**3 Движение капиллярных волн на поверхности цилиндрической струи идеальной несжимаемой жидкости**

Впервые задача распада струи невязкой несжимаемой жидкости на отдельные капли теоретически решена Рэлеем в 1879 г. В своей работе [22] он показал, что осесимметричная вертикальная струя идеальной жидкости всегда нестабильна, поскольку в линейном приближении амплитуда любого возмущения с длиной волны, превышающей длину окружности струи, экспоненциально возрастает с течением времени.

Главным источником такой неусточивости являются силы поверхностного натяжения [22]. Под действием капилярных сил происходит прогрессивное нарастание случайных локальных уменьшений диаметра струи относительно своего среднего значения, что сопровождается вытеснением жидкости из данного участка и образованием соседних утолщений. В итоге утоньшённый участок, постепенно вытягиваясь в длину, разрывается с образованием мелких капелек, а утолщенные превращаются в основные крупные капли.

В текущем разделе будет проведёт расчёт дисперсионного уравнения для волновых возмущений на поверхности струи идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие гравитационного поля. Полученные в процессе решения этой задачи уравнения и граничные условия будут полностью или частично использованы при решении более сложной задачи о струе магнитной жидкости в магнитном поле. Также будет проведён небольшой анализ полученного дисперсионного уравнения, который будет полезен при анализе неустойчивости струи магнитной жидкости в следующем разделе.

**3.1 Постановка задачи**

Рассмотрим струю идеальной несжимаемой жидкости с массовой плотностью и коэффициентом поверхностного натяжения , которая имеет цилиндрическую форму радиуса в невозмущённом состоянии и движется с постоянной скоростью вдоль заданного направления. Система находтся в некоторой внешней среде в отсутствие поля силы тяжести (рисунок 3.1).

Пусть при этом на поверхности струи распространяется плоская периодическая капиллярная волна с амплитудой и длиной при условии (рисунок 3.1).

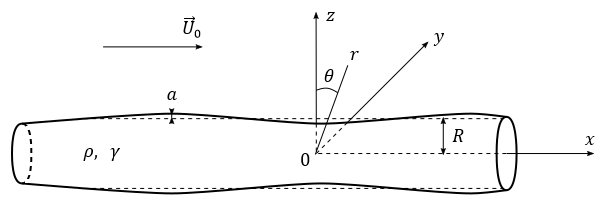


Рисунок 3.1 – Конфигурация задачи (для простоты изображено осесимметричное возмущение поверхности жидкости)

Требуется получить дисперсионное уравнение для данного волнового возмущения.

**3.2 Поверхностное давление жидкости**

Выражение для поверхностного давления в цилиндрической системе координат может быть получено при помощи формул (2.13) и (2.15), использованных для вычисления поверхностного давления в разделе 2. Для этого достаточно определить вид вектора нормали к рассматриваемой поверхности.

Так как возмущённая поверхность цилиндрического столба жидкости задаётся уравнением , то вектор нормали может быть вычислен следующим образом:

где , и – орты соответствующих направлений в цилиндрической системе координат. С учётом этого поверхностное давление (2.13) в линеаризованном виде будет представлено выражением

Заметим, что в отсутствии волнового движения выражение (3.2) будет иметь вид

что согласуется с формулой Лапласа [8, 9].

**3.3 Математическая формулировка задачи**

Введём цилиндрическую систему координат, как показано на рисунке 3.1, где ось направлена вдоль направления движения струи, а начало координат привязано к произвольной точке на этой оси и движется с постоянной скоростью . Следовательно, относительно этой системы координат скорость движения струи будет равна нулю.

Закон изменения поверхности в процессе распространения волнового возмущения описывается функцией :

где – функция времени и цилиндрических координат и .

Определим уравнения и граничные условия данной задачи. При этом воспользуемся некоторыми готовыми результатами, полученными ранее при решении задач о распространении гравитационных и гравитационно-капиллярных волн на поверхности плоских слоёв жидкости (см. разделы 1 и 2).

**3.3.1 Уравнение несжимаемости**

Воспользуемся уравнением, аналогичным уравнению Лапласа (1.11), представленным через цилиндрические координаты и заданном относительно невозмущённой цилиндрическкой поверхности:

где – гидродинамический потенциал.

**3.3.2 Условие баланса давлений на поверхности струи**

Условие непрерывности давления на поверхности струи жидкости имеет вид

где – давление жидкости в точке с координатами в момент времени , – поверхностное давление.

Воспользуемся выражением для давления (1.19), исключив из него слагаемое, содержащее ускорение свободного падения:

где – некоторая величина (в общем случае – функция времени), имеющая размерность давления. Она может быть определена, если рассмотреть условие (3.6) с учётом (3.7) в случае отсутствия волнового движения на её поверхности:

где определено выражением (3.3). Тогда граничное условие (3.6) с учётом (3.7) и (3.8) будет иметь вид

Для проведения процедуры линеаризации данного граничного условия необходимо разложить в ряд Тейлора в точке следующие слагаемые, входящие в выражение поверхностного давления (3.2):

Тогда поверхностное давление запишется как

Перепишем окончательно граничное условие (3.9) в линеаризованном виде с учётом (3.11):

**3.3.3 Кинематическое граничное условие**

Для частицы жидкости, находящейся на поверхности струи, заданной уравнением , будет выполняться кинематическое граничное условие

Вычисление полной производной от соотношения (3.13) и последующая линеаризация полученного выражения даёт искомое граничное условие

**3.3.4 Условие для гидродинамического потенциала на оси струи**

В данной задаче должно выполняться требование конечности величины скорости движения жидкости на оси струи:

**3.3.5 Математическая формулировка задачи**

В таблице 3 представлена итоговая линеаризованная математическая формулировка рассматриваемой задачи.

Таблица 3 – Линеаризованная математическая формулировка задачи

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Формула | Область определения | Номер формулы в тексте |
| уравнения | | |
|  |  | 3.5 |
| граничные условия | | |
|  |  | 3.12 |
|  | 3.14 |
|  |  | 3.15 |

**3.4 Решение задачи и получение дисперсионного уравнения**

Зададим неизвестные функции в виде бегущей волны с частотой и волновым числом и азимутальным числом , выражающим зависимость от азимутального угла :

где – некоторая фукнция координаты . Заметим, что данные функции должны быть циклическими, то есть должны совпадать сами с собой при изменении азимутального угла на :

Тогда, как следует из вида функций () и (), условие () может быть эквивалентно записано в виде соотношения

которое выполняется тогда, когда азимутальное число принимает только целочисленные значения.

Чтобы найти вид функции необходимо выполнить подстановку гидродинамического потенциала (3.17) в уравнение несжимаемости (3.5). В результате несложных преобразований получаем уравнение

Замена переменной в уравнении (3.20) на переменную приводит его к известному в теории специальных функции модифицированному уравнению Бесселя [23]

Решением уравнения () являются две функции: модифицированная функция Бесселя 1-го рода [23]

и модифицированная функция Бесселя 2-го рода [23]

Тогда общее решение уравнения (3.21) можно записать в виде линейной комбинации решений (3.22) и (3.23):

где и – произвольные константы. Однако для выполнения граничного условия (3.15) необходимо занулить константу , так как функция (3.23) стремится к бесконечности на оси струи [23]. В итоге гидродинамический потенцал (3.17) перезапишется следующим образом:

Теперь, зная вид функций (3.16) и (3.25), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов и , воспользовавшись граничными условиями (3.12) и (3.14):

Искомое дисперсионное уравнение получается путём вычисления определителя системы уравнений (3.26) и последующего приравнивания его нулю:

Результат, аналогичный уравнению (3.27), был получен в работе [6].

Проведём анализ полученного дисперсионного уравнения на определение областей устойчивости и неустойчивости. Для начала отметим, что при и при любом . Следовательно, знак правой части уравнения (3.27) будет определяться двумя величинами: азимутальным числом и произведением .

В случае, когда , циклическая частота будет действительной при любом значении . С физической точки зрения это означает, что волновые возмущения, у которых существует зависимость амплитуды от азимутального угла (так называемые неосесимметричные волны) всегда стабильны и подчиняются периодическому закону (3.16).

В случае же осесимметричных возмущений, когда азимутальное число , циклическая частота может быть как действительной, так и мнимой, что уже определяется произведением . Как следует из (3.27), неустойчивыми являются только такие осесимметричные моды, волновые числа которых удовлетворяют условию , или в переводе на длину волны, .

**3.5 Выводы из решения задачи**

В результате решения задачи в цилиндрической геометрии были получено дисперисонное уравнение для волн, распространяющихся на поверхности струи в отсутствие ускорения свободного падения. Задача также была решена с условием безвихревого движения жидкости и в линейном по амплитуде приближении.

Анализ дисперсионного уравнения показал, что развитие неустойчивости определяется осесимметричными возмущениями, длина волны которых превышает длину окружности поперечного сечения невозмущённой струи.

Неустойчивость осесимметричных струй связана с тем, что их поперечное сечение круглое, следовательно, силы поверхностного натяжения стремятся равномерно сжать поверхность к центру. Радиусы кривизны струи в области утоньшений намного меньше, чем в области утолщений, поэтому давление поверхностного натяжения там очень велико. Это приводит к распаду струи на капли за счёт её разрыва в области утоньшений.

Поскольку на поверхности струи жидкости всегда присутствуют волновые возмущения различной конфигурации, то среди них обязательно найдутся те, которые удовлетворяют вышеперечисленным условиям. Таким образом, любая струя жидкости в целом всегда будет неустойчива.