Isometrías líneales

Alejandro García Montoro
Serafín Moral García
Gustavo Rivas Gervilla
Luis Suárez Lloréns

ugr Universidad de Granada

Contents

1 Introducción

A lo largo de este trabajo veremos un tipo muy particular de aplicaciones lineales, las isometrías. Que como sabemos en esencia son funciones que conservan distancias en espacios vectoriales euclídeos. Haremos un repaso de las isometrías en $\mathbb{R}^3$ viendo las matrices asociadas a cada una de ellas.

Además también resolveremos algunos problemas relacionados con las isometrías con el objetivo final de dar un repaso general a estas aplicaciones que nos será de utilidad a lo largo de la asignatura.

Seguiremos la estrutura presente en [?] para presentar estos conceptos ya que es un libro de uso muy extendido y de muy buena calidad.

2 Definición y ejemplos

Definición 1 (Isometría)
Una aplicación lineal $f : V \to V'$ es **isometría** si, y sólo si, $\| v \| = \| f(v) \|$ para todo $v \in V$.

Es claro que de esta definición podemos deducir que cualquier isometría es una aplicación inyectiva, para ello sólo tenemos que ver que el núcleo de la aplicación es el conjunto formado únicamente por el cero: Si $f(v) = 0 \Rightarrow \| v \| = \| f(v) \| = 0 \Rightarrow v = 0$ c.q.d.. Con lo cual si V y V' tienen la misma dimensión (en particular si f es un endomorfismo), toda isometría de V a V' es un isomorfismo.

A continuación vamos a ver una de las caracterizaciones más importante de las isometrías, como sabemos toda aplicación líneal tiene asociada una matriz, pues bien veamos qué propiedad tienen las matrices asociadas a isometrías:

Teorema 1 (Caracterización de las isometrías)
Si V es un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y B es una base ortonormal de V, entonces un endomorfismo f de V es una isometría sii su matriz asociada respecto de B es ortogonal.

DEMOSTRACIÓN:

Si f es isometría y A su matriz asociada respecto de B, entonces se verifica:

$$X^t I Y = < x, y > = < f(x), f(y) > = (AX)^t I (AY) = X^t (A^t I A) Y$$

donde X e Y representan las coordenadas de los vectores de x e y respecto de la base B. Como esto se da para todo par de vectores, entonces tenemos que $A^t A = I$ y con lo cual A es ortogonal. El recíproco es evidente. ■

Dada una isometría en un V podemos considerar el conjunto de los vectores que se mantienen invariantes por la isometría, esto es:

$$V_f = \{v \in V | f(v) = v\}$$

que evidentemente es un subespacio vectorial de V. Si A es la matriz asociada a f, entonces un vector X está en V_f sii $(AX = X) \iff (A - I)X = 0$, lo que da lugar a un sistema homogéneo con matriz de coeficientes $A - I$ y por lo tanto $dimV_f = n - rango(A - I)$.

Del mismo modo podemos definir el conjunto $V_{-f} = \{v \in V | f(v) = -v\}$ que mediante el mismo razonamiento que hemos hecho antes tenemos que da lugar al sistema homogéneo $(A + I)X = 0$.

Vamos a probar ahora que en $\mathbb{R}^3$ al menos uno de los dos subespacios es no nulo.

Proposición 1
Para una matriz ortogonal real de orden impar A, se verifica que $det(A - I) = 0$ ó $det(A + I) = 0$.

DEMOSTRACIÓN:

En primer lugar observemos que si C es una matriz antisimétrica de orden impar, entonces det(C) = 0; en efecto, como $-C = C^t$ y $det(C) = det(C^t) = (-1)^n det(C)$ y n es impar, entonces det(C) = det(-C) ergo det(C) = 0.

Ahora $(A - I)(A + I) = A^2 - I = A(A - A^t)$ pero $A - A^t$ es antisimétrica con lo cual tenemos que $det((A - I)(A + I)) = 0$ de donde deducimos lo que queremos.■

3 Isometrías en $\mathbb{R}^3$

A continuación vamos a estudiar los diferentes tipos de isometrías que hay en el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$.

3.1 Giro de ángulo α respecto de una recta

Vamos a considerar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ compuesta por dos vectores a y b en el plano perpendicular al eje de giro y un vector n perteneciente al eje de giro ($n = axb$). La matriz asociada al giro de ángulo α respecto a la recta de vector director n sería:

$$A = A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algunas propiedades que observamos de la matriz anterior:

1. Las filas y columnas de A forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, lo cual es consistente con que A es una matriz ortogonal
2. El giro respecto de una recta en $\mathbb{R}^3$ es una isometría directa, esto es, con determinante -1 (el determinante no depende de la base escogida).
3. La composición de giros respecto de una misma recta es también un giro. Además, si α y β son ángulos, se cumplen las propiedades:
   (a) $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$
   (b) $A_\alpha A_{-\alpha} = I$
   (c) $A_\alpha^{-1} = A_{-\alpha}$
4. El eje de giro es un subespacio propio de valor propio asociado $\lambda = 1$, dado que los vectores del eje de giro se quedan invariantes.
5. El plano perpendicular al eje de giro es un subespacio invariante, por lo que la imagen de un vector de ese plano permanece en ese plano.
6. Para $\alpha = 0$ tenemos la matriz identidad.

3.2 Simetría respecto de una recta

Es un caso particular del tipo de isometría anterior tomando como ángulo $\alpha = \pi$. La matriz en este caso sería

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se verifica que

1. $A_\pi A_\pi = I$
2. $A_\pi = A_\pi^{-1}$

3.3 Simetría ortogonal respecto de un plano

Tomando una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con los primero vectores a y b en el plano de simetría, y el tercer vector n en el eje ortogonal a él, la matriz asociada a esta base es:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Se tiene que:

1. $TT^t = I$ es decir $T^{-1} = T^t = T$. Tiene como valores propios el 1 doble y el -1 simple.
2. Es una isometría inversa, con determinante -1.
3. El plano de simetría es el subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 1$.
4. El eje ortogonal es el asociado al autovalor $\lambda = -1$

3.4 Clasificación:

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ una aplicación líneal conservando el producto escalar, $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormal y llamemos A la matriz asociada a f en la base B. Podemos distinguir entonces los siguientes casos:

Si det(A-I) = 0 $\Rightarrow$ existen vectores fijos no nulos. Clasificamos entonces según la dimensión del subespacio de vectores fijos:

1. Si $dimV_f = 1$ tenemos un **giro de eje la recta V_f y ángulo α**.
2. Si $dimV_f = 2$ tenemos una **simetría respecto del plano V_f**.
3. Si $dimV_f = 3$ tenemos la **identidad**.

Ahora, si $det(A - I) \neq 0$ entonces por 1 tenemos que $det(A + I) = 0$ y por lo tanto el espacio V_{-f} es no nulo. Y entonces tenemos los siguientes casos:

1. Si $dimV_f = 1$ entonces tenemos una **composición de una simetría respecto del plano perpendicular a la recta V_f con el giro de eje dicha recta y ángulo α.**
2. Si $dimV_{-f} = 2$, entonces podemos tomar una base ortonormal $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ en la que $v_1, v_2 \in V_{-f}$ y por tanto $f(v_3)$ es perpendicular a ambos, es decir, $f(v_3) = cv_3$ y como $v_3 \notin V_{-f}$ entonces c = 1 con lo que estaríamos en el caso det(A-I) = 0, previamente analizado.
3. Si $dimV_{-f} = 3$ la aplicación es la **-I**.

4 Ejercicio

El siguiente ejercicio se encuentra planteado en [**?**]

Demuestra que dados dos planos π y π' que pasan por el origen, siempre existe una matriz $A \in \mathcal{O}(3)$ tal que $A\pi = \pi'$. ¿Cuántas?

SOLUCIÓN:

Dejaremos aparte el caso trivial de que ambos planos, π y π', sean iguales. Siendo así, sabemos que por tener un punto en común, los planos se cortan en una recta. En nuestro caso, la recta además pasa por el origen, pues sabemos que este punto pertenece a la intersección de los planos.

Siendo r la recta en la que se cortan π y π', que pasa por el origen. Es claro que una rotación entorno al eje r, nos puede llevar π en π'. Sean $\vec{n}$ y $\vec{n'}$ los vectores normales de π y π' respectivamente. Entonces el ángulo de rotación será:

$$\cos\alpha = \frac{< \vec{n}, \vec{n'} >}{\|\vec{n}\|\|\vec{n'}\|}$$

Por tanto, existe una isometría que nos lleva π en π', la rotación de ángulo α entorno a r.

En cuanto a la cantidad de isometrías que pueden hacer esto, primero tenemos que ver que la composición de isometrías es isometría. Pero esto es muy sencillo desde un punto de vista matricial, pues sabemos que las matrices ortogonales forman un grupo con las multiplicación.

Una vez hemos visto esto, la idea es aplicar la isometría indicada arriba, y después aplicar una segunda isometría que nos deje π' en π'. Por ejemplo, las rotaciones de cualquier ángulo entorno al eje que tiene como dirección $\vec{n'}$, la normal del plano π'.

Por tanto, tenemos infinitas isometrías distintas que nos llevan π en π'.