Практическое задание №7

Армбристер Никита Владиславович

Группа ПМИ-31

Вариант 1

Цель: сформировать практические навыки применения предобусловливания и проекционных методов решения СЛАУ с квадратными невырожденными матрицами.

Задание:

1. Решить СЛАУ проекционным методом. Выбор метода обосновать. Сколько итераций потребуется для достижения точности численного решения $\varepsilon = 10^{-5}$.
2. Оцените скорость сходимости выбранного проекционного метода
3. Как можно ускорить сходимость итерационной процедуры?

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = f\,;\, x^{¿} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Решение:

0.1) Имея точное решение уравнения x* и матрицу A можно найти вектор правой части

$$f = A\,x^{¿} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0.15 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Система приобрела вид

$$Ax = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -3 \\ 0.15 \\ -3 \end{pmatrix}$$

0.2) Найдем собственные значения для матрицы A

$$det\,(a-\lambda) = det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0.15-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)(20\lambda-3)(\lambda-3) = 0$$

Следовательно,

$$\lambda_1 = 1\,;\, \lambda_2 = 0.15\,;\, \lambda_3 = 3$$

1.1) Матрица симметричная, а все ее собственные значения положительно, следовательно это матрица SPD. Для таких матриц будет эффективен метод сопряженных коэффициентов. Выберем его.

1.2) Поскольку выполнение первого пункта данной практической работы предполагает выполнение одних и тех же действий и занесение промежуточных вычислений в отчет, мной было предпринято решение в виде написания ipynb ноутбука в Google Colab. Основная идея заключается в написании нескольких простых функций, реализующие шаги метода сопряженных коэффициентов и последующее постепенное нахождение необходимых значений

```python
from decimal import Decimal
import numpy as np
```

```python
def matrix_vector_multiply(A, p):
    """
    Умножает матрицу 3x3 на вектор размерности 3.
    """
    return A @ p

def scalars_for_steps(r, Ap, p):
    """
    Вычисляет отношение скалярного квадрата первого вектора к скалярному произведению
    второго и третьего векторов: (arr1·arr1) / (arr2·arr3)
    Для подсчета шагов 'a' и коэффициентов 'b'для направлений
    """
    return (r.T @ r) / (p.T @ Ap)

def approx(x, a, p):
    """
    Для подсчета приближения new_x = old_x + a*p и нового направления
    """
    return x + a*p

def error_vector(f, A, x):
    """
    Для подсчета вектора невязки
    """
    return f - A @ x
```

Ссылка на ноутбук:

https://colab.research.google.com/drive/1GRDq3vwN5Ak5dORY-1Bp9TdaOwFeITVL?usp=sharing

Далее по решению следует сам метод и выкладка найденных значений

1.3) В качестве начального значения возьмем $x^{(0)}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Первая итерация (k=0):

Невязка $r^{(0)}=f-Ax^{(0)}=\begin{pmatrix}-3\\0.15\\-3\end{pmatrix}$

Направление $p^{(0)}=f-Ax^{(0)}=\begin{pmatrix}-3\\0.15\\-3\end{pmatrix}$

Шаг $a_0=\dfrac{\left(r^{(0)},r^{(0)}\right)}{\left(Ap^{(0)},p^{(0)}\right)}=\dfrac{18.0225}{54.003375}\approx 0.333729$

Новое приближение

$$x^{(1)}=x^{(0)}+a_0 p^{(0)}\approx\begin{pmatrix}-1.001187\\0.050059\\-1.001187\end{pmatrix}$$

Изучим новый вектор ошибки

$$r^{(1)}=f-Ax^{(1)}\approx\begin{pmatrix}0.003562\\0.142491\\0.003562\end{pmatrix}$$

$$\left\|r^{(1)}\right\|_2\approx 0.142580\geq 10^{-5}$$

Точность не достигнута – продолжаем

1.4) Вторая итерация (k=1):

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}-1.001187\\0.050059\\-1.001187\end{pmatrix};\ r^{(1)}=\begin{pmatrix}0.003562\\0.142491\\0.003562\end{pmatrix}$$

Новое направление

$$\beta_0=\frac{\left(r^{(1)},r^{(1)}\right)}{\left(r^{(0)},r^{(0)}\right)}\approx 0.001128$$

$$p^{(1)}=r^{(1)}+\beta_0\,p^{(0)}\approx\begin{pmatrix}0.000178\\0.142660\\0.000178\end{pmatrix}$$

Новый шаг $a_1=\dfrac{\left(r^{(1)},r^{(1)}\right)}{\left(Ap^{(1)},p^{(1)}\right)}\approx 6.65876$

Новое приближение

$$x^{(2)}=x^{(1)}+a_1\,p^{(1)}=\begin{pmatrix}-1.0000000000000000000000000002\\1.0000000000000000000000000000\\-1.0000000000000000000000000002\end{pmatrix}$$

Оценим невязку

$$r^{(2)}=f-Ax^{(2)}\approx\begin{pmatrix}6\cdot 10^{-27}\\0\\6\cdot 10^{-27}\end{pmatrix}$$

$$\left\|r^{(2)}\right\|_2\approx 8.49\cdot 10^{-27}\leq 10^{-5}$$

Точность достигнута

2) Оценим скорость сходимости метода сопряженных коэффициентов. Используем

$$R=\frac{\left\|e^{(k+1)}\right\|}{\left\|e^{(k)}\right\|}=\frac{\dfrac{\left\|x^{(k+2)}-x^{(k+1)}\right\|}{\left\|x^{(k+2)}\right\|}}{\dfrac{\left\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\right\|}{\left\|x^{(k+1)}\right\|}}\leq\frac{\left\|r^{(k+1)}\right\|}{\left\|r^{(k)}\right\|}$$

Тогда

$$R \le \frac{\|r^{(2)}\|}{\|r^{(1)}\|} \approx 5.95 \cdot 10^{-26}$$

Ошибка от итерации к итерации убывает не менее чем в 10^{25} раз. Такое высокое значение получилось предположительно благодаря использованию Decimal в вычислениях.

3) Для того, чтобы ускорить сходимость проекционного метода, можно перейти к решению предобусловленной системы. Так как матрица A симметрична, то для сохранения этого свойства будет правильно воспользоваться двухсторонним предобусловливанием.

$$M_1^{-1} A M_2^{-1} y = M_1^{-1} f \,;\, x = M_2^{-1} y$$

Матрицы M_1 и M_2 допустимо выбрать как матрицы неполного LU-разложения, но для SPD-матриц существует вариант принятия LL^T-разложение (Холецкого)

Тогда

$$M_1 = L \approx \begin{pmatrix} 1.4142 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3873 & 0 \\ 0.7071 & 0 & 1.2247 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = L^T \approx \begin{pmatrix} 1.4142 & 0 & 0.7071 \\ 0 & 0.3873 & 0 \\ 0 & 0 & 1.2247 \end{pmatrix}$$

Получаем предобусловленную систему

$$M_1^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0.15 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} M_2^{-1} y = M_1^{-1} \begin{pmatrix} -3 \\ 0.15 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y \approx \begin{pmatrix} -2.1213 \\ 0.3872 \\ -1.2247 \end{pmatrix}$$

Матрица исходной системы имела спектр

$$\lambda_1 = 1 \,;\, \lambda_2 = 0.15 \,;\, \lambda_3 = 3$$

Спектр же новой матрицы

$$\lambda_1 = 1 \,;\, \lambda_2 = 1 \,;\, \lambda_3 = 1$$

Число обусловленности для матриц находится по формуле

$$Cond(A) = \frac{max|\lambda_i|}{m\in|\lambda_i|}$$

Тогда

$$Cond(A) = \frac{3}{0,15} = 20$$

$$Cond\left(M_1^{-1} A M_2^{-1}\right) = 1$$

Из этого следует, что метод сопряженных коэффициентов сойдется всего за одну итерацию

Имеем $y=\begin{pmatrix}-2.1213\\0.3872\\-1.2247\end{pmatrix}$, откуда $x=M_2^{-1}y\approx\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$