Практическое занятие №3

Армбристер Никита Владиславович

Группа ПМИ-31

Вариант 1

Цель: Сформировать практические навыки применения МНК и SVD для решения систем линейных уравнений с матрицами неполного ранга.

Задание: Найти рост ВВП (%) страны в 2024 году по методу наименьших квадратов и с помощью SVD при использовании линейного тренда. Постройте графическое изображение данных и тренда.

№	2022	2023	2024	2025
1	2.9	3.6	?	2.7

Решение:

Рост ВВП в i-ый год определяется по значению линейного тренда $ВВП_i(\%)=a\cdot год_i+b$, где a и b – параметры тренда, которые необходимо найти. Т.е. по данным первого варианта получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a\cdot 2022+b=2.9 \\ a\cdot 2023+b=3.6 \\ a\cdot 2025+b=2.7 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2022 & 1 \\ 2023 & 1 \\ 2025 & 1 \end{pmatrix};\ x=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix};\ f=\begin{pmatrix} 2.9 \\ 3.6 \\ 2.7 \end{pmatrix}$$

Решим задачу с помощью метода наименьших квадратов (МНК)

По методу наименьших квадратов (МНК) решение СЛАУ сводится к минимизации квадрата нормы отклонения левой части от правой

Для этого получим нормальную систему уравнений:

$$A^T Ax=A^T f\Rightarrow\begin{pmatrix} 2022 & 2023 & 2025 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2022 & 1 \\ 2023 & 1 \\ 2025 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2022 & 2023 & 2025 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2.9 \\ 3.6 \\ 2.7 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} 12281638 & 6070 \\ 6070 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18614.1 \\ 9.2 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} 12281683\,a+6070\,b=18614.1 \\ 6070\,a+3\,b=9.2 \end{cases}$ – новая нормальная система уравнений

Решим новую систему уравнений

$$\left[\begin{array}{cc|c} 12281638 & 6070 & 18614.1 \\ 6070 & 3 & 9.2 \end{array}\right]\ \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -0.0023 & -0.57372 \\ 6070 & 3 & 9.2 \end{array}\right]$$

$$b=\frac{-0.57372}{-0.0023}\approx 249.44348;\ a=\frac{9.2-3\cdot 249.443}{6070}\approx -0.121768$$

ВВП за 2024 год по методу МНК: $-0.121786\cdot 2025+249.44348=2.948616\approx 2.9$

Теперь решим задачу с помощью метода SVD (Singular value decomposition)

SVD определяется как $A = U\Sigma V^T$, где U – левые сингулярные векторы (собственные векторы для AA^T), V – правые сингулярные векторы (собственные векторы для $A^T A$), Σ – диагональная матрица с сингулярными числами (квадратные корни из собственных значений матриц $A^T A$ или AA^T).

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2022 & 1 \\ 2023 & 1 \\ 2025 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2022 & 2023 & 2025 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4088485 & 4090507 & 4094551 \\ 4092529 & 4094553 & 4098601 \\ 4094551 & 4096576 & 4100626 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные значения для AA^T

$$det\left(AA^T - \lambda E\right) = det\begin{pmatrix} 4088485-\lambda & 4090507 & 4094551 \\ 4092529 & 4094553-\lambda & 4098601 \\ 4094551 & 4096576 & 4100626-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Спектр собственных значений будет совпадать с $det\left(A^T A - \lambda E\right) = det\begin{pmatrix} 12281638-\lambda & 6070 \\ 6070 & 3-\lambda \end{pmatrix}$

$$\lambda_1 = 12281638$$

$$\lambda_2 = 1.13991 \cdot 10^{-6} = 0.00000113991$$

Следовательно, для AA^T собственные значения $\lambda_1 = 12281638;\ \lambda_2 = 0.00000113991;\ \lambda_3 = 0$

Можно определить сингулярные числа для Σ:

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$$

$$\sigma_1 \approx 3504.51138 \approx 3505;\ \sigma_2 \approx 0.00106767 \approx 0.0012;\ \sigma_3 = 0$$

Построим матрицу $\Sigma = \begin{pmatrix} 3505 & 0 \\ 0 & 0.0012 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Теперь построим матрицу U (левые сингулярные векторы)

$$\lambda_1 : \left(AA^T - \lambda_1 E\right) u_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} -8193115 & 4090507 & 4094551 \\ 4092529 & -8187047 & 4098601 \\ 4094551 & 4096576 & -8180974 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -8.19 & 4.09 & 4.09 \\ 4.09 & -8.19 & 4.1 \\ 4.09 & 4.1 & -8.18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{21} \\ u_{31} \end{pmatrix} = 0$$

$$\|u_1\|_2 \approx \begin{pmatrix} -0.577 \\ -0.577 \\ -0.577 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 : \left(AA^T - \lambda_2 E\right) u_2 = 0 \Rightarrow \|u_2\|_2 \approx \begin{pmatrix} 0.618 \\ 0.155 \\ -0.771 \end{pmatrix}$$

$$U=\begin{pmatrix}-0.577 & 0.618\\ -0.577 & 0.155\\ -0.577 & -0.771\end{pmatrix}$$

Теперь построим матрицу V^T

Используя геометрическое свойство SVD

$$v_i=\frac{1}{\sigma_i}A^T u_i$$

Тогда

$$v_1=\frac{1}{\sigma_1}A^T u_1=\frac{1}{3505}\begin{pmatrix}2022 & 2023 & 2025\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.577\\ -0.577\\ -0.577\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.999\\ -0.000494\end{pmatrix}$$

$$v_2=\frac{1}{\sigma_2}A^T u_2=\frac{1}{0.0012}\begin{pmatrix}2022 & 2023 & 2025\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.618\\ 0.155\\ -0.771\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.000494\\ 0.999\end{pmatrix}$$

$$V^T=\begin{pmatrix}-0.999 & -0.000494\\ -0.000494 & 0.999\end{pmatrix}$$

В таком случае

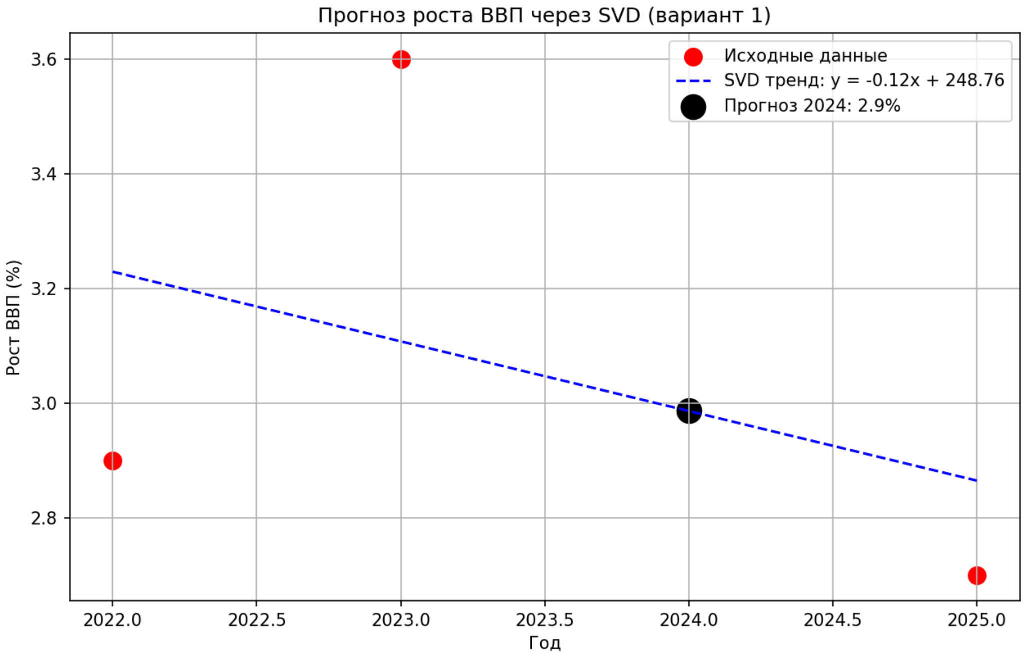
$$A=U\Sigma V^T=\begin{pmatrix}-0.577 & 0.618\\ -0.577 & 0.155\\ -0.577 & -0.771\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3505 & 0\\ 0 & 0.0012\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.999 & -0.000494\\ -0.000494 & 0.999\end{pmatrix}$$

$$x=(V\Sigma^{-1}U^T)f=$$

$$=\begin{pmatrix}-0.999 & -0.000494\\ -0.000494 & 0.999\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3505 & 0\\ 0 & 0.0012\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-0.577 & -0.577 & -0.577\\ 0.618 & 0.155 & -0.771\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2.9\\ 3.6\\ 2.7\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}-0.1214\\ 248.7571\end{pmatrix}$$

ВВП за 2024 год по методу SVD: $-0.1214\cdot 2025+248.7571=2.925\approx 2.9$

Оба метода выдают приблизительно один и тот же результат



Ответ:

Рост ВВП страны в 2024 равен 2.9%