2 Исследование неустойчивости поверхности магнитной жидкости во внешнем однородном ортогональном магнитном поле

Магнитная жидкость представляет собой коллоидный раствор, получаемый диспергированием в определённой жидкой среде (вода и другие органические растворители) магнитных частиц ультрамикроскопического размера, покрытых поверхностно-активным веществом (ПАВ) с целью стабилизации дисперсной системы.

Под магнитными частицами подразумеваются однодоменные частицы ферромагнетика размером от 1 до 100 нм, в качестве которого чаще всего выступают следующие материалы – магнетит (FeO⋅Fe2O3), кобальт (Co) и никель (Ni).

Магнитный коллоид должен быть стабилен во времени, что означает отсутствие выпадения частиц в осадок. Во-первых, в нанометровом диапазоне размеров ферромагнитные частицы подвергаются броуновскому движению в жидкой основе, которое препятствует их оседанию в гравитационном поле. Именно поэтому и возникает необходимость использования частиц такого малого размера. Во-вторых, магнитные частицы на очень близких расстояниях друг от друга начинают испытывать притяжение за счёт сил ван-дер-ваальса и взаимодействия магнитных моментов. В результате слипания частиц образуется более крупный и массивный агрегат, который под действием силы тяготения осядет на дно. Поэтому в процессе приготовления магнитной жидкости применяются ПАВ, длинные молекулы которых покрывают поверхность каждой частицы, образуя защитный адсорбционный слой, препятствующий их сближению на близкое расстояние. В качестве ПАВ при производстве магнитных жидкостей наиболее часто применяется олеиновая кислота, а также полиизобутиленовый эфир янтарной кислоты и другие.

С физической точки зрения, ферромагнитная жидкость ведёт себя аналогично молекулам парамагнитного газа. В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные частицы, каждая из которых имеет определённо направленный магнитный момент, ориентированы хаотично, поэтому весь объём магнитной жидкости имеет нулевую намагниченность. По мере увеличения напряжённости поля, магнитные моменты частиц стремятся выстроиться вдоль линий напряжённости. В слабых полях этому процессу мешает тепловое движение молекул жидкой основы, но в сильных полях частицы полностью упорядочены, их магнитные моменты направлены параллельно магнитному полю и намагниченность магнитной жидкости достигает насыщения.

В данном разделе будет рассмотрено явление неустойчивости поверхности ферромагнитной жидкости, граничащей с немагнитной газообразной внешней средой, во внешнем однородном ортогональном магнитном поле. Оно заключается в возникновении на границе раздела сред упорядоченной структуры из острых пиков конечной высоты (так называемого «ежа») при превышении некоторого критического значения напряжённости магнитного поля. Экспериментальные исследования условий возникновения неустойчивости в ортогональном магнитном поле были проведены Каули и Розенцвейгом в 1967 году [11].

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим слой магнитной жидкости, на поверхности которого распространяется периодическая плоская гравитационно-капиллярная волна с амплитудой и длиной волны , для которой выполняется условие . Пусть магнитная жидкость обладает свойствами идеальной несжимаемой жидкости и характеризуется массовой плотностью , коэффициентом поверхностного натяжения и магнитной проницаемостью .

Вся система находится во внешнем однородном, ортогональном невозмущённой поверхности, магнитном поле с вектором напряжённости . Поверхность жидкости граничит с внешней средой, обладающей магнитной проницаемостью (см. рисунок 2.1).

[рисунок]

Рисунок 2.1. Конфигурация задачи

Требуется получить дисперсионное уравнение для рассматриваемого волнового возмущения и на его основе вывести критерий неустойчивости поверхности слоя магнитной жидкости.

2.2 Потенциал магнитного поля

Прежде чем определить уравнения и граничные условия задачи применим упрощение, аналогичное приближению безвихревого движения жидкости (см. формулу (1.10)), а именно, пусть напряжённость магнитного поля определяется некоторой скалярной величиной , называемой потенциалом магнитного поля [11]:

где – функция времени и координат. Такое допущение корректно для рассматриваемой задачи, поскольку теорема о циркуляции магнитного поля (одно из системы уравнений Максвелла) [7, 9] в отсутствие токов и электрических полей имеет вид:

Также как и в случае с гидродинамическим потенциалом (1.10), это позволет значительно упростить задачу, так как происходит замена векторной величины скалярной функцией.

Также заметим, что распространение волны вносит изменения в распределение потенциала магнитного поля (2.1) вблизи поверхности жидкости, причём это изменение уменьшается с увеличением расстояния от поверхности. Так как по условию задачи волновые возмущения малы, то искажения потенциала также будут незначительными. Следовательно, к данной задаче применимы методы теории возмущений [8].

Согласно теории возмущений [8], потенциал магнитного поля можно представить в виде следующей суперпозиции:

где – потенциал магнитного поля вблизи невозмущённой поверхности жидкости, – малая поправка, учитывающая изменение потенциала вблизи поверхности при распространении волны. Тогда согласно (2.1) суперпозиция (2.3) также справедлива и для напряжённсоти магнитного поля:

где – напряжённость магнитного поля вблизи невозмущенной поверхности жидкости, – малая поправка, учитывающая искажение поля при распространении волны.

2.3 Давление магнитного поля на поверхность магнитной жидкости

Получим формулу для давления магнитного поля на поверхность магнитной жидкости в случае, когда это поле ортогонально поверхности.

Пусть для начала на поверхности отсутствуют какие-либо волновые возмущения, т.е. поверхность является идеально гладкой. Воспользуемся магнитной составляющей максвелловского тензора напряжений [11, 12]:

где – магнитная проницаемость некоторой среды, – вектор напряжённости внешнего магнитного поля, – диадное произведение векторов (тензорное произведение вектора-столбца на вектор строку), – символ Кронекера.

Сила, действующая на единицу площади, может быть вычислена путём скалярного умножения вектора нормали к поверхности (см. рисунок 5.2) на тензор (2.5) [11]:

Снова скалярно умножим выражение (2.6) на вектор нормали, чтобы получить нормальную компоненту поверхностной плотности силы, т.е. давление (верхний индекс указывает, что двление происходит со стороны среды с магнитной проницаемостью , нижний индекс указывает, что давление оказывает магнитное поле):

После несложных преобразований легко увидеть, что первое слагаемое в скобках в (2.7) будет равно . Тогда давление будет выражаться более простой формулой [16]:

Воспользуемся формулой (2.8) для определения суммарного давления на поверхность магнитной жидкости. Суммарное давление вычисляется как разность давления на поверхность со стороны магнитной жидкости и давления со стороны внешней среды :

где и ­– напряжённости внешнего магнитного поля в магнитной жидкости и во внешней среде соответственно. Как следует из соотношения (2.9) в случае гладкой горизонтальной поверхности суммарное давление направлено в сторону среды с меньшей магнитной проницаемостью, т.е. со стороны магнитной жидкости давление на границу выше (рисунок 2.2).

[рисунок]

Рисунок 2.2. Распределение давлений на поверхности

Обобщим формулу (2.9) для возмущённой поверхности, заменив на суперпозицию (2.4) и оставив только слагаемые до 1 порядка малости включительно:

где слагаемые представлены следующими выражениями:

где – давление магнитного поля на невозмущённую поверхность, – малая поправка, учитывающая искажение давления магнитного поля при распространении волны, и – возмущения напряжённостей магнитного поля в магнитной жидкости и во внешней среде соответственно.

2.4 Поверхностное давление жидкости

Если участок поверхности раздела двух сред искривлён, то вблизи него давления в обеих средах различны. Разность этих давлений называется поверхностным давлением [1]. В данной задаче необходимо его учитывать, поскольку по условию рассматривается гравитационно-капиллярная волна.

Поверхностное давление для жидкости может быть вычислено по известной в гидродинамике формуле Лапласа [1, 10]:

где – давление жидкости, – атмосферное давление, и – главные радиусы кривизны в данной точке поверхности жидкости в двух взаимно ортогональных направлениях, – средняя кривизна поверхности [11]:

Заметим, что существует альтернативное выражение [11] для средней кривизны поверхности, которое в отличие от (2.13) более удобно для использования в данной задаче:

где – единичный вектор нормали к поверхности жидкости.

Если возмущённая поверхность задаётя функцией (см. уравнение (1.1)), то вектор нормали может быть вычислен следующим образом [11]:

где и – орты соответствующих координатных осей. Тогда поверхностное давление (2.12) с учётом (2.14) и (2.15) в линеаризованном виде будет представлено следующей формулой:

которая и будет использована при решении задачи.

2.5 Математическая формулировка задачи

Введём двумерную систему координат, аналогичную той, которая была использована в разделе 1 (рисунок 1.2). Направление вектора ускорения свободного падения оставим неизменным.

Закон изменения свободной поверхности жидкости по-прежнему будем описывать функцией , заданной соотношением (1.1). Опираясь на результаты решения задачи о движении гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости из раздела 1, составим математическую формулировку текущей задачи.

*Уравнение несжимаемости:*

Поскольку магнитная жидкость по условию задачи является несжимаемой, уравнение (1.11) здесь также будет справедливо:

*Уравнения Лапласа для потенциалов магнитного поля:*

Запишем закон Гаусса [7, 9] для магнитного поля (одно из системы уравнений Максвелла) в магнитной жидкости и во внешней среде, учитывая, что рассматриваемые среды изотропны:

С учётом потенциала магнитного поля (2.1) и суперпозиции (2.3) в уравнения (2.18) примут вид:

где и – потенциалы магнитного поля в магнитной жидкости и внешней среде соответственно. Также для удобства уравнения заданы относительно невозмущённой поверхности жидкости .

*Условие баланса давлений на поверхности жидкости:*

Условие непрерывности давления на границе раздела магнитная жидкость – внешняя среда теперь будет представлено следующим выражением:

где – поверхностное давление, – давление магнитного поля.

Выражение для давления (1.19), полученное в предыдущем разделе, также может быть применено в рассматриваемой задаче:

где может быть определено из условия отсутствия волновых возмущений при подстановке (2.21) в граничное условие (2.20):

Теперь граничное условие (2.20) с учётом соотношений (2.21) и (2.22) будет иметь вид:

где задаётся формулой (2.16), а – формулой (2.11). Перепишем его в линеаризованном виде:

Напряжённости магнитных полей в (2.24) представлены через потенциалы магнитного поля (см. соотношение (2.1)).

*Кинематическое граничное условие:*

Воспользуемся линеаризованным кинематическим граничным условием (1.29):

*Условие непрерывности тангенциальной компоненты вектора напряжённости магнитного поля на границе раздела сред:*

В электродинамике сплошных сред доказывается, что тангенциальная компонента напряжённости магнитного поля непрерывна на границе раздела двух сред [7]:

где и – тангенциальные компоненты векторов напряжённости магнитного поля в магнитной жидкости и во внешней среде соответственно.

Учитывая ортогональность системы координат, граничное условие (2.26) можно записать в виде векторного произведения [11]:

где – единичный вектор нормали к поверхности жидкости. Воспользуемся вектором нормали (2.15) для вычисления векторного произведения (2.27). В результате, оставив только линейные слагаемые, получим:

где и – проекции векторов напряжённостей магнитного поля на ось в соответствующих средах. Запишем это граничное условие в итоговом виде через потенциалы магнитного поля (см. соотношение (2.1)) со снесением его на невозмущённую границу :

*Условие непрерывности нормальной компоненты вектора индукции магнитного поля на границе раздела сред:*

По аналогии с предыдущим, следующее граничное условие следует из непрерывности нормальных компонент вектора индукции магнитного поля на границе раздела двух сред [7]:

где и – нормальные компоненты векторов индукции магнитного поля в магнитной жидкости и во внешней среде соответственно.

Условие (2.30) эквивалентно может быть записано следующим образом:

где – единичный вектор нормали к поверхности жидкости. С учётом вектора нормали (2.15) и отбрасывания нелинейных слагаемых условие (2.31) преобразуется к виду:

где и – проекции векторов индукции магнитного поля на ось в соответствующих средах, или к преопределённому через потенциалы магнитного поля (см. соотношение (2.1)) с использованием материальных уравнений для изотропных сред [7, 9]:

где уже проведена процедра снесения граничного условия на поверхность .

*Условие для гидродинамического потенциала на бесконечности:*

Условие (1.23), полученное в разделе 1, остается без изменений:

*Условия для потенциалов магнитного поля на бесконечности:*

В пункте 2.2 текущего раздела было отмечено, что поправка к напряжённости магнитного поля , возникающая вследствие распространения волновых возмущений, должна обращаться в нуль при удалении на бесконечно большое расстояние от поверхности магнитной жидкости, следовательно:

или через скалярные переменные:

*Материальные уравнения:*

В дальнейшем при анализе устойчивости поверхности магнитной жидкости существенную роль будет играть такая её характеристика, как намагниченность. Следовательно, необходимо задать соотношения, которые позволят переопределить напряжённость магнитного поля через намагниченность магнитной жидкости. Эти соотношения назовём материальными уравнениями.

Из электродинамики известно выражение, связывающее вектор индукции магнитного поля в некоторой среде с её намагниченностью [7]. В условиях рассматриваемой задачи необходимо записать два таких выражения – для магнитной жидкости и для внешней среды, которая считается ненамагничивающейся:

где – вектор намагниченности магнитной жидкости.

Так как намагниченность является характеристикой всего объёма магнитной жидкости, то малыми поправками к напряжённости и индукции магнитного поля можно пренебречь:

Соотношения (2.38) есть искомые материальные уравнения.

*Математическая формулировка задачи:*

В таблице 2 представлена математическая формулировка рассматриваемой задачи.

Таблица 2

Линеаризованная математическая формулировка задачи

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Формула | Область определения | Номер формулы в тексте |
| Уравнения | | |
|  |  | 2.17 |
|  | 2.19 |
|  |  | 2.19 |
| Граничные условия | | |
|  |  | 2.24 |
|  | 2.25 |
|  | 2.29 |
|  | 2.33 |
|  |  | 2.34 |
|  | 2.36 |
|  |  | 2.36 |
| Материальные уравнения | | |
|  | – | 2.38 |
|  | – | 2.38 |

Для более короткой записи в таблице 2 и далее в этом разделе индексы, отображающие порядок малости, скрыты.

2.6 Решение задачи и получение дисперсионного уравнения

Пусть величины и в данной задаче также задаются соотношениями (1.30) и (1.31), так как геометрия этих двух задач остаётся одинаковой. Тогда функции потенциалов магнитного поля (поправки к потенциалам) также должны иметь вид простейших периодических функций:

где и – некоторые функции, учитывающие зависимость потенциалов магнитного поля от координаты , которые могут быть найдены при подстановке в соответствующие уравнения (2.19) с учётом условий на бесконечности (2.36):

где и – произвольные константы.

Теперь на основе граничных условий (2.24), (2.25), (2.29), (2.33) и функций (1.30), (1.33) и (2.40) может быть составлена система линейных однородных уравнений:

 (3.48)

Согласно теореме линейной алгебры [3], критерием существования ненулевых решений системы однородных линейных уравнений является равенство нулю определителя этой системы. В соответствии с этим, для системы (3.48) можно записать следующее:

 (3.49)

Раскрытие определителя приводит к дисперсионному уравнению для волн на поверхности рассматриваемой магнитной жидкости:

 (3.50)

Однако использование полученного соотношения в качестве конечного варианта дисперсионного уравнения для анализа неустойчивости поверхности магнитной жидкости не совсем корректно. Необходимо учесть, что магнитная жидкость обладает намагниченностью, характеризующей интенсивность поляризации ферромагнитного вещества, из которого она изготовлена, и зависящей от приложенного внешнего магнитного поля. Для этого воспользуемся материальными уравнениями (3.16), выразив из них напряжённости магнитного поля:

 (3.51)

Вычитание второго уравнения из первого приведёт к следующему простому выражению:

 (3.52)

с учётом которого дисперсионное уравнение (3.50) преобразуется к окончательному виду, учитывающему намагниченность ферромагнитного материала жидкости [11]:

 (3.53)

В полученном соотношении первое слагаемое совпадает с дисперсионным уравнением для гравитационных волн на поверхности идеальной несжимаемой жидкости (1.45). Второе слагаемое учитывает поверхностное давление, обусловленное поверхностным натяжением жидкости. А третье слагаемое отвечает за давление магнитного поля на поверхность магнитной жидкости.