

Άσκηση 2

Εφαρμογές της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων

Περιεχόμενα

Μοντελοποίηση Χαμηλής Ταξής	2
Διαδικασία	2
1).....	2
2).....	5
3).....	6
4).....	7
5).....	8
6).....	9
Ιδιοφίλτρα.....	10
Διαδικασία	10
1).....	10
2).....	10
3).....	12
α).....	12
β).....	13
γ).....	13
δ).....	14
ε).....	15
4).....	15
5).....	16
6).....	17

Ο κώδικας μπορεί να βρεθεί εδώ:

<https://github.com/GrigorisTzortzakos/Applications-of-Digital-Signal-Processing/tree/main/Exercise%202>

Μοντελοποίηση Χαμηλής Ταξής

Διαδικασία

1)

Σχέση 2:

Ας ξεκινήσουμε από τον ορισμό του διανύσματος C . Δεδομένου ότι το C_{UU} είναι το μητρώο συνδιασπορών της τυχαίας μεταβλητής U με μηδενική μέση τιμή $E\{U\} = \mathbf{0}$, έστω Q το ορθογώνιο μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων του C_{UU} (στις στήλες του). Ορίζουμε τη νέα τυχαία μεταβλητή:

$$C = Q^T U$$

Επειδή Q είναι σταθερό (μη τυχαίο) και ορθογώνιο, η πράξη του να πολλαπλασιάζουμε το διάνυσμα U από αριστερά με Q^T αποτελεί απλώς μία γραμμική προβολή της U στα ιδιοδιανύσματα. Συγκεκριμένα, η m -οστή συνιστώσα του C γράφεται:

$$C_m = [Q^T U]_m = q_m^T U = [q_m, U]$$

όπου q_m είναι το m -οστό ιδιοδιάνυσμα (στήλη) του Q .

Τώρα, για να βρούμε την προσδοκία χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα της πράξης της προσδοκίας και το γεγονός ότι το Q είναι σταθερό:

$$E\{C_m\} = E\{q_m^T U\} = q_m^T E\{U\}$$

Δεδομένου ότι η αρχική τ.μ. U έχει μηδενική μέση τιμή, δηλαδή $E\{U\} = \mathbf{0}$ προκύπτει:

$$E\{C_m\} = q_m^T \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Σχέση 3:

Για να αποδείξουμε ότι:

$$E\{|C_m|^2\} = \lambda_m$$

Ξεκινούμε υπενθυμίζοντας πως έχουμε ορίσει την M -διάστατη τυχαία μεταβλητή U με μηδενική μέση τιμή και πίνακα συνδιασπορών:

$$C_{UU} = E\{UU^T\} = Q\Lambda Q^T$$

όπου $Q = [q_1, \dots, q_M]$ είναι το ορθογώνιο μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων του C_{UU} και $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$ το διαγώνιο μητρώο των ιδιοτιμών.

Η m-οστή συνιστώσα της νέας τυχαίας μεταβλητής γράφεται:

$$C_m = q_m^T U$$

Επειδή $E\{U\} = \mathbf{0}$, η δευτεροβάθμια ροπή $E\{C_m^2\}$ ταυτίζεται με τη διακύμανση της C_m . Συγκεκριμένα, είναι:

$$E\{C_m^2\} = q_m^T C_{UU} q_m$$

Τέλος, αξιοποιούμε τη διαγώνια μορφή του C_{UU} . Προκύπτει ότι:

$$q_m^T C_{UU} q_m = e_m^T \Lambda e_m = \lambda_m$$

όπου e_m είναι το m-οστό διάνυσμα.

Σχέση 4:

Για να αποδείξουμε τη σχέση ξεκινάμε από την ταυτότητα που έχουμε ήδη δείξει, ότι:

$$U = QC$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη, παίρνουμε:

$$UU^T = (QC)(QC)^T = QCC^T Q^T$$

Εφαρμόζοντας στη συνέχεια την πράξη της προσδοκίας και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το Q είναι σταθερό και ορθογώνιο, έχουμε:

$$E\{UU^T\} = E\{QCC^T Q^T\} = QE\{CC^T\}Q^T$$

Το μόνο που απομένει είναι να θυμηθούμε ότι από την Απόδειξη της Σχέσης (3) ξέρουμε $E\{CC^T\} = \Lambda$. Συνεπώς:

$$E\{UU^T\} = Q\Lambda Q^T$$

Σχέση 5:

Αρχικά, υπενθυμίζουμε ότι το μοντέλο της μετάδοσης σε ενθόρυβο κανάλι είναι:

$$X = U + W$$

όπου U είναι το χρήσιμο σήμα και W ο προσθετικός λευκός θόρυβος. Ορίζουμε το διάνυσμα σφάλματος ως:

$$E = X - U = W$$

Με άλλα λόγια, στο ενθόρυβο κανάλι το σφάλμα μετάδοσης ταυτίζεται ακριβώς με τον θόρυβο. Για να βρούμε τη μέση τιμή της τετραγωνικής νόρμας αυτού του διανύσματος, γράφουμε:

$$E\{\|E\|_2^2\} = E\{E^T E\} = E\{W^T W\} = E\left\{\sum_{m=1}^M W_m^2\right\} = \sum_{m=1}^M E\{W_m^2\}$$

Επειδή ο θόρυβος W είναι λευκός, κάθε συνιστώσα W_m έχει $E\{W_m\} = 0$ και $\text{Var}(W_m) = \sigma_W^2$. Συνεπώς:

$$\sum_{m=1}^M E\{W_m^2\} = \sum_{m=1}^M \sigma_W^2 = M\sigma_W^2$$

Άρα προκύπτει η ζητούμενη σχέση.

Σχέση 6:

Κρατάμε μόνο τις πρώτες P συνιστώσες του σήματος και μετά κάνουμε προβολή της εξόδου $X = U + W$ στον P -διάστατο υποχώρο που ορίζουν τα πρώτα ιδιοδιανύσματα. Συγκεκριμένα, ορίζουμε το υποσύνολο των πρώτων P ιδιοδιανυσμάτων ως:

$$Q_P = [q_1, q_2, \dots, q_P]$$

και την προβολή στο αντίστοιχο υποχώρο ως:

$$Y = Q_P Q_P^T X = Q_P Q_P^T (U + W)$$

Έπειτα, το διάνυσμα σφάλματος στην ανακατασκευή του αρχικού σήματος ορίζεται ως:

$$\mathbf{E} = \mathbf{Y} - \mathbf{U} = \mathbf{Q}_P \mathbf{Q}_P^T \mathbf{U} - \mathbf{U} + \mathbf{Q}_P \mathbf{Q}_P^T \mathbf{W}$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο τμήμα είναι ακριβώς η απώλεια των ιδιοδιανυσμάτων από $P+1$ έως M , ενώ το δεύτερο είναι η προβολή του λευκού θορύβου στον ίδιο P -διάστατο υποχώρο.

Για να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή του τετραγώνου της Ευκλείδειας νόρμας αυτού του σφάλματος, διασπάμε πρώτα τον παραπάνω όρο σε 2 ξεχωριστά τμήματα, όπου το πρώτο είναι το σφάλμα συμπίεσης και το δεύτερο η προβολή θορύβου.

Τώρα παίρνουμε την προσδοκία:

$$E\{||\mathbf{E}'||_2^2} = E\{||\mathbf{Q}_P \mathbf{Q}_P^T \mathbf{U} - \mathbf{U}||_2^2} + E\{||\mathbf{Q}_P \mathbf{Q}_P^T \mathbf{W}||_2^2}$$

Ο πρώτος όρος, όπως είχαμε ήδη αποδείξει, ισούται με το άθροισμα των ιδιοτιμών από $m=P+1$ έως M . Ο δεύτερος όρος είναι η μέση ισχύς του λευκού θορύβου μετά την προβολή στον P -διάστατο υποχώρο. Επειδή ο λευκός θόρυβος έχει διασπορά σ_W^2 σε κάθε συνιστώσα και η προβολή $\mathbf{Q}_P \mathbf{Q}_P^T$ έχει ίχνος P , προκύπτει:

$$E\{||\mathbf{Q}_P \mathbf{Q}_P^T \mathbf{W}||_2^2} = \sigma_W^2 \text{tr}(\mathbf{Q}_P \mathbf{Q}_P^T) = P \sigma_W^2$$

Συνεπώς έχουμε συνολικά:

$$E\{||\mathbf{E}'||_2^2} = \sum_{m=P+1}^M \lambda_m + P \sigma_W^2$$

2)

Για κάθε ζεύγος δεικτών (i,j) ορίζουμε:

$$C_{UU}(i,j) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (U_i^k - U'_i)(U_j^k - U'_j)$$

Φορτώνουμε το αρχείο U.mat που περιέχει έναν πίνακα 10000×100 και υπολογίζουμε το διάνυσμα μέσων τιμών της κάθε γραμμής, δηλαδή την 10000×1 συνιστώσα $\text{mean}(U,2)$ και το αφαιρούμε από κάθε στήλη ώστε οι μεταβλητές να έχουν μηδενικό μέσο. Υπολογίζουμε το μητρώο συνδιασπορών ως:

$$C_{UU} = \frac{U_c U_c^T}{K}$$

Από τα συνοπτικά αποτελέσματα βλέπουμε ότι υπάρχει συμμετρία, αφού είναι $C_{ij} = C_{ji}$ (π.χ η τιμή -10.9022 εμφανίζεται και στις δύο θέσεις (1,2) και (2,1), στοιχείο χαρακτηριστικό ενός έγκυρου μητρώου συνδιασπορών. Επιπλέον, έχουμε διαγώνιες τιμές που αντιστοιχούν στις διασπορές των πρώτων πέντε συνιστωσών. Όλες είναι θετικές, όπως προβλέπεται, αφού πρόκειται για διασπορές.

```

--- Top-left 5x5 block of C_UU ---
 96.2739 -10.9022  10.4413 -6.5298 -5.5493
-10.9022  92.1279 -1.9403 -5.8314  15.4829
 10.4413 -1.9403 100.4610  1.2831 -14.4237
-6.5298 -5.8314  1.2831 100.8385 -8.2351
-5.5493  15.4829 -14.4237 -8.2351  89.1137

```

3)

Αρχικά, αφαιρούμε τον μέσο όρο κάθε στοιχείου (κάθε σειράς του πίνακα U) ώστε να εξασφαλίσουμε μηδενική μέση τιμή:

$$U_0 = U - \text{mean}(U,2)$$

Ακολούθως, εκτιμούμε το μητρώο συνδιασποράς:

$$C_{UU} = \frac{1}{N} U_0 U_0^T$$

Με την εντολή eig, διασπούμε το C_{UU} στις ιδιοτιμές $\{\lambda_m\}_{m=1}^M$ και στα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\{q_m\}_{m=1}^M$ έτσι ώστε:

$$C_{UU} = Q \Lambda Q^T$$

όπου η Λ είναι διαγώνια με τις ιδιοτιμές και οι στήλες του Q τα ιδιοδιανύσματα. Κατόπιν ταξινομούμε τις ιδιοτιμές σε φθίνουσα σειρά. Αν διατηρήσουμε μόνο τα πρώτα P ιδιοδιανύσματα, η ανακατασκευή παράγει το ελάχιστο μέσο τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ όλων των γραμμικών προσεγγίσεων διάστασης P . Επιπλέον, αποδεικνύεται ότι το μέσο τετραγωνικό

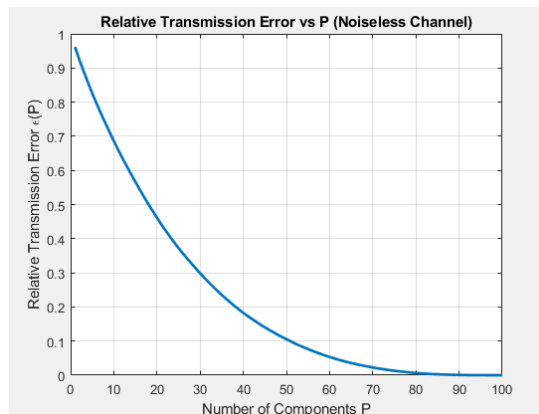
σφάλμα της υπολειμματικής συνιστώσας ικανοποιεί ακριβώς την σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε.

Για το πείραμα υπολογίσαμε το C_{UU} με $U_0 U_0^T / N$ και εκτελέσαμε τον αλγόριθμο eigen-decomposition και ανακατασκευάσαμε σήματα για τα P επιλεγμένα $= \{1, 5, 10, 20, 50\}$. Για κάθε P , μετρήσαμε την εμπειρική τιμή $MeanE2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N ||e_k||^2$ και τη θεωρητική $\sum_{m=P+1}^M \lambda_m$.

Συμπερασματικά, η πειραματική διαδικασία επιβεβαιώνει τη θεωρία, αφού η διατήρηση των πρωτευουσών συνιστωσών οδηγεί στην ελάχιστη δυνατή απώλεια ενέργειας.

P	MeanE2	SumDiscarded	Difference
1	9.516911e+03	9.516911e+03	1.818989e-12
5	8.175436e+03	8.175436e+03	1.818989e-12
10	6.793763e+03	6.793763e+03	9.094947e-13
20	4.566828e+03	4.566828e+03	9.094947e-13
50	1.042573e+03	1.042573e+03	0.000000e+00

4)



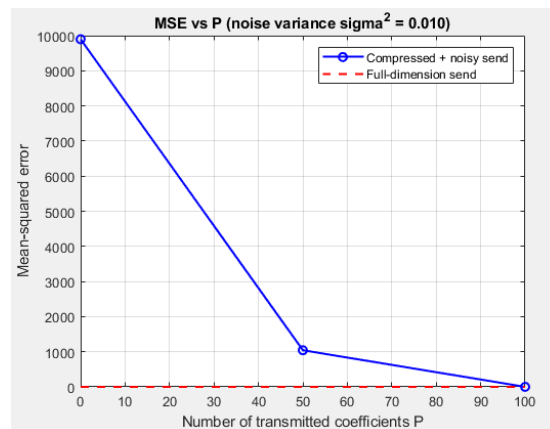
Για τις πολύ μικρές τιμές P (π.χ. από 1 έως 10-15), το $\epsilon(P)$ μειώνεται απότομα από σχεδόν 1 σε περίπου 0.5-0.6. Αυτό σημαίνει ότι το πρώτο ιδιοδιάνυσμα συγκεντρώνει σχεδόν το 40-50% της συνολικής ενέργειας του σήματος και οι επόμενες λίγες συνιστώσες (2η, 3η, ..., 10η) προσθέτουν κι αυτές σημαντικό μερίδιο. Πρακτικά, αν στείλουμε μόνο 10 τιμές αντί για 10.000, διατηρούμε τη μισή ενέργεια του σήματος, άρα το σήμα ανακατασκευάζεται με σχετικά χαμηλό σφάλμα, ενώ έχουμε εξοικονομήσει 99.9 % στο πλήθος των μεταδιδόμενων δεδομένων.

Στο μεσαίο τμήμα ($P=15$ έως $P=40$), η κλίση της καμπύλης αρχίζει να εξομαλύνεται. Το σφάλμα μειώνεται από περίπου 0.5 σε 0.2, αλλά με φθίνοντα ρυθμό. Είναι το κλασικό «κnee» της καμπύλης, εδώ οι πρώτες δεκάδες ιδιοτιμές πάσης μεγάλης διασποράς έχουν ήδη συμπεριληφθεί και οι πρόσθετες συνιστώσες προσφέρουν όλο και μικρότερο ποσοστό της συνολικής ενέργειας.

Από $P=40$ έως το μέγιστο 100, βλέπουμε ότι η καμπύλη «πτύχευσε», δηλαδή η πρόσθετη μείωση σφάλματος γίνεται ελάχιστη και μετά το $P=80$ η $e(P)$ περίπου μηδενίζεται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι διαθέτουμε μόνο $K=100$ υλοποιήσεις, οπότε ο εκτιμητής συνδιασποράς έχει βαθμό ελευθερίας 99 και οι ιδιοτιμές πέραν της 99ης είναι πρακτικά μηδενικές. Συνεπώς, στέλνοντας περισσότερες από 99 συνιστώσες δεν αλλάζει τίποτα στο σφάλμα.

Συνολικά, το πείραμά μας επιβεβαιώνει ότι με λίγες δεκάδες πρώτες ιδιοσυνιστώσες ανακτούμε σχεδόν το σύνολο της πληροφορίας ενός μεγάλου σήματος.

5)



Διαπιστώνουμε ότι η μετάδοση μόνο των P πρώτων κύριων συνιστωσών υπερέχει της απευθείας αποστολής και των M συνιστωσών ακριβώς στις περιπτώσεις όπου η ενέργεια που χάνεται παραλείποντας τις $M-P$ μικρής σημασίας συνιστώσες είναι μικρότερη από την ισχύ θορύβου που θα εισάγονταν αν είχαμε στείλει όλα τα M σήματα.

Αναλυτικότερα, το σφάλμα όταν στέλνουμε μόνο P συνιστώσες είναι:

$$MSE_p = \sum_{m=P+1}^M \lambda_m + P\sigma^2$$

ενώ όταν στέλνουμε όλες τις M συνιστώσες είναι:

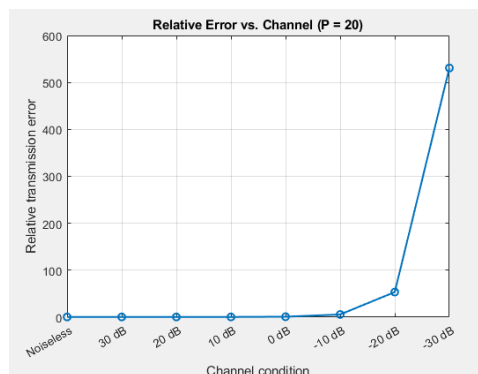
$$MSE_M = M\sigma^2$$

Άρα η συμπιεσμένη μετάδοση δίνει καλύτερη ποιότητα (μικρότερο MSE) ακριβώς όταν:

$$\sum_{m=P+1}^M \lambda_m < (M - P)\sigma^2$$

Στην πράξη αυτό συμβαίνει κάθε φορά που οι πρώτες P ιδιοτιμές «συλλαμβάνουν» την πλειονότητα της ενέργειας του σήματος (δηλαδή οι υπόλοιπες $M-P$ ιδιοτιμές είναι πολύ μικρές) και η διασπορά του θορύβου είναι τέτοια ώστε η μείωση στην ενέργεια θορύβου (αποφεύγοντας να στείλουμε τις $M-P$ συνιστώσες) να υπερβαίνει την απώλεια σήματος λόγω συμπίεσης.

6)



Πρώτον, παρατηρούμε ένα σταθερό «compression floor» στο επίπεδο του σχετικού σφάλματος ακόμα και στην περίπτωση αθόρυβου καναλιού. Αυτό το σφάλμα προκύπτει αποκλειστικά από την sheared ανακατασκευή του σήματος με τα πρώτα 20 ιδιοδιανύσματα και δεν μπορεί να μηδενιστεί παρά μόνο αυξάνοντας το P προς το M . Δεύτερον, για $SNR \geq +10$ dB η προσθήκη θορύβου είναι τόσο μικρή σε σχέση με την ενέργεια του συμπιεσμένου σήματος ώστε το συνολικό σφάλμα παραμένει πρακτικά αμετάβλητο και η καμπύλη αγγίζει πάλι το compression floor.

Όταν το SNR πέφτει κάτω από 0 dB, αρχίζει η σταδιακή μετατόπιση της κυριαρχίας από την συμπιεστική απώλεια στον θόρυβο. Στο εύρος -10 dB έως 0 dB βλέπουμε μια γραμμική αύξηση του σφάλματος, καθώς η ενέργεια θορύβου συγκλίνει με την ενέργεια του σήματος. Κάτω από περίπου -20 dB η θορυβώδης συνιστώσα υπερτερεί τόσο πολύ που το σχετικό σφάλμα ξεπερνά

το 100 %. Τότε, η ανακατασκευασμένη εκδοχή έχει πλέον χαμηλότερη συσχέτιση με το αρχικό σήμα από ότι το μέγεθος του σφάλματος του, κάτι που φαίνεται από τη ραγδαία εκθετική άνοδο της καμπύλης.

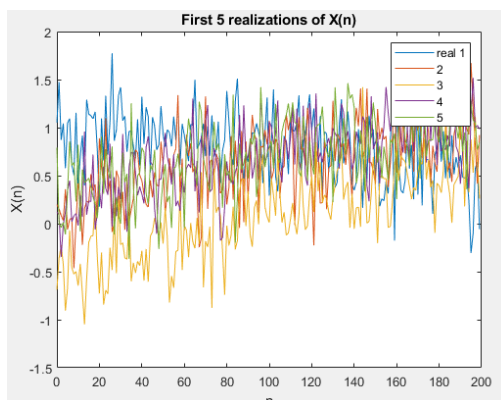
Ιδιοφίλτρα

Διαδικασία

1)

Ξεκινάμε κατασκευάζοντας το διάνυσμα χρόνου $n=0,1,\dots,9999$ και στη συνέχεια παράγουμε έναν πίνακα τυχαίων φάσεων $\phi_k=2\pi \text{rand}(1,K)$ και έναν πίνακα λευκού θορύβου $\text{randn}(N,K)$ κλιμακωμένο έτσι ώστε η διασπορά του να είναι 0,1. Σχηματίζουμε το ημιτονικό μέρος ως $\sin(2\pi n/1000+\phi)$ και προσθέτουμε τον θόρυβο σε κάθε στήλη. Με αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε έναν πίνακα X διαστάσεων 10000×1000 , όπου η κάθε στήλη αντιστοιχεί σε μία υλοποίηση $X(n;\theta_k,\phi_k)$.

Όταν σχεδιάζουμε ένα μικρό υποσύνολο, όπως για παράδειγμα τις πρώτες πέντε στήλες στα πρώτα 200 δείγματα, παρατηρούμε ότι η ημιτονική δομή «θολώνει» εξαιτίας του θορύβου, δηλαδή οι αιχμές των κυμάτων μετατοπίζονται τυχαία και το πλάτος τους έχει διακυμάνσεις.



2)

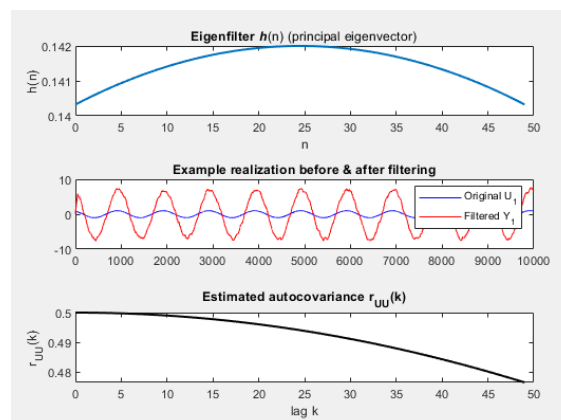
Αρχικά, δημιουργούμε $K=1000$ υλοποιήσεις μίας στοχαστικής διαδικασίας μήκους $N=10000$ δειγμάτων, όπου η καθαρή συνιστώσα $U_k(n)$ είναι ένας ημιτονοειδής παλμός με τυχαία φάση σε κάθε υλοποίηση και ο θόρυβος $W_k(n)$ λευκός Γκαουσιανός με διασπορά $\sigma^2=0.1$. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίσαμε ότι κάθε $X_k(n)=U_k(n)+W_k(n)$ αναπαριστά ένα ενθόρυβο σήμα που περιέχει τόσο τη δοσμένη περιοδική πληροφορία όσο και τυχαίο θόρυβο.

Συνεχίζοντας, υπολογίζουμε την αυτοσυσχέτιση της καθαρής διαδικασίας U για καθεμία από τις καθυστερήσεις $k=0, 1, \dots, M-1$, όπου $M=50$ ορίστηκε το πλήθος των συντελεστών του FIR φίλτρου. Πρακτικά, για κάθε k σχηματίσαμε το γινόμενο $U_k(n) \cdot U_k(n+k)$, περιορίσαμε τα δείγματα ώστε να μην υπερβαίνουν τα όρια του σήματος και πήραμε τον μέσο όρο σε όλες τις υλοποιήσεις και τις χρονικές θέσεις.

Ακολουθώντας, σχηματίζουμε το συμμετρικό Toeplitz μητρώο διαστάσεων $M \times M$ από αυτές τις τιμές, το οποίο αποτελεί εκτίμηση του οριστικού μητρώου αυτοσυσχέτισης της διαδικασίας και εφαρμόζουμε σε κάθε υλοποίηση $X_k(n)$ το φίλτρο με τη συνάρτηση `filter(h,1,:)`.

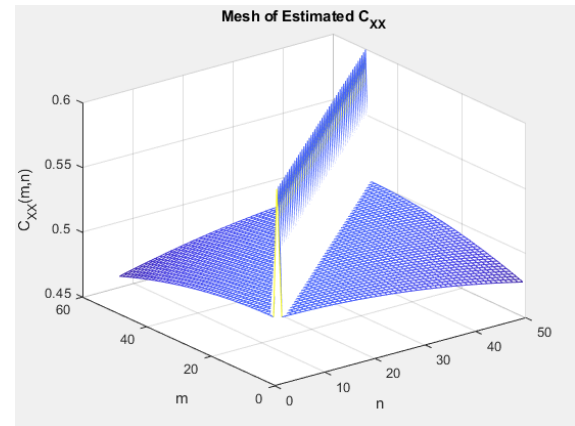
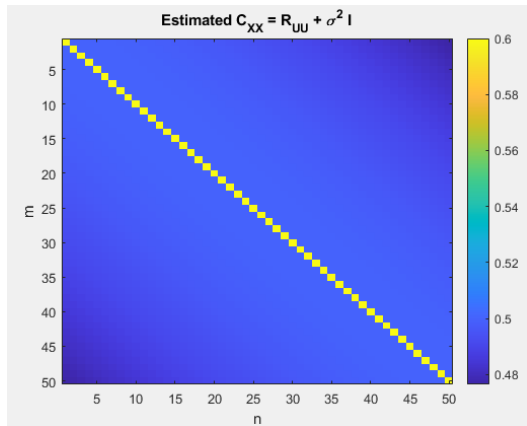
Προχωρώντας στα αποτελέσματα, βλέπουμε ότι η κρουστική απόκριση του φίλτρου $h(n)$ εμφανίζεται ως ένας λείος, συμμετρικός παλμός μήκους $M=50$. Αυτό δείχνει ότι το φίλτρο συγκεντρώνει το μεγαλύτερο βάρος στο κέντρο της κρουστικής απόκρισης, ακριβώς στις καθυστερήσεις όπου η αυτοσυσχέτιση του σήματος παραμένει υψηλή. Δεύτερον, το διάγραμμα της εκτιμώμενης ακολουθίας αυτοσυσχέτισης δείχνει ότι η αυτοσυσχέτιση ξεκινά από περίπου 0.5 στη θέση $k=0$ και φθίνει σταδιακά καθώς αυξάνεται η καθυστέρηση.

Επιπλέον, στο παράδειγμα της πρώτης υλοποίησης, η μπλε γραμμή (U_1) δείχνει την καθαρή ημιτονοειδή συνιστώσα και η κόκκινη (Y_1) την έξοδο μετά το φιλτράρισμα. Παρά το γεγονός ότι το ωφέλιμο σήμα έχει μέγιστο πλάτος της τάξης του 1, το φιλτράρισμα με το eigen φίλτρο ανέβασε το πλάτος του αποτελέσματος σε περίπου 7-8, δείχνοντας ότι αφαιρέθηκε η συνιστώσα του λευκού θορύβου και μεγιστοποιήθηκε το SNR στο φάσμα που κυριαρχεί η συχνότητα του ημιτόνου.



3)

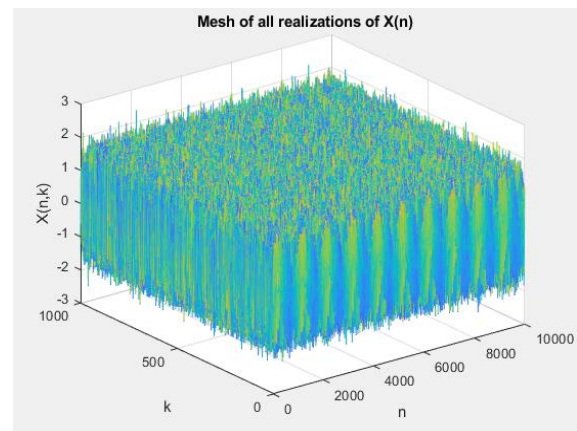
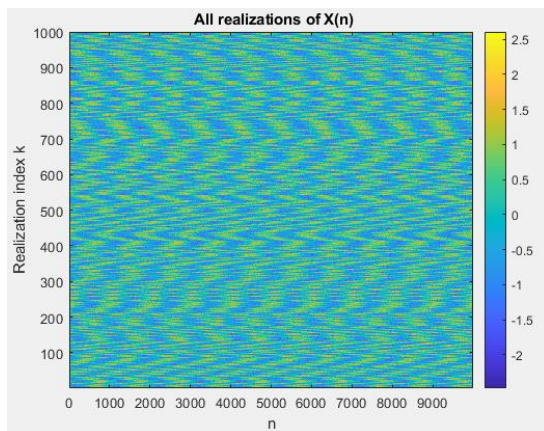
α)



Στο πρώτο διάγραμμα (imagesc) παρατηρούμε ότι η μήτρα συσχέτισης C_{xx} έχει τον υψηλότερο λόγο τιμών κατά μήκος της κύριας διαγώνιου που φτάνει περίπου στο 0.6, ενώ όσο απομακρυνόμαστε από αυτήν, οι τιμές πέφτουν σταδιακά έως και περίπου 0.48 στις πιο μακρινές θέσεις. Αυτό δείχνει ότι η προσθήκη του λευκού θορύβου με διασπορά σ^2 ενισχύει μόνο τα στοιχεία της διαγώνιου (λόγω του όρου $\sigma^2 I$), ενώ τα off-diagonal στοιχεία παραμένουν αυτοσυνδιασπορες της $U(n)$, τα οποία φθίνουν με την απόσταση (log) μεταξύ των δειγμάτων.

Στο δεύτερο διάγραμμα (mesh) βλέπουμε έντονη κορυφογραμμή κατά μήκος του $m=n$, όπου η τιμή της C_{xx} είναι μέγιστη. Πρόκειται για την αυτοδιασπορά κάθε δείγματος, ενισχυμένη από τον λευκό θόρυβο. Δίπλα σε αυτήν σχηματίζονται δύο ομαλά καμπυλωτά πεδία που πέφτουν συμμετρικά, δείχνοντας την αποδυνάμωση της συνδιακύμανσης όσο αυξάνεται το απόλυτο $k=m-n$.

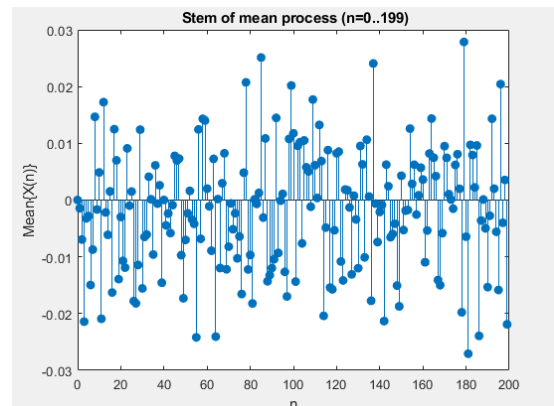
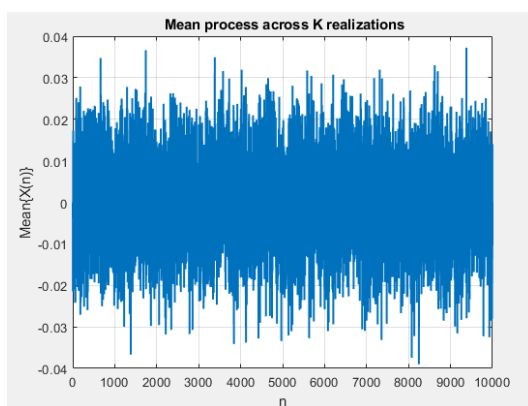
β)



Στο χάρτη θερμότητας (imagesc) των $K=1000$ υλοποιήσεων βλέπουμε καθαρά τις λοξές λωρίδες που αντιστοιχούν στην ημιτονοειδή συνιστώσα $\sin(2\pi \cdot n/1000 + \phi k)$ να διατρέχουν διαγώνια τον πίνακα. Καθώς η φάση ϕk μεταβάλλεται σταδιακά από γραμμική ακολουθία στο k , οι κορυφές και οι κοιλάδες του ημιτόνου μετακινούνται σε διαφορετικές θέσεις κατά μήκος του άξονα n για κάθε νέα υλοποίηση.

Η τρισδιάστατη αναπαράσταση με mesh δίνει μια καλύτερη αίσθηση του πώς εξελίσσεται το $X(n,k)$ τόσο ως προς το δείγμα n όσο και ως προς τον δείκτη k . Οι κορυφογραμμές του ημιτόνου σχηματίζουν επιφάνειες κατά την κατεύθυνση και η ένταση των αιχμών δεν υπερβαίνει τις ± 3 μονάδες. Διαπιστώνουμε ότι το πλάτος της ημιτονοειδούς συνιστώσας υπερβαίνει σαφώς τη στάθμη του θορύβου, γεγονός που εξασφαλίζει ότι ακόμη και σε ξεχωριστές υλοποιήσεις το σήμα μπορεί να εντοπιστεί.

γ)

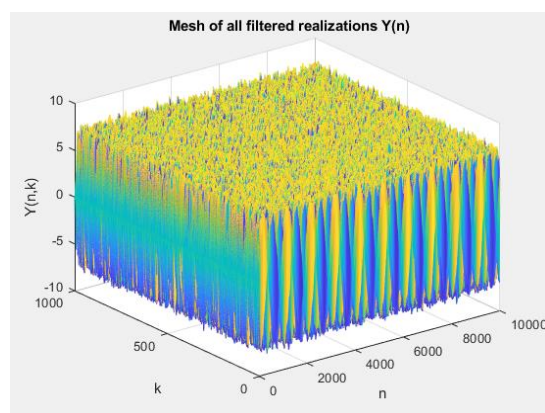
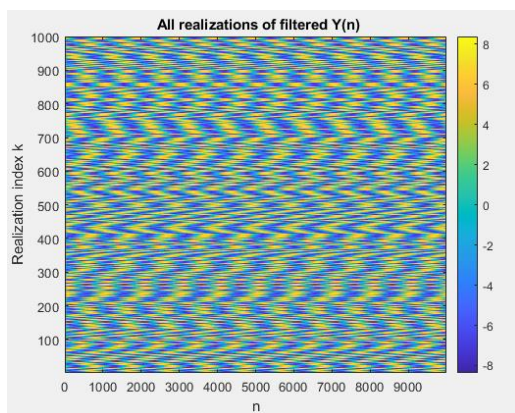


Από την πρώτη εικόνα παρατηρούμε ότι η εκτιμώμενη μέση τιμή $X_{\text{mean}}(n)$ κινείται τυχαία γύρω από το μηδέν, με διακυμάνσεις της τάξης του ± 0.03 . Δεν

εμφανίζεται κανένα εμφανές συστηματικό πρόσημο ή μετατόπιση προς θετικές ή αρνητικές τιμές, γεγονός που συμφωνεί με το ότι το υποκείμενο σήμα είναι μηδενικής μέσης τιμής και ο θόρυβος επίσης συμμετρικός. Οι ασθενείς κορυφώσεις που ξεπερνούν το ± 0.02 οφείλονται στο πεπερασμένο πλήθος υλοποιήσεων K και στις τυχαίες αποκλίσεις κάθε δείγματος.

Η δεύτερη εικόνα, με το stem-plot για τα πρώτα 200 δείγματα, επιβεβαιώνει αυτό το συμπέρασμα σε μικρότερη κλίμακα, αφού βλέπουμε σημεία κατανεμημένα δεξιά και αριστερά του μηδενός, χωρίς καμία συσχέτιση με τη θέση του δείγματος n . Η πυκνότητα των stems είναι περίπου ομοιόμορφη και δεν παρατηρούνται συγκεντρώσεις κορυφών σε συγκεκριμένα διαστήματα, είναι δηλαδή μια ένδειξη ότι η διαδικασία είναι όντως ασθενώς στάσιμη δεύτερης τάξης.

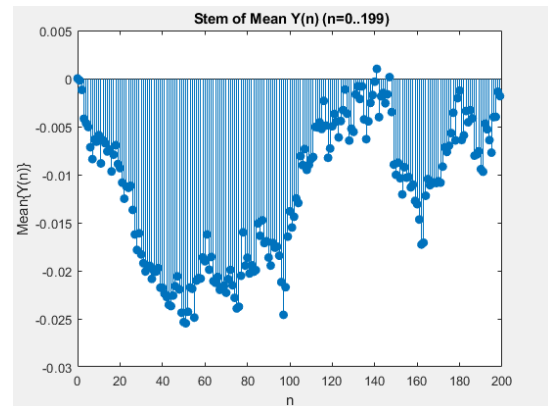
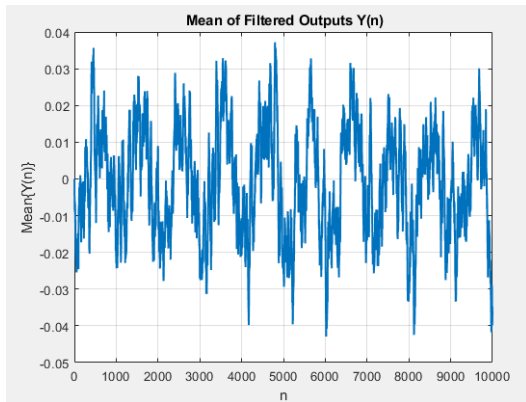
δ)



Είδαμε στο ερώτημα β ότι, παρά την τυχαία προσθήκη λευκού θορύβου, η κυρίαρχη συνιστώσα του ημιτονοειδούς σήματος φαίνεται ως μια σειρά διαγώνιων ζωνών υψηλής έντασης χρώματος που μετακινούνται ομαλά κατά μήκος του άξονα n .

Αντιθέτως, στο παρόν ερώτημα που εξετάζουμε την φιλτραρισμένη διεργασία $Y(n)$ διακρίνουμε ότι οι διαγώνιες ημιτονοειδείς ζώνες έχουν μετατραπεί σε καθαρά, συνεχόμενα «σχοινιά» υψηλής αντίθεσης. Ο θόρυβος αποδυναμώνεται σημαντικά, ενώ η κυρίαρχη συνιστώσα τονίζεται από το eigenfilter. Άρα, το φίλτρο αφαίρεσε αποτελεσματικά το λευκό θόρυβο, χωρίς να παραμορφώσει την ημιτονοειδή μορφή και διατήρησε σταθερή τη συχνότητα και τη σχετική φάση της ημιτονοειδούς συνιστώσας σε όλες τις υλοποιήσεις.

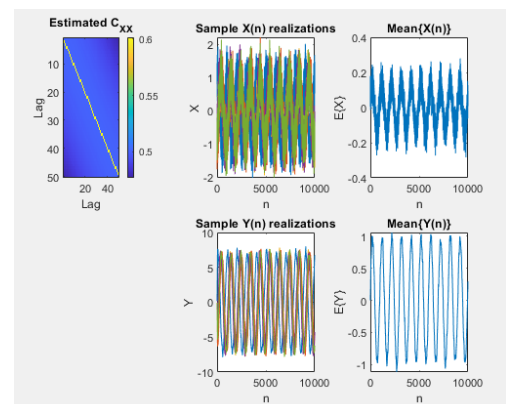
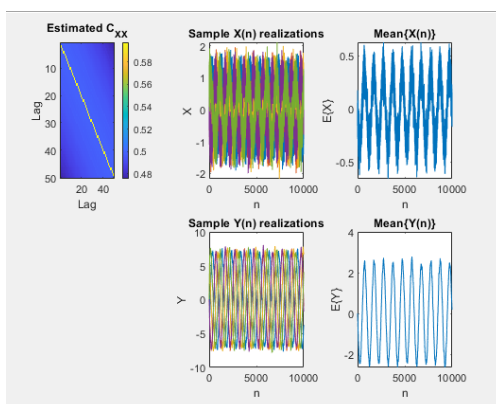
ε)

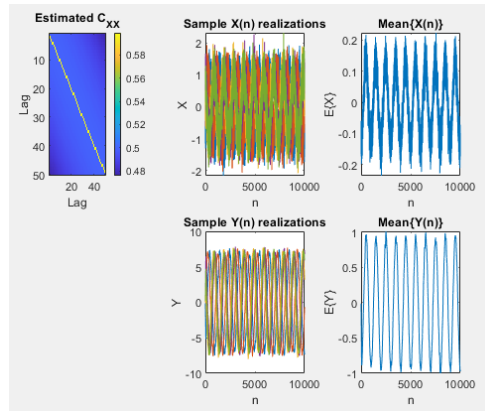


Αρχικά, από το ερώτημα γ έχουμε δει ότι η μέση τιμή ταλαντώνεται τυχαία γύρω από το μηδέν, χωρίς εμφανείς επαναλαμβανόμενα μοτίβα. Οι αποκλίσεις σπάνια ξεπερνούν σε απόλυτη τιμή τις $\pm 0.02-0.03$. Αυτό δείχνει ότι η είσοδος $X(n)$ αποτελείται από μια στοχαστική συνιστώσα και μια μηδενικής μέσης τιμής ημιτονοειδή διεργασία με τυχαία φάση.

Τώρα, μετά το πέρασμα από το eigen-φίλτρο, η φιλτραρισμένη έξοδος $Y(n)$ παρουσιάζει σαφές, δομημένο σήμα, αφού στο συνεχόμενο διάγραμμα διακρίνονται περιοδικές κορυφώσεις και βυθίσματα με σταθερό εύρος παλμού, επαναλαμβανόμενα περίπου κάθε 1000 δείγματα. Οι τυχαίες διακυμάνσεις του θορύβου έχουν πλέον κατασταλεί και η μέση έξοδος αποκαλύπτει το αυτοσυσχετιζόμενο σχήμα της εισόδου που «τονίστηκε» από το φίλτρο.

4)





Σε πρώτη φάση, με $K=10$, η εκτιμώμενη μήτρα αυτοσυσχέτισης C_{XX} εμφανίζει έντονη διακύμανση. Η διαγώνιος είναι ασαφής και πολλές διαγώνιες έχουν θορυβώδη απόκλιση. Η μέση πορεία του $X(n)$ πάνω στις 10 υλοποιήσεις εξακολουθεί να φέρει σημαντικά τυχαία συστατικά, καθώς λίγα δείγματα δεν επαρκούν να εξαλείψουν πλήρως τη φάση της ημιτονοειδούς συνιστώσας. Αντίστοιχα, η έξοδος $Y(n)$ από το eigenfilter εμφανίζεται πιο καθαρή από το $X(n)$, αλλά εξακολουθεί να φέρει θόρυβο.

Με $K=50$, η εικόνα αλλάζει και η μήτρα C_{XX} γίνεται πολύ πιο ομαλή και η κύρια διαγώνιος αποκτά καθαρότερη κλίση. Οι τυχαίες διακυμάνσεις στις off-diagonal τιμές μειώνονται αισθητά. Η μέση σειρά των $X(n)$ υλοποιήσεων πλέον παλινδρομεί πιο κοντά στο μηδέν, ενώ το μέσο της $Y(n)$ υλοποίησης δείχνει σημαντική εξάλειψη του θορύβου και καθαρή ημιτονοειδή δομή.

Τέλος, με $K=100$, οι εκτιμήσεις έχουν προσεγγίσει πρακτικά την ιδανική συμπεριφορά αφού το εκτιμώμενο C_{XX} μοιάζει με αυτό που περιμένουμε θεωρητικά με λείο, σχεδόν συνεχές πλάτος κατά μήκος της διαγώνιου. Η μέση πορεία όλων των $X(n)$ υλοποιήσεων έχει σχεδόν μηδενική διακύμανση.

Συνοψίζοντας, όσο αυξάνεται ο αριθμός των υλοποιήσεων, η τυχαία συνεισφορά εξασθενεί μέσω του φαινομένου του νόμου των μεγάλων αριθμών και η εκτίμηση της αυτοσυσχέτισης τείνει προς την πραγματική.

5)

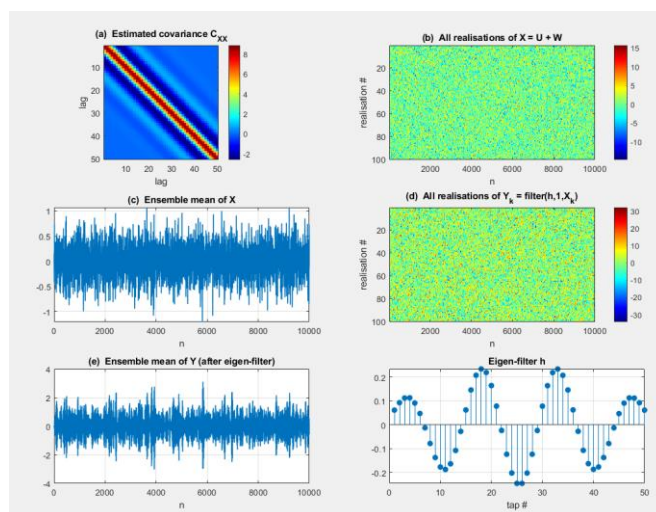
Η διαδικασία παραγωγής μιας στοχαστικής διεργασίας μέσω ενός Γραμμικού Χρονικά Αμετάβλητου (LTI) συστήματος ξεκινά με τον ορισμό της εισόδου ως μιας απλής τυχαίας διεργασίας, συνήθως λευκού θορύβου. Ο λευκός θόρυβος χαρακτηρίζεται από μηδενική μέση τιμή και αυτοσυσχέτιση που είναι μηδική για κάθε μη μηδενική καθυστέρηση, ενώ στο μηδενικό βήμα λαμβάνει την τιμή

της διασποράς. Εξαιτίας αυτής της ιδιότητας, η φασματική πυκνότητα ισχύος του λευκού θορύβου παραμένει σταθερή σε όλο το φάσμα συχνοτήτων.

Έχοντας επιλέξει τον λευκό θόρυβο $W(n)$ ως είσοδο, το σύστημα ορίζεται πλήρως από την κρουστική του απόκριση $h(n)$. Επιπλέον, η έξοδος $Y(n)$ προκύπτει μέσω συνέλιξης της κρουστικής απόκρισης με το σήμα εισόδου, δηλαδή $Y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)W(n-m)$. Η γραμμικότητα εξασφαλίζει ότι η έξοδος σε γραμμικό συνδυασμό εισόδων ισούται με τον ίδιο γραμμικό συνδυασμό των μεμονωμένων αποκρίσεων, ενώ η χρονική αμεταβλησία σημαίνει ότι μια καθυστέρηση στην είσοδο μεταφράζεται ισοδύναμα σε αντίστοιχη καθυστέρηση στην έξοδο.

Ο υπολογισμός της μέσης τιμής εξόδου γίνεται άμεσα από την ιδιότητα ότι ο λευκός θόρυβος έχει μέση τιμή μηδέν και το σύστημα είναι γραμμικό. Μεταφερόμενοι στο πεδίο συχνότητας, ο DFT της κρουστικής απόκρισης επιτρέπει τον ορισμό της φασματικής πυκνότητας ισχύος εξόδου ως $S_{YY}(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 S_{WW}(\omega)$.

6)



Κάναμε τα ίδια ακριβώς που έχουμε αναφέρει παραπάνω.