

Практическое занятие №2

Армбристер Никита Владиславович

Группа ПМИ-31

Вариант 1

Цель: сформировать практические навыки аппроксимации табличных функций по методу наименьших квадратов и оценки полученного результата.

Задание:

1. На отрезке $[x_0, x_2]$ задайте непрерывную неполиномиальную функцию $f(x)$. По заданным точкам x_0, x_1, x_2 задайте табличную функцию $f(x_i)$. Для табличной функции найдите наилучшую аппроксимацию $g(x)$ на подпространстве при использовании сплайнов первого порядка. Оцените абсолютную по грешность по формуле $\|f(x) - g(x)\|_{L_2[a,b]} = \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$

2. С помощью AI-ассистента DeepSeek решите предыдущую задачу. Какой вид интерполянта он предложил? Изобразите на одном графике функцию $f(x)$, ваш результат и результат AI-ассистента. Какие явные недостатки можно обнаружить в каждом варианте решения?

Промт. Найти наилучшую аппроксимацию табличной функции $x = 1, 2, 3 | f = 1, 2, 1$

Вариант: $x_0=-0.1; x_1=0.3; x_2=0.6$

Решение:

Зададим неполиномиальную функцию $y = e^x$. Тогда для значений x первого варианта таблица будет выглядеть как:

| | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| x | -0.1 | 0.3 | 0.6 |
| $f(x)$ | 0.9048 | 1.3499 | 1.8221 |

Формальная постановка задачи: найти такую $g(x) \in \Omega$, что

$$\|f(x) - g(x)\|^2 \rightarrow \min_{g(x) \in \Omega}$$

Определим множество $\Omega: \Omega = [-0.1, 0.3] \cup [0.3, 0.6]$, где $\Omega_1 = [-0.1, 0.3]; \Omega_2 = [0.3, 0.6]$

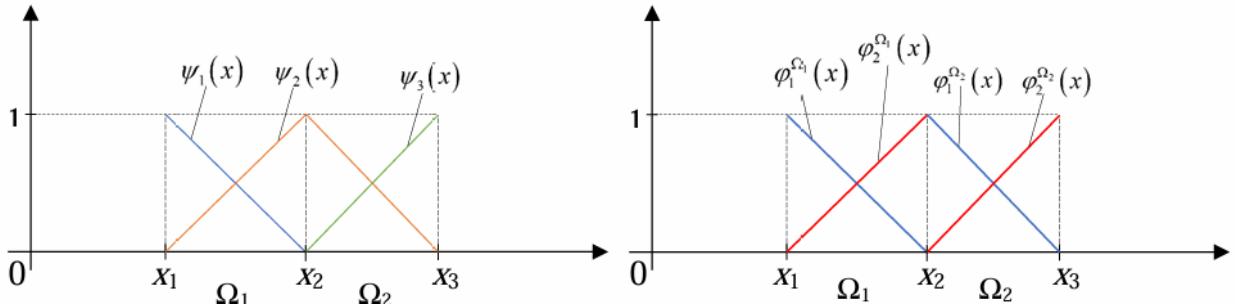
Множество Ω состоит из трех точек, значит,

$$g(x) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \psi_i(x), \{\psi_i(x)\} - \text{базис в } \Omega$$

Определим каждую функцию $\psi_i(x)$ в виде

$$\psi_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = x_i \\ 0, & \text{при } x \neq x_i \end{cases}$$

Согласно заданию, ограничиться лишь полиномами первой степени и определить функции через локальные B-сплайны, тогда



$$\varphi_1^{\Omega_k} = \frac{1-\xi}{2}, \varphi_2^{\Omega_k} = \frac{1+\xi}{2}, \xi = \frac{2(x-x_k)}{h_k} - 1, \text{ где}$$

h_k – длина сегмента, x_k – начальная точка сегмента

Функция $g(x)$ – наилучшая аппроксимация функции $f(x)$ в Ω тогда и только тогда, когда

$$(f - g, \psi_i) = 0$$

$$\text{Тогда для } \Omega_1 = [-0.1, 0.3]: h = 0.4; x_1 = -0.1; \xi = \frac{2(x+0.1)}{0.4} - 1 = 5x - 0.5$$

$$\varphi_1^{\Omega_1} = \frac{1-\xi}{2} = \frac{1-5x+0.5}{2} = \frac{3-10x}{4} \Rightarrow \varphi_1^{\Omega_1} = \begin{cases} \frac{3-10x}{4}, & x \in [-0.1, 0.3] \\ 0, & x \notin [-0.1, 0.3] \end{cases}$$

$$\varphi_2^{\Omega_2} = \frac{1+\xi}{2} = \frac{1+5x-0.5}{2} = \frac{1+10x}{4} \Rightarrow \varphi_2^{\Omega_2} = \begin{cases} \frac{1+10x}{4}, & x \in [-0.1, 0.3] \\ 0, & x \notin [-0.1, 0.3] \end{cases}$$

$$g(x) = \alpha_1 \varphi_1^{\Omega_1} + \alpha_2 \varphi_2^{\Omega_2}$$

Вычислим матричные элементы

$$(\varphi_1^{\Omega_1}, \varphi_1^{\Omega_1}) = \sum_{i=0}^2 \varphi_1^{\Omega_1}(x_i) \varphi_1^{\Omega_1}(x_i) = 1 * 1 + 0 * 0 + 0 = 1$$

$$(\varphi_2^{\Omega_2}, \varphi_1^{\Omega_1}) = \sum_{i=0}^2 \varphi_2^{\Omega_2}(x_i) \varphi_1^{\Omega_1}(x_i) = 0 * 1 + 1 * 0 + 0 = 0$$

$$(\varphi_2^{\Omega_2}, \varphi_2^{\Omega_2}) = \sum_{i=0}^2 \varphi_2^{\Omega_2}(x_i) \varphi_2^{\Omega_2}(x_i) = 0 * 0 + 1 * 1 + 0 = 1$$

Вычислим правые части

$$(f, \varphi_1^{\Omega_1}) = \sum_{i=0}^2 f(x_i) \varphi_1^{\Omega_1}(x_i) = 0.9848 * 1 + 1.3499 * 0 + 1.8221 * 0 = 0.9048$$

$$(f, \varphi_2^{\Omega_2}) = \sum_{i=0}^2 f(x_i) \varphi_2^{\Omega_2}(x_i) = 0.9848 * 0 + 1.3499 * 1 + 1.8221 * 0 = 1.3499$$

Тогда система уравнений для $\Omega 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9848 \\ 1.3499 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9848 \\ 1.3499 \end{pmatrix}$$

Таким образом, для сегмента $\Omega 1$ аппроксимирующая функция будет выглядеть как

$$g(x) = \frac{0.9048 * 3 - 10x}{4} + \frac{1.3499 * 1 + 10x}{4} = \frac{40643 + 44510x}{40000}, x \in [-0.1, 0.3]$$

Аналогично найдем аппроксимирующую функцию для сегмента $\Omega_2 = [0.3, 0.6]$:

Длина сегмента $h = 0.6 - 0.3 = 0.3$

$$\xi = \frac{2(x - x_k)}{h_k} - 1 = \frac{2(x - 0.3)}{0.3} - 1 = \frac{20}{3}x - 3$$

$$\varphi_1^{\Omega_2} = \frac{1 - \xi}{2} = \frac{1 - \frac{20}{3}x + 3}{2} = \frac{6 - 10x}{3} \Rightarrow \varphi_1^{\Omega_2} = \begin{cases} \frac{6 - 10x}{3}, & x \in [0.3, 0.6] \\ 0, & x \notin [0.3, 0.6] \end{cases}$$

$$\varphi_2^{\Omega_2} = \frac{1 + \xi}{2} = \frac{1 + \frac{20}{3}x - 3}{2} = \frac{-3 + 10x}{3} \Rightarrow \varphi_2^{\Omega_2} = \begin{cases} \frac{-3 + 10x}{3}, & x \in [0.3, 0.6] \\ 0, & x \notin [0.3, 0.6] \end{cases}$$

$$g(x) = \alpha_2 \varphi_1^{\Omega_2} + \alpha_3 \varphi_2^{\Omega_2}$$

Вычислим матричные элементы

$$(\varphi_1^{\Omega_2}, \varphi_1^{\Omega_2}) = \sum_{i=0}^2 \varphi_1^{\Omega_2}(x_i) \varphi_1^{\Omega_2}(x_i) = 0 + 1 * 1 + 0 * 0 = 1$$

$$(\varphi_2^{\Omega_2}, \varphi_1^{\Omega_2}) = \sum_{i=0}^2 \varphi_2^{\Omega_2}(x_i) \varphi_1^{\Omega_2}(x_i) = 0 + 0 * 1 + 1 * 0 = 0$$

$$(\varphi_2^{\Omega_2}, \varphi_2^{\Omega_2}) = \sum_{i=0}^2 \varphi_2^{\Omega_2}(x_i) \varphi_2^{\Omega_2}(x_i) = 0 + 0 * 0 + 1 * 1 = 1$$

Вычислим правые части

$$(f, \varphi_1^{\Omega_2}) = \sum_{i=0}^2 f(x_i) \varphi_1^{\Omega_2}(x_i) = 0.9848 * 0 + 1.3499 * 1 + 1.8221 * 0 = 1.3499$$

$$(f, \varphi_2^{\Omega_2}) = \sum_{i=0}^2 f(x_i) \varphi_2^{\Omega_2}(x_i) = 0.9848 * 0 + 1.3499 * 0 + 1.8221 * 1 = 1.8221$$

Тогда система уравнений для $\Omega 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3499 \\ 1.8221 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.3499 \\ 1.8221 \end{pmatrix}$$

Таким образом, для сегмента $\Omega 2$ аппроксимирующая функция будет выглядеть как

$$g(x) = \frac{1.3499 * 6 - 10x}{3} + \frac{1.8221 * 10x - 3}{3} = \frac{8777 + 15740x}{10000}, x \in [0.3, 0.6]$$

Тогда полный вид аппроксимации будет выглядеть как:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{40643 + 44510x}{40000}, & x \in [-0.1, 0.3] \\ \frac{8777 + 15740x}{10000}, & x \in [0.3, 0.6] \end{cases}$$

$$\text{Проверим погрешность по формуле } \|f(x) - g(x)\|_{L_2[a,b]} = \left(\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|f(x) - g(x)\|_{L_2[-0.1, 0.6]} = \left(\int_{-0.1}^{0.3} (f(x) - g_1(x))^2 dx + \int_{0.3}^{0.6} (f(x) - g_2(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \textcolor{red}{\dots}$$

$$\textcolor{red}{\dots} \left(\int_{-0.1}^{0.3} \left(e^x - \frac{40643 + 44510x}{40000} \right)^2 dx + \int_{0.3}^{0.6} \left(e^x - \frac{8777 + 15740x}{10000} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \textcolor{red}{\dots}$$

$$\approx (1.0511 * 10^{-4} + 5.0116 * 10^{-5})^{\frac{1}{2}} \approx 0.0012$$

Теперь найдем аппроксимацию данной табличной функции через DeepSeek:

Найти наилучшую аппроксимацию табличной функции $x = -0.1, 0.3, 0.6 \mid f = 0.9048, 1.3499, 1.8221$



Хорошо, нам нужно найти наилучшую аппроксимацию для табличной функции:

| x | f |
|------|--------|
| -0.1 | 0.9048 |
| 0.3 | 1.3499 |
| 0.6 | 1.8221 |

Поскольку у нас всего 3 точки, мы можем найти **многочлен 2-й степени** (параболу), который точно проходит через все точки (интерполяционный многочлен). В контексте "наилучшей аппроксимации" для 3 точек это и будет точное решение.

1. Постановка задачи

Будем искать функцию в виде:

$$P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

Условия:

$$\begin{cases} P_2(-0.1) = 0.9048 \\ P_2(0.3) = 1.3499 \\ P_2(0.6) = 1.8221 \end{cases}$$

2. Система уравнений

$$1. a_0 + a_1(-0.1) + a_2(0.01) = 0.9048$$

$$a_0 - 0.1a_1 + 0.01a_2 = 0.9048$$

$$2. a_0 + a_1(0.3) + a_2(0.09) = 1.3499$$

$$a_0 + 0.3a_1 + 0.09a_2 = 1.3499$$

$$3. a_0 + a_1(0.6) + a_2(0.36) = 1.8221$$

$$a_0 + 0.6a_1 + 0.36a_2 = 1.8221$$

3. Решение системы

Вычтем (1) из (2):

$$(0.3a_1 + 0.09a_2) - (-0.1a_1 + 0.01a_2) = 1.3499 - 0.9048$$

$$0.3a_1 + 0.09a_2 + 0.1a_1 - 0.01a_2 = 0.4451$$

$$0.4a_1 + 0.08a_2 = 0.4451$$

$$4a_1 + 0.8a_2 = 4.451 \quad (4)$$

Вычтем (2) из (3):

$$(0.6a_1 + 0.36a_2) - (0.3a_1 + 0.09a_2) = 1.8221 - 1.3499$$

$$0.3a_1 + 0.27a_2 = 0.4722$$

$$3a_1 + 2.7a_2 = 4.722 \quad (5)$$

Из (4): $4a_1 + 0.8a_2 = 4.451$

Из (5): $3a_1 + 2.7a_2 = 4.722$

Умножим (4) на 3: $12a_1 + 2.4a_2 = 13.353$

Умножим (5) на 4: $12a_1 + 10.8a_2 = 18.888$

Вычтем:

$$(10.8 - 2.4)a_2 = 18.888 - 13.353$$

$$8.4a_2 = 5.535$$

$$a_2 = \frac{5.535}{8.4} = 0.65892857\dots \approx 0.65893$$

Из (4):

$$4a_1 + 0.8 \times 0.65893 = 4.451$$

$$4a_1 + 0.527144 = 4.451$$

$$4a_1 = 3.923856$$

$$a_1 = 0.980964$$

Из (1):

$$a_0 - 0.1 \times 0.980964 + 0.01 \times 0.65893 = 0.9048$$

$$a_0 - 0.0980964 + 0.0065893 = 0.9048$$

$$a_0 - 0.0915071 = 0.9048$$

$$a_0 = 0.9963071$$

4. Итоговый многочлен

$$P_2(x) = 0.996307 + 0.980964 x + 0.65893 x^2$$

5. Проверка

- $x = -0.1$:

$$0.996307 - 0.0980964 + 0.0065893 = 0.9048 \text{ — верно.}$$

- $x = 0.3$:

$$0.996307 + 0.294289 + 0.0593037 = 1.3498997 \approx 1.3499 \text{ — верно.}$$

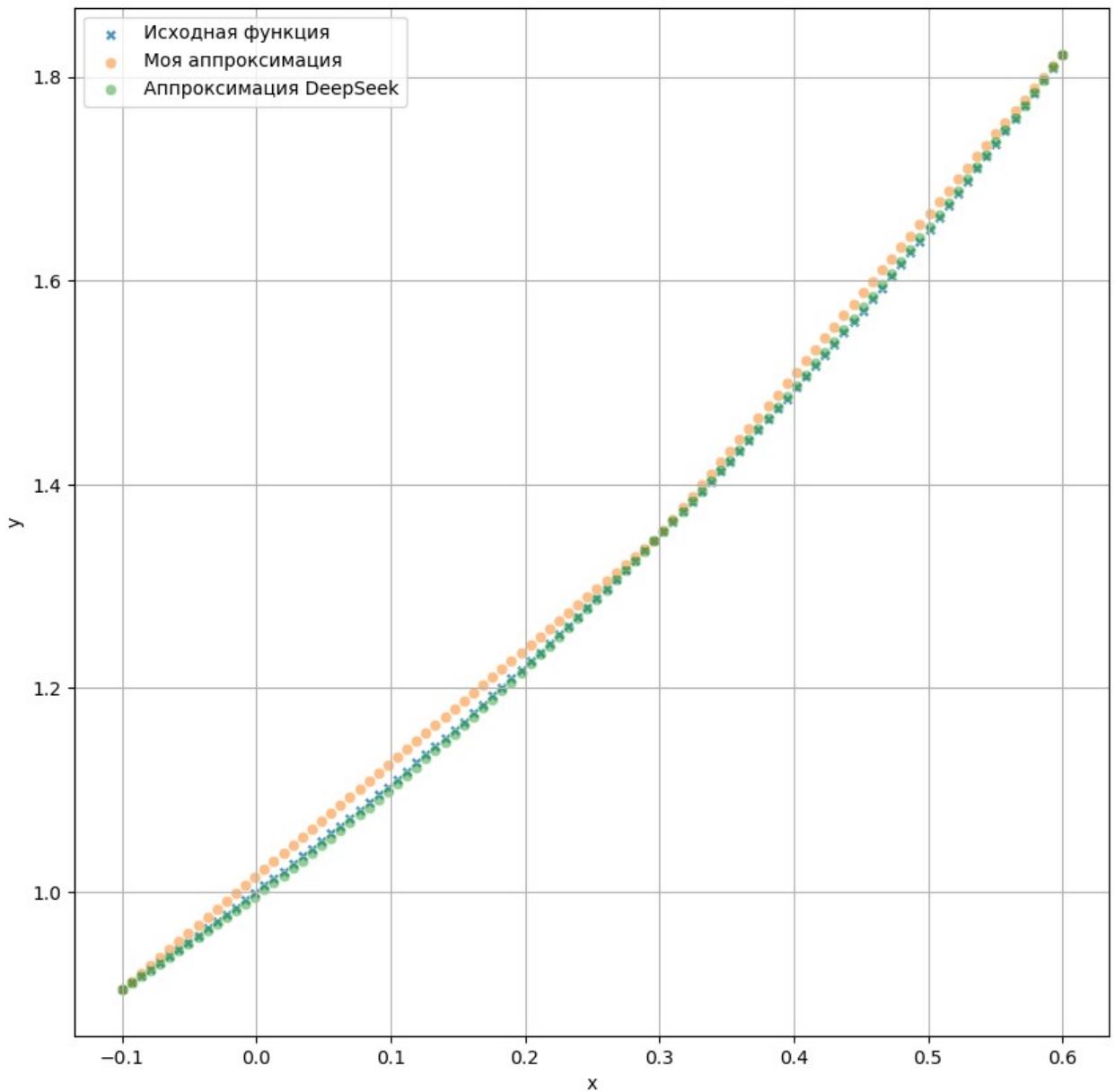
- $x = 0.6$:

$$0.996307 + 0.588578 + 0.2372148 = 1.8220998 \approx 1.8221 \text{ — верно.}$$

Ответ: Наилучшая аппроксимация в виде многочлена 2-й степени (интерполяционный многочлен):

$$P(x) = 0.99631 + 0.98096 x + 0.65893 x^2$$

AI-ассистент предложил интерполяционный многочлен второй степени основываясь на том, что нам было дано 3 точки. Он составил и решил систему уравнений. По итогу была найдена парабола, которая по идеи должна хорошо описать заданную функцию. Проверим это визуально, построив графики всех трех представлений функции



Как видно, моя аппроксимация справилась чуть хуже, чем версия AI-ассистента

Ответ и выводы.

В результате проведенных вычислений у меня получилось аппроксимировать исходную функцию на заданном промежутке с помощью такой, новой функцией:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{40643 + 44510x}{40000}, & x \in [-0.1, 0.3] \\ \frac{8777 + 15740x}{10000}, & x \in [0.3, 0.6] \end{cases}$$

В качестве недостатков моего решения можно выделить то, что он не является гладким (есть излом в $x=0.3$), хотя исходная функция будет гладкой.

DeepSeek же предложил параболу в качестве функции аппроксимации, что уже не будет соответствовать условию задания, но функция будет передана лучше

