

**§2. Следящая система с люфтом.** Рассмотрим простейшую следящую систему с люфтом в контактном устройстве и в зубчатом зацеплении, описываемую безразмерным уравнением [152]

$$\ddot{x} + \dot{x} = S(x, \dot{x}) \quad (1)$$

где  $x$  - координата сервомотора и  $S(x, \dot{x})$  - кусочно-постоянная (характеризующая безразмерную э. д. с. и сухое трение в системе). Общеизвестным приемом при исследовании точечных преобразований является представление и исследование точечного преобразования в параметрической форме, где в качестве параметра вводится время пробега изображающей точки по траекториям системы между точками сшивания.

Особенностью рассматриваемой задачи является возможность другого эффективного параметрического представления точечного преобразования с введением в качестве параметров некоторых отрезков в фазовом пространстве. Этот прием имеет значение, выходящее за рамки рассматриваемой задачи.

Разбиение плоскости  $(x, \dot{x})$  на области, где  $C(x, \dot{x})$  сохраняет постоянное значение, производится в зависимости от двух параметров  $k$  и  $z$ , характеризующих соответственно люфт в контактном устройстве и люфт в зацеплении.

Запишем уравнение (1) в виде системы

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = S(x, y) - y \quad (2)$$

и будем рассматривать фазовые траектории на плоскости  $(x, y)$ . Разбиение фазовой плоскости на траектории будет симметрично относительно начала координат, если за начало отсчета принять середину максимального интервала длиной  $z + k$ , который сервомотор может пройти по инерции. На рис. 210 изображено разбиение плоскости  $(x, y)$  на десять областей, где  $S(x, y)$  сохраняет постоянные значения, указанные на рисунке. Полосы шириной  $y_0$ , примыкающие к оси  $x$  сверху или снизу, соответствуют выбору сервомотором люфта в зубчатом зацеплении, и для них соответственно  $S(x, y) = 1$  или  $S(x, y) = -1$  (сухим трением при свободном движении сервомотора пренебрегаем). Полосе шириной  $k$ , содержащей внутри ось  $y$ , соответствует выбор сервомотором совместно со следящей осью люфта в контактном устройстве при движении по инерции. Здесь  $S(x, y) = -r$  или  $S(x, y) = r$  характеризует твердое трение в системе. На других участках фазовой плоскости величина  $S(x, y)$  имеет значение  $\pm 1 \pm r$ , где знаки выбираются в зависимости от знака скорости и знака включенной э. д. с. или 0, если люфт в зацеплении про ходится по инерции. Величина  $y_0$  - максимальная скорость, до которой разгоняется сервомотор, выбирая люфт в зацеплении, есть однозначная функция параметра  $z$  и определяется уравнением

$$z + y_0 + \ln(1 - y_0) = 0. \quad (3)$$

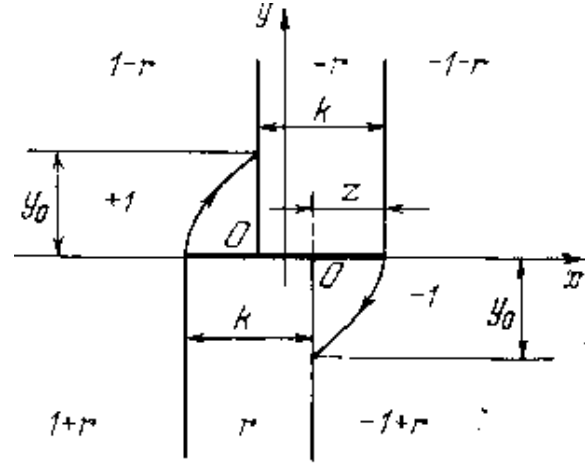


Рис. 210

Это уравнение получится, если в (2) положить  $S(x, y) = 1$  и потребовать для решения системы (2) выполнения условий  $x = -x_0, y = 0; x = -x_0 + z, y = y_0$ .

Построим точечное преобразование в себя полупрямой  $L : y = 0, x \leq \frac{-(z+k)}{2}$ , примыкающей слева к отрезку покоя:  $y = 0, \frac{-(z+k)}{2} < x < \frac{z+k}{2}$ . Так как фазовое пространство симметрично относительно начала координат, то задача сводится к построению точечного отображения полупрямой  $L$  в симметричную полупрямую  $L'$ , примыкающую к отрезку покоя справа.

Рассмотрим траекторию в верхней полуплоскости, считую из четырех кусков, начинающуюся в точке  $(-u, 0)$  и заканчивающуюся в точке  $(v, 0)$ . «Сшивание» траекторий в точках разрыва правых частей системы совершается элементарно, если знак правой части второго из уравнений (2) не изменяется при переходе через линию сшивания. Так будет, если  $y_0 \leq 1 - r$ , т. е. если  $r$  "не слишком велико". Точки пересечения этой траектории с горизонтальной линией ширины  $k$  будут  $x = \frac{z-k}{2}, y = \eta$  и  $x = \frac{z+k}{2}, y = \xi$ . Как оказывается, величины  $\eta$  и  $\xi$  целесообразно рассматривать как параметры точечного преобразования.

Из уравнения (2), полагая  $S(x, y) = 1$  для первого куска траектории и  $S(x, y) = 1 - r$  для второго и используя условия для концов кусков траекторий:  $x = -u, y = 0; x = -u + z, y = y_0; x = \frac{z-k}{2}, y = r_i$ , получим

$$u = \frac{z+k}{2} + (1-r) \ln \frac{1-r-y_0}{1-r-\eta} + y_0 - \eta, \quad y_0 \leq \eta < 1-r. \quad (4)$$

Полагая далее  $S(x, y) = -r$  для третьего куска траектории и  $S(x, y) = -1 - r$  для четвертого и используя условия для концов кусков траекторий

$$x = \frac{z-k}{2}, \quad y = \eta; \quad x = \frac{z+k}{2}, \quad y = \xi; \quad x = v, \quad y = 0,$$

получим

$$r \ln(\xi + r) - r \ln(\eta + r) + \eta - \xi - k = 0, \quad (5)$$

$$v = \frac{z+k}{2} + \xi + (1+r) \ln \frac{1+r}{\xi+1+r}, \quad 0 \leq \xi < \infty. \quad (6)$$

Уравнения (4)-(6) определяют требуемое точечное преобразование в параметрической форме с двумя параметрами  $\eta$  и  $\xi$ . Разбиение фазового пространства  $(x, y)$  на траектории определяется взаиморасположением кривых  $u = u(\eta)$  и  $v = v(\eta)$  на совмещенных плоскостях  $(v, u)$  и  $(v, v)$ . Исследование взаиморасположения кривых проводится элементарно при использовании  $\eta$  и  $\xi$  как параметров.

Из (5) и (6) находим

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi(\eta+r)}{\eta(\xi+r)} > 0, \quad \frac{dv}{d\xi} = \frac{\xi}{\xi+1+r} > 0.$$

Откуда

$$\frac{dv}{d\eta} = \frac{\eta}{1+r+\xi} \frac{\xi+r}{\eta+r} > 0. \quad (7)$$

Из (4) имеем

$$\frac{du}{d\eta} = \frac{\eta}{1-r-\epsilon}. \quad (8)$$

Сравнивая (7) и (8), непосредственно обнаруживаем, что для любого  $\eta$  будет

$$du/d\eta > dv/d\eta,$$

и, следовательно, если существует точка пересечения кривых  $u = u(\eta)$  и  $v = v(\eta)$ , то она единственная и соответствует устойчивой, неподвижной точке преобразования.

Граничные значения кривых  $u = u(\eta)$  и  $v = v(\eta)$  будут

$$u = (z + k)/2, \quad v = (z + k)/2$$

соответственно при значениях параметров  $\eta = y_0$  и  $\eta = y_1$  ( $y_1$  определяется как корень уравнения (5) при  $\xi = 0$ ).

Для значений  $\eta$ , близких к  $1 - r$  ( $\eta = 1 - r$  - асимптота для  $u = u(\eta)$ ), будет  $u > v$ . Точка пересечения кривых  $u = u(\eta)$  и

$v = v(\eta)$ , будет поэтому существовать, если  $y_1 < y_0$ .

Граница области существования неподвижной точки преобразования и соответствующего ей устойчивого предельного цикла определяется условием  $y_1 = y_0$ .

Уравнение (3) совместно с уравнением

$$r \ln r - r \ln(y_0 + r) + y_0 - k = 0, \quad (9)$$

полученным из (5) при  $\xi = 0$  и  $\eta = y_0$ , дает в параметрической форме уравнение поверхности (рис. 211), отделяющей в пространстве параметров область автоколебаний от области абсолютной устойчивости. Точкам ниже поверхности соответствует область автоколебаний. Точкам выше поверхности - устойчивость в большом (рис. 212, а). Точкам по поверхности - вырожденный двойной цикл, проходящий через концы отрезка по-

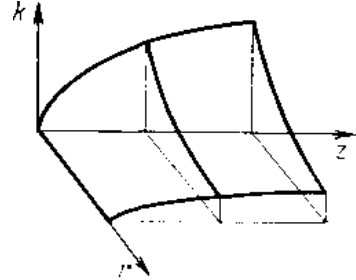


Рис. 211

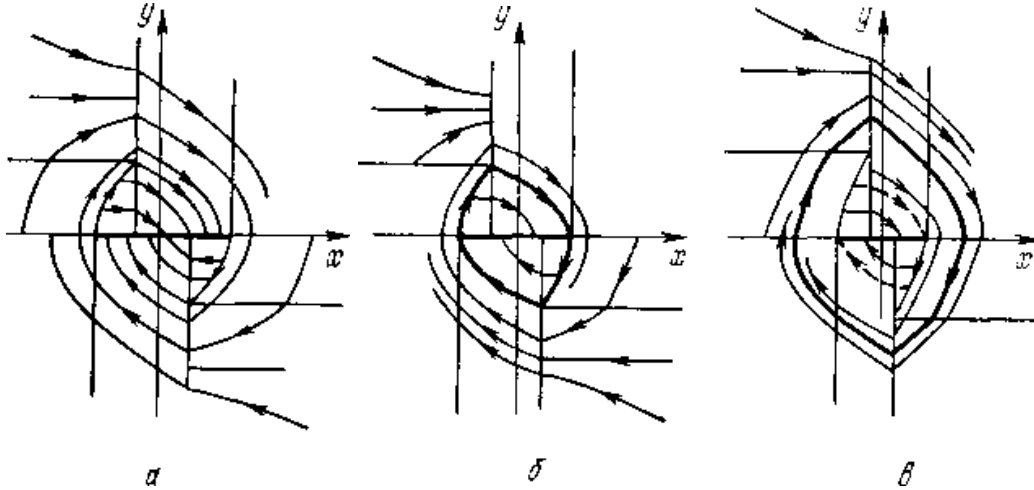


Рис. 212:

коя (рис. 212, б). На рис. 212, в изображены два склеенных предельных цикла - устойчивый и неустойчивый (неустойчивый обозначен штриховой линией).

Если  $r$  «велико» ( $y_0 > 1 - r$ ), фазовые траектории подходят с обеих сторон к линиям сшивания  $y = \pm y_0$  и система (2) должна быть из физических соображений доопределена условием

$$\dot{x} = y, y = \begin{cases} y_0 & \text{при } x \leq -(z - k)/2, \\ -y_0 & \text{при } x \geq (z - k)/2, \end{cases}$$

требующим, чтобы движение продолжалось по линии стыков траекторий (скользящий режим). Уравнение (4) теряет смысл. Любая траектория, состоящая из четырех кусков в верхней полуплоскости, начинающаяся в точке  $(-u, 0)$  и заканчивающаяся в точке  $(v, 0)$ , содержит кусок прямой  $y = y_0$ , принадлежащий линии сшивания. В уравнении (5) параметр  $\eta$  принимает фиксированное значение  $y_0$ . Уравнения (5) и (6) будут в параметрическом виде (с параметром  $\xi$ ) связывать  $v$  и  $k$ . Уравнение (9) сохраняет смысл и для случая сколь угодно больших  $r$ .

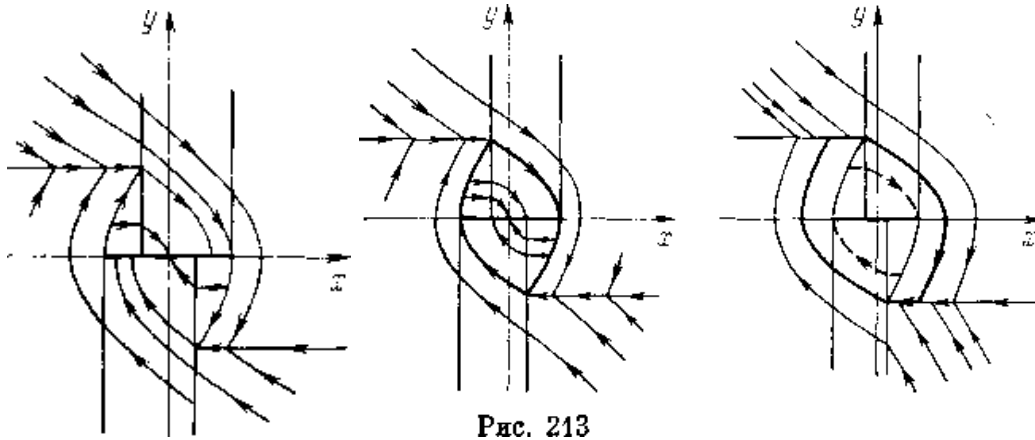


Рис. 213

На рис. 213 изображены различные возможные типы разбиения фазовой плоскости для этого случая. В отличие от случая «малых  $r$ », здесь устойчивый предельный цикл будет вырожденным (на него переходят точки сконтинуума траекторий).

**§3. Электрическая цепь с туннельным диодом.** Рассматривается система [28]

$$\dot{x} = y - \phi(x), \quad \dot{y} = \sigma - \lambda x - y, \quad g > 0, \quad \lambda > 0, \quad (1)$$

где  $\phi$  - нелинейная функция, содержащая «падающий» участок. Система такого вида встречается при рассмотрении схем на туннельных диодах, а также в ряде других вопросов. Аппроксимируем  $\phi(x)$  кусочно-линейной функцией, состоящей из трех линейных кусков. Наклоны  $k$  будем считать: падающего участка  $k = -\alpha_2 < 0$ , восходящих  $k = \alpha_1 > 0$ . Фазовое пространство при такой аппроксимации разбивается на три части, в каждой из которых система линейна. В областях I и III лежат восходящие ветви характеристики, в области II - падающий участок (рис. 214).

**1. Состояния равновесия. Разбиение пространства параметров по числу и характеру состояний равновесия.** Возможны одно или три грубых состояния равновесия. В случае одного состояния равновесия имеем фокус (узел), всегда устойчивый в областях I или III и неустойчивый в области II, если  $\alpha_2 > 1$ . В случае

трех состояний равновесия имеем всегда устойчивые фокусы (узлы) в областях I и III и седло в области II. Куски прямых  $\sigma = x_1\lambda + y_1$  и  $\sigma = x_2\lambda + y_2$  ( $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  - координаты угловых точек характеристики) при  $\lambda \leq \alpha_2$  образуют в плоскости  $(\lambda, \sigma)$  дискриминантную кривую, отделяющую область трех состояний равновесия от области одного состояния равновесия. Точкам дискриминантной кривой соответствует шитое состояние равновесия типа седло-фокуса или седло-узла, и угловой точке ( $\lambda = \alpha_2$ ) - неустойчивый отрезок покоя, совпадающий с падающим участком арактеристики.

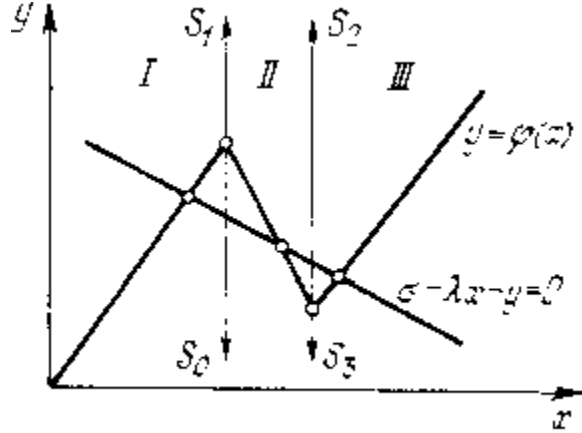


Рис. 214

В случае  $\alpha_2 < 1$  невозможны замкнутые траектории и возможными бифуркациями являются только появление и исчезновение состояний равновесия. Все нижеследующие рассуждения ведутся для случая  $\alpha_2 > 1$  и  $(\alpha - 1)^2 < 4a_2$ , допускающего разнообразные бифуркации.

## 2. Бифуркации состояний равновесия.

2.1 *Устойчивость состояния равновесия на линии сшивания.* Пусть прямая  $\sigma - \lambda x - y = 0$  проходит через угловую точку  $(x_1, y_1)$  характеристики на границе I и II областей и пусть  $\lambda > (\alpha_2 + 1)^2/4 > \alpha_2$ . Тогда область I заполнена кусками траекторий устойчивого фокуса, а область II - неустойчивого. Вводим на линии сшивания областей I и II положительные координаты  $S_0$  и  $S_1$  (а на линии сшивания областей II и III - координаты  $S_2$  и  $S_3$ ) (см. рис. 214). Преобразования  $S_0 \rightarrow S_1$  по траекториям области I и  $S_1 \rightarrow S_0$  по траекториям области II запишутся так:

$$S_2 = S_0 \exp \{-h_1\pi/\omega_1\}, \bar{S}_0 = S_1 \exp \{-h_2\pi/\omega_2\}, \quad (2)$$

где  $\omega_i, -h_i$  ( $i = 1, 2$ ) - мнимая и действительная части корней характеристического уравнения соответственно для областей I и II.

Состоянием равновесия будет шитый центр ( $\bar{S}_0 = S_0$ ), если  $h_1\omega_1^{-1} + h_2^{-1}\omega_2^{-1} = 0$  или, в раскрытом виде,

$$\lambda = \lambda^+ \equiv (\alpha_1\alpha_2 + 1)(\alpha_1 - \alpha_2 + 2)^{-1}.$$

Фокус на склейке будет устойчив ( $\bar{S}_0 < S_0$ ) при  $\lambda > \lambda^+$  и неустойчив ( $\bar{S}_0 > S_0$ ) при  $\lambda < \lambda^+$ .

2.2 *Рождение предельного цикла из состояния равновесия типа фокус при перемещении состояния равновесия через линию сшивания.* Докажем, что в областях I и II может существовать не более одного предельного цикла. Рассмотрим преобразование  $S_0 \rightarrow \bar{S}_0$  по траекториям областей I и II. Для области I будет

$$S_0 = \frac{\delta_0}{\sin \omega_1 \tau_1} [\omega_1 \cos \omega_1 \tau_1 + h_1 \sin \omega_1 \tau_1 - \omega_1 e^{h_1 \tau_1}] = \delta_0 \xi(\tau_1),$$

$$S_1 = \frac{\delta_0}{\sin \omega_1 \tau_1} [\omega_1 \cos \omega_1 \tau_1 - h_1 \sin \omega_1 \tau_1 - \omega_1 e^{-h_1 \tau_1}] = \delta_0 \chi(\tau_1), \quad (3)$$

где  $\delta_0$  - расстояние от границы раздела областей I и II до состояния равновесия;  $\chi$  и  $\xi$  - монотонные функции (возрастающие или убывающие в зависимости от знака  $\delta_0$ ). Преобразование по траекториям области II записывается аналогично.

Вычисление производной функции последования дает

$$d\bar{S}_0/dS_0 = S_0 \bar{S}_0^{-1} \exp\{-2(h_1\tau_1 + h_2\theta)\}. \quad (4)$$

Здесь  $\tau$  и  $\theta$  - время движения соответственно по траекториям областей I и II,  $h_1 = (1 + \alpha_1)/2 > 0$ ,  $h_2 = (1 - \alpha_2)/2 < 0$ .

Пусть состояние равновесия лежит в области I. Тогда для переодического решения ( $\bar{S} = S_0$ ) с увеличением  $S_0$  время  $\tau_1$  убывает (до значения  $\pi/\omega_1$ ), время  $\theta$  возрастает (до значения  $\pi/\omega_2$ ) и производная (4) растёт. Поэтому может существовать не более двух точек пересечения функции последования с биссектрисой, причем неподвижная точка с меньшей координатой должна быть устойчива, а с большей - неустойчива. Так как, по предположению, состояние равновесия лежит в области I и является устойчивым фокусом, который не может охватываться устойчивым же циклом, то в областях I и II может существовать не более одного, причем неустойчивого цикла.

Пусть состояние равновесия лежит в области II. Тогда с ростом  $S_0$  время  $\tau_1$  растёт, а  $\theta$  убывает. Аналогично находим, что в этом случае может существовать не более одного устойчивого предельного цикла.

Пусть  $\sigma - \lambda x - y = 0$  проходит через верхнюю угловую точку характеристики. Рассмотрим два случая.

1.  $\lambda > \lambda^+$ . Сшитый фокус устойчив. траектория, проходящая через нижнюю угловую точку, в силу (2) при  $t \rightarrow \infty$  накручивается к состоянию равновесия. Эта траектория остается спиралью и при малых смещениях прямой  $\sigma - \lambda x - y = 0$ . Если при малом смещении состояние равновесия попадает в область II, то оно становится неустойчивым и, следовательно, появляется хотя бы один устойчивый предельный цикл. По сказанному выше этот цикл единственный. Пусть после смещения состояние равновесия попадает в область I. так как в объединении областей I и II возможно существование не более одного цикла и фокус сохраняет устойчивость, то, следовательно, циклы не возникают.

2.  $\lambda < \lambda^+$ . Аналогично находим, что если при малом смещении состояние равновесия попадает в область II, то циклы не возникают, а если в область I, то появляется неустойчивый цикл.

**2.3 Рождение предельных циклов (простого или двойного) из границы области, заполненной замкнутыми траекториями.** Рассмотрим преобразования  $\bar{S}_0 = f(S_0)$ , склеенные из двух кусков:  $\bar{S}_0 = \phi(S_0)$  - по траекториям областей I и II и  $\bar{S}_0 = \psi(S_0)$  - по всем областям. Покажем, что  $f(S_0)$ , дифференцируема в точке склейки. Преобразование  $S_0 \rightarrow S_1$ , по траекториям области I дано в (3). Преобразования  $S_1 \rightarrow S_2, S_2 \rightarrow S_3$  и  $S_3 \rightarrow S_0$  записываются аналогично. Значение  $d\bar{S}_0/dS_0$  для функции  $\psi(S_0)$  дано в (4), а для функции  $\phi(S_0)$  будет

$$d\bar{S}_0/dS_0 = S_0 \bar{S}_0^{-1} \exp\{-2h_1(\tau_1 + \tau_3) - 2h_2(\tau_2 + \tau_4)\}. \quad (5)$$

Здесь  $\tau_1$  и  $\tau_3$  - время движения по областям I и III,  $\tau_2$  и  $\tau_4$  - время движения по верзу и низу области II.

Пусть  $S_0 = S_0^*$  - граничное значение, разделяющее интервалы определения преобразований  $\phi(S_0)$  и  $\psi(S_0)$ . Производные для  $\phi$  и  $\psi$  в точке склейки совпадают: при  $S = S_0^*$  будет  $\tau_3 = 0, \theta = \theta^*, \tau_2 + \tau_4 = \theta^*$ .

Пусть теперь прямая  $\sigma - \lambda x - y = 0$  проходит через угловую точку характеристики  $x_1, y_1$  и  $\lambda = \lambda^+$ . Покажем, что предельных циклов нет.

Функция последования на плоскости  $(S_0, \bar{S}_0)$  склеена из отрезка биссектрисы  $\bar{S}_0 = S_0 < S_0^*$  и кривой  $\bar{S}_0 = \psi(S_0)$ . Функция  $\bar{S}_0 = f(S_0)$  дифференцируема в точке склейки и, следовательно, при  $\lambda = \lambda^+$  будет  $d\bar{S}_0/dS_0 = 1$  (из (5) находим также, что  $d^2\bar{S}_0/d^2S_0 < 0$ ). При возрастании  $S_0$  от значения  $S_0^*$  показатель экспоненты в (5) монотонно убывает от нулевого значения в точке склейки ( $\tau_1 = \text{const}, \tau_3$  растет и  $h_1 > 0$ ;  $\tau_2$  и  $\tau_4$  убывают и  $h_2 < 0$ ). Других точек пересечения (или касания) с биссектрисой, кроме  $S_0 = S_0^*$  располагается ниже биссектрисы. Спираль, сшитые из траекторий в областях I, II и III, накручиваются на границу области, заполненной замкнутыми кривыми, сшитыми из траекторий в областях I и II.

При малом изменении параметров  $\sigma$  и  $\lambda$  функция последования измененной системы лежит в малой окрестности функции последования исходной системы. Если сдвигаться по полупрямой  $L_1 = 0 (L_1 \equiv \sigma - \lambda x_1 - y_1, \lambda > \alpha_2)$  от значения  $\lambda = \lambda^+$  в сторону уменьшения  $\lambda$ , то функцией последования для  $S_0 < S_0^*$  будет прямая, проходящая через начало координат выше биссектрисы, и для  $S_0 > S_0^*$  кривая  $\bar{S}_0 = \psi(S_0)$ , пересекающая биссектрису один раз (в точке склейки  $d^2\bar{S}_0/dS_0^2 \neq 0$  при  $\lambda = \lambda^+, \sigma = \sigma^+$ ). Из границы области, заполненной замкнутыми кривыми, появляется единственный устойчивый предельный цикл. При последующем уменьшении  $\lambda$  с начальная точка функции последования перемещается из начала координат по оси  $S_0$  (наименьшее  $S_0$ , соответствует траектории, идущей в устойчивый фокус и касающейся линии сшивания при  $\bar{S}_0 = 0$ ), и функция последования  $\bar{S}_0 = f(S_0)$  будет пересекать биссектрису дважды (из фокуса при перемещении его с линии склейки появляется единственный неустойчивый предельный цикл). Если сдвинуться по полупрямой в сторону увеличения  $\lambda$  от значения  $\lambda = \lambda^+$  и затем уменьшить  $\sigma$ , то функция последования будет целиком лежать ниже биссектрисы. Из непрерывности и дифференцируемости функции последования следует, что в любой малой окрестности точки  $(\lambda^+, \sigma^+)$  (ниже полупрямой) существуют  $\lambda$  и  $\sigma$ , для которых функция последования касается биссектрисы. На фазовой плоскости этому соответствует появление двойного цикла. Такие точки образуют бифуркационную кривую, выходящую из точки  $(\lambda^+, \sigma^+)$  на полу прямую  $L_1 = 1$ .

Касание невозможно при  $S_0 < S_0^*$ , так как в объединении областей I и II может быть не более одного цикла, и поэтому рождение двойного цикла при изменении параметров происходит при  $S_0 = S_0^*$  от границы области, заполненной замкнутыми траекториями.

**2.4. Рождение предельных циклов из концов отрезка покоя.** Пусть прямая  $\sigma - \lambda x - y = 0$  и падающий участок характеристики совпадают  $\lambda = \alpha_2$ . Падающий участок характеристики будет неустойчивым отрезком покоя, а области I и II в силу условия  $(\alpha_1 - 1)^2 < 4\alpha_2$  (см. п. 1) будут заполнены траекториями устойчивых фокусов. Легко получить явное выражение для преобразования в себя полупрямой  $S_0$ :

$$\bar{S}_0 = S + 0 \exp\{-2h_1\pi/\omega_1\} + \delta(\alpha_2 - 1)(1 + \exp\{-h_1\pi/\omega_1\}).$$

Здесь  $\delta$  — ширина области II. Преобразование имеет одну устойчивую неподвижную точку.

Повернем теперь прямую  $\sigma - \lambda x - y = 0$  вокруг какой-либо точки на падающем участке против часовой стрелки. Отрезок покоя при этом разрушается и возникают седло в области II и устойчивые фокусы в областях I и III. Пусть будет  $\lambda = \alpha_2 - \epsilon$ , где  $\epsilon > 0$  и мало. Ограничиваясь степенями  $\epsilon$  не выше первой, получим угловые коэффициенты сепаратрис:  $[-1 + \epsilon/(\alpha_2 - 1)]$  (для  $\alpha$ -сепаратрис),  $[-\alpha_2 - \epsilon/(\alpha_2 - 1)]$  (для  $\omega$ -сепаратрис).

При  $\lambda = \alpha_2$  траектории, выходящие из точки, в которой при  $\epsilon \neq 0$  возникает седло, накручиваются на предельный цикл,  $\alpha$ -сепаратрисы седла в области II при малых  $\epsilon > 0$

лежат в малой окрестности траекторий, выходящих из той же точки при  $\epsilon = 0$ , и, следовательно,  $\alpha$ -сепаратрисы также накручиваются на устойчивый предельный цикл, охватывающий все состояния равновесия. Поэтому  $\omega$ -сепаратрисы могут лишь скручиваться с неустойчивых циклов, лежащих в областях I—II и II—III, охватывающих устойчивые фокусы, возникающие при повороте прямой соответственно в областях I и III. Таким образом, при повороте прямой  $\sigma - \lambda x - y = 0$  из концов отрезка покоя появляются устойчивые фокусы в сопровождении охватывающих их неустойчивых циклов (фокусы и циклы возникают одновременно). В окрестности каждого фокуса лежит единственный предельный цикл. Последнее следует из того, что производная функции последования, построенная с использованием траекторий седла в области II, будет также даваться выражением (4), с тем лишь отличием, что с возрастанием  $S_0$  будет  $\theta \rightarrow \infty$ .

### 3. Бифуркации сепаратрисы.

3.1. *Расположение бифуркационной кривой для петли сепаратрисы.* Пусть при  $\sigma = \sigma_0$  и фиксированном  $\lambda = \lambda^*$  прямая  $\sigma - \lambda x - y = 0$  проходит через верхнюю угловую точку характеристики. Изменим  $\sigma$  на величину  $\varkappa$  ( $\varkappa = \sigma_0 - \sigma$ ) и покажем, что петля сепаратрисы за счет изменения с возникнуть не может. Пусть  $S'_0$  и  $S'_1$ , — отрезки, отсекаемые  $\alpha$ - и  $\omega$ -сепаратрисами линейного седла в области II на границе областей I и II, а  $S_0$  и  $S_1$ , — координаты по преобразованию (3) на той же границе. Из (3) следует

$$S_1 = \delta_0 \varkappa [\xi^{-1}(S_0/\delta_0)], \quad (6)$$

где  $\xi^{-1}$  — функция, обратная  $\xi$ . Величины  $h_1$  и  $\omega_1$ , а следовательно, и функции  $\chi$  и  $\xi$  от  $\sigma$  не зависят.

Так как характеристика есть функция кусочно-линейная, то при изменении  $\sigma$  величины  $S'_0$ ,  $S'_1$  и  $\delta_0$  будут пропорциональны  $\varkappa$ :

$$S'_0 = \gamma_0 \varkappa, \delta_0 = \gamma_1 \varkappa, \quad (7)$$

$$S'_1 = \gamma_2 \varkappa. \quad (8)$$

Сшивая проектор на границе областей I и II (полагая  $S'_0 = S_0$ ), из (6) и (7) находим

$$S_1 = \gamma_1 \varkappa \chi[\xi^{-1}(\gamma_0/\gamma_1)] \equiv \gamma_3 \varkappa, \quad (9)$$

а из (8) и (9) —

$$S_1/S'_1 = \gamma_3/\gamma_2 = const.$$

Таким образом, при фиксированном  $\lambda$  величины  $S_1$  и  $S'_1$ , находятся в постоянном отношении и петля сепаратрисы ( $S_1 = S'_1$ ) за счет изменения со возникнуть не может.

Если прямая  $\sigma - \lambda x - y = 0$  проходит через середину падающего участка и  $\lambda = \lambda_1$ , таково, что существует петля сепаратрисы сверху, то в силу симметрии фазового пространства одновременно должна существовать и петля сепаратрисы снизу. При этом осуществляется условие  $\gamma_3/\gamma_2 = 1$ . Так как  $\gamma_3$  и  $\gamma_2$  от  $\sigma$  не зависят, то это условие и, следовательно, обе петли сохраняются при  $\lambda = \lambda_1$ , для всех значений  $\sigma$  внутри дискриминантной кривой.

3.2. *Устойчивость петель сепаратрис.* Устойчивость петель сепаратрис будет определяться знаком седловой величины, если седло располагается внутри или на границе области II (теоремы 44 и 47 в [13] переносятся на случай, когда сшитая петля содержит аналитическое



седло). В рассматриваемом случае  $\alpha_2 > 1$  седловая величина положительна ( $P'_x + Q'_y = \alpha_2 - 1$ ) и петли сепаратрис изнутри и снаружи неустойчивы. При изменении параметров к петле стягивается или от нее рождается единственный неустойчивый предельный цикл (см. гл. 10, §2, IV, и гл. 17, §4, п. 4)

#### 4. Качественные структуры разбиения фазового пространства.

**4.1.** Фазовые портреты, соответствующие значениям параметров  $\sigma'$ ,  $\lambda$  и  $\sigma''$ ,  $\lambda$  таким, что прямые  $\sigma' - \lambda x - y = 0$  и  $\sigma'' - \lambda x - y = 0$  располагаются симметрично относительно середины падающего участка характеристики, будут симметричны относительно последней. При изучении разбиения пространства параметров поэтому можно рассматривать только часть пространства  $(\lambda, \sigma)$  выше либо ниже линии симметрии  $\sigma - \lambda x_0 - y_0 = 0$ , где  $x_0, y_0$  — координаты середины падающего участка.

**4.2.** Рассмотрим структуры разбиения фазового пространства и последовательность бифуркаций, переводящих одну структуру в другую для значений параметров вдоль бифуркационной прямой  $\sigma - \lambda x_1 - y_1 = 0$  ( $x_1, y_1$ : — координаты верхней угловой точки характеристики).

Пусть  $\lambda > \lambda^+$  (рис. 215, а). Состояние равновесия — устойчивый фокус на склейке, и все траектории идут к нему. При  $\lambda = \lambda^+$  (рис. 215, б) возникает область, заполненная замкнутыми траекториями. Все шитые по областям I—III траектории накручиваются на границу этой области. При  $\alpha_2 < \lambda < \lambda^+$  (рис. 215, в) фокус на склейке неустойчив и при уменьшении  $\lambda$  от значения  $\lambda = \lambda^+$  от границы области, заполненной замкнутыми траекториями, рождается устойчивый предельный цикл. При  $\lambda = \alpha_2$  (рис. 215, г) (острие дискриминантной кривой) падающий участок характеристики и прямая  $\sigma - \lambda x - y = 0$  совпадают. Возникает неустойчивый отрезок покоя внутри устойчивого предельного цикла. При дальнейшем уменьшении  $\lambda$  вдоль дискриминантной кривой появляются два состояния равновесия: склеенный вырожденный седло-узел (см. гл. 4, §2) и устойчивый фокус в области III. От конца отрезка покоя вместе с фокусом рождается неустойчивый предельный цикл ( $\alpha$ -сепаратриса вырожденного состояния равновесия идет к устойчивому циклу, охватывающему все состояния равновесия,  $\omega$ -сепаратриса скручивается с неустойчивого цикла, охватывающего устойчивый фокус (рис. 215, д)). Так как  $\alpha$ -сепаратриса при  $\lambda = 0$  (прямая  $y = \sigma$ ) идет в устойчивый узел в области III, состояние равновесия в области III при изменении параметров вдоль дискриминантной кривой устойчивости не меняет и бесконечность остается неустойчивой, то исчезновение предельных циклов на интервале  $0 < \lambda < \alpha_2$  может произойти только за счет слияния предельных циклов с последующим уничтожением двойного цикла. Это может осуществиться лишь при посредстве промежуточной бифуркации — появлении при  $\lambda = \lambda_1 < \alpha_2$  (рис. 215, е) петли сепаратрисы, возникшей из  $\alpha$ - и  $\omega$ -сепаратрис шитого вырожденного состояния равновесия.

Петля сепаратрисы как снаружи, так и изнутри неустойчива. Такую петлю можно рассматривать как особый предельный цикл с состоянием равновесия на нем, отделяющий структуры с неустойчивым предельным циклом, охватывающим состояние равновесия в области III, от структур с неустойчивым циклом, охватывающим все состояния равновесия.

При убывании  $\lambda$  до значения  $\lambda = \lambda_1$  в петлю «влипают» изнутри неустойчивый предельный цикл (рис. 215, е), а при дальнейшем убывании  $\lambda$  и разрушении петли от нее рождается неустойчивый предельный цикл (рис. 215, ж), охватывающий все состояния равновесия ( $\alpha$ -сепаратриса идет в устойчивый фокус в области III,  $\omega$ -сепаратриса скручивается с неустойчивого предельного цикла, который охватывает оба состояния равновесия, и между циклами нет состояний равновесия). При некотором  $\lambda = \lambda_2 < \lambda_1$ , (рис. 215, з) необходимо возникает полуустойчивый двойной предельный цикл, исчезающий при убывании  $\lambda$ . При дальнейшем убывании  $\lambda$  фокусы превратятся в узлы и возникнет структура, качественно эквивалентная

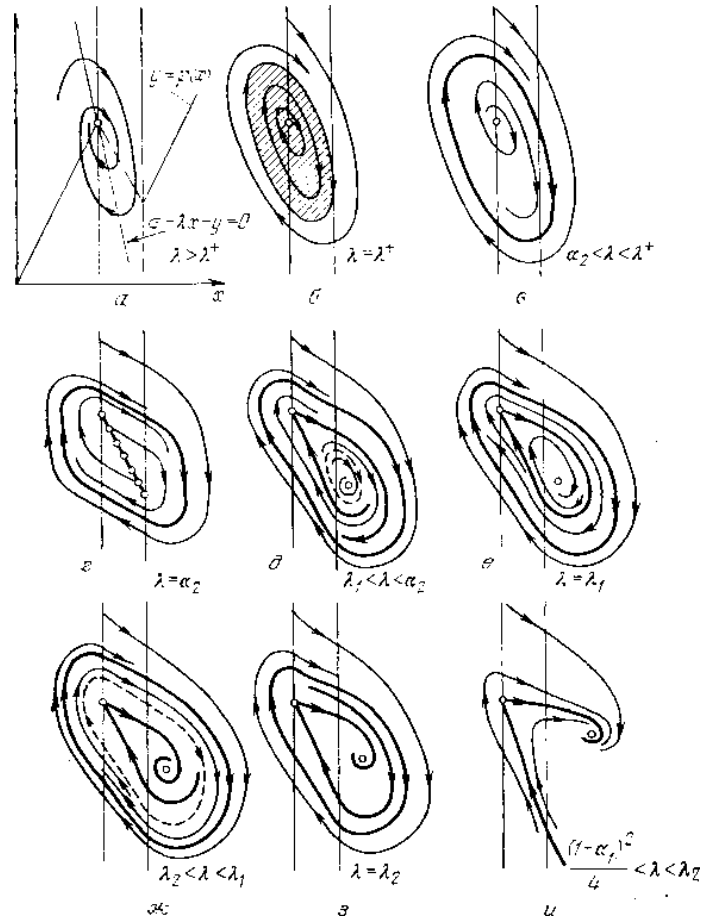


Рис. 215:

структуре при  $\lambda = 0$  (рис. 215,  $u$ ). (При убывании  $\lambda$  до значения  $(1-\alpha_1)^2/4$  сохраняется фокус, при дальнейшем убывании  $\lambda$  фокус превращается в узел.)