По мере увеличения напряжённости поля, магнитные моменты частиц стремятся выстроиться вдоль линий напряжённости. В слабых полях этому процессу мешает тепловое движение молекул жидкой основы, но в сильных полях частицы полностью упорядочены, их магнитные моменты направлены параллельно магнитному полю и намагниченность магнитной жидкости достигает насыщения.

В данном разделе будет рассмотрено явление неустойчивости поверхности ферромагнитной жидкости, граничащей с немагнитной газообразной внешней средой, во внешнем однородном ортогональном магнитном поле. Оно заключается в возникновении на границе раздела сред упорядоченной структуры из острых пиков конечной высоты (так называемого «ежа») при превышении некоторого критического значения напряжённости магнитного поля. Экспериментальные исследования условий возникновения неустойчивости в ортогональном магнитном поле были проведены Каули и Розенцвейгом в 1967 году [11].

3.1 Постановка задачи

Пусть на поверхности идеальной несжимаемой бесконечно глубокой магнитной жидкости с массовой плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения γ и магнитной проницаемостью $\mu^{(1)}$ распространяется плоская периодическая гравитационно-капиллярная волна с амплитудой a и длиной волны λ .

Магнитная жидкость при этом помещена в однородное ортогональное магнитное поле с вектором напряжённости \vec{H}_0 . Её поверхность граничит с внешней немагнитной средой – атмосферой, характеризуемой магнитной проницаемостью $\mu^{(2)}$ (рисунок 3.1).

Пусть также рассматриваемые волновые возмущения малы, то есть $a \ll \lambda$.

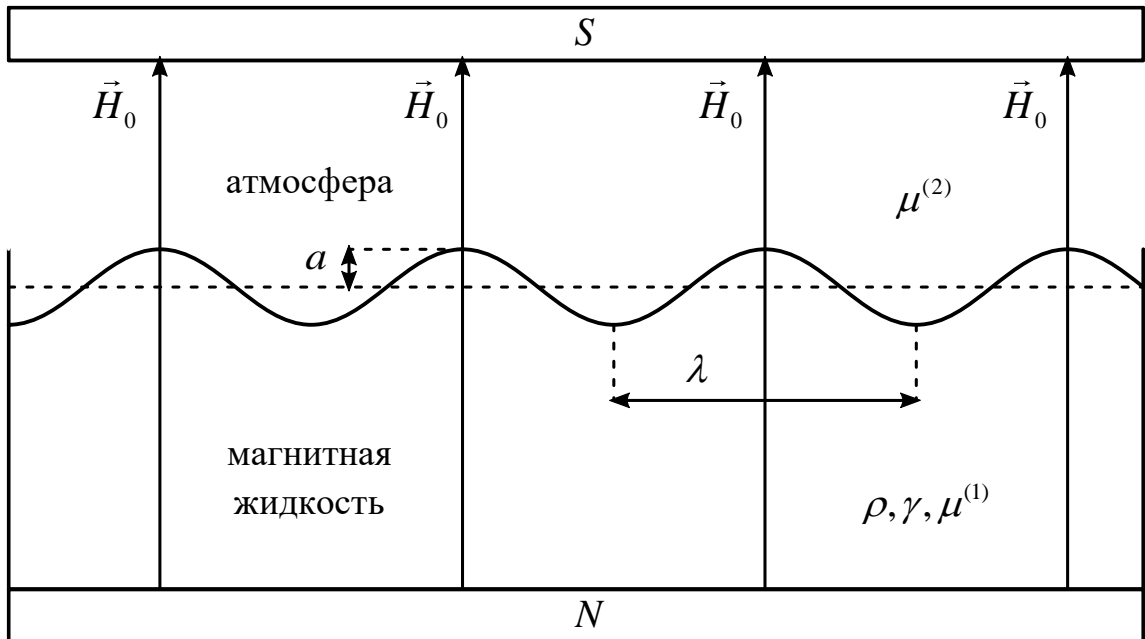


Рисунок 3.1. Условное изображение гравитационно-капиллярной волны на поверхности идеальной несжимаемой магнитной жидкости

Требуется получить дисперсионное уравнение и критерий неустойчивости для волн на поверхности этой жидкости.

3.2 Давление магнитного поля на поверхность магнитной жидкости

Пусть напряжённость магнитного поля \vec{H} вблизи поверхности магнитной жидкости характеризуется потенциалом магнитного поля ψ и определяется соотношением [11]:

$$\vec{H} = -\vec{\nabla} \psi, \quad (3.1)$$

где $\psi = \psi(t, x, z)$ – функция времени и координат.

Распространение волны на поверхности магнитной жидкости вносит изменения в распределение потенциала магнитного поля вблизи этой поверхности, причём это изменение уменьшается с увеличением расстояния от поверхности. Так как по условию задачи рассматриваются малые волновые возмущения, то искажения потенциала также будут незначительными. Следовательно, к данной задаче применимы методы теории возмущений.

Согласно теории возмущений [8], потенциал магнитного поля можно представить в виде следующей суперпозиции:

$$\psi = \psi_0 + \psi_1, \quad (3.2)$$

где ψ_0 – потенциал поля над невозмущённой поверхностью жидкости, ψ_1 – малая поправка к потенциалу, учитывающая изменение потенциала поля над возмущённой поверхностью жидкости.

Согласно (3.1) выражение (3.2) можно переписать и для напряжённости магнитного поля:

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1, \quad (3.3)$$

где \vec{H}_0 – напряжённость поля над невозмущенной поверхностью жидкости, \vec{H}_1 – малая поправка к напряжённости, учитывающая изменение напряжённости поля над возмущённой поверхностью.

Воспользуемся известной в электродинамике сплошных сред формулой для вычисления давления магнитного поля P_M (магнитного давления) на поверхность магнитной жидкости со стороны среды с магнитной проницаемостью μ [16]:

$$p_M = \frac{\mu H^2}{8\pi}. \quad (3.4)$$

Учитывая то, что напряжённость магнитного поля \vec{H} может быть записана в виде (3.3), выражение для давления (3.4) аналогично можно представить следующим образом:

$$p_M = p_{M0} + p_{M1}, \quad (3.5)$$

где p_{M0} — давление магнитного поля на невозмущённую поверхность жидкости, p_{M1} — малая поправка к давлению, учитывающая искажение давления магнитного поля на возмущённую поверхность.

Вид величин p_{M0} и p_{M1} может быть получен путём подстановки суперпозиции (3.3) в формулу (3.4) с учётом соотношения (3.1):

$$p_{M0} = \frac{\mu H_0^2}{8\pi}, \quad p_{M1} = -\frac{\mu H_0}{4\pi} \frac{\partial \psi_1}{\partial z}. \quad (3.6)$$

В выражениях (3.6) принято, что ось z направлена перпендикулярно невозмущённой поверхности жидкости, то есть вдоль направления поля \vec{H}_0 .

Учитывая то, что силовые линии магнитного поля существуют как в объёме магнитной жидкости, так и в атмосфере, суммарное магнитное давление $p_M^{(\Sigma)}$ на поверхность жидкости будет определяться разностью магнитного давления со стороны атмосферы $p_M^{(2)}$ и магнитного давления со стороны жидкости $p_M^{(1)}$:

$$p_M^{(\Sigma)} = p_M^{(2)} - p_M^{(1)}. \quad (3.7)$$

Здесь и в дальнейшем верхние индексы у величин будут обозначать среду, в которой эти величины измеряются: (1) – магнитная жидкость, (2) – атмосфера.

Выпишем соотношение (3.7) по отдельности для нулевого и первого порядков, воспользовавшись величинами (3.6):

$$\begin{aligned} p_{M0}^{(\Sigma)} &= \frac{1}{8\pi} \left(\mu^{(2)} H_0^{(2)2} - \mu^{(1)} H_0^{(1)2} \right), \\ p_{M1}^{(\Sigma)} &= \frac{1}{4\pi} \left(\mu^{(1)} H_0^{(1)} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} - \mu^{(2)} H_0^{(2)} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

3.3 Математическая формулировка задачи

Введём двумерную систему координат, аналогичную той, которая была введена в разделе 1 (рисунок 1.2). Направление вектора ускорения свободного падения \vec{g} оставим неизменным.

Закон изменения поверхности жидкости при волновых возмущениях по-прежнему будем описывать функцией $\xi = \xi(t, x)$, заданной соотношением (1.1).

Опираясь на результаты решения задачи о движении гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости из раздела 1, составим математическую формулировку рассматриваемой задачи, которая будет состоять из линеаризованных уравнений и граничных условий.

Уравнение для гидродинамического потенциала.

Так как рассматриваемая жидкость несжимаемая, то для неё будет справедливо уравнение несжимаемости идеальной жидкости (1.3), которое останется в данной задаче без изменений:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0. \quad (3.9)$$

Данное уравнение в рамках приближения безвихревого движения жидкости будет идентично уравнению (1.28):

$$\Delta\Phi = 0, \quad z < 0. \quad (3.10)$$

Уравнения для потенциалов магнитного поля.

Запишем закон Гаусса для магнитного поля (одно из уравнений Максвелла) в магнитной жидкости и в атмосфере [7]:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(1)} &= 0, & z < \xi, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}^{(2)} &= 0, & z > \xi, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\vec{B}^{(1)}$ и $\vec{B}^{(2)}$ – векторы индукции магнитного поля в магнитной жидкости и в атмосфере соответственно.

Для изотропных сред существует соотношение, связывающее вектор индукции магнитного поля с вектором напряжённости. Считая, что рассматриваемые в задаче среды изотропны, запишем его для каждой из них [7]:

$$\begin{aligned} \vec{B}^{(1)} &= \mu^{(1)} \vec{H}^{(1)}, & z < \xi, \\ \vec{B}^{(2)} &= \mu^{(2)} \vec{H}^{(2)}, & z > \xi. \end{aligned} \quad (3.12)$$

С учётом этого, уравнения (3.11) перепишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{H}^{(1)} &= 0, & z < \xi, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H}^{(2)} &= 0, & z > \xi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Для перехода от векторных величин $\vec{H}^{(1)}$ и $\vec{H}^{(2)}$ к скалярным функциям $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$ в уравнениях (3.13) воспользуемся соотношением (3.1). В итоге получим уравнения для потенциала магнитного поля в магнитной жидкости и в атмосфере:

$$\begin{aligned}\Delta\psi_1^{(1)} &= 0, & z < 0, \\ \Delta\psi_1^{(2)} &= 0, & z > 0.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Для удобства уравнения (3.14) заданы относительно невозмущённой поверхности жидкости $z = 0$.

Материальные уравнения.

В дальнейшем при анализе устойчивости поверхности магнитной жидкости существенную роль будет играть такая её характеристика, как намагниченность. Следовательно, необходимо задать соотношения, которые позволят перейти от напряжённости магнитного поля, в которое помещена магнитная жидкость, к её намагниченности. Эти соотношения назовём материальными уравнениями данной задачи.

Воспользуемся известным в электродинамике выражением, связывающим вектор индукции магнитного поля в среде с её вектором намагниченности. Запишем его для магнитной жидкости и атмосферы [7]:

$$\begin{aligned}\vec{B}^{(1)} &= \vec{H}^{(1)} + 4\pi\vec{M}_0, \\ \vec{B}^{(2)} &= \vec{H}^{(2)},\end{aligned}\tag{3.15}$$

где \vec{M}_0 – вектор намагниченности магнитной жидкости. Здесь учтено, что намагниченность атмосферы равна нулю.

Так как намагниченность является характеристикой всего объёма магнитной жидкости, то малыми поправками к напряжённости и индукции магнитного поля можно пренебречь. Тогда из (3.15) следует:

$$\begin{aligned}(\mu^{(1)} - 1)\vec{H}_0^{(1)} &= 4\pi\vec{M}_0, \\ (\mu^{(2)} - 1)\vec{H}_0^{(2)} &= 0,\end{aligned}\tag{3.16}$$

Соотношения (3.16) и есть искомые материальные уравнения.

Условие баланса давлений на поверхности.

Основное уравнение гидродинамики идеальной жидкости (уравнение Эйлера) (1.4) для данной задачи также остается без изменений:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{g}.\tag{3.17}$$

Следовательно, уравнение (1.19), полученное из (1.4) в приближении безвихревого движения, тоже будет прежним:

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{(\vec{\nabla}\Phi)^2}{2} - \rho gz + C(t).\tag{3.18}$$

Условие непрерывности давления на границе раздела жидкость – атмосфера будет определяться следующим соотношением, отличным от граничного условия (1.8):

$$p - p_0 - p_\gamma + p_M = 0, \quad z = \xi,\tag{3.19}$$

где p_γ – поверхностное давление, p_M – давление магнитного поля.

Воспользуемся полученным граничным условием (3.19), выполнив в него подстановку выражения для давления (3.18):

$$-\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \rho \frac{(\vec{\nabla} \Phi)^2}{2} - \rho g \xi + C(t) - p_0 - p_\gamma + p_M = 0, \quad z = \xi. \quad (3.20)$$

Неизвестную величину $C(t)$ можно найти, рассмотрев поверхность жидкости в отсутствие волновых возмущений (поверхность представляет собой плоскость $z=0$). В этом случае: $\partial \Phi / \partial t = 0$, $\vec{\nabla} \Phi = 0$, $z = \xi = 0$, $p_\gamma = 0$, $p_M = p_{M0}$. Тогда из (3.20) следует:

$$C(t) = p_0 - p_{M0}. \quad (3.21)$$

Выполним подстановку (3.21) в соотношение (3.20). Для поверхностного давления p_γ воспользуемся формулой (2.17), выведенной в разделе 2 для поверхности жидкости на которой распространяется гравитационно-капиллярная волна малой амплитуды. В качестве магнитного давления p_M возьмём величину $p_M^{(\Sigma)}$, определяемую соотношениями (3.8). В результате получим новое граничное условие следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{(\vec{\nabla} \Phi)^2}{2} + g \xi - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + p_M = 0, \quad z = \xi, \\ p_M = \frac{1}{4\pi\rho} \left(\mu^{(2)} H_0^{(2)} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial z} - \mu^{(1)} H_0^{(1)} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Данное выражение содержит неизвестные величины только первого порядка малости.

Линеаризация граничного условия (3.22) со снесением его на поверхность $z = 0$ по правилам, рассмотренным в разделе 1 (подраздел 1.4), приведёт к окончательному выражению, которое войдёт в математическую формулировку задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\xi - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + p_M &= 0, \quad z = 0, \\ p_M &= \frac{1}{4\pi\rho} \left(\mu^{(2)} H_0^{(2)} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial z} - \mu^{(1)} H_0^{(1)} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Кинематическое граничное условие.

Требование движения частиц жидкости совместно с поверхностью $z = \xi$ при её волновых возмущениях выражается рассмотренным в разделе 1 кинематическим граничным условием (1.6):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + U_x \frac{\partial \xi}{\partial x} - U_z = 0, \quad z = \xi, \quad (3.24)$$

которое в безвихревом приближении соответствует линеаризованному выражению (1.37):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \quad z = 0. \quad (3.25)$$

Условие непрерывности тангенциальной компоненты вектора напряжённости магнитного поля на границе жидкость – атмосфера.

В электродинамике сплошных сред доказывается, что тангенциальная компонента напряжённости магнитного поля непрерывна на границе раздела двух сред [7]:

$$H_{\tau}^{(2)} - H_{\tau}^{(1)} = 0, \quad z = \xi, \quad (3.26)$$

где $H_{\tau}^{(1)}$ и $H_{\tau}^{(2)}$ – тангенциальные компоненты векторов напряжённости магнитного поля в магнитной жидкости и атмосфере соответственно.

Учитывая двумерность рассматриваемой задачи, граничное условие (3.26) можно записать в виде векторного произведения [11]:

$$\left[\vec{n} \times (\vec{H}^{(2)} - \vec{H}^{(1)}) \right] = 0, \quad z = \xi, \quad (3.27)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности жидкости.

Воспользуемся вектором нормали (2.15), полученным при выводе поверхностного давления в разделе 2, предварительно проведя его линеаризацию:

$$\vec{n} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} \vec{e}_x + \vec{e}_z. \quad (3.28)$$

Тогда вычисление векторного произведения (3.27) с учётом вектора нормали вида (3.28) приводит к следующему результату:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} (H_z^{(2)} - H_z^{(1)}) + (H_x^{(2)} - H_x^{(1)}) = 0, \quad z = \xi, \quad (3.29)$$

где индексы x и z обозначают проекции векторов на соответствующие оси системы координат.

Принимая во внимание тот факт, что векторы напряжённости в соотношении (3.29) представляют собой суперпозицию вида (3.3), исключим из него слагаемые второго порядка малости:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} (H_0^{(2)} - H_0^{(1)}) + (H_{1x}^{(2)} - H_{1x}^{(1)}) = 0, \quad z = \xi. \quad (3.30)$$

Переход к потенциалам магнитного поля согласно соотношению (3.1) и снесение на невозмущённую поверхность по правилам линеаризации, описанным в разделе 1 (подраздел 1.4), даёт окончательный вид граничного условия (3.30):

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} (H_0^{(2)} - H_0^{(1)}) + \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial x} \right) = 0, \quad z = 0. \quad (3.31)$$

Условие непрерывности нормальной компоненты вектора индукции магнитного поля на границе жидкость – атмосфера.

Получим ещё одно граничное условие, которое следует из непрерывности нормальных компонент вектора индукции магнитного поля на границе двух сред [7]:

$$B_n^{(2)} - B_n^{(1)} = 0, \quad z = \xi, \quad (3.32)$$

где $B_n^{(1)}$ и $B_n^{(2)}$ – нормальные компоненты векторов индукции магнитного поля в магнитной жидкости и атмосфере соответственно.

Проведём рассуждения, аналогичные тем, что были проведены при выводе граничного условия (3.31). Для начала представим соотношение (3.32) в виде скалярного произведения [11]:

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}^{(2)} - \vec{B}^{(1)}) = 0, \quad z = \xi, \quad (3.33)$$

где \vec{n} – единичный вектор нормали к поверхности жидкости.

Вычисление скалярного произведения (3.33) с учётом вектора нормали вида (3.28) приводит к следующему результату:

$$-\frac{\partial \xi}{\partial x} (B_x^{(2)} - B_x^{(1)}) + (B_z^{(2)} - B_z^{(1)}) = 0, \quad z = \xi, \quad (3.34)$$

где индексы x и z обозначают проекции векторов на соответствующие оси системы координат.

С учётом того, что каждая из проекций вектора индукции магнитного поля определена с точностью до первого порядка малости, произведём отбрасывание в граничном условии (3.34) малых слагаемых более высокого порядка:

$$(B_{z0}^{(2)} - B_{z0}^{(1)}) + (B_{z1}^{(2)} - B_{z1}^{(1)}) = 0, \quad z = \xi. \quad (3.35)$$

В отсутствие волновых возмущений на поверхности магнитной жидкости, когда $z = \xi = 0$ и $B_{z1}^{(1)} = B_{z1}^{(2)} = 0$, полученное выражение примет вид:

$$B_{z0}^{(2)} - B_{z0}^{(1)} = 0, \quad z = 0. \quad (3.36)$$

Это означает, что в нулевом порядке проекции вектора индукции на ось z непрерывны на границе раздела двух сред. В связи с этим, граничное условие (3.35) с последующим выражением соответствующих величин через потенциалы магнитного поля и снесением на поверхность $z = 0$ окончательно преобразуется:

$$\mu^{(1)} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} - \mu^{(2)} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial z} = 0, \quad z = 0. \quad (3.37)$$

Условие для гидродинамического потенциала на бесконечности.

Условие затухания скорости жидкости с увеличением глубины будет тождественно условию (1.31):

$$\vec{\nabla} \Phi \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \quad (3.38)$$

Условия для потенциалов магнитного поля на бесконечности.

Выше было отмечено, что поправка к напряжённости магнитного поля \vec{H}_1 , связанная с волновыми возмущениями поверхности, должна обращаться в нуль при удалении на бесконечно большое расстояние от поверхности жидкости:

$$\begin{aligned} \vec{H}_1^{(1)} &\rightarrow 0, & z &\rightarrow -\infty, \\ \vec{H}_1^{(2)} &\rightarrow 0, & z &\rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Воспользовавшись соотношением (3.1), перейдём от переменных $\vec{H}_1^{(1)}$ и $\vec{H}_1^{(2)}$ к переменным $\psi_1^{(1)}$ и $\psi_1^{(2)}$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \psi_1^{(1)} &\rightarrow 0, & z &\rightarrow -\infty, \\ \vec{\nabla} \psi_1^{(2)} &\rightarrow 0, & z &\rightarrow +\infty,\end{aligned}\tag{3.40}$$

Математическая формулировка задачи.

Все полученные выше соотношения, которые задают математическую формулировку текущей задачи, представим в таблице 5.

Таблица 5

Математическая формулировка задачи

Формула	Область определения	Номер формулы в тексте
Уравнения		
$\Delta\Phi = 0$	$z < 0$	3.10
$\Delta\psi_1^{(1)} = 0$	$z < 0$	3.14
$\Delta\psi_1^{(2)} = 0$	$z > 0$	3.14
Материальные уравнения		
$(\mu^{(1)} - 1)\vec{H}_0^{(1)} = 4\pi\vec{M}_0$	—	3.16
$(\mu^{(2)} - 1)\vec{H}_0^{(2)} = 0$	—	3.16

Граничные условия		
$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\xi - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + p_M = 0,$ $p_M = \frac{1}{4\pi\rho} \left(\mu^{(2)} H_0^{(2)} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial z} - \mu^{(1)} H_0^{(1)} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} \right)$	$z = 0$	3.23
$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$		3.25
$\frac{\partial \xi}{\partial x} (H_0^{(2)} - H_0^{(1)}) + \left(\frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial x} \right) = 0$		3.31
$\mu^{(1)} \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial z} - \mu^{(2)} \frac{\partial \psi_1^{(2)}}{\partial z} = 0$		3.37
$\vec{\nabla} \Phi \rightarrow 0$	$z \rightarrow -\infty$	3.38
$\vec{\nabla} \psi_1^{(1)} \rightarrow 0$		3.40
$\vec{\nabla} \psi_1^{(2)} \rightarrow 0$	$z \rightarrow +\infty$	3.40

3.4 Решение задачи и вывод дисперсионного уравнения

Для получения дисперсионного уравнения для волн на поверхности магнитной жидкости, помещённой во внешнее однородное ортогональное магнитное поле, воспользуемся методикой решения задачи, использованной в разделе 1.

Зададим вид неизвестных переменных ξ и Φ в уравнениях математической формулировки задачи (таблица 5) в виде простейших периодических функций, как это было сделано в формулах (1.38) и (1.39):

$$\xi(t, x) = a \exp[i(\omega t - kx)], \quad (3.41)$$

$$\Phi(t, x, z) = F(z) \exp[i(\omega t - kx)]. \quad (3.42)$$

где $F(z)$ – некая функция, учитывающая зависимость Φ от координаты z .

Выше было сказано, что волновые возмущения поверхности магнитной жидкости вносят изменения в распределение потенциала магнитного поля над этой поверхностью. Следовательно, неизвестные переменные $\psi_1^{(1)}$ и $\psi_1^{(2)}$ в уравнениях задачи, учитывающие искажение потенциала магнитного поля над возмущённой поверхностью жидкости, необходимо также задать в виде бегущей волны:

$$\psi_1^{(1)}(t, x, z) = f^{(1)}(z) \exp[i(\omega t - kx)], \quad (3.43)$$

$$\psi_1^{(2)}(t, x, z) = f^{(2)}(z) \exp[i(\omega t - kx)], \quad (3.44)$$

где $f^{(1)}(z)$ и $f^{(2)}(z)$ – некие функции, учитывающие зависимость $\psi_1^{(1)}$ и $\psi_1^{(2)}$ от координаты z .

Уточним вид неизвестных функций (3.42) – (3.44) путём подстановки их в уравнения задачи (3.10) и (3.14) с учётом граничных условий (3.38) и (3.40):

$$\Phi(t, x, z) = A_1 \exp(kz) \exp[i(\omega t - kx)], \quad (3.45)$$

$$\psi_1^{(1)}(t, x, z) = A_2 \exp(kz) \exp[i(\omega t - kx)], \quad (3.46)$$

$$\psi_1^{(2)}(t, x, z) = A_3 \exp(-kz) \exp[i(\omega t - kx)], \quad (3.47)$$

где A_1 , A_2 и A_3 – произвольные постоянные.

Подстановка соотношений (3.41) и (3.45) – (3.47) в граничные условия (3.23), (3.25), (3.31) и (3.37) приведёт к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} kA_1 - i\omega a = 0, \\ i\omega A_1 - \frac{\mu^{(1)} H_0^{(1)} k}{4\pi\rho} A_2 - \frac{\mu^{(2)} H_0^{(2)} k}{4\pi\rho} A_3 + \left(g + \frac{\gamma}{\rho} k^2\right) a = 0, \\ A_2 - A_3 + (H_0^{(2)} - H_0^{(1)}) a = 0, \\ \mu^{(1)} A_2 + \mu^{(2)} A_3 = 0. \end{cases} \quad (3.48)$$

Согласно теореме линейной алгебры [3], критерием существования ненулевых решений системы однородных линейных уравнений является равенство нулю определителя этой системы. В соответствии с этим, для системы (3.48) можно записать следующее:

$$\begin{vmatrix} k & 0 & 0 & -i\omega \\ i\omega & -\frac{\mu^{(1)} H_0^{(1)} k}{4\pi\rho} & -\frac{\mu^{(2)} H_0^{(2)} k}{4\pi\rho} & g + \frac{\gamma}{\rho} k^2 \\ 0 & 1 & -1 & H_0^{(2)} - H_0^{(1)} \\ 0 & \mu^{(1)} & \mu^{(2)} & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.49)$$

Раскрытие определителя приводит к дисперсионному уравнению для волн на поверхности рассматриваемой магнитной жидкости:

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 - \frac{(H_0^{(2)} - H_0^{(1)})^2}{4\pi\rho} \frac{\mu^{(1)}\mu^{(2)}}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}} k^2 \quad (3.50)$$

Однако использование полученного соотношения в качестве конечного варианта дисперсионного уравнения для анализа неустойчивости поверхности магнитной жидкости не совсем корректно. Необходимо учесть, что магнитная жидкость обладает намагниченностью, характеризующей интенсивность поляризации ферромагнитного вещества, из которого она изготовлена, и зависящей от приложенного внешнего магнитного поля. Для этого воспользуемся материальными уравнениями (3.16), выразив из них напряжённости магнитного поля:

$$\begin{aligned} \vec{H}_0^{(1)} &= \mu^{(1)} \vec{H}_0^{(1)} - 4\pi \vec{M}_0, \\ \vec{H}_0^{(2)} &= \mu^{(2)} \vec{H}_0^{(2)}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Вычитание второго уравнения из первого приведёт к следующему простому выражению:

$$\vec{H}_0^{(2)} - \vec{H}_0^{(1)} = 4\pi \vec{M}_0, \quad (3.52)$$

с учётом которого дисперсионное уравнение (3.50) преобразуется к окончательному виду, учитывающему намагниченность ферромагнитного материала жидкости [11]:

$$\omega^2 = gk + \frac{\gamma}{\rho} k^3 - \frac{4\pi M_0^2}{\rho} \frac{\mu^{(1)}\mu^{(2)}}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}} k^2 \quad (3.53)$$

В полученном соотношении первое слагаемое совпадает с дисперсионным уравнением для гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости (1.45). Второе слагаемое учитывает поверхностное давление, обусловленное поверхностным натяжением жидкости. А третье слагаемое отвечает за давление магнитного поля на поверхность магнитной жидкости.

3.5 Исследование неустойчивости поверхности магнитной жидкости во внешнем однородном ортогональном магнитном поле

Воспользуемся полученным ранее дисперсионным уравнением для нахождения критерия неустойчивости поверхности магнитной жидкости во внешнем однородном ортогональном магнитном поле, представляющего собой минимальное значение модуля намагниченности магнитной жидкости, при котором возникает нарушение равновесного состояния поверхности.

Для удобства дальнейшего анализа, представим дисперсионное соотношение (3.53) через безразмерные параметры следующим образом:

$$\omega^2 = gk(1 + K^2 - KW_M), \quad (3.54)$$

где K – безразмерное волновое число, W_M – безразмерный параметр, являющийся аналогом параметра Тонкса-Френкеля, представляющий собой величину, пропорциональную отношению давления магнитного поля к поверхностному давлению на поверхность магнитной жидкости:

$$K = k\sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} = kA, \quad (3.55)$$

$$W_M = \frac{4\pi M_0^2}{\sqrt{\rho g \gamma}} \frac{\mu^{(1)} \mu^{(2)}}{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}}. \quad (3.56)$$

Величина A , входящая в безразмерное волновое число (3.55), имеет размерность длины и называется капиллярной постоянной [1]:

$$A = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}. \quad (3.57)$$

В зависимости знака правой части соотношения (3.54), что в свою очередь зависит от величины параметра W_M , циклическая частота может быть как действительной, так и мнимой. Ниже будет показано, что оба эти варианта соответственно определяют область устойчивости и область неустойчивости поверхности магнитной жидкости.

Область устойчивости.

Предположим, что ω – действительная величина. Тогда функция (3.41) по-прежнему будет описывать периодическую плоскую волну на поверхности рассматриваемой жидкости. Запишем её следующим образом:

$$\xi^{st}(t, x) = a \exp[i(\pm \omega t - kx)]. \quad (3.58)$$

В этом выражении заключены две одинаковые бегущие волны, распространяющиеся во встречном направлении: знак «+» соответствует волне, распространяющейся вдоль оси x , а знак «-» – противоположно направленной волне.

Поскольку функция (3.58) является периодической, это означает, что случай действительной циклической частоты соответствует области

устойчивости поверхности магнитной жидкости, которая определяется неравенством, вытекающим непосредственно из дисперсионного уравнения (3.54):

$$W_M < \frac{1 + K^2}{K}. \quad (3.59)$$

Из определения параметра W_M (3.56) и неравенства (3.59) следует, что с физической точки зрения устойчивое состояние поверхности соответствует ситуации, когда величина поверхностного давления несколько превышает величину давления магнитного поля на эту поверхность (свой вклад в стабилизацию вносит еще и поле тяжести).

Область неустойчивости.

Пусть теперь ω – мнимая величина. В этом случае закон изменения поверхности (3.41) примет вид:

$$\xi^{inst}(t, x) = a \exp(\pm \omega t) \exp(-ikx). \quad (3.60)$$

Функция (3.60) описывает две одинаковые волны: амплитуда одной из них экспоненциально возрастает со временем (инкремент возрастания « $+\omega$ »), а другой – экспоненциально убывает (декремент затухания « $-\omega$ »). Следует также отметить, что убывающая волна через некоторое время полностью затухнет и останется только нарастающее возмущение на поверхности жидкости.

Такая ситуация соответствует явлению неустойчивости поверхности. В случае мнимой циклической частоты область неустойчивости выражается неравенством следующего вида:

$$W_M > \frac{1 + K^2}{K}. \quad (3.61)$$

Следовательно, неустойчивость поверхности магнитной жидкости возникает тогда, когда поверхностное давление вместе с влиянием поля силы тяжести уже не может уравновесить давление магнитного поля.

Критерий неустойчивости.

Рассмотрим границу, разделяющую область устойчивости и область неустойчивости поверхности магнитной жидкости. Как следует из неравенств (3.59) и (3.61), она задаётся уравнением:

$$W_M = \frac{1 + K^2}{K}. \quad (3.62)$$

Из графического построения данной функции на плоскости безразмерных параметров $K - W_M$ (рисунок 3.2) несложно определить числовое значение её точки минимума K^* и минимального значения W_M^* :

$$K^* = 1, \quad W_M^* = 2.$$

Таким образом, искомый критерий неустойчивости определяется параметром W_M и математически может быть записан следующим образом:

$$W_M > W_M^* = 2, \quad (3.63)$$

который в пересчёте на модуль намагниченности магнитной жидкости, согласно выражению (3.56), имеет вид:

$$M_0 > M_0^* = \sqrt{\frac{\sqrt{\rho g \gamma}}{2\pi} \frac{\mu^{(1)} + \mu^{(2)}}{\mu^{(1)} \mu^{(2)}}}. \quad (3.64)$$

где M_0^* – критическое значение намагниченности магнитной жидкости.

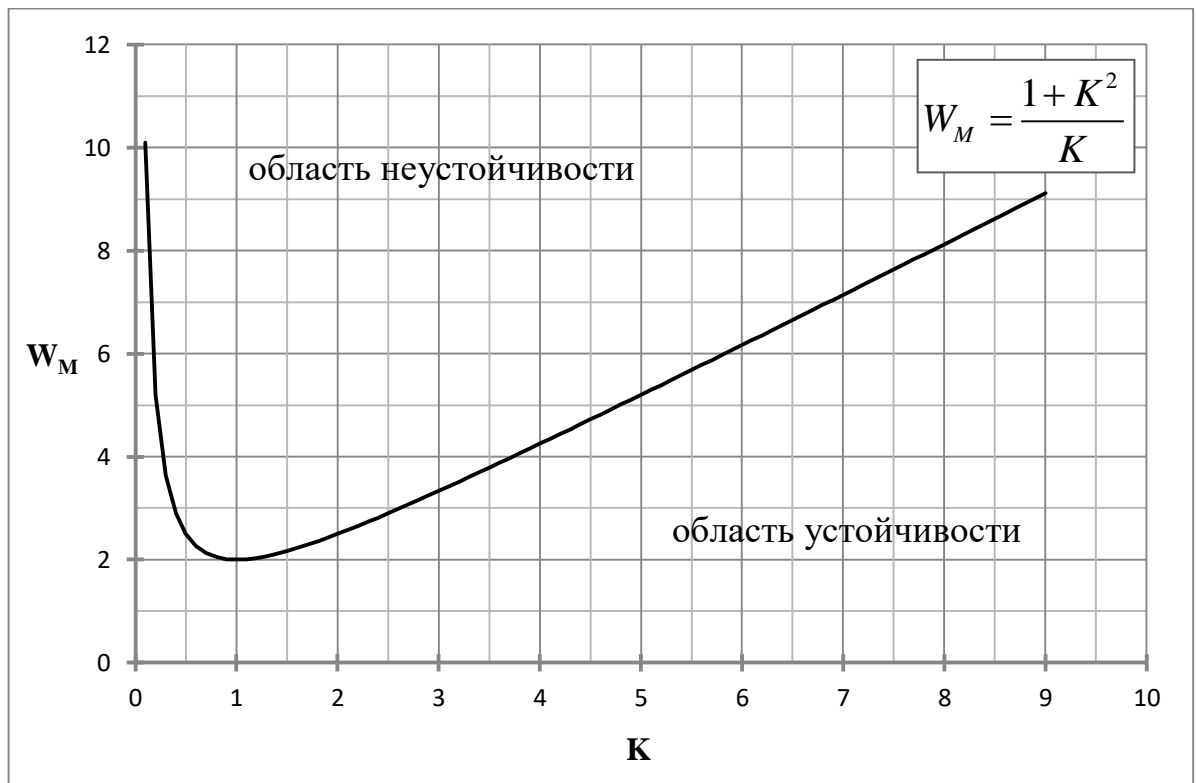


Рисунок 3.2. Графическая зависимость параметра W_M от безразмерного волнового числа

Как следует из рассмотрения графика на рисунке 3.2, при малейшем превышении критического значения модуля намагниченности возникает неустойчивость поверхности жидкости. Она обусловлена дестабилизацией моды (волны), длина которой соответствует величине K^* и определяется, согласно (3.55), выражением:

$$\lambda^* = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}. \quad (3.65)$$

В случае нелинейно намагничивающейся магнитной жидкости при непрерывном увеличении напряжённости магнитного поля происходит увеличение намагниченности, выходящее на насыщение (рисунок 3.3).

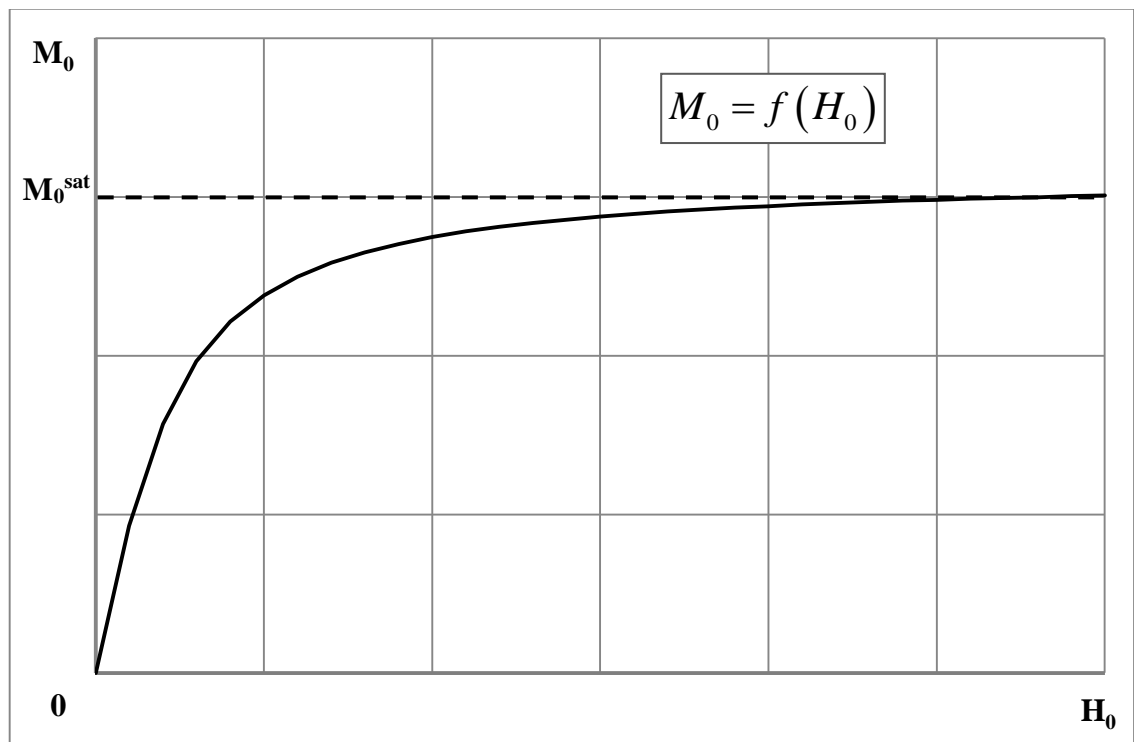


Рисунок 3.3. Схематический график кривой намагничивания ферромагнитной жидкости. Здесь M_0^{sat} — намагниченность насыщения ферромагнитного материала жидкости

Из анализа графической зависимости на рисунке 3.3 следует два вида магнитных жидкостей в зависимости от величины намагниченности насыщения.

К первому типу относятся магнитные жидкости, для которых числовое значение намагниченности насыщения меньше критического значения намагниченности:

$$M_0^{sat} < M_0^*.$$

У таких жидкостей поверхностный слой всегда стабилен при любом значении напряжённости магнитного поля и каждая мода существующего спектра волновых возмущений на нём будет описываться периодической зависимостью типа (3.58).

Ко второму типу магнитных жидкостей относятся те, у которых числовое значение намагниченности насыщения превышает критическое значение намагниченности:

$$M_0^{sat} > M_0^*.$$

У этого типа магнитных жидкостей неустойчивость поверхности может быть реализована при достижении критического значения напряжённости магнитного поля (намагниченности). Дальнейшее увеличение напряжённости сверх критического значения будет расширять спектр неустойчивых мод.

3.6 Выводы из решения задачи и исследования неустойчивости поверхности

В результате проведённого исследования были выяснены условия возникновения неустойчивости поверхности магнитной жидкости во внешнем однородном ортогональном магнитном поле.

С точки зрения эксперимента, неустойчивость поверхности наступает при достижении некоторого критического значения намагниченности магнитной жидкости, соответствующей критическому значению напряжённости магнитного поля, вызывающего дестабилизацию моды с определённой амплитудой и длиной волны. Критическое значение поля определяется критерием неустойчивости, в качестве которого выступает безразмерный

параметр W_M , и может быть достигнуто путём непрерывного увеличения силы тока, подаваемого на полюса электромагнита, между которыми располагается ёмкость с ферромагнитной жидкостью.

С физической точки зрения, заряженная поверхность переходит в неустойчивое состояние в том случае, когда сила, действующая со стороны электрического поля на поверхностные заряды, превышает силу тяжести и поверхностное натяжение, действующие на рассматриваемый поверхностный слой. Это также следует из определения параметра Тонкса-Френкеля.

Как было выяснено в текущем разделе, математические описания критериев неустойчивости поверхности магнитной жидкости и заряженной поверхности проводящей жидкости идентичны. Это устанавливает идентичность величины напряжённости электрического поля и намагниченности магнитной жидкости при анализе условий дестабилизации поверхностей рассматриваемых жидкостей.

Однако экспериментально неустойчивость магнитной жидкости наблюдается только тогда, когда её намагниченность насыщения больше критического значения намагниченности. В случае же поверхностно-заряженной жидкости, как было выяснено в разделе 2, неустойчивость достижима всегда при неограниченном увеличении внешнего поля.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По результатам проведённого исследования, можно сделать следующие выводы:

1. Дисперсионные уравнения для волновых возмущений на заряженной поверхности проводящей жидкости и поверхности магнитной жидкости во внешнем однородном ортогональном магнитном поле с формальной математической точки зрения полностью идентичны.

2. Из тождественности дисперсионных соотношений следует идентичность формального математического описания критериев неустойчивости. В частности, пороговые значения величины напряжённости электрического поля и намагниченности магнитной жидкости рассчитываются по схожим формулам.

3. Несмотря на сходство математического описания критериев неустойчивости, на физическом уровне понимания явления различаются в характере зависимости от управляющего параметра, который контролируется экспериментатором. В случае неустойчивости заряженной поверхности экспериментатор контролирует напряженность электрического поля. Увеличивая этот параметр, он всегда может привести систему в неустойчивое состояние. Для магнитной жидкости управляющим параметром является напряженность магнитного поля. Его увеличение сопровождается эффектом достижения насыщения по намагниченности. Если в состоянии насыщения намагниченность меньше критического значения, состояние неустойчивости не будет достигнуто ни при каком разумном значении управляющего параметра. Неустойчивость магнитной жидкости возможно, только если намагниченность насыщения оказывается больше, чем пороговое значение намагниченности, рассчитанное из математической модели.

4. Для установления причины различий в характере реализации рассмотренных неустойчивостей (диспергирование жидкости в одном случае и формирование устойчивых конусов в другом) необходим анализ более сложной нелинейной модели обоих явлений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов: в 10 т. Т.6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц. – Изд. 3-е, перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 736 с.
2. Милн-Томсон, Л. М. Теоретическая гидродинамика / Л. М. Милн-Томсон; пер. с англ. под ред. Н. Н. Моисеева. – М.: Мир, 1964. – 660 с.
3. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров: определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн; пер. с англ. под ред. И. Г. Арамановича. – Изд. 4-е. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 831 с.
4. Лаврентьев М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 416 с.
5. Ширяева С. О. Формулировка задач об аналитическом расчёте нелинейных движений вязкой жидкости со свободной поверхностью: препринт № 31 / С. О. Ширяева [и др.]. – Ярославль: ИМИ РАН, 2001. – 87 с.
6. Taylor, G. I. The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field / G. I. Taylor, A. D. McEwan // J. Fluid. Mech. – 1965. – Vol. 22, part 1. – P. 1-15.
7. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов: в 10 т. Т.8. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 624 с.
8. Найфэ, А. Х. Методы возмущений / А. Х. Найфэ; пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
9. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: в 5 т. Т. 3. Электричество / Д. В. Сивухин. – Изд. 2-е, испр. – М.: Наука, 1983. – 687 с.

10. Сретенский, Л. Н. Теория волновых движений жидкости / Л. Н. Сретенский. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 816 с.
11. Розенцвейг, Р. Феррогидродинамика / Р. Розенцвейг; пер. с англ. под ред. В. В. Гогосова. – М.: Мир, 1989. – 356 с.
12. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учеб. пособие для вузов: в 10 т. Т.2. Теория поля / Л. Д. Ландау, И. М. Лифшиц. – Изд. 6-е, испр. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 504 с.
13. Белоножко, Д. Ф. Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости: моногр. / Д. Ф. Белоножко, С. О. Ширяева, А. И. Григорьев; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 288 с.
14. Варгафтик, Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н. Б. Варгафтик. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 720 с.
15. Справочник по электротехническим материалам: в 3 т. Т. 1 / под ред. Ю. В. Корицкого [и др.] – Изд. 3-е, перераб. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 368 с.
16. Черняк, В. Г. Механика сплошных сред: учеб. пособие для вузов / В. Г. Черняк, П. Е. Суетин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 352 с.