Лабораторная 1

Григоренко Павел, M3238

19-04-2023

Задача 1

Рассматривается генеральная совокупность из $(n+1)$ человек. Человек, которого условимся называть прародителем, пишет два письма случайно выбранным адресатам, которые образую первое поколение. Те в свою очередь делают то же самое, в результате чего чего образуется второе поколение и тд. Найти вероятность того, что прародитель не входит ни в одно из поколений с номерами $1, 2, \dots, r$.

Задача 2

В квадрат наудачу брошены точки A, B. Найти вероятность того, что круг, диаметром которого является отрезок AB, целиком содержится в квадрате.

Перейдём от выбора двух концов диаметра к выбору центра и точки на окружности. Правда центр, в отличие от концов диаметра, выбирается неравномерно. Введём декартову систему координат так, что наш квадрат имеет длину стороны 1, а его стороны лежат на осях. Тогда $(x_0, y_0) = \left(\frac{x_a+x_b}{2}, \frac{y_a+y_b}{2}\right)$. Так как x_a, x_b, y_a, y_b — независимые случайный величины, равномерно выбранные на отрезке $[0;1]$, то x_0 и y_0 будут иметь ту же область значений, но плотность вероятности будет

$$p_0(z) = \begin{cases} 4z, \ z \in \left[0; \frac{1}{2}\right] \\ 4 - 4z, \ z \in \left(\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases}$$

(думаю, этот факт достаточно очевиден).

Поймём, что, в принципе, не имеет значения, в какую четверть квадрата попал центр: ситуация будет симметричной. Так что пусть $x_0, y_0 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. Иначе просто расположим оси по-другому.

Зафиксируем x_0 и y_0.

Тогда $x_a \in [0; 2x_0]$, чтобы точка $x_b = 2x_0 - x_a \in [0;1]$. Аналогично, $y_a \in [0; 2y_0]$.

При этом x_a, y_a равномерно распределены на своих интервалах. В этом нетрудно убедиться, если рассмотреть их условные распределения:

$$p_{a|x_0=X_0}(x) = \frac{p_{x_a,x_0}(x, X_0)}{p_0(X_0)} = \frac{p_{x_a,x_b}(x, 2X_0 - x)}{p_0(X_0)} = \frac{p_a(x)p_b(2X_0 - x)}{p_0(X_0)} = \frac{1 \cdot 1}{p_0(X_0)} \text{ — не зависит от } x$$

При этом окружность будет содержаться в квадрате тогда и только тогда, когда $\rho(C, A) \le \min(\rho(C, OX), \rho(C, OY))$, где $C = (x_0, y_0)$.

То есть, из всего прямоугольника возможных положений , нам подходит только те A, которые лежат в круге с радиусом $\min(x_0, y_0)$ и центром в (x_0, y_0). А так как A распределена равномерно, мы можем просто поделить площадь круга на площадь прямоугольника и получить вероятность того, что окружность из задания лежит в квадрате из задания при условии, что центр этой окружности имеет координаты (x_0, y_0): $\frac{\pi \min(x_0,y_0)^2}{2x_0 \cdot 2y_0}$.

Тогда ответом на задачу будет

$$4 \int_0^{\frac{1}{2}} p_0(x_0) \int_0^{\frac{1}{2}} p_0(y_0) \frac{\pi \min(x_0, y_0)^2}{2x_0 \cdot 2y_0} dy_0 dx_0$$

, где $p_0(z) = 4z$ (четвёрка перед интегралом нужна, потому что мы интегрируем только по четверти квадрата, но при этом не меняем p_0).

$$\begin{aligned} 4 \int_0^{\frac{1}{2}} p_0(x_0) \int_0^{\frac{1}{2}} p_0(y_0) \frac{\pi \min(x_0, y_0)^2}{2x_0 \cdot 2y_0} dy_0 dx_0 &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} 4x_0 \int_0^{\frac{1}{2}} 4y_0 \frac{\pi \min(x_0, y_0)^2}{4x_0 y_0} dy_0 dx_0 = 16\pi \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \min(x_0, y_0)^2 dy_0 dx_0 = \\ &= 16\pi \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{x_0} y_0^2 dy_0 dx_0 + \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} x_0^2 dy_0 dx_0 \right] = \\ &= 16\pi \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x_0^3}{3} dx_0 + \int_0^{\frac{1}{2}} x_0^2 \left(\frac{1}{2} - x_0 \right) dx_0 \right] = 16\pi \left[\frac{1}{192} + \frac{1}{192} \right] = \frac{\pi}{6} \approx 0.5236 \end{aligned}$$

А что же результаты эксперимента?

```
523600045 out of 1000000000 circles were contained within the square,
Thus, the result is 52.36000%
And the expected is 52.35988%
```

Замечательно.

Задача 3

Пусть имеются две независимые серии испытаний Бернулли на n опытов в каждой с вероятностью успеха p. S_i — количество успехов в n испытаниях в i-ой серии. Найти вероятность $P\left(S_1 = k \mid S_1 + S_2 = m\right)$.

Заметим, что

$$\begin{cases} k \le m \\ m - k \le n \end{cases}$$

Здесь и далее считаем, что эти условия выполняются.

$$\begin{aligned}
P\left(S_1 = k \mid S_1 + S_2 = m\right) &= \frac{P\left(S_1 = k \wedge S_1 + S_2 = m\right)}{P\left(S_1 + S_2 = m\right)} && \text{по формуле условной вероятности} \\
&= \frac{P\left(S_1 = k \wedge S_2 = m - k\right)}{P\left(S_1 + S_2 = m\right)} && \text{немного алгебры} \\
&= \frac{P\left(S_1 = k\right) \cdot P\left(S_2 = m - k\right)}{P\left(S_1 + S_2 = m\right)} && \text{независимые события} \\
&= \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \binom{n}{m-k} p^{m-k} (1-p)^{n-(m-k)}}{\binom{2n}{m} p^m (1-p)^{2n-m}} && \text{известная формула для испытаний Бернулли} \\
&= \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k} p^m (1-p)^{2n-m}}{\binom{2n}{m} p^m (1-p)^{2n-m}} = \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{m-k}}{\binom{2n}{m}} && \text{ещё немного алгебры}
\end{aligned}$$

Сильно приятнее это выражение, к сожалению, не сделаешь. Но зато оно хотя бы не зависит от p.

Давайте взглянем на часть результатов эксперимента:

```
m = 4   k = 0   :      42 / 1092     got 03.846%, expected 04.334%
m = 4   k = 1   :     254 / 1092     got 23.260%, expected 24.768%
m = 4   k = 2   :     466 / 1092     got 42.674%, expected 41.796%
m = 4   k = 3   :     282 / 1092     got 25.824%, expected 24.768%
m = 4   k = 4   :      48 / 1092     got 04.396%, expected 04.334%
[...]
m = 13  k = 7   :  583961 / 1794151  got 32.548%, expected 32.508%
m = 13  k = 8   :  262724 / 1794151  got 14.643%, expected 14.628%
m = 13  k = 9   :   48458 / 1794151  got 02.701%, expected 02.709%
m = 13  k = 10  :    2738 / 1794151  got 00.153%, expected 00.155%
[...]
m = 19  k = 9   :    4961 / 9910     got 50.061%, expected 50.000%
m = 19  k = 10  :    4949 / 9910     got 49.939%, expected 50.000%
m = 20  k = 10  :     850 / 850      got 100.000%, expected 100.000%
```

Похоже на правду.

Задача 4

Рассмотрите схемы Бернулли при $n \in \{10, 100, 1000, 10000\}$ и $p \in \{0.001, 0.01, 0.1, 0.25, 0.5\}$. Рассчитайте точные вероятности (где это возможно) $P\left(S_n \in \left[\frac{n}{2} - \sqrt{npq}, \frac{n}{2} + \sqrt{npq}\right]\right)$, где S_n — количество успехов в n испытаниях, и приближенную с помощью одной из предельных теорем. Сравните точные и приближенные вероятности. Объясните результаты.