Практическое задание №6

Армбристер Никита Владиславович

Группа ПМИ-31

Вариант 1

Цель: сформировать практические навыки применения итерационных методов для решения СЛАУ с квадратными невырожденными матрицами.

Задание:

1. Решить СЛАУ итерационным методом. Требуемая точность численного решения $\varepsilon = 10^{-3}$. Выбор метода обосновать
2. Сколько итераций необходимо выполнить по методу Гаусса-Зейделя, чтобы получить решение СЛАУ с ошибкой не более $\varepsilon = 10^{-12}$?
3. Оцените скорость сходимости выбранного итерационного метода (через отношение норм ошибок и погрешностей на итерациях)

$$Ax = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Решение:

1.1) Если посмотреть на эту матрицу, то можно заметить, что сумма ее диагональных элементов сильно превосходит сумму остальных. Действительно,

$$10 + 10 + 10 > 1 + 1$$

Исходя из этого, можно применять методы Якоби или Гаусса-Зейделя, т. к. условием сходимости у них является как раз наличие диагонального преобладания. Выберем метод Гаусса-Зейделя по причине того, что он сходится быстрее, чем Якоби.

1.2) Точечная рекуррентная формула метода Гаусса-Зейделя выглядит как

$$x_i^{(k+1)} = a_{ii}^{-1} \left(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right.$$

Погрешность можно рассчитать, как

$$\frac{\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_2}{\left\| x^{(k+1)} \right\|_2}$$

1.3) Поделим матрицу A на три составляющих:

- L – Точный нижний треугольник
- D – диагональ
- U – точный верхний треугольник

Тогда

$$A = L + D + U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1} U x^{(k)} + (L+D)^{-1} f = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x^{(k)} + \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.99 \\ 1 \end{pmatrix}$$

При $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.99 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.99 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_2}{\|x^{(1)}\|_2} = \frac{\sqrt{3.1901}}{\sqrt{3.1901}} = 1$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.99 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.99 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.001 \\ 0.9999 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_2}{\|x^{(2)}\|_2} = \frac{0.0995}{1.7329} \approx 0.0574$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.001 \\ 0.9999 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.99 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00001 \\ 0.999999 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_2}{\|x^{(3)}\|_2} = \frac{0.000995}{1.7329} \approx 0.000574$$

На 3-й итерации погрешность равна 0.000574, что меньше 0.001, следовательно необходимая точность достигнута

2.1) Общая формула всех итерационных методов имеет вид

$$x^{(k+1)} = B x^{(k)} + b,$$

где

$$B = E - M^{-1} A \; ; \; b = M^{-1} f$$

Для метода Гаусса-Зейделя

$$M = L + D \, ; \, B = -(L + D)^{-1} U$$

В ходе решения пункта 1 было выяснено, что

$$M = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ -0.01 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2) Обозначим приближенное решение задачи как $\tilde{x}$. Тогда вектор ошибки решения СЛАУ вычисляется как

$$e = \tilde{x} - x$$

А вектор невязки в виде

$$r = f - A\tilde{x} = Ae$$

Т.е.

$$e = A^{-1} r$$

При $x^{(0)} = (0,0,0)^T$ имеем

$$r^{(0)} = f - A x^{(0)} = (11, 11, 10)^T$$

Тогда

$$e^{(0)} = A^{-1} r^{(0)} = \frac{1}{99} \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 9.9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\| e^{(0)} \right\|_2 = \sqrt{3}$$

2.3) Известно, что

$$e^{(k+1)} = B e^{(k)} = B^k e^{(0)}$$

Поэтому

$$e^{(1)} = B e^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.01 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| e^{(1)} \right\| \approx 0.1005$$

$$e^{(2)} = B e^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.1 \\ 0.01 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.0001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| e^{(2)} \right\| \approx 0.001005$$

$$e^{(3)} = B e^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.001 \\ 0.0001 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00001 \\ 0.000000001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| e^{(3)} \right\| \approx 0.00001005$$

$$e^{(4)} = B e^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.00001 \\ 0.000001 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0000001 \\ 0.00000001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| e^{(4)} \right\| \approx 0.00000001005$$

$$e^{(5)} = B e^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.0000001 \\ 0.00000001 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.000000001 \\ 0.0000000001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\| e^{(5)} \right\| \approx 0.000000001005$$

$$e^{(6)} = B e^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.000000001 \\ 0.0000000001 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00000000001 \\ 0.000000000001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\|e^{(6)}\right\| \approx 0.00000000001005$$

$$e^{(7)} = B e^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.00000000001 \\ 0.000000000001 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0000000000001 \\ 0.00000000000001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left\|e^{(6)}\right\| \approx 0.00000000000001005 = 1.005 \cdot 10^{-13}$$

После 7-ой итерации норма погрешности будет меньше 10^{-12}

3.1) Скорость сходимости решения можно найти как

$$R = \frac{\left\|e^{(k+1)}\right\|}{\left\|e^{(k)}\right\|} = \frac{\dfrac{\left\|x^{(k+2)} - x^{(k+1)}\right\|}{\left\|x^{(k+2)}\right\|}}{\dfrac{\left\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right\|}{\left\|x^{(k+1)}\right\|}} < \frac{\left\|r^{(k+1)}\right\|}{\left\|r^{(k)}\right\|}$$

Пользуясь найденными значениями из пунктов 1 и 2,

$$R = \frac{\left\|e^{(2)}\right\|}{\left\|e^{(1)}\right\|} = \frac{0.001005}{0.1005} = 0.1005$$

$$R = \frac{\dfrac{\left\|x^{(2)} - x^{(1)}\right\|}{\left\|x^{(2)}\right\|}}{\dfrac{\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|}{\left\|x^{(1)}\right\|}} = \frac{0.0574}{1} = 0.0574$$

$$\frac{\left\|r^{(1)}\right\|}{\left\|r^{(0)}\right\|} = \frac{\left\|(11, 11, 10)^T - \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.99 \\ 1 \end{pmatrix}\right\|}{\left\|(11, 11, 10)^T\right\|} = 0.535$$

Из этого следует, что $R \approx 0.01$

Ответ.

1. 0.000574
2. 7
3. 0.01