1 Движение гравитационных волн на плоской поверхности идеальной несжимаемой жидкости

На поверхности абсолютно любой реальной жидкости, даже при отсутствии внешних воздействий на неё, всегда имеются некоторые волновые возмущения малой амплитуды. Они обусловлены тепловым движением молекул жидкости. В общем случае эти возмущения имеют довольно сложную конфигурацию.

Одним из основных и хорошо изученных методов исследования явления неустойчивости поверхностей жидкости является метод нормальных мод [?]. Он заключается в том, что сложное возмущение поверхности жидкости рассматривается как суперпозиция простейших плоских синусоидальных волн – мод, каждая из которых характеризуется заданной амплитудой и длиной (или волновым числом).

Ключевую роль в исследованиях неустойчивости при помощи метода нормальных мод играют дисперсионные уравнения, которые представляют собой соотношения, связывающие циклическую частоту волнового возмущения с его волновым числом. Исследование дисперсионного уравнения на определение действительных и мнимых областей значений позволяет определить диапазон стабильных и нестабильных во времени волновых возмущений соответственно [??, ??].

В данном разделе будет детально рассмотрена задача на получение дисперсионного уравнения для гравитационных волн малой амплитуды, распространяющихся на плоской поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Методику решения этой задачи и некоторые соотношения, которые возникнут в ходе дальнейших рассуждений, планируется использовать в последующих разделах для исследования условий возникновения неустойчивости поверхности ферромагнитной жидкости, помещённой во внешнее магнитное поле.

1.1 Постановка задачи

Пусть на поверхности бесконечно глубокого слоя идеальной несжимаемой жидкости с массовой плотностью распространяется периодическая плоская гравитационная волна с амплитудой и длиной волны . Вся система находится в поле силы тяжести с вектором ускорения свободного падения, равным . Также поверхность данной жидкости граничит с некоторой газообразной внешней средой (рисунок 1.1).

Пусть также рассматриваемые волновые возмущения малы. С математической точки зрения это условие означает, что амплитуда волны много меньше её длины: .

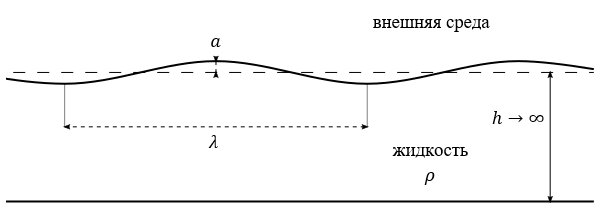


Рисунок 1.1. Условное изображение и параметры гравитационной волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости

Требуется получить дисперсионное уравнение для рассматриваемой волны.

1.2 Математическая формулировка задачи

Для упрощения задачи рассмотрим периодическую волну, распространяющуюся только в одном направлении. В этом случае удобно ввести двухмерную систему координат, где ось направлена вдоль горизонтальной невозмущённой поверхности жидкости, а ось – перпендикулярно этой поверхности. Вектор ускорения свободного падения пусть направлен противоположно оси (рисунок 1.2).

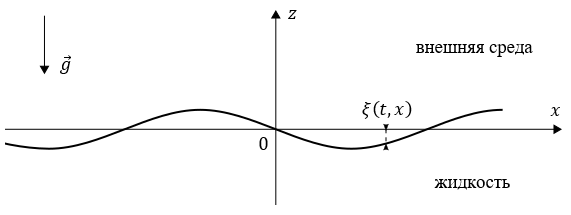


Рисунок 1.2. Направление осей и векторов в задаче

Введём функцию времени и координаты , описывающую вертикальное смещение частиц жидкости при волновых возмущениях от идеально плоской поверхности (рисунок 1.2) [1]:

С учётом введённой системы координат, зададим уравнения и граничные условия, которые будут составлять математическую формулировку задачи.

*Уравнение несжимаемости:*

По условию задачи рассматриваемая жидкость является несжимаемой. Это означает, что её плотность сохраняется в каждой точке объёма в любой момент времени, то есть: .

Тогда из уравнения непрерывности, выражающего закон сохранения массы вещества в объёме [1]:

где – вектор скорости в момент времени в определённой точке жидкости, следует первое уравнение математической формулировки задачи, известное как уравнение несжимаемости идеальной жидкости [1]:

*Уравнение Эйлера:*

В качестве следующего уравнения задачи следует принять основное уравнение гидродинамики идеальной жидкости (известное также как уравнение Эйлера), которое имеет следующий вид [1]:

где – давление жидкости в момент времени в определённой её точке.

В уравнении (1.4) учтено действие гравитационных сил на жидкость путём добавления вектора ускорения свободного падения к правой части этого уравнения.

*Кинематическое граничное условие:*

Частица жидкости, находящаяся на поверхности движется вместе с этой поверхностью при волновых возмущениях и не уходит вглубь жидкости [2]. Поэтому для координаты частицы на поверхности будет выполняться следующее условие [2]:

Дифференцируя условие (1.5) по времени, получим первое граничное условие, которое называется кинематическим [2]:

где и – компоненты вектора скорости вдоль соответствующих осей координат.

*Условие для компонент скорости жидкости на бесконечности:*

По условию данной задачи, рассматриваемые волновые возмущения являются малыми. Это означает, что скорость движения жидкости быстро замедляется с ростом глубины:

Условия на боковых краях жидкого слоя задавать не будем, так как поверхность жидкости считаем неограниченной в плоскости, перпендикулярной оси .

*Условие баланса давлений на поверхности жидкости:*

На границе жидкость – внешняя среда, задаваемой уравнением , должно выполняться требование непрерывности давления. Следовательно, граничное условие будет иметь вид [2]:

где – давление внешней среды.

1.3 Приближение безвихревого движения жидкости

Решить систему уравнений (1.3) – (1.4) с граничными условиями (1.6) – (1.8) аналитически невозможно ввиду её чрезмерной сложности. Поэтому применим следующее упрощение – будем считать, что жидкость течёт равномерно, без завихрений. Такое упрощение называется приближением безвихревого движения.

Математически безвихревое (или потенциальное) движение означает, что в каждой точке объёма жидкости ротор скорости равен нулю [1]:

Несложно показать, что соотношение (1.9) будет также справедливо, если представить вектор скорости в виде градиента некоторой скалярной величины , называемой гидродинамическим потенциалом (потенциалом скорости) [1]:

где – функция времени и координат. Перепишем математическую формулировку рассматриваемой задачи (1.3) – (1.4) в приближении безвихревого движения жидкости с учётом представленных выражений.

*Уравнение несжимаемости:*

Перейдём в уравнении (1.3) от векторной переменной к скалярной переменной . Для этого в данное уравнение совершим подстановку соотношения (1.10), в результате чего будет получено уравнение Лапласа:

Уравнение (1.11) – это уравнение несжимаемости идеальной жидкости, полученное в результате приближения безвихревого движения жидкости.

*Условие баланса давлений на поверхности жидкости:*

Получим новый вид условия непрерывности давления на поверхности жидкости (1.8), используя уравнение Эйлера (1.4), предварительно преобразовав его в рамках приближения безвихревого движения жидкости. Для проведения данного преобразования воспользуемся следующим соотношением, известным из векторного анализа [3]:

Данное соотношение может быть упрощено путём исключения слагаемого с векторным произведением согласно выражению (1.9):

Также заметим, что вектор можно представить следующим образом:

Тогда уравнение (1.4) при замене соответствующих слагаемых на выражения (1.13) и (1.14) и переходе к гидродинамическому потенциалу через выражение (1.10) преобразуется к новому виду:

Согласно теореме о градиенте [3], криволинейный интеграл вдоль любой кривой от градиента скалярного поля равен разности значений поля в граничных точках и кривой :

Тогда интегрирование уравнения (1.15) по произвольной кривой внутри жидкости в любой момент времени, даёт следующее соотношение:

где индексы и обозначают значения величин в соответствующих точках жидкости.

Так как кривая – произвольная, то выражение в скобках в соотношении (1.17) не зависит от координат и является постоянной величиной для всех точек объёма жидкости в фиксированный момент времени. Но эта величина может принимать различные значения в различные моменты времени:

где – произвольная функция времени, представляющая собой известный интеграл Коши-Лагранжа [4] – интеграл движения идеальной жидкости в случае потенциальных течений. Выразим из него давление жидкости:

Из (1.19) следует, что величина имеет размерность давления. Она может быть найдена, если рассмотреть случай, когда на поверхности слоя жидкости отсутствует волновое движение, то есть тогда, когда , и . Подставляя при этом давление (1.19) в условие (1.8) находим:

Искомое граничное условие задачи определяется условием (1.8) с учётом (1.19) и (1.20):

*Кинематическое граничное условие:*

Как следует из выражения (1.10), компоненты вектора градиента будут представлять собой проекции скоростей жидкости на соответствующие направления. Тогда кинематическое граничное условие (1.6), исключая переменные и , будет выражено только через функцию и гидродинамический потенциал:

*Условие для гидродинамического потенциала на бесконечности:*

С учётом (1.11) условие (1.7) также может быть представлено только через функцию :

Необходимо отметить, что в результате применения приближения безвихревого движения жидкости путём введения гидродинамического потенциала (1.10), прежняя математическая формулировка задачи была значительно упрощена. Во-первых, уменьшилось число неизвестных: вместо четырёх – , , и остались только два – и . Во-вторых, все выражения теперь содержат только скалярные величины (убралась векторная величина скорости ).

1.4 Линеаризация математической формулировки задачи

Несмотря на существенное упрощение математической формулировки задачи путём рассмотрения её в приближении безвихревого движения жидкости, данная задача по-прежнему остаётся аналитически неразрешимой.

Такая ситуация связана со следующими трудностями. Одна из них – это нелинейный вид граничных условий задачи. Проблема состоит в том, что на данный момент в теории дифференциальных уравнений нет универсального метода решения нелинейных систем. Вторая проблема заключается в том, что рассматриваемые граничные условия заданы на поверхности жидкости сложной формы, изменяющейся с течением времени. Данная проблема аналогична предыдущей и заключается в том, что в методах математической физики отсутствуют способы решения задач с границей сложного вида. В таком случае следует применить ещё один математический приём, известный как линеаризация [?].

Линеаризация – это метод преобразования нелинейных математических выражений, в результате применения которого данные выражения будут содержать только слагаемые в первой степени. Процедура линеаризации проводится в два этапа:

1. Исключение нелинейных слагаемых из выражений математической формулировки задачи.

2. Снесение граничных условий на невозмущённую поверхность жидкости.

*Исключение нелинейных слагаемых из математической формулировки задачи:*

Задача данного этапа линеаризации – оставить в уравнениях и граничных условиях только слагаемые до первого порядка малости включительно.

В рассматриваемой задаче процедуру линеаризации следует проводить по малому параметру, представляющему собой отношение амплитуды волнового движения жидкости к длине волны: . Тогда неизвестные функции, связанные с волновым движением на поверхности, могут быть представлены в виде следующих разложений [5, 8]:

где и – соответствующие функции первого порядка малости, пропорциональные параметру ; и – соответствующие функции второго порядка малости, пропорциональные ; и т. д.

Отметим, что произведение малых величин даст величину с порядком малости, равным сумме порядков каждого из множителей, поэтому любые произведения таких величин можно исключить.

*Снесение граничных условий на невозмущённую поверхность жидкости:*

На данном этапе происходит переформулировка (с некоторой степенью точности) граничных условий, заданных на сложной поверхности , для поверхности , представляющей собой ровную плоскость (невозмущённая поверхность).

Для снесения граничных условий (1.21) и (1.22) на невозмущённую поверхность необходимо разложить в ряд Маклорена входящие в них неизвестные величины, являющиеся функциями координаты , а затем оставить только линейные слагаемые [1]. В данном случае такой величиной является гидродинамический потенциал:

Проведя всю представленную выше процедуру линеаризации, условие баланса давления на поверхности жидкости (1.21) и кинематическое граничное условие (1.22) окажутся заданными на плоскости :

*Математическая формулировка задачи:*

Итак, уравнение (1.11) и граничные условия (1.23), (1.28) и (1.29) составляют линеаризованную математическую формулировку задачи о движении плоской периодической гравитационной волны на поверхности идеальной несжимаемой бесконечно глубокой жидкости. В таблице 1 представлен её итоговый вид.

Таблица 1

Линеаризованная математическая формулировка задачи

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Формула | Область определения | Номер формулы в тексте |
| Уравнения | | |
|  |  | 1.11 |
| Граничные условия | | |
|  |  | 1.28 |
|  | 1.29 |
|  |  | 1.23 |

Для более короткой записи в таблице 1 и далее в этом разделе индексы, отображающие порядок малости, скрыты.

1.5 Решение задачи и получение дисперсионного уравнения

Линеаризованная задача (см. таблицу 1) может быть решена аналитически путём задания определённого вида для неизвестных функций, в результате чего она сводится к простой системе линейных уравнений. В данной задаче неизвестные функции – закон изменения свободной поверхности и гидродинамический потенциал – могут быть определены в виде бегущей волны [1, ?]:

где – амплитуда волны, заданная в условии задачи, – циклическая частота волны, – модуль волнового вектора;

где – некоторая функция, учитывающая зависимость гидродинамического потенциала от координаты . Такое представление корректно, поскольку обе эти величины непосредственно связаны с волновым движением жидкости.

На самом деле величины и описываются только их действительной частью от функций (1.30) и (1.31) соответственно. Однако мы будем использовать запись в виде показательной функции комплексной переменной, так как это более удобно для выполнения математических преобразований.

Уравнение несжимаемости (1.11) для функции (1.31) будет иметь следующий вид:

где и – произвольные константы. В соответствии с условием для гидродинамического потенциала на бесконечности (1.23) необходимо занулить коэффициент . Таким образом получим:

Теперь несложно записать систему линейных уравнений, которую будут составлять граничные условия (1.28) и (1.29) с учётом (1.30) и (1.31):

В линейной алгебре доказывается [3], что система, состоящая из однородных линейных уравнений, имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен нулю. Так как система (1.34) однородна, то критерием существования ненулевых решений будет следующее соотношение:

которое и является искомым дисперсионным уравнением [1], поскольку связывает циклическую частоту волны с её волновым числом.

1.6 Выводы из решения задачи

В данном разделе была подробно разобрана методика получения дисперсионного уравнения для волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, которая понадобится для исследования неустойчивости поверхности магнитной жидкости в следующем разделе.

Для обеспечения возможности аналитического решения текущей задачи мы были вынуждены применить следующие упрощения – приближение безвихревого движения жидкости, а также процедуру линеаризации уравнений и граничных условий задачи. Тоже самое будет производиться и во всех последующих разделах.

Заметим, что рассмотрение одной единственной плоской периодической волны позволяет получить решение для волнового движения сложной конфигурации на поверхности жидкости. Как уже говорилось выше, это следует из того, что эти возмущения могут быть представлены суперпозицией простейших периодических волн с бесконечным спектром волновых чисел.