

## Практическое занятие №4

Армбристер Никита Владиславович

Группа ПМИ-31

Вариант 1

**Цель:** сформировать практические навыки применения схем численного интегрирования при использовании квадратурных формул интерполяционного типа, квадратур Гаусса и квадратур для вычисления интегралов специального вида.

### Задание:

1. Задайте на отрезке  $[a,b]$  непрерывную неполиномиальную функцию  $\varphi(x)$

2. Вычислить  $\int_a^b \varphi(x) dx$  точностью  $\varepsilon = 0.01$ . Обосновать выбор схемы интегрирования.

Оценить абсолютную погрешность результата.

3. С помощью AI-ассистента DeepSeek решите предыдущую задачу. Какие явные недостатки можно обнаружить?

Промт. Оптимальный метод численного интегрирования  $\text{Int}\{\exp(x)\}dx$   $x \in [0,1]$  с точностью 0.01?

4. На множестве  $R$  задайте всюду непрерывную функцию  $\psi(x)$

5. Вычислить  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-x^2} dx$  Использовать квадратуру максимальной точности с  $N$  узлами интегрирования. Оценить абсолютную погрешность результата.

**Вариант:**  $a=-0.10$ ;  $b=0.28$ ;  $N=2$

### Решение:

1) Зададим  $f(x)=x * e^x$

2) Вычислим интеграл  $\int_{-0.1}^{0.28} x * e^x dx$  точностью  $\varepsilon = 0.01$

Для начала вычислим длину отрезка интегрирования

$$h=b-a=0.28-(-0.10)=0.38$$

Теперь можно найти длину одного сегмента

$$h_k=\frac{L}{N}=\frac{0.38}{2}=0.19$$

Функция  $(x)=x * e^x$  на отрезке  $[-0.1, 0.28]$  Имеет ограниченные производные:

$$f'(x)=e^x(x+1); f''(x)=e^x(x+2); e^x>0$$

$$\text{Найдем } \max_{x \in [-0.1; 0.28]} f''(x)=\max_{x \in [-0.1; 0.28]} f^x(x+2)$$

Функция  $x+2$  возрастает,  $e^x$  возрастает, поэтому максимум будет в  $x=0.28$ , а минимум в  $x=-0.1$

$$f''(0.28) = e^{0.28} * 2,28 \approx 3.017$$

$$f''(-0.1) = e^{-0.1} * 1.9 \approx 1.719$$

Если  $h_k > 0$ , то  $\sum_{x=1}^N h_k^3 \leq h^3$ , где  $h = 0.38$  – длина отрезка интегрирования

При  $N=1$  ( $h=0.38$ ) Остаточный член метода средних прямоугольников

$$R = \frac{f''(\xi)}{24} h^3$$

Ограничен снизу величиной

$$\frac{\min f''(\xi)}{24} h^3 \approx \frac{1.719 * 0.38^3}{24} \approx 0.0039$$

А сверху величиной

$$\frac{\max f''(\xi)}{24} h^3 \approx \frac{3.017 * 0.38^3}{24} \approx 0.0069$$

Воспользуемся методом прямоугольников. Найдем среднюю точку отрезка

$$x_m = \frac{-0.1 + 0.28}{2} = 0.09$$

Найдем значение функции в средней точке

$$f(0.09) = 0.09 * e^{0.09} \approx 0.098$$

Тогда по формуле средних прямоугольников для одного интервала

$$\int_{-0.1}^{0.28} x * e^x dx \approx 0.38 * 0.098 = 0.0372$$

Точное решение будет выглядеть как 0.0427

Оценим абсолютную погрешность:  $\Delta = 0.0427 - 0.0372 = 0.0055$

- 3) Решим предыдущую задачу, используя AI-ассистент DeepSeek:

Оптимальный метод численного интегрирования  $\text{Int}\{xe^x\}dx$   $x \in [-0.1; 0.28]$  с точностью 0.01?



Отличный вопрос. Давайте разберем его по шагам.

## 1. Анализ подынтегральной функции

Подынтегральная функция:  $f(x) = x * e^x$

- **Производная:**  $f'(x) = e^x + x * e^x = e^x (1 + x)$
- **Поведение:** На отрезке  $[-0.1, 0.28]$  функция является гладкой, монотонно возрастающей (так как  $f'(x) > 0$  на этом интервале, за исключением точки  $x=-1$ , которая не входит в отрезок). Она не имеет особенностей, разрывов или быстрых осцилляций.

Это "хорошая" функция для интегрирования, поэтому даже простые методы будут эффективны.

## 2. Оценка погрешности и выбор метода

Нам нужна точность 0.01. Это не сверхвысокая точность, поэтому мы можем обойтись без адаптивных методов и использовать метод фиксированного шага.

Самые подходящие кандидаты для небольшой размерности и гладкой функции:

1. **Формула Симпсона (Парабол)** - Имеет порядок точности  $O(h^4)$ , что очень эффективно. Для достижения точности 0.01 потребуется относительно небольшое число разбиений.
2. **Формула Гаусса** - Очень эффективный метод, который часто требует наименьшего числа вычислений функции для заданной точности. Идеально подходит для такого случая.

**Вывод:** Метод Гаусса будет оптимальным, так как он обеспечит требуемую точность с минимальным количеством вычислений подынтегральной функции. Формула Симпсона — отличный и простой в реализации запасной вариант.

### 3. Решение методом Гаусса (Квадратура Гаусса)

Метод Гаусса для  $n$  точек точен для полиномов степени  $2n-1$ . Для нашей функции с высокой точностью хватит даже  $n=3$ .

Применим квадратуру Гаусса с 3 узлами на отрезке  $[a, b] = [-0.1, 0.28]$ .

- Длина отрезка  $L = b - a = 0.28 - (-0.1) = 0.38$
- Середина отрезка  $c = (a + b)/2 = 0.09$

Узлы и веса для 3 точек (стандартные для отрезка  $[-1, 1]$ ):

- $t_1 = -\sqrt{3}/5 \approx -0.77459667, A_1 = 5/9 \approx 0.55555556$
- $t_2 = 0, A_2 = 8/9 \approx 0.88888889$
- $t_3 = \sqrt{3}/5 \approx 0.77459667, A_3 = 5/9 \approx 0.55555556$

Преобразование на наш отрезок  $[a, b]$ :

$$x_i = c + (L/2) * t_i$$

- $x_1 = 0.09 + (0.38/2) * (-0.77459667) = 0.09 - 0.14717337 \approx -0.05717337$
- $x_2 = 0.09 + (0.38/2) * 0 = 0.09$
- $x_3 = 0.09 + (0.38/2) * 0.77459667 = 0.09 + 0.14717337 \approx 0.23717337$

Вычисляем значения функции в этих узлах:

- $f(x_1) = x_1 * e^{(x_1)} = -0.05717337 * e^{-(-0.05717337)} \approx -0.05717337 * 0.9444 \approx -0.05400$
- $f(x_2) = x_2 * e^{(x_2)} = 0.09 * e^{(0.09)} = 0.09 * 1.09417 \approx 0.09848$
- $f(x_3) = x_3 * e^{(x_3)} = 0.23717337 * e^{(0.23717337)} \approx 0.23717337 * 1.26763 \approx 0.30063$

Применяем формулу Гаусса:

$$I \approx (L/2) * [A_1 * f(x_1) + A_2 * f(x_2) + A_3 * f(x_3)]$$

$$I \approx (0.38 / 2) * [0.555556 * (-0.05400) + 0.888889 * (0.09848) + 0.555556 * (0.30063)]$$

$$I \approx 0.19 * [-0.03000 + 0.08754 + 0.16702]$$

$$I \approx 0.19 * 0.22456$$

$$I \approx 0.0426664$$

Округляем до двух знаков после запятой (с запасом, согласно точности):

$$I \approx 0.043$$

#### 4. Проверка точности и альтернатива (Метод Симпсона)

Давайте проверим, сколько разбиений потребовалось бы методу Симпсона.

Погрешность метода Симпсона:  $|R| \leq (M_4 * L^5) / (180 * n^4)$ , где  $M_4$  — максимум модуля 4-й производной на отрезке.

- $f^{(4)}(x) = e^x (x + 4)$
- На отрезке  $[-0.1, 0.28]$  максимум  $|f^{(4)}(x)|$  будет при  $x=0.28$ :  
 $M_4 \approx e^{0.28} * (0.28+4) \approx 1.323 * 4.28 \approx 5.66$
- $L = 0.38$

Подставим в формулу погрешности, требуя  $R \leq 0.01$ :

$$(5.66 * (0.38)^5) / (180 * n^4) \leq 0.01$$

$$(5.66 * 0.0079) / (180 * n^4) \leq 0.01$$

$$(0.0447) / (180 * n^4) \leq 0.01$$

$$0.0447 \leq 1.8 * n^4$$

$$n^4 \geq 0.02483$$

$$n \geq \sqrt[4]{0.02483} \approx 0.396$$

Это означает, что даже  $n=1$  (т.е., всего 3 точки, один элементарный сегмент) формально удовлетворяет условию по погрешности. Это подтверждает, что наша функция очень "простая".

Вычислим по формуле Симпсона с  $n=2$  (шаг  $h = L / 2 = 0.19$ ):

- $x_0 = -0.1$ ,  $f(x_0) = -0.1 * e^{-0.1} \approx -0.09048$
- $x_1 = 0.09$ ,  $f(x_1) = 0.09 * e^{0.09} \approx 0.09848$
- $x_2 = 0.28$ ,  $f(x_2) = 0.28 * e^{0.28} \approx 0.36710$

$$I \approx (h/3) * [f(x_0) + 4*f(x_1) + f(x_2)]$$

$$I \approx (0.19 / 3) * [-0.09048 + 4*0.09848 + 0.36710]$$

$$I \approx 0.06333 * [-0.09048 + 0.39392 + 0.36710]$$

I ≈ 0.06333 \* 0.67054

I ≈ 0.04246 ≈ 0.042

Метод Симпсона дал результат 0.042, который очень близок к результату Гаусса ( 0.043 ). Разница ( 0.001 ) меньше требуемой точности.

## 5. Заключение и итоговый ответ

### 1. Оптимальный метод: Квадратура Гаусса с 3 узлами.

- Причина: Обеспечивает высокую точность (погрешность  $\sim 10^{-4}$ ) при минимальном количестве вычислений подынтегральной функции (всего 3 вычисления). Это самый эффективный метод для данной задачи.

### 2. Результат интегрирования:

$\int x * e^x dx$  от -0.1 до 0.28 ≈ 0.043

### 3. Отличная альтернатива: Метод Симпсона с 2 интервалами (3 точками).

- Причина: Чрезвычайно прост в реализации и также с огромным запасом обеспечивает требуемую точность 0.01, давая результат 0.042.

Ответ: Для интегрирования  $\int x * e^x dx$  на отрезке [-0.1, 0.28] с точностью 0.01 оптимальным является метод Гаусса с 3 узлами, который дает результат ~0.043.

Думаю, основной недостаток в представленном решении заключается в отсутствии проверки точности расчетным путем – DeepSeek просто «предположил», какой метод будет наиболее подходящим в данной ситуации. По этой причине его сравнение и конечный выбор оказался некорректным. Были задействованы квадратуры Гаусса, которые, бесспорно, дали более точный результат, но вот считаются они куда сложнее

- Зададим непрерывную функцию  $\psi(x) = x^4$  на множестве  $\mathbb{R}$
- Вычислим  $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-x^2} dx$  через квадратуру максимальной точности с 2 узлами

интегрирования. Оценить абсолютную погрешность результата.  
Квадратурной формулой называют

$$\int_a^b p(x)f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

где  $p(x)$  – весовая функция,  $a_i$  – коэффициенты,  $x_i$  – узлы квадратурной формулы.  
Коэффициенты квадратурной формулы определяются как

$$a_i = \int_a^b p(x) l_i(x) dx, \forall i = 1, n$$

где  $l(x)$  – базисный полином Лагранжа.

Если  $n$  – число узлов квадратурной формулы, то квадратурная формула может быть точна для полинома максимальной степени  $2n-1$  и иметь порядок аппроксимации  $2n$ .

В нашем случае весовая функция  $p(x) = e^{-x^2}$

Для веса  $p(x) = e^{-x^2}$  на  $(-\infty, +\infty)$  ортогональными многочленами являются многочлены Чебышева-Эрмита  $H_n(x)$

При  $n=2$  узлы квадратурной формулы – это корни  $H_2(x)$

Многочлены Чебышева-Эрмита определяются рекуррентно:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H_n'(x)$$

Пусть  $n=2$ . На всей оси  $(-\infty, +\infty)$  многочлен Чебышева-Эрмита  $H_2(x)=4x^2-2$  имеет два корня

$$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0,7071$$

По двум точкам можно задать интерполяционный многочлен Лагранжа степени 1:

$$l_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} = \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}$$

$$l_2(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-x}{\sqrt{2}}$$

Находим коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$ :

$$a_1 = \int_a^b p(x) l_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} * x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} dx = \textcolor{red}{i} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.8862 \textcolor{red}{i}$$

$$a_2 = \int_a^b p(x) l_2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} * \frac{\sqrt{2}}{2} - x}{\sqrt{2}} dx = \textcolor{red}{i} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.8862 \textcolor{red}{i}$$

Тогда квадратурная форма для  $N=2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \psi(x) * dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^4 * dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \psi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \psi\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \approx 0.8862$$

Точное значение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^4 * dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \approx 1.329$$

Тогда абсолютная погрешность равна  $\Delta = 1.329 - 0.8862 = 0.4428$

## Вывод

В ходе данной лабораторной работы были сформированы практические навыки применения схем численного интегрирования.

Для первой части задания был задействован метод средних прямоугольников и получен результат с точностью 0.0055. Был проведен анализ решения AI-ассистента DeepSeek, в ходе которого было выявлено, что тот подошел к решению без должной численной оценки погрешности из-за чего применил более сложный подход.

Во второй части задания были использованы квадратурные формы интерполяционного типа. В моем варианте при  $N=2$  они давали точную оценку для полиномов со степенью  $<=3$ . При взятии полинома  $x^4$  получилось найти численное

приближение интеграла, посчитать абсолютную погрешность и продемонстрировать работу метода