**4 Исследование неустойчивости поверхности цилиндрической струи магнитной жидкости во внешнем однородном параллельном магнитном поле**

Настоящий раздел посвящён исследованию влияния внешнего магнитного поля на стабильность поверхности цилиндрической струи магнитной жидкости. Наибольший интерес представляет собой такое магнитное поле, силовые линии которого параллельны поверхности жидкости, поскольку оно, в отличие от ортогонального, оказывает иной эффект на стабильность поверхности.

В. Г. Баштовой и М. С. Краков [5] экспериментально наблюдали стабилизацию вертикальной цилиндрической струи намагничивающейся жидкости при включении аксиального однородного магнитного поля в соленоиде. Они обнаружили, что включение поля увеличивает длину стабильного участка струи. Такой эффект полностью противоположен эффекту дестабилизации поверхности под воздействием ортогонального магнитного поля.

В данном разделе будет рассмотрена задача о неустойчивости цилиндрической струи магнитной жидкости, движущейся в параллельном её поверхности магнитном поле. В эту задачу входит получение дисперсионного уравнения для поверхностных волн, его анализ, а также качественное объяснение эффекта стабилизации неустойчивых волновых возмущений при помощи параллельного магнитного поля.

Необходимо также отметить, что одной из причин рассмотрения в данной задаче магнитной жидкости именно цилиндрической геометрии является легкость реализации подобных условий на практике. Для этого струя магнтной жидкости пропускается через соленоид, внутри которого создается однородное, параллельное движению жидкости, магнитное поле. Реализация плоскостной конфигурации магнитной жидкости в параллельном магнитном поле технически более сложна и, следовательно, имеет более низкую значимость в прикладных исследованиях.

**4.1 Постановка задачи**

Рассмотрим струю идеальной несжимаемой магнитной жидкости, характеризующейся параметрами: – массовая плотность, – коэффициент поверхностного натяжения, – магнитная проницаемость. Пусть струя имеет цилиндрическую форму радиуса в невозмущённом состоянии и движется с постоянной скоростью вдоль заданного направления. Данная система находится в некоторой внешней среде, обладающей магнитной проницаемостью , где действует параллельное направлению движения струи однородное магнитное поле с вектором напряжённости (рисунок 4.1).

Пусть на поверхности рассматриваемой струи распространяется плоская периодическая капиллярная волна с амплитудой и длиной волны , для которой выполняется условие (рисунок 4.1).

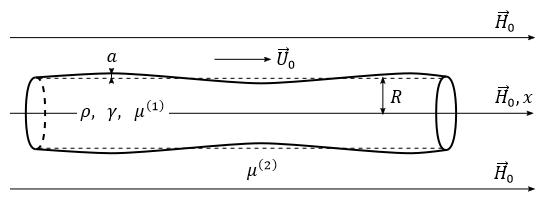


Рисунок 4.1 – Конфигурация задачи (для простоты изображено осесимметричное возмущение поверхности жидкости)

Система координат в данной задаче совпадает с системой координат, изображённой на рисунке 3.1. Требуется получить дисперсионное уравнение для рассматриваемого волнового возмущения и на его основе вывести критерий неустойчивости поверхности цилиндрического столба магнитной жидкости.

**4.2 Давление магнитного поля на цилиндрическую поверхность магнитной жидкости**

Получим формулу для давления магнитного поля на цилиндрическую поверхность намагничивающейся жидкости в случае аксиально направленного магнитного поля.

Пусть сначала на поверхности струи отсутствуют любые волновые возмущения, т.е. поверхность представляет собой идеальный цилиндр (рисунок 4.2).

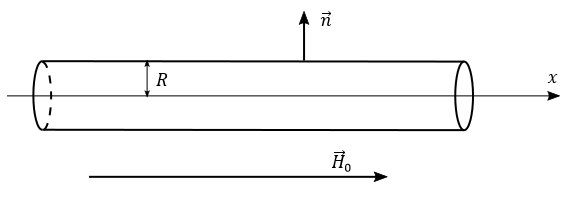


Рисунок 4.2 – Схематичное изображение участка цилиндрической струи в отсутствие волновых возмущений

Давление магнитного поля в данной задаче может быть также получено при помощи тензора напряжений (2.5) путём последовательного домножения его на вектор нормали (см. раздел 2, подраздел 2.3):

где , поскольку проекция вектора на вектор нормали по условию данной задачи равна нулю. Тогда формула (4.1) перепишется как

Воспользуемся формулой (4.2) для вычисления суммарного давления в рассматриваемой задаче, учитывая непрерывность тангенциальных компонент напряжённостей магнитного поля (2.27):

Отсюда можно сделать вывод, что суммарное давление направлено в сторону среды с меньшей величиной магнитной проницаемости. Такой же результат был получен в случае ортогонального магнитного поля (см. раздел 2, подраздел 2.3).

В случае, когда на поверхности присутствуют волновые возмущения, формула (4.3) с учётом суперпозиции (2.4) даёт результат

где оставлены только слагаемые до 1 порядка малости включительно.

**4.3 Математическая формулировка задачи**

Составим математическую формулировку задачи, опираясь на результаты из разделов 2 и 3.

**4.3.1 Уравнение несжимаемости**

Уравнение несжимаемости (3.5) остаётся без изменений:

**4.3.2 Уравнения Лапласа для потенциалов магнитного поля**

Суперпозиция потенциалов в данной задаче, исходя из определения (2.1), представляется соотношением

Тогда уравнения Максвелла (2.19) в линеаризованном виде запишутся в виде

**4.3.3 Условие баланса давлений на поверхности струи**

Запишем условие баланса давлений на поверхности струи магнитной жидкости:

Теперь величина в выражении для давления (3.7) теперь будет определена следующим образом:

где и представлены формулами (3.3) и (4.4) соответственно.

Соберем линеаризованное граничное условие (4.8), учитывая выражения для давления жидкости (3.7), поверхностного давления (3.11) и давления магнитного поля (4.4):

где поправки к напряжённостям и представлены через потенциалы магнитного поля (см. соотношение (2.1)).

**4.3.4 Кинематическое граничное условие**

Кинематическое граничное условие (3.14) остаётся без изменений:

**4.3.5 Условие непрерывности тангенциальной компоненты вектора напряжённости магнитного поля на границе раздела сред**

Воспользуемся граничным условием (2.27). Заметим, что векторное произведение вектора нормали к поверхности цилиндра на любой другой вектор всегда будет вектором, направленным по касательной к поверхности цилиндра. Исходя из этого, альтернативная запись данного граничного условия, представленная выражением (2.28) также будет справедлива для рассматриваемой задачи. С учётом линеаризованного вектора нормали (3.1)

выпишем покомпонентно результат вектороного произведения (2.28), исключив нелинейные слагаемые:

где учтено, что и, следовательно, , и . Перепишем окончательно граничные условия (4.13) через потенциалы магнитного поля:

**4.3.6 Условие непрерывности нормальной компоненты вектора индукции магнитного поля на границе раздела сред**

Воспользуемся граничным условием (2.31) (является альтернативой записи граничного условия (2.10)), которое с учётом (4.12) в первом приближении примет вид

Перепишем (4.15) через потенциалы магнитного поля и снесём на поверхность :

**4.3.7 Условие для гидродинамического потенциала на оси струи**

В качестве условия для гидродинамического потенциала на оси струи будет выступать условие (3.15)

**4.3.8 Условия для потенциалов магнитного поля на оси струи и бесконечности**

Поскольку величина магнитного поля не может быть бесконечно большой, то на оси струи должно выполняться условие

А во внешней среде модуль вектора дожен обращаться в нулевое значение при бесконечно большом удалении от поверхности струи:

**4.3.9 Материальные уравнения**

Материальные уравнения, выражающие намагниченность магнитной жидкости через напряжённость магнитного поля, представлены выражениями (2.38)

**4.3.10 Математическая формулировка задачи**

Выпишем итоговый вид уравнений и граничных условий текущей задачи в таблицу 4.

Таблица 4 – Линеаризованная математическая формулировка задачи

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Формула | Область определения | Номер формулы в тексте |
| уравнения | | |
|  |  | 4.5 |
|  | 4.7 |
|  |  | 4.7 |

Продолжение таблицы 4

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| граничные условия | | |
|  |  | 4.10 |
|  | 4.11 |
|  | 4.14 |
|  | 4.16 |
|  |  | 4.17 |
|  | 4.18 |
|  |  | 4.19 |

Продолжение таблицы 4

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| материальные уравнения | | |
|  | – | 4.20 |
|  | – | 4.20 |

Для более короткой записи в таблице 4 и далее в этом разделе индексы, отображающие порядок малости, скрыты.

**4.4 Решение задачи и получение дисперсионного уравнения**

Функция гидродинамического потенциала уже получена при решении гидродинамической части задачи в разделе 3 (см. фукцию (3.25)):

Аналогично представим потенциалы магнитного поля и в виде периодических функций

где условие цикличности (3.19) также должно выполняться.

Для нахождения незвестных функций и , входящих в потенциалы (4.22) и (4.23), необходимо воспользоваться уравнениями Лапласа (4.7) и граничными условиями (4.18) и (4.19). В результате получим

где и – неизвестные константы.

Заметим, что частные производные функций (4.24) и (4.25) по и эквивалентны с точностью до константы. Это приводит к тому, что граничные условия (4.14) становятся линейно-зависимыми. Следовательно, имеет смысл оставить только одно из них.

Составим систему линейных уравнений из граничных условий (4.10), (4.11), (4.14) и (4.16) относительно функций (3.16), (4.21), (4.24) и (4.25):

где введены следующие обозначения для модифицированных функций Бесселя и их частных производных (знаки данных функций проверены в системе компьютерной алгебры «Mathematica»):

Теперь дисперсионное уравнение может быть получено путём приравнивания нулю определителя системы (4.26):

Воспользуемся материальными уравнениями (4.20) для выражения напряжённости магнитного поля через намагниченность :

Перепишем дисперсионное уравнение (4.28) в более удобном виде через безразмерные величины. Пусть – безразмерная циклическая частота, – безразмерное волновое число, – безразмерная намагниченность. В итоге получим

Как видно из полученного уравнения, первое слагаемое имеет квадратичную зависимость от намагниченности магнитной жидкости и отвечает за воздействие магнитного поля на поверхность струи. При этом оно всегда положительно, что следует из знаков функций Бесселя (4.27). Второе слагаемое с точностью до обозначений полностью совпадает с дисперсионным уравнением для волн на поверхности немагнитной жидкости (3.27). Оно также всегда положительно за исключением одного случая, когда азимутальное число равно нулю (данный случай рассмотрен в разделе 3, подразделе 3.4). Данная информация необходима далее для анализа условий возникновения и развития неустойчивости.

**4.5 Исследование неустойчивости поверхности**

Как было выяснено ранее (см. раздел 3), циклическая частота может быть мнимой только тогда, когда азимутальное число равно нулю. Следовательно, вклад в развитие нестабильности поверхности струи магнитной жидкости могут давать только осесимметричные волновые возмущения, присутствующие на этой поверхности. Неосесимметричные моды также распространяются по поверхности струи, но они имеют действительную частоту и являются периодическими.

На графике дисперсионного уравнения (5.37) на рисунке 4.3, построенного для осесимметричных мод, изображены кривые при различных значениях безразмерной намагниченности жидкости (значения намагниченностей выбраны условно и могут не соответствовать действительным) при характеристиках сред и .

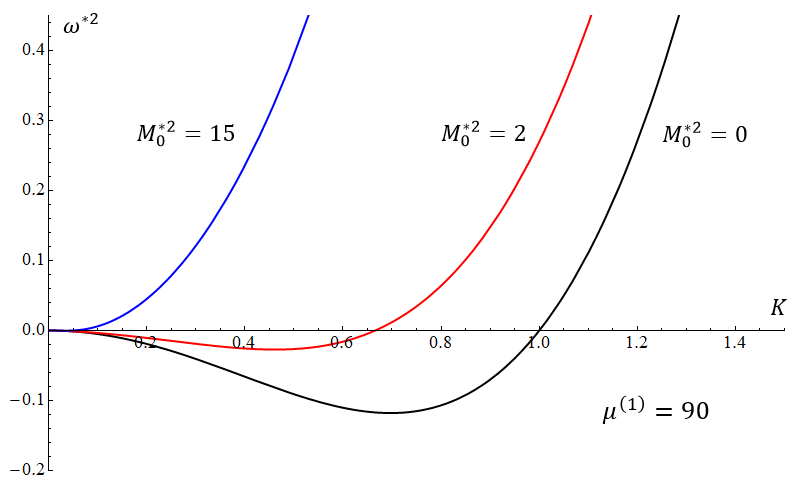


Рисунок 4.3 – Зависимость квадрата безразмерной циклической частоты от безразмерного волнового числа для осесимметричных волновых возмущений при и

Анализ зависимостей на рисунке 4.3 позволяет сделать следующие выводы относительно влияния внешнего магнитного поля на устойчивость поверхности струи магнитной жидкости:

* при увеличении намагниченности магнитной жидкости диапазон неустойчивых мод сужается. В отсутствие магнитного поля он максимален и лежит в пределах волновых чисел ;
* увеличение намагниченности приводит к увеличению минимальной длины неустойчивой волновой моды. Такая же тенденция наблюдается у возмущения с максимальным инкрементом неустойчивости. В целом это приводит к смещению сужающегося диапазона неустойчивых возмущений в сторону более длинных волн;
* абсолютная устойчивость струи магнитной жидкости не достигается ни при какой величине её намагниченности. Во-первых, это связано с ограничением максимальной намагниченности магнитной жидкости, которая выходит на насыщение при достаточно больших величинах внешнего магнитного поля. Во-вторых, даже при бесконечно высоких величинах намагниченности на поверхности струи все равно существуют неустойчивые длинноволновые моды, хотя их количество существенно мало.

Таким образом, параллельное поверхности струи внешнее магнитное поле оказывает стабилизирующее действие на её поверхность. Проведём качественное объяснение эффекта стабилизации, также как это было сделано в разделе 2.

При распространении осесимметричного волнового возмущения профиль струи имеет области утолщений и утоньшений. Следовательно, в области утолщений линии напряжённости магнитного поля или, что эквивалентно, линии намагниченности магнитной жидкости разрежены, а в области утоньшений – уплотнены. Это значит, что сила отталкивания линий намагниченности, модуль которой определяется формулой (4.2), больше в области утоньшений (рисунок 4.4). В итоге это приводит к выравниванию их плотности, и, как следствие, к выравниванию поверхности струи магнитной жидкости (рисунок 4.5). Увеличение внешнего магнитного поля сопровождается квадратичным усилением данного эффекта согласно выражению (4.2). Заметим, что давление магнитного поля на поверхность, определяемое соотношениями (4.4), может быть интерпретировано как отталкивание линий намагниченности друг от друга.

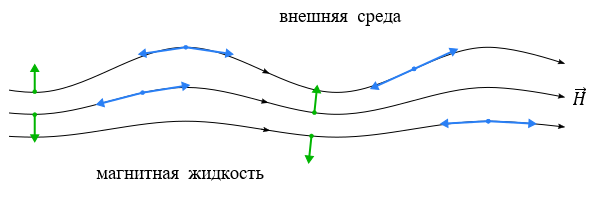


Рисунок 4.4 – Взаимодействие параллельного магнитного поля с поверхностью струи магнитной жидкости

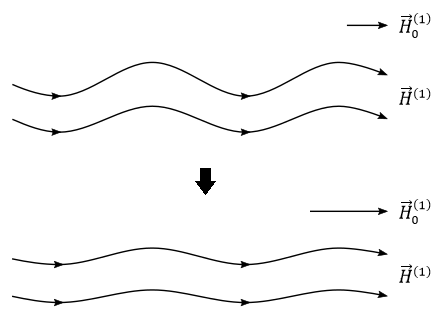


Рисунок 4.5 – Выравнивание линий полной напряжённости магнитного поля в жидкости при увеличении напряжённости внешнего магнитного поля

С другой стороны, на линии напряжённости действуют растягивающие силы (рисунок 4.4). Поскольку магнитное поле в магнитной жидкости однородно, то в общем случае касательные силы имеют одинаковую величину, а их суперпозиция будет направлена по нормали к поверхности в сторону уменьшения амплитуды возмущения. Однако влияние данного эффекта на стабилизацию мало по сравнению с эффектом отталкивания.

**4.6 Выводы из решения задачи**

В результате аналитического решения задачи было получено дисперсионное уравнение для волн на поверхности струи магнитной жидкости, находящейся в параллельном магнитном поле. Его анализ показал, что внешнее магнитное поле оказывает стабилизирующий эффект, а именно, увеличение намагниченности магнитной жидкости сопровождается сужением существующего интервала волновых чисел неустойчивых мод и его одновременным смещением в длинноволновую область.

На качественном уровне эффект стабилизации является следствием сразу двух взаимодействий между линиями намагниченности магнитной жидкости. Во-первых, выравнивание поверхности происходит вследствие уравновешивания сил отталкивания линий намагниченности в областях утолщений и утоньшений осесимметричного возмущения. Во-вторых, натяжение линий намагниченности создает давление, направленное на стабилизацию возмущений с возрастающей амплитудой.

Также было выяснено, что струя магнитной жидкости не достигает состояния абсолютной устойчивости даже при бесконечно больших величинах внешнего магнитного поля. Это связано с существованием осесимметричных длинноволновых возмущений поверхности, у которых большая величина поверхностного давления в областях утоньшений не может быть скомпенсирована никакими величинами давления магнитного поля. Также необходимо заметить, что максимальная стабилизация ограничена величиной намагниченности насыщения магнитной жидкости.

На практике стабилизация струи магнитной жидкости проявляется в увеличении длины устойчивого участка струи и в увеличении диаметра основных капель при распаде на её неустойчивом участке по сравнению с ситуацией, когда внешнее магнтное поле отсутствует [5].