Isometrías líneales

Alejandro García Montoro
Serafín Moral García
Gustavo Rivas Gervilla
Luis Suárez Lloréns

Contents

1 Introducción

A lo largo de este trabajo veremos un tipo muy particular de aplicaciones lineales, las isometrías. Que como sabemos en esencia son funciones que conservan distancias en espacios vectoriales euclídeos. Haremos un repaso de las isometrías en $\mathbb{R}^3$ viendo las matrices asociadas a cada una de ellas.

Además también resolveremos algunos problemas relacionados con las isometrías con el objetivo final de dar un repaso general a estas aplicaciones que nos será de utilidad a lo largo de la asignatura.

Seguiremos la estrutura presente en [1] para presentar estos conceptos ya que es un libro de uso muy extendido y de muy buena calidad.

2 Definición y ejemplos

Definición 1 (Isometría)
Una aplicación lineal $f : V \to V'$ es **isometría** si, y sólo si, $\| v \| = \| f(v) \|$ para todo $v \in V$.

Es claro que de esta definición podemos deducir que cualquier isometría es una aplicación inyectiva, para ello sólo tenemos que ver que el núcleo de la aplicación es el conjunto formado únicamente por el cero: Si $f(v) = 0 \Rightarrow \| v \| = \| f(v) \| = 0 \Rightarrow v = 0$ c.q.d.. Con lo cual si V y V' tienen la misma dimensión (en particular si f es un endomorfismo), toda isometría de V a V' es un isomorfismo.

A continuación vamos a ver una de las caracterizaciones más importante de las isometrías, como sabemos toda aplicación líneal tiene asociada una matriz, pues bien veamos qué propiedad tienen las matrices asociadas a isometrías:

Teorema 1 (Caracterización de las isometrías)
Si V es un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y B es una base ortonormal de V, entonces un endomorfismo f de V es una isometría sii su matriz asociada respecto de B es ortogonal.

DEMOSTRACIÓN:

Si f es isometría y A su matriz asociada respecto de B, entonces se verifica:

$$X^tIY =< x, y >=< f(x), f(y) >= (AX)^tI(AY) = X^t(A^tIA)Y$$

donde X e Y representan las coordenadas de los vectores de x e y respecto de la base B. Como esto se da para todo par de vectores, entonces tenemos que $A^tA = I$ y con lo cual A es ortogonal. El recíproco es evidente. ■

3 Isometrías en $\mathbb{R}^3$

References

[1] Luis Merino and Evangelina Santos. *Álgebra Lineal con métodos elementales.*