**2 Исследование неустойчивости поверхности магнитной жидкости во внешнем однородном ортогональном магнитном поле**

Магнитная жидкость – это искусственный материал, представляющий собой коллоидный раствор, получаемый диспергированием в определённой жидкой среде (вода и другие органические растворители) магнитных наночастиц ультрамикроскопического размера, покрытых поверхностно-активным веществом (ПАВ) с целью стабилизации дисперсной системы [1, 16].

Под магнитными наночастицами подразумеваются однодоменные частицы ферромагнетика или ферримагнетика со средним диаметром около 10 нм, в качестве которого обычно выступают следующие материалы – магнетит (FeO⋅Fe2O3), γ-Fe­2O3, гексаферриты MFe12O19, где M = Ba, Sr или Pb, кобальт (Co), а также ферриты-шпинели MFe2O4, где M = Mn, Co, Zn, Cu или Ni [3, 4, 17].

Магнитный коллоид должен быть стабилен во времени, что означает отсутствие процесса выпадения магнитных частиц в осадок. Измельчение ферромагнетиков до частиц нанометрового размера обеспечивает седиментационную устойчивость коллоидной системы, поскольку частицы такого диаметра подвергаются броуновскому движению в жидкой основе, которое препятствует их оседанию в гравитационном поле [2, 16]. С другой стороны, магнитные частицы на очень близких расстояниях друг от друга начинают испытывать притяжение за счёт сил ван-дер-ваальса и взаимодействия магнитных моментов. В результате слипания частиц образуется более крупный и массивный агрегат, который под действием силы тяготения осядет на дно. Поэтому для обеспечения агрегативной устойчивости коллоида в процессе приготовления магнитной жидкости применяются ПАВ, длинные молекулы которых покрывают поверхность каждой частицы, образуя защитный адсорбционный слой, препятствующий их сближению на близкое расстояние (стерическое отталкивание) [4, 16]. В качестве ПАВ при производстве магнитных жидкостей может применяться вода, органические растворители (гептан, толуол, ксилол, метилэтилкетон), сложные эфиры и др. [17].

С физической точки зрения, ферромагнитная жидкость ведёт себя аналогично молекулам парамагнитного газа. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные частицы, каждая из которых имеет определённо направленный магнитный момент, ориентированы хаотично, поэтому макроскопическая намагниченность магнитной жидкости равна нулю. По мере увеличения напряжённости поля, магнитные моменты частиц стремятся выстроиться вдоль линий напряжённости. В слабых полях этому процессу мешает тепловое движение молекул жидкой основы, но в достаточно сильных полях частицы полностью упорядочены, их магнитные моменты направлены параллельно магнитному полю и намагниченность магнитной жидкости достигает насыщения [1, 2].

В данном разделе будет рассмотрено явление неустойчивости поверхности намагничивающейся жидкости, граничащей с немагнитной газообразной внешней средой, под воздействием внешнего однородного магнитного поля, направленного перпендикулярно поверхности. Данное явление заключается в возникновении упорядоченной структуры из острых конусообразных пиков конечной высоты (так называемого «ежа») на границе раздела сред, которые направлены вершинами в сторону внешней среды. Экспериментально этот эффект наблюдается при превышении определённого критического значения напряжённости внешнего магнитного поля [1, 4], что было подтверждено Каули и Розенцвейгом в 1967 году [7].

Необходимо также отметить, что реализация подобных условий на практике достаточно проста и заключается в расположении сосуда с исследуемой магнитной жидкостью между полюсами электромагнита, где создаётся однородное магнитное поле.

**2.1 Постановка задачи**

Рассмотрим слой магнитной жидкости, на поверхности которого распространяется периодическая плоская гравитационно-капиллярная волна с амплитудой и длиной волны , для которой выполняется условие . Пусть магнитная жидкость обладает свойствами идеальной несжимаемой жидкости и характеризуется массовой плотностью , коэффициентом поверхностного натяжения и магнитной проницаемостью (рисунок 2.1).

Вся система находится во внешнем однородном, ортогональном невозмущённой поверхности, магнитном поле с вектором напряжённости . Поверхность жидкости граничит с немагнитной внешней средой, обладающей магнитной проницаемостью (рисунок 2.1).

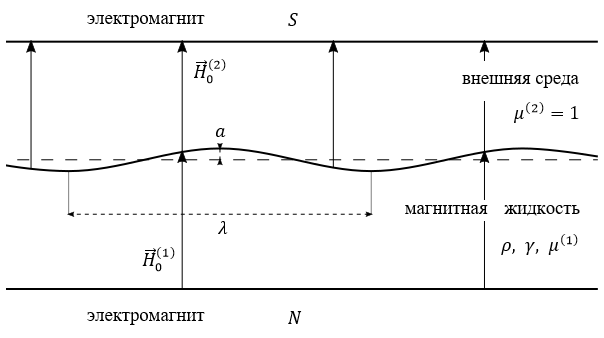


Рисунок 2.1 – Конфигурация задачи

Требуется получить дисперсионное уравнение для рассматриваемого волнового возмущения и на его основе вывести критерий неустойчивости поверхности слоя магнитной жидкости.

**2.2 Потенциал магнитного поля**

Прежде чем определить уравнения и граничные условия задачи применим упрощение, аналогичное приближению безвихревого движения жидкости (см. формулу (1.10)), а именно, пусть напряжённость магнитного поля определяется некоторой скалярной величиной , называемой потенциалом магнитного поля [1]:

где – функция времени и координат. Такое допущение корректно для рассматриваемой задачи, поскольку теорема о циркуляции магнитного поля (одно из системы уравнений Максвелла) [18, 19] в отсутствие токов и электрических полей имеет вид

Также как и в случае с гидродинамическим потенциалом (1.10), это позволет значительно упростить задачу, так как происходит замена векторной величины скалярной функцией.

Также заметим, что распространение волны вносит изменения в распределение потенциала магнитного поля (2.1) вблизи поверхности жидкости, причём это изменение уменьшается с увеличением расстояния от поверхности. Так как по условию задачи волновые возмущения малы, то искажения потенциала также будут незначительными. Следовательно, к данной задаче применимы методы теории возмущений [14].

Согласно теории возмущений [14], потенциал магнитного поля можно представить в виде суперпозиции

где – потенциал магнитного поля вблизи невозмущённой поверхности жидкости, – малая поправка, учитывающая изменение потенциала вблизи поверхности при распространении волны. Тогда согласно (2.1) суперпозиция (2.3) также справедлива и для напряжённсоти магнитного поля:

где – напряжённость магнитного поля вблизи невозмущенной поверхности жидкости, – малая поправка, учитывающая искажение поля при распространении волны.

**2.3 Давление магнитного поля на поверхность магнитной жидкости**

Получим формулу для давления магнитного поля на поверхность магнитной жидкости в случае, когда это поле ортогонально поверхности.

Пусть для начала на поверхности отсутствуют какие-либо волновые возмущения, т.е. поверхность является идеально гладкой. Воспользуемся магнитной составляющей максвелловского тензора напряжений [1, 20]

где – магнитная проницаемость некоторой среды, – вектор напряжённости внешнего магнитного поля, – диадное произведение векторов (тензорное произведение вектора-столбца на вектор строку), – символ Кронекера.

Сила, действующая на единицу площади, может быть вычислена путём скалярного умножения вектора нормали к поверхности (рисунок 5.2) на тензор (2.5) [1]:

Снова скалярно умножим выражение (2.6) на отрицательный вектор нормали, чтобы получить нормальную компоненту поверхностной плотности силы, т.е. давление (верхний индекс указывает, что двление происходит со стороны среды с магнитной проницаемостью , нижний индекс указывает, что давление оказывает магнитное поле):

После несложных преобразований легко увидеть, что первое слагаемое в скобках в (2.7) будет равно . Тогда давление будет выражаться более простой формулой [4, 21]

где знак минус указывает, что воздействие оказывается против вектора нормали к поверхности.

Воспользуемся формулой (2.8) для определения суммарного давления на поверхность магнитной жидкости. Суммарное давление вычисляется как разность давления на поверхность со стороны магнитной жидкости и давления со стороны внешней среды :

где и ­– напряжённости магнитного поля в магнитной жидкости и во внешней среде соответственно.

В электродинамике сплошных сред [18] доказывается непрерывность нормальных компонент индукций магнитного поля на границе раздела двух сред:

где индекс обозначает нормальные составляющие векторов. Из данного граничного условия следует, что когда выполняется соотношение . Учитывая, что тангенциальные компоненты равны нулю, модули напряжённостей будут подчиняться соотношению , что в свою очередь подтверждает правильность знака в выражении для давления (2.9).

Таким образом, в случае гладкой горизонтальной поверхности и ортогонального к ней внешнего магнитного поля суммарное давление направлено в сторону среды с меньшей магнитной проницаемостью, т.е. со стороны магнитной жидкости давление на границу выше (рисунок 2.2).

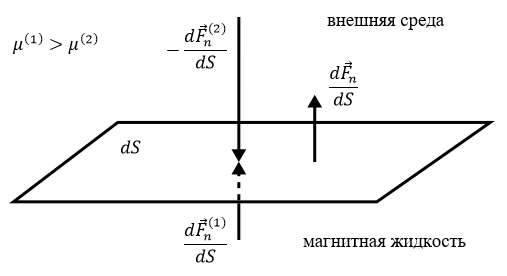


Рисунок 2.2 – Направления сил давления, действующих на элементарный участок поверхности магнитной жидкости

Теперь обобщим формулу (2.9) для возмущённой поверхности, заменив на суперпозицию (2.4) и оставив только слагаемые до 1 порядка малости включительно:

где слагаемые представлены выражениями

где – давление магнитного поля на невозмущённую поверхность, – малая поправка, учитывающая искажение давления магнитного поля при распространении волны.

**2.4 Поверхностное давление жидкости**

Если участок поверхности раздела двух сред искривлён, то вблизи него давления в обеих средах различны. Разность этих давлений называется поверхностным давлением [8]. В данной задаче необходимо его учитывать, поскольку по условию рассматривается гравитационно-капиллярная волна.

Поверхностное давление для жидкости может быть вычислено по известной в гидродинамике формуле Лапласа [8, 9]

где – давление жидкости, – атмосферное давление, и – главные радиусы кривизны в данной точке поверхности жидкости в двух взаимно ортогональных направлениях, – средняя кривизна поверхности [1], представленная выражением

Заметим, что существует альтернативное выражение [1] для средней кривизны поверхности, которое в отличие от (2.14) более удобно для использования в данной задаче, а именно

где – единичный вектор нормали к поверхности жидкости.

Если возмущённая поверхность задаётя функцией (см. уравнение (1.1)), то вектор нормали может быть вычислен следующим образом [1]:

где и – орты соответствующих координатных осей. Тогда поверхностное давление (2.13) с учётом (2.15) и (2.16) в линеаризованном виде будет представлено формулой

которая и будет использована при решении задачи.

**2.5 Математическая формулировка задачи**

Введём двумерную систему координат, аналогичную той, которая была использована в разделе 1 (рисунок 1.2). Направление вектора ускорения свободного падения оставим неизменным.

Закон изменения свободной поверхности жидкости по-прежнему будем описывать функцией , заданной соотношением (1.1). Опираясь на результаты решения задачи о движении гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости из раздела 1, составим математическую формулировку текущей задачи.

**2.5.1 Уравнение несжимаемости**

Поскольку магнитная жидкость по условию задачи является несжимаемой, уравнение (1.11) здесь также будет справедливо:

**2.5.2 Уравнения Лапласа для потенциалов магнитного поля**

Запишем закон Гаусса [18, 19] для магнитного поля (одно из системы уравнений Максвелла) в магнитной жидкости и во внешней среде, учитывая, что рассматриваемые среды изотропны:

С учётом потенциала магнитного поля (2.1) и суперпозиции (2.3) в уравнения (2.19) примут вид

где и – потенциалы магнитного поля в магнитной жидкости и внешней среде соответственно. Также для удобства уравнения заданы относительно невозмущённой поверхности жидкости .

**2.5.3 Условие баланса давлений на поверхности жидкости**

Условие непрерывности давления на границе раздела магнитная жидкость - внешняя среда теперь будет представлено выражением

где – поверхностное давление, – давление магнитного поля.

Выражение для давления (1.19), полученное в предыдущем разделе, также может быть применено в рассматриваемой задаче:

где может быть определено из условия отсутствия волновых возмущений при подстановке (2.22) в граничное условие (2.21):

Теперь граничное условие (2.21) с учётом соотношений (2.22) и (2.23) будет иметь вид

где задаётся формулой (2.17), а – формулой (2.12). Перепишем его в линеаризованном виде

Напряжённости магнитных полей в (2.25) представлены через потенциалы магнитного поля (см. соотношение (2.1)).

**2.5.4 Кинематическое граничное условие**

Воспользуемся линеаризованным кинематическим граничным условием (1.29)

**2.5.5 Условие непрерывности тангенциальной компоненты вектора напряжённости магнитного поля на границе раздела сред**

Следующее граничное условие следует из непрерывности тангенциальных компонент напряжённостей магнитных полей на границе раздела сред [18]

где индекс обозначает тангенциальные составляющие векторов.

Учитывая ортогональность системы координат, граничное условие (2.27) эквивалентно можно записать в виде векторного произведения [1]

где – единичный вектор нормали к поверхности жидкости. Воспользуемся вектором нормали (2.16) для вычисления векторного произведения (2.28). В результате, оставив только линейные слагаемые, получим

где и – проекции векторов напряжённостей магнитного поля на ось в соответствующих средах. Запишем это граничное условие в итоговом виде через потенциалы магнитного поля (см. соотношение (2.1)) со снесением его на невозмущённую границу :

**2.5.6 Условие непрерывности нормальной компоненты вектора индукции магнитного поля на границе раздела сред**

Воспользуемся граничным условием (2.10), которое эквивалентно может быть записано как

где – единичный вектор нормали к поверхности жидкости. С учётом вектора нормали (2.16) и отбрасывания нелинейных слагаемых условие (2.31) преобразуется к виду

где и – проекции векторов индукции магнитного поля на ось в соответствующих средах, или к преопределённому через потенциалы магнитного поля (см. соотношение (2.1)) с использованием материальных уравнений для изотропных сред [18, 19] граничному условию

где уже проведена процедра снесения его на поверхность .

**2.5.7 Условие для гидродинамического потенциала на бесконечности**

Условие (1.23), полученное в разделе 1, остается без изменений:

**2.5.8 Условия для потенциалов магнитного поля на бесконечности**

В подразделе 2.2 было отмечено, что поправка к напряжённости магнитного поля , возникающая вследствие распространения волновых возмущений, должна обращаться в нуль при удалении на бесконечно большое расстояние от поверхности магнитной жидкости, следовательно

или, представив через скалярные переменные,

**2.5.9 Материальные уравнения**

В дальнейшем при анализе устойчивости поверхности магнитной жидкости существенную роль будет играть такая её характеристика, как намагниченность. Следовательно, необходимо задать соотношения, которые позволят переопределить напряжённость магнитного поля через намагниченность магнитной жидкости. Эти соотношения назовём материальными уравнениями.

Из электродинамики известно выражение, связывающее вектор индукции магнитного поля в некоторой среде с её намагниченностью [18]. В условиях рассматриваемой задачи необходимо записать два таких выражения – для магнитной жидкости и для внешней среды, которая считается немагнитной:

где – вектор намагниченности магнитной жидкости. Так как намагниченность является характеристикой всего объёма магнитной жидкости, то малыми поправками к напряжённости и индукции магнитного поля можно пренебречь:

Соотношения (2.38) есть искомые материальные уравнения.

**2.5.10 Математическая формулировка задачи**

В таблице 2 представлена итоговая математическая формулировка рассматриваемой задачи.

Таблица 2 – Линеаризованная математическая формулировка задачи

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Формула | Область определения | Номер формулы в тексте |
| уравнения | | |
|  |  | 2.18 |
|  | 2.20 |
|  |  | 2.20 |

Продолжение таблицы 2

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| граничные условия | | |
|  |  | 2.25 |
|  | 2.26 |
|  | 2.30 |
|  | 2.33 |
|  |  | 2.34 |
|  | 2.36 |
|  |  | 2.36 |
| материальные уравнения | | |
|  | – | 2.38 |
|  | – | 2.38 |

Для более короткой записи в таблице 2 и далее в этом разделе индексы, отображающие порядок малости, скрыты.

**2.6 Решение задачи и получение дисперсионного уравнения**

Пусть величины и в данной задаче также задаются соотношениями (1.30) и (1.31), так как геометрия этих двух задач остаётся одинаковой. Тогда функции потенциалов магнитного поля (поправки к потенциалам) также должны иметь вид простейших периодических функций:

где и – некоторые функции, учитывающие зависимость потенциалов магнитного поля от координаты , которые могут быть найдены при подстановке в соответствующие уравнения (2.19) с учётом условий на бесконечности (2.36). Тогда получим

где и – произвольные константы.

Теперь на основе граничных условий (2.25), (2.26), (2.30) и (2.33) с учётом функций (1.30), (1.33) и (2.40) может быть составлена система линейных однородных уравнений:

Приравнивание нулю определителя данной системы приводит к дисперсионному уравнению для рассматриваемого волнового возмущения

Однако использование полученного соотношения в качестве конечного варианта дисперсионного уравнения для анализа неустойчивости поверхности магнитной жидкости не совсем корректно. Необходимо учесть, что магнитная жидкость обладает намагниченностью, характеризующей интенсивность поляризации ферромагнитного вещества, из которого она изготовлена, и зависящей от приложенного внешнего магнитного поля. Для этого воспользуемся материальными уравнениями (2.38), где вычитание второго уравнения из первого даёт простое соотношение

Теперь дисперсионное уравнение (2.42) может быть окончательно перезаписано через намагниченность магнитной жидкости:

В полученном соотношении первое слагаемое совпадает с дисперсионным уравнением для гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости (1.35). Второе слагаемое учитывает поверхностное давление, обусловленное поверхностным натяжением жидкости. А третье слагаемое отвечает за давление магнитного поля на поверхность магнитной жидкости.

**2.7 Исследование неустойчивости поверхности**

Воспользуемся дисперсионным уравнением для получения критерия неустойчивости поверхности магнитной жидкости, помещённой во ортогональное её поверхности магнитное поле. Под критерием неустойчивости понимается некоторое минимальное значение модуля намагниченности магнитной жидкости, начиная с которого возникает нарушение равновесного состояния поверхности.

Для удобства дальнейшего анализа представим дисперсионное уравнение (2.44) через безразмерные параметры следующим образом:

где – безразмерное волновое число, – безразмерный параметр, представляющий собой величину, пропорциональную отношению давления магнитного поля на поверхность к поверхностному давлению. Данные величины представлены следующими соотношениями:

где – капиллярная постоянная [8], и

В зависимости от величины в уравнении (2.45) циклическая частота может быть как действительной, так и мнимой. Покажем, что оба случая определяют области устойчивости и неустойчивости поверхности магнитной жидкости соответственно.

**2.7.1 Область устойчивости**

Предположим, что – действительная величина. Тогда функция , определяемая соотношением (1.30), по-прежнему будет описывать периодическую плоскую волну на поверхности рассматриваемой жидкости:

где верхний индекс указывает на стабильные волновые возмущения. В записи данного выражения заключены две одинаковые бегущие волны, распространяющиеся во встречном направлении: знак «+» соответствует волне, распространяющейся вдоль оси , а знак «−» – волне, бегущей в противоположном направлении.

Таким образом, случай действительной циклической частоты соответствует области устойчивости поверхности магнитной жидкости, которая определяется неравенством

вытекающим непосредственно из дисперсионного уравнения (2.45).

С физической точки зрения, как следует из определения параметра (см. соотношение (2.47)) и неравенства (), устойчивое состояние поверхности соответствует ситуации, когда величина поверхностного давления с точностью до множителя превышает величину давления магнитного поля на эту поверхность.

**2.7.2 Область неустойчивости**

Пусть теперь – мнимая величина. В этом случае функция (1.30) примет вид

где заключены две одинаковые непериодические волны: амплитуда одной из них экспоненциально возрастает с временным инкрементом , а другой – экспоненциально убывает с декрементом . Следует также отметить, что убывающая волна через некоторое время полностью затухнет и на поверхности жидкости останется только нарастающее возмущение.

В случае мнимой циклической частоты область неустойчивости, как следует из дисперсионного уравнения (2.45), выражается неравенством вида

Следовательно, с физической точки зрения неустойчивость поверхности магнитной жидкости возникает тогда, когда поверхностное давление совместно с влиянием поля силы тяжести уже не могут уравновесить давление магнитного поля.

**2.7.3 Критерий неустойчивости**

Граница, разделяющая области устойчивости и неустойчивости поверхности, как следует из неравенств (2.49) и (2.51), задаётся уравнением

Графическое построение данного уравнения на плоскости безразмерных параметров представлено на рисунке 2.3, откуда следует, что минимум построенной функции характеризуется параметрами и . Это значит, что если величина превышает , то состояние поверхности попадает в область неустойчивости. Следовательно, критерий неустойчивости может быть записан как

или в пересчёте на модуль намагниченности магнитной жидкости в соответствии с выражением (2.47),

где – критическое значение намагниченности магнитной жидкости.

Как следует из рассмотрения графика на рисунке 2.3, при малейшем превышении критического значения модуля намагниченности возникает неустойчивость поверхности жидкости. Она обусловлена дестабилизацией моды, длина которой соответствует величине и определяется, согласно (2.46), выражением

где – длина волны самой неустойчивой волновой моды.



область неустойчивости

область устойчивости

Рисунок 2.3 – Графическая зависимость параметра от безразмерного волнового числа

Поскольку магнитная жидкость является суперпарамагнетиком, то её намагниченность может быть приближённо описана известной в теории магнетизма функцией Ланжевена [2, 4]. Следовательно, при непрерывном увеличении напряжённости магнитного поля происходит увеличение намагниченности, выходящее на насыщение (рисунок 2.4).

В зависимости от величины намагниченности насыщения можно выделить два типа магнитных жидкостей.

К первому типу относятся такие магнитные жидкости, для которых числовое значение намагниченности насыщения меньше критического значения намагниченности: . У таких жидкостей поверхностный слой всегда стабилен при любом значении напряжённости магнитного поля и каждая мода существующего спектра волновых возмущений на нём будет описываться периодической зависимостью (2.48).

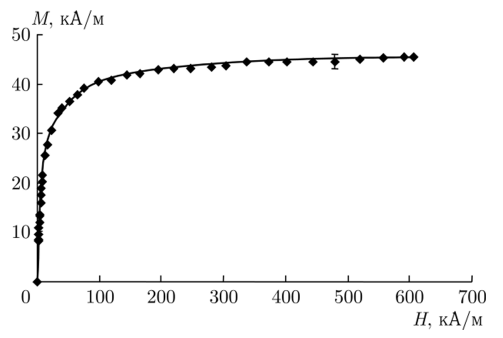


Рисунок 2.4 – Экспериментальная кривая намагничивания некоторой ферромагнитной жидкости [4]

Ко второму типу магнитных жидкостей относятся те, у которых числовое значение намагниченности насыщения превышает критическое значение намагниченности: . В этом случае неустойчивость поверхности может быть реализована при превышении критического значения напряжённости магнитного поля (намагниченности). Дальнейшее увеличение напряжённости сверх критического значения будет расширять спектр неустойчивых мод, что следует из графика на рисунке 2.3.

**2.8 Выводы из решения задачи**

В данном разделе было показано, каким образом дисперсионное уравнение для поверхностных волн позволяет определить условия возникновения неустойчивости поверхности магнитной жидкости, находящейся во внешнем однородном ортогональном магнитном поле.

Выяснено, что с физической точки зрения поверхностный слой магнитной жидкости переходит в неустойчивое состояние в случае, когда давление магнитного поля превышает поверхностное давление на границу раздела с точностью до определённого множителя.

На практике неустойчивость поверхности реализуется при превышении некоторого критического значения модуля намагниченности магнитной жидкости (или соответствующего ему критического значения напряжённости магнитного поля), которое может быть достигнуто путём непрерывного увеличения силы тока, подаваемого на полюса электромагнита, между которыми располагается ёмкость с ферромагнитной жидкостью. При воздействии критической величины магнитного поля возникает дестабилизация самой неустойчивой моды, длина которой определяется свойствами магнитной жидкости. Дальнейшее увеличение намагниченности расширяет спектр неустойчивых мод, причём это расширение идёт быстрее в сторону более коротких волн.

Также показано, что дестабилизация поверхности магнитной жидкости наблюдается только тогда, когда намагниченность насыщения, характерная для данной жидкости, больше расчётного критического значения намагниченности. В противном случае поверхность будет стабильна даже при бесконечно большом увеличении напряжённости внешнего магнитного поля. Именно поэтому проведение анализа дисперсионного уравнения с учётом намагниченности является более корректным по сравнению расчётом, когда за основу критерия неустойчивости берется только напряжённость магнитного поля.

Необходимо также разъяснить ещё одно противоречие между полученными выше теоретическими результатами и экспериментальным наблюдением неустойчивости. На практике конусообразные пики на дестабилизированной поверхности ферромагнитной жидкости имеют конечную высоту [1, 4]. Однако полученные результаты описывают экспоненциальный рост амплитуд неустойчивых мод с течением времени. Это может быть объяснено тем, что в задаче рассматривались только линейные слагаемые с целью возможности проведения аналитического решения задачи. Учёт нелинейных слагаемых позволил бы более подробно описать процесс развития неустойчивости поверхности. Однако решение нелинейной задачи выходит за рамки данного исследования.