4 Движение капиллярных волн на поверхности цилиндрической струи идеальной несжимаемой жидкости

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим струю идеальной несжимаемой жидкости с массовой плотностью и коэффициентом поверхностного натяжения . Пусть струя имеет цилиндрическую форму радиуса в невозмущённом состоянии, движется с постоянной скоростью вдоль заданного направления и находится в некоторой внешней среде.

Пусть также на поверхности струи распространяется плоская осесимметричная капиллярная волна с амплитудой и длиной , для которой выполяется условие .

Требуется найти дисперсионное соотношение для данного волнового возмущения на поверхности рассматриваемой струи.

1.2 Математическая формулировка задачи

Введём цилиндрическую систему координат, как показано на рисунке 4.1, где ось направлена вдоль направления движения струи, а начало координат привязано к произвольной точке на этой оси и движется с постоянной скоростью . Следовательно, в такой системе координат скорость движения струи будет равна нулю.

Величина , показывающая отклонение частиц жидкости относительно идеальной цилиндрической поверхности струи вдоль нормали к этой поверхности в процессе распространения волны, представляется следующим образом:

где – функция времени и цилиндрических координат и .

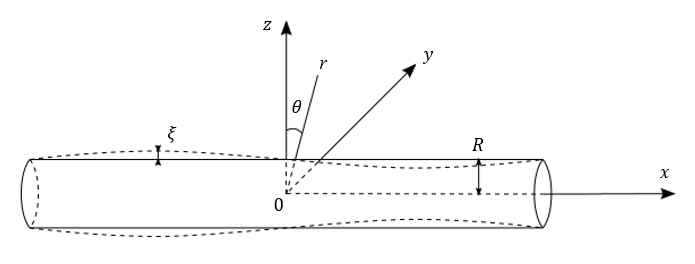


Рисунок 4.1. Схематичное изображение фрагмента струи идеальной несжимаемой жидкости

Определим уравнения и граничные условия задачи с учётом её геометрии в рассматриваемой системе координат. При этом воспользуемся уже некоторыми результатами, полученными ранее при решении задач о распространении гравитационных и гравитационно-капиллярных волн на поверхности плоского слоя жидкости (см. разделы 1 и 2).

*Уравнение несжимаемости.*

Следующее уравнение может быть получено из уравнения несжимаемости (1.3), представленного в разделе 1, в представлении безвихревого движения жидкости (см. пункт 1.3):

где – гидродинамический потенциал, определяющий вектор скорости волнового движения жидкости в точке с координатами в момент времени :

*Условие баланса давлений на поверхности струи.*

Запишем условие непрерывности давления на поверхности струи жидкости:

где – давление жидкости в точке с координатами в момент времени , – поверхностное давление.

Тогда, воспользовавшись уравнением Эйлера (1.4) и произведя преобразования этого уравнения, аналогичные преобразованиям, проведённым в пункте 1.3 в приближении безвихревого движения жидкости, выразим давление :

где – некоторая величина (в общем случае – функция времени), имеющая размерность давления. Она может быть определена, если рассмотреть условие (4.4) с учётом (4.5) в случае отсутствия волнового движения на её поверхности, когда и , где – коэффициент поверхностного натяжения:

Граничное условие (4.4) с учётом (4.5) и (4.6) в линейном приближении будет иметь вид:

*Кинематическое граничное условие.*

Для частицы жидкости, находящейся на поверхности струи, заданной уравнением , будет выполняться кинематическое граничное условие следующего вида:

Вычислим полную производную от выражения (4.8) по времени с учётом того, что и :

и оставим только линейные слагаемые:

*Условие для гидродинамического потенциала на оси струи.*

Единственным требованием для величины скорости (4.3) на оси струи является то, что она должна быть конечна:

1.3 Поверхностное давление жидкости с учётом цилиндрической геометрии

Как было показано в пункте 2.3, выражение для поверхностного давления жидкости может быть получено с использованием формул (2.12) и (2.13), где достаточно определить вид вектора нормали к рассматриваемой поверхности.

Так как возмущённая поверхность цилиндрического столба жидкости задаётся уравнением , то вектор нормали может быть вычислен следующим образом:

где , и – орты соответствующих направлений в цилиндрической системе координат. Тогда, вычисление дивергенции вектора (4.12) в формуле (2.13) и дальнейшая подстановка результата в (2.12) даёт искомое выражение поверхностного давления (оставим только линейные слагаемые):

Заметим, что в отсутствии волнового движения выражение (4.13) будет иметь следующий вид:

что согласуется с формулой Лапласа (2.10).

1.4 Снесение граничных условий на поверхность на цилиндрическую поверхность струи

Поскольку величина очень мала (), то для дальнейшего упрощения математической формулировки задачи появляется возможность переформулировать граничные условия (4.7) и (4.10), заданные на поверхности вида , для идеальной цилиндрической поверхности вида .

Для этого сначала разложим в ряд Тейлора в точке все слагаемые и множители, входящие в граничные условия и являющиеся функцией :

Тогда, с учётом разложений (4.17) – (4.18) поверхностное давление (4.13) будет иметь вид:

Граничные условия (4.7) и (4.10) с учётом разложений (4.15) – (4.16) и поверхностного давления (4.19) перепишутся следующим образом:

1.5 Обезразмеривание выражений математической формулировки задачи

Проведём процедуру обезразмеривания уравнений и граничных условий задачи с целью дальнейшего упрощения решения задачи и получения в итоге решения уже обезразмеренного дисперсионного уравнения. Для этого введём безрамерные переменные , , , и , которые выражаются через соответствующие им размерные переменные следующим образом:

Перепишем уравнения и граничные условия задачи в окончательном виде через безразмерные переменные (4.22):

*Уравнение несжимаемости:*

*Условие баланса давлений на поверхности струи:*

*Кинематическое граничное условие:*

*Условие для гидродинамического потенциала на оси струи:*

Здесь и в дальнейшем в полученных выражениях символ «\*» убран для краткости записи, но он подразумевается.

1.6 Решение задачи

Поскольку на поверхности струи движется волна амплитуды с частотой и длиной волны , то величина , описывающая отклонение точки жидкости с координатами в момент времени , будет иметь следующий вид:

где – волновое число, – некоторое произвольное число. Если , то волна является осесимметричной, так как в выражении (4.27) в данном случае исчезает зависимость от угла .

Так же, как это было сделано во всех предыдущих разделах, гидродинамический потенциал представим в виде бегущей волны, только теперь с учётом азимутального угла :

где – некоторая фукнция координаты .

Заметим, что функции (4.27) и (4.28) должны быть циклическими (то есть совпадать сами с собой при изменении азимутального угла на ):

Тогда, как следует из вида функций (4.27) и (4.28), условие (4.29) может быть записано следующим образом:

Условие (4.30) выполняется тогда, когда число принимает только целочисленные значения.

Теперь найдём функцию , входящую в гидродинамичекий потенциал (4.28). Для этого воспользуемся уравнением несжимаемости (4.23). После несложных преобразований, оно примет вид:

Замена переменной в уравнении (4.31) на переменную приводит его к известному в теории специальных функции модифицированному уравнению Бесселя [??]:

Решением уравнения (4.32) являются две функции: модифицированная функция Бесселя 1-го рода [??]:

и модифицированная функция Бесселя 2-го рода [??]:

Тогда общее решение уравнения (4.32) можно записать в виде линейной комбинации решений (4.33) и (4.34):

где и – произвольные константы. Однако для выполнения граничного условия (4.26) необходимо занулить константу , так как функция (4.34) стремится к бесконечности при .

В итоге гидродинамический потенцал (4.28) будет перезаписан следующим образом:

Зная вид функций (4.27) и (4.36), получим систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов и , воспользовавшись граничными условиями (4.24) и (4.25):

Также как и во всех предыдущх разделах, искомое дисперсионное соотношение получается путём вычисления определителя системы уравнений (4.24) и приравнивания его нулю: