3 Движение капиллярных волн на поверхности цилиндрической струи идеальной несжимаемой жидкости

Впервые задача распада струи невязкой несжимаемой жидкости на отдельные капли теоретически решена Рэлеем в 1879 г. В своей работе [22] он показал, что осесимметричная вертикальная струя идеальной жидкости всегда нестабильна, поскольку в линейном приближении амплитуда любого возмущения с длиной волны, превышающей длину окружности струи, экспоненциально возрастает с течением времени.

Главным источником такой неусточивости являются силы поверхностного натяжения [22]. Под действием капилярных сил происходит прогрессивное нарастание случайных локальных уменьшений диаметра струи относительно своего среднего значения, что сопровождается вытеснением жидкости из данного участка и образованием соседних утолщений. В итоге утоньшённый участок, постепенно вытягиваясь в длину, разрывается с образованием мелких капелек, а утолщенные превращаются в основные крупные капли.

В текущем разделе будет проведёт расчёт дисперсионного уравнения для волновых возмущений на поверхности струи идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие гравитационного поля. Полученные в процессе решения этой задачи уравнения и граничные условия будут полностью или частично использованы при решении более сложной задачи о струе магнитной жидкости в магнитном поле. Также будет проведён небольшой анализ полученного дисперсионного уравнения, который будет полезен при анализе неустойчивости струи магнитной жидкости в следующем разделе.

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим струю идеальной несжимаемой жидкости с массовой плотностью и коэффициентом поверхностного натяжения , которая имеет цилиндрическую форму радиуса в невозмущённом состоянии и движется с постоянной скоростью вдоль заданного направления. Система находтся в некоторой внешней среде в отсутствие поля силы тяжести (рисунок 3.1).

Пусть при этом на поверхности струи распространяется плоская периодическая капиллярная волна с амплитудой и длиной при условии (рисунок 3.1).

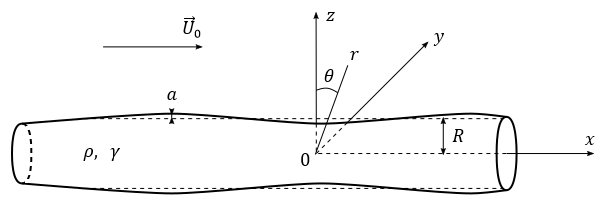


Рисунок 3.1. Конфигурация задачи (для простоты изображено осесимметричное возмущение поверхности жидкости)

Требуется получить дисперсионное уравнение для данного волнового возмущения.

3.2 Поверхностное давление жидкости

Выражение для поверхностного давления в цилиндрической системе координат может быть получено при помощи формул (2.13) и (2.15), использованных для вычисления поверхностного давления в разделе 2. Для этого достаточно определить вид вектора нормали к рассматриваемой поверхности.

Так как возмущённая поверхность цилиндрического столба жидкости задаётся уравнением , то вектор нормали может быть вычислен следующим образом:

где , и – орты соответствующих направлений в цилиндрической системе координат. С учётом этого поверхностное давление (2.13) в линеаризованном виде будет представлено следующим выражением:

Заметим, что в отсутствии волнового движения выражение (3.2) будет иметь вид:

что согласуется с формулой Лапласа [8, 9].

3.3 Математическая формулировка задачи

Введём цилиндрическую систему координат, как показано на рисунке 3.1, где ось направлена вдоль направления движения струи, а начало координат привязано к произвольной точке на этой оси и движется с постоянной скоростью . Следовательно, относительно этой системы координат скорость движения струи будет равна нулю.

Закон изменения поверхности в процессе распространения волнового возмущения описывается функцией :

где – функция времени и цилиндрических координат и .

Определим уравнения и граничные условия данной задачи. При этом воспользуемся некоторыми готовыми результатами, полученными ранее при решении задач о распространении гравитационных и гравитационно-капиллярных волн на поверхности плоских слоёв жидкости (см. разделы 1 и 2).

*Уравнение несжимаемости:*

где – гидродинамический потенциал.

*Условие баланса давлений на поверхности струи:*

Условие непрерывности давления на поверхности струи жидкости имеет следующий вид:

где – давление жидкости в точке с координатами в момент времени , – поверхностное давление.

Воспользуемся выражением для давления (1.19), исключив из него слагаемое, содержащее ускорение свободного падения:

где – некоторая величина (в общем случае – функция времени), имеющая размерность давления. Она может быть определена, если рассмотреть условие (3.6) с учётом (3.7) в случае отсутствия волнового движения на её поверхности:

где определено выражением (3.3). Тогда граничное условие (3.6) с учётом (3.7) и (3.8) будет иметь вид:

Для проведения процедуры линеаризации данного граничного условия необходимо разложить в ряд Тейлора в точке следующие слагаемые, входящие в выражение поверхностного давления (3.2):

Тогда поверхностное давление примет вид:

Перепишем окончательно граничное условие (3.9) в линеаризованном виде с учётом (3.11):

*Кинематическое граничное условие:*

Для частицы жидкости, находящейся на поверхности струи, заданной уравнением , будет выполняться кинематическое граничное условие следующего вида:

Вычисление полной производной от соотношения (3.13) и последующая линеаризация полученного выражения даёт искомое граничное условие:

*Условие для гидродинамического потенциала на оси струи:*

В данной задаче должно выполняться требование конечности величины скорости движения жидкости на оси струи:

*Математическая формулировка задачи:*

В таблице 3 представлена линеаризованная математическая формулировка рассматриваемой задачи.

Таблица 3

Линеаризованная математическая формулировка задачи

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Формула | Область определения | Номер формулы в тексте |
| Уравнения | | |
|  |  | 3.5 |
| Граничные условия | | |
|  |  | 3.12 |
|  | 3.14 |
|  |  | 3.15 |

3.4 Решение задачи и получение дисперсионного уравнения

Зададим неизвестные функции в виде бегущей волны с частотой и волновым числом и азимутальным числом , выражающим зависимость от азимутального угла :

где – некоторая фукнция координаты . Заметим, что данные функции должны быть циклическими, то есть должны совпадать сами с собой при изменении азимутального угла на :

Тогда, как следует из вида функций () и (), условие () может быть эквивалентно записано в виде соотношения:

которое выполняется тогда, когда азимутальное число принимает только целочисленные значения.

Чтобы найти вид функции необходимо выполнить подстановку гидродинамического потенциала (3.17) в уравнение несжимаемости (3.5). В результате несложных преобразований получаем уравнение:

Замена переменной в уравнении (3.20) на переменную приводит его к известному в теории специальных функции модифицированному уравнению Бесселя [23]:

Решением уравнения () являются две функции: модифицированная функция Бесселя 1-го рода [23]:

и модифицированная функция Бесселя 2-го рода [23]:

Тогда общее решение уравнения (3.21) можно записать в виде линейной комбинации решений (3.22) и (3.23):

где и – произвольные константы. Однако для выполнения граничного условия (3.15) необходимо занулить константу , так как функция (3.23) стремится к бесконечности на оси струи [23]. В итоге гидродинамический потенцал (3.17) перезапишется следующим образом:

Теперь, зная вид функций (3.16) и (3.25), получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов и , воспользовавшись граничными условиями (3.12) и (3.14):

Искомое дисперсионное уравнение получается путём вычисления определителя системы уравнений (3.26) и последующего приравнивания его нулю:

Результат, аналогичный уравнению (3.27), был получен в [6].

Проведём анализ полученного дисперсионного уравнения на определение областей устойчивости и неустойчивости. Для начала отметим, что при и при любом . Следовательно, знак правой части уравнения (3.27) будет определяться двумя величинами: азимутальным числом и произведением .

В случае, когда , циклическая частота будет действительной при любом значении . С физической точки зрения это означает, что волновые возмущения, у которых существует зависимость амплитуды от азимутального угла (так называемые неосесимметричные волны) всегда стабильны и подчиняются периодическому закону (3.16).

В случае же осесимметричных возмущений, когда азимутальное число , циклическая частота может быть как действительной, так и мнимой, что уже определяется произведением . Как следует из (3.27), неустойчивыми являются только такие осесимметричные моды, волновые числа которых удовлетворяют условию , или в переводе на длину волны, .

3.5 Выводы из решения задачи

В результате решения задачи в цилиндрической геометрии были получено дисперисонное уравнение для волн, распространяющихся на поверхности струи в отсутствие ускорения свободного падения. Задача также была решена с условием безвихревого движения жидкости и в линейном по амплитуде приближении.

Анализ дисперсионного уравнения показал, что развитие неустойчивости определяется осесимметричными возмущениями, длина волны которых превышает длину окружности фронтального сечения невозмущённой струи. Поскольку на поверхности струи жидкости всегда присутствуют волновые возмущения различной конфигурации, то среди них обязательно найдутся те, которые удовлетворяют вышеперечисленным условиям. Таким образом, любая струя жидкости в целом всегда будет неустойчива.