

Практическое занятие №4

Армбристер Никита Владиславович

Группа ПМИ-31

Вариант 1

Цель: сформировать практические навыки применения схем численного интегрирования при использовании квадратурных формул интерполяционного типа, квадратур Гаусса и квадратур для вычисления интегралов специального вида.

Задание:

1. Задайте на отрезке $[a, b]$ непрерывную неполиномиальную функцию $\varphi(x)$

2. Вычислить $\int_a^b \varphi(x) dx$ точностью $\varepsilon = 0.01$. Обосновать выбор схемы интегрирования.

Оценить абсолютную погрешность результата.

3. С помощью AI-ассистента DeepSeek решите предыдущую задачу. Какие явные недостатки можно обнаружить?

Промт. Оптимальный метод численного интегрирования $\int_0^1 \exp(x) dx$ с точностью 0.01?

4. На множестве \mathbb{R} задайте всюду непрерывную функцию $\psi(x)$

5. Вычислить $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-x^2} dx$ Использовать квадратуру максимальной точности с N узлами интегрирования. Оценить абсолютную погрешность результата.

Вариант: $a=-0.10$; $b=0.28$; $N=2$

Решение:

1) Зададим $f(x) = x * e^x$

2) Вычислим интеграл $\int_{-0.1}^{0.28} x * e^x dx$ точностью $\varepsilon = 0.01$

Для начала вычислим длину отрезка интегрирования

$$h = b - a = 0.28 - (-0.10) = 0.38$$

Теперь можно найти длину одного сегмента

$$h_k = \frac{L}{N} = \frac{0.38}{2} = 0.19$$

Функция $f(x) = x * e^x$ на отрезке $[-0.1, 0.28]$ Имеет ограниченные производные:

$$f'(x) = e^x(x+1); f''(x) = e^x(x+2); e^x > 0$$

$$\text{Найдем } \max_{x \in [-0.1; 0.28]} f''(x) = \max_{x \in [-0.1; 0.28]} f''(x+2)$$

Функция $x+2$ возрастает, e^x возрастает, поэтому максимум будет в $x=0.28$, а минимум в $x=-0.1$

$$f''(0.28) = e^{0.28} * 2.28 \approx 3.017$$

$$f''(-0.1) = e^{-0.1} * 1.9 \approx 1.719$$

Если $h_k > 0$, то $\sum_{k=1}^N h_k^3 \leq h^3$, где $h = 0.38$ – длина отрезка интегрирования

При $N=1$ ($h=0.38$) Остаточный член метода средних прямоугольников

$$R = \frac{f''(\xi)}{24} h^3$$

Ограничен снизу величиной

$$\frac{\min f''(\xi)}{24} h^3 \approx \frac{1.719 * 0.38^3}{24} \approx 0.0039$$

А сверху величиной

$$\frac{\max f''(\xi)}{24} h^3 \approx \frac{3.017 * 0.38^3}{24} \approx 0.0069$$

Воспользуемся метод прямоугольников. Найдем среднюю точку отрезка

$$x_m = \frac{-0.1 + 0.28}{2} = 0.09$$

Найдем значение функции в средней точке

$$f(0.09) = 0.09 * e^{0.09} \approx 0.098$$

Тогда по формуле средних прямоугольников для одного интервала

$$\int_{-0.1}^{0.28} x * e^x dx \approx 0.38 * 0.098 = 0.0372$$

Точное решение будет выглядеть как 0.0427

Оценим абсолютную погрешность: $\Delta = 0.0427 - 0.0372 = 0.0055$

3) Решим предыдущую задачу, используя AI-ассистент DeepSeek:

Оптимальный метод численного интегрирования $\int x e^x dx$ в $[-0,1; 0,28]$ с точностью 0.01?



Отличный вопрос. Давайте разберем его по шагам.

1. Анализ подынтегральной функции

Подынтегральная функция: $f(x) = x * e^x$

- **Производная:** $f'(x) = e^x + x * e^x = e^x (1 + x)$
- **Поведение:** На отрезке $[-0.1, 0.28]$ функция является гладкой, монотонно возрастающей (так как $f'(x) > 0$ на этом интервале, за исключением точки $x=-1$, которая не входит в отрезок). Она не имеет особенностей, разрывов или быстрых осцилляций.

Это "хорошая" функция для интегрирования, поэтому даже простые методы будут эффективны.

2. Оценка погрешности и выбор метода

Нам нужна точность 0.01. Это не сверхвысокая точность, поэтому мы можем обойтись без адаптивных методов и использовать метод фиксированного шага.

Самые подходящие кандидаты для небольшой размерности и гладкой функции:

1. **Формула Симпсона (Парабол)** - Имеет порядок точности $O(h^4)$, что очень эффективно. Для достижения точности 0.01 потребуется относительно небольшое число разбиений.
2. **Формула Гаусса** - Очень эффективный метод, который часто требует наименьшего числа вычислений функции для заданной точности. Идеально подходит для такого случая.

Вывод: Метод Гаусса будет оптимальным, так как он обеспечит требуемую точность с минимальным количеством вычислений подынтегральной функции. Формула Симпсона — отличный и простой в реализации запасной вариант.

3. Решение методом Гаусса (Квадратура Гаусса)

Метод Гаусса для n точек точен для полиномов степени $2n-1$. Для нашей функции с высокой точностью хватит даже $n=3$.

Применим квадратуру Гаусса с 3 узлами на отрезке $[a, b] = [-0.1, 0.28]$.

- Длина отрезка $L = b - a = 0.28 - (-0.1) = 0.38$
- Середина отрезка $c = (a + b)/2 = 0.09$

Узлы и веса для 3 точек (стандартные для отрезка $[-1, 1]$):

- $t_1 = -\sqrt{3/5} \approx -0.77459667$, $A_1 = 5/9 \approx 0.55555556$
- $t_2 = 0$, $A_2 = 8/9 \approx 0.88888889$
- $t_3 = \sqrt{3/5} \approx 0.77459667$, $A_3 = 5/9 \approx 0.55555556$

Преобразование на наш отрезок $[a, b]$:

$$x_i = c + (L/2) * t_i$$

- $x_1 = 0.09 + (0.38/2) * (-0.77459667) = 0.09 - 0.14717337 \approx -0.05717337$
- $x_2 = 0.09 + (0.38/2) * 0 = 0.09$
- $x_3 = 0.09 + (0.38/2) * 0.77459667 = 0.09 + 0.14717337 \approx 0.23717337$

Вычисляем значения функции в этих узлах:

- $f(x_1) = x_1 * e^{(x_1)} = -0.05717337 * e^{(-0.05717337)} \approx -0.05717337 * 0.9444 \approx -0.05400$
- $f(x_2) = x_2 * e^{(x_2)} = 0.09 * e^{(0.09)} = 0.09 * 1.09417 \approx 0.09848$
- $f(x_3) = x_3 * e^{(x_3)} = 0.23717337 * e^{(0.23717337)} \approx 0.23717337 * 1.26763 \approx 0.30063$

Применяем формулу Гаусса:

$$I \approx (L/2) * [A_1 * f(x_1) + A_2 * f(x_2) + A_3 * f(x_3)]$$

$$I \approx (0.38 / 2) * [0.555556 * (-0.05400) + 0.888889 * (0.09848) + 0.555556 * (0.30063)]$$

$$I \approx 0.19 * [-0.03000 + 0.08754 + 0.16702]$$

$$I \approx 0.19 * 0.22456$$

$$I \approx 0.0426664$$

Округляем до двух знаков после запятой (с запасом, согласно точности):

$$I \approx 0.043$$

4. Проверка точности и альтернатива (Метод Симпсона)

Давайте проверим, сколько разбиений потребовалось бы методу Симпсона.

Погрешность метода Симпсона: $|R| \leq (M_4 * L^5) / (180 * n^4)$, где M_4 — максимум модуля 4-й производной на отрезке.

- $f^{(4)}(x) = e^x (x + 4)$
- На отрезке $[-0.1, 0.28]$ максимум $|f^{(4)}(x)|$ будет при $x=0.28$:
 $M_4 \approx e^{0.28} * (0.28+4) \approx 1.323 * 4.28 \approx 5.66$
- $L = 0.38$

Подставим в формулу погрешности, требуя $R \leq 0.01$:

$$(5.66 * (0.38)^5) / (180 * n^4) \leq 0.01$$

$$(5.66 * 0.0079) / (180 * n^4) \leq 0.01$$

$$(0.0447) / (180 * n^4) \leq 0.01$$

$$0.0447 \leq 1.8 * n^4$$

$$n^4 \geq 0.02483$$

$$n \geq \sqrt[4]{0.02483} \approx 0.396$$

Это означает, что даже $n=1$ (т.е., всего 3 точки, один элементарный сегмент) формально удовлетворяет условию по погрешности. Это подтверждает, что наша функция очень "простая".

Вычислим по формуле Симпсона с $n=2$ (шаг $h = L / 2 = 0.19$):

$$x_0 = -0.1, f(x_0) = -0.1 * e^{(-0.1)} \approx -0.09048$$

$$x_1 = 0.09, f(x_1) = 0.09 * e^{(0.09)} \approx 0.09848$$

$$x_2 = 0.28, f(x_2) = 0.28 * e^{(0.28)} \approx 0.36710$$

$$I \approx (h/3) * [f(x_0) + 4*f(x_1) + f(x_2)]$$

$$I \approx (0.19 / 3) * [-0.09048 + 4*0.09848 + 0.36710]$$

$$I \approx 0.06333 * [-0.09048 + 0.39392 + 0.36710]$$

$$I \approx 0.06333 * 0.67054$$

$$I \approx 0.04246 \approx 0.042$$

Метод Симпсона дал результат 0.042 , который очень близок к результату Гаусса (0.043). Разница (0.001) меньше требуемой точности.

5. Заключение и итоговый ответ

1. Оптимальный метод: Квадратура Гаусса с 3 узлами.

- **Причина:** Обеспечивает высокую точность (погрешность $\sim 10^{-4}$) при минимальном количестве вычислений подынтегральной функции (всего 3 вычисления). Это самый эффективный метод для данной задачи.

2. Результат интегрирования:

$$\int x * e^x dx \text{ от } -0.1 \text{ до } 0.28 \approx 0.043$$

3. Отличная альтернатива: Метод Симпсона с 2 интервалами (3 точками).

- **Причина:** Чрезвычайно прост в реализации и также с огромным запасом обеспечивает требуемую точность 0.01 , давая результат 0.042 .

Ответ: Для интегрирования $\int x * e^x dx$ на отрезке $[-0.1, 0.28]$ с точностью 0.01 оптимальным является метод Гаусса с 3 узлами, который дает результат ~ 0.043 .

Думаю, основным недостатком в представленном решении заключается в отсутствии проверки точности расчетным путем – DeepSeek просто «предположил», какой метод будет наиболее подходящим в данной ситуации. По этой причине его сравнение и конечный выбор оказался некорректным. Были задействованы квадратуры Гаусса, которые, бесспорно, дали более точный результат, но вот считаются они куда сложнее

4) Зададим непрерывную функцию $\psi(x) = x^4$ на множестве R

5) Вычислим $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{-x^2} dx$ через квадратуру максимальной точности с 2 узлами

интегрирования. Оценить абсолютную погрешность результата.

Квадратурной формулой называют

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n a_i f(x_i)$$

где $\rho(x)$ – весовая функция, a_i – коэффициенты, x_i – узлы квадратурной формулы.

Коэффициенты квадратурной формулы определяются как

$$a_i = \int_a^b \rho(x) l_i(x) dx, \forall i = \overline{1, n}$$

где $l_i(x)$ – базисный полином Лагранжа.

Если n – число узлов квадратурной формулы, то квадратурная формула может быть точна для полинома максимальной степени $2n-1$ и иметь порядок аппроксимации $2n$.

В нашем случае весовая функция $\rho(x) = e^{-x^2}$

Для веса $\rho(x) = e^{-x^2}$ на $(-\infty, +\infty)$ ортогональными многочленами являются многочлены Чебышева-Эрмита $H_n(x)$

При $n=2$ узлы квадратурной формулы – это корни $H_2(x)$

Многочлены Чебышева-Эрмита определяются рекуррентно:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$$

Пусть $n=2$. На всей оси $(-\infty, +\infty)$ многочлен Чебышева-Эрмита $H_2(x) = 4x^2 - 2$ имеет два корня

$$x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \pm 0,7071$$

По двум точкам можно задать интерполяционный многочлен Лагранжа степени 1:

$$l_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}$$

$$l_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - x}{\sqrt{2}}$$

Находим коэффициенты a_1 и a_2 :

$$a_1 = \int_a^b p(x) l_1(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} * x + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.8862$$

$$a_2 = \int_a^b p(x) l_2(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2} * \frac{\sqrt{2}}{2} - x}{\sqrt{2}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \approx 0.8862$$

Тогда квадратурная форма для $N=2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \psi(x) * dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^4 * dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \psi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \psi\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \approx 0.8862$$

Точное значение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} x^4 * dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \approx 1.329$$

Тогда абсолютная погрешность равна $\Delta = 1.329 - 0.8862 = 0.4428$

Вывод

В ходе данной лабораторной работы были сформированы практические навыки применения схем численного интегрирования.

Для первой части задания был задействован метод средних прямоугольников и получен результат с точностью 0.0055. Был проведен анализ решения AI-ассистента DeepSeek, в ходе которого было выявлено, что тот подошел к решению без должной численной оценки погрешности из-за чего применил более сложный подход.

Во второй части задания были использованы квадратурные формы интерполяционного типа. В моем варианте при $N=2$ они давали точную оценку для полиномов со степенью ≤ 3 . При взятии полинома x^4 получилось найти численное

приближение интеграла, посчитать абсолютную погрешность и продемонстрировать работу метода