

# Isometrías lineales

Alejandro García Montoro

Serafín Moral García

Gustavo Rivas Gervilla

Luis Suárez Lloréns



*ugr*

Universidad  
de **Granada**

## Contents

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Definición y ejemplos</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Isometrías en <math>\mathbb{R}^3</math></b>	<b>4</b>
3.1	Giro de ángulo $\alpha$ respecto de una recta . . . . .	4
3.2	Simetría respecto de una recta . . . . .	4

## 1 Introducción

A lo largo de este trabajo veremos un tipo muy particular de aplicaciones lineales, las isometrías. Que como sabemos en esencia son funciones que conservan distancias en espacios vectoriales euclídeos. Haremos un repaso de las isometrías en  $\mathbb{R}^3$  viendo las matrices asociadas a cada una de ellas.

Además también resolveremos algunos problemas relacionados con las isometrías con el objetivo final de dar un repaso general a estas aplicaciones que nos será de utilidad a lo largo de la asignatura.

Seguiremos la estructura presente en [1] para presentar estos conceptos ya que es un libro de uso muy extendido y de muy buena calidad.

## 2 Definición y ejemplos

**Definición 1** (Isometría)

Una aplicación lineal  $f : V \rightarrow V'$  es **isometría** si, y sólo si,  $\|v\| = \|f(v)\|$  para todo  $v \in V$ .

Es claro que de esta definición podemos deducir que cualquier isometría es una aplicación inyectiva, para ello sólo tenemos que ver que el núcleo de la aplicación es el conjunto formado únicamente por el cero: Si  $f(v) = 0 \Rightarrow \|v\| = \|f(v)\| = 0 \Rightarrow v = 0$  c.q.d.. Con lo cual si  $V$  y  $V'$  tienen la misma dimensión (en particular si  $f$  es un endomorfismo), toda isometría de  $V$  a  $V'$  es un isomorfismo.

A continuación vamos a ver una de las caracterizaciones más importante de las isometrías, como sabemos toda aplicación lineal tiene asociada una matriz, pues bien veamos qué propiedad tienen las matrices asociadas a isometrías:

**Teorema 1** (Caracterización de las isometrías)

Si  $V$  es un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita y  $B$  es una base ortonormal de  $V$ , entonces un endomorfismo  $f$  de  $V$  es una isometría sii su matriz asociada respecto de  $B$  es ortogonal.

### DEMOSTRACIÓN:

Si  $f$  es isometría y  $A$  su matriz asociada respecto de  $B$ , entonces se verifica:

$$X^t I Y = \langle x, y \rangle = \langle f(x), f(y) \rangle = (AX)^t I (AY) = X^t (A^t I A) Y$$

donde  $X$  e  $Y$  representan las coordenadas de los vectores  $x$  e  $y$  respecto de la base  $B$ . Como esto se da para todo par de vectores, entonces tenemos que  $A^t A = I$  y con lo cual  $A$  es ortogonal. El recíproco es evidente. ■

### 3 Isometrías en $\mathbb{R}^3$

A continuación vamos a estudiar los diferentes tipos de isometrías que hay en el espacio vectorial euclídeo  $\mathbb{R}^3$ .

#### 3.1 Giro de ángulo $\alpha$ respecto de una recta

Vamos a considerar una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$  compuesta por dos vectores  $a$  y  $b$  en el plano perpendicular al eje de giro y un vector  $n$  perteneciente al eje de giro ( $n = axb$ ). La matriz asociada al giro de ángulo  $\alpha$  respecto a la recta de vector director  $n$  sería:

$$A = A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Algunas propiedades que observamos de la matriz anterior:

1. Las filas y columnas de  $A$  forman una base ortonormal de  $\mathbb{R}^3$ , lo cual es consistente con que  $A$  es una matriz ortogonal
2. El giro respecto de una recta en  $\mathbb{R}^3$  es una isometría directa, esto es, con determinante -1 (el determinante no depende de la base escogida).
3. La composición de giros respecto de una misma recta es también un giro. Además, si  $\alpha$  y  $\beta$  son ángulos, se cumplen las propiedades:
  - (a)  $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$
  - (b)  $A_\alpha A_{-\alpha} = I$
  - (c)  $A_\alpha^{-1} = A_{-\alpha}$
4. El eje de giro es un subespacio propio de valor propio asociado  $\lambda = 1$ , dado que los vectores del eje de giro se quedan invariantes.
5. El plano perpendicular al eje de giro es un subespacio invariante, por lo que la imagen de un vector de ese plano permanece en ese plano.
6. Para  $\alpha = 0$  tenemos la matriz identidad.

#### 3.2 Simetría respecto de una recta

Es un caso particular del tipo de isometría anterior tomando como ángulo  $\alpha = \pi$ . La matriz en este caso sería

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se verifica que

1.  $A_\pi A_\pi = I$
2.  $A_\pi = A_\pi^{-1}$

## References

- [1] Luis Merino and Evangelina Santos. *Álgebra Lineal con métodos elementales*.