4 Движение капиллярных волн на поверхности цилиндрической струи идеальной несжимаемой жидкости

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим струю идеальной несжимаемой жидкости с массовой плотностью и коэффициентом поверхностного натяжения . Пусть струя имеет цилиндрическую форму радиуса в невозмущённом состоянии, движется с постоянной скоростью вдоль заданного направления и находится в некоторой внешней среде.

Пусть также на поверхности струи распространяется плоская осесимметричная капиллярная волна с амплитудой и длиной , для которой выполяется условие .

Требуется найти дисперсионное соотношение для данного волнового возмущения на поверхности рассматриваемой струи.

1.2 Математическая формулировка задачи

Введём цилиндрическую систему координат, как показано на рисунке 4.1, где ось направлена вдоль направления движения струи, а начало координат привязано к произвольной точке на этой оси и движется с постоянной скоростью . Следовательно, в такой системе координат скорость движения струи будет равна нулю.

Величина , показывающая отклонение частиц жидкости относительно идеальной цилиндрической поверхности струи вдоль нормали к этой поверхности в процессе распространения волны, представляется следующим образом:

где – функция времени и цилиндрических координат и .

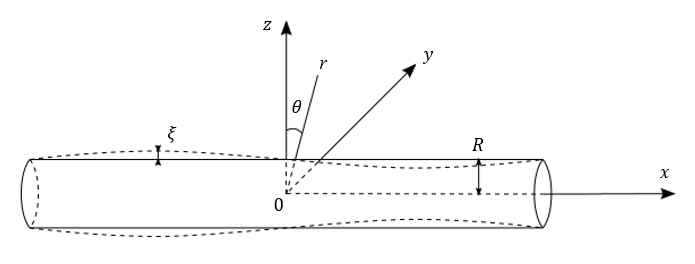


Рисунок 4.1. Схематичное изображение фрагмента струи идеальной несжимаемой жидкости

Определим уравнения и граничные условия задачи с учётом её геометрии в рассматриваемой системе координат. При этом воспользуемся уже некоторыми результатами, полученными ранее при решении задач о распространении гравитационных и гравитационно-капиллярных волн на поверхности плоского слоя жидкости (см. разделы 1 и 2).

*Уравнение несжимаемости.*

Следующее уравнение может быть получено из уравнения несжимаемости (1.3), представленного в разделе 1, в представлении безвихревого движения жидкости (см. пункт 1.3):

где – гидродинамический потенциал, определяющий вектор скорости волнового движения жидкости в точке с координатами в момент времени :

*Условие баланса давлений на поверхности струи.*

Запишем условие непрерывности давления на поверхности струи жидкости:

где – давление жидкости в точке с координатами в момент времени , – поверхностное давление.

Тогда, воспользовавшись уравнением Эйлера (1.4) и произведя преобразования этого уравнения, аналогичные преобразованиям, проведённым в пункте 1.3 в приближении безвихревого движения жидкости, выразим давление :

где – некоторая величина (в общем случае – функция времени), имеющая размерность давления. Она может быть определена, если рассмотреть условие (4.4) с учётом (4.5) в случае отсутствия волнового движения на её поверхности, когда и , где – коэффициент поверхностного натяжения:

Граничное условие (4.4) с учётом (4.5) и (4.6) в линейном приближении будет иметь вид:

*Кинематическое граничное условие.*

Для частицы жидкости, находящейся на поверхности струи, заданной уравнением , будет выполняться кинематическое граничное условие следующего вида:

Вычислим полную производную от выражения (4.8) по времени с учётом того, что и :

и оставим только линейные слагаемые:

*Условие для гидродинамического потенциала на оси струи.*

Единственным требованием для величины скорости (4.3) на оси струи является то, что она должна быть конечна:

1.3 Поверхностное давление жидкости с учётом цилиндрической геометрии

Как было показано в пункте 2.3, выражение для поверхностного давления жидкости может быть получено с использованием формул (2.12) и (2.13), где достаточно определить вид вектора нормали к рассматриваемой поверхности.

Так как возмущённая поверхность цилиндрического столба жидкости задаётся уравнением , то вектор нормали может быть вычислен следующим образом:

где , и – орты соответствующих направлений в цилиндрической системе координат. Тогда, вычисление дивергенции вектора (4.12) в формуле (2.13) и дальнейшая подстановка результата в (2.12) даёт искомое выражение поверхностного давления (оставим только линейные слагаемые):

Заметим, что в отсутствии волнового движения выражение (4.13) будет иметь следующий вид:

что согласуется с формулой Лапласа (2.10).

1.4 Снесение граничных условий на поверхность на цилиндрическую поверхность струи

Поскольку величина очень мала (), то для дальнейшего упрощения математической формулировки задачи появляется возможность переформулировать граничные условия (4.7) и (4.10), заданные на поверхности вида , для идеальной цилиндрической поверхности вида (см. методику в разделе 1, пункт 1.4).

Например, поверхностное давление (4.13) с учётом разложения в ряд Тейлора в точке слагаемых

будет иметь вид:

Перепишем уравнение (4.2) и граничные условия (4.7) и (4.10), проведя аналогичные разложения в ряд всех слагаемых и множителей, являющихся функцией :

Теперь итоговая математическая формулировка данной задачи будет включать в себя уравнение (4.17) и граничные условия (4.11), (4.18) – (4.19).

1.5 Решение задачи

Поскольку на поверхности струи движется волна амплитуды с частотой и длиной волны , то величина , описывающая отклонение точки жидкости с координатами в момент времени , будет иметь следующий вид:

где – волновое число, – некоторое произвольное число. Если , то волна является осесимметричной, так как в выражении (4.20) в данном случае исчезает зависимость от угла .

Так же, как это было сделано во всех предыдущих разделах, гидродинамический потенциал представим в виде бегущей волны, только теперь с учётом азимутального угла :

где – некоторая фукнция координаты .

Заметим, что функции (4.20) и (4.21) должны быть циклическими (то есть совпадать сами с собой при изменении азимутального угла на ):

Тогда, как следует из вида функций (4.20) и (4.21), условие (4.22) может быть записано следующим образом:

Условие (4.23) выполняется тогда, когда число принимает только целочисленные значения.

Теперь найдём функцию , входящую в гидродинамичекий потенциал (4.21). Для этого воспользуемся уравнением несжимаемости (4.2). После несложных преобразований, оно примет вид:

Замена переменной в уравнении (4.24) на переменную приводит его к известному в теории специальных функции модифицированному уравнению Бесселя [??]:

Решением уравнения (4.25) являются две функции: модифицированная функция Бесселя 1-го рода [??]:

и модифицированная функция Бесселя 2-го рода [??]:

Тогда общее решение уравнения (4.25) можно записать в виде линейной комбинации решений (4.26) и (4.27):

где и – произвольные константы. Однако для выполнения граничного условия (4.11) необходимо занулить константу , так как функция (4.28) стремится к бесконечности при .

В итоге гидродинамический потенцал (4.21) будет перезаписан следующим образом:

Зная вид функций (4.20) и (4.29), получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов и , воспользовавшись граничными условиями (4.18) и (4.19):

Также как и во всех предыдущх разделах, искомое дисперсионное соотношение получается путём вычисления определителя системы уравнений (4.30) и приравнивания его нулю [??]:

5 Исследование неустойчивости поверхности цилиндрического столба магнитной жидкости, помещённого во внешнее однородное параллельное магнитное поле

5.1 Постановка задачи

Рассмотрим струю идеальной несжимаемой магнитной жидкости с массовой плотностью , коэффициентом поверхностного натяжения и магнитной проницаемостью . Пусть струя имеет цилиндрическую форму радиуса в невозмущённом состоянии и движется с постоянной скоростью вдоль заданного направления.

Магнитная жидкость при этом находится в некоторой внешней среде с магнитной проницаемостью , где действует параллельное направлению движения струи магнитное поле с вектором напряжённости (см. рисунок 5.1).

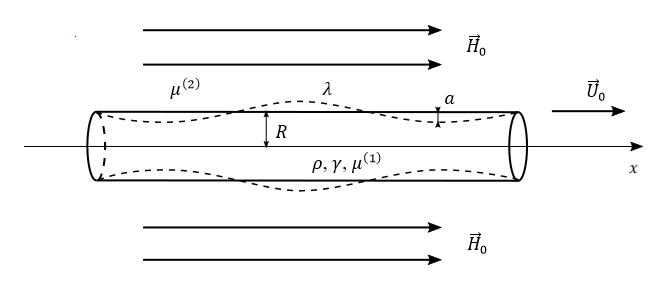


Рисунок 5.1. Условное изображение фрагмента цилиндрического столба магнитной жидкости, по поверхности которого бежит капиллярная волна (систему координат смотреть на рисунке 4.1)

С целью упрощения визуализации на рисунке 5.1 не показано взаимодействие магнитного поля с магнитной жидкостью; также не отображены линии напряжённости магнитного поля внутри струи, хотя они подразумеваются.

Пусть также на поверхности струи распространяется плоская осесимметричная капиллярная волна с амплитудой и длиной , для которой выполяется условие (см. рисунок 5.1).

Требуется получить дисперсионное уравнение и критерий неустойчивости для волн на поверхности рассматриваемой струи.

Необходимо также отметить, что одной из причин рассмотрения в данной задаче именно параллельного направления внешнего магнитного поля, является то, что такие условия легко реализовать, пропустив струю магнитной жидкости через соленоид, внутри которого создается однородное, параллельное движению жидкости магнитное поле. Реализация же ортогонального к поверхности струи магнитного поля более сложна и менее целесообразна и, следовательно, не очень распространена в практике.

5.2 Давление магнитного поля с учётом цилиндрической геометрии

Для начала получим выражение для давления магнитного поля, действующего на струю магнитной жидкости, в простейшем случае, когда на поверхности струи отсутствую любые волновые возмущения, т.е. когда поверхность представляет собой идельный цилиндр (см. рисунок 5.2).

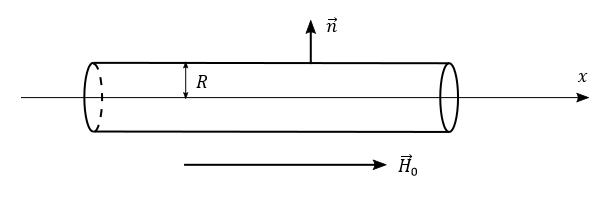


Рисунок 5.2. Конфигурация задачи

Воспользуемся магнитной составляющей максвелловского тензора напряжений [?? Ландау стр. 111][?? Розенцвейг стр. 95]:

где – магнитная проницаемость среды, – вектор напряжённости магнитного поля, – диадное произведение векторов (тензорное произведение вектора-столбца на вектор строку), – символ Кронекера.

Сила, действующая на единицу площади, может быть вычислена путём скалярного умножения вектора нормали к поверхности цилиндра (см. рисунок 5.2) на тензор (5.1):

Снова скалярно умножим выражение (5.2) на вектор нормали, чтобы получить нормальную компоненту поверхностной плотности силы, т.е. давление:

После несложных преобразований легко увидеть, что первое слагаемое в (5.3) занулится, так как проекция вектора на вектор нормали по условию данной задачи равна нулю: , а во втором слагаемом множитель . Теперь выражение для давления магнитного поля на поверхность цилиндра со стороны с магнитной проницаемостью примет следующий вид:

Воспользуемся формулой (5.4) для вычисления суммарного давления в рассматриваемой задаче:

где – давление магнитного поля на поверхность со стороны магнитной жидкости, – давление магнитного поля на поверхность со стороны внешней среды.

Из полученного соотношения (см. формулу 5.5) можно заключить, что суммарное давление направлено в сторону внешней среды, поскольку величина магнитной проницаемости магнитной жидкости (парамагнетика) больше по сравнению с величиной магнитной проницаемости во внешней среде. Cледовательно, магнитное поле будет стремиться дестабилизировать поверхность магнитной жидкости.

Зная результат (5.5), несложно получить выражение для давления магнитного поля в случае наличия волнового возмущения на поверхности струи. Для этого представим магнитное поле в виде суперпозиции (3.3) (см. раздел 3). Тогда формула (5.5) преобразуется к следующему виду:

где – давление магнитного поля на невозмущённую поверхность, – малая поправка к давлению, учитывающая искажение давления магнитного поля на возмущённую поверхность, и – возмущения напряжённостей магнитного поля в магнитной жидкости и внешней среде соответственно. В выражении (5.6) оставлены только слагаемые до 1 порядка малости включительно.

5.3 Математическая формулировка задачи

*Уравнение несжимаемости.*

Воспользуемся раннее полуенным уравнением (4.17):

*Уравнения для потенциалов магитного поля (закон Гаусса).*

Пусть напряжённость магнитного поля характеризуется потенциалом магнитного поля (см. раздел 3, пункт 3.2):

при этом потенциал магнитного поля представляет собой суперпозицию следующего вида:

где – потенциал поля над невозмущённой поверхностью, – малая поправка к потенциалу, учитывающая изменение потенциала поля над возмущённой поверхностью.

В данной задаче, исходя из однотипности представления (5.8), будут справедливы рассмотренные в разделе 3 уравнения (3.14), полученные из закона Гаусса для магнитного поля:

Для удобства уравнения (5.10) и (5.11) записаны после процедуры линеаризации.

*Условие баланса давлений на поверхности струи.*

С учётом давления магнитного поля (см. формулу 5.6) условие баланса давлений на поверхности (4.4) перезапишется следующим образом:

Величина в выражении (4.5) теперь будет равна:

и тогда граничное условие (4.7) перепишется:

Подставим в (5.14) выражения для поверхностного давления (см. формулы (4.13) и (4.16)) и давления магнитного поля (см. формулу (5.6)) и снесём полученное граничное условие на поверхность :

*Кинематическое граничное условие.*

Кинематическое граничное условие (4.19) остаётся без изменений:

*Условие непрерывности тангенциальной компоненты вектора напряжённости магнитного поля на границе раздела сред.*

Воспользуемся граничным условием (3.26) из раздела 3. Также заметим, что векторное произведение вектора нормали к поверхности цилиндра на любой вектор всегда будет вектором, направленным по касательной к поверхности цилиндра. Исходя из этого, альтернативная запись условия (3.26), представленная векторным произведением (3.27) также будет справедлива для рассматриваемой задачи. Тогда, используя линеаризованный вектор нормали (4.12):

выпишем покомпонентно результат вектороного произведения (3.27):

Так как каждый вектор напряжённости магнитного поля можено представить в виде суперпозиции (3.3), то при исключении слагаемых второго порядка малости из выражений (5.18) останутся только следующие компоненты вектора

поскольку и, следовательно, , и .

Перепишем окончательно граничные условия (5.19) через потенциалы магнитного поля (см. формулу (5.8)):

*Условие непрерывности нормальной компоненты вектора индукции магнитного поля на границе раздела сред.*

Воспользуемся граничным условием (3.33) (является альтернативой записи граничного условия (3.32)), которое с учётом (5.17) в первом приближении примет вид:

Перепишем (5.21) через потенциалы магнитного поля и снесём на поверхность :

*Условие для гидродинамического потенциала на оси струи.*

Воспользуемся условием (4.11):

*Граничные условия для потенциалов магнитного поля.*

Поскольку величина магнитного поля не может быть бесконечно большой, то на оси струи должно выполняться следующее условие:

А во внешней среде, модуль вектора дожен обращаться в нулевое значение при бесконечно большом удалении от поверхности струи:

*Материальные уравнения.*

Материальные уравнения, выражающие намагниченность магнитной жидкости через напряжённость магнитного поля, будут такими же, как и в разделе 3 (см. формулы (3.16)).

5.4 Решение задачи

Как это было сделано во всех предыдущих разделах, определим вид неизвестных функций.

Что касается гидродинамической части задачи, то уравнение (4.17) и граничное условие (4.11) были заимствованы в математическую формулировку рассматриваемой задачи из раздела 4 без изменений. Как следствие, это позволяет воспользоваться уже готовым результатом для вида функции гидродинамического потенциала (см. формулу (4.29)):

Потенциалы магнитного поля и аналогично представим в следующем виде:

при этом условие цикличности (4.23) для функций (5.27) – (5.28) также должно выполняться.

Для нахождения незвестных функций и , входящих в потенциалы (5.27) – (5.28), необходимо воспользоваться уравнениями Лапласа (5.10) и (5.11) соответственно. В результате несложных преобразований получим:

где , , и – неизвестные константы. Уменьшим их количество, воспользовавшись граничными условиями (5.24) и (5.25): чтобы удовлетворить условию (5.24), необходимо положить , тогда потенциал (5.27) перепишется следующим образом:

а потенциал (5.28) с учётом (5.25):

Необходимо также отметить, что граничные условия (5.20) эквивалентны, поскольку частные производные функций (5.31) и (5.32) по и по эквивалентны с точностью до константы. Так как эти граничные условия в последующей системе уравнений будут линейно-зависимыми, то необходимо оставить только одно из них.

Составим систему уравнений из оставшихся четырёх граничных условий (5.15), (5.16), (5.20) и (5.22) отноительно четырех функций с неопределёнными константами (4.20), (5.26), (5.31) и (5.32):

где введены следующие обозначения:

Теперь дисперсионное уравнение может быть получено путём приравнивания нулю определителя системы (5.33):

Воспользуемся материальными уравнениями (3.16) для выражения напряжённости магнитного поля через величину намагниченности :

Тогда дисперсионное уравнение (5.35) перепишется: