

# Магистерская диссертация

## Моделирование OFDM модема.

### Введение

В современных системах связи наибольшей актуальностью обладает тема борьбы с межсимвольной интерференцией. Начиная с 1G заканчивая 5G консорциум 3GPP предлагает все новые и новые варианты борьбы с этим явлением, начиная с простого внедрения эквалайзеров, помехоустойчивых кодеров, до применения кардинально иных технологий, таких как CDMA, применяемая в 3G и OFDM, применяемая в 4G LTE и планируемой для развертывания технологий и сетей пятого поколения.

### Вывод OFDM схемы

В OFDM применяются фазовые методы манипуляции множества QAM/PSK. Пусть на вход системы QAM/PSK манипулятора поступают случайные информационные данные вида  $d \in D$ , где  $D$  – представляет собой множество  $D \in \{0, 1, 2, \dots, U\}$ . Где  $U$  - число точек созвездия. В современных системах связи применяется техника пульс-шейпинг на выходе IQ-мапперов. Пульс-шейпинг – это применение фильтра, ИХ которого обладает формой передаваемого в канал символа. Пусть в данном случае  $g(t) = \begin{cases} 1, (0 < t \leq T_s) \\ 0, (t \leq 0, t > T_s) \end{cases}$  обладает прямоугольной формой. Структурная схема QAM/PSK модулятора представляет собой следующий вид:

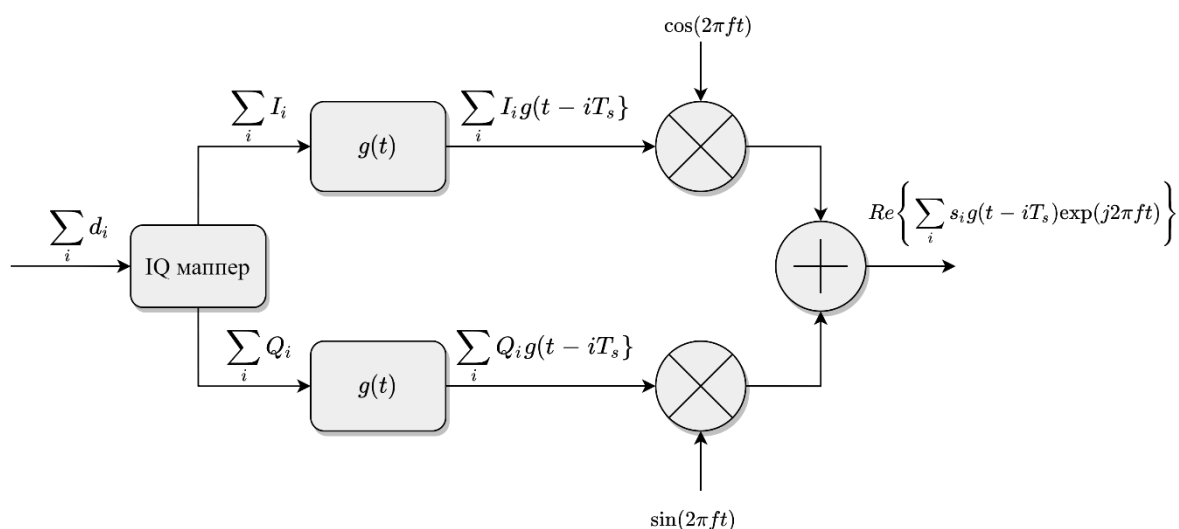


Рисунок 1 - Обобщенная структурная схема IQ QAM/PSK модулятора

Где

$i = 0, 1, 2, \dots, \infty$  - индексы символов.

$s_i = I_i + jQ_i$  -  $i$ -ый комплексный символ.

Пусть у нас установлен банк таких модуляторов, где частоты генераторов формируются с определенным шагом. Проиндексируем эти частоты  $f_k$  как  $k = 0, 1, \dots, K-1$ . Разность частот организована так, чтобы обеспечить взаимную некоррелированность сигналов на разных частотах:

$$\sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=0}^{K-1} F \{s_k g(t - iT_s) \exp \{j2\pi f_k t\}\} \cdot F \{s_n g(t - iT_s) \exp \{j2\pi f_n t\}\} = 0, n \neq k \quad .$$

Это позволяет сигналам не интерферировать.

Найдем минимальное расстояние между пиками поднесущих для сигналов со случайной фазой  $\varphi$ . Это определяется с помощью скалярного произведения усеченных во времени тональных сигналов длительностью  $T_s$ .

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_s} \cos(2\pi f_1 t + \varphi) \cos(2\pi f_2 t) dt = \\ & = \cos(\varphi) \int_0^{T_s} \cos(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t) dt - \sin(\varphi) \int_0^{T_s} \sin(2\pi f_1 t) \cos(2\pi f_2 t) dt = \\ & = \frac{\cos(\varphi)}{2} \left[ \int_0^{T_s} \cos(2\pi [f_1 + f_2] t) dt + \int_0^{T_s} \cos(2\pi [f_1 - f_2] t) dt \right] - \\ & - \frac{\sin(\varphi)}{2} \left[ \int_0^{T_s} \sin(2\pi [f_1 + f_2] t) dt + \int_0^{T_s} \sin(2\pi [f_1 - f_2] t) dt \right] = \\ & = \frac{\cos(\varphi)}{2} \left[ \frac{\sin(2\pi [f_1 + f_2] T_s)}{2\pi [f_1 + f_2]} + \frac{\sin(2\pi [f_1 - f_2] T_s)}{2\pi [f_1 - f_2]} \right] + \\ & + \frac{\sin(\varphi)}{2} \left[ \frac{\cos(2\pi [f_1 + f_2] T_s) - 1}{2\pi [f_1 + f_2]} + \frac{\cos(2\pi [f_1 - f_2] T_s) - 1}{2\pi [f_1 - f_2]} \right] = 0 \end{aligned}$$

При достаточно больших  $f_1 + f_2$  уравнения  $\frac{\sin(2\pi [f_1 + f_2] T_s)}{2\pi [f_1 + f_2]}$  и  $\frac{\cos(2\pi [f_1 + f_2] T_s) - 1}{2\pi [f_1 + f_2]}$  примерно равны нулю. Поскольку тригонометрические функции ограничены сверху и снизу, то в пределе они равны нулю. Таким образом имеем следующее:

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos(\varphi)}{2} \left[ \frac{\sin(2\pi[f_1 + f_2]T_s)}{2\pi[f_1 + f_2]} + \frac{\sin(2\pi[f_1 - f_2]T_s)}{2\pi[f_1 - f_2]} \right] + \\
& + \frac{\sin(\varphi)}{2} \left[ \frac{\cos(2\pi[f_1 + f_2]T_s) - 1}{2\pi[f_1 + f_2]} + \frac{\cos(2\pi[f_1 - f_2]T_s) - 1}{2\pi[f_1 - f_2]} \right] = \\
& = \frac{\cos(\varphi)}{2} \left[ + \frac{\sin(2\pi[f_1 - f_2]T_s)}{2\pi[f_1 - f_2]} \right] + \frac{\sin(\varphi)}{2} \left[ \frac{\cos(2\pi[f_1 - f_2]T_s) - 1}{2\pi[f_1 - f_2]} \right] \approx 0
\end{aligned}$$

Теперь определим при каких  $f_1 - f_2$  функция равна нулю.

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos(\varphi)}{2} \left[ \frac{\sin(2\pi[f_1 - f_2]T_s)}{2\pi[f_1 - f_2]} \right] + \frac{\sin(\varphi)}{2} \left[ \frac{\cos(2\pi[f_1 - f_2]T_s) - 1}{2\pi[f_1 - f_2]} \right] \approx 0 \\
& \cos(\varphi) \sin(2\pi[f_1 - f_2]T_s) + \sin(\varphi) [\cos(2\pi[f_1 - f_2]T_s) - 1] \approx 0
\end{aligned}$$

Для произвольной фазы уравнение равно нулю при

1.  $\sin(2\pi[f_1 - f_2]T_s) = 0$
2.  $\cos(2\pi[f_1 - f_2]T_s) = 1$

Это достигается при

1.  $2\pi[f_1 - f_2]T_s = \pi n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
2.  $2\pi[f_1 - f_2]T_s = 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Используя второе уравнение получим, что  $f_1 - f_2 = k / T_s$ . Таким образом  $\min(f_1 - f_2)$  достигается при  $k=1$ . Поэтому шаг между поднесущими равен  $\Delta f = 1 / T_s$

В результате получаем банк таких модуляторов с ортогональными сигналами, шаг между которыми  $\Delta f = 1 / T_s$ , который соответствует уравнению:

$$s(t) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{N} \sum_i \sum_{k=0}^{N-1} s_{ik} g(t - iT_s) \exp[j2\pi(f_0 + f_k)t] \right\}$$

1. Рассмотрим комплексную часть этого уравнения:

$$s(t) = \frac{1}{N} \sum_i \sum_{k=0}^{N-1} s_{ik} g(t - iT_s) \exp[j2\pi(f_0 + f_k)t]$$

2. Проведем дискретизацию в терминах комплексной огибающей:

$$s(nT) = \frac{1}{N} \sum_i \sum_{k=0}^{N-1} s_{ik} g(t - iT_s) \exp \left[ j2\pi \frac{k}{T_s} nT \right]$$

Если период дискретизации равен периоду символа, деленного на число поднесущих, т.е.  $T = T_s / N$  в результате получим обратное дискретное преобразование Фурье:

$$3. \quad s(nT) = \frac{1}{N} \sum_i \sum_{k=0}^{N-1} s_{ik} g\left(t - i \frac{T_s}{N}\right) \exp\left[j2\pi \frac{k}{T_s} n \frac{T_s}{N}\right] = \frac{1}{N} \sum_i \sum_{k=0}^{N-1} s_{ik} g(t - iT) \exp\left[\frac{2\pi j}{N} kn\right]$$

Так как теперь наш пульс-шейпер представляет собой просто однокоэффициентный фильтр или просто усилитель с  $KV=1$ , то ИХ формирующего фильтра можно заменить на единицу:

$$4. \quad s(nT) = \frac{1}{N} \sum_i \sum_{k=0}^{N-1} s_{ik} \exp\left[\frac{2\pi j}{N} kn\right]$$

Теперь вернем смещение на несущую результата ОБПФ и выполним переход от цифрового сигнала к аналоговому:

$$5. \quad s(t) = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{N} \sum_i \sum_{k=0}^{N-1} s_{ik} \exp\left[\frac{2\pi j}{N} kn\right] \exp[j2\pi f_0 t]\right\}$$

Отобразим результирующую структурную схему OFDM модулятора:

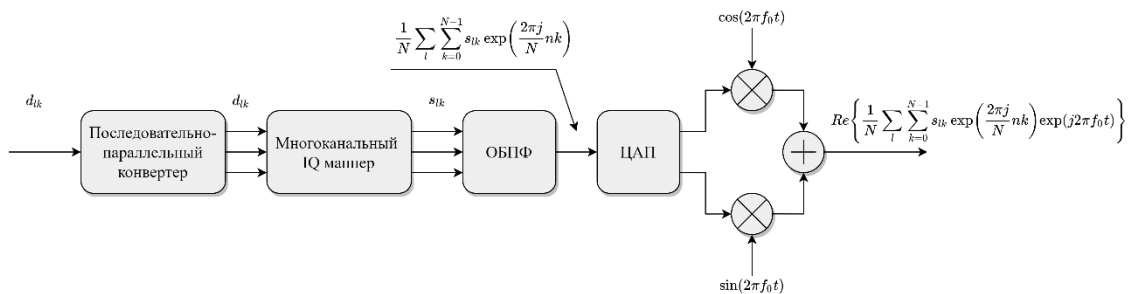


Рисунок 2 - Структурная схема OFDM модулятора

## Преимущества и недостатки OFDM

### 1. Устойчивость к частотно-селективным замираниям.

Частотно-селективным замиранием характеризуется такой канал, что его полоса задерживания АЧХ уже, чем эффективная ширина спектра сигнала. Приведем сравнительную характеристику узкополосной и широкополосной сигналов с одинаковой полосой.

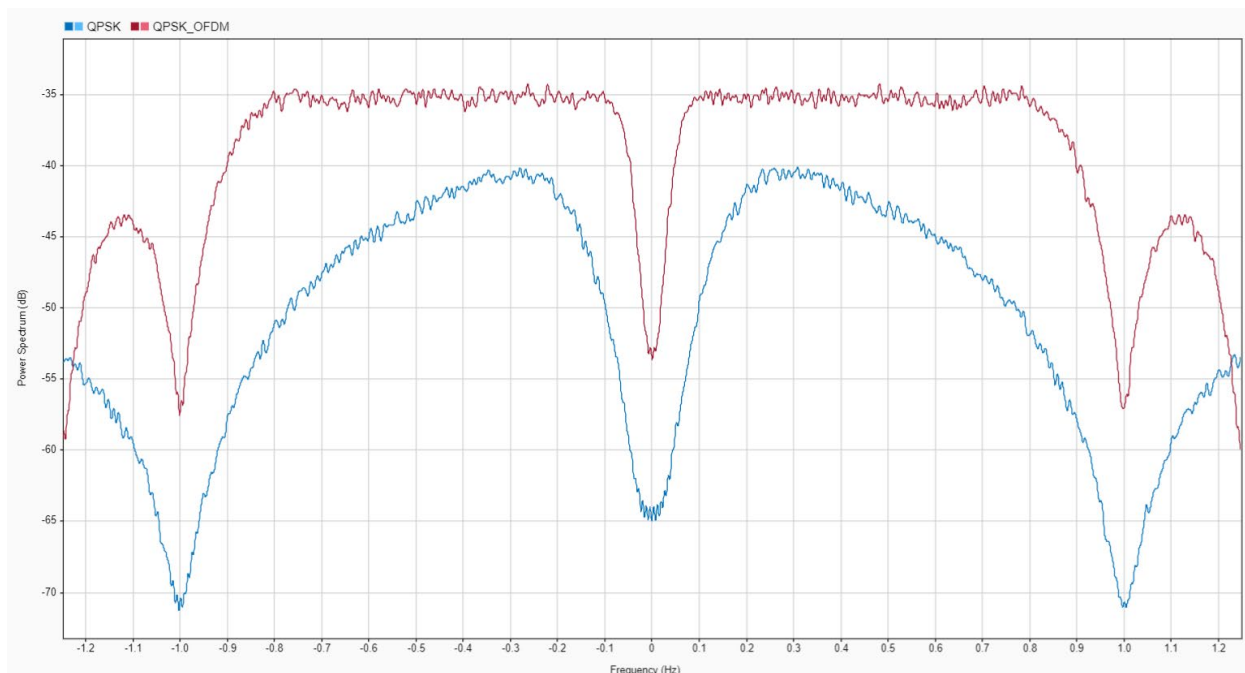


Рисунок 3 - Продавливание центра спектральной плотности огибающей сигнала каналом с частотно-селективным замиранием

Отображая сигнал в терминах частота-время приведем пример, показывающий преимущества применения OFDM в частотно-селективных каналах

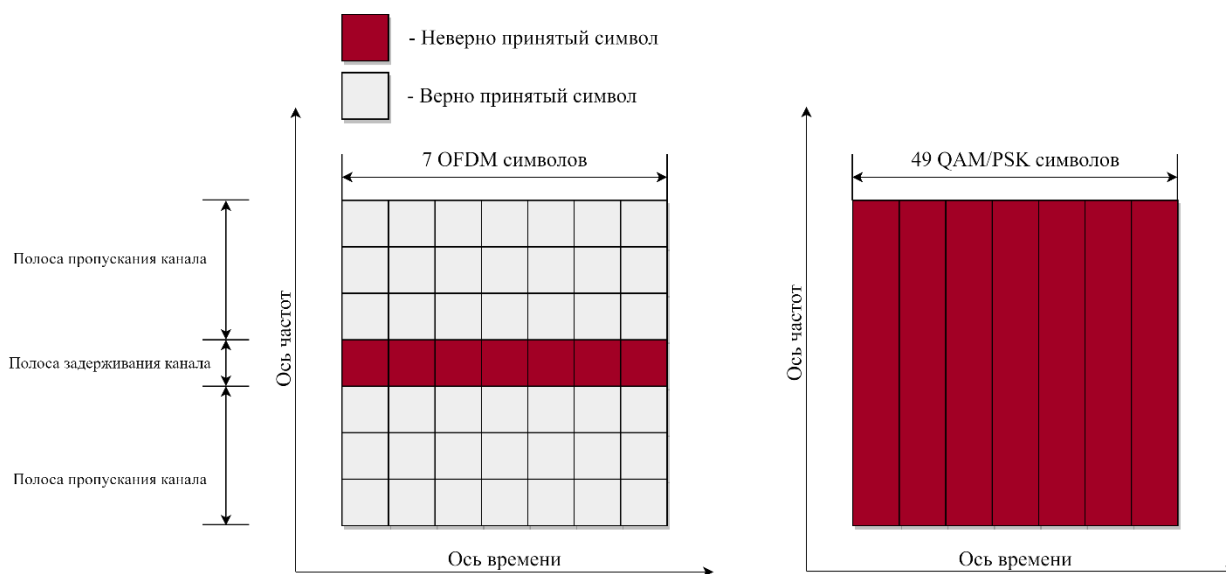


Рисунок 4 - Частотно-временная сетка OFDM и QAM/PSK манипулированных сигналов

Рассматривая узкополосный канал, такой что, приводит к 100% ошибкам приема для одноканальных схем модуляции, мы видим, что с такой же пропускной способностью, OFDM сигнал может быть полностью восстановлен с применением помехоустойчивого кодирования, исправляющего одну ошибку на OFDM символ.

## Применение циклического префикса для OFDM систем

Характер интерференционных искажений во времени определяется интенсивностью многопутевого профиля. Интенсивность многопутевого профиля – это функция  $\phi_c(\tau)$  показывающая зависимость средней энергии сигнала пришедшего на вход приемника от задержки относительно компоненты с наибольшей мощностью. Прокис в своей работе иллюстрирует пример – экспоненциально-образную функцию  $\phi_c(\tau)$ .

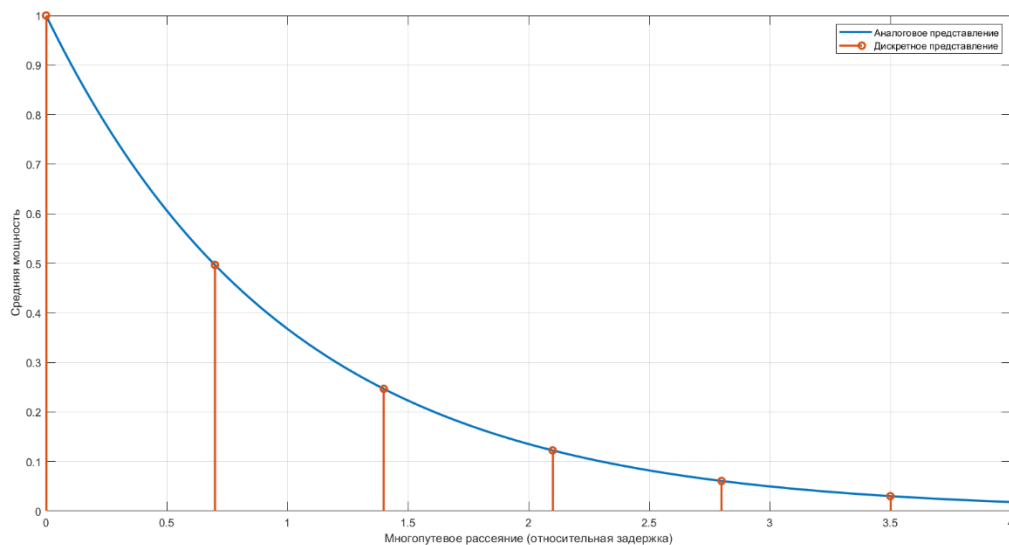


Рисунок 5 - Пример профиля многопутевого рассеяния

1. Многопутевым рассеянием называется область графика многопутевой интенсивности такой, что существенно больше нуля.
2. Поскольку сигнал передатчика дискретный, а стробированный выход согласованного фильтра тоже сигнал дискретного времени, то канал связи можно представить в виде набора коэффициентов.
3. Множество этих коэффициентов показывают статистически усредненные энергию копий переданного сигнала. Допустим на графике выше указано 6 копий сигнала.

Очевидно, что задержанные символы OFDM копий будут суммироваться с копией, обладающей наибольшей энергией. Для решения этой проблемы придумали внесение циклического префикса (далее ЦП). Добавление циклического префикса - это процедура вставки конца символа в начало. ЦП подбирается таким образом, чтобы его длительность была больше чем многопутевое рассеяние.

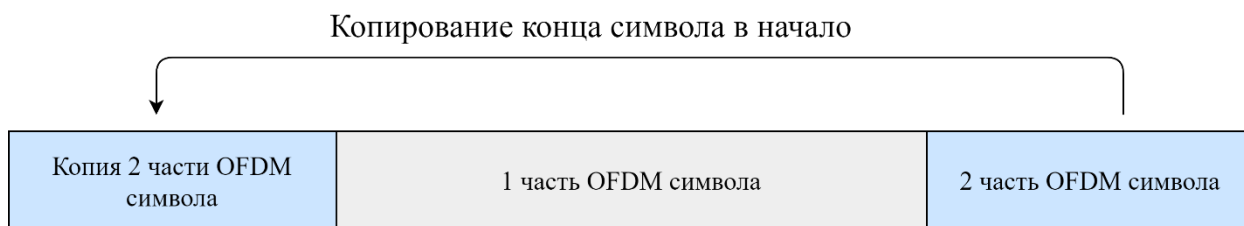


Рисунок 6 - Вставка циклического префикса

Приведем пример для случая, когда вследствие МСИ на приемник приходят три копии сигнала: одна основная и две задержанные. Но МСИ между символами не возникает



Рисунок 7 - Предотвращение МСИ вследствие вставки циклического префикса

### Метод оценивания частотного сдвига

В реальных системах связи, когда приемник включен, нет никакой информации о том, пришел ли сигнал и когда нужно начать детектирование. В статистической радиотехнике это относится к задаче обнаружения полностью известного сигнала. В узкополосных системах связи используются псевдослучайные последовательности, которые обладают хорошими автокорреляционными свойствами, а на приемной стороне устанавливается согласованный с этой последовательностью фильтр за схемой символьной синхронизации. К недостаткам таких схем можно отнести слабую устойчивости к интерференции, частотному и фазовому сдвигу. Использование некогерентных корреляторов исключает влияние случайной начальной фазы, но для этого требуется еще один СФ, что ведет к большим вычислительным затратам. С учетом, той информации, что и в OFDM системах можно решать задачу обнаружения аналогичным образом, например, как это делается в LTE, с помощью полифазных последовательностей, отметим, что в 1997 году Шмидл и Кокс опубликовали статью, в которой рассказывают об алгоритме обнаружения старта пакета по преамбуле, методом автокорреляции. В статье предложена структура преамбулы представленная на рисунке

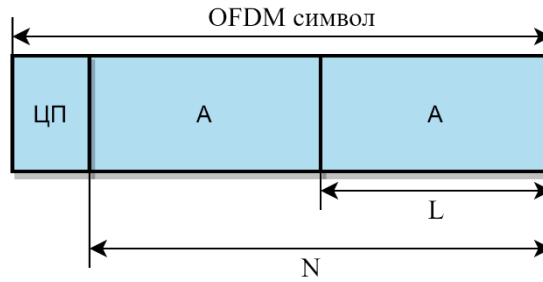


Рисунок 8 - Организация преамбулы Шмидла и Кокса

Таким образом Шмидл и Кокс предложили метод автокорреляции, в отличие от применения ВКФ с применением согласованных фильтров. Отсюда следует, что проблема снижения уровня пика ВКФ, вследствие искажения входного сигнала решена. Более того их схема имеет характеристики низкой вычислительной сложности, даже при учете того, что в статье также эта схема модифицируется до алгоритма гибридной оценки частоты и обнаружения преамбулы. Очевидно, что такой алгоритм представляет собой типовой коррелятор, но поскольку он выполняет задачу синхронизации, интегрирование ведется без сброса и АКФ представляет собой симметричную функцию, которая формируется путем установки фильтра, скользящего среднего. Отметим также, что от умножителей такого ФНЧ можно избавиться, с применением следующих преобразований.

$$P(d) = \sum_{m=0}^{L-1} \overline{r(d+m)}(d+m+L)$$

Формула 1 - Уравнение Шмидла и Кокса

Где  $N$  – Длина ОБПФ,  $L = N/2$  - половина длины ОБПФ или длина одной из двух копий последовательности. В первую очередь необходимо отметить следующее: В формуле 1 представлено некаузальное или физически нереализуемое уравнение. Чтобы сделать его каузальным, внесем искусственную задержку на  $2L$ . В результате получим следующее:

$$P(d) = \sum_{m=0}^{L-1} \overline{r(d+m-2L)}(d+m-L)$$

Формула 2 - Каузальное уравнение Шмидла и Кокса

Если мы разложим сумму представленного уравнения, то получим следующее:

$$P(d) = \sum_{m=0}^{L-1} \overline{r(d+m-2L)}(d+m-L)$$

$$P(d) = \overline{r(d-2L)}(d-L) + \overline{r(d+1-2L)}(d+1-L) + \dots + \overline{r(d+L-2-2L)}(d+L-2-L) + \overline{r(d+L-1-2L)}(d+L-1-L)$$

$$P(d+1) = \overline{r(d+1-2L)}(d+1-L) + \overline{r(d+2-2L)}(d+2-L) + \dots + \overline{r(d+L-1-2L)}(d+L-1-L) + \overline{r(d+L-2L)}(d+L-L)$$

$$P(d) = \overline{r(d-2L)}(d-L) + \overline{r(d+1-2L)}(d+1-L) + \dots + \overline{r(d-2-L)}(d-2) + \overline{r(d-1-L)}(d-1)$$

$$P(d+1) = \overline{r(d+1-2L)}(d+1-L) + \overline{r(d+2-2L)}(d+2-L) + \dots + \overline{r(d-1-L)}(d-1) + \overline{r(d-L)}(d)$$

В результате можно обнаружить рекурсивную связи вида:



$$P(d+1) = P(d) - \overline{r(d-2L)}(d-L) + \overline{r(d-L)}(d)$$

### Формула 3 - Рекурсивное уравнение ненормированной оценки Шмидла и Кокса

Постольку поскольку амплитуда входного сигнала можно флуктуировать, что для порогового устройства является катастрофическим, необходимо использовать схему автоматической регулировки усиления с быстрыми переходными процессами. В данном случае используется нормирование по энергии входного сигнала. А метрика представляет собой следующий вид:

$$M(d) = \frac{|P(d)|^2}{R^2(d)}$$

### Формула 4 - Метрика Шмидла и Кокса

$$R(d) = \sum_{m=0}^{L-1} |r(d+m+L)|^2$$

### Формула 5 - Энергия входного сигнала

По аналогии, сделаем уравнение каузальным, внеся ту же задержку 2L и получим рекурсивную структуру.

$$R(d) = \sum_{m=0}^{L-1} |r(d+m-L)|^2$$

### Формула 6 - Каузальное уравнение энергии входного сигнала

$$R(d) = \sum_{m=0}^{L-1} |r(d+m-L)|^2$$

$$R(d) = |r(d-L)|^2 + |r(d+1-L)|^2 + |r(d+2-L)|^2 + \dots + |r(d+L-2-L)|^2 + |r(d+L-1-L)|^2$$

$$R(d+1) = |r(d+1-L)|^2 + |r(d+2-L)|^2 + |r(d+3-L)|^2 + \dots + |r(d+L-1-L)|^2 + |r(d+L-L)|^2$$

$$R(d) = |r(d-L)|^2 + |r(d+1-L)|^2 + |r(d+2-L)|^2 + \dots + |r(d-2)|^2 + |r(d-1)|^2$$

$$R(d+1) = |r(d+1-L)|^2 + |r(d+2-L)|^2 + |r(d+3-L)|^2 + \dots + |r(d-1)|^2 + |r(d)|^2$$

$$R(d+1) = R(d) - |r(d-L)|^2 + |r(d)|^2$$

### Формула 7 - Рекурсивное отображение энергии входного сигнала

Теперь можно представить структурную схему обнаружения преамбулы Шмидла и Кокса, для дальнейшего моделирования и анализа

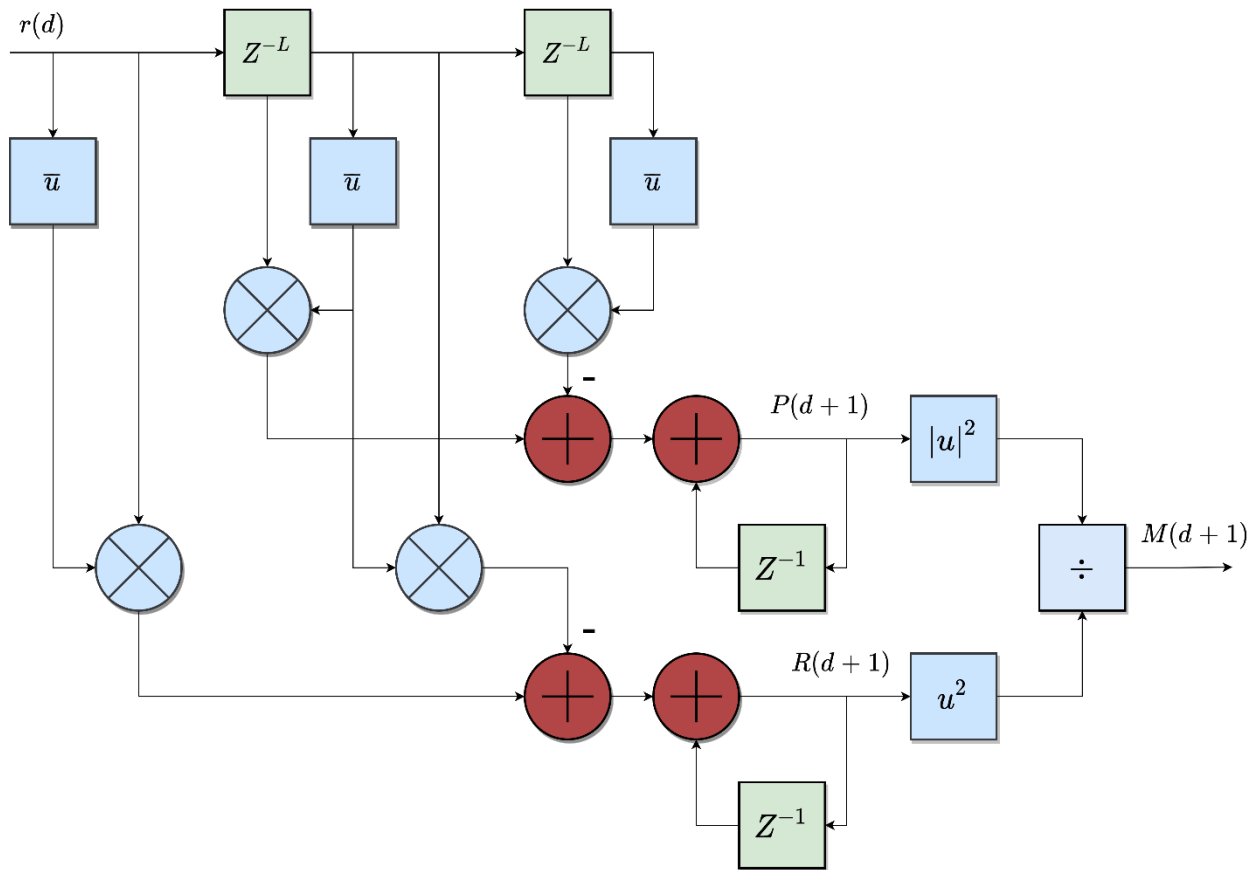


Рисунок 9 – Структурная схема расчета метрики Шмидла и Кокса

В результате получена оптимизированная в вычислительном смысле схема метрики Шмидла и Кокса, которая в дальнейшем будет использоваться для поиска момента времени, когда необходимо будет выводить метрику частотного смещения. В статье Шмидла и Кокса было приведено уравнение, которое выводит оценку частотного смещения в диапазоне  $|\Delta f| \leq \frac{N_{ff} + N_{CP}}{N_{ff}}$

$$\Delta f = \frac{N_{ff} + N_{CP}}{\pi N_{ff}} \arg \left[ \frac{\text{Im}(P(d))}{\text{Re}(P(d))} \right]$$

Формула 8 – Метрика частотного смещения Шмидла и Кокса

## ТЕХНОЛОГИИ БОРЬБЫ С МЕЖСИМВОЛЬНОЙ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ В СИСТЕМАХ OFDM

### Моделирование каналов связи

Одной из наиболее распространенных моделей каналов связи является модель TDL (Tapped Delay Line). Поскольку передатчик посылает символы в дискретные моменты времени, стробированный выход согласованного фильтра является также сигналом дискретного времени, то совокупность импульсных характеристик передатчика, канала связи и согласованного фильтра можно представить в виде эквивалентного трансверсального фильтра

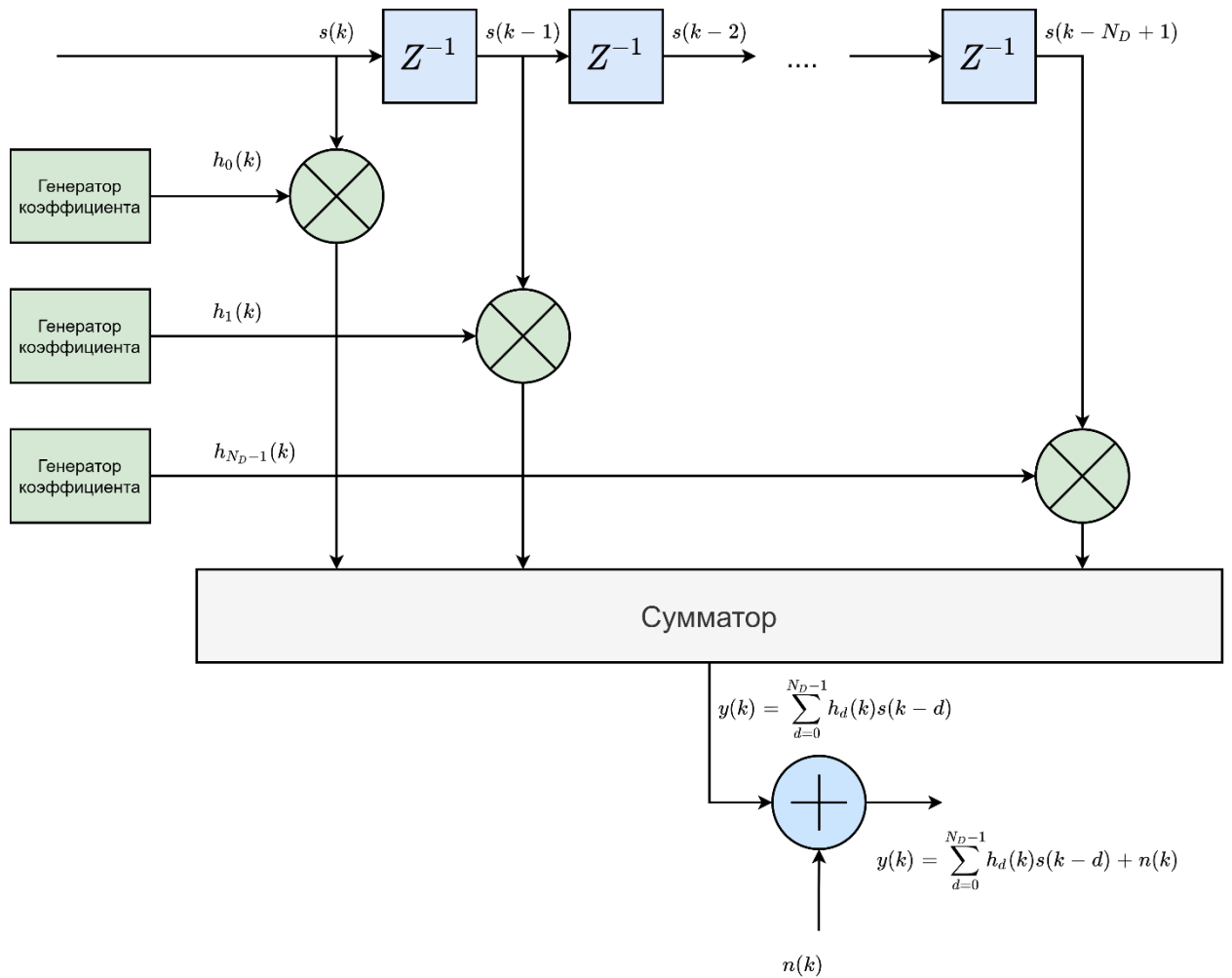


Рисунок 10 - TDL модель канала связи

В первую очередь отметим, что тип канала определяется коэффициентами и их статистикой. Предполагается, что коэффициенты статистически независимы и средняя мощность каждого из них равна единице. Коэффициенты могут быть сгенерированы согласно модели FWGN (Filtering White Gaussian Noise), что на русском означает фильтрация БГШ, которая также известна как модель Кларка Ганса или модели Джейка.

### Моделирование коэффициентов методом Кларка Ганса (FWGN)

Пусть амплитуды многолучевых компонент на приемной стороне не коррелируют. Согласно центральной предельной теореме, стохастически независимые случайные величины можно представить в виде гауссова распределения. Полагая, что между приемником и передатчиком прямая видимость отсутствует, энергетически доминирующего компонента нет. Таким образом МО компонент КБГШ равно нулю. Полагая, что IQ компоненты входного сигнала также являются стохастически независимы, следовательно коэффициент корреляции между синфазной и квадратурной составляющими равен нулю. Таким образом двумерная ФПВ многолучевых компонент входного сигнала можно представить в следующем виде:

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Уравнение 1 – ФПВ исследуемого КБГШ

Комплексная амплитуда и фаза соответствуют выражениям:  $A = \sqrt{x^2 + y^2}$   
 $\varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ . Таким образом, представим рассматриваемую ФПВ в полярных координатах. Определитель якобиана замены находится из следующего выражения, предварительно определяя  $x = A \cos \varphi$  и  $y = A \sin \varphi$ .

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial A} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial A} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -A \sin \varphi \\ \sin \varphi & A \cos \varphi \end{vmatrix} = A \cos^2 \varphi + A \sin^2 \varphi = A$$

Таким образом двумерная ФПВ КАБГШ в полярных координатах представляется в виде:

$$W(A, \varphi) = \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right\}$$

Уравнение 2 - Двумерная ФПВ амплитуды и фазы сигнала в каналах с релеевскими замираниями

Определим ФПВ амплитуд и фаз путем простейшего интегрирования

$$W(A) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right\} d\varphi = \frac{A}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right\} \quad - \text{ФПВ Рэлеяевского распределения}$$

$$W(\varphi) = \int_0^{\infty} \frac{A}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right\} dA = \frac{1}{2\pi} \quad - \text{ФПВ Равномерного распределения}$$

Таким образом, было доказано, что амплитуда сигнала в канале с релеевскими замираниями соответствует распределению Рэлея, а фаза распределена равномерно. Проведем моделирование и проиллюстрируем полученные гистограммы:

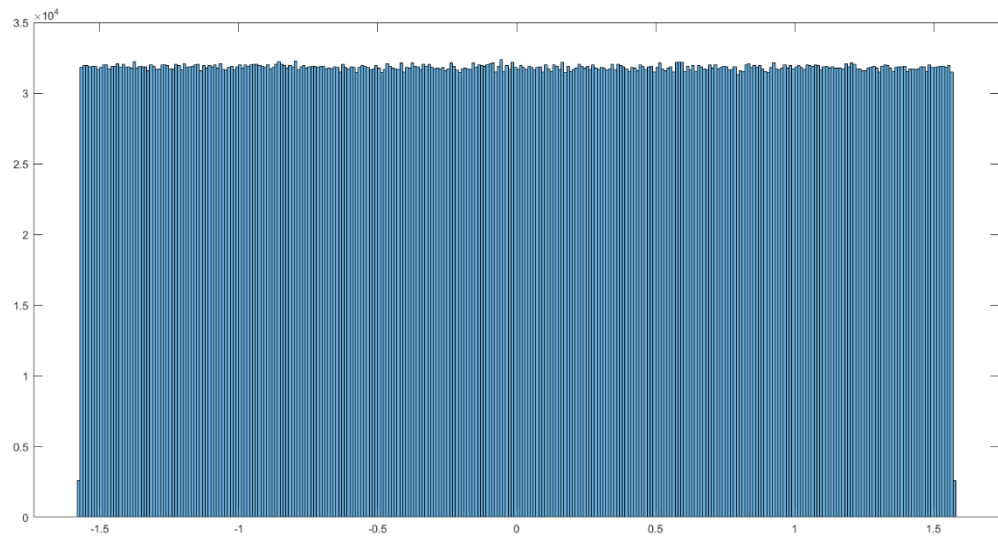


Figure 1 – Гистограмма фазы сигнала в многолучевом канале Рэлея

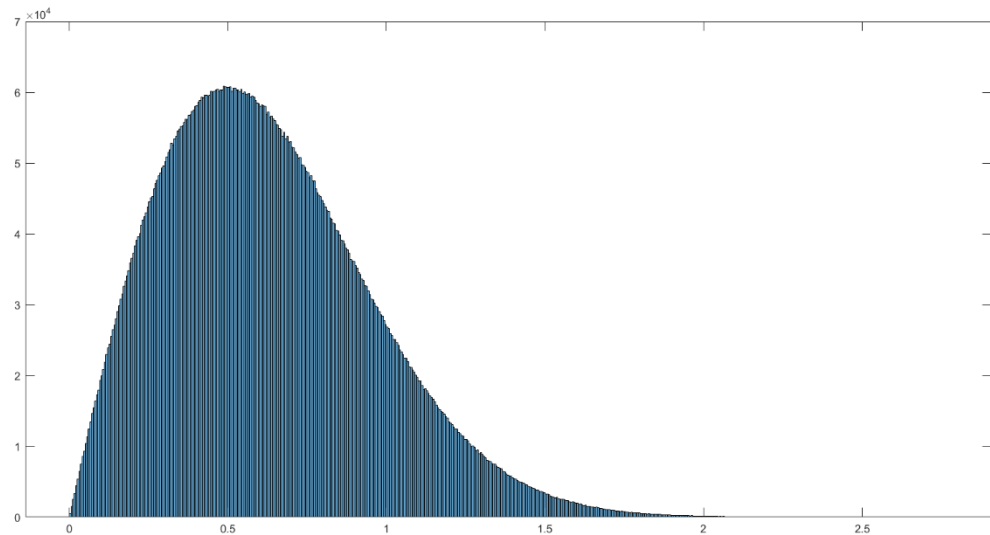


Figure 2 - Гистограмма амплитуды сигнала в многолучевом канале Рэлея

Влияние Доплера учитывается с применением фильтрации либо в частотной-либо во временной области. Спектр Доплера определяется в работе [12] (название в учебнике MIMO OFDM стр 21)

$$D(f) = \begin{cases} \frac{\sigma_H^2}{\pi f_d} \times \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_d}\right)^2}}, & |f| < f_d \\ 0, & |f| \geq f_d \end{cases}$$

Figure 3 - Спектральная плотность Доплера

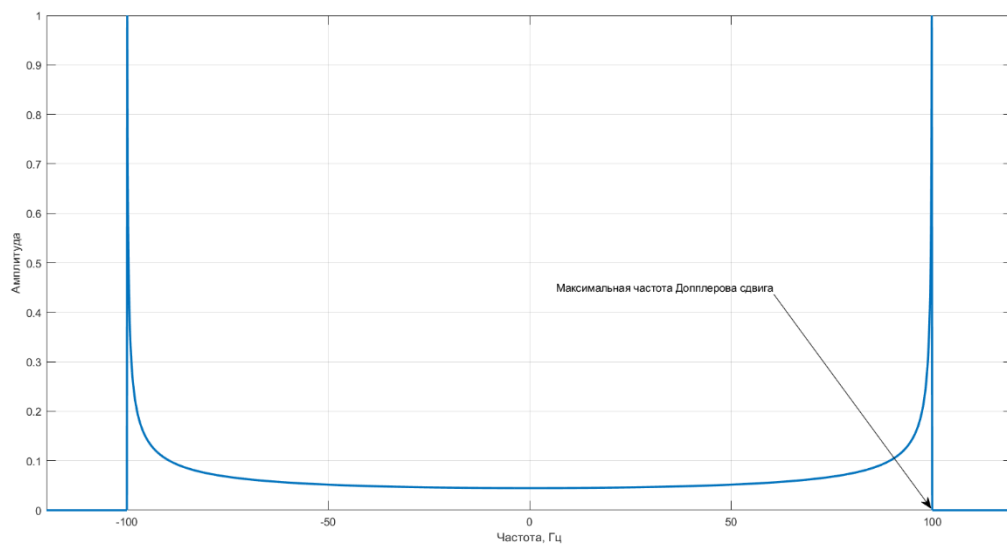


Рисунок 11 - Спектральная плотность Доплерова рассеяния при  $f_d = 100 \text{ Гц}$

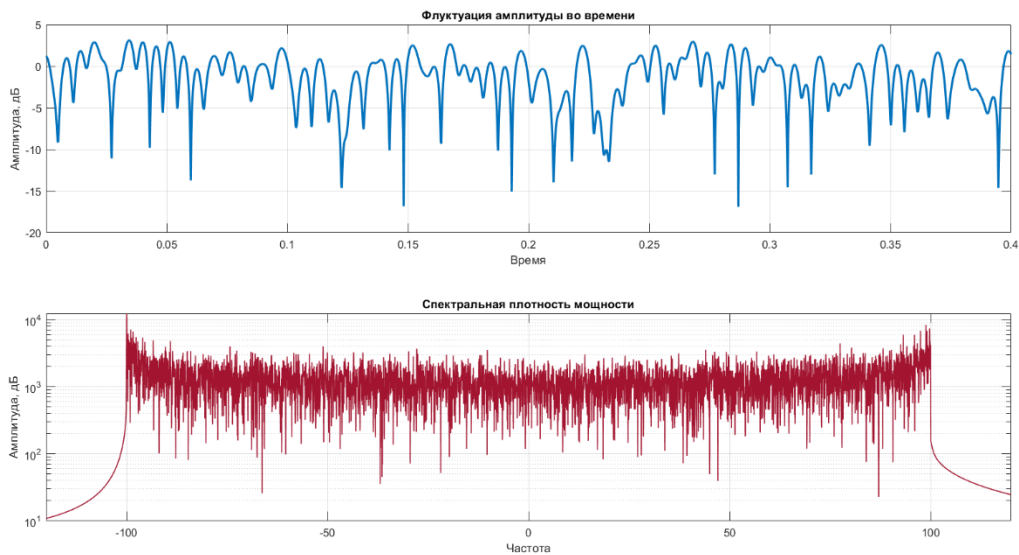


Рисунок 12 - Результаты моделирования FWGN

Результаты моделирования не требуют проверки гипотез на природу статистики полученных гистограмм:

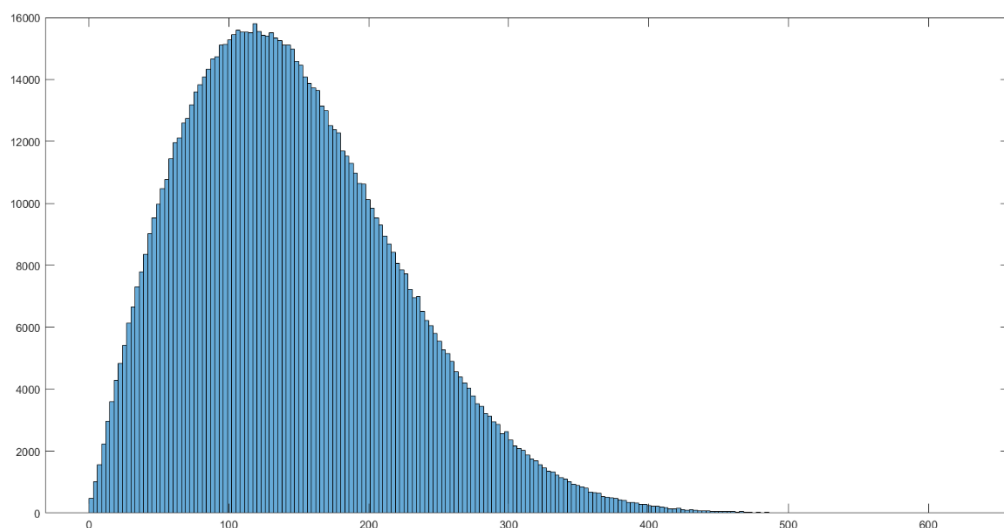


Рисунок 13 – Гистограмма отсчетов амплитуды у коэффициентов канала по методу Кларка и Ганса в частотной области

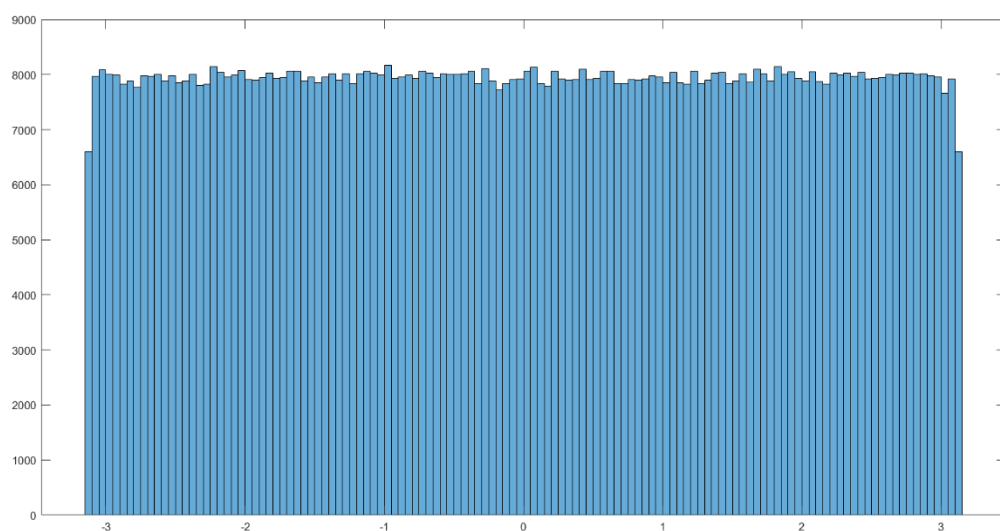


Рисунок 14 - Гистограмма отсчетов фазы у коэффициентов канала по методу Кларка и Ганса в частотной области

Для удобства также представим систему моделирования коэффициентов канала методом Кларка и Ганса во временной области. Для этого нужно найти Обратной преобразование Фурье спектральной плотности Доплера.

## Моделирование канала связи методом суммы синусоид

Метод Кларка и Ганса требует больших вычислительных затрат на организацию модели. Такие модели в практических микросхемах делаются достаточно редко из-за их большой стоимости. Например, в книге [ММО-OFDM], для моделирования 1 коэффициента канала, окно БПФ состоит из 16384 отсчетов, а окно из ОБПФ 1638400! Поэтому актуализируются вопросы минимизации вычислительных затрат для реализации модели. Метод суммы синусоид или модель Джейкса основана на простом генераторе группы гармоник, состоящих из  $N_0 = \frac{1}{2}(N/2 - 1)$  штук.

Представляя электромагнитное поле как суперпозицию волн:

$$h(t) = \operatorname{Re} \left\{ E_0 \sum_{n=1}^N c_n \exp \{ j (w_m t \cos \alpha_n + \phi_n) \} \times \exp \{ j w_c t \} \right\}$$

Где

$c_n$  - амплитуда n-ной компоненты

$w_m = 2\pi f_m$  - максимальный сдвиг Доплера в радианах

$\phi_n$  - начальная фаза n-ной компоненты

$w_c$  - несущая

$E_0$  - Амплитуда входного сигнала

Так как амплитуды входных сигналов распределены равномерно  $p(\alpha_n) = \frac{1}{2\pi}$  (что дало нам FWGN модель), то  $c_n^2 = p(\alpha_n) d\alpha$ . При конечном количестве лучей шаг волн  $d\alpha$  - фиксирован, и мы можем его представить в дискретном виде:  $d\alpha = \frac{2\pi}{N}$  где N - счетное количество углов. Таким образом  $c_n^2 = \frac{1}{2\pi} \times \frac{2\pi}{N} = \frac{1}{N} \rightarrow c_n = \frac{1}{\sqrt{N}}$  и  $a_n = \frac{2\pi n}{N}, n = 0, 1, \dots, N$ . Если мы положим  $\frac{N}{2}$  - четным, то при разложении формулы № мы можем увидеть наибольший вклад в спектре на частоте Доплера, как это показано на рисунке 11.

$$\operatorname{Re} \{ h(t) \} = \operatorname{Re} \left\{ E_0 \sum_{n=1}^N c_n \exp \{ j (w_m t \cos \alpha_n + \phi_n) \} \times \exp \{ j w_c t \} \right\}$$

$$\operatorname{Re} \{ h(t) \} = \frac{E_0}{\sqrt{N}} \operatorname{Re} \left\{ \exp \{ j w_c t \} \times \sum_{n=1}^N \exp \{ j (w_m t \cos \alpha_n + \phi_n) \} \right\}$$

$$\operatorname{Re} \{ h(t) \} = \frac{E_0}{\sqrt{N}} \operatorname{Re} \left\{ \exp \{ j w_c t \} \times \left[ \underbrace{\sum_{n=1}^{N/2-1} e^{j(w_m t \cos \alpha_n + \phi_n)}}_{\text{Правая полуплоскость}} + \underbrace{e^{-j(w_m t \cos \alpha_n + \phi_{-n})}}_{\text{Левая полуплоскость}} + \underbrace{e^{j(w_m t + \phi_N)}}_{\text{Правая полуплоскость}} + \underbrace{e^{-j(w_m t + \phi_{-N})}}_{\text{Левая полуплоскость}} \right] \right\}$$



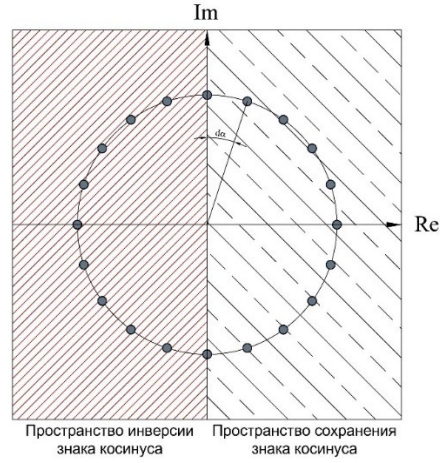


Рисунок 15 – Иллюстрация смены знака элемента  $\cos \alpha_n$  в выражении  $E(t)$  и начальных фаз комплексных амплитуд элементарных плоских волн моделируемого сигнала при их конечном количестве

Без потери общности, мы можем удалить компоненты с одинаковой частотой. Так как в правой и левой полуплоскости  $\cos \alpha_n$  имеет по паре одинаковых значений, то сумма будет простираться теперь до  $N_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{2} - 1 \right)$  с учетом коэффициента усиления  $\sqrt{2}$ . Таким образом результирующее уравнение, аппроксимирующее спектр Доплера конечным числом синусоид, имеет вид:

$$\operatorname{Re}\{h(t)\} = \sqrt{2} \frac{E_0}{\sqrt{N}} \operatorname{Re} \left\{ \exp\{jw_c t\} \times \left[ \sum_{n=1}^{N_0} e^{\{j(w_m t \cos \alpha_n + \phi_n)\}} + e^{\{-j(w_m t \cos \alpha_n + \phi_{-n})\}} + e^{\{j(w_m t + \phi_N)\}} + e^{\{-j(w_m t + \phi_{-N})\}} \right] \right\}$$

После некоторых громоздких преобразований, комплексную огибающую можно представить в виде:

$$h_I(t) = \frac{E_0}{\sqrt{2N_0 + 1}} \left( 2 \sum_{n=1}^{N_0} (\cos \phi_n \cos w_n t) + \sqrt{2} \cos \phi_N \cos w_d t \right)$$

$$h_Q(t) = \frac{E_0}{\sqrt{2N_0 + 1}} \left( 2 \sum_{n=1}^{N_0} (\sin \phi_n \cos w_n t) + \sqrt{2} \sin \phi_N \cos w_d t \right)$$

Где

$\phi_n = \frac{\pi n}{N_0 + 1}$   $n = 1, 2, 3, \dots, N_0$  - начальные фазы компонент, кроме последней, распределенные равномерно.

$w_n = 2\pi f_m \cos \alpha_n = 2\pi f_m \cos \left( \frac{2\pi n}{N} \right)$   $n = 1, 2, \dots, N_0$  - частоты компонент.

$N = 4N_0 + 2$  - Удвоенное количество частот.

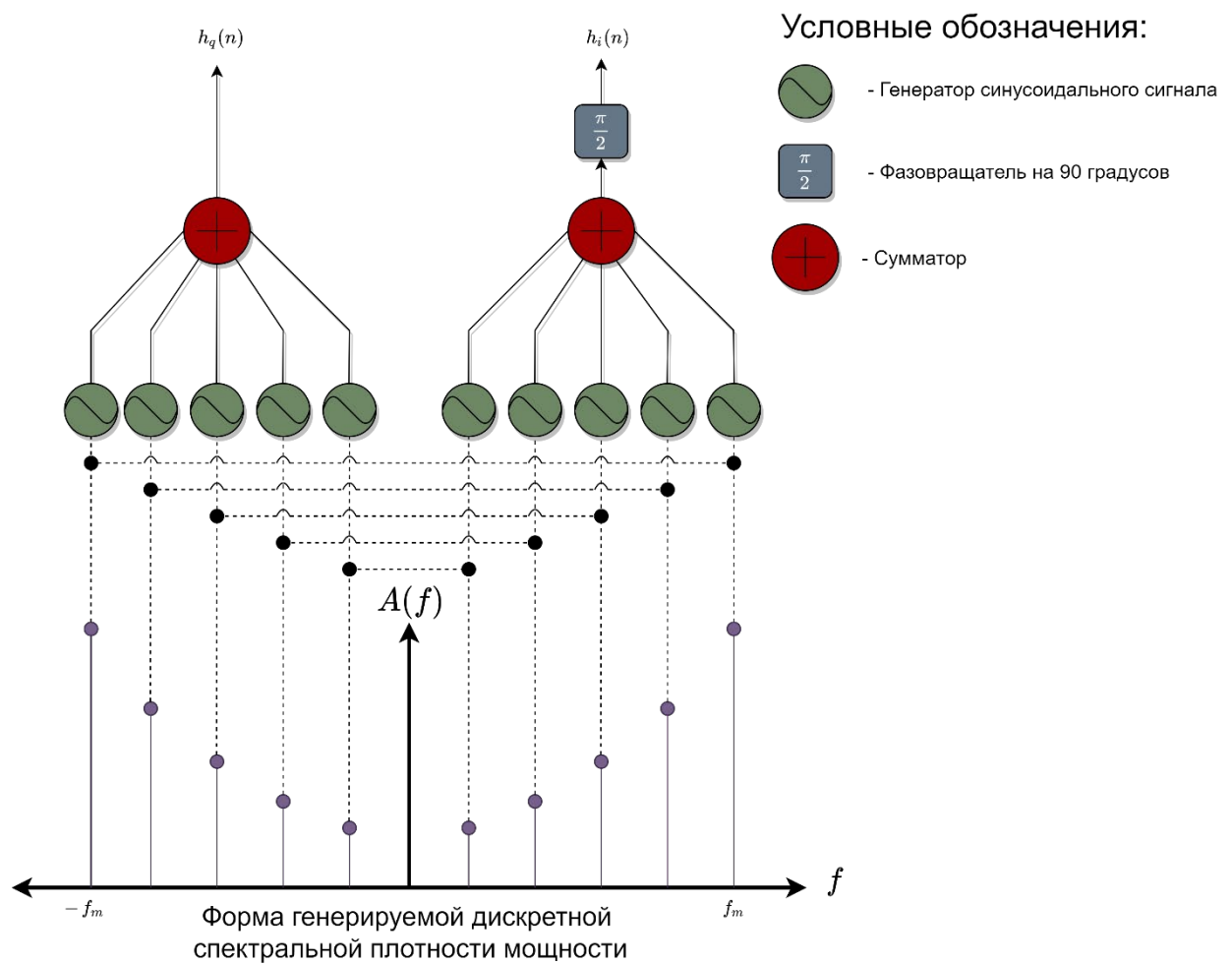


Рисунок 16 – Структурная схема частного случая генератора коэффициента канала, изменяющегося во времени, распределенного по Релею по методу Джейкса

Представим результаты моделирования при  $N_0 = 16$   $f_m = 100 \text{ Гц}$  и  $Fd = 5000 \text{ Гц}$

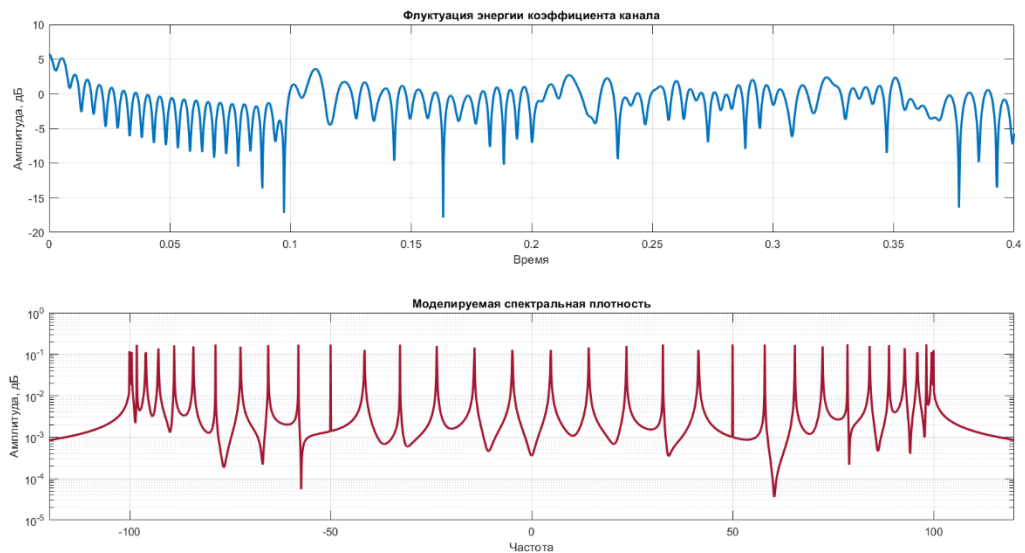


Рисунок 17 – Результаты моделирования коэффициентов канала методом Джейкса

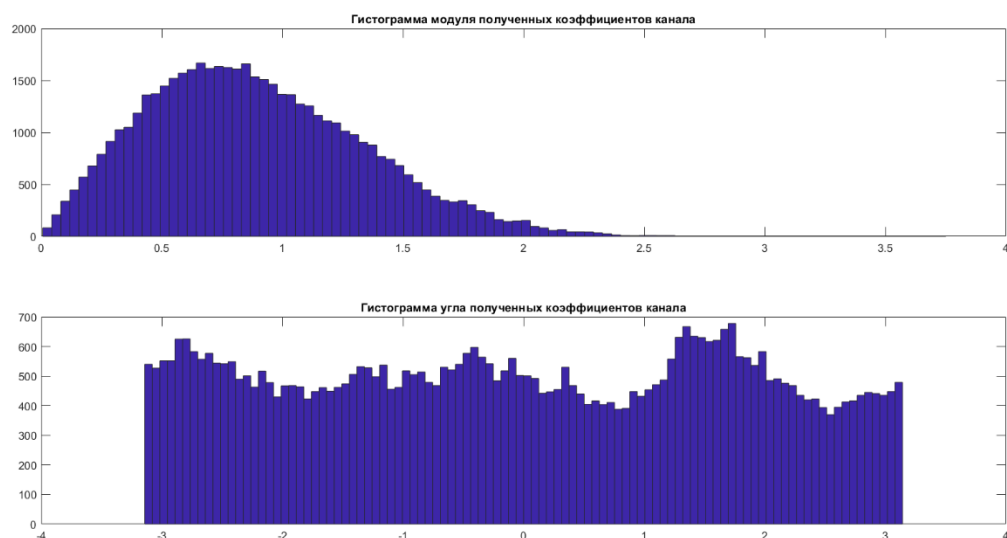


Рисунок 18 – Результаты статистического исследования модели Джейкса

Сравнивая модель FWGN и модель Джейкса, видим, что гистограммы FWGN являются более точными, нежели чем у модели, представленной в виде суммы синусоид. При всем преимуществе в терминах пониженной вычислительной сложности, для моделирования канала будем проводить с применением модели FWGN, поскольку моделирование – компьютерное.

**НЕОБХОДИМО РАСПИСАТЬ ФУНКЦИЮ ВЫВОДА ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СПЕКТРА ДОПЛЕРА И ПРЕДСТАВИТЬ АНАЛИЗ МЕТОДИКИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПО МЕТОДУ ДЖЕЙКСА**

## ЭКВАЛИЗАЦИЯ В СИСТЕМАХ СВЯЗИ OFDM

Как и в узкополосных системах в OFDM сигналах используются пилоты для подстройки коэффициентов эквалайзера для компенсации межсимвольной интерференции. Как уже показывалось ранее в OFDM используется циклический префикс, который компенсирует межсимвольную и соответственно интерподнесущую интерференцию. Тем не менее коэффициенты усиления каждой из поднесущих не равны единице, а определяются характером канала связи. Следовательно, необходима схема, которая выравнивает КУ, каждой из поднесущих. Но в первую очередь необходимо выбрать технику расположения пилотов. Наиболее популярные виды распределение пилотов в ресурсной сетке OFDM сигнала это:

1. Блочные
2. Гребенчатые
3. Решетчатые

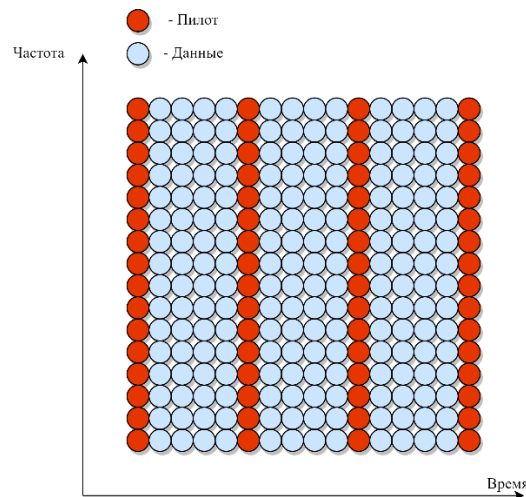


Рисунок 19 - Блочное распределение пилотов

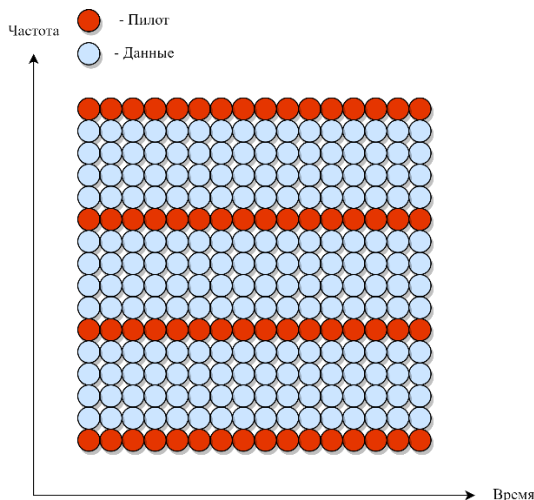


Рисунок 20 - Гребенчатое распределение пилотов

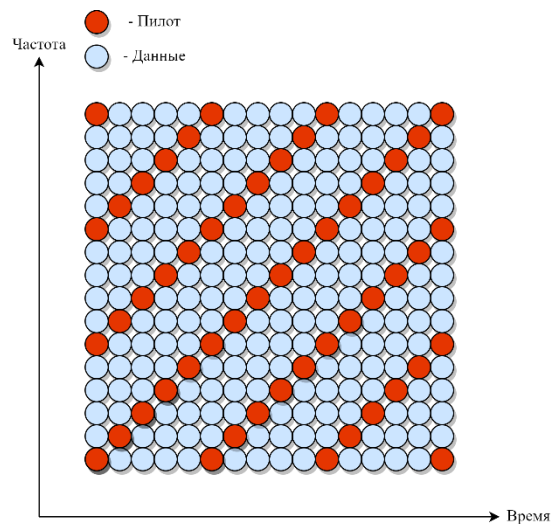


Рисунок 21 - Решетчатое распределение пилотов

Выбор распределения пилотов определяется каналом связи.

1. Блочное распределение пилотов основано на периодической вставке пилотного символа, как это делается в обычной системе связи. Такая конфигурация удобна тогда, когда канал частотно-селективен, но в первую очередь это актуально для каналов с медленными замираниями. Период возникновения пилотного символа быть меньше, чем время когерентности канала.
2. Гребенчатое расположение пилотов основано на выборе поднесущих для вставки пилотов. Желательно это организовать так, чтобы шаг между пилотами был одинаков. Такая конфигурация удобна для каналов с быстрыми частотно-неселективными замираниями. Шаг распределения пилотов по частоте должен быть меньше, чем полоса когерентности канала
3. Решетчатая структура отличается от блочной и гребенчатой, тем что пилоты распределены и по частоте, и по времени, так что это обеспечивает увеличение качества интерполяции в информационных отсчетах. Как в OFDM используется интерполяция, будет показано далее. Здесь уже необходимо обеспечить такую частоту и время расположения пилотов, чтобы они были меньше, чем полоса и время когерентности соответственно.

### **Эквализация методом наименьших квадратов**

В OFDM системах простейшим методом выравнивания является эстиматор, основанный на LS решениях (на русском также известен как МНК). Такой метод используется в технологии LTE.

Многоканальный выход ДПФ обуславливает представление тренировочных поднесущих в виде диагональной матриц:

$$X_{N \times N} = \begin{bmatrix} X[0] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X[1] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X[N-1] \end{bmatrix}$$

Рисунок 22 - Диагональная матрица тренировочных поднесущих OFDM с нулевым математическим ожиданием k-ого пилот тона и дисперсией  $\sigma_x^2$

Где  $X[k]$  - пилот-тон k-ой поднесущей.  $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$ .

После съема циклического префикса из поступающего символа, выход ДПФ можно представить в виде произведения матриц:

$$Y_N = \begin{bmatrix} Y[0] \\ Y[1] \\ \vdots \\ Y[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X[0] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X[1] & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & X[N-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H[0] \\ H[1] \\ \vdots \\ H[N-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z[0] \\ Z[1] \\ \vdots \\ Z[N-1] \end{bmatrix} = X_{N \times N} H_N + Z_N$$

Где  $H$  - Матрица коэффициентов канала связи

$Z$  - Матрица АБГШ с мощностью  $\sigma_z^2$  и нулевым МО.

Таким образом, имея условия к задаче вида  $X, Y, Z$  необходимо оценить коэффициенты канала  $\hat{H}$  по критерию наименьших квадратов  $J(\hat{H}) = \|Y - X\hat{H}\|^2$

$$J(\hat{H}_N) = \|Y_N - X_{N \times N} \hat{H}_N\|^2$$

$$J(\hat{H}_N) = (Y_N - X_{N \times N} \hat{H}_N)^H (Y_N - X_{N \times N} \hat{H}_N)$$

$$J(\hat{H}_N) = Y_N^H Y_N - Y_N^H X_{N \times N} \hat{H}_N - \hat{H}_N^H X_{N \times N}^H Y_N + \hat{H}_N^H X_{N \times N}^H X_{N \times N} \hat{H}_N$$

Очевидно, что  $J(\hat{H}_N)$  является параболой мерности ветвями вверх. Минимум находится методами производных.

$$\frac{\partial J(\hat{H}_N)}{\partial \hat{H}_N} = -Y_N^H X_{N \times N} - X_{N \times N}^H Y_N + 2X_{N \times N}^H X_{N \times N} \hat{H}_N$$

$$\frac{\partial J(\hat{H}_N)}{\partial \hat{H}_N} = -2X_{N \times N}^H Y_N + 2X_{N \times N}^H X_{N \times N} \hat{H}_N$$

Приравнявая производную к нулю определим ВК канала  $\hat{H}_N$

$$-2X_{N \times N}^H Y_N + 2X_{N \times N}^H X_{N \times N} \hat{H}_N = 0$$

$$X_{N \times N}^H X_{N \times N} \hat{H}_N = X_{N \times N}^H Y_N$$

$$X_{N \times N} \hat{H}_N = Y_N$$

$$\hat{H}_N = Y_N X_{N \times N}^{-1}$$

Таким образом оптимальное LS решение соответствует выражению

$$\hat{H}_{LS} = Y_N X_{N \times N}^{-1}$$

LS эквалайзер решает данную задачу на каждом шаге, а эквалайзер делит сигнал  $Y_N$  на ВК оценок  $\hat{H}_{LS}$ . Если пилот сигнал лежит в множестве BPSK символов, то операцию деления в  $Y_N X_{N \times N}^{-1}$  можно заменить операцией умножения, что уменьшает вычислительную сложность алгоритма.

Интерполяция в