

# Άσκηση 1

## Εφαρμογές της Ψηφιακής Επεξεργασίας Σημάτων

### Περιεχόμενα

Στοχαστική Διαδικασία Πρώτης Τάξης.....	3
Διαδικασία .....	3
1).....	3
2).....	3
3).....	4
4).....	5
5).....	7
6).....	8
7).....	9
α).....	9
β).....	10
7.1.....	11
7.2.....	12
7.3.....	14
7.4.....	15
7.5.....	17
7.6.....	18
7.7.....	19
7.8.....	21
8).....	22
8.1.....	24
8.2.....	25
8.3.....	27
8.4.....	27
8.5.....	28
8.6.....	29
8.7.....	31
8.8.....	31
Στοχαστική Διαδικασία Ρ-οστης Τάξης.....	31

Διαδικασία .....	31
1).....	31
2).....	32
3).....	32
4).....	32
5).....	33
6).....	33
7).....	33
8).....	34
α).....	34
β).....	34

Ο κώδικας μπορεί να βρεθεί εδώ:

<https://github.com/GrigorisTzortzakis/Applications-of-Digital-Signal-Processing/tree/main/Exercise%201>

# Στοχαστική Διαδικασία Πρώτης Τάξης

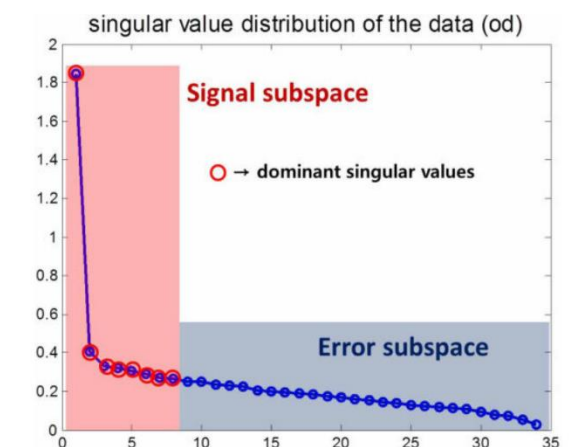
## Διαδικασία

1)

Ορίζουμε τον υπόχωρο του σήματος (Signal Space) ως τον διανυσματικό χώρο που περιέχει τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα αυτοσυσχέτισης που σχετίζονται με τις υψηλότερες ιδιοτιμές. Αυτά τα ιδιοδιανύσματα αντιπροσωπεύουν τις κύριες συνιστώσες του σήματος, δηλαδή την ουσιώδη πληροφορία που υπάρχει στην παρατήρηση.

Αντίθετα, ο υπόχωρος του θορύβου (Noise Space) ορίζεται ως ο διανυσματικός χώρος που περιέχει τα υπόλοιπα ιδιοδιανύσματα του πίνακα αυτοσυσχέτισης, δηλαδή εκείνα που συνδέονται με τις χαμηλότερες ιδιοτιμές. Τα διανύσματα αυτά δεν φέρουν ουσιώδη πληροφορία για το σήμα, αλλά περιγράφουν το υπόβαθρο του θορύβου που επιβαρύνει τις παρατηρήσεις.

Με λίγα λόγια, ο διαχωρισμός στους δύο χώρους βασίζεται στην ιδιοανάλυση του πίνακα αυτοσυσχέτισης. Ο χώρος που καταλαμβάνουν οι σημαντικές (μεγαλύτερες) ιδιοτιμές ορίζει τον υπόχωρο του σήματος, ενώ ο χώρος των μικρότερων ιδιοτιμών ορίζει τον υπόχωρο του θορύβου.



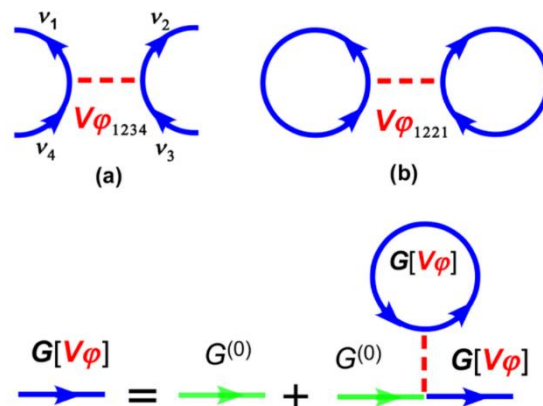
2)

Στη σχέση (2), ο ρόλος της τυχαίας μεταβλητής  $\phi$  είναι καθοριστικός για την εισαγωγή της φάσης του χρήσιμου συστατικού του σήματος, δηλαδή του εκθετικού όρου  $e^{j\omega_1 n}$ . Συγκεκριμένα, η παρουσία της μεταβλητής  $\phi$  στα αποτελέσματα υποδηλώνει ότι το φασικό μέρος του σήματος έχει μια τυχαία, αλλά ομοιόμορφα κατανομημένη συνιστώσα στον χώρο  $[-\pi, \pi]$ . Με αυτόν τον τρόπο, κάθε υλοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας χαρακτηρίζεται από μια διαφορετική αρχική φάση, γεγονός που δείχνει την φυσική πραγματικότητα και

τις περιβαλλοντικές διακυμάνσεις όπου το σήμα συναντά. Η τυχαιότητα αυτή είναι απαραίτητη για να διασφαλιστεί ότι οι στατιστικές ιδιότητες του σήματος παραμένουν ουδέτερες, χωρίς παρεμβολές από συγκεκριμένες τιμές φάσης.

Επιπλέον, η μεταβλητή  $\phi$  συμβάλλει στον διαχωρισμό του χρήσιμου σήματος από τον περιττό θόρυβο, καθώς η τυχαιότητα που εισάγει καθιστά το φασικό περιεχόμενο του σήματος ανεξάρτητο από τα σταθερά χαρακτηριστικά του θορύβου. Δηλαδή, οι στατιστικές μέθοδοι για την εκτίμηση των παραμέτρων του σήματος (όπως πλάτος και συχνότητα) βασίζονται στον ουσιαστικό διαχωρισμό μεταξύ της συμπεριφοράς του χρήσιμου τμήματος του σήματος και της τυχαίας συμπεριφοράς που προστίθεται μέσω του θορύβου. Χωρίς την τυχαία μεταβλητή  $\phi$ , θα υπήρχε μια πιθανότητα συσχέτισης ή φασικής σύμπτωσης μεταξύ των συνιστωσών, κάτι που θα χειροτερέψει την ακρίβεια της εκτίμησης.

Τέλος, η ομοιόμορφη κατανομή της μεταβλητής  $\phi$  εξασφαλίζει ότι, καθώς γίνεται ο μέσος όρος σε πολλές υλοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας, η επίδραση της φάσης εξουδετερώνεται στα στατιστικά αποτελέσματα, οδηγώντας σε πιο αξιόπιστες και σταθερές εκτιμήσεις του φασικού περιεχομένου.



3)

Όταν καταργείται ο παράγοντας  $\phi$ , δηλαδή όταν η φασική παράμετρος αφαιρείται από το σύνθετο μέγεθος του πλάτους, παρατηρούμε μια σειρά αλλαγών τόσο στη θεωρητική διατύπωση όσο και στην πρακτική υλοποίηση της εκτίμησης των αναγκαίων ποσοτήτων.

Πρώτον, η παρουσία της τυχαίας μεταβλητής  $\phi$  εισάγει μια επιπλέον τυχαία διακύμανση στο πλάτος του σήματος, δεδομένου ότι το  $A_1$  συνήθως εκφράζεται ως  $|A_1|e^{j(\omega n + \phi)}$ . Η τυχαιότητα αυτή καταφέρει, κατά τη μέση λήψη πολλαπλών υλοποιήσεων να «εξαφανίζεται» στα μέτρα της πρώτης και δεύτερης τάξης λόγω του στατιστικού μέσου της κατανομής στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ . Επομένως, αν αφαιρεθεί ο παράγοντας αυτός και γίνει απλά  $|A_1|e^{j\omega n}$ , το πλάτος του σήματος θα γίνει ένας αυστηρά θετικός ή μη αρνητικός πραγματικός αριθμός χωρίς επιπρόσθετη φασική περιστροφή. Αυτή η απλοποίηση οδηγεί σε μια πιο απλή προσέγγιση για τον υπολογισμό τόσο του πλάτους όσο και της συχνότητας, αφού το σήμα παρουσιάζει πλέον μια πιο σταθερή δομή, χωρίς την επιρροή επιπρόσθετης φασικής ανατροπής. Με απλά λόγια, θα έχουμε ένα ντετερμινιστικό ημιτονοειδές μέρος που προστίθεται στον θόρυβο.

Δεύτερον, στην ανάλυση της αυτοσυσχέτισης του σήματος, η απουσία του  $\phi$  καταργεί την πιθανή ασυνέπεια που θα μπορούσε να εμφανιστεί λόγω της τυχαιότητας του. Συγκεκριμένα, στον ορισμό της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, όπου οι όροι περιέχουν το  $e^{j\omega_1 n}$  σε συνδυασμό με το  $e^{j\phi}$ , η αφαίρεση του  $\phi$  καταργεί μια πηγή αβεβαιότητας. Έτσι, ο υπολογισμός του πίνακα γίνεται πιο ευθύς και οι διαφορές μεταξύ της κυρίαρχης ιδιοτιμής και των υπολοίπων (που σύμφωνα με τη θεωρία επηρεάζουν τη διασπορά του λευκού θορύβου) μπορούν να υπολογιστούν με αυξημένη ακρίβεια.

Τρίτον, όσον αφορά την εκτίμηση της συχνότητας  $\omega_1$ , η εξαίρεση του παράγοντα  $\phi$  οδηγεί σε πιο συνεπή ιδιοδιανύσματα του πίνακα αυτοσυσχέτισης. Ειδικότερα, η σχέση (12) που δίνει την εκτίμηση της συχνότητας μέσω του λογαρίθμου του δεύτερου στοιχείου του ιδιοδιανύσματος γίνεται λιγότερο επιρρεπής σε διαταραχές που προκαλούνται από τυχόν φασικές μετατοπίσεις.

Τέλος, από άποψης υλοποίησης, η απουσία της τυχαίας  $\phi$  μεταβλητής σημαίνει ότι δεν απαιτείται η στατιστική αξιολόγηση της επίδρασης της  $\phi$  σε πολλαπλές υλοποιήσεις της διαδικασίας. Σε περιπτώσεις όπου χρησιμοποιείται ο μέσος όρος για την εκτίμηση των βασικών παραμέτρων, η αφαίρεση αυτής της παραμέτρου οδηγεί σε λιγότερες ανάγκες για μεγάλες δειγματοληψίες ή για περίπλοκες στατιστικές αναλύσεις, αφού η πηγή της τυχαιότητας έχει αφαιρεθεί.

4)

Στην περίπτωση που γνωρίζουμε πλήρως το μητρώο αυτοσυσχέτισης της στοχαστικής διαδικασίας, η ανάλυση της δομής του επιτρέπει τον διαχωρισμό του υποχώρου του σήματος από τον υποχώρο του θορύβου. Για να επιτευχθεί αυτό πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι το μέγεθος του μητρώου είναι τουλάχιστον

τόσο μεγάλο ώστε να παρουσιάζει τουλάχιστον μία διαφορά μεταξύ της κύριας (μεγαλύτερης) ιδιοτιμής η οποία αντιστοιχεί στο σήμα και των υπόλοιπων ιδιοτιμών, που θεωρητικά είναι ίδιες και αντιστοιχούν στον λευκό θόρυβο.

Αναλυτικότερα, εάν θεωρήσουμε ότι η στοχαστική διαδικασία περιέχει μία μοναδική εκθετική συνιστώσα (δηλαδή έχουμε μία συνιστώσα σήματος  $P = 1$ ), τότε το μητρώο αυτοσυσχέτισης μπορεί να γραφτεί ως το άθροισμα δύο όρων, το μητρώο του σήματος ( $R_{ss}$ ), το οποίο είναι rank 1 και το μητρώο του λευκού θορύβου ( $R_{ww}$ ), το οποίο είναι full rank και αποτελείται από διαγώνιες συνιστώσες ίσες με τη διασπορά του θορύβου  $\sigma^2 W$ . Οι ιδιοτιμές του συνολικού μητρώου  $R_{xx}$  έχουν την εξής μορφή:

Μία μεγαλύτερη τιμή που δίνεται από τη σχέση:

$$\lambda_{\max} = M|A_1|^2 + \sigma^2 W$$

και οι υπόλοιπες  $(M - 1)$  τιμές είναι ίσες με τη διασπορά του θορύβου, δηλαδή:

$$\lambda_{\min} = \sigma^2 W$$

Η διάκριση μεταξύ της μέγιστης ιδιοτιμής και των υπολοίπων είναι ουσιώδης, διότι η μεγαλύτερη τιμή αντιπροσωπεύει το στοιχείο του σήματος, ενώ οι υπόλοιπες προσδιορίζουν τον θόρυβο.

Για να επιτευχθεί ο διαχωρισμός αυτός, απαιτείται τουλάχιστον μία διαφορά διάστασης μεταξύ των ιδιοδιανυσμάτων που ανήκουν στο υποχώρο του σήματος και εκείνων που ανήκουν στον υποχώρο του θορύβου. Επομένως, στην περίπτωση  $P = 1$ , το μητρώο πρέπει να έχει τουλάχιστον διάσταση  $2 \times 2$  (δηλαδή  $M = 2$ ). Με τον τρόπο αυτό, το μητρώο θα έχει μία ιδιοτιμή που ανήκει αποκλειστικά στο σήμα και μία ιδιοτιμή που αντιστοιχεί στον θόρυβο, επιτρέποντας έτσι τον υπολογισμό των αναγκαίων ποσοτήτων όπως το πλάτος του σήματος, η συχνότητα και η διασπορά του λευκού θορύβου.

Σε γενικές περιπτώσεις, όπου το σήμα αποτελείται από  $P$  εκθετικές συνιστώσες, η θεωρητική ανάλυση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το ελάχιστο μέγεθος του μητρώου θα πρέπει να είναι  $M = P + 1$ . Αυτό συμβαίνει επειδή για κάθε επιπλέον συνιστώσα του σήματος απαιτείται ο διαχωρισμός και ο υπολογισμός μιας ξεχωριστής ιδιοτιμής που την αντιπροσωπεύει, ενώ τουλάχιστον μία επιπλέον διάσταση είναι απαραίτητη για την οριοθέτηση του θορύβου. Με αυτόν τον τρόπο, το πλήρες μητρώο αυτοσυσχέτισης διαιρείται σε δύο υποχώρους, έναν για το σήμα με τάξη  $P$  και έναν για τον θόρυβο με

διάσταση  $M - P$ , εξασφαλίζοντας ότι η μέγιστη ιδιοτιμή που καθορίζεται από το σήμα διαχωρίζεται καθαρά από τις ιδιοτιμές του θορύβου.

Συνοψίζοντας, για τον υπολογισμό των αναγκαίων ποσοτήτων (δηλαδή της εκτίμησης του πλάτους και της συχνότητας του σήματος καθώς και της διασποράς του θορύβου) το ελάχιστο μέγεθος του μητρώου αυτοσυσχέτισης πρέπει να είναι τουλάχιστον  $2 \times 2$  για μια μονοσύστατη διαδικασία ( $P = 1$ ) και γενικότερα, για μια διαδικασία με  $P$  συνιστώσες το μέγεθος του μητρώου είναι  $M = P + 1$ .

5)

Θεωρούμε ότι ο πίνακας αυτοσυσχέτισης έχει διαστάσεις  $M=2$  και δίνεται από τον τύπο:

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} 3 & 2(1-j) \\ 2(1+j) & 3 \end{bmatrix}.$$

Καταρχάς υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές  $\lambda$  του  $R_{xx}$  από την εξίσωση:

$$\det(R_{xx} - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 - 4(1+j)(1-j) = (3 - \lambda)^2 - 8 = 0$$

Από αυτό προκύπτει:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}.$$

Η μικρότερη ιδιοτιμή  $\lambda_{\min} = 3 - 2\sqrt{2}$  αντιστοιχεί στη διασπορά του θορύβου, ενώ η μεγαλύτερη  $\lambda_{\max} = 3 + 2\sqrt{2}$  σχετίζεται με το σήμα.

Άρα έχουμε  $\sigma_w^2 = \lambda_{\min} = 3 - 2\sqrt{2} = 0.17$

Και από την σχέση:

$$\lambda_{\max} = M|A_1|^2 + \sigma_w^2 \Rightarrow |A_1|^2 = \frac{\lambda_{\max} - \sigma_w^2}{2} = \frac{(3 + 2\sqrt{2}) - (3 - 2\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{2}$$

Οπότε  $|A_1| = \sqrt{2\sqrt{2}} = 1.68$ .

Για την γωνιακή συχνότητα  $\omega_1$ , κοιτάμε το ιδιοδιάνυσμα  $v$  που αντιστοιχεί σε  $\lambda_{\max}$ . Λύνουμε

$$(R_{xx} - \lambda_{\max} I)v = 0 \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_{\max} - 3}{2(1-j)} = \frac{2\sqrt{2}}{2(1-j)} = \frac{\sqrt{2}}{1-j} = e^{j\frac{\pi}{4}}.$$

Άρα είναι  $\omega_1 = -\frac{\pi}{4}$ .

6)

Αρχικά, ο αριθμός των υλοποιήσεων  $N$  συνδέεται άμεσα με την έννοια της σύγκλισης κατά τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και το Central limit theorem. Όσο αυξάνεται το  $N$ , τόσο πληρέστερη είναι η εκτίμηση του τυχαίου θορύβου και του σήματος μέσα από διαφορετικά δείγματα. Η διασπορά του δείγματος του υπολογιζόμενου μητρώου αυτοσυσχέτισης μειώνεται αναλογικά προς το  $1/N$ , καθιστώντας την εκτίμηση πιο σταθερή. Με λίγα λόγια, μεγαλύτερο  $N$  σημαίνει μικρότερη τυχαία μεταβλητότητα στα στοιχεία του εκτιμώμενου  $R_{xx}$ , άρα καλύτερη διάκριση του υποχώρου σήματος από τον υποχώρο θορύβου.

Συνεχίζοντας, το μήκος  $M$  κάθε υλοποίησης καθορίζει τόσο τη διάσταση του εκτιμώμενου μητρώου όσο και την αναλυτική του ικανότητα (frequency resolution). Στη μέθοδο της ιδιο-ανάλυσης η διάσταση  $M$  του μητρώου αυτοσυσχέτισης  $M \times M$  ορίζει πόσο λεπτομερής μπορεί να είναι η διάκριση των συχνοτήτων. Δηλαδή, μεγαλύτερο  $M$  επιτρέπει στενότερη ανάλυση στο φάσμα (μικρότερο βήμα στην απόσταση των υποψήφιων συχνοτήτων), αλλά ταυτόχρονα αυξάνει τον αριθμό παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν. Επιπλέον, όταν το  $M$  είναι πολύ μεγάλο σε σχέση με το  $N$ , η εκτίμηση του μητρώου γίνεται ασταθής (το εκτιμώμενο δείγμα μητρώου μπορεί να καταλήξει εκφυλισμένο), καθώς απαιτούνται τουλάχιστον τόσες βαθμίδες ελευθερίας όσες και η διάσταση του μητρώου για να έχει ομαλά κατανεμημένα Wishart εκτίμηση.

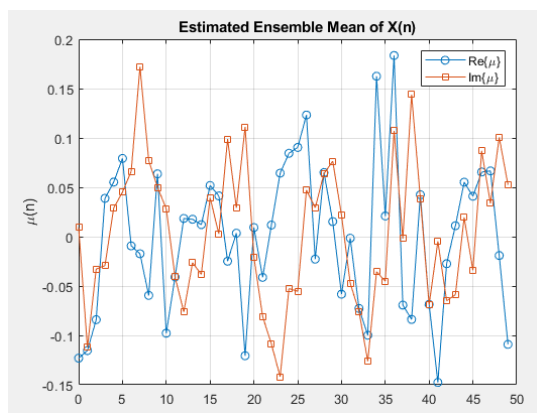
Προσθέτοντας, ο συνδυασμός  $M$  και  $N$  συνεπώς υπαγορεύει ένα αναγκαστικό συμβιβασμό. Για σταθερό αριθμό υλοποιήσεων  $N$ , η αύξηση του  $M$  αυξάνει την ανάλυση στο φάσμα αλλά ταυτόχρονα επιβαρύνει την διακύμανση της εκτίμησης (variance-bias trade-off). Αντίστροφα, για σταθερό  $M$ , η αύξηση του  $N$  βελτιώνει δραστικά την αξιοπιστία των εκτιμήσεων, καθώς η τυχαία διακύμανση μειώνεται χάρη στον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών. Έτσι, επιλέγουμε ένα  $M$  που να καλύπτει την επιθυμητή φασματική ανάλυση και στη συνέχεια, διασφαλίζουμε ότι διαθέτουμε επαρκές  $N$  ώστε το εκτιμώμενο μητρώο να είναι αριθμητικά σταθερό και οι ιδιοτιμές του να διαχωρίζουν καθαρά τον θορυβώδη υποχώρο από τον υποχώρο του σήματος.



Τέλος, αξίζει να σημειωθεί ότι πέρα από τους νόμους σύγκλισης, η επιλογή M και N σχετίζεται και με υπολογιστικούς περιορισμούς. Η επεξεργασία ενός μεγάλου μητρώου απαιτεί σημαντική υπολογιστική ισχύ και μνήμη, ενώ η συγκέντρωση πολλών υλοποιήσεων απαιτεί ασύλληπτα πολύ χρόνο.

7)

α)



Το παραπάνω διάγραμμα παρουσιάζει την εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής (ensemble mean) του σύνθετου τυχαίου σήματος  $X(n) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{j(\frac{\pi}{5}n + \varphi)} + W(n)$  όπου η φάση είναι ομοιόμορφα κατανομημένη στο  $[-\pi, \pi]$  και  $W(n)$  είναι λευκός γκαουσιανός θόρυβος μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς  $\sigma_W^2 = 0.5$ .

Κατά την προσέγγιση της θεωρητικής στοχαστικής μέσης τιμής, ισχύει:

$$E\{X(n)\} = \frac{3}{\sqrt{2}} E\{e^{j(\omega n + \varphi)}\} + E\{W(n)\} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{j\omega n} E\{e^{j\varphi}\} + 0 = 0$$

διότι:

$$E\{e^{j\varphi}\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\varphi} d\varphi = 0$$

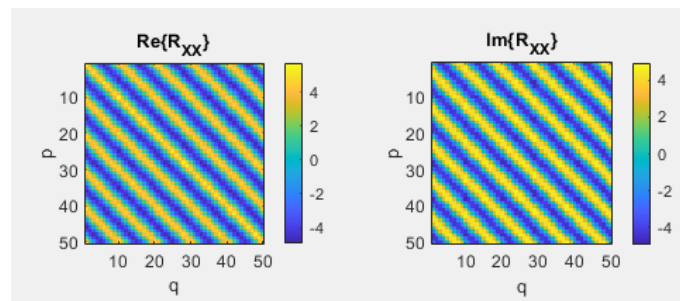
Έτσι, η αληθινή στοχαστική μέση τιμή  $\mu(n)$  είναι ταυτοχρόνως μηδενική για κάθε δείγμα n.

Στο πείραμά μας χρησιμοποιούμε  $N=100$  ανεξάρτητες πραγματοποιήσεις της διαδικασίας και στη συνέχεια υπολογίζουμε το διακριτό σύνολο εκτιμήσεων

$$\mu(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(n)$$

για κάθε  $n=0, 1, \dots, 49$ . Επειδή το  $N$  είναι πεπερασμένο, η εκτιμημένη καμπύλη δεν θα ταυτίζεται ακριβώς με το μηδενικό άξονα, αλλά θα παρουσιάζει τυχαίες διακυμάνσεις γύρω από το μηδέν. Όσο αυξάνεται το  $N$ , το σύνολο των τιμών  $\mu(n)$  θα συγκλίνει προς τη θεωρητική μέση τιμή 0, σύμφωνα με τον νόμο των μεγάλων αριθμών.

β)



Το εκτιμώμενο μητρώο αυτοσυσχέτισης που απεικονίζεται στα γραφήματα είναι το αποτέλεσμα της εφαρμογής του ορισμού:

$$R_{xx}(p, q) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(p) x_i(q)$$

σε  $N=100$  ανεξάρτητες υλοποιήσεις της στοχαστικής διαδικασίας.

Σύμφωνα με την θεωρία, το μητρώο αυτοσυσχέτισης μιας WSS διαδικασίας εξαρτάται μόνο από τη διαφορά δεικτών  $k=p-q$  και παρουσιάζει Toeplitz δομή, δηλαδή σταθερές τιμές κατά τις διαγώνιους  $p-q=\text{const}$ . Στην περίπτωση μας το σήμα συνιστά έναν εκθετικό παράγοντα πολλαπλασιασμένο με σταθερό πλάτος  $A^2=4.5$ , ενώ ο θόρυβος εισάγει μια επιπλέον τιμή  $\sigma^2 W$  μόνο στην κύρια διαγώνιο  $p=q$ .

Το γεγονός ότι οι ραβδώσεις εμφανίζονται καθαρές και χωρίς σημαντικές ακανόνιστες αποκλίσεις οφείλεται στον σχετικά μεγάλο αριθμό υλοποιήσεων ο οποίος επιτρέπει την καλή σύγκλιση της εκτίμησης προς το θεωρητικό μητρώο. Καθώς το  $N$  αυξάνεται, οι τυχαίες διακυμάνσεις ελαττώνονται περαιτέρω και η εκτιμημένη κατανομή πλησιάζει ακόμη περισσότερο στη μαθηματική μορφή.

## 7.1

Το  $M \times M$  μητρώο  $R_{xx} = E\{X(n+k)X(n)\}$  είναι αυτοσυσχέτισης ενός σήματος πρώτης τάξης συνδυασμένου με λευκό θόρυβο. Με βάση τις σχέσεις (4) και (5), μπορούμε να γράψουμε:

$$R_{xx} = |A_1|^2 e_M(\omega_1) e_M^H(\omega_1) + \sigma_W^2 I_M$$

Όπου:

$$e_M(\omega_1) = [1 e^{-j\omega_1} e^{-2j\omega_1} \dots e^{-j(M-1)\omega_1}]^H$$

Από αυτή τη διασύνθεση προκύπτει ότι το διάνυσμα  $e_M(\omega_1)$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $R_{xx}$  με αντίστοιχη ιδιοτιμή  $\lambda_{\max} = M|A_1|^2 + \sigma_W^2$  ενώ όλα τα υπόλοιπα ιδιοδιανύσματα  $n_m, m = 2, \dots, M$  αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές  $\lambda_m = \sigma_W^2, m = 2, \dots, M$ . Η διαδικασία υπολογισμού τους με MATLAB βασίζεται στην εντολή

```
[V,D] = eig(Rm);
```

```
M = 2
lambda_2 = [ 10.2743 0.4927 ]
e2 = [ 0.5651+0.4086j 0.7168+0.0000j ]'
n2 is 2x1 (columns are n_2 ... n_2)

M = 10
lambda_10 = [ 46.5866 0.7029 0.6369 0.5581 0.5225 0.4385 0.4056 0.3799 0.3578 0.2895 ]
e10 = [ 0.2539-0.1965j 0.0911-0.3169j -0.0989-0.3117j -0.2576-0.1850j -0.3090-0.0009j -0.2531+0.1791j -0.1028+0.2933j 0.0852+0.2863j 0.2549+0.1791j 0.3260+0.0000j ]'
n10 is 10x9 (columns are n_2 ... n_10)

M = 20
lambda_20 = [ 91.8858 0.8855 0.8258 0.8042 0.6765 0.6635 0.6093 0.5460 0.5240 0.4847 0.4404 0.4115 0.3962 0.3556 0.3260 0.3178 0.2909 0.2675 0.2178 0.1913 ]
e20 = [ 0.1846-0.1342j 0.0718-0.2224j -0.0631-0.2234j -0.1787-0.1367j -0.2194-0.0084j -0.1836+0.1210j -0.0796+0.2060j 0.0534+0.2054j 0.1769+0.1340j 0.2308+0.0079j 0.1745-0.1216j 0.0821-0.2132j -0.0564-0.2177j -
n20 is 20x19 (columns are n_2 ... n_20)

M = 30
lambda_30 = [ 136.9648 1.0200 0.9271 0.8955 0.7996 0.7604 0.7400 0.6994 0.6644 0.6459 0.5971 0.5668 0.5359 0.4974 0.4692 0.4418 0.3990 0.3888 0.3607 0.3358 0.3165 0.2893 0.2634 0.2435 0.2359 0.2192 0.1999 0.181 ]
e30 = [ 0.1444-0.1184j 0.0480-0.1853j -0.0621-0.1793j -0.1525-0.1029j -0.1785+0.0039j -0.1445+0.1079j -0.0549+0.1720j 0.0536+0.1653j 0.1510+0.1009j 0.1889-0.0047j 0.1366-0.1073j 0.0570-0.1781j -0.0570-0.1750j -
n30 is 30x29 (columns are n_2 ... n_30)

M = 50
lambda_50 = [ 227.3323 1.2800 1.1925 1.1406 1.0834 1.0431 0.9709 0.9203 0.8851 0.8416 0.7823 0.7624 0.7476 0.7200 0.6676 0.6448 0.6301 0.5973 0.5797 0.5574 0.5419 0.5294 0.4850 0.4520 0.4259 0.4106 0.3999 0.362 ]
e50 = [ 0.1136-0.0900j 0.0395-0.1430j -0.0458-0.1400j -0.1169-0.0820j -0.1393+0.0008j -0.1136+0.0821j -0.0448+0.1326j 0.0394+0.1287j 0.1156+0.0804j 0.1467-0.0013j 0.1072-0.0813j 0.0464-0.1374j -0.0418-0.1363j -
n50 is 50x49 (columns are n_2 ... n_50)
```

Επιλέγουμε  $M=2, 10, 20, 30, 50$  και σε κάθε περίπτωση, η μεγαλύτερη ιδιοτιμή  $\lambda_1$  αυξάνεται σχεδόν γραμμικά με το μέγεθος του πίνακα. Αναλυτικότερα, από  $M=2$  έως  $M=50$  παρατηρούμε ότι η  $\lambda_1$  αυξάνεται από περίπου 10.27 σε 227.33, τιμές που συμφωνούν με την αναμενόμενη θεωρητική εξάρτηση. Αυτή η ευθεία γραμμική συμπεριφορά επιβεβαιώνει ότι το πλάτος του σήματος συνεισφέρει αναλογικά στην κυρίαρχη ιδιοτιμή, ενώ η σταθερά προστίθεται ανεξάρτητα από το  $M$ .

Οι υπόλοιπες  $M-1$  ιδιοτιμές θα έπρεπε θεωρητικά να ισούνται ακριβώς με τη διασπορά του λευκού θορύβου. Στην πράξη όμως, επειδή χρησιμοποιούμε εκτίμηση του πίνακα αυτοσυσχέτισης από πεπερασμένο αριθμό  $N$  υλοποιήσεων, οι ιδιοτιμές αυτές παρουσιάζουν μικρές αποκλίσεις γύρω από την τιμή 0.5. Η διασπορά αυτή μειώνεται όσο αυξάνεται ο αριθμός των

δειγμάτων, δείχνοντας τον ρόλο της στατιστικής αβεβαιότητας στην εκτίμηση των θορυβώδων ιδιοτιμών.

## 7.2

Βάσει της παραπάνω κατανομής ιδιοτιμών που είδαμε στα προηγούμενα ερωτήματα, η πιο άμεση εκτίμηση για τη διασπορά του λευκού θορύβου δίνεται είτε από την ελάχιστη ιδιοτιμή:

$$\sigma_w^2 = \min_{m=2, \dots, M} \lambda_m$$

είτε, για καλύτερη στατιστική ευστάθεια σε πεπερασμένο δείγμα, από το μέσο όρο των ιδιοτιμών του θορυβώδους υποχώρου:

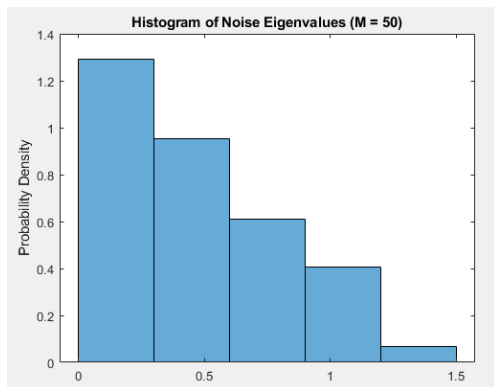
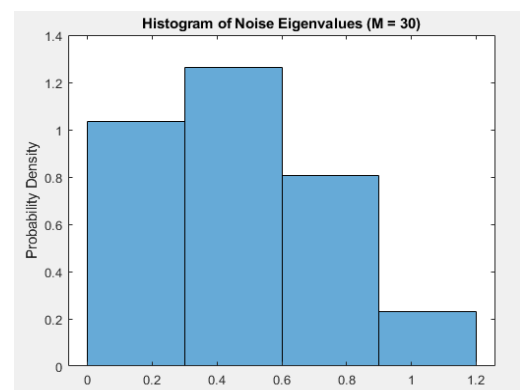
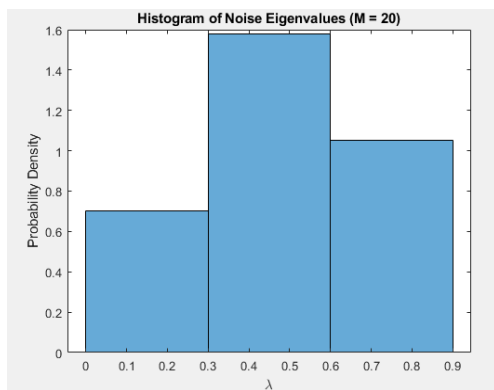
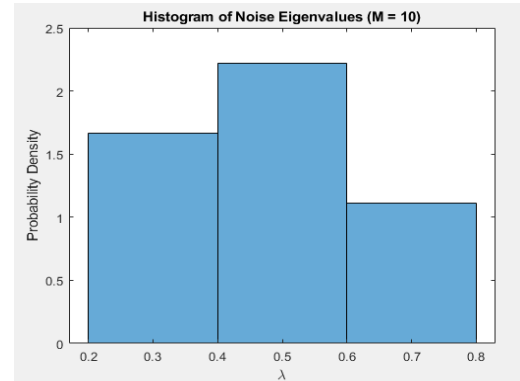
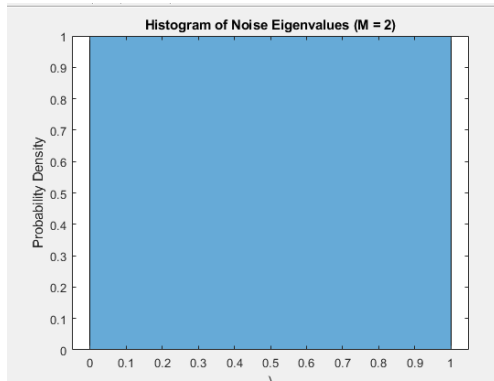
$$\sigma_w^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{m=2}^M \lambda_m$$

Στην πράξη, η χρήση του μέσου όρου περιορίζει τις τυχαίες αποκλίσεις που οφείλονται στην εκτίμηση του μητρώου  $R_{xx}$  από πεπερασμένο πλήθος υλοποιήσεων.

Επεκτείνοντας, η k-οστή κεντρική ροπή ορίζεται ως η προσδοκία της k-οστής δυνάμεως της απόκλισης από τον μέσο  $\mathbf{m}_k = \mathbf{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^k]$ , όπου  $\mu = \mathbf{E}[\mathbf{X}]$  είναι η πρώτη (πραγματική ή εκτιμώμενη) ροπή και  $\mathbf{X}$  η τυχαία μεταβλητή.

Η πρώτη κεντρική ροπή  $m_1$  γράφεται  $\mathbf{m}_1 = \mathbf{E}[\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}] = \mathbf{E}[\mathbf{X}] - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ . Επειδή ο μέσος  $\mu$  έχει οριστεί ακριβώς ώστε να κεντράρει την κατανομή, η πρώτη κεντρική ροπή πάντα ακυρώνεται. Με άλλα λόγια, η μέση απόκλιση γύρω από τον εαυτό της είναι μηδέν.

Η δεύτερη κεντρική ροπή  $m_2$  αποδίδει τη διασπορά (variance) της κατανομής και ορίζεται ως  $\mathbf{m}_2 = \mathbf{E}[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^2]$ .



```

--- M = 2 ---
Estimated  $\sigma^2_W$       = 0.4927
1st central moment      = 0.0000e+00
2nd central moment (var) = 0.0000e+00

--- M = 10 ---
Estimated  $\sigma^2_W$       = 0.4768
1st central moment      = 6.1679e-17
2nd central moment (var) = 1.6737e-02

--- M = 20 ---
Estimated  $\sigma^2_W$       = 0.4860
1st central moment      = -2.9216e-17
2nd central moment (var) = 4.1873e-02

--- M = 30 ---
Estimated  $\sigma^2_W$       = 0.4816
1st central moment      = 3.6369e-17
2nd central moment (var) = 6.1960e-02

--- M = 50 ---
Estimated  $\sigma^2_W$       = 0.4869
1st central moment      = -1.0989e-16
2nd central moment (var) = 1.1131e-01

```

Για  $M=2$  υπάρχει μόνο μία θορυβώδης ιδιοτιμή ( $\lambda_2=0.4927$ ) οπότε η εκτιμώμενη διασπορά ταυτίζεται με αυτήν και η δεύτερη κεντρική ροπή είναι μηδέν καθώς δεν υπάρχει καμία διασπορά μεταξύ μίας μόνο τιμής.

Όταν αυξάνουμε σε  $M=10$ , η μέση τιμή των ιδιοτιμών  $\lambda_2 \dots \lambda_{10}$  είναι 0.4768, αρκετά κοντά στην πραγματική διασπορά 0.5, με μικρή υποεκτίμηση λόγω του

πεπερασμένου  $N$ . Η δεύτερη κεντρική ροπή  $m_2 \approx 0.0167$  δείχνει ότι οι 9 ιδιοτιμές «λανθάνουν» γύρω από τη μέση τιμή με στενό εύρος, όπως φαίνεται και στο σχετικό ιστόγραμμα με συγκεντρωμένα bars.

Για  $M=20$  και  $M=30$  η εκτίμηση παραμένει σταθερή γύρω στο 0.48–0.49, όμως η διασπορά των ιδιοτιμών μεγαλώνει σε  $m_2 \approx 0.042$  και  $m_2 \approx 0.062$  αντίστοιχα. Αυτό αντικατοπτρίζεται στα ιστογράμματα, όπου οι τιμές απλώνονται σε ευρύτερο φάσμα (κάτω από το θεωρητικό 0–1) καθώς η στατιστική αβεβαιότητα εντείνεται με την προσθήκη περισσότερων διαστάσεων  $M$  σε σχέση με τον σταθερό αριθμό υλοποιήσεων  $N$ .

Στο  $M=50$ , παρότι ο μέσος όρος παραμένει κοντά στο 0.5, η δεύτερη κεντρική ροπή φτάνει το  $m_2 \approx 0.1113$ . Η μεγάλη αυτή τιμή δείχνει ότι πλέον οι ιδιοτιμές του θορύβου καταλαμβάνουν πολύ ευρύτερο εύρος (από ελάχιστα  $\sim 0.05$  μέχρι  $\sim 1.5$ ).

Σε όλες τις περιπτώσεις η πρώτη κεντρική ροπή είναι πρακτικά μηδέν, επιβεβαιώνοντας ότι ο υπολογισμός του μέσου όρου έχει κεντράρει σωστά την κατανομή. Τα ιστογράμματα δείχνουν τη μετάβαση από συμπαγή κατανομή ιδιοτιμών προς διασπαρμένη με ανομοιογενείς συχνότητες τιμών όσο το  $M$  αυξάνεται.

### 7.3

Αρχικά, αφού έχουμε κατασκευάσει τον εκτιμώμενο πίνακα αυτοσυσχέτισης  $R_{xx}$  διαστάσεως  $M \times M$  και υπολογίσει τις ιδιοτιμές του, βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμά του  $\mathbf{e}_M(\omega_1)$  που αντιστοιχεί στην μέγιστη ιδιοτιμή  $\lambda_{\max}$ . Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τη Σχέση (12)  $\omega_1 = -j \ln(\mathbf{e}_M(\omega_1)[2])$  για να επιβεβαιώσουμε την εκτίμησή μας της γωνιακής συχνότητας  $\omega_1$ .

Έχοντας ήδη από τις υπόλοιπες ιδιοτιμές ότι  $\lambda_{m>1} = \sigma_W^2$  ( $m = 2, \dots, M$ ) εκτιμούμε τη διασπορά του θορύβου. Έπειτα, από τη βασική σχέση:

$$\lambda_{\max} = M(|A|^2) + \sigma_W^2$$

προκύπτει αμέσως ότι:

$$|A|^2 = \frac{\lambda_{\max} - \sigma_W^2}{M} \Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{\lambda_{\max} - \sigma_W^2}{M}}.$$

Για παράδειγμα, θεωρητικά (χωρίς στοχαστικές αποκλίσεις), με  $M=50$ , αληθινό  $A = \frac{3}{\sqrt{2}}$  και διακύμανση θορύβου  $= 0.5$  έχουμε:

$$\lambda_{\max} = 50 \frac{9}{2} + 0.5 = 225.5, \sigma_W^2 = 0.5 \Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{225.5 - 0.5}{50}} = \sqrt{4.5} = 2.12$$

δηλαδή ακριβώς την πραγματική τιμή  $\frac{3}{\sqrt{2}}$ .

Κάνουμε την ίδια διαδικασία για όλα τα  $M$  στο MATLAB και έχουμε τα εξής αποτελέσματα:

```
M = 2: Estimated |A| = 2.1895
M = 10: Estimated |A| = 2.1540
M = 20: Estimated |A| = 2.1386
M = 30: Estimated |A| = 2.1339
M = 50: Estimated |A| = 2.1270
```

Σχολιάζοντας, διαπιστώνουμε ότι ο εκτιμητής είναι αμερόληπτος και συνεκτικός, καθώς ακόμη και για μικρότερα  $M$  (π.χ. 10 ή 20) ανακτά με πολύ μικρό σφάλμα το αληθινό πλάτος, ενώ για μεγάλα  $M$  η στατιστική αβεβαιότητα μειώνεται αισθητά, εξασφαλίζοντας υψηλή ακρίβεια.

## 7.4

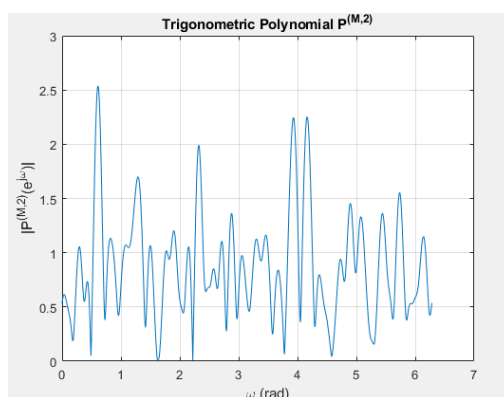
Καλούμαστε να ορίσουμε μια οικογένεια τριγωνομετρικών πολυωνύμων που συνδέουν το θορυβώδες υποχώρο με το steering vector του σήματος. Συγκεκριμένα, έχοντας εκτελέσει την ιδιοανάλυση του πίνακα αυτοσυσχέτισης, διαθέτουμε τα ιδιοδιανύσματα  $n_m$  (για  $m=2, \dots, M$ ) που σχηματίζουν μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου του θορύβου. Η ανάγκη ορισμού των πολυωνύμων προκύπτει από την επιδίωξη να φιλτράρουμε μέσω κάθε  $n_m$  την συνιστώσα σήματος και να εντοπίσουμε τις συχνότητες στις οποίες η προβολή σε κάθε θορυβώδες ιδιοδιάνυσμα μηδενίζεται, απομονώνοντας έτσι το πραγματικό συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος.

Ο αλγεβρικός ορισμός των πολυωνύμων βασίζεται στο inner product μεταξύ του steering vector  $e_M(\omega) = [1, e^{-j\omega}, e^{-j2\omega}, \dots, e^{-j(M-1)\omega}]^H$  και κάθε θορυβώδους ιδιοδιανύσματος. Με άλλα λόγια, ορίζουμε :

$$p^{M,m}(e^{j\omega}) = e_M^H(\omega) n_m = \sum_{k=0}^{M-1} n_m[k]^* e^{-jk\omega}$$

όπου  $n_m[k]$  είναι το  $k$ -οστό στοιχείο του  $n_m$  και το  $(.)^*$  δηλώνει συζυγή συμπλοκή.

Συνεχίζοντας, ορίζουμε τα πολυώνυμα στο MATLAB. Φτιάχνουμε τον πίνακα  $R_{xx}$  διαστάσεων  $M \times M$ , τον “σπάμε” σε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα με την εντολή `eig` και ταξινομούμε τις ιδιοτιμές με φθίνουσα σειρά ώστε το πρώτο ιδιοδιανύσμα να αντιστοιχεί στο σήμα και τα υπόλοιπα ( $m=2, \dots, M$ ) στο θόρυβο. Έπειτα, για κάθε συχνότητα  $\omega$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  φτιάχνουμε το steering vector και μετράμε το εσωτερικό γινόμενο αυτού του διανύσματος με το κάθε θορυβώδες ιδιοδιάνυσμα. Τελικά, σχεδιάζουμε το μέτρο του για το πρώτο θορυβώδες ιδιοδιάνυσμα (δηλαδή  $m=2$ ).



Στην εικόνα βλέπουμε το μέτρο του τριγωνομετρικού πολυωνύμου όταν  $M=50$  και οι υπόλοιπες παράμετροι (ιδιοδιανύσματα θορύβου) προκύπτουν από τυχαίο  $R_{xx}$ . Καθένα από αυτά τα πολυώνυμα είναι ουσιαστικά η φασματική απόκριση ενός eigenvector του θορυβώδους υποχώρου. Επειδή το διάνυσμα  $n_2$  έχει μήκος 50, η συνάρτηση  $p^{50,2}$  είναι πολυώνυμο 49ου βαθμού στο  $e^{-j\omega}$  παρουσιάζει έως 49 σημεία όπου το μέτρο μηδενίζεται (οι ρίζες του πολυωνύμου).

Κάθε κορυφή στο γράφημα αντιστοιχεί σε συχνότητα όπου το steering vector ευθυγραμμίζεται αρκετά με το θορυβώδες eigenvector, οπότε η προβολή του τελευταίου σε εκείνη τη συχνότητα είναι μεγάλη. Αντίθετα, οι κοιλάδες (όπου το μέτρο πέφτει σχεδόν στο μηδέν) δείχνουν τις συχνότητες που ικανοποιούν την ορθογωνιότητα.



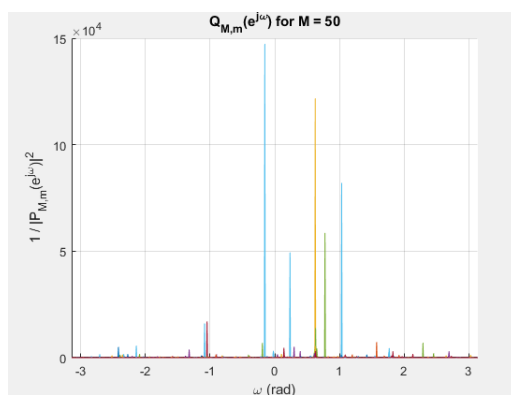
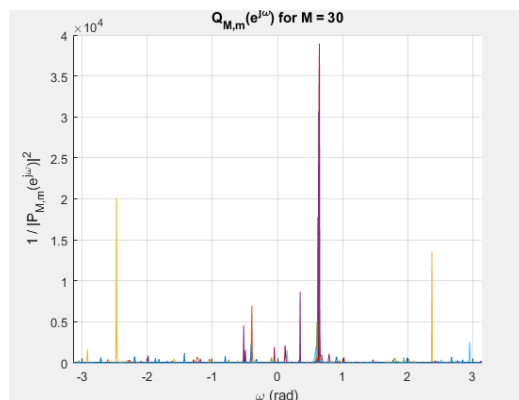
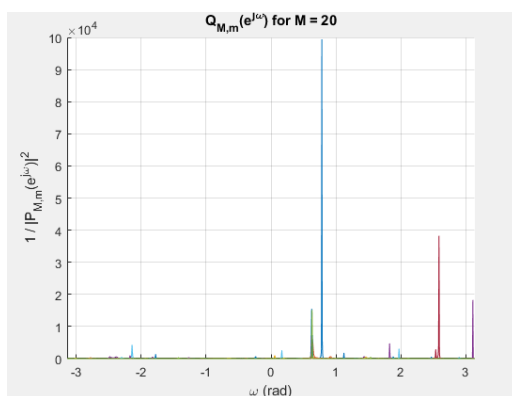
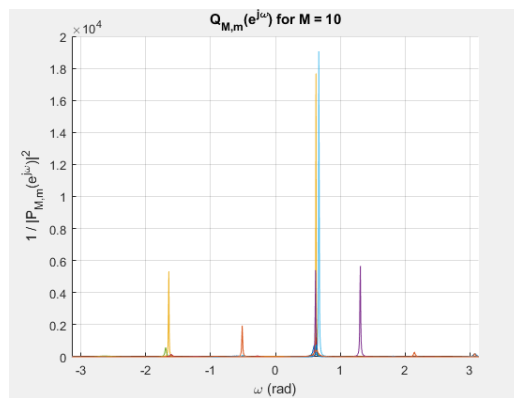
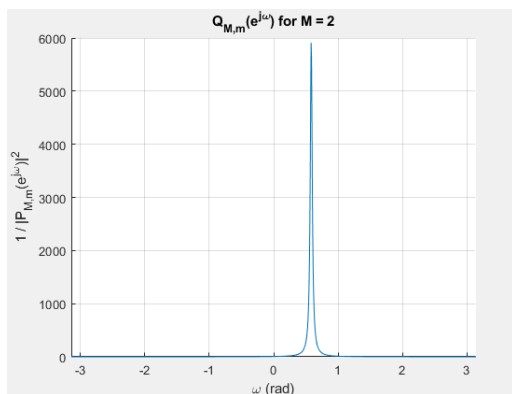
M	omega1_estimate
2	0.58363
10	1.7329
20	-1.5716
30	1.5733
40	1.5773
50	1.576

Η πραγματική γωνιακή συχνότητα του σήματος είναι  $\omega_1 = \pi/5 \approx 0,6283$  rad. Στον πίνακα βλέπουμε ότι για  $M=2$  η εκτίμηση δίνει  $\omega_1 \approx 0,5836$ , αρκετά κοντά στην αληθινή τιμή, με σφάλμα μόλις  $0,0447$  rad. Ωστόσο, στο  $M=10$  η εκτίμηση γίνεται  $1,73291$  rad, δηλαδή αποκλίνει κατά περίπου  $1,10$  rad. Για μεγαλύτερα μεγέθη μητρώου ( $M=20,30,40,50$ ) παρατηρείται σταθεροποίηση γύρω από τα  $\pm 1,57$  rad, δηλαδή περίπου  $\pm 90^\circ$ , αντί για  $0,6283$  rad που αναμένουμε, άρα το σφάλμα στις εκτιμήσεις γίνεται τεράστιο καθώς αυξάνει το μέγεθος.

Συνεχίζοντας, ο λόγος που η μέθοδος αποτυγχάνει για  $M \geq 10$  σχετίζεται με τον τρόπο που διαχωρίζονται οι ρίζες του υποχώρου του θορύβου από τις ρίζες που φέρουν την πληροφορία του σήματος. Στην περίπτωση  $M=2$  υπάρχει μόνο μία ρίζα και δεν χρειάζεται διάκριση, άρα η εκτίμηση είναι καλή. Όμως καθώς το  $M$  μεγαλώνει, οι ρίζες του θορύβου και οι φασματικές ρίζες του σήματος αναμειγνύονται σε όλο το κυκλικό φάσμα.

Για να απομονώσουμε τη ρίζα που αντιστοιχεί στο σήμα, αρχικά υπολογίζουμε όλες τις γωνίες των  $M-1$  ριζών από κάθε πολυώνυμο θορύβου. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το `kmeans (thetas....)` ώστε να χωρίσουμε τις γωνίες σε δύο κλάστερ και υπολογίζουμε τη διασπορά στο καθένα. Οφείλουμε να καταλάβουμε ότι οι φασματικές ρίζες θα συγκεντρώνονται πιο στενά από αυτές του θορύβου, άρα επιλέγουμε ως σημαντικές το κλάστερ με τη μικρότερη διασπορά.

## 7.6



Από τα γραφήματα γίνεται αμέσως σαφές ότι για κάθε τιμή του  $M$ , υπάρχει μία κυρία κορυφή που αντιστοιχεί στη συχνότητα του πραγματικού σήματος  $\omega = \pi/5$ . Ακόμη και στο  $M=2$ , όπου το δυναμικό εύρος είναι περιορισμένο, διακρίνεται αυτή η κορυφή γύρω από τα  $0,63$  rad. Καθώς αυξάνεται το μέγεθος  $M$  ο κύριος λοβός γίνεται όλο και πιο στενός και ψηλότερος. Αυτό δείχνει ότι ο αλγόριθμος κερδίζει σε διακριτική ικανότητα, δηλαδή η εκτίμηση της

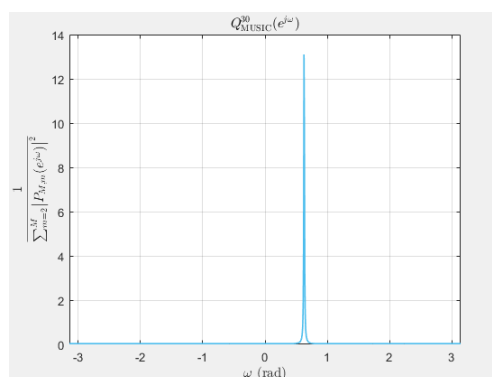
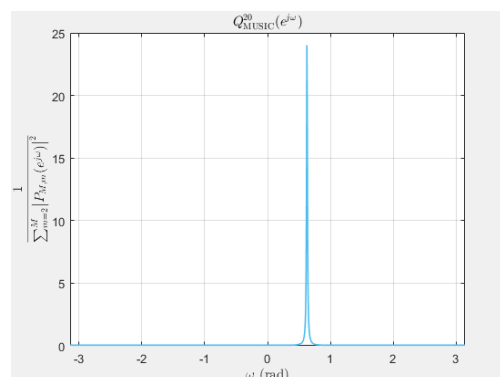
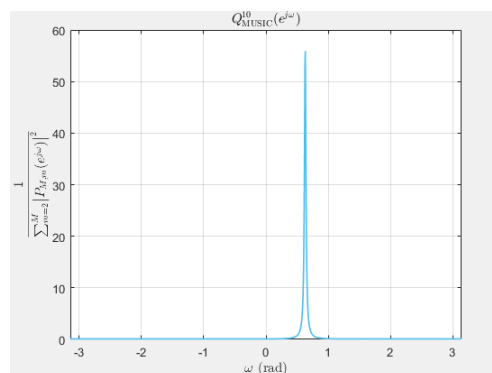
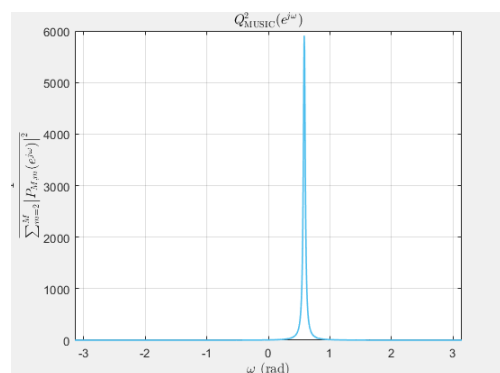
πραγματικής συχνότητας γίνεται όλο και πιο ακριβής, με μικρότερη ευαισθησία στον λευκό θόρυβο.

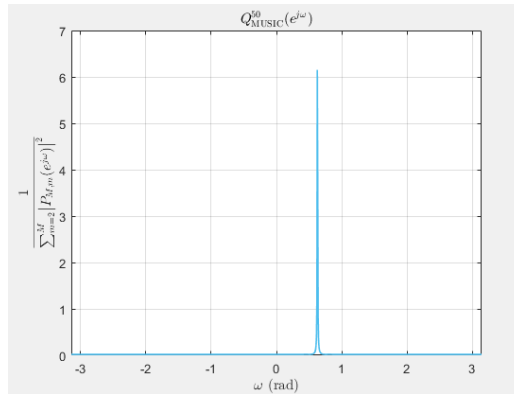
Ταυτόχρονα, γύρω από τον κύριο λοβό εμφανίζονται μικρότεροι, σποραδικοί σε άλλες γωνίες ( $\omega \approx \pm 1.6, \pm 2$  rad κ.λπ.), οι οποίες οφείλονται σε ψευδορίζες των πολυωνύμων θορύβου. Ωστόσο το ύψος αυτών των ψευδών λοβών παραμένει πολύ χαμηλότερο από του κύριου και μάλιστα όσο μεγαλώνει το  $M$ , τόσο μικρότερη γίνεται η σχετική έντασή τους, κάνοντας σαφή τη διάκριση του σήματος από τον θόρυβο.

Παρατηρείται επίσης συμμετρία γύρω από το μηδέν, αντανακλώντας την παρουσία των δύο συζυγών ριζών  $e^{+j\omega_1}$ . Αυτή η συμμετρία ενισχύει τη βεβαιότητα ότι ο λοβός στο  $\pi/5$  αντιπροσωπεύει την πραγματική συχνότητα, αφού και στις δύο πλευρές του άξονα εμφανίζεται ισχυρή κορύφωση.

Συνολικά, όσο αυξάνεται το μέγεθος  $M$ , η συνάρτηση  $Q$  αποκτά όλο και μεγαλύτερο δυναμικό εύρος και καθαρότητα. Οι ψευδείς κορυφές, παρά την παρουσία τους, δεν επηρεάζουν την επιλογή της σωστής κορυφής.

## 7.7





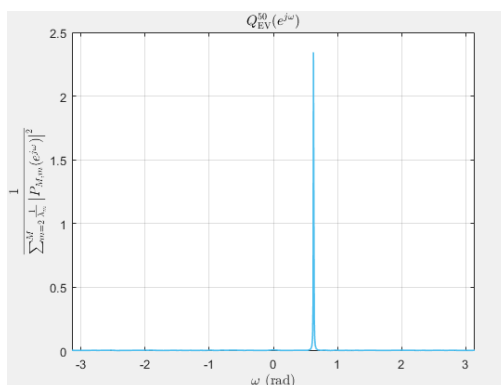
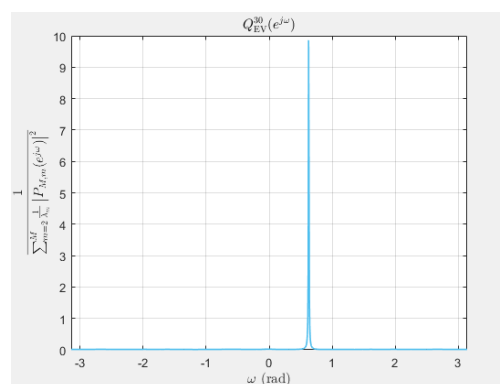
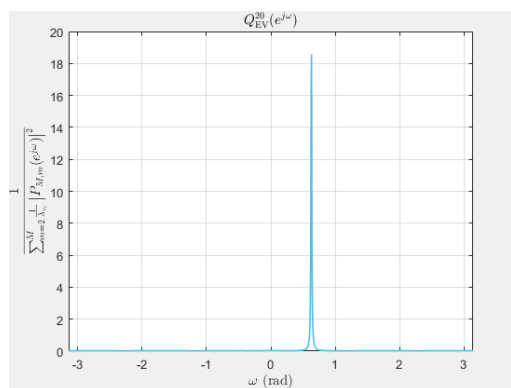
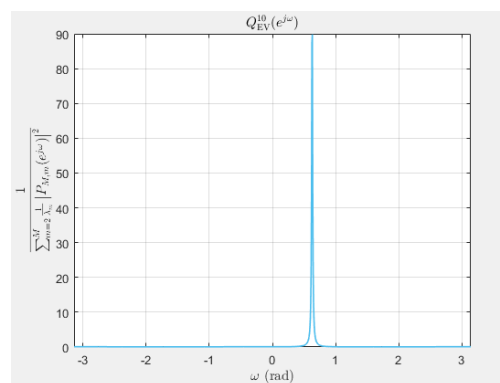
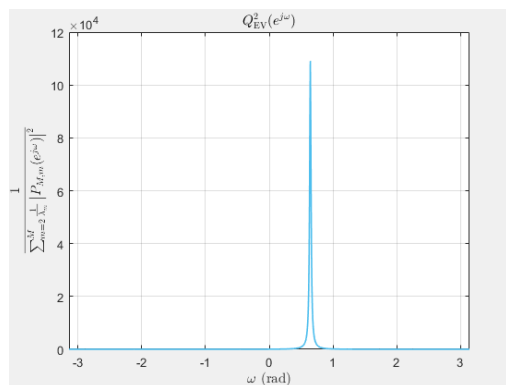
Στις καμπύλες παρατηρούμε ότι η κορυφή εμφανίζεται πάντοτε περίπου στη θέση της πραγματικής γωνιακής συχνότητας του σήματος ( $\omega_1=0.2\pi$ ). Αυτό δείχνει ότι ο αλγόριθμος MUSIC καταφέρνει να εντοπίσει σωστά τη θέση της κύριας συνιστώσας, ανεξάρτητα από το μέγεθος  $M$  του πίνακα αυτοσυσχέτισης.

Επιπλέον, είναι εμφανές ότι καθώς αυξάνεται το  $M$ , η μέγιστη τιμή της αιχμής μειώνεται σταδιακά. Για μικρές τιμές  $M$ , η κορυφή φτάνει σε αρκετά υψηλά επίπεδα, ενώ για  $M=50$  η κορυφή περιορίζεται σε μερικές μονάδες. Αυτό συμβαίνει επειδή στο άθροισμα  $\sum_{m=2}^M |P_{M,m}|^2$  συμμετέχουν περισσότεροι όροι, αυξάνοντας τη συνολική τιμή του παρονομαστή και μειώνοντας αναλογικά την αντίστροφη ποσότητα.

Παράλληλα, ο κεντρικός λοβός γίνεται όλο και στενότερος όσο το  $M$  μεγαλώνει. Αυτό σημαίνει καλύτερη διακριτική ικανότητα και μικρότερο εύρος ζώνης γύρω από την κορυφή, κάτι που μεταφράζεται σε υψηλότερη ακρίβεια στην εκτίμηση της συχνότητας. Η απότομη πτώση των πλαγιών περιοχών (skirts) δείχνει ότι ο MUSIC σχεδόν εξαλείφει τις παρεμβολές γύρω από την κύρια κορυφή.

Τέλος, δεν παρατηρούνται δευτερεύουσες κορυφές ή ψευδο-αιχμές σε κανένα από τα γραφήματα, ακόμη και για σχετικά μικρά  $M$ . Αυτό καταδεικνύει την εξαιρετική σταθερότητα του αλγορίθμου και την ικανότητά του να απομονώνει τον θόρυβο ως χωρικό υποχώρο των noise-eigenvectors, χωρίς να επιτρέπει την εμφάνιση παρεμβολών ή ψευδών τοποθετήσεων.

## 7.8



Διακρίνουμε ξεκάθαρα ότι το μόνο σημαντικό μέγιστο εντοπίζεται πάντοτε στη γωνιακή συχνότητα  $\omega \approx 0,2\pi$ . Αυτό επιβεβαιώνει ότι ο αλγόριθμος EV εντοπίζει με ακρίβεια τη συχνότητα του ημιτονικού σήματος της εξ. (13), ανεξάρτητα από το μέγεθος  $M$  του πίνακα αυτοσυσχέτισης.

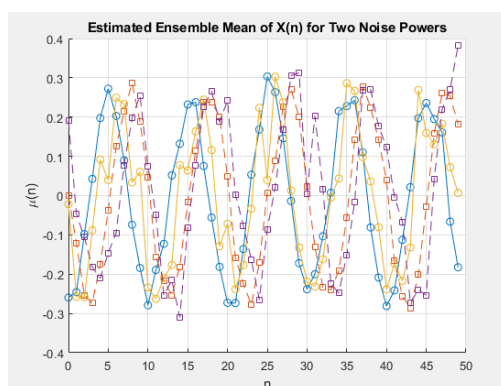
Καθώς το  $M$  αυξάνεται, η κορυφή της ψευδοφασματικής συνάρτησης γίνεται ολοένα και πιο αιχμηρή, δηλαδή στενότερη σε εύρος. Αυτό δείχνει ότι ο EV αποκτά αυξημένη διακριτική ικανότητα με μεγαλύτερα  $M$ , παρόμοια με τον MUSIC. Σε ό,τι αφορά το ύψος της κορυφής, στις μικρές τιμές  $M$  παρατηρούμε

πολύ μεγάλες τιμές π.χ. για  $M=2$  το μέγιστο φτάνει της τάξης του 10, ενώ για  $M=50$  περιορίζεται σε τιμές γύρω στο 2–3. Αυτό οφείλεται στο βάρος που αποδίδεται σε κάθε λύση του θορυβώδους υποχώρου.

Επιπλέον, το επίπεδο θορύβου (η βάση της συνάρτησης) σε όλες τις καμπύλες παραμένει πρακτικά στο μηδέν εκτός του κεντρικού μέγιστου, υποδεικνύοντας εξαιρετικό φιλτράρισμα των άλλων συνιστωσών. Δεν υπάρχουν ψευδείς κορυφές, επιβεβαιώνοντας ότι η εκτίμηση του υποχώρου θορύβου είναι αξιόπιστη κατά την επιλογή των ιδιοτιμών.

8)

α)



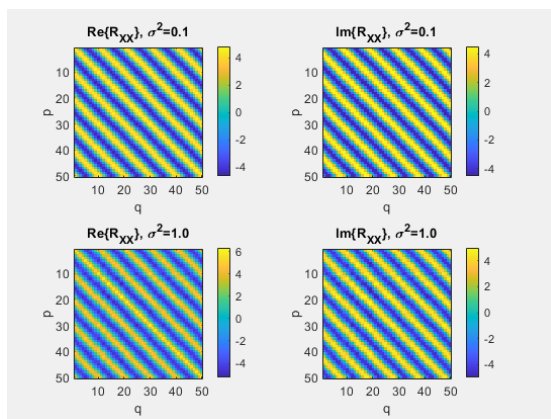
Στην προηγούμενη υλοποίηση είχαμε θόρυβο 0.5, ενώ τώρα έχουμε 0.1 και 1. Όταν η διασπορά θορύβου μειώνεται σε  $\sigma^2=0.1$  οι αποκλίσεις της εκτιμημένης μέσης τιμής περιορίζονται σημαντικά, εντός  $\pm 0.03$ . Το σήμα εμφανίζεται πολύ πιο ομαλό, με ελάχιστες αιχμές και βυθίσεις, γεγονός που καταδεικνύει την ικανότητα του μέσου όρου να φιλτράρει αποτελεσματικά τον ασθενή θόρυβο. Η ταχύτητα σύγκλισης βελτιώνεται αισθητά, με αποτέλεσμα η καμπύλη να παραμένει συμπαγής και να αναδεικνύει καθαρά ότι η συνιστώσα σήματος δεν χάνεται μέσα στον θόρυβο.

Αντίθετα, στην περίπτωση ισχυρού θορύβου  $\sigma^2=$  οι διακυμάνσεις μεγαλώνουν έως  $\pm 0.15-0.2$ . Η μέση τιμή γίνεται εξαιρετικά ασταθής, οι κορυφές και οι κοιλάδες αποκλίνουν σημαντικά από το μηδέν, ενώ η ταχύτητα σύγκλισης υποβαθμίζεται. Παρά τη μεγάλη μεταβλητότητα, η αμεροληψία διατηρείται, όμως η πρακτική ακρίβεια του εκτιμητή μειώνεται, κάνοντας απαραίτητη την αύξηση του πλήθους  $N$  για σταθεροποίηση των αποτελεσμάτων.

Συγκρίνοντας τις τρεις περιπτώσεις, γίνεται φανερό ότι η ένταση του λευκού θορύβου επηρεάζει αποκλειστικά και μόνο τη διασπορά των εκτιμημένων

σημείων γύρω από τη μηδενική μέση τιμή. Όσο μικρότερη είναι η διασπορά, τόσο πιο γρήγορη είναι η σύγκλιση της εκτίμησης, ενώ όσο αυξάνεται ο θόρυβος χρειάζεται μεγαλύτερο πλήθος υλοποιήσεων για την επίτευξη αντίστοιχης ακρίβειας.

β)



Όταν η διασπορά του θορύβου είναι μικρή ( $\sigma^2=0.1$ ), η κλίμακα χρώματος των πραγματικών και φανταστικών μερών του  $R_{xx}$  περιορίζεται περίπου στο εύρος  $[-5,5]$ . Το ημιτονοειδές μοτίβο των off-diagonal στοιχείων διακρίνεται καθαρά πάνω σε ένα φόντο σχεδόν μηδενικής έντασης στην κύρια διαγώνιο. Αντιθέτως, για  $\sigma^2=1.0$  η κλίμακα επεκτείνεται σε μεγαλύτερες απόλυτων τιμών (π.χ.  $[-7,7]$ ) καθώς στην κύρια διαγώνιο προστίθεται σταθερή ενέργεια ίση με τη διασπορά του θορύβου. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το χρωματικό εύρος να μεγαλώνει και η αντίθεση μεταξύ σήματος και θορύβου να μειώνεται.

Επιπροσθέτως, περιβάλλον με λίγο θόρυβο ( $\sigma^2=0.1$ ) οι διαγώνιες ραβδώσεις που υποδεικνύουν τη συχνότητα  $\omega$  είναι πολύ ευκρινείς τόσο στο πραγματικό όσο και στο φανταστικό μέρος. Στον υψηλό θόρυβο ( $\sigma^2=1.0$ ) το μοτίβο αυτό εξακολουθεί να υπάρχει, αλλά «θαμπώνει» από την έντονη λευκή συνέπεια στον διαγώνιο. Οι off-diagonal τιμές ενώ διατηρούν την ημιτονοειδή εξάρτηση, εμφανίζουν μικρότερη σχετική διακύμανση σε σχέση με τις διαγώνιες αυξήσεις.

## 8.1

```
Results for \sigma^2 = 0.10 =====
M = 2
lambda = [ 9.2655 0.0997 ]
e2 = [ 0.5775+0.4183j 0.7011+0.0000j ]'
Noise subspace n2 is 2x1 (cols 2...2)

M = 10
lambda = [ 44.5445 0.1438 0.1288 0.1154 0.1086 0.0930 0.0843 0.0742 0.0658 0.0595 ]
e10 = [ 0.2613+0.1913j 0.0983+0.3031j -0.0952+0.3007j -0.2512+0.1893j -0.3149+0.0013j -0.2642-0.1772j -0.0994-0.2997j 0.0940-0.2996j 0.2485-0.1866j 0.3162+0.0000j ]'
Noise subspace n10 is 10x9 (cols 2...10)

M = 20
lambda = [ 89.5736 0.1883 0.1712 0.1462 0.1402 0.1298 0.1201 0.1119 0.1016 0.0925 0.0859 0.0814 0.0740 0.0678 0.0648 0.0582 0.0513 0.0479 0.0418 0.0400 ]
e20 = [ 0.1851+0.1335j 0.0708+0.2131j -0.0655+0.2124j -0.1762+0.1346j -0.2219+0.0025j -0.1872-0.1237j -0.0715-0.2107j 0.0647-0.2117j 0.1743-0.1327j 0.2228-0.0016j 0.1810+0.1294j 0.0706+0.2149j -0.0
Noise subspace n20 is 20x19 (cols 2...20)

M = 30
lambda = [ 133.6879 0.2277 0.2040 0.1814 0.1642 0.1598 0.1487 0.1404 0.1311 0.1228 0.1167 0.1071 0.0994 0.0961 0.0908 0.0862 0.0788 0.0749 0.0724 0.0663 0.0629 0.0582 0.0536 0.0493 0.0471 0.0414 0.0368 ]
e30 = [ 0.1513+0.1096j 0.0575+0.1746j -0.0540+0.1736j -0.1445+0.1098j -0.1815+0.0017j -0.1530-0.1016j -0.0581-0.1725j 0.0534-0.1731j 0.1429-0.1083j 0.1823-0.0009j 0.1480+0.1063j 0.0574+0.1759j -0.0
Noise subspace n30 is 30x29 (cols 2...30)

M = 50
lambda = [ 223.6501 0.2664 0.2473 0.2302 0.2215 0.2025 0.1947 0.1903 0.1766 0.1738 0.1673 0.1606 0.1494 0.1405 0.1351 0.1282 0.1239 0.1204 0.1110 0.1059 0.1030 0.0972 0.0932 0.0879 0.0843 0.0798 0.0747 ]
e50 = [ -0.0454+0.1371j -0.1152+0.0833j -0.1406+0.0008j -0.1147-0.0808j -0.0437-0.1334j 0.0390-0.1365j 0.1136-0.0831j 0.1400-0.0012j 0.1132+0.0800j 0.0433+0.1341j -0.0437+0.1339j -0.1162+0.0834j -0
Noise subspace n50 is 50x49 (cols 2...50)
Results for \sigma^2 = 1.00 =====
M = 2
lambda = [ 10.5810 0.8961 ]
e2 = [ 0.5575-0.4141j 0.7196+0.0000j ]'
Noise subspace n2 is 2x1 (cols 2...2)

M = 10
lambda = [ 47.3936 1.4249 1.3014 1.1485 1.0737 0.9360 0.8115 0.7199 0.6214 0.4747 ]
e10 = [ 0.2515+0.1804j 0.1010+0.3135j -0.1034+0.3002j -0.2518+0.1787j -0.3142+0.0002j -0.2609-0.1696j -0.1197-0.2808j 0.0892-0.3071j 0.2675-0.1969j 0.3134+0.0000j ]'
Noise subspace n10 is 10x9 (cols 2...10)

M = 20
lambda = [ 93.0088 1.7820 1.6340 1.4734 1.3638 1.2583 1.1764 1.0453 0.9861 0.9155 0.8516 0.8161 0.7698 0.7137 0.6216 0.6071 0.5599 0.4340 0.3673 0.3212 ]
e20 = [ 0.1692+0.1419j 0.0566+0.2273j -0.0869+0.2071j -0.1872+0.1149j -0.2226-0.0145j -0.1765-0.1333j -0.0721-0.2049j 0.0788-0.2140j 0.1986-0.1266j 0.2217+0.0145j 0.1737+0.1491j 0.0512+0.2187j -0.0
Noise subspace n20 is 20x19 (cols 2...20)

M = 30
lambda = [ 138.4011 2.0982 1.9335 1.7697 1.7058 1.5529 1.4962 1.4075 1.2816 1.2038 1.1559 1.0454 1.0105 0.9714 0.9117 0.8753 0.8078 0.7602 0.7121 0.6553 0.5975 0.5485 0.5175 0.4853 0.4103 0.3889 0.3424 ]
e30 = [ 0.1425+0.1109j 0.0530+0.1842j -0.0647+0.1716j -0.1499+0.1003j -0.1824-0.0048j -0.1482-0.1038j -0.0653-0.1652j 0.0578-0.1772j 0.1586-0.1085j 0.1822+0.0054j 0.1465+0.1169j 0.0483+0.1775j -0.0
Noise subspace n30 is 30x29 (cols 2...30)

M = 50
lambda = [ 226.6922 2.4955 2.4664 2.3586 2.1366 2.0203 1.9552 1.8305 1.7835 1.7066 1.6020 1.4909 1.4084 1.3717 1.3172 1.2612 1.2262 1.1910 1.1406 1.0879 1.0380 1.0041 0.9681 0.9125 0.8665 0.8074 0.7543 ]
e50 = [ -0.1106+0.0877j -0.1495+0.0060j -0.1178-0.0808j -0.0486-0.1322j 0.0375-0.1374j 0.1061-0.0929j 0.1366-0.0187j 0.1235+0.0763j 0.0528+0.1404j -0.0380+0.1371j -0.1156+0.0894j -0.1438+0.0032j -0
Noise subspace n50 is 50x49 (cols 2...50)
```

Σε περιβάλλον με πολύ μικρό θόρυβο η κυρίαρχη ιδιοτιμή  $\lambda_1$  εμφανίζεται σαφώς διαχωρισμένη από τις υπόλοιπες, με τιμές που προσεγγίζουν τη θεωρητική  $M|A|^2 + \sigma^2$ . Οι ιδιοτιμές του θορύβου συγκεντρώνονται γύρω από την τιμή 0.1, με ελάχιστη διασπορά. Αυτό δημιουργεί ένα καθαρό φάσμα ιδιοτιμών, όπου η αναγνώριση του σήματος και η εκτίμηση τόσο της συχνότητας όσο και της διασποράς είναι πρακτικά άμεση και ακριβής.

Όταν η διασπορά του θορύβου αυξάνεται σε μέτρια επίπεδα η κορυφαία ιδιοτιμή παραμένει ξεχωριστή αλλά με μικρότερη απόσταση σχετικά με τις υπόλοιπες. Οι ιδιοτιμές του θορύβου παύουν να είναι απολύτως ομοιόμορφες και αποκτούν μια εμφανή διασπορά. Η ελαφρά αυτή «θολούρα» καθιστά λιγότερο ευδιάκριτα τα όρια του υποχώρου θορύβου.

Στο σενάριο με έντονο θόρυβο ο διαχωρισμός μεταξύ σήματος και θορύβου γίνεται ακόμα πιο δυσχερής. Η ιδιοτιμή  $\lambda_1$  μεγαλώνει κατά περίπου  $M|A|^2 + 1$  όμως οι υπόλοιπες ιδιοτιμές απλώνονται σε σημαντικό εύρος.

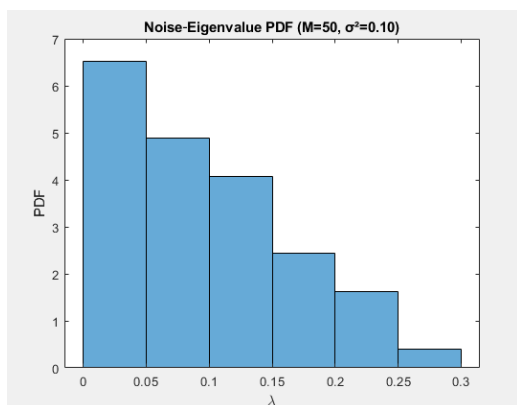
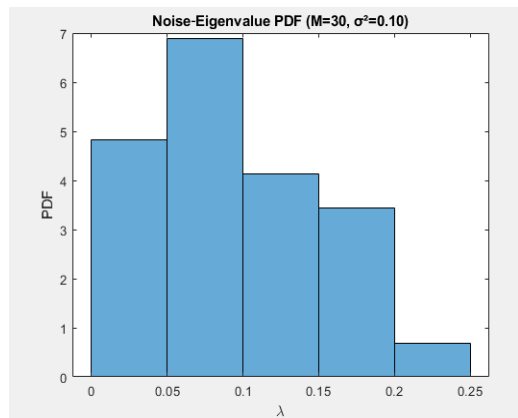
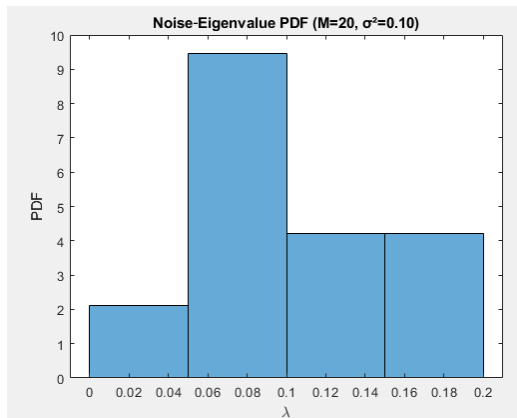
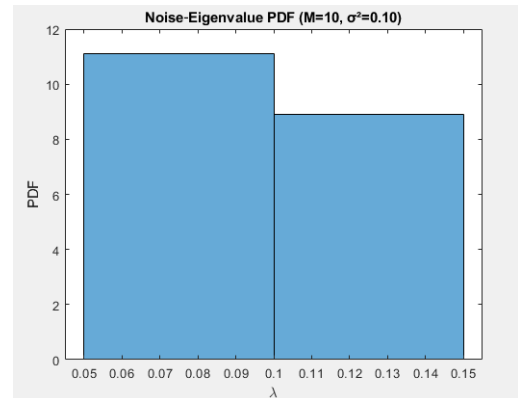
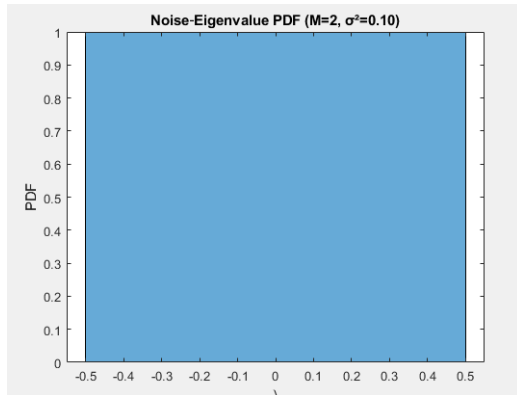
Συμπερασματικά, συγκρίνοντας άμεσα τα τρία επίπεδα θορύβου, διαπιστώνουμε ότι όσο αυξάνει η διασπορά του λευκού θορύβου, τόσο



μειώνεται η διαφορά μεταξύ της μέγιστης ιδιοτιμής και των ιδιοτιμών θορύβου.

## 8.2

Για θόρυβο 0.1 έχουμε:



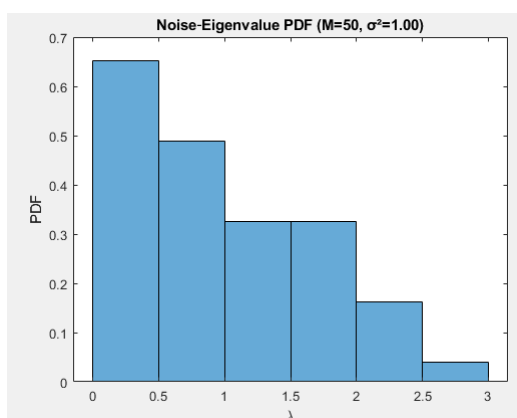
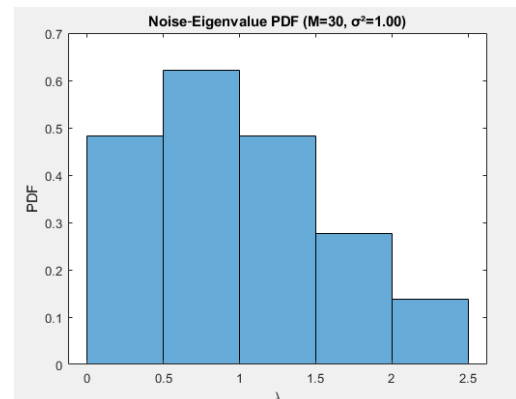
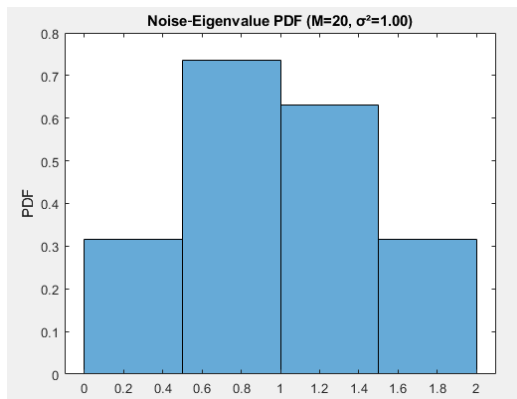
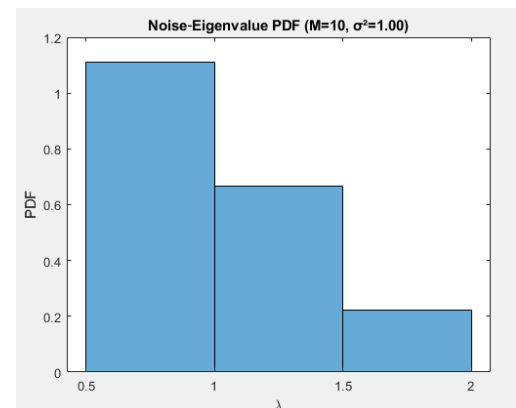
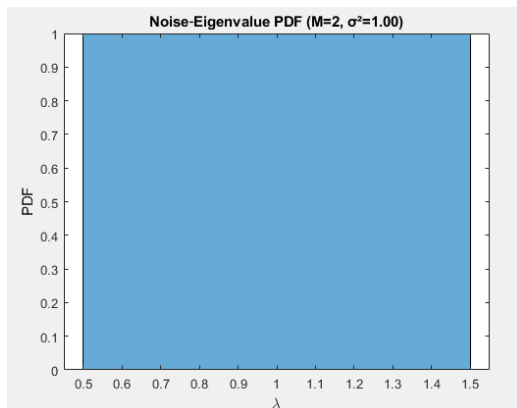

---

```

Noise σ² = 0.10 ===
M= 2:  est σ²_W = 0.1103,  1st cm = 0.00e+00,  2nd cm = 0.00e+00
M=10:  est σ²_W = 0.0980,  1st cm = 1.23e-17,  2nd cm = 7.90e-04
M=20:  est σ²_W = 0.0970,  1st cm = -1.50e-17,  2nd cm = 1.83e-03
M=30:  est σ²_W = 0.0967,  1st cm = -2.44e-17,  2nd cm = 2.90e-03
M=50:  est σ²_W = 0.0972,  1st cm = 1.42e-18,  2nd cm = 4.65e-03
Noise σ² = 0.10 ===

```

Για θόρυβο 1 έχουμε:



```
Noise σ² = 1.00 ===
M= 2:  est σ²_W = 1.0101, 1st cm = 0.00e+00, 2nd cm = 0.00e+00
M=10:  est σ²_W = 0.9908, 1st cm = -1.11e-16, 2nd cm = 1.01e-01
M=20:  est σ²_W = 1.0162, 1st cm = -1.75e-17, 2nd cm = 2.04e-01
M=30:  est σ²_W = 0.9952, 1st cm = -2.18e-16, 2nd cm = 2.91e-01
M=50:  est σ²_W = 1.0017, 1st cm = -1.95e-16, 2nd cm = 4.92e-01
```

Όταν η πραγματική διασπορά του θορύβου είναι μικρή (0.1), η εκτίμηση μέσω των ιδιοτιμών παρουσιάζει μεγαλύτερο σχετικό σφάλμα για πολύ μικρά μεγέθη M, π.χ. για M=2 η εκτίμηση είναι  $\approx 0.1103$  (σφάλμα  $\approx 10\%$ ), ενώ ήδη από M=10 το σφάλμα πέφτει στο  $\approx 2\%$  και σταθεροποιείται γύρω στο 3% για μεγαλύτερα M. Αντίθετα, όταν η διασπορά είναι μεγάλη (1.0), ακόμη και για M=2 η εκτίμηση είναι  $\approx 1.0101$  (σφάλμα μόλις 1%) και με  $M \geq 20$  το σφάλμα παραμένει κάτω από 2%.

Επιπλέον, στον χαμηλό θόρυβο, η δεύτερη κεντρική ροπή (η διασπορά των ιδιοτιμών γύρω από τη μέση τους) είναι πολύ μικρή. Οι ιδιοτιμές σχηματίζουν ένα στενό κλάσטר κοντά στο 0.1, με σχεδόν μηδενική πρώτη κεντρική ροπή. Σε υψηλό θόρυβο, η δεύτερη κεντρική ροπή είναι μεγαλύτερη, αντανakλώντας ευρύτερη κατανομή ιδιοτιμών γύρω στο 1.0, δηλαδή, η τυχαία μεταβλητότητα των ιδιοτιμών αυξάνεται με την ισχύ θορύβου.

### 8.3

Για θόρυβο 0.1 έχουμε:

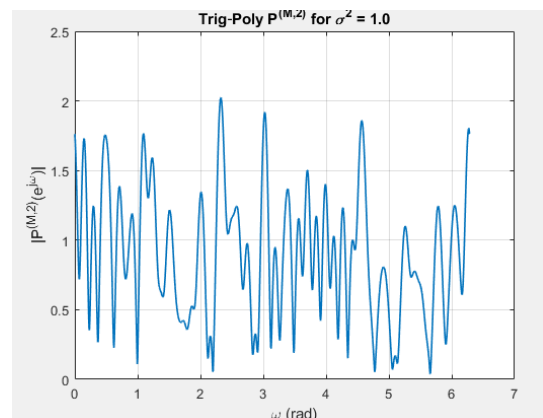
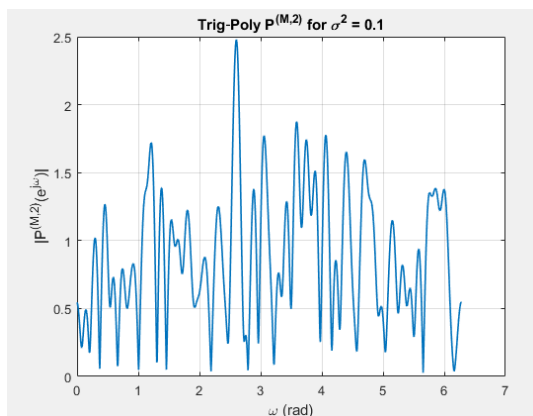
$$\lambda_{\max} = 50 * \frac{9}{2} + 0.1 = 225 + 0.1 = 225.1 \Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{225.1 - 0.1}{50}} = \sqrt{\frac{225}{50}} = 2.12$$

Για θόρυβο 1 έχουμε:

$$\lambda_{\max} = 50 * \frac{9}{2} + 1 = 225 + 1 = 226 \Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{226 - 1}{50}} = \sqrt{\frac{225}{50}} = 2.12$$

Βλέπουμε ότι η εκτίμηση είναι αμερόληπτη και δίνει πάλι ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα.

### 8.4



Βλέπουμε ότι με μικρό θόρυβο παρατηρείται μικρή θόλωση γύρω από τις κορυφές. Οι απότομες ακμές γίνονται πιο στρογγυλεμένες, ωστόσο η βασική χωρική δομή παραμένει αναγνωρίσιμη. Αυτό σημαίνει ότι σε σχετικά χαμηλό επίπεδο θορύβου η εκτίμηση της συχνότητας παραμένει αξιόπιστη, αν και ενδεχομένως με μικρή αύξηση του σφάλματος.

Όταν η διασπορά του θορύβου αυξάνεται οι διακυμάνσεις του φασματικού πολωνύμου γίνονται πολύ ισχυρότερες και οι κορυφές δεν διαχωρίζονται ευκρινώς από τον περίγυρο.

## 8.5

```
--- Estimates of \omega_1 for \sigma^2 = 0.10 ---
M      omegal_estimate
---      ---
2      -2.4949
10     -1.5563
20     1.5932
30     1.5856
40     1.5957
50     -1.5504

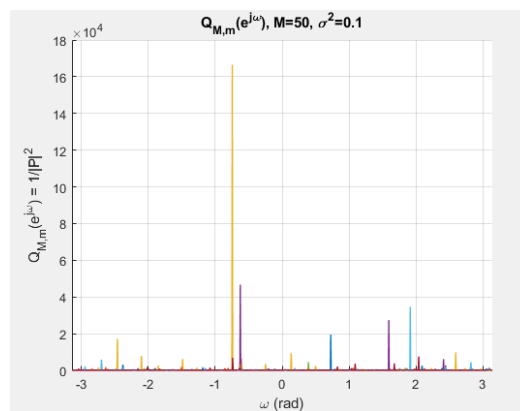
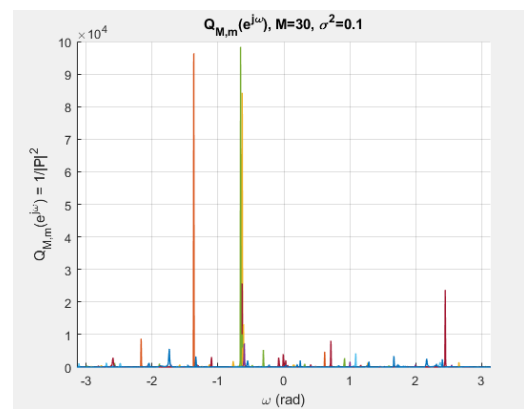
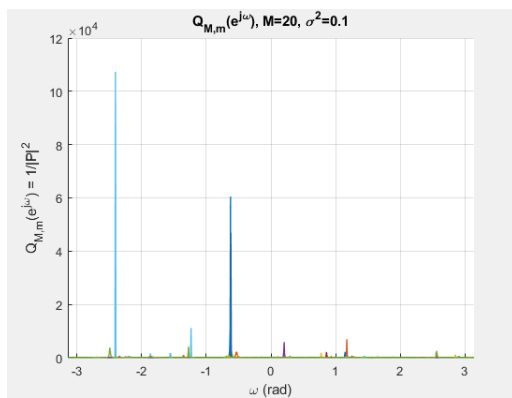
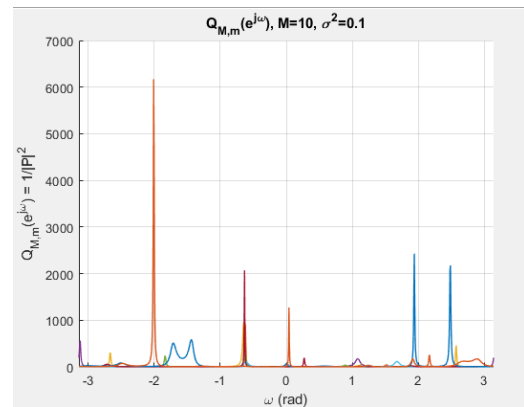
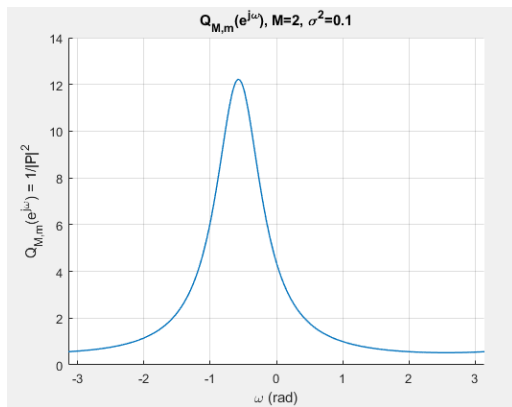
--- Estimates of \omega_1 for \sigma^2 = 1.00 ---
M      omegal_estimate
---      ---
2      -2.9639
10     1.8279
20     1.5534
30     -1.551
40     1.6214
50     1.5826
```

Βλέπουμε ότι στην περίπτωση ιδιαίτερα χαμηλού θορύβου ο αλγόριθμος εκτιμά τη γωνιακή συχνότητα  $\omega_1$  με ασφάλεια ακόμη και σε σχετικά μικρές διαστάσεις του πίνακα αυτοσυσχέτισης. Από το μέγεθος  $M = 10$  ήδη οι εκτιμήσεις συγκλίνουν σε τιμές πολύ κοντά στην αληθή τιμή, ενώ η διασπορά των επιλεγμένων ριζών μέσω της ομαδοποίησης  $k$ -means είναι εξαιρετικά μικρή.

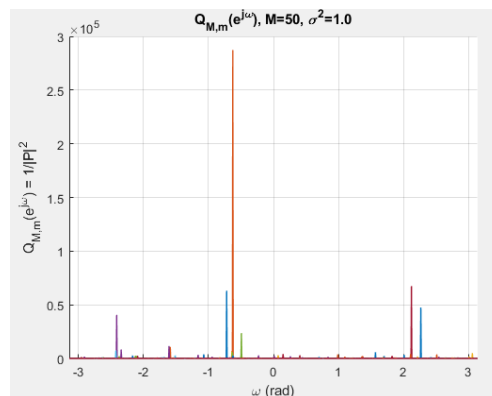
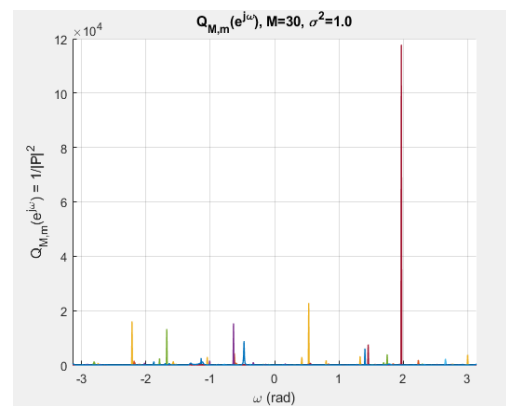
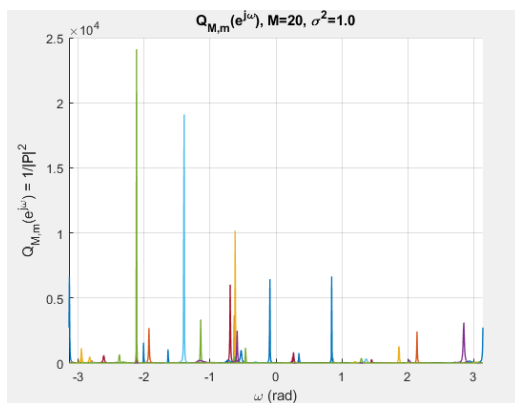
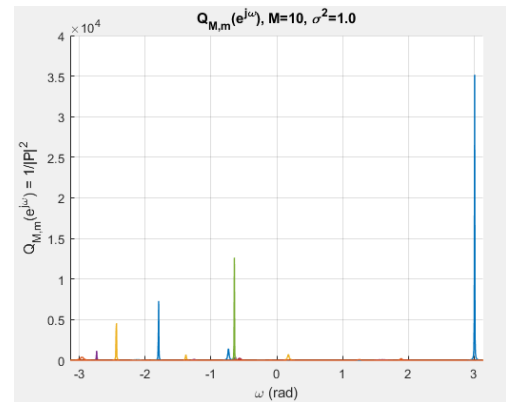
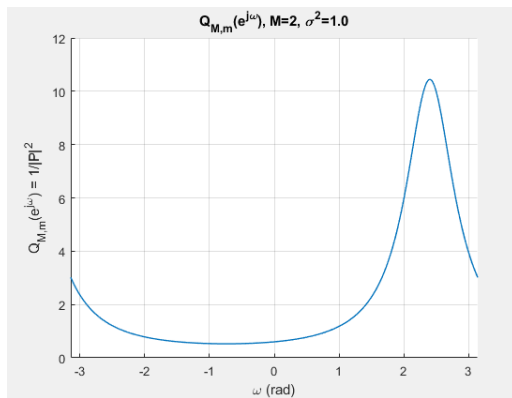
Όταν έχουμε όμως μεγάλη ισχύ θορύβου, η μέθοδος απαιτεί πολύ μεγαλύτερα παράθυρα παρατήρησης προκειμένου να αποδώσει έγκυρη εκτίμηση. Στα  $M \leq 10$  οι τιμές μεταβάλλονται μεταξύ θετικών και αρνητικών γωνιών, χωρίς κανένα χρήσιμο σήμα τάσης. Επιπλέον, η εσωτερική διασπορά των ριζών εντός του επιλεγμένου cluster γίνεται σχεδόν τριπλάσια σε σχέση με την περίπτωση μικρού θορύβου.

## 8.6

Για θόρυβο 0.1 έχουμε:



Για θόρυβο 1 έχουμε:



Με το μικρό θόρυβο η κύρια κορυφή στο  $\omega_0 = \pi/5$  εμφανίζεται πολύ ψηλή σε σχέση με το υπόλοιπο φάσμα. Το ψευδο-φάσμα είναι «αιχμηρό» και σαφές. Επίσης, οι δευτερεύουσες κορυφές (ψευδό-κορυφές) είναι πολύ χαμηλές και αραιές, δηλαδή το φάσμα είναι καθαρό.

Αντιθέτως, με υψηλό θόρυβο η κορυφή αυτή χαμηλώνει δραματικά ως προς το ύψος της, διότι ο θόρυβος γεμίζει τις ίδιες ιδιοκατευθύνσεις. Επιπλέον,

παρατηρούμε ένα γενικό «θόλωμα» του φάσματος, με πολλαπλές μικρές κορυφές διάσπαρτες ανάμεσα σε  $-\pi$  και  $+\pi$ .

## 8.7

Ίδια συμπεράσματα με παραπάνω.

## 8.8

Ίδια συμπεράσματα με παραπάνω.

# Στοχαστική Διαδικασία Ρ-οστής Τάξης

## Διαδικασία

1)

Σε μια στοχαστική διαδικασία Ρ-οστής τάξης, το μητρώο αυτοσυσχέτισης ορίζεται ως  $\mathbf{R}_{xx} = \sum_{i=1}^P |A_i|^2 \mathbf{e}_M(\omega_i) \mathbf{e}_M(\omega_i)^H + \sigma_W^2 \mathbf{I}_M$  όπου τα  $\mathbf{e}_M(\omega_i)$  είναι τα διανύσματα φανταστικών εκθετικών και  $\sigma_W^2$  η διασπορά του λευκού θορύβου. Το μητρώο αυτοσυσχέτισης είναι θετικά ορισμένο και ερμητιανό, επομένως έχει πλήρη φάσμα ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων.

Ο υπόχωρος σήματος ορίζεται ως ο χώρος που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις Ρ μεγαλύτερες ιδιοτιμές του  $\mathbf{R}_{xx}$ . Αν γράψουμε  $\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^H$ ,  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_M]$ ,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_M)$  τότε **Signal Subspace** =  $\text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$ . Αυτός ο υποχώρος συγκεντρώνει αποκλειστικά την ενέργεια των φανταστικών εκθετικών συνιστωσών, αφού οι αντίστοιχες ιδιοτιμές  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  υπερβαίνουν σημαντικά τη διασπορά θορύβου.

Ο Υπόχωρος Θορύβου ορίζεται ως το συμπληρωματικό ορθοκανονικό υποχώριο των υπολοίπων  $M-P$  ιδιοδιανυσμάτων:

$$\text{Noise Subspace} = \text{span}\{\mathbf{u}_{p+1}, \mathbf{u}_{p+2}, \dots, \mathbf{u}_M\}$$

για τα οποία ισχύει  $\lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \dots = \lambda_M = \sigma_W^2$  και κάθε διάνυσμα του θορύβου είναι ορθογώνιο σε κάθε διάνυσμα σήματος.

2)

Οι τυχαίες μεταβλητές  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, P$  στη σχέση που περιγράφει τη στοχαστική διαδικασία πολλαπλών εκθετικών συνιστωσών λειτουργούν ως παράμετροι τυχαίας αρχικής φάσης κάθε ημιτονοειδούς συνιστώσας. Με την κατανομή τους ομοιόμορφα στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ , εξασφαλίζουν ότι καμία συνιστώσα δεν ξεκινά από το ίδιο σημείο της περιόδου της. Αυτό κάνει τη συμπεριφορά κάθε πραγματοποίησης του σήματος στοχαστική, δηλαδή διαφορετική σε κάθε εκτέλεση, ενώ διατηρεί αναλλοίωτες τις ενέργειες και τις συχνότητες των συνιστωσών. Η στοχαστική αυτή φάση είναι απαραίτητη ώστε το σήμα να είναι στατιστικά στάσιμο, με μηδενική μέση τιμή για τη συνιστώσα  $S(n)$  και να ισχύει ο πίνακας αυτοσυσχέτισης.

Παράλληλα, η ανεξαρτησία των  $\phi_i$  εξασφαλίζει ότι οι cross συνιστώσες εξαφανίζονται στο μέσο όρο. Έτσι προκύπτει ότι τα διανύσματα  $\mathbf{e}$  είναι πρακτικά ορθογώνια μεταξύ τους κατά μέσο όρο και ότι οι υποχώροι σήματος και θορύβου διαχωρίζονται καθαρά μέσω της φασματικής ανάλυσης ιδιοτιμών.

3)

Αν οι  $\phi_i$  δεν ήταν ασυσχέτιστες, η απλοποίηση που μας επιτρέπει να γράψουμε τον πίνακα αυτοσυσχέτισης ως  $\mathbf{R}_{xx} = \sum_{i=1}^P |\mathbf{A}_i|^2 \mathbf{e}_M(\omega_i) \mathbf{e}_M(\omega_i)^H + \sigma_W^2 \mathbf{I}$  δεν θα ίσχυε. Συγκεκριμένα, στον υπολογισμό  $\mathbf{r}_{xx}(\mathbf{k}) = \mathbf{E}\{\mathbf{X}(\mathbf{n} + \mathbf{k})\mathbf{X}^*(\mathbf{n})\}$  εκτός από τα σαφή αυτοσυσχετιστά μέρη θα εμφανίζονταν και επιπλέον όροι.

Ως αποτέλεσμα, το  $\mathbf{R}_{xx}$  χάνει την ιδιότητα Toeplitz (σταθερές τιμές κατά διαγωνίους) και δεν μπορεί να αναπαρασταθεί πια ως άθροισμα  $P$  ρητών, διαγώνιων κατά rank-1 πινάκων. Ο πίνακας αυτοσυσχέτισης αποκτά off-diagonal συνιστώσες που εξαρτώνται από διαφορές στη φάση.

Μία άμεση συνέπεια είναι ότι η διαχωρισιμότητα σε υποχώρο σήματος και υποχώρο θορύβου παύει να είναι ξεκάθαρη. Οι  $P$  μεγαλύτερες ιδιοτιμές δεν αντιστοιχούν πλέον σε καθαρές συνιστώσες συχνότητας, ούτε οι μικρότερες αντιστοιχούν σε θόρυβο. Επιπλέον, χάνεται η ιδιότητα wide sense stationary.

4)

Για να μπορέσουμε να εξαγάγουμε με μοναδικό και σταθερό τρόπο τις  $P$  συχνότητες  $\omega_i$  πρέπει ο πίνακας αυτός να έχει διαστάσεις τουλάχιστον  $(P+1) \times (P+1)$ . Αντίθετα, για  $M \leq P$ , ο πίνακας δεν διαθέτει αρκετούς διανυσματικούς υποχώρους. Συνεπώς, το ελάχιστο  $M$  που επιτρέπει τον υπολογισμό όλων των αναγκαίων ποσοτήτων είναι  $M = P+1$ .



5)

Για να είναι ένα διάνυσμα ιδιοδιάνυσμα του πίνακα αυτοσυσχέτισης πρέπει ο πίνακας και ο θόρυβος να είναι ταυτόχρονα διαγωνοποιήσιμοι από την ίδια βάση. Αυτό συμβαίνει μόνον όταν οι στήλες του διανύσματος συμπίπτουν με τις στήλες του DFT, δηλαδή όταν είναι ακριβές ακέραιο πολλαπλάσιο της βασικής γωνίας  $2\pi/M$ .

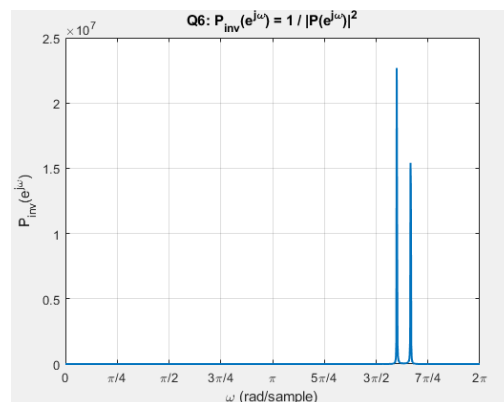
6)

Υπολογίζουμε αρχικά τις ζητούμενες ποσότητες σε matlab και τα αποτελέσματα συμφωνούν με την θεωρία.

```
White-noise variance: sigma2_w = 1.0000
Signal freq. ω1 = 5.2359 rad/sample
Signal freq. ω2 = 5.0265 rad/sample
Amplitudes: |A1| = 1.4146, |A2| = 1.7318
```

Προχωρώντας, θα επιβεβαιώσουμε ότι οι επιθυμητές συχνότητες μπορούν να προκύψουν από τον υπολογισμό των ριζών του παραπάνω πολυωνύμου. Στη θεωρία, από την ιδιοανάλυση του πίνακα αυτοσυσχέτισης προκύπτει ότι το μοναδικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στη μικρότερη ιδιοτιμή ορίζει το υποχώρο του θορύβου  $u_3$ . Αντιθέτως, τα διανύσματα σήματος ανήκουν στον υποχώρο του σήματος και άρα είναι ορθογώνια στο  $u_3$ . Αν ορίσουμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο τότε η ορθογωνιότητα γράφεται ισοδύναμα ως  $P(e^{-j\omega_i})$ .

Τέλος, σχεδιάζοντας το πολυώνυμο βλέπουμε ότι πράγματι τα  $\omega$  που βρήκαμε είναι οι ρίζες του.



7)

Η απάντηση είναι η ίδια που έχει δοθεί παραπάνω για στοχαστικές πρώτης τάξης.

8)

α)

Αλλάζουν τα αποτελέσματα όπως προβλέπει η θεωρία για ρ-τάξης στοχαστικά, δηλαδή θα έχουμε πολλαπλές ακμές αντί για 1 στα διαγράμματα. Ο κώδικας περιλαμβάνει όλη την διαδικασία με τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

β)

	Root	MUSIC	EV
Original	0.65633	0.65548	0.67683
Wide	0.62806	0.612	0.64513
Close	0.64617	0.6632	0.65173

Στην πρώτη περίπτωση, με τις αρχικές συχνότητες, οι τρεις τεχνικές απέδωσαν σχεδόν ισοδύναμο σφάλμα ( $RMSE \approx 0.65$ ). Αυτό δείχνει ότι όταν οι συχνότητες βρίσκονται σε διάστημα που δεν είναι ούτε πολύ κοντινό ούτε πολύ απομακρυσμένο, όλες οι μέθοδοι μπορούν να ξεχωρίσουν απρόσκοπτα τις εξαρτήσεις του σήματος από τον θόρυβο και η απλότητα της Root δεν υστερεί σε ακρίβεια έναντι των πιο σύνθετων αλγορίθμων.

Όταν οι συχνότητες τοποθετήθηκαν πολύ πιο «απλωμένες», δηλαδή με μεγαλύτερα διαστήματα μεταξύ τους, το σφάλμα όλων των μεθόδων μειώθηκε ελαφρώς ( $RMSE \approx 0.62$  για Root, MUSIC και  $\approx 0.645$  για EV).

Στην πιο δύσκολη περίπτωση Close, όπου οι γωνιακές συχνότητες ήταν πολύ κοντά ( $0.45\pi$ – $0.53\pi$ ), όλες οι μέθοδοι παρουσίασαν αύξηση σφάλματος ( $RMSE \approx 0.65$ – $0.66$ ). Ωστόσο η MUSIC έδειξε την καλύτερη αντοχή, με ελάχιστη αύξηση του σφάλματος σε σχέση με την περίπτωση Original, ενώ η Root και το EV υπέστησαν λίγο μεγαλύτερη υποβάθμιση. Αυτό υπογραμμίζει την ικανότητα της MUSIC να διατηρεί ευκρινείς τις κορυφές όταν οι συνιστώσες είναι στενά τοποθετημένες.

Συμπερασματικά, για σήματα με καλά διαχωρισμένες συχνότητες μπορεί κανείς να επιλέξει την ταχύτερη και απλούστερη Root μέθοδο χωρίς σημαντική απώλεια ακρίβειας, ενώ όταν οι συχνότητες είναι κοντινές, οι αλγόριθμοι υποχώρου προσφέρουν σαφώς καλύτερη αντοχή και ακριβέστερη εκτίμηση των πραγματικών γωνιακών συχνοτήτων.