Практическое занятие №8

Армбристер Никита Владиславович

Группа ПМИ-31

Вариант 1

Цель: сформировать практические навыки применения дискретных методов решения задачи Коши на базе конечно-разностных аппроксимаций

Задание:

1) На языке C++ реализуйте любые две конечно-разностные схемы с разным порядком сходимости.
2) Придумайте две разномасштабные по времени жизни модели популяций: волки – зайцы, дидинии – инфузории туфельки и т.д. Подберите корректные пара метры модели Лотки-Вольтерра для каждой популяции, изучите как меняется динамика численности членов популяций при варьировании параметров модели как в условиях превышения кормовой базы $x0 > y0$, так и в условиях превышения хищников $x0 < y0$.
3) Как влияют малые отклонения численностей от их равновесных значений на устойчивость решения задачи? Что можно сказать о свойствах математической модели Лотки-Вольтерра с точки зрения жёсткости?
4) Какие методы дискретизации данной модели предпочтительнее?

Ссылка на репозиторий с проектом: https://github.com/Gribnik24/NumericalMethods-PracticalTasks/tree/main/Task%20%232.8%20The%20Cauchy%20problem

Решение:

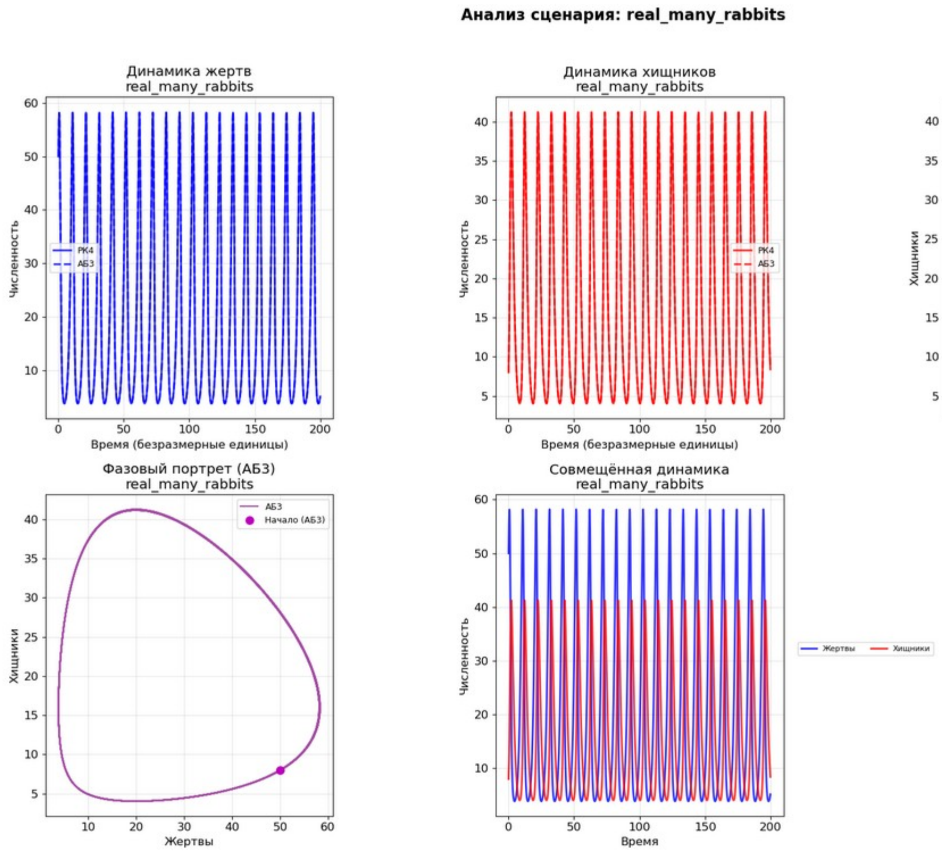
1) На языке C++ реализуем две конечно-разностные схемы с разным порядком сходимости: метод Рунге-Кутты 4-го порядка (RK4) и метод Адамса-Башфорта 3-го порядка (AB3). Код доступен в репозитории
2) В качестве две разномасштабные по времени жизни я возьму одну более-менее реальную (лисы и зайцы) и одну фантастическую (овцы и драконы).
   Идея фантастической популяции в том, что драконы живут долго, стареют медленно и охотятся эффективно. Соответственно такое сравнение подразумевается крайне аномальным: драконы будут быстро есть овец, но не будут умирать от голода; они будут эффективно охотиться, но их будет не так много, ведь размножаются они медленно

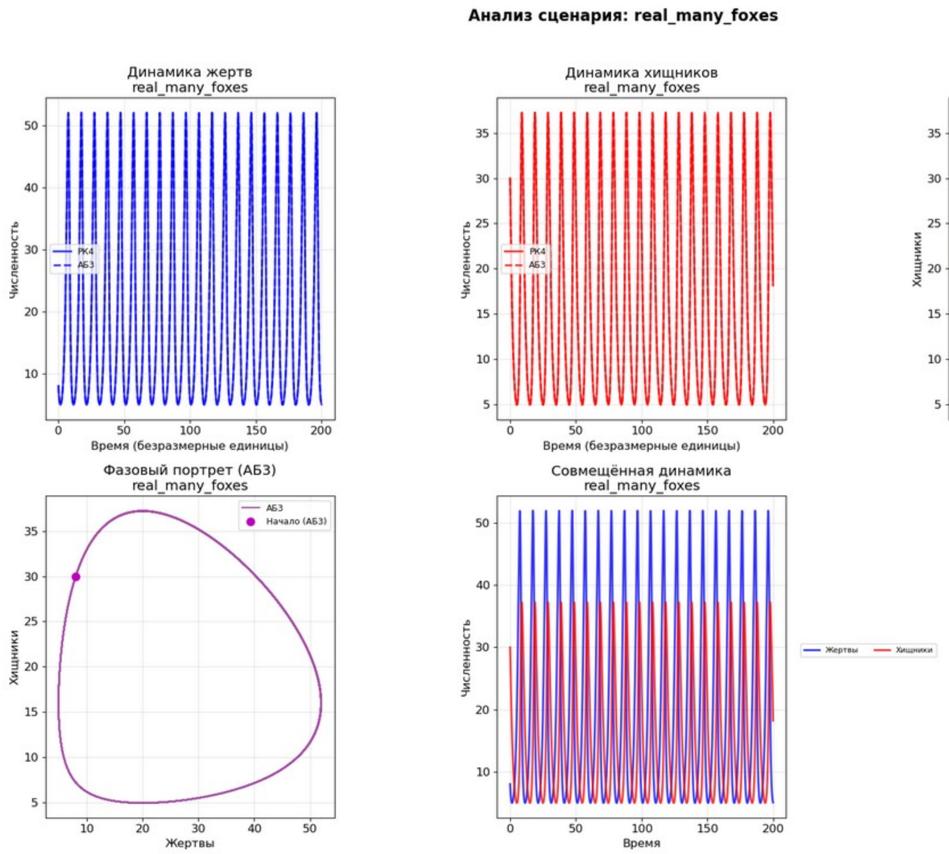
```cpp
// Фэнтези-модель: Овцы и Драконы
ModelParams fantasy_params = {
    1.5,    // рождаемость овец
    0.2,    // эффективность охоты драконов
    0.1,    // смертность драконов
    0.02,   // рост драконов
    "Sheep",
    "Dragons"
};

// Реалистичная модель: Зайцы и Лисы
ModelParams real_params = {
    0.8,    // рождаемость зайцев
    0.05,   // эффективность охоты лис
    0.6,    // смертность лис
    0.03,   // рост лис
    "Rabbits",
    "Foxes"
};
```

3) Для модели зайцы-лисы было подготовлено три теста:

```cpp
// Сценарии для реалистичной
std::vector<std::pair<double, double>> real_scenarios = {
    {50, 8},   // много зайцев
    {8, 30},   // много лис
    {21, 17}   // около равновесия
};
```

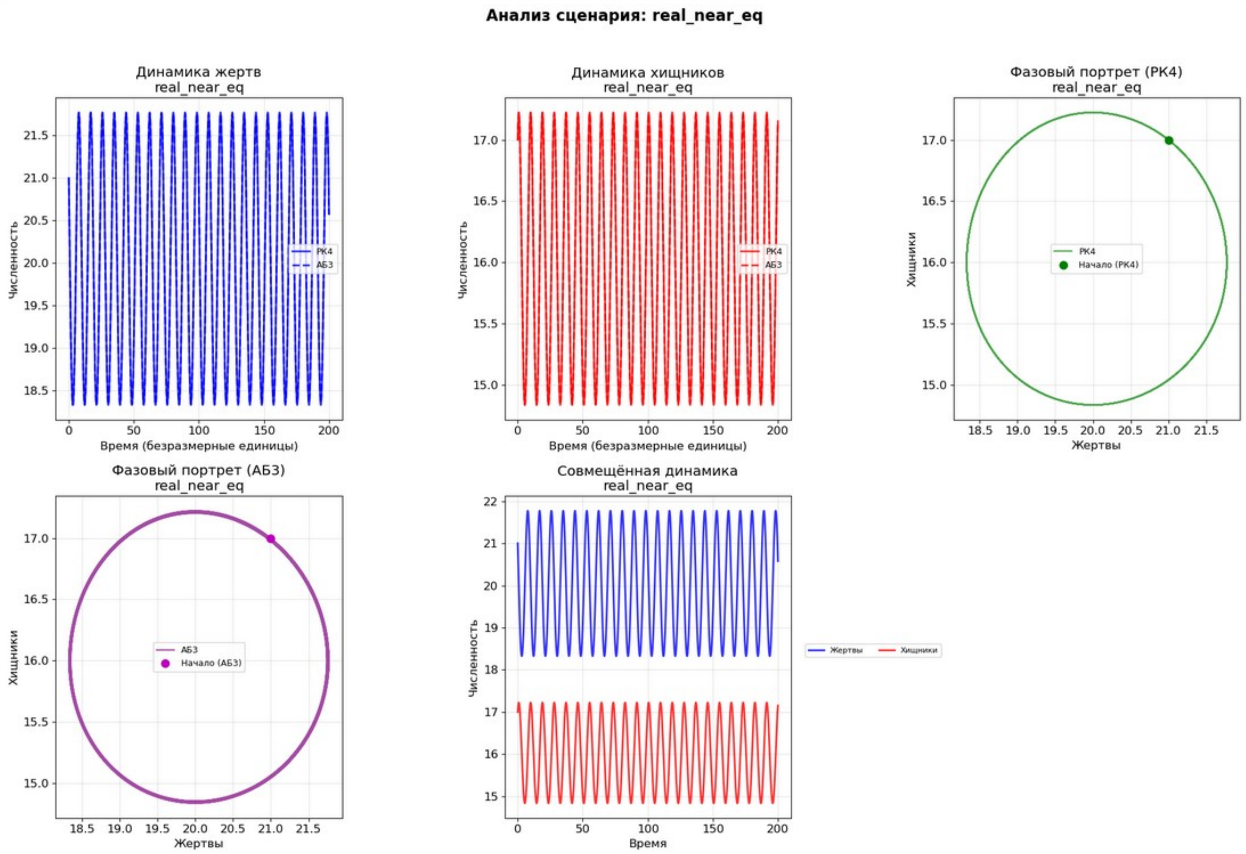
Для ситуации, когда в начальном моменте времени существует много кроликов и мало лис и наоборот можно заметить, что уже через некоторое время одни начинают активно есть других и по этой причине кол-во кроликов уменьшаются, а кол-во лис увеличивается. Подобное происходит циклично, благодаря чему довольно быстро выстраивается нечто похожее на равновесие.





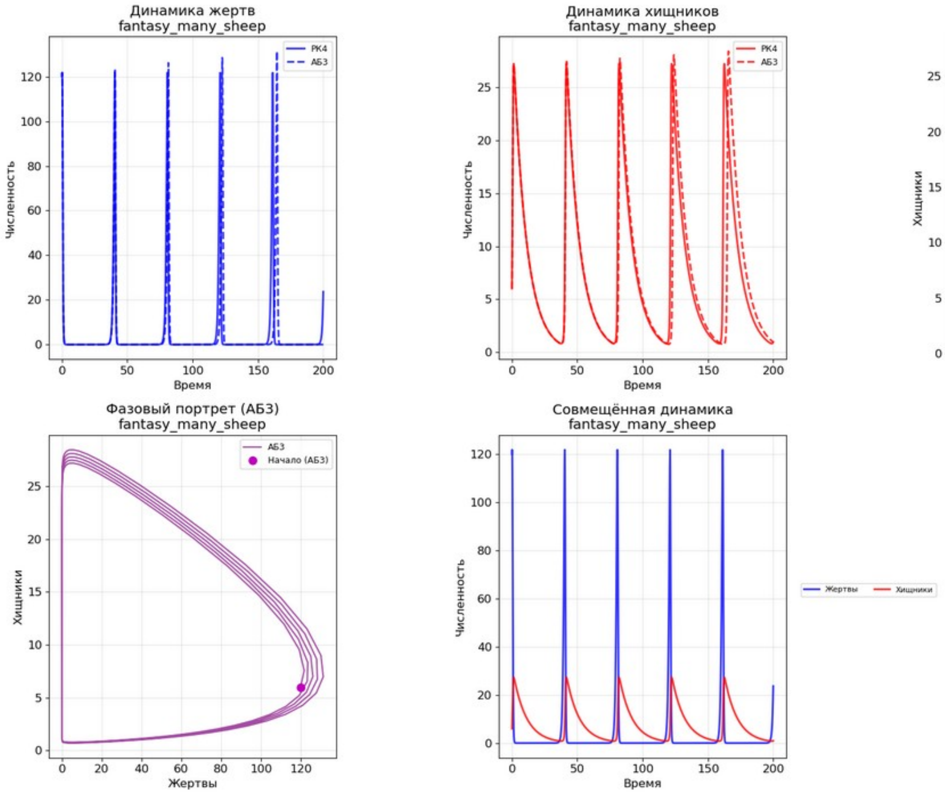
Для получения около идеальной динамики численности популяции при заданных исходных параметрах я взял значения 20 и 16 для зайцев и лис соответственно. Тогда всем всегда будет хватать пропитания и времени на восстановление

$$\begin{cases} (0.8 - 0.05\,y)\,x = 0 \\ (-0.6 - 0.03\,x)\,y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 20\,;\ y = 16$$

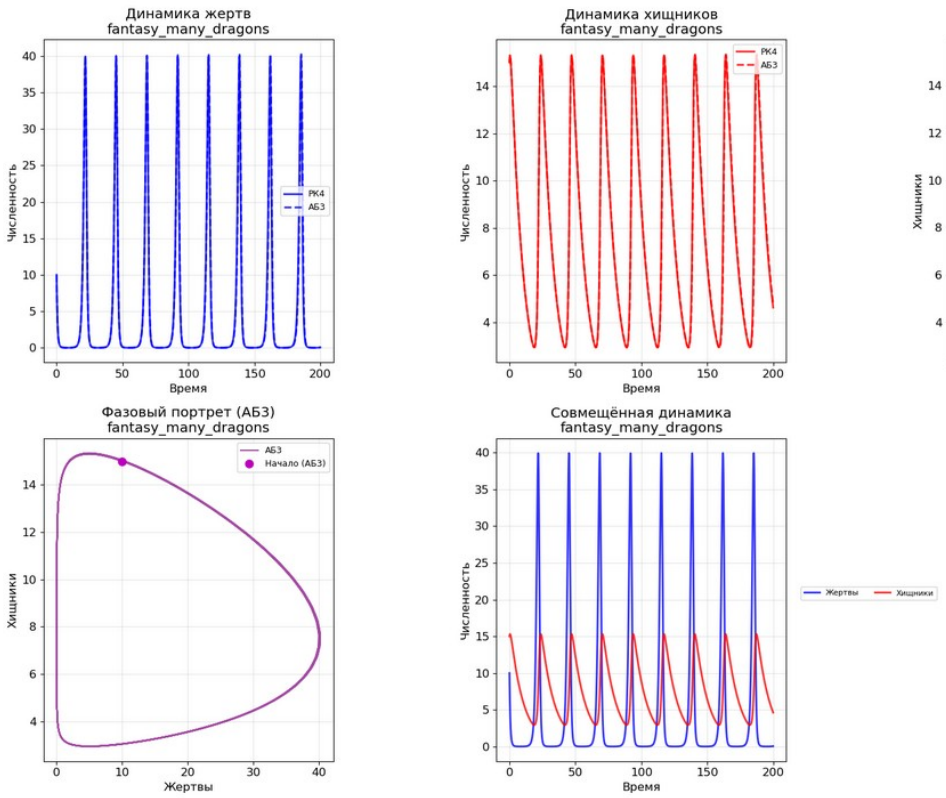


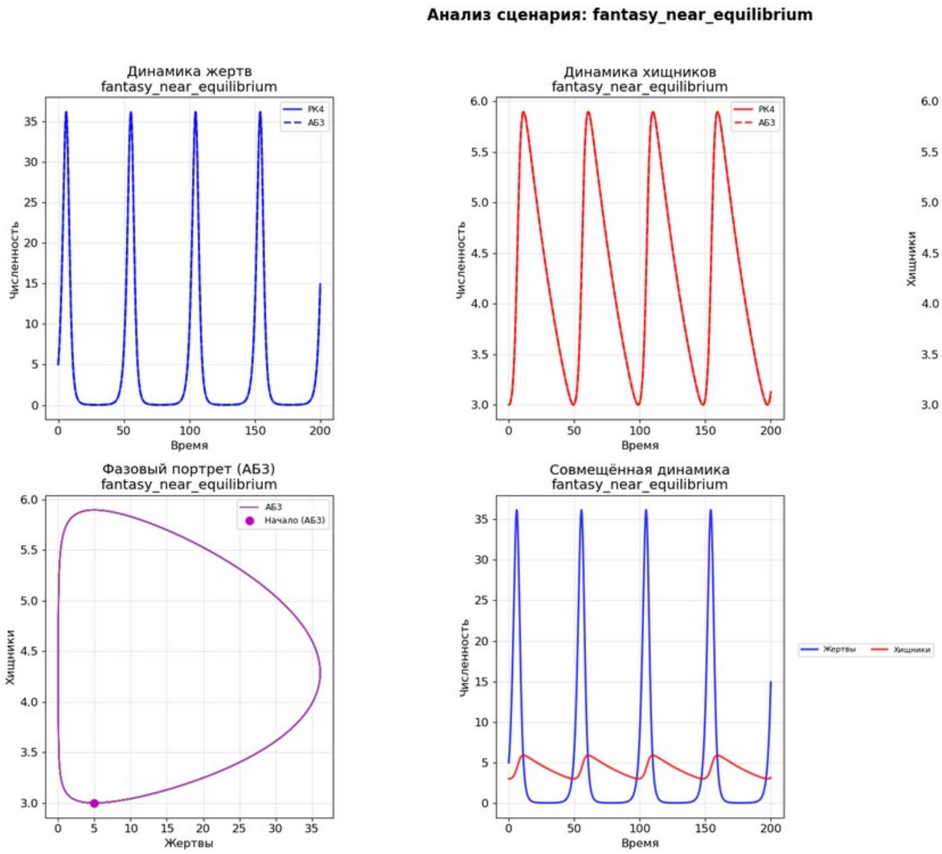
Более интересная ситуация обстоит с драконами и овцами, где модель была намеренно сделана аномальной. Если будет очень много овец, но мало драконов, то все овцы будут мгновенно съедены, а драконы постепенно начнут вымирать – им не хватит численности и пропитания. Когда драконов будет больше, чем овец, то ситуация примерно повториться, но вымирание будет контролируемым – не до конца. Благодаря этому несколько драконов все же останутся в живых к появлению новых овец. Здесь я также попробовал рассмотреть равную картину, а не искать точку равновесия – 5 овец и 3 драконов. Картина также повторяется. Овцы успевают размножится до того момента, как будут полностью съедены драконами. Затем драконы начинают потихоньку умирать до нового появления овец

Анализ сценария: fantasy_many_sheep



Анализ сценария: fantasy_many_dragons





4) Малые отклонения от равновесия в модели Лотки-Вольтерры приводят к периодическим колебаниям вокруг точки равновесия, а не к возвращению в неё или расхождению. Система обладает нейтральной устойчивостью: амплитуда колебаний пропорциональна начальному отклонению, колебания не затухают и не нарастают, что как раз соответствует замкнутым орбитам на фазовом портрете.
С точки зрения вычислительных методов, модель не является жёсткой, поскольку временные масштабы изменений численности жертв и хищников сопоставимы, и нет большого разброса в скоростях процессов. Это позволяет использовать явные методы интегрирования (Рунге-Кутты, Адамса-Башфорта) без ограничений по устойчивости, выбирая шаг интегрирования исходя только из требований точности.