Практическое занятие №2

Армбристер Никита Владиславович

Группа ПМИ-31

Вариант 1

Цель: Сформировать практические навыки решения полной проблемы собственных значений.

Задание: Решить полную проблему собственных значений на базе QR-итераций со сдвигами по Уилкинсону. Можно ли применить сдвиг по Рэлею?

Решение:

Дана матрица A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Для начала ее необходимо привести к верхней форме Хессенберга. Для этого первый столбец необходимо преобразовать к виду (*, *, 0)^T. Применим преобразование Хаусхолдера для двух последних компонент первого столбца ξ=(0,1)^T:

$$\beta = sign(-a_{21})\|\xi\|_2 = 1,$$

$$\tilde{p} = (a_{21} - \beta, a_{31})^T = (-1, 1)^T$$

$$p = \|\tilde{p}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)^T.$$

Находим матрицу Хаусхолдера $\tilde{H}_{2\times 2} = E - 2pp^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда матрица отражения будет иметь вид $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{H}_{2\times 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Получаем унитарно подобную матрицу:

$$X^{(0)} = H^T A H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0.15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15 \end{pmatrix}$$

Матрица $\mathbf{X^{(0)}}$ имеет верхнюю форму Хессенберга. Т.к. $x_{32}^{(0)} = 0$, значит, $\lambda_3 = x_{33}^{(0)} = 0.15$ и можно работать только с блоком:

$$X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Применим к редуцированной матрице QR-итерации со сдвигом по Уилкинсону. Они работают по принципу

$$X^{(k)} - \mu E = Q^{(k)} R^{(k)}$$

$$X^{(k+1)} = Q^{(k)} R^{(k)} + \mu E,$$

где μ – любое собственное значение блока $X^{(0)}$. В нашем случае удобно будет выбрать сдвиг $\mu = 1$, тогда

$$X^{(0)} - \mu E = X^{(0)} - E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Применим вращение Гивенса для приведения данной матрицы к верхней треугольной форме. Строим матрицу Гивенса:

$$G_{21}^T = \begin{pmatrix} [\cos\theta]_{11} & [\sin\theta]_{12} \\ [-\sin\theta]_{21} & [\cos\theta]_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\sin\theta = \frac{x_{21}}{\sqrt{x_{21}^2 + x_{11}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \cos\theta = \frac{x_{11}}{\sqrt{x_{21}^2 + x_{11}^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

Получаем верхнюю треугольную матрицу (первый шаг QR-итерация со сдвигами):

$$R^{(0)} = G_{21}^T (X \text{¿¿} (0) - \mu E) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \text{¿}$$

Находим унитарно подобную матрицу (второй шаг QR-итераций со сдвигами):

$$X^{(1)} = Q^{(0)} R^{(0)} + \mu E = R^{(0)} G_{21} + E = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{¿}$$

$$\text{¿} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица $X^{(1)}$ является диагональной, значит, $\lambda_1 = x_{11}^{(1)} = 3, \lambda_2 = x_{22}^{(1)} = 1$.

В качестве промежуточного итога можно выделить собственные значения матрицы **A**:
$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0.15$

Найдем собственные векторы матрицы **A.** Матрица **A** симметричная, по теореме Щура данная матрица диагонализируется унитарными преобразованиями подобия:

$$Q^T A Q = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15 \end{pmatrix}$$

где унитарная матрица Q^T – результат последовательного произведения матриц унитарных преобразований подобия, которые были использованы для приведения матрицы **A** к диагональной форме, т.е.

$$Q^T = \widetilde{G}_{21}^T H^T,$$

где $\widetilde{G}_{21}^T = \begin{pmatrix} G_{21}^T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, т.к. была выполнена редукция размера матрицы $X^{(0)}$ по последнему столбцу и строке.

Поскольку $Q^T A Q = diag(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, то собственные векторы матрицы **A** – это столбцы матрицы **Q**:

$$Q^T = \widetilde{G}_{21}^T H^T \Rightarrow (Q¿¿T)^T = (\widetilde{G}¿¿21^T H^T)^T \Rightarrow Q = H\widetilde{G}_{21}¿¿$$

$$Q = H\widetilde{G}_{21}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

Т.е. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, (0,1,0)^T$ – собственные векторы матрицы **A**

Выполним проверку:

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = ¿ \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0.15 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.15 \end{pmatrix}$$

Проверка сошлась.

В данном решении применялись сдвиги по Уилкинсону, но существуют также и сдвиги по Рэлею.

Сдвиг по Рэлею также подразумевает собой

$$X^{(k)} - \mu E = Q^{(k)} R^{(k)}$$

$$X^{(k+1)} = Q^{(k)} R^{(k)} + \mu E,$$

но здесь $\mu = h_{n,n}^{(k)}$ – последняя компонента матрицы $X^{(k)}$, т.е. в случае с $X^{(0)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ значение μ будет 2

$$X^{(0)} - \mu E = X^{(0)} - 2E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогично применим вращение Гивенса для приведения данной матрицы к верхней треугольной форме. Строим матрицу Гивенса:

$$G_{21}^T = \begin{pmatrix} [\cos\theta]_{11} & [\sin\theta]_{12} \\ [-\sin\theta]_{21} & [\cos\theta]_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\sin\theta = \frac{x_{21}}{\sqrt{x_{21}^2 + x_{11}^2}} = 1, \ \cos\theta = \frac{x_{11}}{\sqrt{x_{21}^2 + x_{11}^2}} = 0$

Получаем верхнюю треугольную матрицу (первый шаг QR-итерация со сдвигами):

$$R^{(0)} = G_{21}^T (X¿¿(0) - \mu E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.¿$$

Находим унитарно подобную матрицу (второй шаг QR-итераций со сдвигами):

$$X^{(1)} = Q^{(0)} R^{(0)} + \mu E = R^{(0)} G_{21} + 2E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = ¿$$

$$\text{¿}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Матрица $X^{(1)}$ недиагональная, значит приступаем к следующей итерации.

$$X^{(1)} - \mu E = X^{(1)} - 2E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_{21}^{T} = \begin{pmatrix} [\cos\theta]_{11} & [\sin\theta]_{12} \\ [-\sin\theta]_{21} & [\cos\theta]_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\sin\theta = \dfrac{x_{21}}{\sqrt{x_{21}^2 + x_{11}^2}} = -1$, $\cos\theta = \dfrac{x_{11}}{\sqrt{x_{21}^2 + x_{11}^2}} = 0$

$$R^{(1)} = G_{21}^{T}(X \text{¿¿}(1) - \mu E) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{¿}$$

$$X^{(2)} = Q^{(1)} R^{(1)} + \mu E = R^{(1)} G_{21} + 2E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Как видно, значение матриц $X^{(1)} = X^{(2)}$. Алгоритм зациклился – сдвиг Рэлея не работает.

Ответ:

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 0.15$ – собственные значения матрицы **A**

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T, (0, 1, 0)^T$ – собственные векторы матрицы **A**

Сдвиг по Рэлею выполнить нельзя.