

Практическое занятие №7

Армбристер Никита Владиславович

Группа ПМИ-31

Вариант 1

Цель: сформировать практические навыки применения методов дискретного вэйвлет-преобразования для анализа одномерных сигналов на основе разных базисных вэйвлет-систем.

Задание:

1. На языке программирования C++ реализовать алгоритмы кратномасштабного анализа на базе вэйвлетов Хаара, Шеннона и Добеши (D6).
2. Задать $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ отсчетов зашумленного сигнала вида:

$$z(j) = \begin{cases} 0, & 0 \leq j < \frac{N}{4} \\ A + B \cos\left(\frac{2\pi \omega_2 j}{N}\right), & \frac{N}{4} \leq j \leq \frac{3N}{4} \\ 0, & \frac{N}{2} < j \leq \frac{3N}{4} \\ A + B \cos\left(\frac{2\pi \omega_2 j}{N}\right), & \frac{3N}{4} \leq j \leq N \end{cases}$$

3. Выполните 4-этапный кратномасштабный анализ этого сигнала: приведите графические изображения скалярных произведений $(z, \psi_{-1,k})$, $(z, \psi_{-2,k})$, $(z, \psi_{-3,k})$, $(z, \psi_{-4,k})$, $(z, \varphi_{-4,k})$. Проанализируйте эти графики при использовании вэйвлетов Хаара, Шеннона и Добеши (D6).
4. Выполните частичное восстановление сигнала на каждом из этапов $P_{-1}(z)$, $P_{-2}(z)$, $P_{-3}(z)$. Проанализируйте их графики при использовании вэйвлетов Хаара, Шеннона и Добеши (D6). Как ведёт себя зашумление при переходе от этапа к этапу?
5. Попробуйте решить задачу о фильтрации зашумлённого сигнала на втором этапе: обнулите высокочастотные коэффициенты вэйвлет-разложения $(z, \psi_{-2,k})$ и постройте $P_{-1}(z)$. В каком базисе задача о фильтрации кусочно-постоянного сигнала может быть решена точнее?
6. Задать $N = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$ отсчётов зашумлённого сигнала вида:

$$z(j) = A \cos(2\pi \omega_1 j / N + \varphi) + B \cos(2\pi \omega_2 j / N)$$

7. Какой вэйвлет-базис предпочтительнее и сколько этапов потребуется для решения задачи о фильтрации такого сигнала?
8. Сформулируйте общий вывод: когда следует при менять дискретное преобразование Фурье, а когда дискретное вэйвлет-преобразование?

Вариант 1:

n	A	B	ω_1	ω_2	φ
---	---	---	------------	------------	-----------

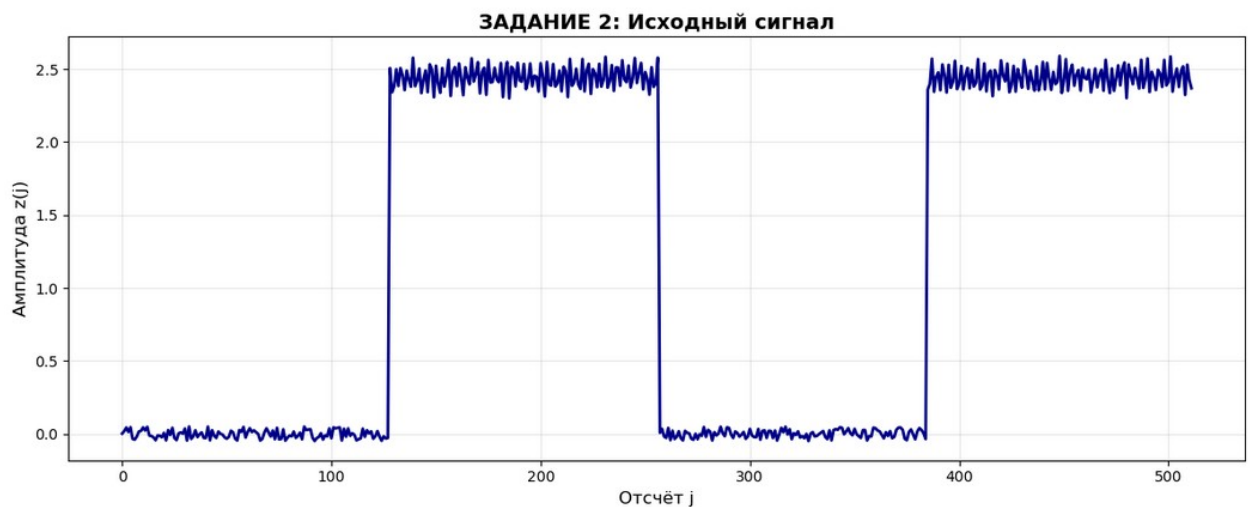
9	2.44	0.1	1	184	$\frac{\pi}{4}$
---	------	-----	---	-----	-----------------

Ссылка на репозиторий с проектом: <https://github.com/Gribnik24/NumericalMethods-PracticalTasks/tree/main/Task%20%232.7%20Wavelets>

Решение:

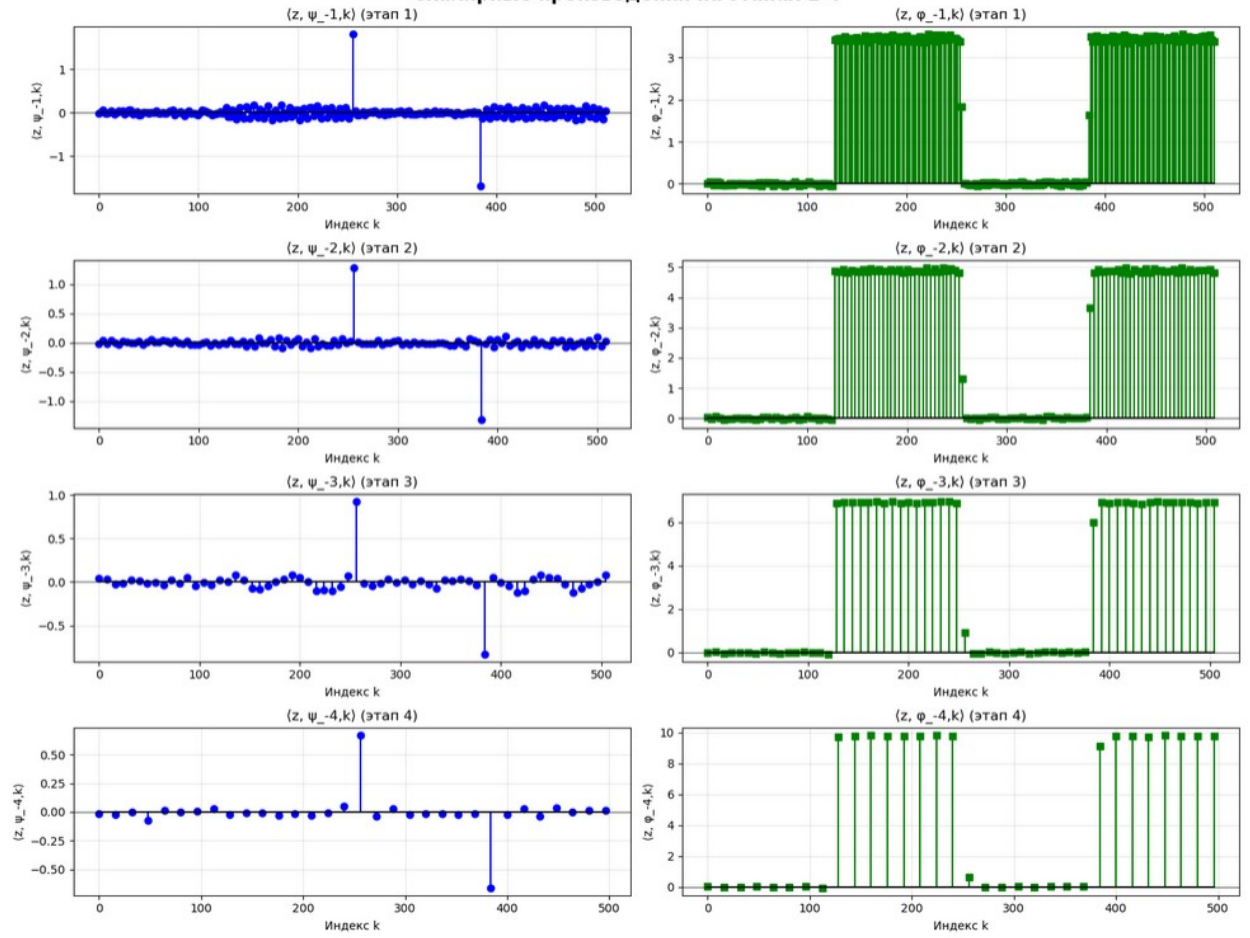
- 1) На языке программирования C++ были реализованы алгоритмы кратномасштабного анализа на базе вэйвлетов Хаара, Шеннона и Добеши (D6). Код с реализацией можно найти на Github в файле MultiScaleAnalyzer.cpp
- 2) Было создано 512 отсчетов зашумленного сигнала вида

$$z(j) = \begin{cases} 0, & 0 \leq j < \frac{N}{4} \\ A + B \cos\left(\frac{2\pi \omega_2 j}{N}\right), & \frac{N}{4} \leq j \leq \frac{N}{2} \\ 0, & \frac{N}{2} < j \leq \frac{3N}{4} \\ A + B \cos\left(\frac{2\pi \omega_2 j}{N}\right), & \frac{3N}{4} \leq j \leq N \end{cases}$$

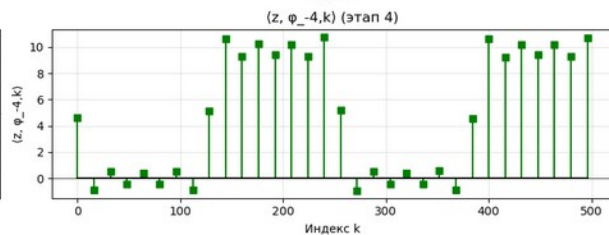
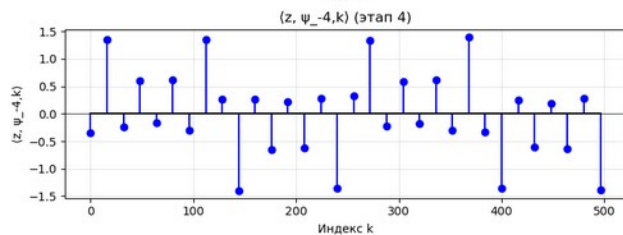
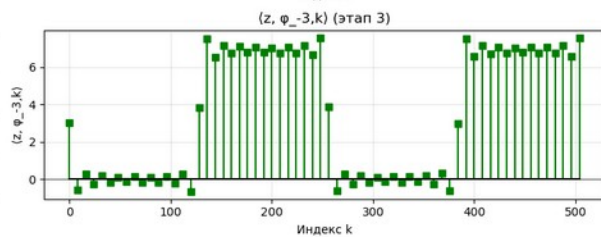
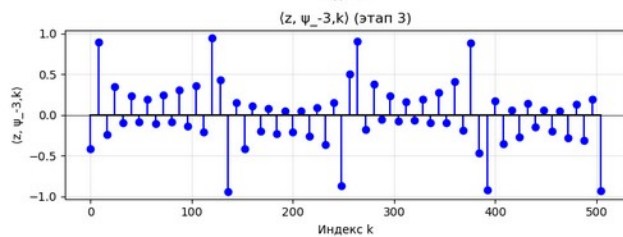
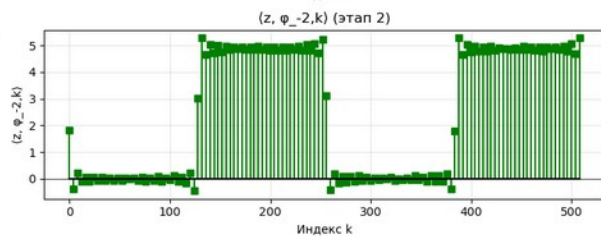
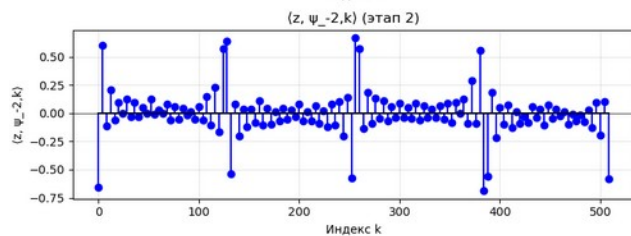
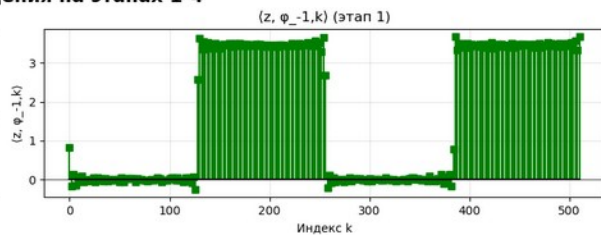
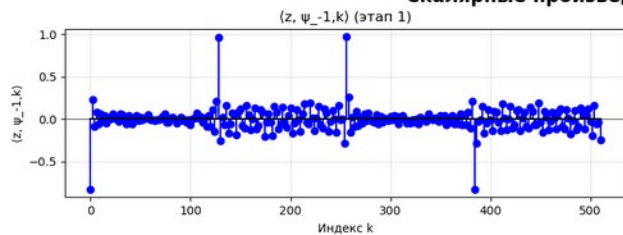


- 3) Был выполнен 4-этапный крупномасштабный анализ этого сигнала. Все графики данной лабораторной работы были реализованы с использованием библиотек Seaborn и Matplotlib на Python в файле graphs.ipynb.

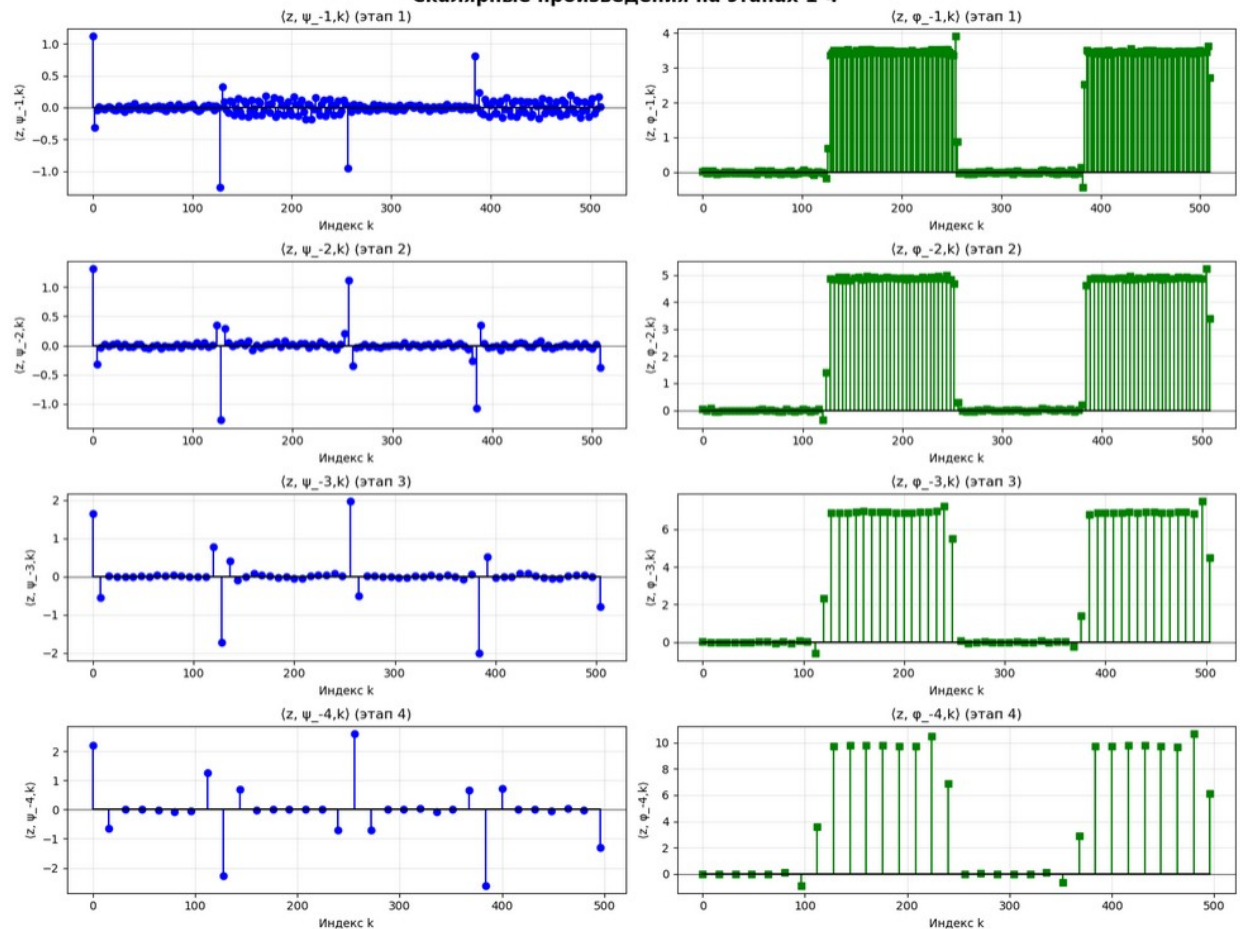
ЗАДАНИЕ 3: Вейвлет Хаара
Скалярные произведения на этапах 1-4



ЗАДАНИЕ 3: Вейвлет Шеннона
Скалярные произведения на этапах 1-4



ЗАДАНИЕ 3: Вейвлет Добеши (D6) Скалярные произведения на этапах 1-4



Ключевая особенность вэйвлета Хаара – четкая локализация разрывов.

Максимальные амплитуды детализирующих коэффициентов концентрируются непосредственно вблизи точек резкого изменения исходного сигнала. Это прямое следствие его прямоугольной, которая хорошо согласуется с задачей данного ПЗ.

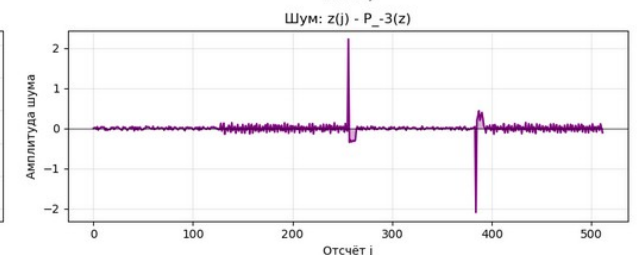
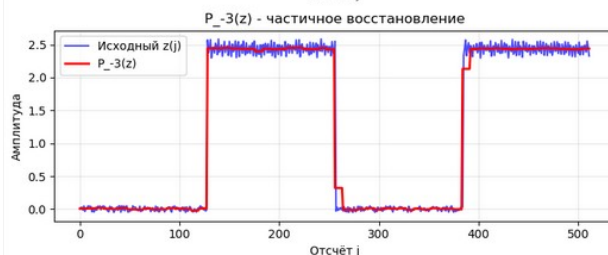
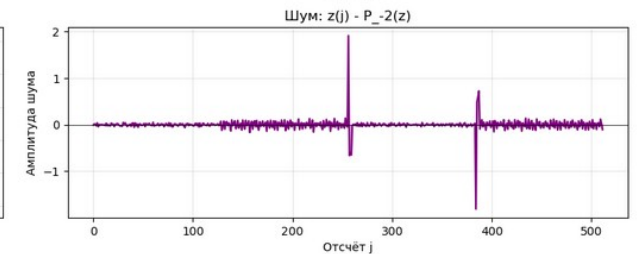
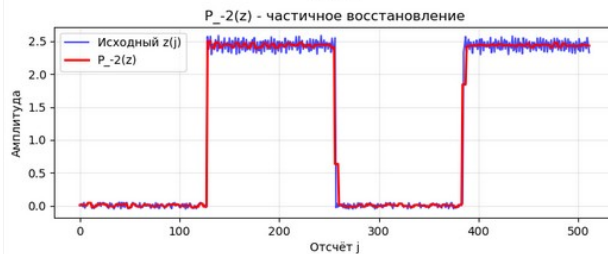
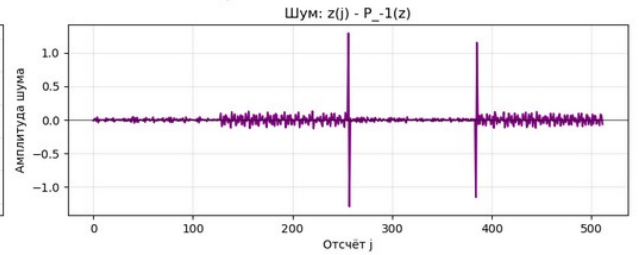
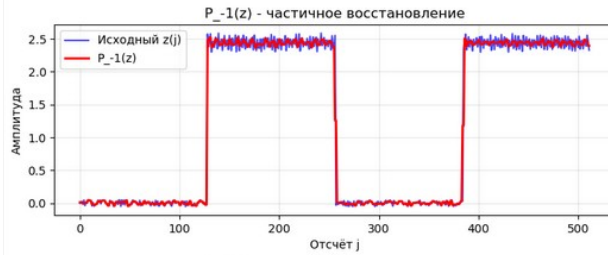
В свою очередь вейвлет Шеннона демонстрирует эффект Гиббса – циклические осцилляции, которые являются попыткой аппроксимировать резкий скачок с помощью гладких синусоидальных функций. В результате, несмотря на общее сглаживания, в восстановленном сигнале наблюдаются значительные колебания и фазовые искажения вокруг точек разрыва.

Вэйвлеты Добеши подобно Хаару способны хорошо сохранять места разрывов, но помимо этого они также корректно передают более плавные изменения данных между этими разрывами. Добеши удастся лучше сохранить общую форму сигнала, обеспечивая более точную реконструкцию по сравнению с Хааром, но при этом и избежать глобальных осцилляций как у Шеннона

- 4) Далее был выполнено частичное восстановление сигнала на каждом из этапов $(z, \psi_{-1,k})$, $(z, \psi_{-2,k})$, $(z, \psi_{-3,k})$, $(z, \psi_{-4,k})$, $(z, \phi_{-4,k})$ и построены графики аппроксимаций и шума.

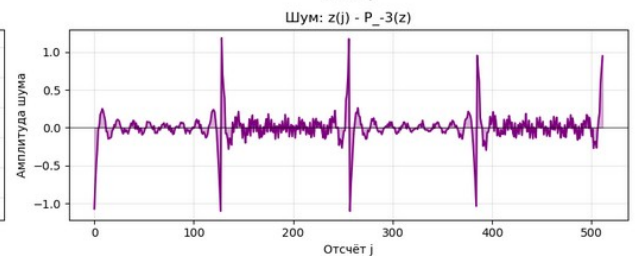
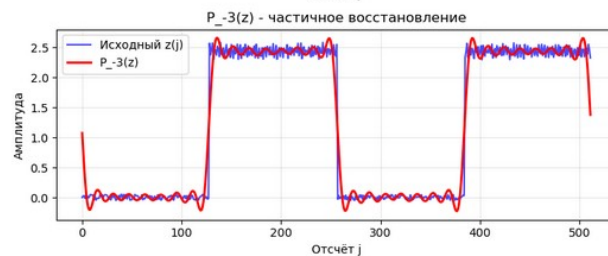
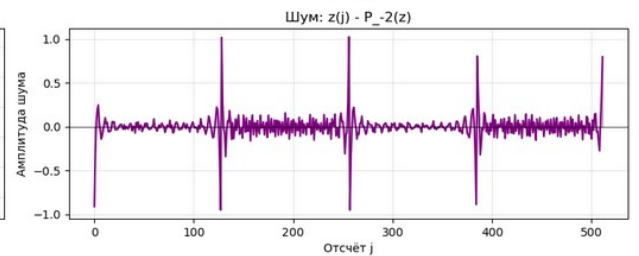
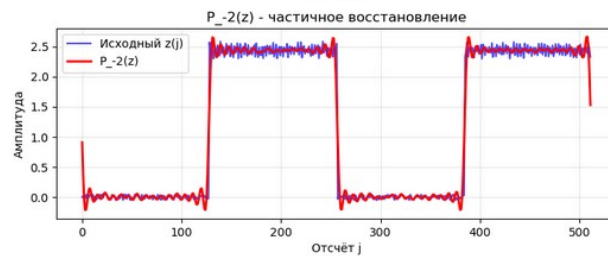
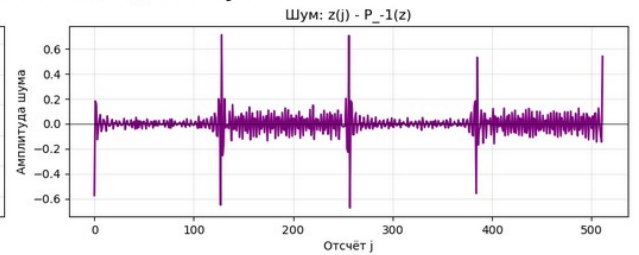
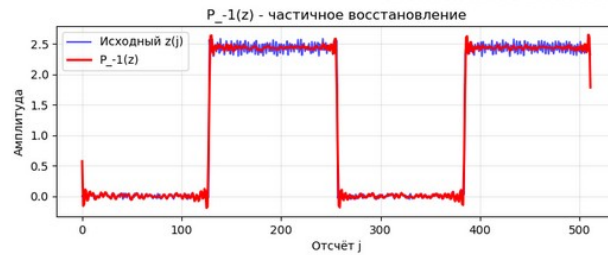
ЗАДАНИЕ 4: Вейвлет Хаара

Частичное восстановление и поведение шума

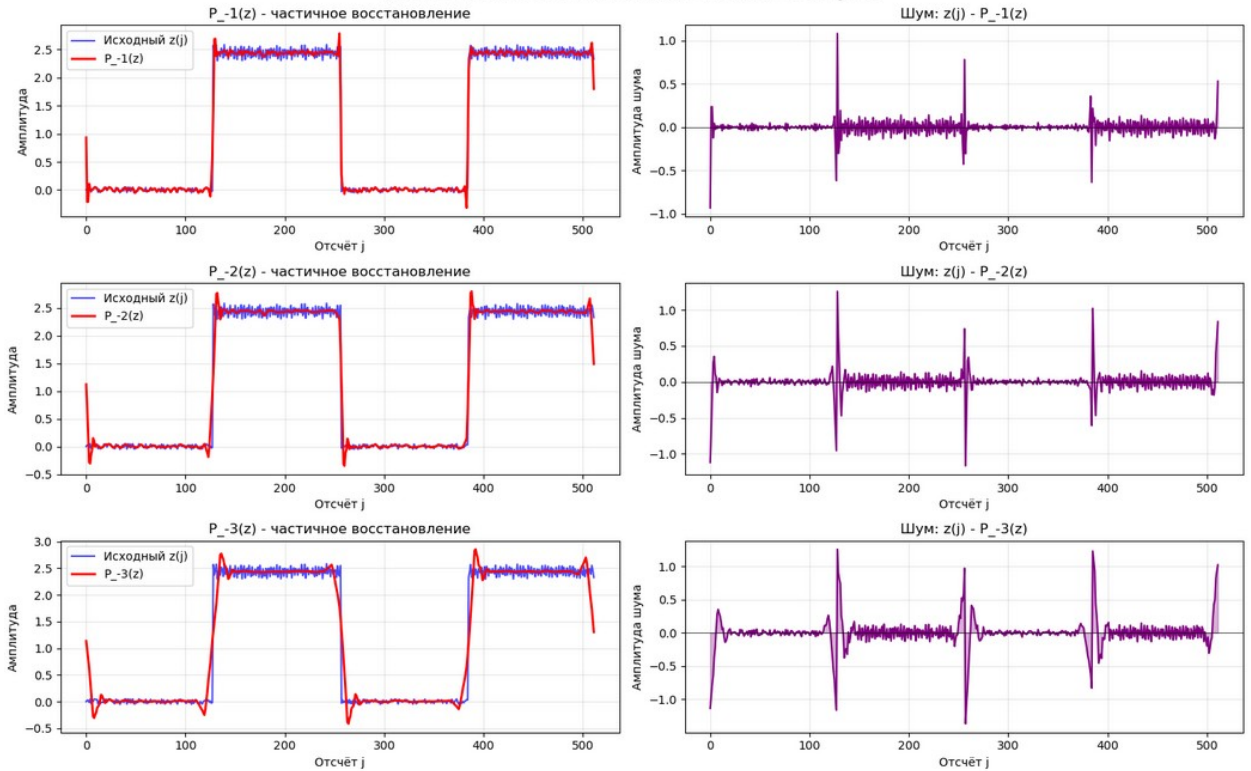


ЗАДАНИЕ 4: Вейвлет Шеннона

Частичное восстановление и поведение шума



ЗАДАНИЕ 4: Вейвлет Добеши (D6) Частичное восстановление и поведение шума



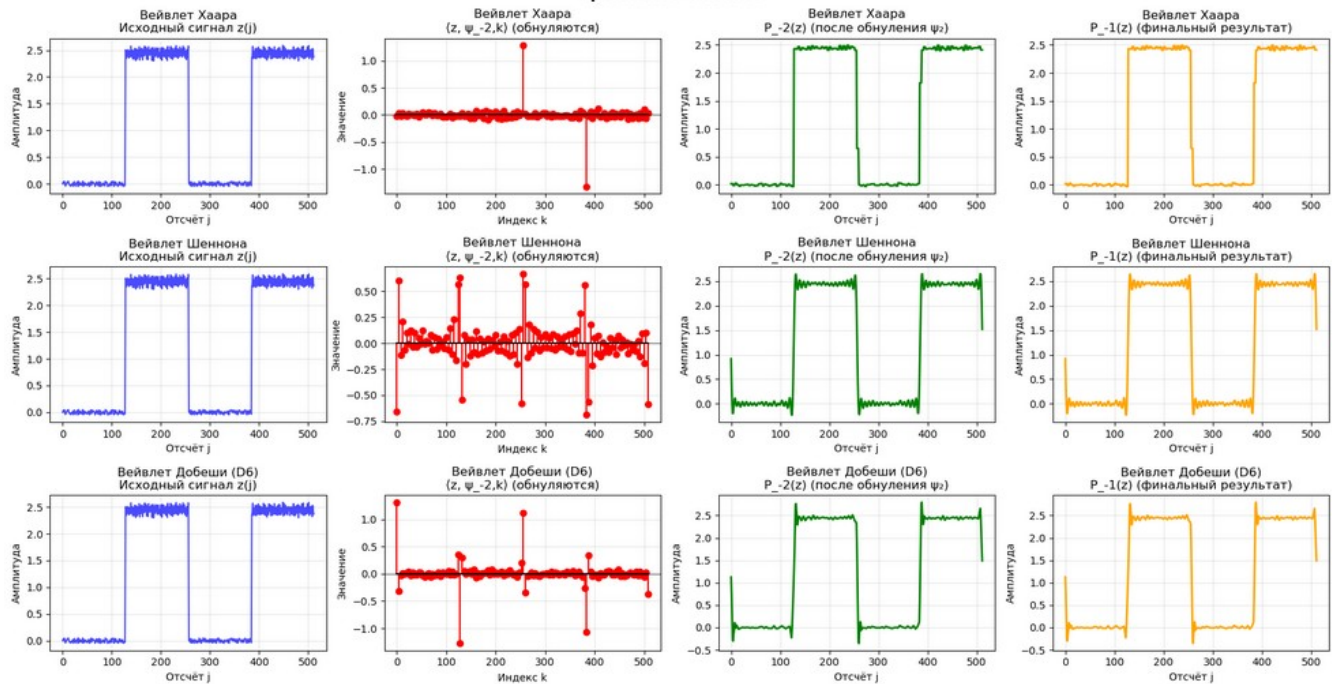
Независимо от базиса, в процессе обработки, с увеличением уровня разложения, высокочастотные компоненты последовательно отфильтровываются. Это приводит к тому, что восстановленная версия сигнала становится более сглаженной, а уровень шума в ней снижается. Характер аппроксимации сильно различается в зависимости от типа вейвлета:

- Базис Хаара лучше всего сохраняет резкие фронты и постоянные уровни сигнала, однако результат получается грубоватым и ступенчатым, лишённым плавности.
- Более сложные базисы, такие как Добеши (D6) и Шеннона, дают гораздо более гладкие кривые. Однако за это приходится платить появлением колебаний (ряби) и фазовых искажений вблизи резких скачков исходного сигнала.

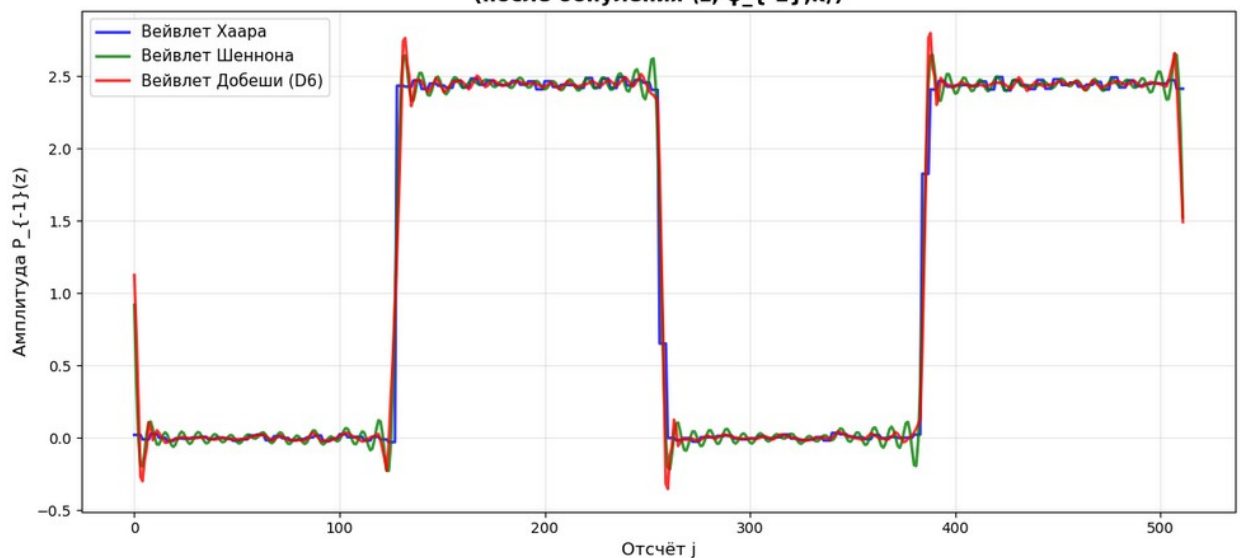
По мере углубления разложения расхождение между исходным и восстановленным сигналами возрастает. При этом шум и мелкие детали не исчезают бесследно, а последовательно "перемещаются" в детализирующие коэффициенты соответствующих уровней.

- 5) Обнулим высокочастотные коэффициенты вэйвлет-разложения $(z, \psi_{-2,k})$ и построим $P_{-1}(z)$. Сравним полученные сигналы

ЗАДАНИЕ 5: Фильтрация - обнуление $(z, \psi_{-2,k})$ и построение $P_{-1}(z)$ Сравнение базисов



Сравнение $P_{-1}(z)$ для разных базисов (после обнуления $(z, \psi_{-2,k})$)

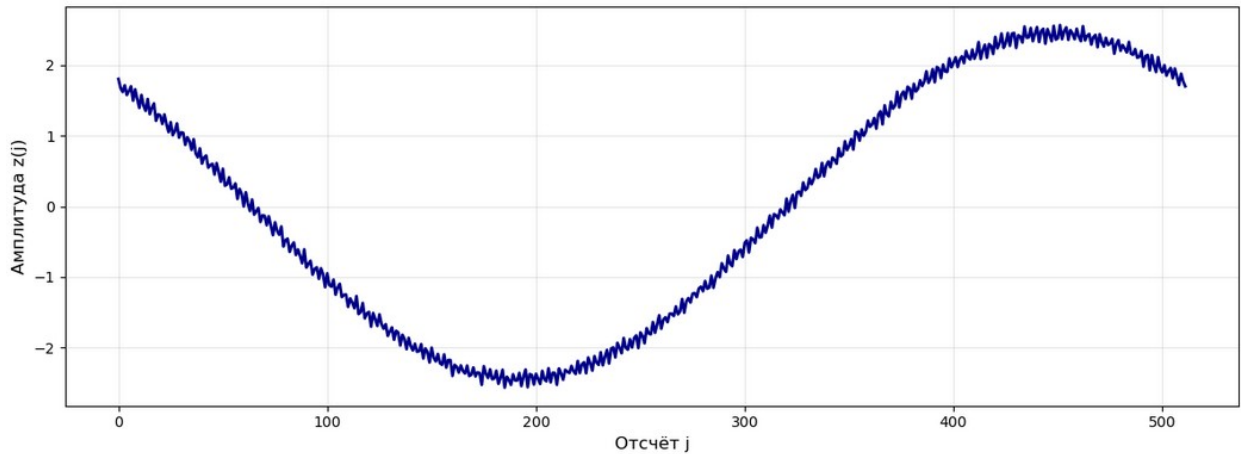


Для кусочно-постоянного сигнала точнее всего задачу фильтрации решит вейвлет Хаара, поскольку его прямоугольная форма идеально соответствует ступенчатой структуре полезного сигнала. Он чётко локализует скачки в виде крупных детализирующих коэффициентов, а шум — в виде мелких, которые легко обнулить. После пороговой обработки восстановленный сигнал останется чистым, без лишних искажений. Более гладкие базисы (Добеши, Шеннона) неизбежно вносят осцилляции, сглаживания или лишние выбросы на краях ступенек, что ухудшает точность восстановления.

6) Теперь зададим 512 отсчетов зашумленного сигнала вида

$$z(j) = A \cos(2\pi \omega_1 j / N + \varphi) + B \cos(2\pi \omega_2 j / N)$$

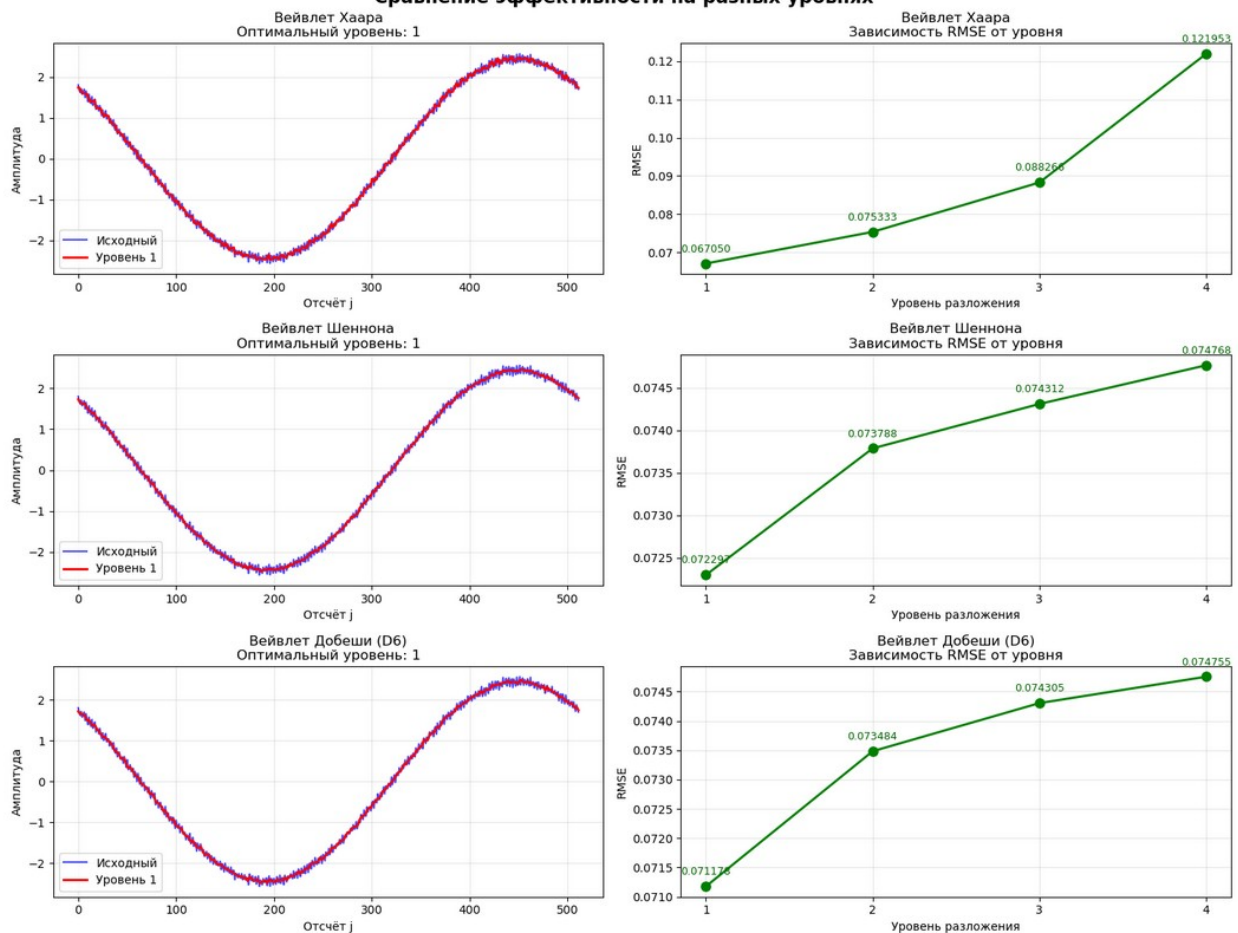
ЗАДАНИЕ 6: Исходный гармонический сигнал



- 7) Для ответа на вопрос, какой вейвлет-базис предпочтительнее и сколько затпов потребуется для решения задачи о фильтрации такого сигнала я воспользуюсь метрикой RMSE:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (After_Wavelet_i - Actual_i)^2}{N}}$$

ЗАДАНИЕ 7: Фильтрация гармонического сигнала Сравнение эффективности на разных уровнях



Анализ значений RMSE показывает, что наиболее точная фильтрация достигается с вейвлетом Хаара на первом уровне разложения, где ошибка составляет $RMSE = 0.067050$. Данный базис демонстрирует минимальную погрешность среди всех рассмотренных вариантов, при этом для всех трёх вейвлетов оптимальным оказывается именно первый этап обработки, так как с увеличением глубины

разложения (уровни 2-4) ошибка последовательно растёт. Интересно посмотреть характер роста всех трех базисов. Если у Шеннона и Добеши тренд ошибки как будто бы уже становится постоянным, то у Хаара визуально выглядит так, что еще не закончил свой рост.

- 8) В процессе работы над данной лабораторной работой был проведён сравнительный анализ вейвлет-преобразований в различных базисах для обработки зашумлённых сигналов разной природы. Практические результаты подтвердили, что выбор оптимального вейвлета и глубины разложения напрямую зависит от структуры сигнала:

Для кусочно-постоянных сигналов с резкими скачками наилучшие результаты фильтрации достигаются с использованием вейвлета Хаара. Его прямоугольная форма идеально соответствует ступенчатой структуре сигнала, обеспечивая точную локализацию разрывов и минимальные искажения после обнуления высокочастотных коэффициентов.

Для гармонических сигналов оптимальным базисом оказался также вейвлет Хаара, так как он обеспечил наименьшее значение метрики RMSE. При этом было обнаружено, что увеличение глубины разложения ухудшает качество фильтрации для гладких сигналов, поскольку начинает затрагивать их полезные низкочастотные компоненты.

Таким образом, обобщая критерии выбора метода преобразования, можно заключить:

- Дискретное преобразование Фурье целесообразно применять для стационарных сигналов, когда требуется точный частотный анализ без учёта временной локализации событий.
- Дискретное вейвлет-преобразование является предпочтительным для анализа нестационарных сигналов, содержащих локальные особенности, резкие изменения или переменное частотное содержание во времени. Его ключевое преимущество – способность одновременно анализировать сигнал как во временной, так и в частотной областях, что позволяет адаптивно настраивать параметры фильтрации в зависимости от характера сигнала (выбор вейвлета: Хаар для скачков, Добеши/Шеннона для гармоник; и уровня разложения: поверхностного для гладких сигналов, глубокого для зашумлённых кусочно-постоянных).