Практическое задание №8

Армбристер Никита Владиславович

Группа ПМИ-31

Вариант 1

Цель: сформировать практические навыки решения нелинейных систем уравнений (СНУ).

Задание:

Найти решение СНУ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ при $x \in [-1,0]$

$$\begin{cases} y + \sin(x) = 1 \\ x + y^2 = 2 \end{cases}$$

Решение:

1) Для решения систем нелинейных уравнений выделяется два метода: Метод простых итераций (МПИ) и метод Ньютона. Первый обеспечивает простоту реализации и предлагает линейную сходимость. Второй же метод может похвастаться квадратичной сходимостью, но требует вычисление матрицы Якоби (т.е. производных) и ее обращения, он также крайне чувствителен к начальному приближению – если оно далеко от решения, метод может расходиться.
Я считаю, для данной системы можно попробовать воспользоваться методом Ньютона. Как было сказано выше, он обеспечит более быструю сходимость, но при условии верного подбора начального вектора. Классический вариант (0, 0) тут не подойдет. Матрица Якоби же для данной системы вполне легко составиться.
В качестве начального приближения я возьму вектор
$$\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7 \\ 1.6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sin(-0.7) + 1.6 \approx 0.95 \\ -0.7 + 1.6^2 = 1.86 \end{cases}$$
Нормировка $x \in [-1,0]$ выполняется, а приближение весьма близко к вектору-результату. Тогда имеем
$$F = \begin{pmatrix} \sin(x) + y - 1 \\ x + y^2 - 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x^{(0)} \\ y^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$

2) Сформируем матрицу Якоби
$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x) & 1 \\ 1 & 2y \end{pmatrix}$$
Найдем обратную матрицу
$$(\nabla F)^{-1} = \frac{1}{2y \cdot \cos(x) - 1} \begin{pmatrix} 2y & -1 \\ -1 & \cos(x) \end{pmatrix}$$

3) Применим формулу
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (\nabla F(x^{(k)}))^{-1} \cdot F(x^{(k)}), где\, x^{(k)} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix}$$
Тогда $k = 0$:

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}-0.7\\1.6\end{pmatrix}-\left(\nabla F\left(\begin{pmatrix}-0.7\\1.6\end{pmatrix}\right)\right)^{-1}\cdot F\left(\begin{pmatrix}-0.7\\1.6\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}-0.7\\1.6\end{pmatrix}-\frac{1}{2\cdot 1.6\cdot\cos(-0.7)-1}\begin{pmatrix}2\cdot 1.6 & -1\\ -1 & \cos(-0.7)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sin(-0.7)+1.6-1\\ -0.7+1.6^2-2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-0.6990\\1.6434\end{pmatrix}$$

$$\delta=\frac{\left\|x^{(1)}-x^{(0)}\right\|_2}{\left\|x^{(0)}\right\|_2}\approx 0.0249>10^{-3}$$

Точность не достигнута – продолжаем итерации

$k=1$:

$$x^{(2)}=\begin{pmatrix}-0.6990\\1.6434\end{pmatrix}-\left(\nabla F\left(\begin{pmatrix}-0.6990\\1.6439\end{pmatrix}\right)\right)^{-1}\cdot F\left(\begin{pmatrix}-0.6990\\1.6439\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}-0.6990\\1.6434\end{pmatrix}-\frac{1}{2\cdot 1.6434\cdot\cos(-0.6990)-1}\begin{pmatrix}2\cdot 1.6434 & -1\\ -1 & \cos(-0.6990)\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}\sin(-0.6990)+1.6434-1\\ -0.6990+1.6434^2-2\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-0.6977\\1.6425\end{pmatrix}$$

$$\delta=\frac{\left\|x^{(2)}-x^{(1)}\right\|_2}{\left\|x^{(1)}\right\|_2}\approx 0.0009<10^{-3}$$

Точность достигнута

Ответ.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-0.6077\\1.6425\end{pmatrix}$$